



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

SAMUEL BASTOS BALBINO DE ALMEIDA

**FÉRMIONS DE DIRAC NÃO MASSIVOS EM (2+1) DIMENSÕES SOB
DEFORMAÇÕES COM SIMETRIA ANGULAR**

**FORTALEZA
2025**

SAMUEL BASTOS BALBINO DE ALMEIDA

FÉRMIONS DE DIRAC NÃO MASSIVOS EM (2+1) DIMENSÕES SOB DEFORMAÇÕES
COM SIMETRIA ANGULAR

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.
Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Coorientador: Prof. Dr. José Euclides da Silva

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A451f Almeida, Samuel Bastos Balbino de.

Férmions de Dirac não massivos em (2+1) dimensões sob deformações com simetria angular / Samuel Bastos Balbino de Almeida. – 2025.

84 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Coorientação: Prof. Dr. José Euclides da Silva.

1. Férmions. 2. Superfícies. 3. Deformações. 4. Elasticidade. 5. Teoria de Campos. I. Título.
CDD 530

SAMUEL BASTOS BALBINO DE ALMEIDA

FÉRMIONS DE DIRAC NÃO MASSIVOS EM (2+1) DIMENSÕES SOB DEFORMAÇÕES
COM SIMETRIA ANGULAR

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.
Área de Concentração: Física

Aprovada em: 05 de Agosto de 2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de
Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides da Silva (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

AGRADECIMENTOS

Existem aqui muitas pessoas dentre as quais merecem o meu agradecimento pela ajuda e apoio ao realizar este feito, contudo, em respeito ao impositivo conselho de meus pais, devo agradecer primeiramente a Deus pelo concedimento da saúde e perseverança para finalizar esta empreitada. E, é claro, pela exuberante natureza repleta de mistérios. Em seguida devo agradecer a eles próprios, Ana Lúcia e Messias, que me trouxeram a esta existência misteriosa e que possibilitaram o meu crescimento enquanto ser humano, me apoiando em toda esta caminhada até aqui, desde o primeiro momento ao adentrar uma escola até hoje e que, apesar das dificuldades da vida, se esforçaram para me garantir uma educação humana antes de tudo. E, como auxílio nesta formação, agradeço também a meus avós, vó Tita e vô Raimundo (*in memoriam*), pelo afeto a mim dirigido sobretudo na infância, e às minhas tias Vanda, Mirian e Wilma, bem como a meu avô Luiz (*in memoriam*). Também devo agradecimentos aos meus professores, desde aqueles do primeiro ano escolar aos meus atuais orientadores, professores Carlos Alberto e Euclides, que prontamente aceitaram me guiar nesta jornada acadêmica apesar de não me conhecerem enquanto aluno previamente. Sou grato por lidarem pacientemente com meus erros e com minha perturbadora ansiedade. Agradeço ainda aos professores Mairton Cavalcante e Wellington de Queiroz que, ainda na graduação, me iniciaram nas primeiras atividades de pesquisa. Em especial, também devo meus agradecimentos por ter no ensino médio conhecido o professor Samuel Vieira, este que me despertou em suas aulas o primeiro interesse por esta ciência; e também ao professor e amigo Marcos Cavalcante, que me acompanhou nas dificuldades iniciais neste rio de problemas complicados. E, é claro que não poderia esquecer, sou grato aos amigos, da famigerada sala 15, que cultivei ao longo destes dois anos e que compartilharam comigo todas as dificuldades inerentes a vida de uma aspirante a pesquisador. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Knowledge speaks, but wisdom listens."

(Jimi Hendrix)

RESUMO

O objetivo fundamental desta pesquisa é investigar os efeitos conjuntos de curvaturas e deformações (*strains*) de superfícies no comportamento de sistemas constituídos por campos e partículas fermiônicas confinados a estas. Materiais bidimensionais, como o grafeno, levam à uma descrição efetiva dos elétrons de condução em termos de férmiões de Dirac sem massa. Dessa forma, tomamos por motivação inicial este tipo de sistema. Na execução deste estudo estamos, em princípio, considerando duas diferentes abordagens. A primeira, e de principal interesse, visa utilizar técnicas de mecânica quântica relativística e geometria diferencial para realizar o acoplamento da equação de Dirac com a geometria da superfície curva, a fim de estudar os potenciais efetivos que surgem pela alteração da métrica, na qual introduzimos os termos de deformação via teoria da elasticidade. Deve-se ressaltar que, nesta abordagem, considera-se o limite contínuo, ou seja, tratamos o sistema como uma superfície contínua. Estamos nos baseando no fato de que nestes sistemas as partículas se comportam de forma análoga a corpos sujeitos a um campo gravitacional, ou seja, sentem as deformações no espaço ao qual estão confinadas de forma análoga ao acoplamento mínimo em gravitação. Dessa forma diferenciado-se da segunda abordagem que baseia-se em resultados utilizando o método de ligação forte (*Tight-Binding*), considerando a superfície uma rede cristalina.

Palavras-chave: férmiões; superfícies; deformações; elasticidade

ABSTRACT

The fundamental objective of this research is to investigate the joint effects of curvatures and deformations (*strains*) of surfaces on the behavior of systems made up of fermionic fields and particles confined to them. Two-dimensional materials such as graphene lead to an effective description of conduction electrons in terms of massless Dirac fermions. We are therefore initially motivated by this type of system. In carrying out this study, we are, in principle, considering two different approaches. The first, and of main interest, aims to use techniques of relativistic quantum mechanics and differential geometry to perform the coupling of the Dirac equation with the geometry of the curved surface, to study the effective potentials that arise by changing the metric, in which we introduce deformation terms via elasticity theory. It should be noted that, in this approach, we consider the limit to be continuous, i.e., we treat the system as a continuous surface. We are relying on the fact that in these systems the particles behave in a way analogous to bodies subject to a gravitational field, i.e., they feel the deformations in the space to which they are confined in a way analogous to the minimum coupling in gravitation. This differentiates it from the second approach, which is based on results using the tight-binding method, considering the surface to be a crystalline network.

Keywords: fermions; surfaces; deformations; elasticity

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Perturbação <i>out-plane</i>	18
Figura 2 – Perturbação <i>in-plane</i>	20
Figura 3 – Forças sobre uma região interna de volume $d\tau$. Em azul as forças internas. .	23
Figura 4 – A linha tracejada representa a <i>superficie neutra</i>	27
 Figura 5 – u_r obtido pelas aproximações.	38
Figura 6 – u_r obtido em (3.51).	38
Figura 7 – Variações de λ e μ em u_r	41
 Figura 8 – <i>Displacements</i> induzidos pela curvatura gaussiana.	43
Figura 9 – Variações na componente radial devido contribuições mecânicas	43
Figura 10 – Variações na componente angular devido contribuições mecânicas.	43
Figura 11 – Curvatura escalar variando os coeficientes de Lamé. Na linha contínua $h_0 = 1$, $b = 1$ e $\lambda = \mu = 1$. Utilizando $u_r^{(A)}$	46
 Figura 12 – Bases coordenadas e não coordenadas numa variedade geral.	47
Figura 13 – P é descrito localmente.	47
Figura 14 – Variações dos coeficientes de Lamé e dos parâmetros da gaussiana na conexão de spin. Aqui $\delta\lambda = \delta\mu = 2$ e $\delta b = 0.2$; foi fixado $h_0 = 1$. Utilizando $u_r^{(A)}$. .	51
Figura 15 – Variações do pseudo-campo magnético com os coeficientes de Lamé. Aqui tomou-se $h_0 = b = 1$. Utilizando $u_r^{(A)}$	51
Figura 16 – Sobreposição dos gráficos 15 e 11.	52
Figura 17 – Razão $\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{R}}$. Que verifica a proporcionalidade.	52
 Figura 18 – Variação de Γ_θ com os coeficientes de Lamé.	56
Figura 19 – Variação de Γ_θ com b . Na curva continua $h_0 = 1$	56
Figura 20 – Comportamento de $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$	57
Figura 21 – Variação das densidades com μ	59
Figura 22 – Variação das densidades com λ	59
Figura 23 – Densidades por holonomias variando λ	62
Figura 24 – Densidades por holonomias variando μ	62
Figura 25 – Densidades por holonomias variando a energia.	62
Figura 26 – Comportamento das fases geométricas.	62

Figura 27 – Comportamento de $V_2^{2(2)}$ sob variações de λ .	64
Figura 28 – Comportamento de $V_2^{2(2)}$ sob variações de μ .	64
Figura 29 – Densidades para $m = \frac{1}{2}$.	65
Figura 30 – Densidades para $m = -\frac{1}{2}$.	65
Figura 31 – Comportamento de Γ_θ com $u_r^{(A)}$.	65
Figura 32 – Potencial $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$ com $m = \frac{1}{2}$.	66
Figura 33 – Potencial $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$ com $m = -\frac{1}{2}$.	66
Figura 34 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de b , com $m = \frac{1}{2}$. Aqui $\lambda = \mu = h_0 = 1$.	66
Figura 35 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de b , com $m = -\frac{1}{2}$. Aqui $\lambda = \mu = h_0 = 1$.	66
Figura 36 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de λ , com $m = \frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.	67
Figura 37 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de μ , com $m = \frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.	67
Figura 38 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de λ , com $m = -\frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.	67
Figura 39 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de μ , com $m = -\frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.	67
Figura 40 – Densidades variando a energia $m = \frac{1}{2}$.	67
Figura 41 – Densidades variando a energia $m = -\frac{1}{2}$.	67
Figura 42 – Fases geométricas com $u_r^{(A)}$.	68
Figura 43 – Fases no regime assintótico para $\mu = \lambda = 1$. Para $r \rightarrow 0$ os valor convergem em torno de 4.	70
Figura 44 – Comportamento de Γ_θ no regime assintótico.	70
Figura 45 – Comportamento assintótico das funções densidades. Na linha contínua temos soluções com $m > 0$ e nas tracejadas com $m < 0$. Aqui $A_3 = A_4 = 1$.	70
Figura 46 – Tomando $A_3 = 0$ as funções para $m < 0$ conseguem ser normalizadas, retirando-se a origem do domínio. Para $m > 0$ as funções continuam normalizáveis	70
Figura 47 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos com $m = 1/2$, λ variando, $\mu = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.	74
Figura 48 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos, $m = 1/2$, μ variando, $\lambda = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.	74
Figura 49 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos com $m = -1/2$, λ variando, $\mu = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.	74
Figura 50 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos, $m = -1/2$, μ variando, $\lambda = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.	74

Figura 51 – Níveis de Landau com $u_r^{(A)}$, $m = 1/2$, $\lambda = 7$, $\mu = 1$, $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.	75
Figura 52 – Níveis de Landau com $u_r^{(A)}$, $m = -1/2$, $\lambda = 7$, $\mu = 1$, $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$,	
$b = 0.8$.	75
Figura 53 – Potenciais com campo externo para $m = -1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.	75
Figura 54 – Potenciais com campo externo para $m = 1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.	75
Figura 55 – Níveis de Landau para $m = -1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.	76
Figura 56 – Níveis de Landau para $m = 1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.	76
Figura 57 – Cilindro, de altura l , com perturbações periódicas ao longo do eixo z .	80

LISTA DE SÍMBOLOS

η_{ab}	Métrica do espaço de flat
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
ds^2	Elemento de Linha
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\delta_{\mu\nu}^{(c)}$	Métrica flat em coordenadas cilíndricas
$\varepsilon_{\mu\nu}$	Símbolo de Levi-Civita bidimensional
$\{a, b, \dots\}$	Índices no espaço flat
$\{i, j, \dots\}$	Índices espaciais no espaço curvo
$\{\mu, \nu, \dots\}$	Índices no espaço curvo
m_e	Massa dos férmons
m	Número quântico de spin
\hbar	Constante de Plank reduzida
E	Energia
σ	<i>Stress</i>
$u_{\mu\nu}$	Tensor de <i>strain</i>
σ_{ij}	Tensor de <i>stress</i>
χ	Função <i>stress</i>
\mathcal{S}	Módulo de Young
\mathcal{M}	<i>Stress</i> uniaxial
M_{ij}	Tensor momento angular
C_{ijkl}	Tensor de rigidez
ν	Razão de Poisson
κ	Módulo de compressão
F_i	Componente de força
\mathfrak{F}	Força por volume
V_p	Velocidade de <i>p-wave</i>

$\mathcal{E}^{(1,2)}$	Energias elásticas
u_i	Deslocamentos na superfície
h	Deslocamentos fora da superfície
\hat{e}_a	Bases coordenadas
\hat{e}_ν	Bases não-coordenadas
e_a^ν	Vielbeins
γ^a, γ^μ	Matrizes de Dirac
σ^i	Matrizes de Pauli
Ω_μ	Conexão de spin
$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$	Símbolos de Christoffel
v_F	Velocidade de Fermi
\mathcal{V}_F	Velocidade de Fermi efetiva
\mathcal{H}	Hamiltoniano de Dirac
Γ_θ	Potenciais geométricos
$\zeta(r)$	Fases geométricas
$G(\bar{r})$	Fases geométricas sob mudança de variável
α, β, b	Parâmetros geométrico-mecânicos
μ, λ	Coeficientes de Lamé
$\Psi_{1,2}, \chi_{1,2}$	Funções de onda
\bar{r}	Mudança de coordenada
A_i	Potencial vetor do campo de gauge
\mathcal{A}_i	Potencial vetor do pseudo-campo
\mathcal{B}	Pseudo-campo
$R_{\mu\nu\sigma}^\rho$	Tensor de Riemann
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
\mathcal{R}	Curvatura escalar
\mathcal{K}	Curvatura gaussiana
$U_{1,2}$	Potenciais efetivos

$V_{1,2}^{(1,2,3)2}$	Potenciais quadráticos efetivos
W_2^2	Potenciais quadráticos supersimétricos
$\mathcal{V}_{1,2}^2$	Potenciais quadráticos efetivos com campo externo
$Y_{1,2}^2$	Contribuições de campo externo
\mathcal{L}	Operador níveis de Landau
J_ν	Funções de Bessel de primeira espécie
Y_ν	Funções de Bessel de segunda espécie
I_ν	Funções de Bessel de primeira espécie modificadas
K_ν	Funções de Bessel de segunda espécie modificadas
Γ	Função fatorial
{ , }	Comutador
{ , }	Anticomutador

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	ESPECIFICANDO O PROBLEMA	17
3	SOBRE A TEORIA DA ELASTICIDADE	18
3.1	Relação entre as deformações e a métrica	18
3.2	Tensor de <i>stress</i> e lei de Hooke generalizada	21
3.3	Descrição elástica de superfícies curvas	26
4	DESENVOLVENDO MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO	29
4.1	Utilizando coordenadas cilíndricas	29
4.2	Relação entre os deslocamentos <i>out-plane</i> e <i>in-plane</i>	32
4.3	Determinação da constante β	40
5	GEOMETRIA DA DEFORMAÇÃO GAUSSIANA	42
5.1	Construindo a métrica com $u_r^{(A)}$	42
5.2	Curvatura	44
6	EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS CURVOS	47
6.1	Formalismo de Tetradas	47
6.2	Conexão de spin e abordagens efetivas	49
7	DINÂMICA FERMIÔNICA E SOLUÇÕES POR HOLONOMIAS: SEM INTERAÇÃO EXTERNA	54
7.1	Primeira abordagem	54
7.2	Segunda abordagem	63
7.3	Terceira abordagem	65
7.4	Relação entre os casos	70
8	INTERAÇÃO COM MAGNÉTICO EXTERNO	73
9	POTENCIAIS SUPERSIMÉTRICOS	77
10	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
11	PERSPECTIVAS FUTURAS	80
	REFERÊNCIAS	82

1 INTRODUÇÃO

O objetivo fundamental desta pesquisa consistiu em investigar as implicações conjuntas de curvaturas e *strains* no comportamento de férmons de Dirac, não massivos, se propagando em uma superfície sujeita a uma deformação dotada de simetria angular. A principal motivação desta pesquisa encontra-se no estudo de sistemas bidimensionais, visto que estes fornecem um ambiente excepcional para estudar física relativística, com conexões diretas com gravitação e topologia. A presença de curvatura, acoplamentos spin-órbita (Silva *et al.*, 2024) e efeitos anômalos fazem desses sistemas um ambiente rico para investigar fenômenos que, tradicionalmente, seriam associados a teorias fundamentais de partículas e campos. Veremos que uma vez que o sistema bidimensional não é estritamente plano, mas possui curvatura, a descrição relativística se torna bastante rica. A curvatura modifica a conexão de spin e, portanto, afeta a equação de Dirac via um termo adicional associado à conexão de spin. No grafeno deformado, por exemplo, essa conexão de spin pode ser interpretada como um campo efetivo de gauge, de forma que podemos procurar por efeitos como pseudocampos magnéticos e níveis de Landau sem campo magnético real.

De fato, inicialmente, uma boa forma de fundamentar experimentalmente este estudo é tratarmos do caso do grafeno, visto que dessa forma podemos abordar os elétrons como sendo efetivamente partículas sem massa. Existem na literatura duas principais formas de realizar esta análise, e que explicam as modificações, induzidas pelas deformações, nas propriedades eletrônicas (Arias *et al.*, 2015) da superfície. Grande parte dos estudos vêm sendo realizados sob uma perspectiva mais associada a métodos de física do estado sólido (Suzuura e Ando, 2002; Manes, 2007; Guinea *et al.*, 2008), como o TB (Villalba e Maggiolo, 2001; Bena e Montambaux, 2009; Pereira *et al.*, 2009; Nikiforov *et al.*, 2014), tratando a superfície como uma rede cristalina, esta abordagem baseia-se no limite contínuo de baixa energia de um modelo de TB que leva em consideração os deslocamentos dos átomos constituintes da superfície deformada. A presente pesquisa concentrou-se em realizar estas análises sob uma segunda perspectiva, que é mais próxima de TQC. Sendo assim, de forma mais adequada a um cenário inicial de estudos, foram escolhidos para efetuar as análises preliminares, modelos baseados em TQC em espaços curvos (Weinberg, 2013; Birrell e Davies, 1984), mais precisamente, mecânica quântica relativística em superfícies curvas, visando futuramente estender-se ao tratamento quântico de campos. Para nos situar neste cenário é necessário que saibamos de antemão que é um fenômeno conhecido da comunidade acadêmica que, quando sob deformações, materiais bidimensionais, como o grafeno,

sofrem alterações em suas propriedades eletrônicas de tal forma que ocorrem modificações no hamiltoniano das partículas propagantes, a saber, surgem potenciais efetivos, bem como campos de calibre que se assemelham a campos magnéticos e elétricos. Em geral, na segunda abordagem inicia-se com a equação de Dirac efetiva para uma partícula confinada à superfície (Semenoff, 1984) e, ao considerar uma métrica curva, obtêm-se os campos de calibre induzidos pela geometria (Juan *et al.*, 2007). Esta teoria foi a primeira a prever uma velocidade de Fermi dependente do espaço, que foi confirmada experimentalmente (Juan *et al.*, 2012). A fim de direcionar o leitor de forma gradual ao centro deste estudo, devemos mencionar previamente a noção de que temos duas deformações possíveis a se executarem sobre uma dada superfície, a primeira é comumente denominada *out-plane* e consiste essencialmente de perturbações que estendem perpendicularmente à configuração inicial da superfície, o segundo tipo é usualmente referido como deformações *in-plane* e diz respeito a contribuições perturbativas que ocorrem tangencialmente ao plano da superfície. Também é comum rotular estas respectivas deformações por extrínsecas e intrínsecas. De forma mais clara, as extrínsecas dizem respeito, por exemplo, a ondulações. Ao passo que as intrínsecas são bem exemplificadas por cisalhamentos. A ideia central desta pesquisa contempla como incorporar estes dois tipos de deformações na dinâmica dos férmions confinados a uma superfície, onde a associação entre estas é feita utilizando conceitos de teoria da elasticidade linear.

As análises realizadas no decorrer desta pesquisa tomam por base inicial três trabalhos. No primeiro (Juan *et al.*, 2013) os autores, com o objetivo de verificar a invariância de gauge de um dos campos induzidos, utilizam resultados de TB, juntamente com o chamado tensor de *strain* (u_{ij}), para inserir as informações de deformações no hamiltoniano, contudo sem fazer menção direta a métrica da superfície, isto é, eles linearizam o hamiltoniano em termos do tensor de *strain*. O fazem de maneira geral, sem especificar deformações em particular ou analisar os efeitos destas. O segundo trabalho (Arias *et al.*, 2015) fornece uma abordagem de geometria diferencial para o tratamento de partículas relativísticas em superfícies curvas. De forma que permite-nos construir modelos mais próximos dos formalismos conhecidos de TQC. Contudo, este também se detém na generalidade do formalismo e não realiza uma análise específica devidamente detalhada. Há também um terceiro trabalho (Juan *et al.*, 2007) que realiza um estudo, mais minucioso, de uma folha de grafeno sujeita a um deformação gaussiana, contudo sem levar em consideração os efeitos das deformações *in-plane*. Neste sentido, uma vez que queremos estudar o efeito deste tipo de deformação, escolhemos atacar inicialmente uma versão mais geral deste problema

introduzindo o efeito de ambos os tipos de deformações. Para justificar a consideração do caso não massivo devemos mencionar que a principal motivação é que sabe-se da realização de medidas para estudar o efeito Hall quântico (Novoselov *et al.*, 2005), tais que estas indicaram a presença de elétrons se comportando como partículas relativísticas em estruturas de banda lineares ($E \sim p$) no grafeno. Devido a estas já bem determinadas propriedades, é comum tratar os elétrons no grafeno efetivamente sem massa. Ocorre que na interseção das bandas formam-se o que denomina-se por *pontos de Dirac*, os quais são os pontos de identificação da relação de dispersão linear. Este fato produz a justificativa para utilização de uma abordagem relativística efetiva, visto que é possível considerar que, sob estes pontos, o elétron se comporta efetivamente como uma partícula sem massa. Ou seja, uma vez que, a equação de Dirac é dada por

$$\hbar(i\gamma^a\partial_a + m_e c)\Psi = 0, \quad (1.1)$$

onde as matrizes γ^a satisfazem a álgebra de Clifford $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$. Como a relação de dispersão para uma partícula relativística é dada por

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}, \quad (1.2)$$

então $E = cp \Rightarrow m_e = 0$ e a equação de Dirac, tomando aqui $a = 0, 1, 2$; passa a ser simplesmente

$$\hbar(i\gamma^a\partial_a)\Psi = 0. \quad (1.3)$$

Isto motiva uma gama de trabalhos em torno da equação de Dirac adaptada efetivamente para estes casos, em particular, considerando as mais variadas geometrias (Furtado *et al.*, 2008; Atanasov e Saxena, 2015; Watanabe *et al.*, 2015; Atanasov e Saxena, 2010; Flouris *et al.*, 2022; Monteiro *et al.*, 2023; Yeşiltaş, 2018). Em especial, para considerar o ambiente de superfícies curvas precisamos adequar a descrição a tais geometrias e, neste contexto, sabemos que usualmente um férmion de Dirac interage com um campo magnético via o acoplamento mínimo, que traduz-se ao trocarmos a derivada usual pela derivada covariante $\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, sendo A_μ o potencial vetor com o qual a partícula irá interagir. Veremos que potenciais efetivos serão introduzidos de forma similar através da conexão de spin. Além disso, deve-se mencionar que, no contexto de abordagens efetivas, considera-se que a velocidade de Fermi v_f (cerca de $3 \cdot 10^6 m/s$) executa o papel análogo à velocidade da luz. Para além desta motivação inicial, o tratamento matemático na sequência deste texto aplica-se não somente ao grafeno mas a quaisquer sistemas de férmions não massivos confinados a uma superfície sujeita a deformações. Parte dos resultados que serão apresentados encontra-se, na presente data de defesa, pré-publicados em (Almeida *et al.*, 2025).

2 ESPECIFICANDO O PROBLEMA

Queremos, portanto, estudar elétrons se propagando em espaços de $(2 + 1)$ dimensões, em princípio, como mencionado, incluindo as contribuições dos dois tipos possíveis de deformações. Para realizar este objetivo seguimos basicamente os seguintes passos: parametrizar uma superfície e uma deformação extrínseca; via teoria da elasticidade relacionar as deformações com a métrica global; introduzir estas deformações na equação de Dirac curva. Cada um destes passos subdivide-se em procedimentos físicos e matemáticos que serão tratados no decorrer desta dissertação. Em particular, visando uma aproximação com trabalhos prévios na literatura partimos do trabalho *Charge inhomogeneities due to smooth ripples in graphene sheets* (Juan *et al.*, 2007) onde os autores analisam um férnion de Dirac confinado a uma folha sujeita a uma deformação parametrizada por $z(r) = \exp(-\frac{r^2}{b^2})$, esta gera uma elemento de linha da forma

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 f(r))dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (2.1)$$

sendo $f(r)$ uma função que especificaremos posteriormente, e que depende das derivadas da parametrização $z(r)$. O ponto mais relevante para iniciarmos é notar que temos simetria angular, o que será útil para simplificação de alguns passos algébricos, visto que nos permite caracterizar a deformação como localizada e realizar algumas aproximações. Outra condição relevante a se apontar é que a parametrização é, aparentemente, puramente geométrica, de tal forma que quaisquer informações da estrutura da superfície certamente devem estar presentes nas constantes, como α por exemplo, de sorte que surge naturalmente o questionamento de como incluir explicitamente essas contribuições. Para além disso, do ponto de vista dos dois tipos de deformações que queremos incluir, a expressão (2.1) é caracterizada apenas pelas perturbações extrínsecas, de forma que as contribuições intrínsecas explícitas são desprezadas. Introduzir estas contribuições é parte do objetivo desta dissertação, em particular utilizando teoria da elasticidade, assim construindo um método paralelo aos modelos discretos de estado sólido para inclusão de deformações que dependem explicitamente da estrutura do material. Portanto, o problema específico passa por construir uma métrica que leve ambos os tipos de deformações em consideração, e então construir a equação de Dirac sobre esta métrica a fim de se obter como as disformidades da superfície influenciam na dinâmica dos férnions que vivem nesta estrutura $(2 + 1)$ perturbada extrinsecamente pela gaussiana. Devido a presença apenas de dependências radiais, o procedimento desenvolvido é válido para quaisquer sistemas bidimensionais dotados de simetria angular.

3 SOBRE A TEORIA DA ELASTICIDADE

3.1 Relação entre as deformações e a métrica

Da teoria da elasticidade, a quantidade mais relevante para o nosso modelo é o chamado tensor de *strain*. Este tensor mede a variação infinitesimal do campo de deslocamentos \vec{u} em diferentes direções. Campo este que possui origem mecânica em deformações elásticas. O tensor é definido usualmente por

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) . \quad (3.1)$$

Nesta definição (Little e William, 2012), mais geral, utiliza-se as noções de pré-gradiente $\vec{\nabla} \vec{u}$ e pós-gradiente $\vec{u} \vec{\nabla}$, que são definidos respectivamente por

$$\nabla \vec{u} = (\partial_i u_j) \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \quad (3.2)$$

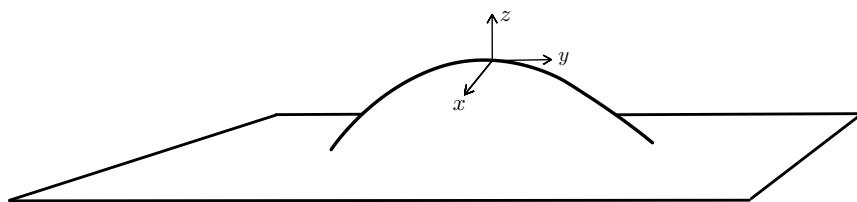
$$\vec{u} \vec{\nabla} = (\partial_j u_i) \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j . \quad (3.3)$$

Uma vez que temos o gradiente de um vetor, segue consequentemente que o tensor de *strain* é de segunda ordem, de forma que o pós-gradiente é simplesmente a matriz transposta ao pré-gradiente. De forma mais prática vamos trabalhar diretamente com as componentes que ficam dadas por

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad ; (i = 1, 2, 3) . \quad (3.4)$$

A fim de fazer uma distinção rigorosa entre as deformações *out* e *in-plane* vamos considerar uma superfície inicialmente plana, definida no plano xy e então realizar uma perturbação na direção z .

Figura 1 – Perturbação *out-plane*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que a métrica será dada, em coordenadas cartesianas, por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, podemos pensar nas perturbações *out-plane* através da imersão da superfície no \mathbb{R}^3 , de forma que a deformação pode ser parametrizada através de uma função $z = z(x, y)$, ou seja

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (3.5)$$

dessa forma a métrica da superfície passa a ser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2, \quad (3.6)$$

desenvolvendo, e escrevendo de forma compacta, podemos definir a métrica deformada por $z(x, y)$ como

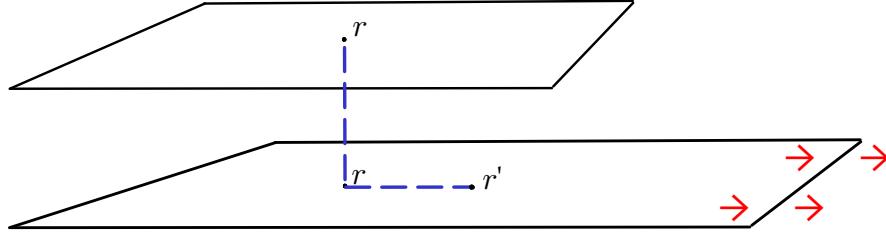
$$g_{ij}^{(out)} = \delta_{ij} + \partial_i z \partial_j z \quad ; (i = 1, 2, 3). \quad (3.7)$$

Deve-se mencionar que no decorrer deste texto toma-se por convenção $i = 1, 2, 3$ associados ás coordenadas cartesianas x, y e z . Notemos que $g_{ij}^{(out)}$ leva em consideração deformações, a priori, de origem puramente geométrica. Este tipo de métrica foi utilizado, por exemplo, em (Juan *et al.*, 2007), para mostrar como as perturbações $z(x, y)$ afetam as densidades de estados numa folha de grafeno. Contudo, levando em consideração o ponto de vista de teoria da elasticidade (Landau *et al.*, 2020; Little e William, 2012), quaisquer deformações na superfície devem induzir deformações de origem mecânica no material, e o inverso também é verdade. Este outro tipo de perturbação é denominado *in-plane*. Dessa maneira o próximo passo é sabermos escrever a métrica que leva ambos os tipos de deformações. A forma mais clara de introduzirmos as deformações de origem mecânica é pensarmos inicialmente num ponto qualquer localizado em \vec{r} sobre uma folha plana, em seguida a folha é esticada, ou comprimida, na direção paralela a superfície, de forma que o ponto passa a localizar-se em \vec{r}' , definindo assim um deslocamento de \vec{u} em relação a configuração inicial, ou seja

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} = r^i \hat{e}_i + u^j \hat{e}_j. \quad (3.8)$$

É crucial percebemos que \vec{u} é um deslocamento de origem elástica, isto é, a superfície possui propriedades mecânicas e, portanto, quando sujeita a uma força \vec{f}_0 constante, na direção paralela ao plano, a quantidade $|\vec{u}|$ será maior ou menor dependendo destas propriedades, que estão associadas á natureza do material constituinte da superfície.

Figura 2 – Perturbação *in-plane*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A métrica associada a este tipo de deformação pode ser diretamente obtida pela definição geral $g_{ij}^{(in)} = \partial_i \vec{r}' \cdot \partial_j \vec{r}'$. Ao trabalhar com os deslocamentos u_i deve-se garantir a consistência da ordem desejada da teoria, neste estudo foi utilizado a chamada teoria linear da elasticidade, dessa forma desprezamos contribuições de segunda ordem, ou seja

$$g_{ij}^{(in)} = g_{ij} + \partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i \vec{u} \cdot \partial_j \vec{u} \quad (3.9)$$

$$\therefore g_{ij}^{(in)} \approx g_{ij} + \partial_i u_j + \partial_j u_i. \quad (3.10)$$

A fim de construir então uma definição de métrica que leve em consideração os dois tipos de deformações, consideramos a métrica de fundo g_{ij} como sendo dada por (3.7), dessa forma ficamos com

$$g'_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i z \partial_j z + \partial_i u_j + \partial_j u_i, \quad (3.11)$$

ou de forma mais compacta

$$g'_{ij} = \delta_{ij} + 2u_{ij}, \quad (3.12)$$

onde é definido

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + 2\partial_i z \partial_j z) \quad ; (i=1,2). \quad (3.13)$$

é o chamado *strain* de Von-Kármán (Landau *et al.*, 2020). Nota-se imediatamente que, diferentemente de (3.4), os índices aqui tomam apenas dois valores. Isso ocorre pois a informação das deformações ao longo de z é absorvida na função escalar $z = z(x, y)$. Além disso, vemos também a clara simetria de u_{ij} . Temos, portanto, uma definição bidimensional de (3.4) tal que ganhamos uma separação evidente entre os deslocamentos u_i *in-plane* e os deslocamentos

out-plane $z = (x, y)$. Por este motivo, no decorrer deste texto vamos tomar o tensor *strain* como sendo definido desta forma. Parte do eixo central da presente pesquisa passa pelo estudo da relação entre os dois tipos de deformação, isto é, dada uma deformação $z(x, y)$ quais deformações u_i são induzidas na superfície e vice-versa.

3.2 Tensor de *stress* e lei de Hooke generalizada

Para modelar corretamente as propriedades mecânicas da superfície, vamos considerar que se trata de um sistema isolado de interações externas. Neste caso, deve-se ter em mente que, se o corpo não apresenta deformações, a sua configuração molecular corresponde, do ponto de vista termodinâmico (Landau *et al.*, 2020), ao estado de equilíbrio, isto é, não há quaisquer variações de volume, energia ou temperatura. Neste contexto, todas as partes do corpo também estão em equilíbrio mecânico e, consequentemente, a soma das forças resultantes sobre quaisquer regiões do corpo deve ser nula. Isso é exemplificado, por exemplo, no plano superior da figura 2. Ao se aplicar uma força externa e executar uma deformação no corpo, naturalmente, o arranjo das moléculas é modificado e, portanto, o estado de equilíbrio inicial é alterado. Nesta situação, a lei de Hooke é generalizada em cada ponto do corpo, de tal forma que há forças internas que tendem a retornar ao estado de equilíbrio inicial. A estas forças internas, chamamos no contexto de elasticidade de *stress*. É, claro que este deve ser nulo se não houver forças internas. Para desenvolvermos uma clara compreensão desta quantidade podemos partir da lei de Hooke unidimensional, em particular a tensão σ (ou stress) unidimensional consiste na razão entre o módulo da força restauradora pela área de atuação S , isto é

$$\sigma = \frac{|f|}{S}, \quad (3.14)$$

onde $|f|$ é dado pela lei de Hooke na sua forma mais usual, em termos da constante elástica k e da elongação $\Delta L = L - L_0$, então

$$|f| = k|\Delta L|, \quad (3.15)$$

a deformação (ou strain) é medido através da elongação por

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}. \quad (3.16)$$

Considerando então a forma unidimensional da lei de Hooke (3.15) temos

$$\sigma S = \epsilon k L_0$$

$$\sigma = \left(\frac{kL_0}{S} \right) \epsilon, \quad (3.17)$$

em que a quantidade $\mathfrak{S} = \frac{kL_0}{S}$ é o módulo de Young. Então, no contexto de teoria da elasticidade, uma forma mais geral de se designar a lei de Hooke é

$$\sigma = \mathfrak{S}\epsilon, \quad (3.18)$$

pois dessa forma, além de ser válida para distribuições contínuas, faz-se menção às propriedades mecânicas do objeto. A passagem para o caso generalizado é feita através do tensor de *stress* através de

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{kl}. \quad (3.19)$$

Nesta seção vamos nos deter em mostrar algumas propriedades de σ_{ij} . A quantidade C_{ijkl} é usualmente nomeada de tensor de rigidez ou elasticidade. A expressão acima é denominada lei de Hooke generalizada. O material é dito isotrópico se C_{ijkl} é um tensor isotrópico, isto é, se suas componentes são as mesmas em quaisquer sistemas de coordenadas, a rigor invariantes sob rotação. Tensores isotrópicos podem ser construídos arbitrariamente a partir da delta de Kronecker, que é por definição um tensor isotrópico de segunda ordem. Por exemplo, se T_{ij} é isotrópico, então $T_{ij} = \gamma\delta_{ij}$, sendo γ uma constante a se determinar. A forma mais geral de um tensor isotrópico de quarta ordem é então

$$T_{ijkl} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}. \quad (3.20)$$

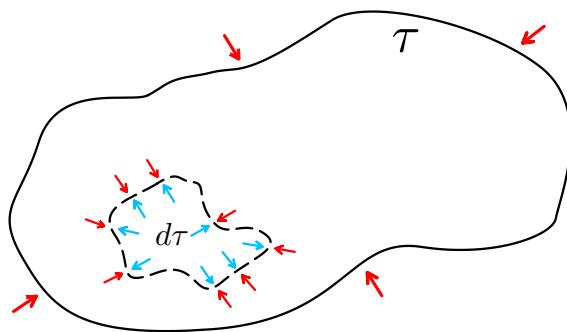
Agora vamos considerar a força total sobre uma região $d\tau$ devido a deformação global de um volume τ que é dada por

$$F_i = \int \mathfrak{F}_i d\tau, \quad (3.21)$$

onde \mathfrak{F}_i é a força por unidade de volume. Deve-se lembrar que as tensões internas são devido as forças moleculares, ou seja, as forças de interação entre as moléculas, de forma que um fato importante na teoria da elasticidade é que as forças moleculares têm um raio de ação muito curto, tal que seu efeito estende-se apenas à vizinhança da molécula que as exerce, numa distância da mesma ordem que a que separa as moléculas, enquanto que na teoria da elasticidade, que é uma teoria macroscópica, as únicas distâncias consideradas são as que são grandes em comparação com as distâncias entre as moléculas (Landau *et al.*, 2020). Dessa maneira, o raio de ação destas

forças moleculares é considerado nulo na teoria da elasticidade. Podemos dizer que as forças que provocam as tensões internas são, no que diz respeito à teoria da elasticidade, *forças de ação próxima* que atuam a partir de um ponto qualquer apenas nos pontos vizinhos. Daí resulta que as forças exercidas em qualquer parte do corpo por partes vizinhas atuam apenas na superfície dessa parte. De forma mais direta, uma vez que o elemento de volume $d\tau$ está imerso no resto do corpo, a força sobre ele vem da interação com as partes vizinhas, segue portanto que, pela terceira lei de Newton, as forças que uma parte exerce sobre outra se cancelam no interior do volume, e desta forma a contribuição líquida se deve às forças que vêm de fora, ou seja, das regiões que fazem fronteira com o volume τ .

Figura 3 – Forças sobre uma região interna de volume $d\tau$. Em azul as forças internas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Isso significa que para quaisquer F_i a integral (3.21) pode ser transformada em uma integral sobre a superfície do volume τ . Em termos matemáticos isso é trivialmente capturado pelo teorema da divergência de Gauss

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{A} d\tau = \int_{\partial\tau} \vec{A} \cdot \hat{n} dS, \quad (3.22)$$

Isto é, sabemos que uma integral de um escalar, tensor de ordem 0, num volume pode ser levada a integral numa superfície desde que o escalar seja escrito como a divergência de um vetor, tensor de ordem 1. Inicialmente podemos então pensar mnemonicamente no caso mais simples unidimensional de (3.18), dessa forma com (3.21) utilizando (3.14) temos

$$\int \mathfrak{F}_i d\tau \sim \int \frac{|f|}{\tau} d\tau = \int \frac{\sigma S}{\tau} d\tau, \quad (3.23)$$

No caso unidimensional mais simples, temos $\tau \sim xS$ e vemos, portanto, que $\int \mathfrak{F}_i d\tau \sim \int \frac{\sigma}{x} d\tau$. Entretanto, \mathfrak{F}_i representa as componentes de um tensor de primeira ordem e não um escalar, então para conectarmos com o teorema da divergência devemos considerar o divergente de um

tensor de segunda ordem, que por esta análise anterior e de (3.19) vemos que deve ser o tensor de *stress*, ou seja, podemos generalizar o teorema da divergência para

$$\int \mathfrak{F}_i d\tau = \int \partial_k \sigma_{ik} d\tau = \oint \sigma_{ik} n_k dS, \quad (3.24)$$

onde aqui n_k é o vetor normal ao elemento dS . Considerar a quantidade que devemos tomar a divergência tal que a integral (3.21) seja transformada numa integral sobre a área é de fato uma forma alternativa à que fizemos antes, de definir o tensor de *stress*. Notemos também que agora podemos introduzir forças externas de quaisquer natureza, por exemplo, uma deformação de um corpo de densidade ρ equilibrada pelo campo gravitacional \vec{g} implica $\partial_k \sigma_{ik} + \rho g_i = 0$, de forma geral vamos definir a *equação de equilíbrio* por

$$\partial_k \sigma_{ik} + \mathfrak{F}_i^{(E)} = 0. \quad (3.25)$$

Onde $\mathfrak{F}_i^{(E)}$ representa as forças equilibrando a deformação. Vamos considerar agora tensor momento angular que sabidamente é dado por

$$M_{ik} = F_i x_k - F_k x_i, \quad (3.26)$$

segue então de (3.21) que

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int (\mathfrak{F}_i x_k - \mathfrak{F}_k x_i) d\tau = \\ &= \int (\partial_l \sigma_{il} x_k - \partial_l \sigma_{kl} x_i) d\tau, \end{aligned} \quad (3.27)$$

uma vez que $\partial_l (\sigma_{il} x_k) = \partial_l \sigma_{il} x_k + \sigma_{il} \delta_{kl}$ temos

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int (\partial_l \sigma_{il} x_k - \sigma_{il} \delta_{kl} - \partial_l \sigma_{kl} x_i + \sigma_{kl} \delta_{li}) d\tau = \\ &= \int \partial_l (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) d\tau + \int (\sigma_{kl} \delta_{li} - \sigma_{il} \delta_{kl}) d\tau = \\ &= \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) n_l ds + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) d\tau. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Neste ponto vamos fazer mais uma delimitação no modelo que vamos tratar, que é a de que não há rotações internas, isto é, temos o equilíbrio rotacional. Isso só pode ser verdade se M_{ik} depender somente da superfície, isto é, sem torque interno atuando no volume, então toda contribuição de torque é externa e proveniente da fronteira. Ou seja

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) n_l ds, \quad (3.29)$$

neste caso temos

$$\sigma_{ki} = \sigma_{ik}. \quad (3.30)$$

Portanto, vamos trabalhar com o tensor de *stress* simétrico. Notemos que isto está associado a conservação local de momento angular, uma vez que $\partial_t M_{ik} = 0$ é satisfeito. A informação sobre a simetria de σ_{ij} tem implicação direta na expressão (3.19), pois uma vez que já vimos que o tensor de *strain* também é simétrico, segue juntamente com (3.30) que temos as seguintes imposições sobre o tensor de rigidez

$$\underbrace{C_{ijkl} = C_{jikl}}_{\text{Devido ao strain}} = \underbrace{C_{ijlk} = C_{klij}}_{\text{Devido ao stress}} . \quad (3.31)$$

Em resumo, devido às simetrias de σ_{ij} e u_{kl} temos simetria por troca de pares $(ij) \leftrightarrow (kl)$. Em particular, das simetrias do *strain* podemos escrever C_{ijkl} na forma (3.20) e separar em partes simétricas e antissimétricas, isto é

$$C_{ijkl} = b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) + \frac{1}{2} (C_{ijkl} - C_{ijlk}) = \\ &= \frac{1}{2} (b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} + b_1 \delta_{ij} \delta_{lk} + b_2 \delta_{il} \delta_{jk} + b_3 \delta_{ik} \delta_{jl}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} - (b_1 \delta_{ij} \delta_{lk} + b_2 \delta_{il} \delta_{jk} + b_3 \delta_{ik} \delta_{jl})) = \\ &= \underbrace{b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{b_2 + b_3}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})}_{\text{Parte simétrica}} + \underbrace{b_1 (\delta_{ij} \delta_{lk} - \delta_{ij} \delta_{lk}) + \frac{b_2 - b_3}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})}_{\text{Parte antissimétrica}} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

O primeiro termo da contribuição antissimétrica é identicamente nulo, e uma vez que sabemos que a rigidez é simétrica para $k \leftrightarrow l$ então temos

$$\frac{b_2 - b_3}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = 0 , \quad (3.34)$$

ou seja, independentemente das simetrias de ij , devemos ter

$$b_2 = b_3 , \quad (3.35)$$

de maneira que a rigidez fica dada por

$$C_{ijkl} = b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (3.36)$$

Usualmente utiliza-se os rótulos $b_1 = \lambda$ e $b_2 = b_3 = \mu$, tal que

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) , \quad (3.37)$$

onde λ e μ são os chamados *coeficientes de Lamé*. Com a expressão acima a lei de Hooke generalizada (3.19) passa a ser

$$\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})) u_{ij}, \quad (3.38)$$

portanto

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{kk} + 2\mu u_{ij}. \quad (3.39)$$

Esta expressão pode ser denominada *equação constitutiva* da elasticidade linear isotrópica. Posteriormente vamos discutir como construir uma versão covariante desta para incluir as deformações da métrica. Todas as quantidades definidas até aqui se relacionam de forma íntima com a natureza termodinâmica do corpo, entretanto não trataremos dos detalhes neste texto, apenas citaremos algumas quantidades que usualmente (Little e William, 2012; Landau *et al.*, 2020) derivam desta relação e serão úteis para tratar de quantidades apresentadas posteriormente. São elas o módulo de compressão hidrostático κ dado por

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (3.40)$$

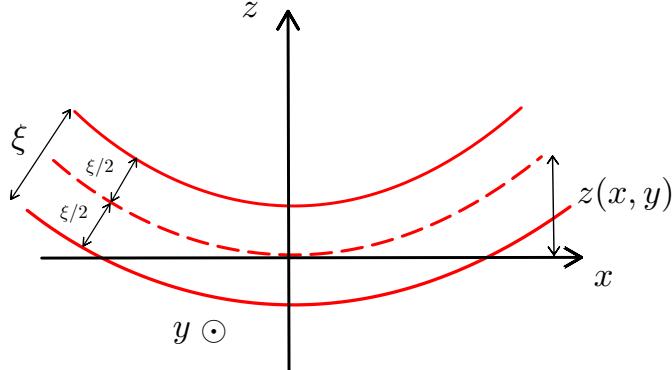
que mede a resistência de um material à compressão volumétrica, ou seja, quanta pressão é necessária para provocar uma dada alteração no volume. E também temos o chamado coeficiente de Poisson ν que na verdade é definido como a razão entre *strain* transversal e longitudinal, e que é possível ser escrito em termos de κ através de

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{3\kappa - 2\mu}{3\kappa + \mu}. \quad (3.41)$$

3.3 Descrição elástica de superfícies curvas

Ao propormos a utilização explícita de elementos da teoria da elasticidade, nos deparamos com alguns detalhes complicados, porém ricos em física. A primeira problemática é que as perturbações geométricas e mecânicas estão relacionadas entre si de forma completamente não trivial. Para mostrarmos como se dá esta relação, vamos considerar uma estrutura, aproximadamente bidimensional de espessura ξ , que sofre uma curvatura. Neste caso ela é esticada em alguns pontos e comprimida em outros. Defini-se então a *superfície neutra* a região onde essas contribuições se equilibram (Landau *et al.*, 2020) e a deformação $z = z(x, y)$ nada mais é do que a medida do deslocamento da superfície de equilíbrio em relação à horizontal 4.

Figura 4 – A linha tracejada representa a *superficie neutra*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como discutido em (Vozmediano *et al.*, 2010) (e também nos textos já citados sobre elasticidade) pode-se introduzir inicialmente uma energia $\mathcal{E}^{(1)}$ associada as flexões, isto é, as contribuições extrínsecas, que é denominada *pure bending energy*, e é dada por

$$\mathcal{E}^{(1)} = \frac{\mathfrak{S}\xi^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1+\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy, \quad (3.42)$$

é essencial sabermos que esta expressão é obtida fazendo-se duas importantes considerações, a primeira é que a superfície é fina, ou seja, sua espessura é pequena em comparação com as demais dimensões características (comprimento e largura) e a segunda é que despreza-se as contribuições devido a deformações ao longo de x e y , ou seja, $u_x = u_y = 0$. Em outras palavras, assim como em (3.7) $\mathcal{E}^{(1)}$ está diretamente relacionado as variações das contribuições *out-plane* $z(x, y)$. Neste sentido é conveniente introduzir a notação mais usual $h = z(x, y)$ tal que

$$\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}^{(1)}(h). \quad (3.43)$$

Ao esticarmos, ou contrairmos, também temos uma energia $\mathcal{E}^{(2)}$ (*stretching energy*) que é dada por

$$\mathcal{E}^{(2)}(u_{ij}) = \iint \frac{1}{2} \xi u_{ij} \sigma_{ij} dx dy, \quad (3.44)$$

de tal forma que a energia total incluindo os dois tipos de contribuições é dada por

$$\mathcal{E}(h, u_{ij}) = \mathcal{E}^{(1)}(h) + \mathcal{E}^{(2)}(u_{ij}), \quad (3.45)$$

portanto

$$\mathcal{E}(h, u_{ij}) = \frac{\mathfrak{S}\xi^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1+\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{2} \xi u_{ij} \sigma_{ij} \frac{24(1-\nu^2)}{\mathfrak{S}\xi^3} \right] dx dy. \quad (3.46)$$

Vamos considerar que estamos interessados num regime de equilíbrio, ou seja, dado um h queremos obter o u_{ij} correspondente (ou vice-versa) tal que o sistema fique em equilíbrio. A condição para tal é

$$\delta\mathcal{E} + \delta\mathcal{U} = 0, \quad (3.47)$$

onde \mathcal{U} é o potencial associado ao campo de forças externas. Então aplicando o princípio variacional para δh e δu_{ij} obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \frac{\mathfrak{S}\xi^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^4 h - \xi \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right) = \mathcal{P} \\ \nabla^4 \chi + \mathfrak{S} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0 \end{cases}, \quad (3.48)$$

onde ∇^4 é o bi-laplaciano, \mathcal{P} a força externa por unidade de área da superfície e χ é uma função auxiliar denominada função *stress* definida através de

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ik}\epsilon_{jl} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (3.49)$$

onde ϵ_{ik} é o simbolo de Levi-Civita bidimensional. As equações (3.48) são denominadas equações de Föppl-Von-Kármán e nos fornecem como se dá a relação entre as deformações extrínsecas e intrínsecas na superfície. Em geral são complicadas de se resolver, uma vez que são acopladas e não lineares. Entretanto no trabalho *Gauge fields in graphene with nonuniform elastic deformations A quantum field theory approach* os autores tratam diretamente da minimização de (3.46) para o caso da deformação *out-plane* cuja qual queremos analisar as implicações na dinâmica fermiônica, ou seja, também baseado no trabalho (Juan *et al.*, 2007) eles obtêm os deslocamentos *in-plane* associados a

$$h(r) = h_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right), \quad (3.50)$$

a deformação *in-plane* obtida é

$$u_r = -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0^2 r e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \left(b^2 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) - 2r^2(\lambda + 2\mu) \right)}{b^2 r^2 (\lambda + 2\mu)}. \quad (3.51)$$

Em posse desta expressão, temos todo o necessário para utilizar (3.12) e partir para a adaptação da equação de Dirac na superfície escolhida. Entretanto, de forma paralela a isto vamos mostrar como obter uma boa aproximação para (3.51), de uma forma menos trabalhosa. Nota-se que o *displacement* é dado pela coordenada radial apenas, por isso, antes de prosseguir, vamos tratar da mudança de sistemas de coordenadas, visto que, dependendo desta escolha, devemos reorganizar as definições para manter a consistência com a teoria linear.

4 DESENVOLVENDO MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

4.1 Utilizando coordenadas cilíndricas

Para tratar de problemas com simetria angular, a forma mais natural é escrever as quantidades em coordenadas cilíndricas. Durante o desenvolvimento constatou-se que podemos redefinir (3.12) interpretando a delta de Kronecker como uma métrica de fundo a ser perturbada, de forma que a passagem para coordenadas cilíndricas pode ser feita trocando-se δ_{ij} por

$$\delta_{ij}^{(c)} = \text{diag}(1, r^2), \quad (4.1)$$

que representa a métrica cilíndrica bidimensional plana. Entretanto, esta abordagem exige a redefinição das componentes do tensor de *strain* de tal forma que se tornam distintas das convenções usuais encontradas na literatura. A fim de manter as componentes de u_{ij} na convenção padrão, dessa forma para evitar equívocos na consistência dimensional da teoria, mantemos a definição (3.12) e calculamos como ficam as componentes de u_{ij} . Então, nesta seção vamos realizar uma dedução das componentes de u_{ij} em coordenadas cilíndricas e verificar que elas mantêm a consistência dimensional dos deslocamentos e resultam nas definições esperadas dos textos de teoria da elasticidade (Landau *et al.*, 2020; Little e William, 2012). O primeiro passo consiste em tomarmos um deslocamento arbitrário sobre uma superfície cuja métrica é dada por (3.12), ou seja temos

$$ds'^2 = (\delta_{ij} + 2u_{ij}) dx^i dx^j = (1 + 2u_{xx}) dx^2 + (1 + 2u_{yy}) dy^2 + 4u_{xy} dx dy, \quad (4.2)$$

naturalmente passamos para coordenadas cilíndricas através de

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ y &= r \sin \theta & dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

de forma que

$$\begin{aligned} dx^2 &= \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - 2r \cos \theta \sin \theta dr d\theta \\ dy^2 &= \sin^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 + 2r \cos \theta \sin \theta dr d\theta \\ dx dy &= \cos \theta \sin \theta dr^2 + r \cos^2 \theta dr d\theta - r \sin^2 \theta dr d\theta - r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

assim, depois de alguma álgebra o deslocamento passa a ser escrito por

$$\begin{aligned}
 ds'^2 = & dr^2(1 + 2u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{yy} \sin^2 \theta + 4u_{xy} \cos \theta \sin \theta) + \\
 & + d\theta^2 \left\{ r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2(2u_{xx} \sin^2 \theta + 2u_{yy} \cos^2 \theta + 4u_{xy} \sin \theta \cos \theta) \right\} + \\
 & + drd\theta \left\{ -2r \cos \theta \sin \theta - 4u_{xx}r \cos \theta \sin \theta + \right. \\
 & \left. + 2r \cos \theta \sin \theta + 4u_{yy}r \cos \theta \sin \theta + 4u_{xy}r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right\} = \\
 & = dr^2 \left\{ 1 + 2(u_{xx} \cos^2 \theta + u_{yy} \sin^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta) \right\} + \\
 & r^2 d\theta^2 \left\{ 1 + 2(u_{xx} \sin^2 \theta + u_{yy} \cos^2 \theta - 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta) \right\} + \\
 & + drd\theta \left\{ 4[(u_{yy} - u_{xx})r \sin \theta \cos \theta + u_{xy}r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \right\}, \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

que pode ser escrito por

$$ds'^2 = (1 + 2u_{rr})dr^2 + (1 + 2u_{\theta\theta})r^2d\theta^2 + 4u_{r\theta}rdrd\theta, \tag{4.6}$$

desde que

$$\begin{cases} u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + u_{yy} \sin^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ u_{\theta\theta} = u_{xx} \sin^2 \theta + u_{yy} \cos^2 \theta - 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ u_{r\theta} = (u_{yy} - u_{xx}) \sin \theta \cos \theta + u_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{cases} \tag{4.7}$$

Dessa forma, a definição

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2u_{ij} \tag{4.8}$$

pode ser mantida em quaisquer sistemas de coordenadas (covariância), sem trocar a delta pela métrica de fundo e preservando as dimensões corretas, a saber, os deslocamentos tanto *out* quanto *in-plane* devem ter dimensão de comprimento tal que u_{ij} deve ser adimensional. As componentes esperadas do tensor de *strain* em coordenadas cilíndricas são

$$\begin{cases} u_{rr} = \partial_r u_r \\ u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \partial_\theta u_\theta + \frac{1}{r} u_r \\ u_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\partial_r u_\theta + \frac{\partial_\theta u_r}{r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{cases}, \text{ com } \begin{cases} u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ u_\theta = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta. \end{cases} \tag{4.9}$$

A fim de verificar se as componentes (4.7) conduzem de fato a estas expressões vamos partir da transformação geral

$$\partial_i = \frac{\partial x^a}{\partial x^i} \partial_a \quad ; \text{ (onde } i = x, y \text{ e } a = r, \theta\text{)}, \tag{4.10}$$

e uma vez que $\sqrt{x^2 + y^2}$ temos

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \partial_x = \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} \partial_\theta \\ \partial_y = \frac{\partial r}{\partial y} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial y} \partial_\theta \end{cases} = \begin{cases} \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \partial_r + \frac{\partial}{\partial x} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] \partial_\theta \\ \partial_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \partial_r + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] \partial_\theta \end{cases} = \\
 & = \begin{cases} \partial_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \partial_r - \frac{y}{x^2 + y^2} \partial_\theta \\ \partial_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \partial_r + \frac{x}{x^2 + y^2} \partial_\theta \end{cases} = \begin{cases} \partial_x = \frac{r \cos \theta}{r} \partial_r - \frac{r \sin \theta}{r^2} \\ \partial_y = \frac{r \sin \theta}{r} \partial_r + \frac{r \cos \theta}{r^2} \partial_\theta \end{cases} = \\
 & = \begin{cases} \partial_x = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \\ \partial_y = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

portanto

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix}; \text{ e naturalmente } \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Aplicando estas transformações em (4.9) temos

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} u_{rr} = (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \\ u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} (-r \sin \theta \partial_x + r \cos \theta \partial_y) (-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta) + \\ + \frac{1}{r} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \\ u_{r\theta} = \frac{1}{2} [(\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) (-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta) + \\ + \frac{(-r \sin \theta \partial_x + r \cos \theta \partial_y)(u_x \cos \theta + u_y \sin \theta)}{r} - \frac{(-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta)}{r}] \end{cases} = \\
 & = \begin{cases} u_{rr} = (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) \sin \theta \left(\frac{x \partial_y u_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy u_x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y \partial_y u_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2 u_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{u_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \\ + \cos \theta \left(\frac{x \partial_x u_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 u_x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{u_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y \partial_x u_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy u_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \\ u_{\theta\theta} = -\sin \theta \left(-\frac{y \partial_y u_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy u_x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x \partial_x u_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 u_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{u_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \\ + \cos \theta \left(-\frac{y \partial_y u_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2 u_x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{u_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x \partial_y u_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy u_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) + \frac{x u_x + y u_y}{x^2 + y^2} \\ u_{r\theta} = \frac{1}{2} [\sin(2\theta) (\partial_y u_y - \partial_x u_x) + \cos(2\theta) (\partial_y u_x + \partial_x u_y)] , \end{cases} \\
 & \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

desenvolvendo com $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ depois de alguma álgebra fica

$$\begin{cases} u_{rr} = \cos^2 \theta \partial_x u_x + \sin^2 \theta \partial_y u_y + \sin \theta \cos \theta (\partial_y u_x + \partial_x u_y) \\ u_{\theta\theta} = -\sin \theta \cos \theta (\partial_x u_y + \partial_y u_x) + \cos^2 \theta \partial_y u_y + \sin^2 \theta \partial_x u_x \\ u_{r\theta} = \sin \theta \cos \theta (\partial_y u_y - \partial_x u_x) + \frac{1}{2} (\partial_x u_y + \partial_y u_x) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) , \end{cases} \tag{4.14}$$

mas como

$$\begin{cases} u_{xx} = \partial_x u_x \\ u_{yy} = \partial_y u_y \\ u_{xy} = \frac{1}{2} (\partial_x u_y + \partial_y u_x) , \end{cases} \quad (4.15)$$

temos finalmente

$$\begin{cases} u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + u_{yy} \sin^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ u_{\theta\theta} = u_{xx} \sin^2 \theta + u_{yy} \cos^2 \theta - 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ u_{r\theta} = (u_{yy} - u_{xx}) \sin \theta \cos \theta + u_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) . \end{cases} \quad (4.16)$$

Ou seja, de fato recuperamos as expressões (4.7), o que verifica a consistência da abordagem empregada.

4.2 Relação entre os deslocamentos *out-plane* e *in-plane*

Queremos obter o deslocamento u_i associado a um $z(r, \theta)$ específico, contudo de uma maneira mais simples do que em (3.51), a forma mais direta de se executar isto é partindo do tensor de *stress*, que é dado por (3.39) na forma mais geral

$$\sigma_{ij} = \lambda u_m^m g_{ij} + 2\mu u_{ij} , \quad (4.17)$$

onde o traço do tensor de *strain* pode ser escrito como $u_m^m = g^{kl} u_{kl}$, tal que podemos introduzir explicitamente as deformações. Dessa forma vamos ter

$$\sigma_{ij} = \lambda g^{kl} u_{kl} g_{ij} + 2\mu u_{ij} . \quad (4.18)$$

deve-se lembrar que estamos trabalhando tomando por hipótese a teoria linear da elasticidade. Vamos utilizar $g^{kl} = (g^{-1})^{kl}$, notando que isto equivale a supor a métrica diagonal. Destas considerações temos

$$g_{kl} = \delta_{kl} + 2u_{kl} \Rightarrow g^{kl} = (\delta_{kl} + 2u_{kl})^{-1} \approx \delta^{kl} - 2u^{kl} + O(u^2) + \dots \quad (4.19)$$

de forma que teremos

$$\begin{aligned} u_m^m &= (\delta^{kl} - 2u^{kl} + O(u^2) + \dots) u_{kl} = \delta^{kl} u_{kl} - O(u^2) + O(u^3) + \dots \\ &\Rightarrow u_m^m = g^{kl} u_{kl} \approx \delta^{kl} u_{kl} , \end{aligned} \quad (4.20)$$

então, por consistência da teoria linear, devemos ter

$$u_m^m = \delta^{kl} u_{kl} . \quad (4.21)$$

O tensor de *stress* fica

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta^{kl} u_{kl} g_{ij} + 2\mu u_{ij} = \lambda \delta^{kl} u_{kl} (\delta_{ij} + 2u_{ij}) + 2\mu u_{ij} \\ &= \lambda \delta^{kl} u_{kl} \delta_{ij} + 2\lambda \delta^{ij} O(u^2) + 2\mu u_{ij} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Portanto, na forma covariante, a teoria linear exige para quaisquer sistemas de coordenadas que a equação constitutiva (3.39) seja dada por

$$\sigma_{ij} = \lambda u_k^k \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} . \quad (4.23)$$

Essa construção permite-nos encontrar equações para quaisquer u_r e u_θ associados a perturbações realizadas sobre uma métrica plana. Deformações efetuadas sobre métricas já curvadas impedirão as aproximações realizadas, em particular a passagem (4.20). Como no presente caso é tomada uma perturbação gaussiana, que é realizada sobre um plano, podemos utilizar normalmente este tratamento. A forma mais imediata de se obter os deslocamentos associados a uma perturbação é pela equação de equilíbrio (3.25), em particular, vamos tomar a delimitação do caso mais simples possível que é $\mathfrak{F}_i^{(E)} = 0$, ou seja, temos uma perturbação "natural". Para introduzirmos as alterações como curvaturas no plano vamos devemos considerar a derivada covariante, dessa forma temos

$$\nabla_k \sigma_{ik} = 0 \quad ; \text{ (com } i = r, \theta \text{)} \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow \partial_k \sigma_{ik} - \Gamma_{ik}^m \sigma_{mk} - \Gamma_{kk}^m \sigma_{im} = 0 , \quad (4.25)$$

onde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) . \quad (4.26)$$

Expandindo primeiro para $i = r$ temos

$$\nabla_r \sigma_{rr} + \nabla_\theta \sigma_{r\theta} = 0 , \quad (4.27)$$

calculando o primeiro termo temos

$$\begin{aligned} \nabla_r \sigma_{rr} &= \partial_r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^m \sigma_{mr} - \Gamma_{rr}^m \sigma_{rm} = 0 \\ &= \partial_r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^\theta \sigma_{\theta r} - \Gamma_{rr}^r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^\theta \sigma_{r\theta} \end{aligned} \quad (4.28)$$

como $u_{r\theta} = 0$ segue imediatamente $\sigma_{r\theta} = 0$ de forma que fica

$$\partial_r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^r \sigma_{rr} = 0, \quad (4.29)$$

os referentes símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_r g_{rl} + \partial_r g_{lr} - \partial_l g_{rr}), \quad (4.30)$$

vamos linearizar com (4.20), ou seja

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} (\delta^{rl} - 2u^{rl}) [\partial_r (\delta_{rl} + 2u_{rl}) + \partial_r (\delta_{rl} + 2u_{rl}) - \partial_l (\delta_{rr} + 2u_{rr})] = \quad (4.31)$$

como só temos entradas não nulas para $l = r$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} (\delta^{rr} - 2u^{rr}) [\partial_r (\delta_{rr} + 2u_{rr}) + \partial_r (\delta_{rr} + 2u_{rr}) - \partial_r (\delta_{rr} + 2u_{rr})] = \\ &= \frac{1}{2} (\delta^{rr} - 2u^{rr}) [\partial_r (\delta_{rr} + 2u_{rr})] = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

logo temos

$$\nabla_r \sigma_{rr} = \partial_r \sigma_{rr}, \quad (4.33)$$

e para o segundo termo de 4.27 temos

$$\begin{aligned} \nabla_\theta \sigma_{r\theta} &= \partial_\theta \sigma_{r\theta} - \Gamma_{r\theta}^m \sigma_{m\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^m \sigma_{rm} = \\ &= \partial_\theta \sigma_{r\theta} - \Gamma_{r\theta}^r \sigma_{r\theta} - \Gamma_{r\theta}^\theta \sigma_{\theta\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^r \sigma_{rr} - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \sigma_{r\theta} = \\ &= -\Gamma_{r\theta}^\theta \sigma_{\theta\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^r \sigma_{rr}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Calculando as conexões

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta l} (\partial_r g_{\theta l} + \partial_\theta g_{l\theta} - \partial_l g_{r\theta}) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta^{\theta l} - 2u^{\theta l}) [\partial_r (\delta_{\theta l} + 2u_{\theta l}) + \partial_\theta (\delta_{l\theta} + 2u_{l\theta}) - \partial_l (\delta_{r\theta} + 2u_{r\theta})] = \\ &= \frac{1}{2} (\delta^{\theta\theta} - 2u^{\theta\theta}) [\partial_r (\delta_{\theta\theta} + 2u_{\theta\theta}) + \partial_\theta (\delta_{\theta\theta} + 2u_{\theta\theta}) - \partial_\theta (\delta_{\theta\theta} + 2u_{\theta\theta})] = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2u^{\theta\theta}) \partial_r (1 + 2u_{\theta\theta}) = \\ &= (1 - 2u^{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_\theta g_{rl} + \partial_\theta g_{lr} - \partial_l g_{\theta\theta}) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta^{rl} - 2u^{rl}) [\partial_\theta (\delta_{rl} + 2u_{rl}) + \partial_\theta (\delta_{rl} + 2u_{rl}) - \partial_l (\delta_{\theta\theta} + 2u_{\theta\theta})] = \\ &= -\frac{1}{2} (1 - 2u^{rr}) \partial_r (1 + 2u_{\theta\theta}) = \\ &= -(1 - 2u^{rr}) \partial_r u_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

portando temos

$$\nabla_\theta \sigma_{r\theta} = - \left(1 - 2u^{\theta\theta}\right) \partial_r u_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta} + (1 - 2u^{rr}) \partial_r u_{\theta\theta} \sigma_{rr}, \quad (4.37)$$

dessa maneira, voltando à expressão 4.27

$$\begin{aligned} & \nabla_r \sigma_{rr} + \nabla_\theta \sigma_{r\theta} = 0 \\ & \Rightarrow \partial_r \sigma_{rr} - \left(1 - 2u^{\theta\theta}\right) \partial_r u_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta} + (1 - 2u^{rr}) \partial_r u_{\theta\theta} \sigma_{rr} = \\ & = \partial_r \sigma_{rr} - \left(\partial_r u_{\theta\theta} - 2u^{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta}\right) \sigma_{\theta\theta} + (\partial_r u_{\theta\theta} - 2u^{rr} \partial_r u_{\theta\theta}) \sigma_{rr}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

utilizando 4.23 fica

$$\begin{aligned} & \partial_r (\lambda u_k^k + 2\mu u_{rr}) - \left(\partial_r u_{\theta\theta} - 2u^{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta}\right) (\lambda u_k^k + 2\mu u_{\theta\theta}) + \\ & + (\partial_r u_{\theta\theta} - 2u^{rr} \partial_r u_{\theta\theta}) (\lambda u_k^k + 2\mu u_{rr}) = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

desenvolvendo isso temos

$$\begin{aligned} & \partial_r [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) + 2\mu u_{rr}] - \left(\lambda u_k^k \partial_r u_{\theta\theta} - 2\lambda u_k^k u^{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu u_{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta} - 4\mu u_{\theta\theta} u^{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta}\right) + \\ & + \left(\lambda u_k^k \partial_r u_{\theta\theta} - 2\lambda u_k^k u^{rr} \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu u_{rr} \partial_r u_{\theta\theta} - 4\mu u_{rr} u^{rr} \partial_r u_{\theta\theta}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

De (4.21) temos $u_k^k = \delta^{ij} u_{ij} = u_{rr} + u_{\theta\theta}$, dessa forma vamos ficar com

$$\begin{aligned} & \partial_r [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) + 2\mu u_{rr}] - [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} - 2\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) u^{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu u_{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta} + \\ & - 4\mu u_{\theta\theta} u^{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta}] + [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} - 2\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) u^{rr} \partial_r u_{\theta\theta} + \\ & + 2\mu u_{rr} \partial_r u_{\theta\theta} - 4\mu u_{rr} u^{rr} \partial_r u_{\theta\theta}] = 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde observamos que surgem novos termos de segunda ordem. Mais especificamente temos

$$\begin{aligned} & \partial_r [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) + 2\mu u_{rr}] - [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} - O(u^2) + 2\mu u_{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta} - O(u^2)] + \\ & + [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} - O(u^2) + 2\mu u_{rr} \partial_r u_{\theta\theta} - O(u^2)] = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

descartando estes termos ficamos com

$$\begin{aligned} & \partial_r [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) + 2\mu u_{rr}] - [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu u_{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta}] + \\ & + [\lambda(u_{rr} + u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu u_{rr} \partial_r u_{\theta\theta}] = \\ & = \lambda \partial_r u_{rr} + \lambda \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu \partial_r u_{rr} - 2\mu u_{\theta\theta} \partial_r u_{\theta\theta} + 2\mu u_{rr} \partial_r u_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

então a equação de equilíbrio fica

$$\lambda(\partial_r u_{rr} + \partial_r u_{\theta\theta}) + 2\mu [(u_{rr} - u_{\theta\theta}) \partial_r u_{\theta\theta} + \partial_r u_{rr}] = 0. \quad (4.44)$$

Considerando os termos da forma $u_i \partial_j u_{kl}$ como contribuições não lineares ($A \partial_i A = \frac{1}{2} \partial_i A^2$) teremos

$$\lambda(\partial_r u_{rr} + \partial_r u_{\theta\theta}) + 2\mu \partial_r u_{rr} = 0. \quad (4.45)$$

Vemos então que, uma vez que u_{ij} é definido adimensional, a equação está dimensionalmente consistente. Agora podemos voltar à expressão (4.24) e fazer o mesmo procedimento para $i = \theta$.

$$\nabla_k \sigma_{\theta k} = \nabla_r \sigma_{\theta r} + \nabla_\theta \sigma_{\theta\theta}, \quad (4.46)$$

caculando o primeiro termo temos $\partial_r \sigma_{\theta r} - \Gamma_{\theta r}^m \sigma_{mr} - \Gamma_{rr}^m \sigma_{\theta m} = 0$ e $\partial_k \sigma_{ik} - \Gamma_{ik}^m \sigma_{mk} - \Gamma_{kk}^m \sigma_{im} = 0$, então

$$\begin{aligned} \nabla_r \sigma_{\theta r} &= \partial_r \sigma_{\theta r} - \Gamma_{\theta r}^m \sigma_{mr} - \Gamma_{rr}^m \sigma_{\theta m} = -\Gamma_{\theta r}^r \sigma_{rr} - \Gamma_{\theta r}^\theta \sigma_{\theta r} - \Gamma_{rr}^r \sigma_{\theta r} - \Gamma_{rr}^\theta \sigma_{\theta\theta} = \\ &= -\Gamma_{\theta r}^r \sigma_{rr} - \Gamma_{rr}^\theta \sigma_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

mas $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta r}^r &= \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_\theta g_{rl} + \partial_r g_{l\theta} - \partial_l g_{\theta r}) = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_\theta g_{rr} + \partial_r g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta r}) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2u_{rr}) (\partial_\theta g_{rr}) = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

pois estamos assumindo simetria angular ($\partial_\theta g_{ij} = 0$). Da mesma forma temos

$$\Gamma_{rr}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{r\theta} + \partial_r g_{\theta r} - \partial_\theta g_{rr}) = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\theta g_{rr}) = 0, \quad (4.49)$$

logo

$$\nabla_r \sigma_{\theta r} = 0. \quad (4.50)$$

O segundo termo de (4.46) fica

$$\begin{aligned} \nabla_\theta \sigma_{\theta\theta} &= \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^m \sigma_{m\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^m \sigma_{\theta m} = \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} - 2\Gamma_{\theta\theta}^m \sigma_{\theta m} = \\ &= \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} - 2(\Gamma_{\theta\theta}^r \sigma_{r\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \sigma_{\theta\theta}) = \\ &= \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} - 2\Gamma_{\theta\theta}^\theta \sigma_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

mas

$$\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\theta\theta} = 0, \quad (4.52)$$

portanto segue que

$$\nabla_\theta \sigma_{\theta\theta} = \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}, \quad (4.53)$$

então a equação de equilíbrio para $i = \theta$ fica simplesmente

$$\nabla_k \sigma_{\theta k} = \nabla_r \sigma_{\theta r} + \nabla_\theta \sigma_{\theta \theta} = 0$$

$$\partial_\theta \sigma_{\theta \theta} = 0, \quad (4.54)$$

que, na situação que estamos considerando, não traz nenhuma informação adicional. Voltemos então para a expressão (4.45)

$$\lambda(\partial_r u_{rr} + \partial_r u_{\theta\theta}) + 2\mu \partial_r u_{rr} = 0. \quad (4.55)$$

Já vimos que o tensor de *strain* de Von-Kárman descreve o caso bidimensional através de

$$u_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + 2\partial_i h \partial_j h), \quad (4.56)$$

uma vez que estamos supondo uma deformação com simetria angular, vamos tomar o caso em que temos apenas u_r não nulo e que $h = h(r)$, dessa forma segue que

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \nabla_r u_r + (\nabla_r h)^2 = \partial_r u_r - \Gamma_{rr}^r u_r - \Gamma_{rr}^\theta u_\theta + (\partial_r h)^2 = \\ &= \partial_r u_r + (\partial_r h)^2, \end{aligned} \quad (4.57)$$

ao passo que

$$u_{\theta\theta} = \nabla_\theta u_\theta = \partial_\theta u_\theta - \Gamma_{\theta\theta}^r u_r - \Gamma_{\theta\theta}^\theta u_\theta = \partial_\theta u_\theta - \Gamma_{\theta\theta}^r u_r, \quad (4.58)$$

utilizando o resultado (4.36), já descartando as contribuições de segunda ordem, fica

$$u_{\theta\theta} = \partial_\theta u_\theta + (1 - 2u^{rr})\partial_r u_{\theta\theta} u_r. \quad (4.59)$$

Esta é claramente uma equação para $u_{\theta\theta}$, e é consistente com o fato de que usualmente $u_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$, contudo o segundo termo é claramente não linear, ou seja

$$u_{\theta\theta} = \partial_\theta u_\theta + O(u^2), \quad (4.60)$$

logo, na aproximação linear temos $u_{\theta\theta} = \partial_\theta u_\theta$. Isso nos diz que, no caso linear, se termo apenas u_r não nulo e $h = h(r)$ a equação de equilíbrio se reduz a

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\partial_r u_{rr} &= 0 \\ \partial_r [\partial_r u_r + (\partial_r h)^2] &= 0, \end{aligned}$$

o preço a se pagar é que a expressão não depende mais dos coeficientes de Lamé, ou seja, neste regime os coeficientes de Lamé são irrelevantes, na verdade absorvidos como constantes de integração.

$$\partial_r^2 u_r + \partial_r (\partial_r h)^2 = 0, \quad (4.61)$$

para o caso da gaussiana $h(r) = h_0 e^{-\frac{r^2}{b^2}}$ essa expressão tem a seguinte solução analítica

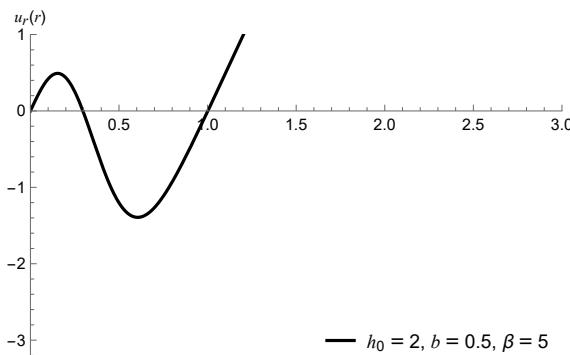
$$u_r(r) = C_1 + C_2 r - \frac{h_0^2 \left(\sqrt{2\pi} b \operatorname{Erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right) - 4r e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \right)}{4b^2}, \quad (4.62)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Observando (3.51) vemos que o *displacement* é finito assintoticamente, dessa forma, buscando conciliação vamos por comparação fixar a constante $C_1 = 0$, além disso, por estética, denotaremos também aqui $C_2 = \beta$. Dessa forma vamos propor o seguinte deslocamento

$$u_r(r) = \beta r - \frac{h_0^2 \left(\sqrt{2\pi} b \operatorname{Erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right) - 4r e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \right)}{4b^2}. \quad (4.63)$$

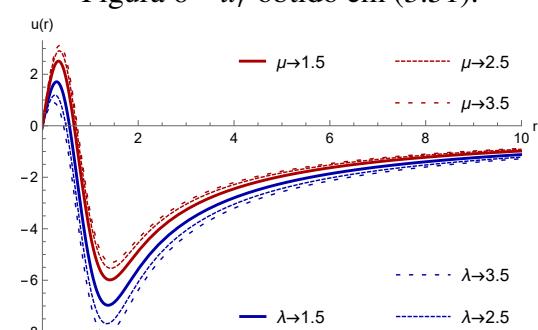
A diferença do método empregado aqui ao da seção 3.3 é que as equações de Föppl permitem determinar os deslocamentos *in-plane* a partir de uma deformação fora do plano, pois relacionam curvatura e tensões por meio de uma equação de compatibilidade. Já a equação de equilíbrio sozinha apenas impõe que as tensões sejam balanceadas, sem conectar diretamente com a minimização da energia associada aos dois tipos de deformação, tornando assim o sistema incompleto, contudo fornece uma aproximação. Observa-se que para dados valores de β , h_0 e b de fato este deslocamento se comporta de forma parecida, próximo à origem, com o dado por (3.51), ou seja, é uma boa aproximação para regiões próximas à origem. Nota-se, por enquanto, que as constantes de Lamé não aparecem nesta aproximação.

Figura 5 – u_r obtido pelas aproximações.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 6 – u_r obtido em (3.51).



Fonte: Obtido pelo autor.

Observa-se que, como no primeiro só temos $\alpha = \frac{h_0}{b}$ para ajustar, é mais complicado fazer ajustes menores, como na segunda abordagem, que temos λ e μ . Seguindo (4.6) vamos ter

$$dl'^2 = (1 + 2u_{rr})dr^2 + (1 + 2u_{\theta\theta})r^2d\theta^2 = (1 + 2u_{rr})dr^2 + r^2d\theta^2, \quad (4.64)$$

e a métrica ficará dada então por

$$g_{ij} = \text{diag}(1 + 2u_{rr}, r^2). \quad (4.65)$$

Escrevendo explicitamente em termos de r com (4.63) teremos

$$\begin{aligned} dl'^2 &= \{1 + 2[\partial_r u_r + (\partial_r h)^2]\} dr^2 + r^2 d\theta^2 = \\ &= \left\{ 1 + 2 \left[\partial_r \left(\beta r - \frac{h_0^2 \left(\sqrt{2\pi} b \operatorname{Erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right) - 4re^{-\frac{2r^2}{b^2}} \right)}{4b^2} + \left(\partial_r h_0 e^{-\frac{r^2}{b^2}} \right)^2 \right) \right] \right\} dr^2 + r^2 d\theta^2 = \\ &= \left\{ 1 + 2 \left(\beta - \cancel{\frac{4A^2 r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^4}} + \cancel{\frac{4A^2 r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^4}} \right) \right\} dr^2 + r^2 d\theta^2, \end{aligned} \quad (4.66)$$

de forma que

$$dl'^2 = (1 + 2\beta)dr^2 + r^2d\theta^2. \quad (4.67)$$

Então neste regime, dado um β , a perturbação é constante. Também nota-se imediatamente que β é adimensional. Notemos que para $r \rightarrow 0$ a métrica perde uma dimensão, e o problema que era definido bidimensional se torna unidimensional, isto também ocorre em (Juan *et al.*, 2007), entretanto não ocorre, por exemplo, no caso do trabalho (Watanabe *et al.*, 2015) em que a métrica nunca anula quaisquer componentes. Seguindo um raciocínio parecido com os do problemas de gravitação vamos consideração uma reparametrização da seguinte forma

$$\bar{r} = \sqrt{1 + 2\beta} r, \quad (4.68)$$

então

$$d\bar{r}^2 = (1 + 2\beta)dr^2 \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{\bar{r}^2}{\sqrt{1 + 2\beta}}, \quad (4.69)$$

segue que a métrica pode ser reescrita como

$$dl'^2 = d\bar{r}^2 + \frac{\bar{r}^2}{\sqrt{1 + 2\beta}} d\theta^2. \quad (4.70)$$

Observamos então que tem a forma $d\bar{r}^2 + a^2 \bar{r}^2 d\theta$ (com $a = \text{cst.}$) que é o esperado de um cone. Esta má definição na origem implicará algumas consequências no potencial efetivo calculado posteriormente para as partículas confinadas à superfície, visto que há uma curvatura cônea em torno de $r = 0$.

4.3 Determinação da constante β

Podemos determinar a constante β comparando as duas abordagens, em particular, para prosseguir vamos rotular (3.51) por $u_r^{(A)}$ e (4.63) por $u_r^{(B)}$. Segue então que temos

$$u_r^{(A)} = -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}h_0^2r \exp\left(-\frac{2r^2}{b^2}\right) \left(b^2(\lambda + \mu) \left(\exp\left(\frac{2r^2}{b^2}\right) - 1\right) - 2r^2(\lambda + 2\mu)\right)}{2b^2r^2(\lambda + 2\mu)}, \quad (4.71)$$

realizando uma expansão em primeira ordem vamos ter

$$u_r^{(A)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}h_0^2\mu}{b^2(\lambda + 2\mu)}r + O(r^3, r^5\dots), \quad (4.72)$$

definindo $\alpha = \frac{h_0}{b}$ e expandindo em maior ordem segue

$$u_r^{(A)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\mu r}{\lambda + 2\mu} - \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha^2r^3(\lambda + 3\mu)}{b^2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha^2r^5\left(\frac{8(\lambda+\mu)}{3b^4} + \frac{4\mu}{b^4}\right)}{2(\lambda + 2\mu)} + \dots, \quad (4.73)$$

onde nota-se que a série é ímpar. Agora vamos expandir também o *displacement* que obtivemos

$$u_r^{(B)} = \beta r - \frac{4A^2r^3}{3b^4} + \frac{8A^2r^5}{5b^6} + \dots = \beta r + O(r^3, r^5\dots), \quad (4.74)$$

e, como deveria ser, a série também é ímpar. Em particular, apesar dos demais termos não serem similares, o que é esperado pois $u_r^{(A)}$ e $u_r^{(B)}$ tem comportamentos assintóticos distintos, podemos comparar os primeiros termos das série com para obter uma aproximação para constante β , a saber

$$\beta = \alpha^2 \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu}{(\lambda + 2\mu)}, \quad (4.75)$$

definindo, por elegância, $\beta_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha^2$, β fica fixado por

$$\beta = \beta_0 \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)}, \quad (4.76)$$

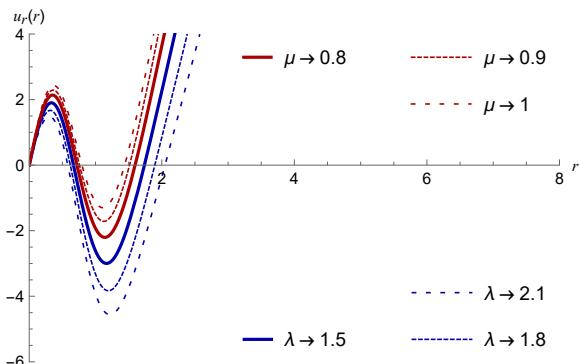
de forma que, como suspeitado anteriormente, neste regime as constantes de Lamé são absorvidas em constantes de integração. A vantagem das constantes de Lamé aparecerem é que cada uma delas está relacionada a um modo de deformação, e poderemos ver como as densidades de estados se comportam com a variação delas. Uma observação, puramente estética, é que da forma como definimos a constante β_0 teremos $\beta = \beta_0$ para $\mu = -\lambda$, porém como as constantes de Lamé dificilmente são negativas, uma outra opção pode ser definir $\overline{\beta_0} = \frac{1}{3}\beta_0$ dessa forma teremos $\beta = \overline{\beta_0}$ para $\mu = \lambda$.

Algo interessante a se notar é o frequente aparecimento do termo $\lambda + 2\mu$ nas cálculos, este fator está relacionado com o módulo de Young bidimensional, que é dado por

$$S_{2D} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad (\text{ao passo que } S_{3D} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}). \quad (4.77)$$

Porém, utilizar esta definição do módulo de Young pode não ser adequado, uma vez que a definição do *strain* que estamos utilizando ($u_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i h \partial_j h)$) ainda é tridimensional, válida para uma espessura fina. Devemos ter em mente que para passarmos de fato a equações constitutivamente bidimensionais é necessário reescalonar as quantidades que estamos trabalhando, tomando o limite para espessura da folha indo a zero. Contudo $\lambda + 2\mu$ ainda tem significado físico claro no presente contexto, consultando a literatura, sobretudo de física em sismologia (Mavko *et al.*, 2020; Aki e Richards, 2002), percebe-se que é comum definir-se a quantidade $M = \lambda + 2\mu$ para representar o *stress uniaxial*, isto é, uma medida da resistência de um material a deformações sob uma tensão aplicada em uma única direção quando as outras direções estão livres para se deformar lateralmente. Em particular, se essas tensões produzirem vibrações, tem-se o chamado *P-wave modulus* dado por $V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, onde V_p é a velocidade de propagação da onda e ρ é a densidade do material. Nota-se ainda que com a determinação por (4.76) podemos avaliar o comportamento das constantes de Lamé em ambos os *displacements*.

Figura 7 – Variações de λ e μ em u_r .



Fonte: Obtido pelo autor.

Constata-se que a aproximação u_r consegue capturar o comportamento das variações dos coeficientes de Lamé, uma vez que podemos ver em ambas as figuras, 6 e 7, que os incrementos em μ tendem a aumentar contribuições $u_r^{(B)}, u_r^{(A)} > 0$ enquanto para λ temos o comportamento contrário. Uma vez determinados os deslocamentos, podemos agora prosseguir para a adaptação da equação de Dirac, em particular, vamos analisar como os deslocamentos associados à perturbação $h(r) = \exp -\frac{r^2}{b^2}$ afetam a dinâmica fermiônica, tanto considerando $u^{(A)}$ quanto a aproximação $u_r^{(B)}$ a fim de avaliar se há diferenças significativas.

5 GEOMETRIA DA DEFORMAÇÃO GAUSSIANA

5.1 Construindo a métrica com $u_r^{(A)}$

Durante o desenvolvimento torna-se adequado fazermos uma distinção entre os índices associados à métrica plana e curva. Neste sentido, vamos reservar a partir de então os índices gregos (μ, ν, ρ, \dots) e os latinos intermediários (i, j, k, \dots) ao espaço curvo, de forma que $\mu \rightarrow \{t, r, \theta\}$ e $i \rightarrow \{r, \theta\}$. Os índices latinos iniciais (a, b, c, \dots) ficarão reservados ao espaço *flat*, para evitar equívocos, tomarão valores $a \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Portanto temos de (3.12)

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2u_{ij} \quad ; (\text{com } i = r, \theta), \quad (5.1)$$

a deformação gaussiana $h = h(r)$ e os *displacements* com contribuições puramente radiais vão implicar, em (4.9), que teremos apenas as componentes no tensor de strain

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \partial_r u_r + (\partial_r h)^2 \\ u_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} \\ u_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

utilizando $u_r^{(A)}$, que é o caso mais geral, as componentes não nulas serão dadas por

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{h_0^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \left(-2\sqrt{2\pi}b^2\lambda r^2 + \sqrt{2\pi}b^4 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) - 8(\sqrt{2\pi} - 2)r^4(\lambda + 2\mu) \right)}{4b^4r^2(\lambda + 2\mu)} \\ u_{\theta\theta} &= -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}h_0^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \left(b^2 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) - 2r^2(\lambda + 2\mu) \right)}{2b^2r^2(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Então a métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -g_{rr}, -g_{\theta\theta})$ terá componentes espaciais

$$\begin{aligned} g_{rr} &= 1 + \frac{h_0^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \left(-2\sqrt{2\pi}b^2\lambda r^2 + \sqrt{2\pi}b^4 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) \right)}{2b^4r^2(\lambda + 2\mu)} \\ &\quad - h_0^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \frac{8(\sqrt{2\pi} - 2)r^4(\lambda + 2\mu)}{2b^4r^2(\lambda + 2\mu)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

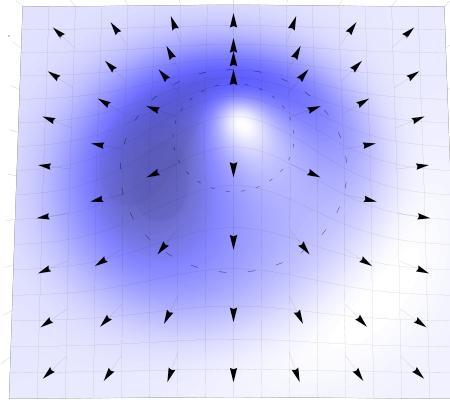
e

$$g_{\theta\theta} = r^2 + \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}h_0^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \left(2r^2(\lambda + 2\mu) - b^2 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) \right)}{b^2(\lambda + 2\mu)}. \quad (5.5)$$

Nota-se que, como $h(r) = \exp(-\frac{r^2}{b^2})$, o parâmetro b , que mede a abertura da gaussiana, deve ter dimensão de comprimento, de forma que vemos que as componentes estão

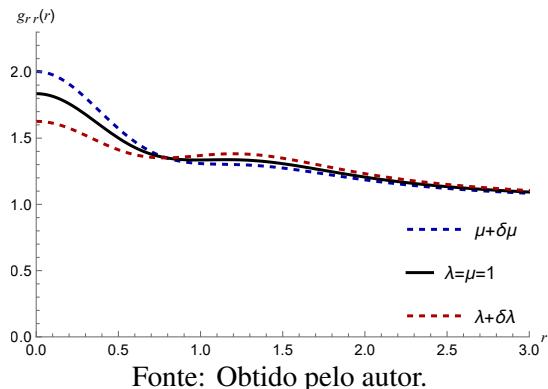
dimensionalmente corretas, isto é, g_{rr} é adimensional e $g_{\theta\theta}$ possui dimensão canônica $[L]^2$, de tal modo que ds^2 permanece consistente dimensionalmente. Notemos também que podemos naturalmente interpretar as deformações *out-plane* como curvaturas tais que induzem um campo de deformação radial dado pelos *displacements in-plane*, como na figura 8. Podemos, além disso, analisar como os parâmetros geométricos alteram o comportamento da métrica (gráficos 9 e 10).

Figura 8 – *Displacements* induzidos pela curvatura gaussiana.



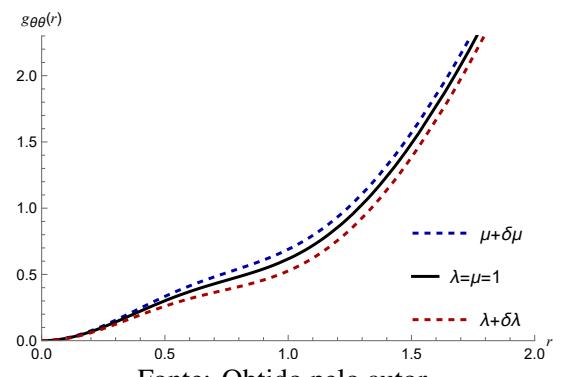
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Variações na componente radial devido contribuições mecânicas



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 10 – Variações na componente angular devido contribuições mecânicas.



Fonte: Obtido pelo autor.

É interessante notar que, além da parte radial, a componente angular da métrica também é modificada, o que não é particularmente esperado uma vez que a geometria possui simetria angular. Essa mudança se deve à natureza do tensor de *strain*, que em coordenadas cilíndricas, como verificamos na seção 4.1, inclui alterações em $g_{\theta\theta}$ mesmo se temos um vetor de *displacement* puramente radial. Também será útil obter expressões aproximadas válidas próximas

à origem. Neste caso vamos ter

$$\begin{aligned} g_{rr} &\approx 1 + C_1 r^2 + C_2 \\ g_{\theta\theta} &\approx C_3 r^2, \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde as constantes são dadas por

$$\begin{aligned} C_1 &= h_0^2 \frac{(3\sqrt{2\pi}\lambda - 18\sqrt{2\pi}\mu + 32\mu)}{4\mu b^4} \\ C_2 &= -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}h_0^2\lambda}{2b^2\mu} + \frac{\sqrt{\pi}h_0^2}{\sqrt{2}b^2} \\ C_3 &= 1 + \frac{\sqrt{2\pi}h_0^2\mu}{b^2(\lambda + 2\mu)}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

e aqui podemos então tomar novamente $\alpha = \frac{h_0}{b}$, e vamos ficar com

$$g_{rr} \approx 1 + \alpha^2 r^2 C'_1 + \alpha^2 C'_2 := g_{rr}, \tag{5.8}$$

em que C'_1 e C'_2 são apenas as mesmas constantes redefinidas fatorando α^2 . Reescrevendo dessa forma, como ocorre também no caso mais simples analisado em (Juan *et al.*, 2007), podemos notar que para $b \gg h_0$ temos de forma equivalente

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_{rr} = 1. \tag{5.9}$$

Posteriormente isto será útil para determinação de aproximações analíticas das funções de ondas. Agora devemos prosseguir para a construção da equação de Dirac consistente com uma partícula vivendo na superfície descrita por esta geometria. A relação entre curvatura e campos efetivos em materiais bem dimensionais é um fato bem conhecido na literatura acadêmica (Juan *et al.*, 2007; Juan *et al.*, 2013).

5.2 Curvatura

Segue então que uma vez que temos a métrica podemos calcular a curvatura da superfície utilizando a mesmas técnicas de geometria diferencial que em relatividade geral, mais especificamente, sabemos que o tensor de Riemann é dado por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{5.10}$$

onde os símbolos de Christoffel são definidos como de costume por

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \tag{5.11}$$

Vamos considerar tanto o caso com $u_r^{(A)}$ quanto com $u_r^{(B)}$. Para o primeiro apenas as seguintes contribuições serão não nulas

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{2r \left(\sqrt{2\pi} h_0^2 (b^2 \mu - 2r^2(\lambda + 2\mu)) + b^4 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) \right)}{\sqrt{2\pi} h_0^2 b^2 \left(2r^2(\lambda + 2\mu) - b^2 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) \right) + 2b^4 r^2 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu)} \quad (5.12)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{2r^3 \left(\sqrt{2\pi} h_0^2 (b^2 \mu - 2r^2(\lambda + 2\mu)) + b^4 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) \right)}{h_0^2 \left(2\sqrt{2\pi} b^2 \lambda r^2 - \left(\sqrt{2\pi} b^4 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) \right) + 8 \left(\sqrt{2\pi} - 2 \right) r^4 (\lambda + 2\mu) \right) - 2b^4 r^2 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu)} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r = & -\frac{2h_0^2 \left(-2\sqrt{2\pi} b^4 r^2 (\lambda + \mu) + 4b^2 r^4 \left((\sqrt{2\pi} - 4) \lambda + 4 (\sqrt{2\pi} - 2) \mu \right) \right)}{h_0^2 b^2 r \left(-2\sqrt{2\pi} b^2 \lambda r^2 + \sqrt{2\pi} b^4 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) - 8 \left(\sqrt{2\pi} - 2 \right) r^4 (\lambda + 2\mu) \right) + 2b^6 r^3 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu)} + \\ & + \frac{\sqrt{2\pi} b^6 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) - 16 \left(\sqrt{2\pi} - 2 \right) r^6 (\lambda + 2\mu)}{h_0^2 b^2 r \left(-2\sqrt{2\pi} b^2 \lambda r^2 + \sqrt{2\pi} b^4 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} - 1 \right) (\lambda + \mu) - 8 \left(\sqrt{2\pi} - 2 \right) r^4 (\lambda + 2\mu) \right) + 2b^6 r^3 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

ao passo que tomado a aproximação $u_r^{(B)}$ vamos ter

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{4h_0^2 r (b^2 - 4r^2) + b^3 e^{\frac{2r^2}{b^2}} \left(4b(2\beta + 1)r - \sqrt{2\pi} h_0^2 \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right) \right)}{2b^2 r \left(b e^{\frac{2r^2}{b^2}} \left(2b(2\beta + 1)r - \sqrt{2\pi} h_0^2 \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right) \right) + 4h_0^2 r \right)} \quad (5.15)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2(-2\beta - 1)} \left[2r \left(\frac{h_0^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} (b^2 - 4r^2)}{b^4} + 2\beta + 1 \right) - \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0^2 \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right)}{b} \right] \quad (5.16)$$

$$\Gamma_{rr}^r = 0, \quad (5.17)$$

onde esta última decorre de (4.60), ou seja, do fato de que neste regime a perturbação tenderá a uma contribuição constante. A saber, quando fazemos $u_r^{(A)} \rightarrow 0$, isto é, quando descartamos as deformações *in-plane* mecânicas induzidas pela curvatura gaussiana, ficamos com os símbolos de Christoffel da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\ u_r^{(A)} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{1 + \gamma f(r)} \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{\gamma \partial_r f(r)}{(1 + \gamma f(r))}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde aqui

$$\gamma = \frac{8h_0^2}{b^4} \quad \text{e} \quad f(r) = r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}. \quad (5.19)$$

Estas são exatamente as mesmas expressões obtidas em (Juan *et al.*, 2007) para o caso das deformações puramente geométricas, o que mostra a consistência do formalismo adotado. De toda forma, a curvatura escalar \mathcal{R} será dada por

$$\mathcal{R} = R_{\sigma\nu}g^{\sigma\nu}, \quad (5.20)$$

onde $R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^\rho$ é o tensor de curvatura de Ricci. Uma vez que a métrica é diagonal vamos ter

$$\mathcal{R} = R_{rr}g^{rr} + R_{\theta\theta}g^{\theta\theta} = g^{rr} \left(R_{rrr}^r + R_{r\theta r}^\theta \right) + g^{\theta\theta} \left(R_{\theta\theta\theta}^\theta + R_{\theta r\theta}^r \right) = g^{rr} R_{r\theta r}^\theta + g^{\theta\theta} R_{\theta r\theta}^r, \quad (5.21)$$

pois R_{rrr}^r e $R_{\theta\theta\theta}^\theta$ são identicamente nulos. Calculando separadamente as demais contribuições temos

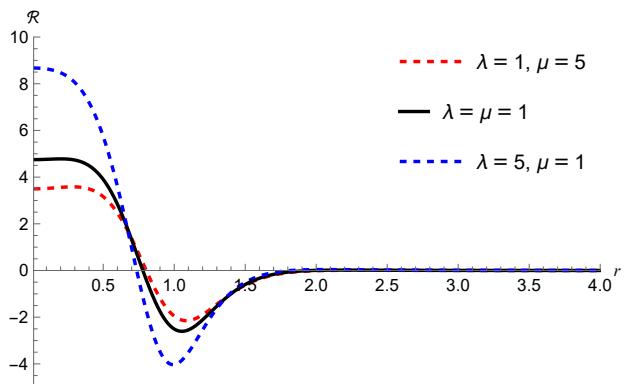
$$\begin{aligned} R_{r\theta r}^\theta &= \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta \Gamma_{rr}^\lambda - \Gamma_{r\lambda}^\theta \Gamma_{\theta r}^\lambda = \\ &= -\partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta \end{aligned} \quad (5.22)$$

e

$$\begin{aligned} R_{\theta r\theta}^r &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{r\lambda}^r \Gamma_{\theta\theta}^\lambda - \Gamma_{\theta\lambda}^r \Gamma_{r\theta}^\lambda = \\ &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Substituindo em (5.20) obtém-se uma expressão demasiado longa, de tal forma que é mais elucidativo considerar o comportamento numérico, bem como as variações nos coeficientes de Lamé conforme segue no gráfico 11

Figura 11 – Curvatura escalar variando os coeficientes de Lamé. Na linha contínua $h_0 = 1$, $b = 1$ e $\lambda = \mu = 1$. Utilizando $u_r^{(A)}$.



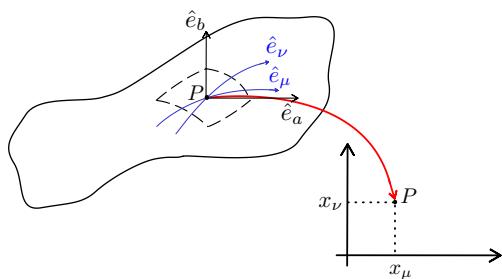
Fonte: Obtido pelo autor.

6 EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS CURVOS

6.1 Formalismo de Tetradas

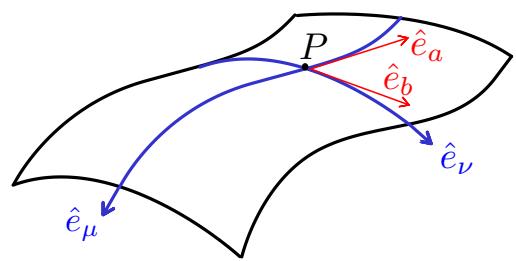
A equação de Dirac é usualmente definida sob a métrica de Minkowski, que possui curvatura nula, para passarmos ao espaço curvo vamos utilizar o formalismo das *vielbeins* (ou tetradas). Podemos pensar nas *vielbeins* como transformações de mudança de base, isto é, dada uma variedade geral, esta deve ser localmente *flat*, tomamos um ponto P situado no espaço tangente, então defini-se uma base dita *base-coordenada* ortogonal $\{\hat{e}_a, \hat{e}_b\}$, em P , tangente ao espaço curvo, ao passo que defini-se uma *não-coordenada*, não necessariamente ortogonal, $\{\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu\}$ parametrizada sobre o espaço global. As transformações que levam uma base para outra são as chamadas tetradas ou *vielbeins*.

Figura 12 – Bases coordenadas e não coordenadas numa variedade geral.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – P é descrito localmente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Estas estão definidas ponto a ponto no espaço, tal que

$$\hat{e}_a(x) = e^\mu_a(x) \hat{e}_\mu, \quad (6.1)$$

naturalmente as métricas do espaço global e do tangente serão dadas respectivamente por

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle = \langle \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu \rangle \quad (6.2)$$

e

$$\eta_{ab} = \langle \hat{e}_a, \hat{e}_b \rangle, \quad (6.3)$$

segue destas que

$$\langle e^\mu_a e_\mu, e^\nu_b e_\nu \rangle = e^\mu_a e^\nu_b \langle \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu \rangle$$

$$\Rightarrow \eta_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu}. \quad (6.4)$$

Esta relação é particularmente importante, pois através dela conectamos o espaço curvo com o flat. Além disso para que a inversão seja possível, ou seja, $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$, devemos ter

$$\begin{aligned} e_b^\mu e_\mu^a &= \delta_b^a \\ e_a^\mu e_\nu^a &= \delta_\nu^\mu, \end{aligned} \tag{6.5}$$

ou seja, as tetradas satisfazem ortogonalidade em ambos os espaços *flat* e curvo. Outro fato relevante é que as tetradas tem simetria local de Lorentz (Nakahara, 2018), ou seja

$$\hat{e}'_b = \Lambda_b^a(x) \hat{e}_b, \tag{6.6}$$

onde as Λ são as matrizes de Lorentz. Também, o longo do espaço curvo, define-se então uma base dual

$$\hat{\Theta}^a(x) = e_\mu^a dx^\mu, \tag{6.7}$$

tal que

$$\hat{\Theta}^a(\hat{e}_b) = e_\mu^a dx^\mu(\hat{e}_b) = e_\mu^a e_b^\nu \underbrace{dx^\mu(e_\nu)}_{\delta_{\mu\nu}} \tag{6.8}$$

$$\therefore \hat{\Theta}^a(\hat{e}_b) = \delta_{ab}. \tag{6.9}$$

Observa-se imediatamente a estrutura de 1-formas diferenciais, em particular, as *vielbeins* satisfazem as chamadas equações de estrutura de Cartan (Nakahara, 2018) que são

$$\begin{cases} d\hat{\Theta}^a + \omega_b^a \wedge \hat{\Theta}^b = T^a \\ d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = R_b^a \end{cases}, \tag{6.10}$$

onde aqui d é a derivada exterior e ω_c^a são as 1-formas de conexão dadas por

$$\omega_a^c = \omega_{\mu a}^c dx^\mu, \tag{6.11}$$

ou $\omega_a^c = \omega_{\mu a}^c e_b^\mu d\hat{\Theta}^b$, e T^a e R_b^a são respectivamente as 2-formas de torção e curvatura. A saber, nesta pesquisa estamos considerando a situação livre de torção, ou seja, $T^a = 0$. É importante notar que as conexões são sensíveis às tetradas, desta forma as equações de ortogonalidade (6.5) são especialmente úteis para, dada uma escolha arbitrária de uma *vilebein*, fixarmos a outra de maneira consistente.

Considerando a derivada, e a definição dos símbolos de Christoffel em termos das bases ($\nabla_\mu e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho$) as conexões são definidas da seguinte(Nakahara, 2018) forma

$$\nabla_a \hat{e}_b = \underbrace{e_a^\mu \nabla_\mu}_{\nabla_{(\hat{e}_a)}} \hat{e}_b ,$$

onde queremos determinar $\nabla_a \hat{e}_b = \omega_{ab}^c \hat{e}_c$, então

$$\begin{aligned} \nabla_a \hat{e}_b &= e_a^\mu \nabla_\mu (e_b^\nu e_\nu) = \\ &= e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu e_\nu + e_b^\nu \nabla_\mu e_\nu) = \\ &= e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu e_\nu + e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho) = \\ &e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu + e_b^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu) e_\nu = \end{aligned} \tag{6.12}$$

dessa forma, como $\hat{e}_\nu = e_\nu^c \hat{e}_c$, considera-se

$$\nabla_a \hat{e}_b = \omega_{ab}^c e_c^\nu e_\nu \tag{6.13}$$

e então

$$\omega_{ab}^c e_c^\nu = e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu + e_b^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu) \tag{6.14}$$

$$\Rightarrow \omega_{ab}^c = e_\nu^c e_a^\mu \nabla_\mu e_b^\nu \tag{6.15}$$

6.2 Conexão de spin e abordagens efetivas

Para construir a equação de Dirac adequada a uma dada superfície curva devemos corrigir a derivada usual pela derivada covariante. Entretanto a equação de Dirac é dada, sob a métrica de Minkowski $\eta_{ab} = \text{diag}(+ - -)$ por

$$\hbar(i\gamma^a \partial_a + mc)\Psi = 0 . \tag{6.16}$$

A fim de redefinir a equação sob a métrica $g_{\mu\nu}$ podemos considerar a contração das matrizes de Dirac γ^a com as tetradas para refini-las no espaço curvo, isto é

$$\gamma^\mu = \gamma^a e_a^\mu , \tag{6.17}$$

em particular deve-se lembrar que estas matrizes satisfazem a álgebra de Clifford em quaisquer espaços onde a equação de Dirac esteja definida, isto é

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} . \tag{6.18}$$

Vamos considerar aqui a mesma representação utilizada em (Silva *et al.*, 2024), que é dada por

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma_3 \\ \gamma_1 &= -i\sigma_1 \\ \gamma_2 &= -i\sigma_2,\end{aligned}\tag{6.19}$$

onde as σ_a são as matrizes de Pauli. Além da alteração nas matrizes de Dirac também deve-se considerar as alterações em Ψ que como sabemos, por consequência das simetrias de Lorentz, transforma-se por

$$\Psi' = e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}\Sigma^{ab}}\Psi,\tag{6.20}$$

que caracteriza a transformação spinorial, em particular, para garantir correção adequada do transporte paralelo do spinor também sabe-se que a derivada covariante fica dada por

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu + \Omega_\mu,\tag{6.21}$$

com Ω_μ usualmente dado por

$$\Omega_\mu = \frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}\Sigma_{ab} \quad ; \left(\text{com } \Sigma^{ab} = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \right).\tag{6.22}$$

Entretanto, para alinharmos nossos resultados aos demais casos estudados na literatura vamos considerar a convenção real utilizada em abordagens efetivas que partem da equação de Dirac (Juan *et al.*, 2007; Watanabe *et al.*, 2015; Silva *et al.*, 2024), nestas os fatores imaginários são absorvidos nos demais parâmetros tal que trabalha-se diretamente com

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}\Sigma_{ab} \quad ; \left(\text{com } \Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \right).\tag{6.23}$$

Os campos de deformação, que implicarão em potenciais efetivos, surgem da geometria cuja informação estará especialmente armazenada nos termos de conexão de spin Ω_μ . Tomando a equação (6.15) e multiplicando-a por e_μ^d e manipulando os índices podemos escrever

$$\omega_{\mu b}^a = e_\nu^a \left(\partial_\mu e_b^\nu + e_b^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu \right),\tag{6.24}$$

Como mencionado anteriormente, a escolha de tetradas é arbitrária, desde que as (6.5) sejam satisfeitas. Dessa maneira vamos considerar uma escolha suficientemente geral dada por

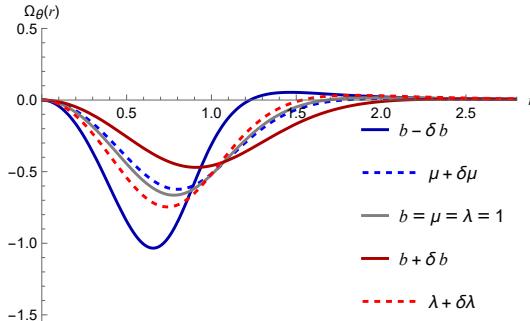
$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{rr}} \cos \theta & -\sqrt{g_{\theta\theta}} \sin \theta \\ 0 & \sqrt{g_{rr}} \sin \theta & \sqrt{g_{\theta\theta}} \cos \theta \end{pmatrix}.\tag{6.25}$$

Então para o caso mais geral que estamos analisando vemos que, como esperado, a conexão de spin é sensível às contribuições mecânicas, que se fazem evidentes pelas variações nos parâmetros de Lamé (figura 14). Devido à simetria angular, teremos $\Omega_r = 0$ de forma que só teremos contribuição de Ω_θ . Em posse da conexão de spin e suas componentes podemos prosseguir utilizando a prescrição adotada em (Arias *et al.*, 2015), e identificar única componente não nula como o potencial vetor do campo efetivo, ou seja, $\mathcal{A}_\theta = \omega_\theta^{12}$ tal que bidimensionalmente temos o pseudocampo é dado em coordenadas curvilíneas por

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu\nu} \nabla_\mu \mathcal{A}_\nu, \quad (6.26)$$

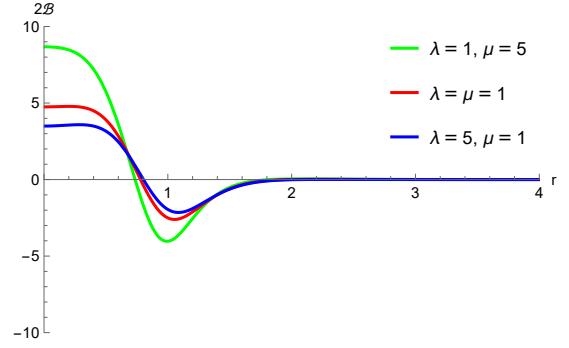
em que aqui $\epsilon^{\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita bidimensional e $|g|$ o determinante da métrica. Assim como a curvatura, tem uma expressão demasiado longa é torna-se mais útil avaliar o gráfico 2.1.

Figura 14 – Variações dos coeficientes de Lamé e dos parâmetros da gaussiana na conexão de spin. Aqui $\delta\lambda = \delta\mu = 2$ e $\delta b = 0.2$; foi fixado $h_0 = 1$. Utilizando $u_r^{(A)}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 15 – Variações do pseudo-campo magnético com os coeficientes de Lamé. Aqui tomou-se $h_0 = b = 1$. Utilizando $u_r^{(A)}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

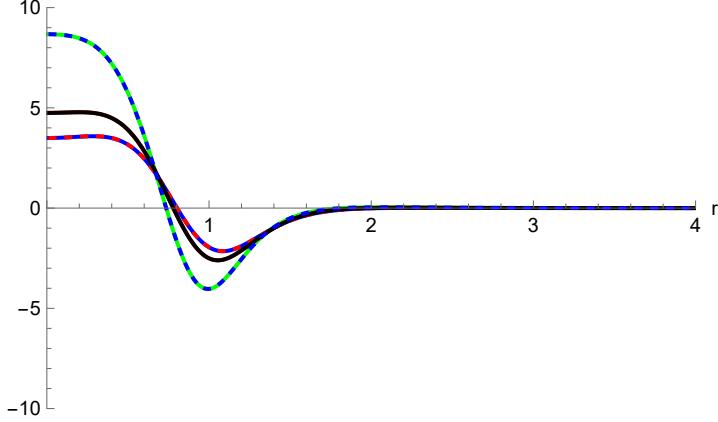
Ocorre que, de fato, observando 15 nota-se imediatamente a semelhança com 11, tal que somos impelidos a avaliar a razão entre o campo efetivo e a curvatura escalar. Em particular ao tomarmos

$$2\mathcal{B} = \varrho \mathcal{R}, \quad (6.27)$$

obtemos que está razão, conforme as figuras 16 e 3.21, é válida para $\varrho = 1$, ou seja

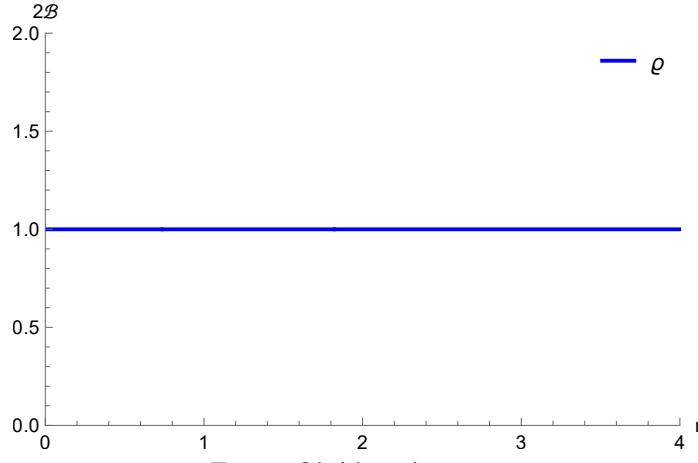
$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \mathcal{R}. \quad (6.28)$$

Figura 16 – Sobreposição dos gráficos 15 e 11.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 17 – Razão $\frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{R}}$. Que verifica a proporcionalidade.



Fonte: Obtido pelo autor.

Ocorre que, é útil relembrarmos que a chamada curvatura gaussiana é definida através

de

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_1, x_2) = & \frac{1}{2|g|} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \right. \\ & - \frac{g_{11}}{4|g|^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} \right)^2 \right]^2 - \\ & - \frac{g_{22}}{4|g|^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} \right)^2 \right]^2 + \\ & \left. + \frac{g_{12}}{4|g|^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

em particular podemos calcular

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu\lambda\rho}, \quad (6.30)$$

desenvolvendo isto, lembrando que estamos no caso bidimensional, obtém-se

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \mathcal{K} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) , \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{\mu\nu} &= g^{\sigma\rho} R_{\mu\sigma\nu\rho} = g^{\sigma\rho} \mathcal{K} (g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}) = \\ &= \mathcal{K} (\delta_\rho^\sigma g_{\mu\nu} - g_{\mu\rho}\delta_\nu^\rho) = \mathcal{K} g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.32)$$

e portanto

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 2\mathcal{K} , \quad (6.33)$$

ou seja, em duas dimensões, a curvatura gaussiana é metade da escalar. Dessa forma a relação (6.28) se reduz a

$$\mathcal{B} = \mathcal{K} , \quad (6.34)$$

ou seja, o pseudocampo nada mais é do que a própria curvatura escalar da superfície. Para todos os casos em que testamos essa relação (Silva *et al.*, 2024; Watanabe *et al.*, 2015; Bueno *et al.*, 2012) ela se verificou verdadeira. É interessante notar que, como a conexão de spin é sensível as tetradas (6.25), de maneira que o ângulo θ funciona como um calibre a se fixar. Durante o desenvolvimento percebemos que

$$\mathcal{B}(r, \theta, z, \partial_r h, u_r) \neq \mathcal{B}(r, 0, z, \partial_r h, u_r) , \quad (6.35)$$

porém

$$\mathcal{B}(r, \theta, z, \partial_r h, 0) = \mathcal{B}(r, 0, z, \partial_r h, 0) , \quad (6.36)$$

portanto segue que o campo gerado pelas deformações exclusivamente geométricas é invariante de gauge, se contabilizarmos as deformações mecânicas, a invariância é perdida. Em linhas gerais, os termos de deslocamento parecem quebrar esta simetria de calibre.

7 DINÂMICA FERMIÔNICA E SOLUÇÕES POR HOLONOMIAS: SEM INTERAÇÃO EXTERNA

Nesta seção vamos resolver utilizando diferentes abordagens ligeiramente distintas são elas:

1. **Primeira abordagem:** Resolver introduzindo as constantes de Lamé no caso do trabalho (Juan *et al.*, 2007).
2. **Segunda abordagem:** Utilizando diretamente a aproximação $u_r^{(B)}$.
3. **Terceira abordagem:** Utilizando $u_r^{(A)}$.

Dessa maneira poderemos avaliar se há diferença considerável entre estas.

7.1 Primeira abordagem

Como mencionado no início desta dissertação, no trabalho (Juan *et al.*, 2007) os autores consideram um modelo em que despreza-se as contribuições explícitas dos deslocamentos *in-plane*, de tal forma que consideram o elemento de linha dado por (2.1), isto é

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 f(r)) dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (7.1)$$

onde $\alpha = \frac{h_0}{b}$. Entretanto mostramos na seção 4.3 que

$$\beta = \alpha^2 \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu}{(\lambda + 2\mu)} = \frac{h_0^2}{b^2} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu}{(\lambda + 2\mu)}, \quad (7.2)$$

portanto o elemento de linha pode ser escrito por

$$\begin{aligned} dl'^2 &= \left(1 + \frac{h_0^2}{b^2} f(r)\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 = \left(1 + \frac{h_0^2}{b^2} f(r)\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 = \\ &= \left[1 + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \beta\right) f(r)\right] dr^2 + r^2 d\theta^2, \end{aligned} \quad (7.3)$$

em particular, por conveniência, vamos escolher aqui $\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, dessa forma vamos trabalhar com

$$dl'^2 = \left[1 + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\right) f(r)\right] dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (7.4)$$

Então podemos avaliar como as alterações nos coeficientes de Lamé afetam a dinâmica dos fermions sujeitos a esta métrica. Note que isso sugere que qualquer perturbação radial é modulada pelo stress uniaxial discutido na seção 4.3. Assumindo que o espinor está contido em um espaço de $(2 + 1)$ dimensões e que, assim como em outros modelos similares, ele não possui massa, a equação de Dirac fica

$$i\hbar\gamma^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu) \Psi = 0. \quad (7.5)$$

Além disso, para uma abordagem efetiva, como no caso do grafeno (Vozmediano *et al.*, 2010; Katsnelson, 2007), é usual trocar-se a velocidade da luz c pela velocidade de Fermi v_F (Juan *et al.*, 2012) dos férmiões no material, dessa forma vamos expandindo a soma obtém-se

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar v_F \gamma_0 [\gamma^r \partial_r + \gamma^\theta (\partial_\theta + \Omega_\theta)], \quad (7.6)$$

onde estamos utilizando o fato de que as deformações se dão apenas nas componentes espaciais, isto é, $\Omega_t = 0$. A expressão acima nos permite identificar o hamiltoniano de Dirac como sendo

$$\mathcal{H}_D = -i\hbar v_F \gamma_0 [\gamma^r \partial_r + \gamma^\theta (\partial_\theta + \Omega_\theta)], \quad (7.7)$$

com a escolha de *vielbeins* (6.25) as matrizes de Dirac redefinidas ficam

$$\begin{aligned} \gamma^t &= \gamma^0 \\ \gamma^r &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{rr}}} \gamma^1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{rr}}} \gamma^2 \\ \gamma^\theta &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \gamma^1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \gamma^2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Desenvolvendo o Hamiltoniano com isto temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -i\hbar v_F \left[\left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{rr}}} \sigma_1 - \frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{rr}}} \sigma_2 \right) \partial_r - \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \sigma_1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \sigma_2 \right) \partial_\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \sigma_2 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \sigma_1 \right) \omega_\theta^{21} \right], \end{aligned} \quad (7.9)$$

em particular, vamos fixar $\theta = 0$, isto assegura que as contribuições Γ_θ que surgirão irão a zero para $h_0 \rightarrow 0$. Então temos

$$\mathcal{H} = -i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial_r}{\sqrt{g_{rr}}} + i \frac{\partial_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} + \Gamma_\theta \\ \frac{\partial_r}{\sqrt{g_{rr}}} - i \frac{\partial_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} + \Gamma_\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

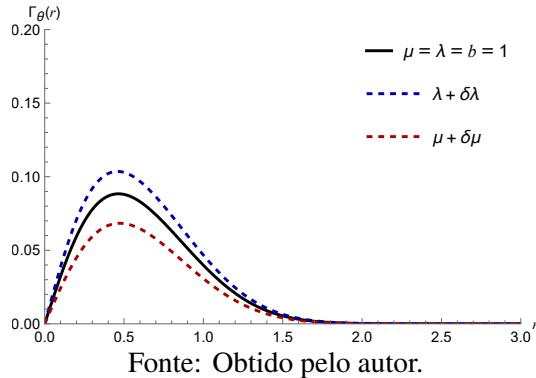
onde estamos rotulando os termos que surgem da conexão de spin por

$$\Gamma_\theta(r) = \frac{1}{4} \frac{\omega_\theta^{12}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}. \quad (7.11)$$

Notemos que $\Gamma_\theta(r)$ atua com um potencial geométrico no Hamiltoniano. A partir da expressão (6.23) é possível concluir que, para $h_0 = 0$, este termo se anula. Isto só é verdade pois uma vez que Γ_θ surge da conexão de spin, esta condição de contorno é completamente sensível à escolha de tetradas. Por exemplo, se (6.25) é explicitamente da forma $\text{diag}(1, \sqrt{g_{rr}}, \sqrt{g_{\theta\theta}})$, então, mesmo se fixarmos $h_0 = 0$, ainda restarão contribuições que decrescem com r , a saber $\lim_{h_0 \rightarrow 0} \Gamma_\theta \propto \frac{1}{r}$. Uma vez que as vielbeins definem referenciais locais, essas contribuições são os

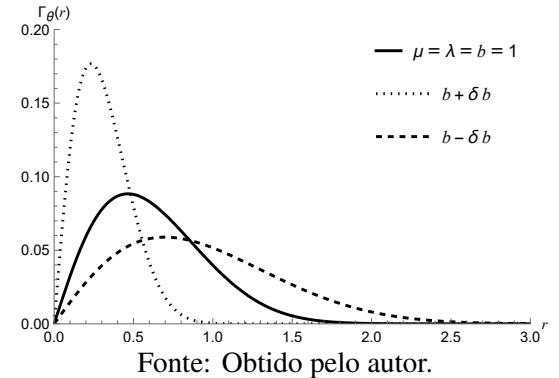
efeitos das mudanças na base não-coordenada. Então, a escolha $\theta = 0$ garante que no caso *flat*, ou seja, $h_0 = 0$, não existe potencial geométrico e a partícula é completamente livre. Dado que nos determinamos o Hamiltoniano, o caminho mais natural para estudar os efeitos das deformações é procurar por estados estacionários (Silva *et al.*, 2024; Yeşiltaş *et al.*, 2022; Monteiro *et al.*, 2023).

Figura 18 – Variação de Γ_θ com os coeficientes de Lamé.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 19 – Variação de Γ_θ com b . Na curva contínua $h_0 = 1$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Também pode-se notar, a partir da figura 18 , que o potencial é atrativo próximo à origem porém depois torna-se repulsivo. Entretanto, a barreira é finita e anula-se assintoticamente. Além disso, também é possível verificar numericamente que para valores muito pequenos de b , o potencial diverge. Como consequência da álgebra das matrizes de Dirac e de considerarmos o caso não massivo, assim como em modelos similares, os spinores ficam dados como na representação de Weyl com duas componentes (Alisultanov e Idrisov, 2023; Nissinen e Volovik, 2017). A fim de obter estados estacionários vamos considerar soluções separáveis da forma

$$\Psi(r, \theta, t) = e^{i\frac{E}{\hbar}t} e^{im\theta} \psi(r) \quad (7.12)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

onde E é energia e m o momento angular total $m = l + \frac{1}{2}$. Segue então

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi. \quad (7.13)$$

Desenvolvendo isto com o hamiltoniano 7.10 obtemos duas equações acopladas

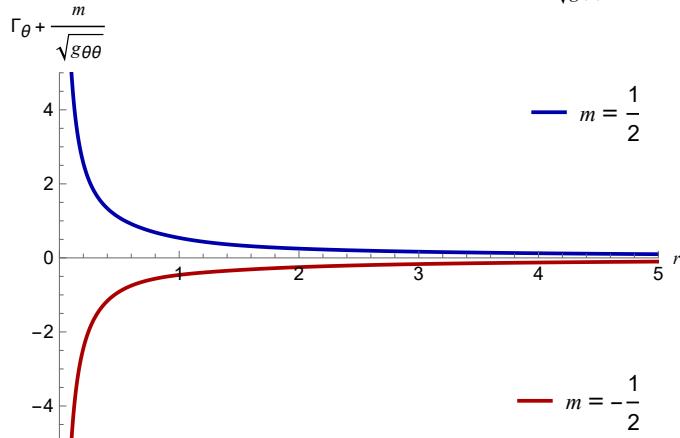
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\partial_r\psi_2 - \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\psi_2 + \Gamma_\theta\psi_2 = \epsilon\psi_1 \\ \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\partial_r\psi_1 + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\psi_1 + \Gamma_\theta\psi_1 = \epsilon\psi_2, \end{cases} \quad (7.14)$$

em que definimos $\epsilon = \frac{E}{\hbar v_F}$. Para desacoplar, vamos definir os seguintes operadores

$$O_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \partial_r \pm \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} + \Gamma_\theta(r). \quad (7.15)$$

Também observa-se que podemos interpretar o termo $\frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} + \Gamma_\theta$ como um potencial total e então, desta perspectiva, o fator $\frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$ tende a zero próximo à origem, causando um comportamento divergente. A saber, esta natureza é governada pelos termos geométricos e pela paridade de m , como pode ser visto no gráfico 19.

Figura 20 – Comportamento de $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Definindo os operadores 7.15 acima a equação (7.13) pode ser reescrita através de

$$\begin{pmatrix} 0 & -iO_2 \\ -iO_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

tal que

$$\begin{cases} -iO_2\psi_2 = \epsilon\psi_1 \\ -iO_1\psi_1 = \epsilon\psi_2, \end{cases} \quad (7.17)$$

multiplicando a primeira por $-iO_1$ e a segunda por $-iO_2$, consegue-se desacoplar as equações

$$\begin{aligned} -O_1O_2\psi_2 &= \epsilon^2\psi_2 \\ -O_2O_1\psi_1 &= \epsilon^2\psi_1. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Desenvolvendo a primeira temos

$$-\frac{\partial_r^2\psi_2}{g_{rr}} + \left(-\frac{2\Gamma_\theta}{\sqrt{g_{rr}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial_r g_{rr}}{g_{rr}^2} \right) \partial_r\psi_2 + \overline{U}_2^2\psi_2 = \epsilon^2\psi_2, \quad (7.19)$$

com

$$\overline{U}_2^2 = \left(\frac{m^2}{g_{\theta\theta}} - \frac{m\partial_r g_{\theta\theta}}{2g_{\theta\theta}^{3/2}\sqrt{g_{rr}}} - \frac{\partial_r \Gamma_\theta}{\sqrt{g_{rr}}} - \Gamma_\theta^2 \right). \quad (7.20)$$

De forma similar, a equação para ψ_1 é obtida fazendo a troca $m \rightarrow -m$. De maneira geral essa equação tem a seguinte forma explícita

$$\begin{aligned} & \left[\psi(r) \left(b^2 \mu r^2 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) \left(r \left(4 \sqrt{\frac{4\mu r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2(\lambda + 2\mu)}} + 1 + 8m^2 - 7 \right) - 4m\sqrt{r^2} \right) + \right. \right. \\ & + 4\mu r^5 \left(e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) + \mu (4m^2 - 1) \right) + b^4 e^{\frac{4r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu)^2 \left[r \left(\sqrt{\frac{4\mu r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2(\lambda + 2\mu)}} + 1 + m^2 - 1 \right) - m\sqrt{r^2} \right] \left. \right) - \\ & - r^2 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) \psi'(r) \left(4b^2 \mu r^2 \left(\sqrt{\frac{4\mu r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2(\lambda + 2\mu)}} + 1 - 2 \right) \right. \\ & \left. \left. + b^4 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) \left(\sqrt{\frac{4\mu r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2(\lambda + 2\mu)}} + 1 - 1 \right) + 8\mu r^4 \right) \right] - \psi''(r) = \epsilon^2 \psi(r). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Como é de se esperar, essa equação não tem solução analítica, contudo numericamente é facilmente resolvida e as soluções serão oscilações assintoticamente planas. Em especial, podemos definir

$$U_2^2 = g_{rr} \overline{U}_2^2 \quad (7.22)$$

e também

$$\mathcal{V}_F(r) = \frac{v_F}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad (7.23)$$

podemos chamar este termo de velocidade efetiva, pois depende da geometria; a saber, é esperado o aparecimento de uma velocidade de Fermi dependente da posição (Juan *et al.*, 2012). Prosseguindo também podemos, para facilitar as contas, redefinir a energia para absorver as dependências radiais

$$\varepsilon = \frac{E}{\hbar \mathcal{V}_F} = \frac{E \sqrt{g_{rr}}}{\hbar v_F}, \quad (7.24)$$

então

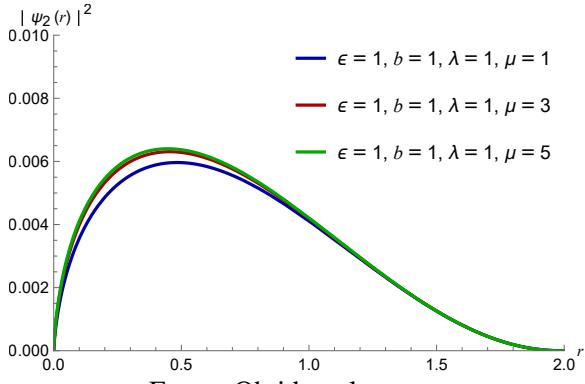
$$\varepsilon(r) = \sqrt{g_{rr}} \epsilon, \quad (7.25)$$

dessa forma, multiplicando a equação (7.19) por g_{rr} temos

$$-\partial_r^2\psi_2 + \left(-2\Gamma_\theta\sqrt{g_{rr}} + \frac{1}{2}\frac{\partial_r g_{rr}}{g_{rr}}\right)\partial_r\psi_2 + U_2^2\psi_2 = \varepsilon^2\psi_2, \quad (7.26)$$

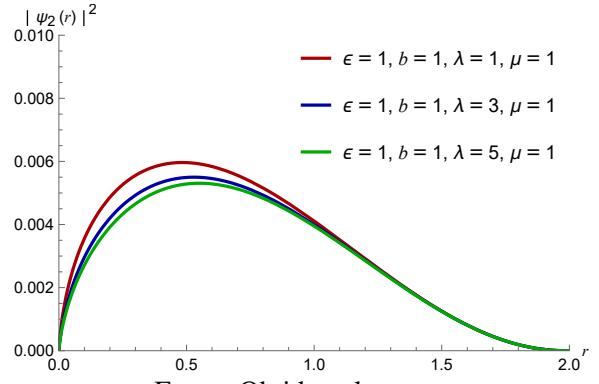
os gráficos das soluções seguem nos gráficos 21 e 22. Onde nota-se o deslocamento para a origem.

Figura 21 – Variação das densidades com μ .



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 22 – Variação das densidades com λ .



Fonte: Obtido pelo autor.

É que válido lembrar que para determinar a constante de normalização C_{Norm} , devemos considerar o jacobiano referente a métrica curva, ou seja

$$C_{\text{Norm}} \int \sqrt{\det g} |\psi(r)|^2 r dr = 1, \quad (7.27)$$

onde já estamos absorvendo o fator 2π . É importante mencionar que pode-se obter soluções de holonomias(Bueno *et al.*, 2012), uma *holonomia* nada mais é do que um efeito acumulado no transporte paralelo de um objeto ao longo de um caminho fechado em um espaço com conexão, em geral em um espaço com curvatura (Nakahara, 2018). Neste sentido, como é mostrado em (Silva *et al.*, 2024) estas holonomias surgem ao levar (7.26) para uma forma Klein-Gordon. Isso confere uma abordagem mais prática e, naturalmente, mais clara geometricamente. Para proceder com esta abordagem podemos procurar soluções da forma $\psi(r) = \zeta(r)\chi(r)$ então

$$\partial_r\psi(r) = \chi(r)\zeta'(r) + \zeta(r)\chi'(r) \quad (7.28)$$

e

$$\partial_r^2\psi = \chi(r)\zeta''(r) + 2\zeta'(r)\chi'(r) + \zeta(r)\chi''(r), \quad (7.29)$$

com isto a equação 7.26 torna-se

$$\begin{aligned} & \zeta(r)\chi(r) \left(-\frac{m\sqrt{g_{rr}}\partial_r g_{\theta\theta}}{2g_{\theta\theta}^{3/2}} + \frac{m^2 g_{rr}}{g_{\theta\theta}} - \sqrt{g_{rr}}\Gamma'_\theta(r) - \Gamma_\theta^2(r)g_{rr} \right) - \\ & - \left(\chi(r)\zeta''(r) + 2\zeta'(r)\chi'(r) + \zeta(r)\chi''(r) \right) + \\ & + \left(\chi(r)\zeta'(r) + \zeta(r)\chi'(r) \right) \left(\frac{\partial_r g_{rr}}{2g_{rr}} - 2\Gamma_\theta(r)\sqrt{g_{rr}} \right) = \epsilon^2 \zeta(r)\chi(r), \end{aligned} \quad (7.30)$$

para as contas ficarem mais tratáveis podemos escrever de mais compacta

$$-\chi(r)\zeta''(r) - 2\zeta'(r)\chi'(r) - \zeta(r)\chi''(r) + X \left(\chi(r)\zeta'(r) + \zeta(r)\chi'(r) \right) + Y\zeta(r)\chi(r) = \epsilon^2 \zeta(r)\chi(r), \quad (7.31)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial_r g_{rr}}{2g_{rr}} - 2\Gamma_\theta(r)\sqrt{g_{rr}} \\ Y &= -\frac{m\sqrt{g_{rr}}\partial_r g_{\theta\theta}}{2g_{\theta\theta}^{3/2}} + \frac{m^2 g_{rr}}{g_{\theta\theta}} - \sqrt{g_{rr}}\Gamma'_\theta(r) - \Gamma_\theta^2(r)g_{rr}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

fatorando χ

$$-\zeta(r)\chi''(r) + \phi'(r) \left(X\zeta(r) - 2\zeta'(r) \right) + \chi(r) \left(-\zeta''(r) + X\zeta'(r) + Y\zeta(r) \right) = \epsilon^2 \zeta(r)\chi(r), \quad (7.33)$$

dividindo por $\zeta(r)$ para obter uma equação para $\chi(r)$ temos

$$-\chi''(r) + \chi'(r) \left(X - \frac{2\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right) + \chi(r) \left(-\frac{\zeta''(r)}{\zeta(r)} + \frac{X\zeta'(r)}{\zeta(r)} + Y \right) = \epsilon^2 \chi(r). \quad (7.34)$$

Impondo a condição dos coeficientes de derivada primeira serem nulos, assim obtemos uma equação da forma Klein-Gordon, segue que

$$X(r) - \frac{2\zeta'(r)}{\zeta(r)} = 0, \quad (7.35)$$

que nos fornece a equação para fase

$$\zeta(r) = \zeta_0 e^{\int \frac{1}{2} X(r) dr} = \zeta_0 e^{\int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r g_{rr}}{2g_{rr}} - 2\Gamma_\theta(r)\sqrt{g_{rr}} \right) dr}. \quad (7.36)$$

Então resta finalmente a equação tipo KG

$$\underbrace{-\chi''(r) + \chi(r) \left(-\frac{\zeta''(r)}{\zeta(r)} + \frac{X\zeta'(r)}{\zeta(r)} + Y \right)}_{V_2^2} = \epsilon^2 \chi(r), \quad (7.37)$$

temos portanto da equação (7.35)

$$-\chi''(r) + \chi(r) \left(-\frac{\zeta''(r)}{\zeta(r)} + \frac{X^2}{2} + Y \right) = \epsilon^2 \chi(r) \quad (7.38)$$

além disso ainda de (7.35) segue

$$\begin{aligned} \zeta''(r) &= \frac{1}{2} \zeta(r) X'(r) + \frac{1}{2} X(r) \zeta'(r) \\ \frac{\zeta''(r)}{\zeta(r)} &= \frac{X'(r)}{2} + \frac{X(r) \zeta'(r)}{2 \zeta(r)}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

portanto temos

$$-\chi''(r) + \chi(r) \underbrace{\left(-\frac{X'(r)}{2} - \frac{X^2(r)}{4} + \frac{X^2}{2} + Y \right)}_{V_2^2} = \epsilon^2 \chi(r), \quad (7.40)$$

que substituindo X e Y fica

$$\begin{aligned} V_2^2 &= -\frac{m \sqrt{g_{rr}} \partial_r g_{\theta\theta}}{2 g_{\theta\theta}^{3/2}} + \\ &+ \frac{m^2 g_{rr}}{g_{\theta\theta}} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial_r g_{rr}}{2 g_{rr}} - 2 \Gamma_\theta(r) \sqrt{g_{rr}} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial_r^2 g_{rr}}{2 g_{rr}} + \frac{\Gamma_\theta(r) \partial_r g_{rr}}{\sqrt{g_{rr}}} + \frac{(\partial_r g_{rr})^2}{2 g_{rr}^2} + 2 \sqrt{g_{rr}} \Gamma'_\theta(r) \right) - \\ &- \sqrt{g_{rr}} \Gamma'_\theta(r) - \Gamma_\theta^2(r) g_{rr}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Simplificando os termos ficamos com o seguinte potencial quadrático

$$V_2^{2(1)} = -\frac{m \sqrt{g_{rr}} \partial_r g_{\theta\theta}}{2 g_{\theta\theta}^{3/2}} + \frac{m^2 g_{rr}}{g_{\theta\theta}} - \frac{\partial_r^2 g_{rr}}{4 g_{rr}} + \frac{5(\partial_r g_{rr})^2}{16 g_{rr}^2}, \quad (7.42)$$

onde o índice (1) enfatiza que estamos no primeiro caso. Segue que temos uma equação tipo Klein-Gordon para χ , isto é

$$-\chi''(r) + \chi(r) V_2^{2(1)} = \epsilon^2 \chi(r). \quad (7.43)$$

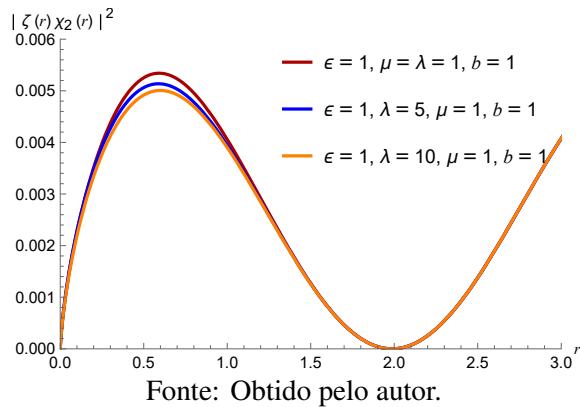
e então a solução $\psi(r)$ é obtida multiplicando-se $\chi(r)$ pela função

$$\zeta(r) = \zeta_0 e^{\int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r g_{rr}}{2 g_{rr}} - 2 \Gamma_\theta(r) \sqrt{g_{rr}} \right) dr}. \quad (7.44)$$

Nota-se imediatamente que $V_2^{2(1)}$ não depende explicitamente do potencial geométrico Γ_θ , ou melhor, as contribuições de Γ_θ são absorvidas na fase geométrica de forma similar ao

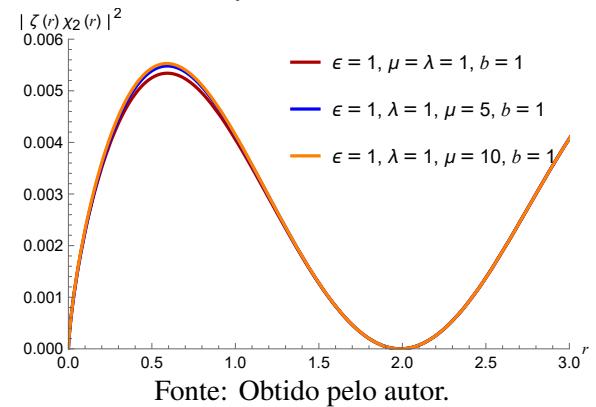
efeito Aharonov-Bohm. Do ponto de vista geométrico, $\zeta(r)$ é o operador de holonomia. Em particular, como para o caso plano devemos ter apenas soluções do tipo onda plana, este operador deve convergir, como pode ser observado no gráfico 26. A saber o comportamento das soluções por holonomias é semelhantes ao obtido anteriormente, como pode-se ver nos gráficos 23 e 24. Pode-se observar nos gráficos que os coeficientes μ e λ impactam de maneira distinta as densidades de estados, deve-se mencionar que não é uma relação direta, apesar de pelas figuras parecer que λ tende a matar as densidades e μ a incrementar, isso depende da escolha de valores pois relacionam-se a $\frac{\mu}{\lambda+2\mu}$, ou seja, ao *stress uniaxial* discutido na seção 4.3.

Figura 23 – Densidades por holonomias variando λ .



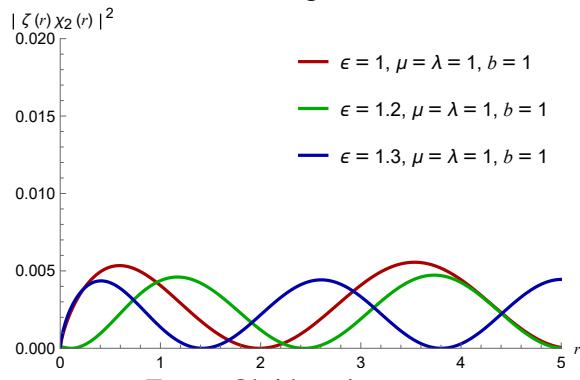
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 24 – Densidades por holonomias variando μ .



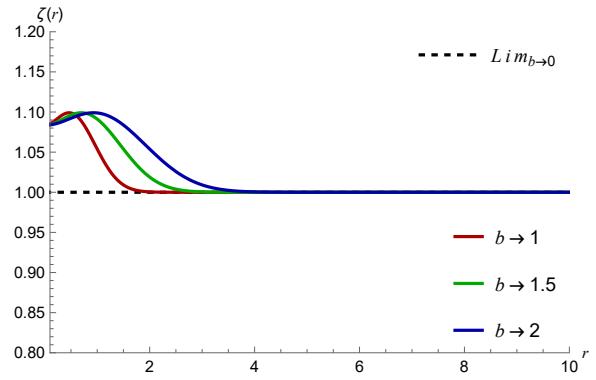
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 25 – Densidades por holonomias variando a energia.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 26 – Comportamento das fases geométricas.



Fonte: Obtido pelo autor.

A figura 26 é consistente com a métrica (7.1), visto que ela tende a identidade quando $b \rightarrow 0$. Além disso, em virtude das soluções gerais serem analiticamente inviáveis, ainda é

possível determinar aproximações. De maneira geral temos

$$\begin{aligned} V_2^{2(1)} &= m^2 \left(\frac{4\mu e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2(\lambda + 2\mu)} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{m \sqrt{\frac{4\mu r^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2(\lambda + 2\mu)} + 1}}{r^2} + \\ &+ \frac{4\mu^2 r^2 (3b^4 + 4r^4) - 2b^2 \mu e^{\frac{2r^2}{b^2}} (b^4 - 10b^2 r^2 + 8r^4) (\lambda + 2\mu)}{b^4 \left(b^2 e^{\frac{2r^2}{b^2}} (\lambda + 2\mu) + 4\mu r^2 \right)^2}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

e, uma vez que $\alpha = \frac{h_0}{b}$, podemos expandir para $\alpha \rightarrow 0$, que corresponde ao limite *flat* e, portanto, define soluções assintóticas. Fazendo isso obtém-se

$$\begin{aligned} V_2^{2(1)} &\approx \frac{m^2}{r^2} - \frac{mr}{(r^2)^{3/2}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \Rightarrow V_2^{2(1)} &\approx \frac{m}{r^2} (m - 1), \end{aligned} \quad (7.46)$$

e, naturalmente, $\zeta(r) \rightarrow \zeta_0$. As soluções de 7.43 para este potencial são

$$\chi_2(r) = \sqrt{r} A_1 J_{\frac{1}{2}(-1+2m)}(r\epsilon) + \sqrt{r} A_2 Y_{\frac{1}{2}(-1+2m)}(r\epsilon), \quad (7.47)$$

onde J_n e Y_n são respectivamente as funções Bessel de primeira e segunda espécie e A_1 , A_2 constantes de contorno. Dessa forma as soluções para $\psi(r)$ ficam da forma

$$\psi(r) = \zeta_0 \left(\sqrt{r} A_1 J_{\frac{1}{2}(-1+2m)}(r\epsilon) + \sqrt{r} A_2 Y_{\frac{1}{2}(-1+2m)}(r\epsilon) \right). \quad (7.48)$$

7.2 Segunda abordagem

A fim de prosseguir, agora vamos passar a considerar as contribuições explícitas dos deslocamentos *in-plane*. Para iniciar, vamos tomar primeiramente a aproximação $u_r^{(B)}$. Todo o procedimento de obtenção das equações para ψ é o mesmo do caso anterior, tendo alteração somente nas componentes da métrica e consequentemente no potencial geométrico Γ_θ . Vimos que nesta segunda situação as componentes da métrica são dadas por (4.67) de forma que

$$\begin{aligned} g_{rr} &= 1 + 2\beta \\ g_{\theta\theta} &= r^2. \end{aligned} \quad (7.49)$$

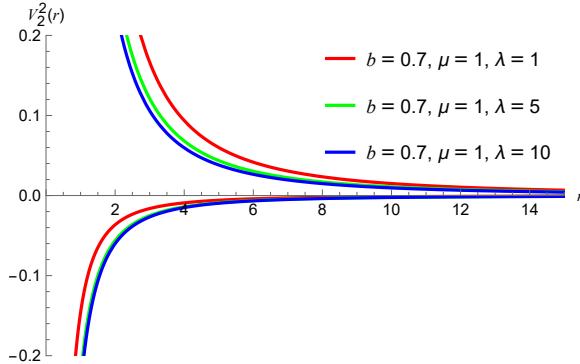
neste caso o potencial quadrático (7.42) fica dado por

$$V_2^{2(2)} = \frac{(2\beta + 1)m^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2\beta + 1}mr}{(r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \left(g_{rr} m^2 - \sqrt{g_{rr}} m \right), \quad (7.50)$$

portanto mesmo sem tomar a aproximação assintótica temos que um potencial Coulombiano na forma

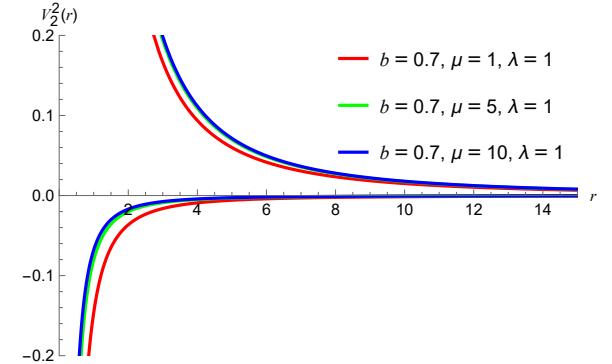
$$V_2^{2(2)} = \frac{\sqrt{g_{rr}}m}{r^2} (\sqrt{g_{rr}}m - 1) . \quad (7.51)$$

Figura 27 – Comportamento de $V_2^{2(2)}$ sob variações de λ .



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 28 – Comportamento de $V_2^{2(2)}$ sob variações de μ .



Fonte: Obtido pelo autor.

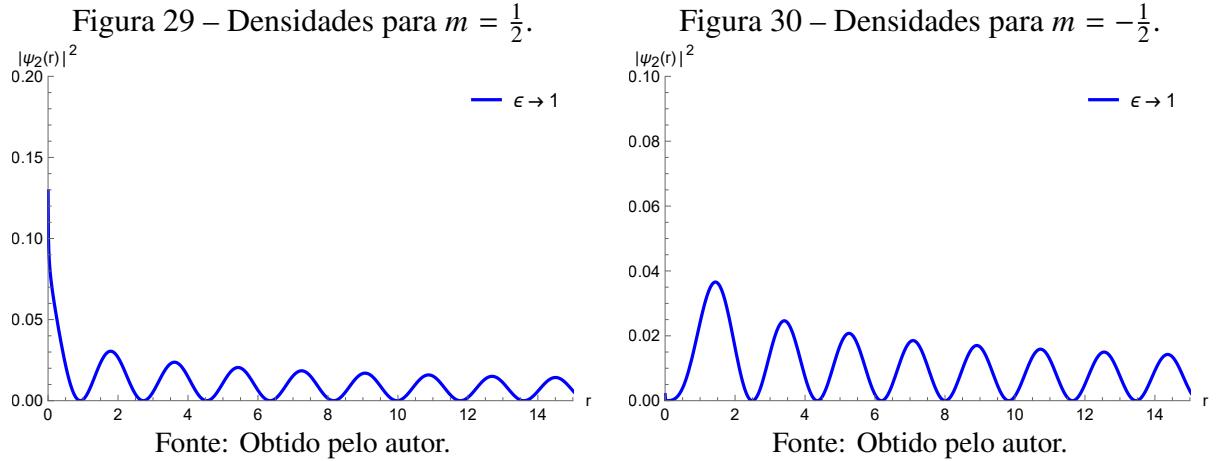
Observando (7.51) conclui-se que para $g_{rr} \rightarrow 1$ as soluções de $\chi(r)$ são também dadas por (7.48). As soluções gerais para $\chi(r)$ são da forma

$$\begin{aligned} \chi_2(r) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r} \left(-\sqrt{-(1+2\beta)\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1+4m(m+2m\beta-\sqrt{1+2\beta})} \\ & \cdot \left[K_{\frac{1}{2}\sqrt{1+4m(m+2m\beta-\sqrt{1+2\beta})}} \left(-r\sqrt{-(1+2\beta)\varepsilon} \right) C_3 + \right. \\ & \left. + \pi \frac{I_{\frac{1}{2}\sqrt{1+4m(m+2m\beta-\sqrt{1+2\beta})}} \left(-r\sqrt{-(1+2\beta)\varepsilon} \right) C_4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4m(m+2m\beta-\sqrt{1+2\beta})}\right)} \right], \end{aligned} \quad (7.52)$$

com I_ν e K_ν sendo respectivamente as funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécie, ao passo que Γ é a função fatorial e, naturalmente, C_3 e C_4 constantes. As fases de holonomia neste regime são dadas por

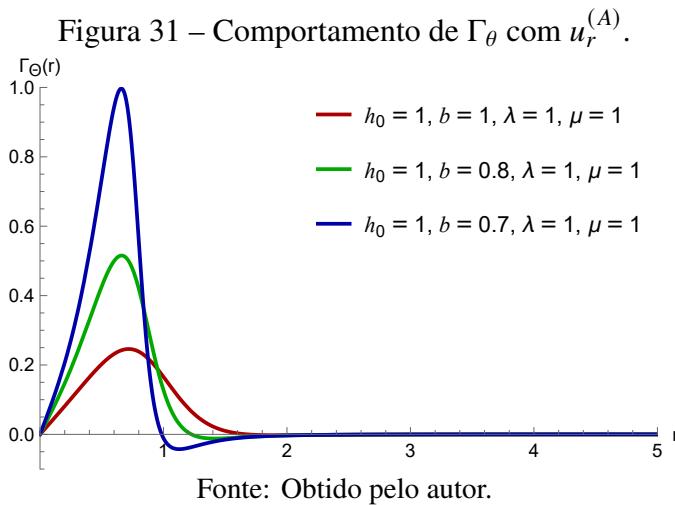
$$\zeta(r) = \zeta_0 \left(r^{\frac{r-\sqrt{2\beta+1}\sqrt{r^2}}{4r}} \right) . \quad (7.53)$$

Fixados os coeficientes de Lamé o comportamento das soluções segue nos gráficos 29 e 30. Em ambas, nota-se o aumento das densidades em torno da origem.



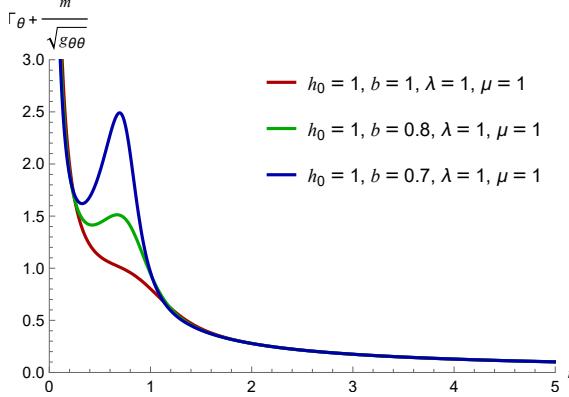
7.3 Terceira abordagem

Por fim, vamos agora considerar o deslocamento mais geral $u_r^{(A)}$ associado a deformação gaussiana. Em primeiro lugar segue o comportamento do potencial geométrico Γ_θ , pode-se no gráfico 31 ver como este comportamento é modificado em relação a 19.



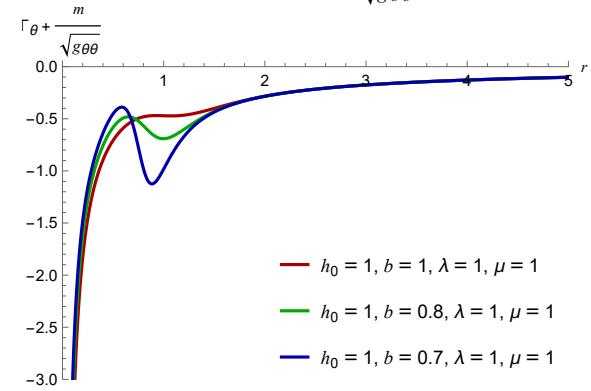
Vemos que, como esperado, o Γ_θ converge, entretanto, testando diferentes valores nas constantes de Lamé essa convergência é quebrada. Além deste também temos nos gráficos o potencial geométrico total sob algumas variações de parâmetros.

Figura 32 – Potencial $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$ com $m = \frac{1}{2}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 33 – Potencial $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$ com $m = -\frac{1}{2}$.



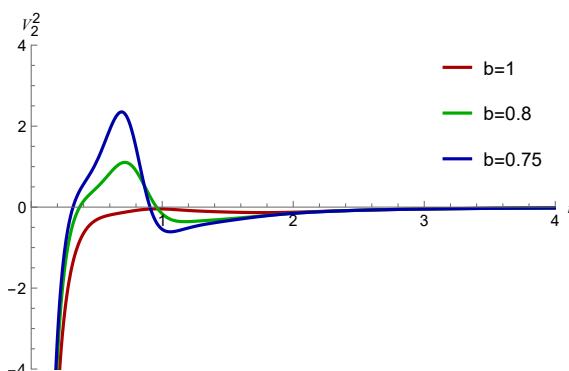
Fonte: Obtido pelo autor.

Tratando logo das equações pelo método das holonomias, vamos obter

$$-\chi_2'' + V_2^{2(3)} \chi_2 = \varepsilon^2 \chi_2, \quad (7.54)$$

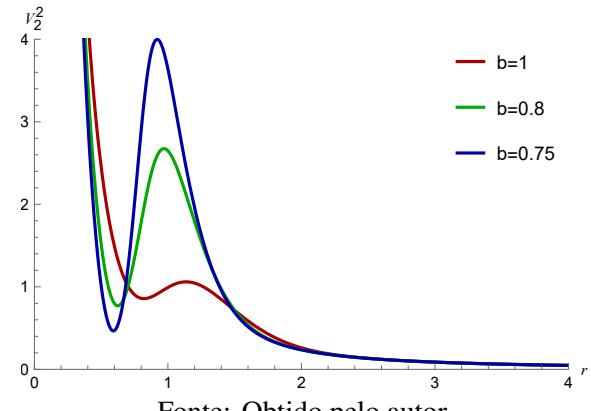
e, diferentemente dos casos anteriores, a expressão de $V_2^{2(3)}$ é pouco elucidativa e convém-nos nos atermos ao comportamento numérico que segue nos gráficos 34 e 35 (e da mesma forma para as fases no gráfico 42). Observa-se nestes gráficos que, em relação a m , estes potenciais tem, próximo a origem, o mesmo comportamento os demais potenciais quadráticos obtidos anteriormente, contudo como $u_r^{(A)}$ é mais complicado que $u_r^{(B)}$, isto é, varia de forma mais complicada em relação a r e aos parâmetros geométricos e mecânicos, isso se reflete em um número maior de inflexões nos referidos potenciais, como também pode ser verificado também nos gráficos 36 a 39. Em todos os casos vemos que há de fato o acoplamento spin-strain nos potenciais.

Figura 34 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de b , com $m = \frac{1}{2}$. Aqui $\lambda = \mu = h_0 = 1$.



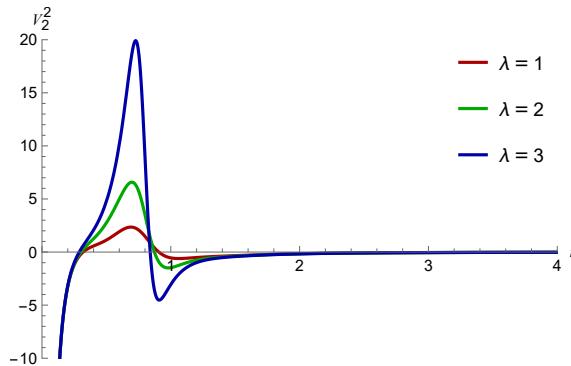
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 35 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de b , com $m = -\frac{1}{2}$. Aqui $\lambda = \mu = h_0 = 1$.



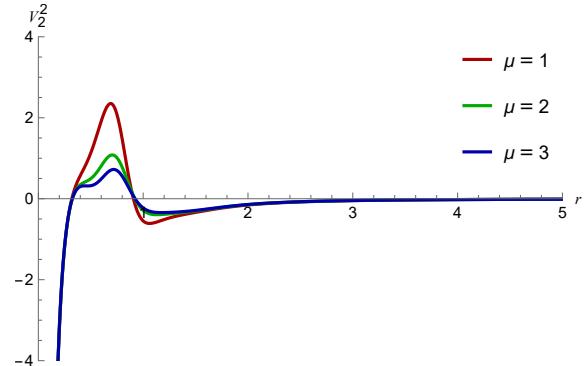
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 36 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de λ , com $m = \frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.



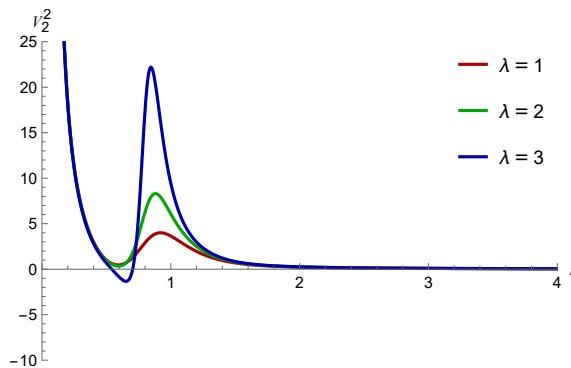
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 37 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de μ , com $m = \frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.



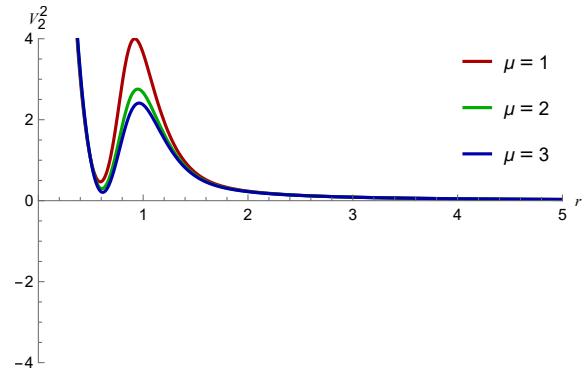
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 38 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de λ , com $m = -\frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.



Fonte: Obtido pelo autor.

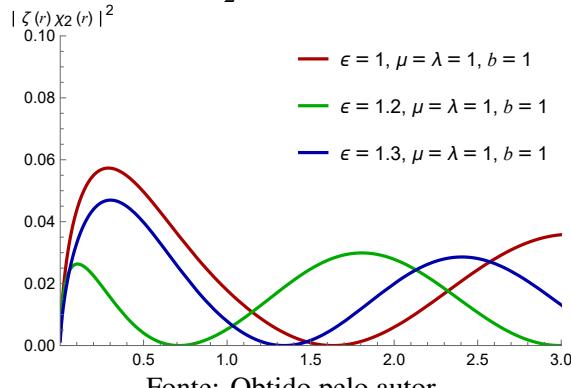
Figura 39 – Potencial $V_2^{2(3)}$ sob variações de μ , com $m = -\frac{1}{2}$. Aqui $h_0 = 1$ e $b = 0.75$.



Fonte: Obtido pelo autor.

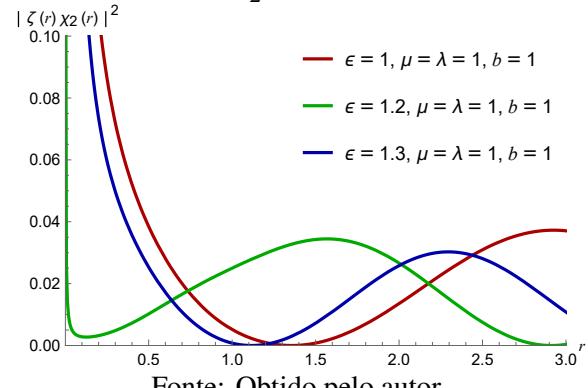
As soluções pelo método de holonomias seguem nos gráficos 40 a 42.

Figura 40 – Densidades variando a energia $m = \frac{1}{2}$.



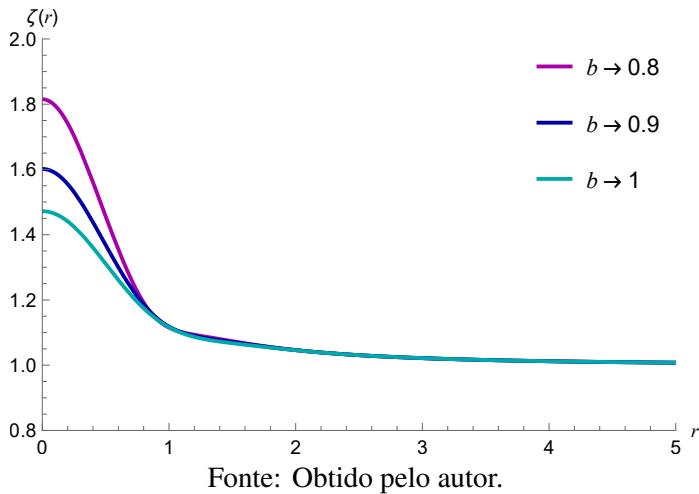
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 41 – Densidades variando a energia $m = -\frac{1}{2}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 42 – Fases geométricas com $u_r^{(A)}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Podemos perceber a semelhança com as figuras 23, 24 e 26, o que mostra uma evidente relação entre os métodos, porém com dificuldades distintas no tratamento. Da mesma forma, segue para comportamento modificado do potencial $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$, que, assim como no gráfico 20, diverge. De forma que comparando os métodos vemos que em todos o potencial Γ_θ apresenta convergência, contudo $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$ e os potenciais efetivos na equação de KG divergem, onde neste ultimo deve-se ter em mente que é um potencial que surge a partir de um método de descopamento, a divergência na origem é esperada, uma vez que o sistema cilíndrico apresentada ambiguidade na origem como discutido na seção 4.2. Em especial, também nota-se do método por holonomias que os potenciais quadráticos V^2 , apesar de não terem contribuições de Γ_θ , têm contribuições de m e $g_{\theta\theta}$, que são justamente os termos que causam divergência no potencial total $\Gamma_\theta + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$, dessa forma, a divergência é mais do que esperada. Por outro lado as funções de holonomia $\zeta(r)$, carregam a informação apenas de Γ_θ , e por sua vez se comportam da mesma forma convergente. Em outras palavras, no método por holonomias, as contribuições do potencial total são absorvidas de maneira separada, através de V^2 e $\zeta(r)$.

Também podemos determinar aproximações assintóticas como na seção anterior, a saber expandindo o potencial $V^2(3)_2$ em $\alpha = \frac{h_0}{b}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
 V_2^{2(3)} \approx & \alpha^2 \left(-\frac{3\sqrt{2\pi}(\lambda - 6\mu) + 32\mu}{8b^2\mu} - \frac{m^2(\sqrt{2\pi}\lambda - 6\sqrt{2\pi}\mu - 3\sqrt{2\pi}\lambda r^2 - 32\mu r^2 + 18\sqrt{2\pi}\mu r^2)}{4b^2\mu r^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{m(\sqrt{2\pi}\lambda - 6\sqrt{2\pi}\mu - 3\sqrt{2\pi}\lambda r^2 - 32\mu r^2 + 18\sqrt{2\pi}\mu r^2)}{8b^2\mu r^2} \right) + \frac{m^2 - m}{r^2},
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

onde observa-se novamente a presença da natureza coulombiana, entretanto, corrigida devido aos termos de acoplamento spin-strain. As soluções para este regime são

$$\begin{aligned} \chi_2(r) = A_3 \sqrt{r} J_{\frac{\sqrt{2m-1}\sqrt{4m\mu b^2-2\mu b^2-m\alpha^2}\lambda\sqrt{2\pi}+6m\alpha^2\mu\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}b\sqrt{\mu}}} & \left(-\frac{1}{2}ir\sqrt{\frac{(2m^2-m-1)\alpha^2(3\lambda\sqrt{2\pi}+2\mu(16-9\sqrt{2\pi}))}{2b^2\mu}-4\epsilon^2} \right) + \\ + A_4 \sqrt{r} Y_{\frac{\sqrt{2m-1}\sqrt{4m\mu b^2-2\mu b^2-m\alpha^2}\lambda\sqrt{2\pi}+6m\alpha^2\mu\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}b\sqrt{\mu}}} & \left(-\frac{1}{2}ir\sqrt{\frac{(2m^2-m-1)\alpha^2(3\lambda\sqrt{2\pi}+2\mu(16-9\sqrt{2\pi}))}{2b^2\mu}-4\epsilon^2} \right), \end{aligned} \quad (7.56)$$

onde A_3, A_4 e, novamente, J_n e Y_n são as funções Bessel de primeira e segunda espécie. Portanto, vemos que assintoticamente, assim como nos casos anteriores, as soluções são regidas por funções de Bessel. Neste regime temos

$$\Gamma_\theta \approx \frac{\alpha^2 r e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2}, \quad (7.57)$$

em particular, temos para $m = \pm 1/2$

$$\frac{\alpha^2 r e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2} + \frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \approx \frac{\alpha^2 r e^{-\frac{2r^2}{b^2}}}{b^2} + \frac{1}{2r}, \quad (7.58)$$

e, portanto, também temos as divergências no potencial geométrico total. As fases ficam dadas por

$$\zeta(r) = \zeta_0 e^{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}\alpha^2\mu+\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}}\right)}, \quad (7.59)$$

a saber, o comportamento das fases neste regime ainda é similar aos casos anteriores e a 6.23, entretanto, fixadas as constantes de Lamé, ele também tendem a ter um valor de convergência para $r \rightarrow 0$, mais especificamente,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \zeta(r) = 1, \quad (7.60)$$

como segue no gráfico 43.

Também é interessante notar a semelhança entre as figuras 44 e 19. O comportamento das soluções assintóticas segue nos gráficos 45 e 46 onde nota-se que para as soluções com $m < 0$ serem normalizáveis deve-se tomar $A_3 \rightarrow 0$.

Figura 43 – Fases no regime assintótico para $\mu = \lambda = 1$. Para $r \rightarrow 0$ os valor convergem em torno de 4.

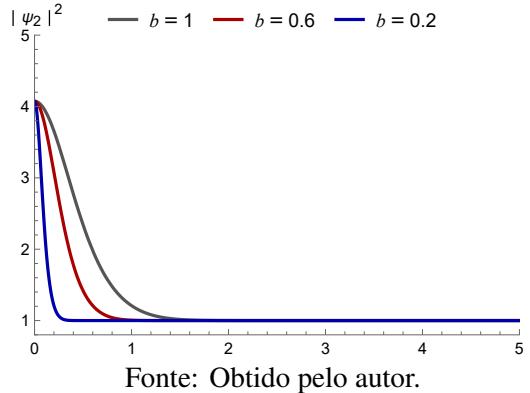


Figura 44 – Comportamento de Γ_θ no regime assintótico.

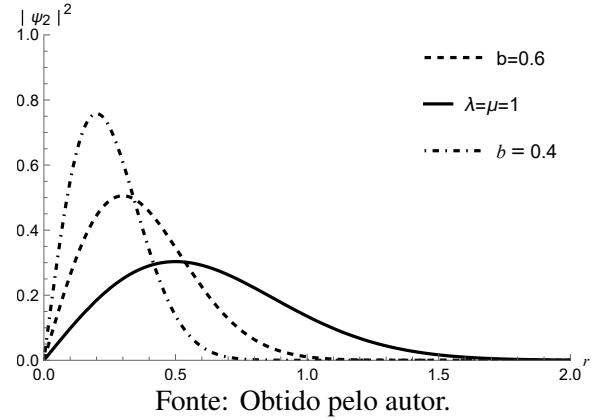


Figura 45 – Comportamento assintótico das funções densidades. Na linha contínua temos soluções com $m > 0$ e nas tracejadas com $m < 0$. Aqui $A_3 = A_4 = 1$.

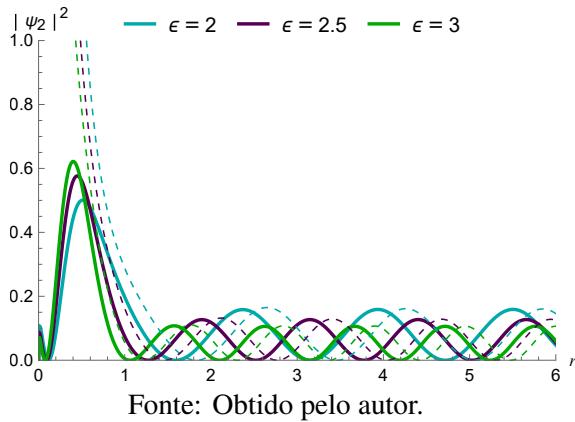
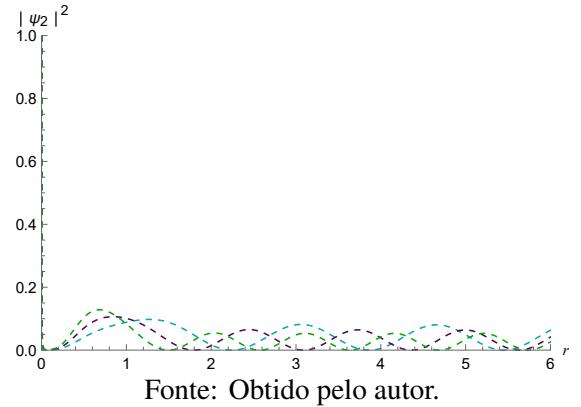


Figura 46 – Tomando $A_3 = 0$ as funções para $m < 0$ conseguem ser normalizadas, retirando-se a origem do domínio. Para $m > 0$ as funções continuam normalizáveis



7.4 Relação entre os casos

Podemos avaliar de forma específica como estas abordagens se relacionam. Convém iniciarmos observando a métrica (7.49), desse modo segue

$$ds^2 = (1 + 2\beta)dr^2 + r^2d\theta^2, \quad (7.61)$$

no caso sem *displacements* explícitos temos a métrica (7.1), que é dada por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{h_0^2}{b^2}f(r)\right)dr^2 + r^2d\theta^2, \text{ com } f(r) = \frac{4r}{b^2}e^{-\frac{2r^2}{b^2}}, \quad (7.62)$$

segue então que podemos tomar a relação $f(r) = \frac{(\partial_r h)^2}{h_0^2}$, onde $h(r) = h_0 e^{-r^2/b^2}$. Ou seja, a métrica em termos dos deslocamentos *out-plane* tem a forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{(\partial_r h)^2}{b^2}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (7.63)$$

Notamos que, no caso da abordagem 7.2, uma vez que o termo 2β faz o papel da perturbação h , isso significa que a linearização na seção 4.2 não retira apenas as contribuições de segunda ordem dos *strains* no plano, mas também retira a dependência radial dos modos verticais h . Portanto, como na teoria da elasticidade ambos são tratados de forma intrinsecamente relacionada, não conseguimos separar os dois, pelo menos não por este processo de linearização. Isso fica mais claro ao considerarmos a solução $u_r^{(B)}$

$$u^{(B)} = \beta r - \frac{h_0^2 \left(\sqrt{2\pi} b \operatorname{Erf} \left(\frac{\sqrt{2}r}{b} \right) - 4r e^{-\frac{2r^2}{b^2}} \right)}{4b^2}, \quad (7.64)$$

onde o primeiro termo é linear em r , e por isso as derivadas de u_r produzem apenas o termo 2β na métrica. Por comparação com a métrica (7.1), para que fosse possível verificar contribuições perturbativas não constantes na métrica é necessário que num regime de mais alta ordem o primeiro termo da expressão acima fosse proporcional as derivadas quadráticas de h , isto é

$$\beta = \text{const.} \rightarrow \beta \propto (\partial_r h)^2. \quad (7.65)$$

Esta diferença é de fundamental importância na finitude do potencial geométrico Γ_θ , pois para (7.62)

$$\Gamma_\theta(r) = \frac{1}{4r} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\partial_r h)^2}{b^2}}} \right), \quad (7.66)$$

onde pode-se notar que se anula para $h_0 \rightarrow 0$. Além disso, também podemos avaliar a diferença entre os potenciais quadráticos nos diferentes casos. Para isso vamos considerar as expansões dos potenciais em termos de α . Na abordagem mecanicamente linearizada, lembrando que $\beta \propto \alpha^2$, temos de (7.51)

$$\begin{aligned} V_2^{(2)2} &= \underbrace{\left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{mr}{(r^2)^{3/2}} \right)}_{O(\alpha^0)} + \underbrace{\beta \left(\frac{2m^2}{r^2} - \frac{mr}{(r^2)^{3/2}} \right)}_{O(\alpha^2)} + \underbrace{\frac{\beta^2 mr}{2(r^2)^{3/2}}}_{O(\alpha^4)} - \underbrace{\frac{\beta^3 (mr)}{2(r^2)^{3/2}}}_{O(\alpha^6)} + \underbrace{\frac{5\beta^4 mr}{8(r^2)^{3/2}}}_{O(\alpha^8)} - \underbrace{\frac{7\beta^5 (mr)}{8(r^2)^{3/2}}}_{O(\alpha^{10})} + \dots \\ &\therefore V_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} O(\alpha^{2n}), \end{aligned} \quad (7.67)$$

ao passo que no potencial da primeira abordagem temos de (7.46) que

$$V_2^{(1)2} = \underbrace{\left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{mr}{(r^2)^{3/2}} \right)}_{O(\alpha^0)} + \underbrace{\frac{2\mu(m-1)(2m+1)}{h_0^2(\lambda+2\mu)} \alpha^2}_{O(\alpha^2)} + \underbrace{\frac{2\mu r^2 (2\lambda(-2m^2+m+6) + \mu(m(5-8m)+38))}{h_0^4(\lambda+2\mu)^2} \alpha^4}_{O(\alpha^4)} + \dots \quad (7.68)$$

$$\therefore V_2^{(1)2} = \sum_{n=0}^{\infty} O(\alpha^{2n}), \quad (7.69)$$

logo ambos os potenciais são pares em α , o que é esperado, pois a orientação da gaussiana, no nosso caso, é arbitrária (provavelmente em superfícies de orientação não trivial, ou interações gravitacionais, essa paridade é alterada). Claramente os potenciais contabilizam as contribuições $O(\alpha^0)$, que, como mencionamos, não correspondem à ausência de perturbação; eles só se anulam para $r \rightarrow \infty$, e a simetria cilíndrica exige a forma $1/r^2$ próximo à origem. Ambas as contribuições mecânicas só aparecem a partir de segunda ordem em α , o que é consistente com o *displacement* $u_r^{(A)}$ pois é possível verificar que ele é puramente de segunda ordem em α , ou seja, $u_r^{(A)} = u(r)\alpha^2$. Contudo, notamos que no termo de segunda ordem de $V_2^{(1)2}$ não temos dependência de r , a contribuição vem apenas das constantes mecânicas e geométricas, diferente do termo de segunda ordem em $V_2^{(2)2}$ onde temos dependência radial. Verifica-se também que os termos de mesma ordem em α são algebraicamente diferentes, apesar de serem dimensionalmente coerentes. Ainda carece de investigação verificar se ambos têm comportamento parecido em regiões não limitantes, provavelmente a resposta é negativa, visto que $V_2^{(2)2}$ foi obtido por um processo de linearização e em $V_2^{(1)2}$ as contribuições mecânicas são absorvidas em uma amplitude. O hipótese mais natural é que mesmo em situações não lineares essas contribuições podem ser transitadas de um modelo a outro, quanto mais elas forem consideradas em $V_2^{(1)2}$ este deve coincidir com o respectivo $V_2^{(2)2}$, de forma que no caso limite tenhamos uma equivalência. Entretanto, esta análise exige uma abordagem por teoria não-linear da elasticidade, o que foge ao centro da discussão deste trabalho. Da mesma forma que os potenciais anteriores também temos $V_2^{(3)2} = \sum_{n=0}^{\infty} O(\alpha^{2n})$. Em particular, para $O(\alpha^0)$ temos

$$V_2^{(1)2} \approx V_2^{(2)2} \approx V_2^{(3)2} \approx \frac{m}{r^2} (m-1), \quad (7.70)$$

o que é esperado, uma vez que todas as soluções são assintoticamente funções de Bessel.

8 INTERAÇÃO COM MAGNÉTICO EXTERNO

Vamos agora assumir a interação do sistema com um campo magnético de fato. Vamos tomar o campo uniforme \vec{B} ao longo do eixo z , o potencial vetor \vec{A} será dado por $\vec{A}_\theta = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$. Em coordenadas cilíndricas, $\vec{r} = r\hat{e}_1 + z\hat{e}_3$ e $\vec{B} = B_0\hat{e}_3$ levam a

$$\vec{A}_\theta = \frac{B_0}{2}r\hat{e}_2, \quad (8.1)$$

então o Hamiltoniano para o elétron sobre a influencia do *strain* e do campo externo fica

$$\mathcal{H} = -i\hbar v_F \sigma_3 [\gamma^r \partial_r + \gamma^\theta (\partial_\theta + \Omega_\theta) + i\gamma^i e A_i]. \quad (8.2)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento que em (7.26), obtemos a seguinte equação para $\psi_2(r)$

$$-\partial_r^2 \psi_2 + \left(-2\Gamma_\theta \sqrt{g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{\partial_r g_{rr}}{g_{rr}} \right) \partial_r \psi_2 + \mathcal{U}_2^2 \psi_2 = \varepsilon^2 \psi_2, \quad (8.3)$$

com

$$\mathcal{U}_2^2 = \frac{g_{rr}m^2}{g_{\theta\theta}} - \frac{m\sqrt{g_{rr}}\partial_r g_{\theta\theta}}{2g_{\theta\theta}^{3/2}} - \sqrt{g_{rr}}\partial_r \Gamma_\theta - g_{rr}\Gamma_\theta^2 - e\frac{2m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}g_{rr}A_\theta - e\sqrt{g_{rr}}\partial_r A_\theta + g_{rr}e^2A_\theta^2, \quad (8.4)$$

e portanto vemos que a única mudança em relação a (7.22) é a inclusão dos termos de interação com o campo externo, ou seja

$$\mathcal{U}_2^2 = U_2^2 + \mathcal{Y}_2^2, \quad (8.5)$$

onde

$$\mathcal{Y}_2^2 = -e\frac{2m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}g_{rr}A_\theta - e\sqrt{g_{rr}}\partial_r A_\theta + g_{rr}e^2A_\theta^2. \quad (8.6)$$

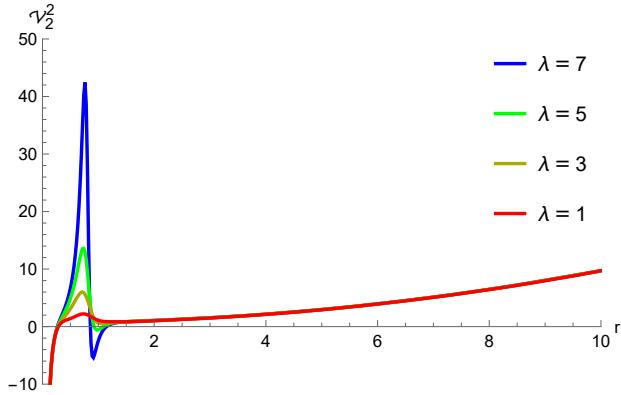
Então a equação tipo Klein-Gordon neste caso é dada por

$$-\chi_2'' + \mathcal{V}_2^2 \chi_2 = \varepsilon^2 \chi_2, \quad (8.7)$$

com $\mathcal{V}_2^2 = U_2^2 + \mathcal{Y}_2^2$. Logo, vemos claramente que, diferentemente de Γ_θ , A_θ não altera o fator de holonomia. Isso então é consistente com as duas naturezas físicas distintas. Podemos então determinar o potencial vetor $\vec{A} = \frac{B_0}{2}r\hat{e}_2$. Assim como (Silva *et al.*, 2024), vemos que a presença do campo externo afeta o limite assintótico dos potenciais, enquanto preserva as contribuições das deformações devido à curvatura próxima à origem. Evidentemente que, quando o campo

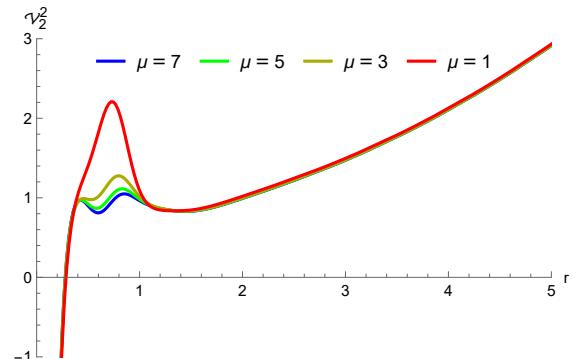
externo é anulado, os potenciais voltam aos comportamentos obtidos anteriormente, como se pode verificar nos gráficos 47 a 50, e também como λ e μ alteram a interação com \vec{B} .

Figura 47 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos com $m = 1/2$, λ variando, $\mu = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.



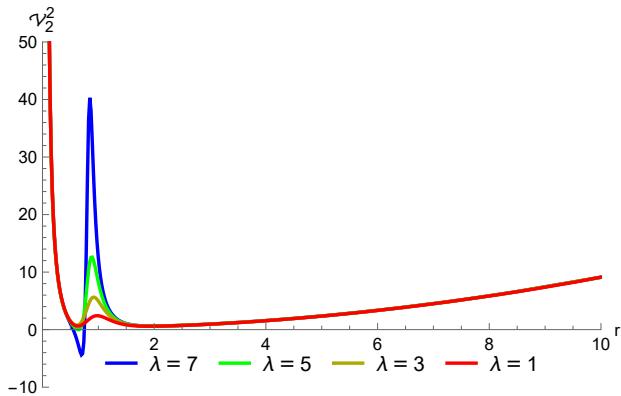
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 48 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos, $m = 1/2$, μ variando, $\lambda = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.



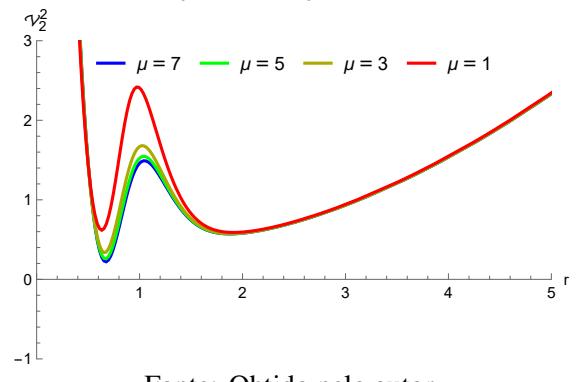
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 49 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos com $m = -1/2$, λ variando, $\mu = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 50 – Potenciais quadráticos com $u_r^{(A)}$ incluindo campos externos, $m = -1/2$, μ variando, $\lambda = 1$. Aqui $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Além disso, fixando valores para as constantes conseguimos resolver numericamente, podemos assim determinar os níveis de Landau calculando os auto-valores na equação (8.7), em particular como $\varepsilon(r) = \sqrt{g_{rr}}\epsilon$ é conveniente tomar seguinte operador

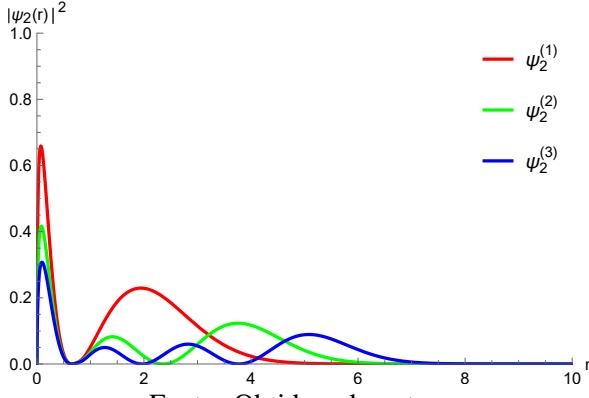
$$\mathfrak{L} = \frac{1}{g_{rr}} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \mathcal{V}_2^2 \right) \quad (8.8)$$

tal que

$$\mathfrak{L}\chi_2 = \epsilon^2\chi_2, \quad (8.9)$$

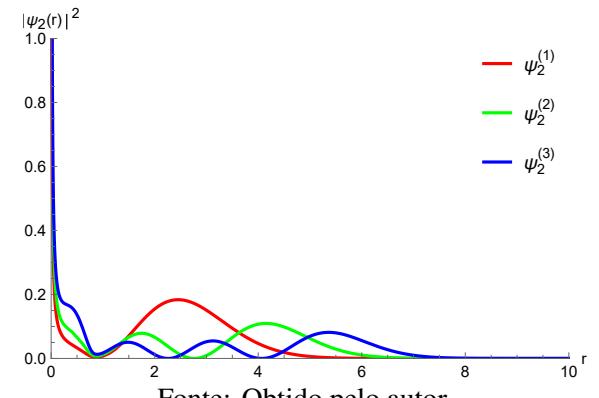
segue nos gráficos 51 e 52 alguns autoestados obtidos.

Figura 51 – Níveis de Landau com $u_r^{(A)}$, $m = 1/2$, $\lambda = 7$, $\mu = 1$, $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 52 – Níveis de Landau com $u_r^{(A)}$, $m = -1/2$, $\lambda = 7$, $\mu = 1$, $B_0 = 0.6$, $h_0 = 1$, $b = 0.8$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Em especial, na aproximação 7.2, onde as perturbações são constantes, podemos obter soluções analíticas simples pelo método das holonomias, são elas da forma

$$\chi_2(r) = c_1 e^{r\sqrt{-2\beta\epsilon^2 + \mathcal{U}_2^2 - \epsilon^2}} + c_2 e^{-r\sqrt{-2\beta\epsilon^2 + \mathcal{U}_2^2 - \epsilon^2}}, \quad (8.10)$$

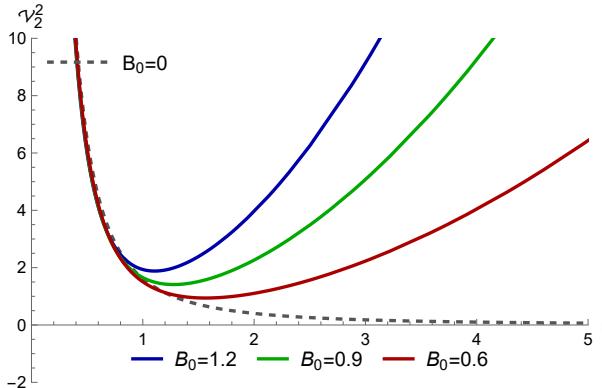
com $\mathcal{U}_2^2 = U_2^2 + \mathcal{Y}_2^2$ dado por

$$\mathcal{U}_2^2 = \frac{1}{4}(2\beta+1)B_0^2 e^2 r^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2\beta+1}eB_0 + \frac{(2\beta+1)eB_0 m r}{\sqrt{r^2}} + \frac{(2\beta+1)m^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2\beta+1}m r}{(r^2)^{3/2}}, \quad (8.11)$$

e as fases dadas por 7.53 tal que elas apenas contêm a informação do *strain* como esperado. E naturalmente

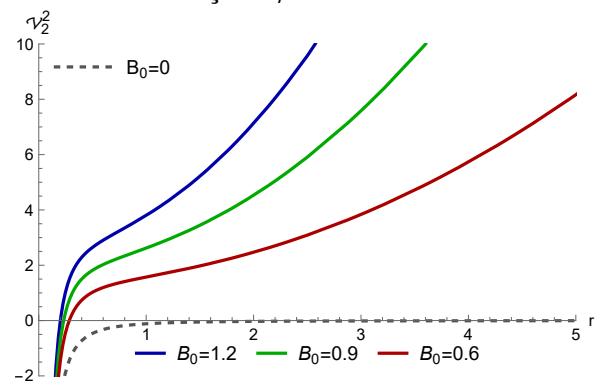
$$-\chi_2'' + \mathcal{V}_2^2 \chi_2 = \epsilon^2 \chi_2 \quad ;(\text{com } \mathcal{V}_2^2 = V_2^2 + \mathcal{Y}_2^2). \quad (8.12)$$

Figura 53 – Potenciais com campo externo para $m = -1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.



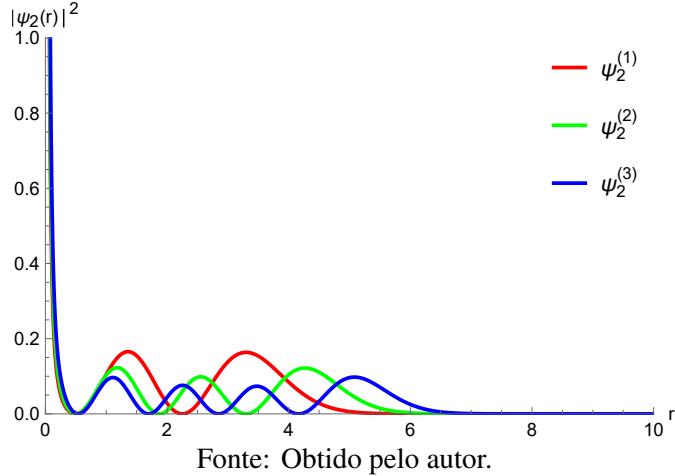
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 54 – Potenciais com campo externo para $m = 1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.



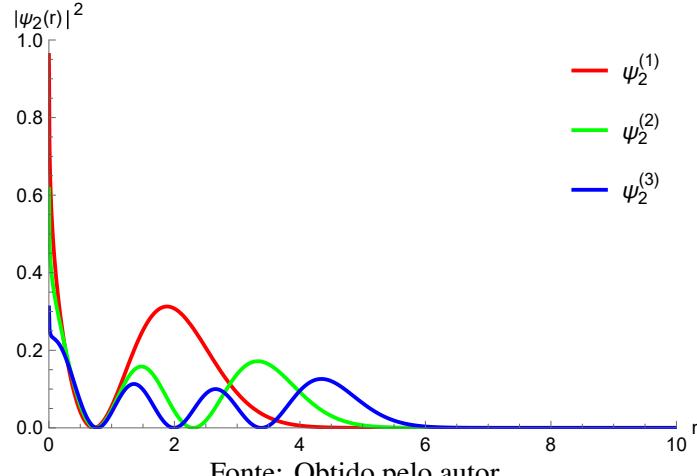
Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 55 – Níveis de Landau para $m = -1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Figura 56 – Níveis de Landau para $m = 1/2$. Utilizando aproximação $u_r^{(B)}$.



Fonte: Obtido pelo autor.

Nota-se que, como nesta aproximação, os potenciais não possuem inflexões além de segunda ordem, os níveis de Landau também não possuem. Além disso, no caso mais geral com $u_r^{(A)}$ os potenciais divergem sobre a mesma curva para $r \rightarrow 0$ e os aproximados não. Contudo, o comportamento de divergência para a mesma assíntota vertical é também capturado pelas aproximações. Para finalizar, vamos comentar o aparecimento de uma classe específica de potenciais mediante uma mudança de variável.

9 POTENCIAIS SUPERSIMÉTRICOS

Observando a forma das fases geométricas nota-se que

$$\zeta(r) = \zeta_0 e^{-\int (\Gamma_\theta \sqrt{g_{rr}} - \frac{1}{4} \frac{\partial_r g_{rr}}{g_{rr}}) dr} = \zeta_0 e^{-\int \Gamma_\theta \sqrt{g_{rr}} dr} e^{\frac{1}{4} \ln |g_{rr}|} = \zeta(r) = C(r) e^{-\int \Gamma_\theta \sqrt{g_{rr}} dr}. \quad (9.1)$$

Isso sugere que podemos reescrevê-la de uma forma mais natural absorvendo os termos que dependem, de forma complicada, da métrica fora da integral de fase. Neste sentido podemos considerar a seguinte mudança de variável

$$\frac{1}{d\bar{r}} = \frac{1}{s} \frac{d}{dr}, \quad (9.2)$$

onde $s = \sqrt{g_{rr}}$, assim a expressão (7.19) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d^2 \psi_2}{d\bar{r}^2} - 2\Gamma_\theta \frac{d\psi_2}{d\bar{r}} + \bar{U}^2(\bar{r})\psi_2 = \epsilon^2 \psi_2, \quad (9.3)$$

com

$$\bar{U}_2^2(\bar{r}) = \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \right) + \frac{m^2}{g_{\theta\theta}} - \left(\frac{\Gamma_\theta}{d\bar{r}} + \Gamma_\theta^2 \right), \quad (9.4)$$

e, da mesma forma que já fizemos antes, vamos tomar $\psi_2(\bar{r}) = G(\bar{r})\chi(\bar{r})$. Impondo novamente que os coeficientes de $\psi'(\bar{r})$ vamos obter as equações tipo KG em termos de \bar{r}

$$-\chi''_2(\bar{r}) + W_2^2 \chi_2(\bar{r}) = \epsilon^2 \chi_2(\bar{r}), \quad (9.5)$$

assim a expressão para G fica $G(\bar{r}) = G_0 e^{-\int \Gamma_\theta(\bar{r}) d\bar{r}}$.

Nota-se, portanto, que diferente de (9.1), G_0 é uma constante e a fase depende agora exclusivamente do potencial geométrico, pois a métrica é absorvida na mudança de variável. Além disso, se desenvolvemos a expressão para W_2 , vamos obter um resultado interessante da forma

$$W_2^2(\bar{r}) = \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{m}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \right) + \frac{m^2}{g_{\theta\theta}}. \quad (9.6)$$

Potenciais desta forma são conhecidos na literatura como potenciais supersimétricos. Pode-se ver claramente que nesta abordagem a dependência em r de $\epsilon(r) = \sqrt{g_{rr}}\epsilon$ é absorvida pela mudança de variável. Um fato inconveniente é que realizar a integração sobre a mudança de variável requer a inversão explícita $\bar{r} \rightarrow r$ que é dada por $\bar{r} = \int s(r) dr$ e isto, em geral, não é obtido por métodos elementares. A existência do potencial supersimétrico sugere a existência de estados fundamentais de energia 0 que, sobretudo nas abordagens efetivas, ainda carecem de significado físico, pois em geral não são normalizáveis (Yeşiltaş *et al.*, 2022).

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segue do desenvolvimento destes resultados que estes sistemas são particularmente interessantes na investigação de fenômenos que tradicionalmente estariam associados a teorias fundamentais de partículas e campos. Estes modelos servem de análogos gravitacionais, fornecendo conhecimentos sobre fenômenos topológicos e de alta energia em contextos de matéria condensada (Gallerati, 2022; Sepehri *et al.*, 2016). No contexto dos férmiões, a curvatura modifica a conexão de spin, afetando assim a equação de Dirac e, assim como a curvatura do espaço-tempo cria potenciais gravitacionais, aqui há potenciais pseudo magnéticos. Utilizando teoria da elasticidade, mostramos que temos um método paralelo onde as propriedades mecânicas da superfície são introduzidas através de uma aproximação contínua, o que se destaca em relação aos métodos de estado sólido, onde as propriedades mecânicas surgemmediamente a consideração da estrutura atomicamente discreta da superfície. Estas, por sua vez, como podemos ver no decorrer deste trabalho, influenciam diretamente o comportamento dos potenciais e densidades de estados nesses sistemas. Neste sentido, podemos considerar, por exemplo, o que foi apresentado na seção 6.2 sobre a invariância de calibre do pseudocampo, pois \mathcal{B} apenas torna-se invariante para os deslocamentos *in-plane* nulos. Como observado em (Arias *et al.*, 2015), os ângulos nas *vielbeins* podem ser escritos como

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} \sqrt{g_{rr}} \cos \theta & \sqrt{g_{\theta\theta}} \sin \theta \\ \sqrt{g_{rr}} \sin \theta' & \sqrt{g_{\theta\theta}} \cos \theta' \end{pmatrix}, \text{ onde } \theta = \theta' + \text{Cos}^{-1} \left(\frac{g_{r\theta}}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}}} \right). \quad (10.1)$$

Uma vez que a abordagem da teoria da elasticidade implica a introdução de termos de perturbação mecânica na métrica, isto significa que os coeficientes de Lamé, que estão associados às propriedades mecânicas, estarão também relacionados de alguma forma com o ângulo θ , que na abordagem TQC é interpretado como um calibre. De um ponto de vista geométrico, isto significa que os vetores da base com as deformações puramente geométricas são diferentes dos vetores da base gerados com a inclusão das deformações mecânicas e que, em princípio, não há razão para que a invariância de calibre se mantenha. Isto é, como a teoria da elasticidade é completamente independente da abordagem TQC e que μ e λ também estão relacionados, através da teoria do estado sólido (Bouhemadou, 2009), com os deslocamentos nos locais da rede, não há motivos para esperar que a invariância de calibre seja preservada juntando diretamente estas abordagens. E, como mencionado, a priori temos duas formas de construir o hamiltoniano. A primeira é como segue em (7.7), ou seja, todas as contribuições de curvatura são introduzidas através da conexão de spin e do acoplamento da equação de Dirac com as *vielbeins*. No entanto,

como podemos ver em (Juan *et al.*, 2013), também é possível introduzir termos no Hamiltoniano a partir de técnicas de teoria do estado sólido, os autores mostram que um campo extra, radial, associado à velocidade de Fermi dependente da posição, oriundo de uma análise por *tight-binding* não é invariante de calibre. Sugerimos então que uma forma de interpretar a quebra da invariância de gauge aqui sugerida é que, ao deixar todas as contribuições de curvatura serem introduzidas como em (7.7), estamos incluindo indiretamente contribuições que quebram a simetria de gauge. Outra forma de interpretar é que a quebra provém exclusivamente da forma algébrica de (3.51), caso em que é necessário analisar a relação entre $h(r)$ e u_r através do princípio variacional, e as suas condições de contorno, tendo em conta o Hamiltoniano elástico da superfície. No que diz respeito aos potenciais, pode-se notar que introduzindo explicitamente os deslocamentos u_r , associados a perturbação gaussiana via teoria elástica, observamos nele que, no regime linear, onde temos $V_2^{(2)2}$, basta adicionar uma constante à componente radial da métrica. Ao passo que o potencial $V_2^{(1)2}$ é equivalente a este com constante nula, pois aqui as constantes de Lamé são absorvidas na amplitude da gaussiana. Portanto, na *Segunda Abordagem* a perturbação é realizada por somas de constantes a métrica, e gera um potencial perturbativamente mais simples onde a componente radial g_{rr} altera explicitamente a interação em qualquer regime. Isso sugere que qualquer sistema com simetria angular, no regime linear, é descrito dessa forma. A partícula nunca está livre das interações explicitamente mecânicas. Ao passo que na *Primeira Abordagem* a perturbação é modelada por uma função, o que torna o potencial mais complexo, as constantes mecânicas contribuem apenas com a amplitude da função, a partícula só fica efetivamente livre de interações mecânicas para $\alpha = 0$. Diferentes simetrias têm diferentes funções perturbativas e devem gerar potenciais diferentes. Uma vez que mostramos como relacionar a amplitude da função $f(r)$ da primeira abordagem com os contribuições mecânicas vemos que os dois tipos de deformação são introduzidos de forma codependente, pois o caso de $\alpha = 0$ na primeira abordagem equivale a ausência de contribuições mecânicas, pois faz a $V_2^{(2)2}$ se reduzir a $V_2^{(1)2}$ com $\beta = 0$, visto que α e β são proporcionais. Em todo caso, o comportamento assintótico tanto de $V_2^{(1)2}$, $V_2^{(2)2}$ quanto de $V_2^{(3)2}$ é dominado por funções de Bessel, como mostrado na seção 7.4, o que é esperado da simetria cilíndrica. Em todos os casos, as contribuições geométricas são absorvidas como uma fase similar ao tipo Aharonov-Bohm e as demais contribuições vêm de um acoplamento spin-*strain*. Ficando claro que existe uma área a ser explorada envolvendo as características topológicas destes sistemas, em especial, vemos que há também uma conexão com o tratamento por mecânica quântica supersimétrica a ser explorada em estudos futuros.

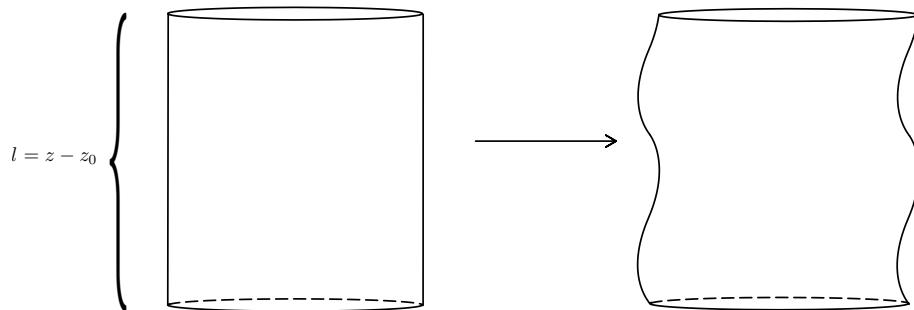
11 PERSPECTIVAS FUTURAS

O próximo passo mais natural é considerar os espalhamentos, por exemplo, partindo da abordagem pela aproximação WKB, dado um potencial $V(x)$, sabemos que, em primeira ordem, podemos escrever uma solução aproximada para o caso não relativístico na forma

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[\pm i \int dx' k(x') \right] , \text{ onde } k(x) \equiv \left[\frac{2m}{\hbar} (E - V(x)) \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (11.1)$$

O que iremos fazer é considerar a adaptação para o caso relativístico. Além da WKB, baseando-se no trabalho *Electronic structure of helicoidal graphene Massless Dirac particles on a curved surface with a screw symmetry* (Watanabe *et al.*, 2015) também pretendemos trabalhar com a aproximação Bohr-Oppenheimer. A consulta na literatura mostra que faz-se necessário um tratamento numérico mais sofisticado do que o realizado em nossos estudos prévios. Outra possibilidade é notarmos que em todo o caso estamos considerando as perturbações estáticas. Porém sabemos dos modelos discretos que existem vibrações na rede, de forma que um estudo interessante dentro do que estamos realizando é implementar a modelagem dessas vibrações permitindo que as deformações variem no tempo, em particular podemos acatar diretamente as equações de Föppl, discutidas na seção 3.3. Um primeiro modelo seria uma estrutura cilíndrica.

Figura 57 – Cilindro, de altura l , com perturbações periódicas ao longo do eixo z .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez que sabemos que os modos de vibração ficaram confinados entre os limites z e z_0 , vamos então analisar como ficam as densidades de estados mediante essas vibrações. Tendo realizado este estudo, podemos partir com mais segurança para aplicar a abordagem em geometrias mais complexas. Além disso, o estudo abordado até então foi realizado sobre a consideração de uma única partícula. Dessa forma, uma vez tendo amadurecido o conhecimento sobre as abordagens previamente discutidas, devemos ser capazes de estender a análise para o estudo de sistemas de muitas partículas confinadas a estes sistemas bidimensionais curvos.

Sabemos de antemão que há na literatura uma teoria suficientemente robusta para tratar da quantização de campos em espaços curvos (Birrell e Davies, 1984). O que queremos então é desenvolver uma adaptação para espaços curvos bidimensionais, fazendo a correlação com a teoria elástica. A abordagem mais simples que sugerimos para iniciar um tratamento nesta direção é fazer consideração de um gás de partículas relativísticas, não interagentes. Podemos observar também que as equações de Föppl podem ser diretamente entendidas como equações que nos fornecem a dinâmica dos campos de deformações mecânicas (*strains*) u_{ij} e geométricas $h(x_i, x_j)$. Queremos partir de um hamiltoniano suficientemente geral, dado por exemplo por

$$\mathcal{H} = i\nu_F \int dr \sqrt{g} \Psi^\dagger(r) \left(\gamma^\alpha \partial_\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \gamma^\alpha \right) \Psi(r), \quad (11.2)$$

tal que ao introduzirmos os campos u_{ij} e $h(x_i, x_j)$ esperamos obter um hamiltoniano semelhante ao obtido na referência (González, 2012), que realiza uma abordagem mais direta com uma interação tipicamente Coulombiana, esperamos obter então um potencial de interação diferente devido à presença explícita dos termos de deformações mecânicas, ou como estas interações afetam um potencial inicialmente Coulombiano. A fim de aproximar o contato com o experimento, para além deste, devemos mencionar o trabalho (Khveshchenko, 2006) onde o autor mostra como obter a condutância por tunelamento (*tunneling conductance*) a partir de um hamiltoniano semelhante ao de (González, 2012). Ademais, existem dois trabalhos, (Morales e Copinger, 2023) e (Sedrakyan *et al.*, 2021) que oferecem uma boa perspectiva no que diz respeito à modelagem de fôons através da introdução de geometrias com dependências temporais. Neste sentido é possível dar dinâmica a essas perturbações utilizando as equações Föppl, e analisar como a presença desta dinâmica específica impactará os observáveis macroscópicos.

REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. G. **Quantitative seismology.** [S. l.]: University science books. 2002.
- ALISULTANOV, Z. Z.; IDRISOV, E. G. Non-hermitian weyl fermions of types iii and iv: Hamiltonian, topological protection, and landau levels. **Physical Review B**, APS, v. 107, n. 8, p. 085135, 2023.
- ALMEIDA, S. B. B.; SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. A. S. **Dirac fermions on a surface with localized strain.** 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2505.18959>. Acesso em: 24 Maio. 2025.
- ARIAS, E.; HERNÁNDEZ, A. R.; LEWENKOPF, C. Gauge fields in graphene with nonuniform elastic deformations: A quantum field theory approach. **Physical Review B**, American Physical Society (APS), v. 92, n. 24, 2015.
- ATANASOV, V.; SAXENA, A. Tuning the electronic properties of corrugated graphene: Confinement, curvature, and band-gap opening. **Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics**, APS, v. 81, n. 20, p. 205409, 2010.
- ATANASOV, V.; SAXENA, A. Helicoidal graphene nanoribbons: Chiraltronics. **Physical Review B**, APS, v. 92, n. 3, p. 035440, 2015.
- BENA, C.; MONTAMBAUX, G. Remarks on the tight-binding model of graphene. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 11, n. 9, p. 095003, 2009.
- BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984.
- BOUHEMADOU, A. Elastic properties of mono-and polycrystalline RCRh₃ (R= Sc, Y, La and Lu) under pressure effect. **Solid state communications**, Elsevier, v. 149, n. 39-40, p. 1658–1662, 2009.
- BUENO, M.; FURTADO, C.; CARVALHO, A. de M. Landau levels in graphene layers with topological defects. **The European Physical Journal B**, Springer, v. 85, p. 1–5, 2012.
- FLOURIS, K.; JIMENEZ, M. M.; HERRMANN, H. J. Curvature-induced quantum spin-hall effect on a möbius strip. **Physical Review B**, APS, v. 105, n. 23, p. 235122, 2022.
- FURTADO, C.; MORAES, F.; CARVALHO, A. d. M. Geometric phases in graphitic cones. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 372, n. 32, p. 5368–5371, 2008.
- GALLERATI, A. Graphene, dirac equation and analogue gravity. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 97, n. 6, p. 064005, 2022.
- GONZÁLEZ, J. Electron self-energy effects on chiral symmetry breaking in graphene. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 85, p. 085420, 2012.
- GUINEA, F.; HOROVITZ, B.; DOUSSAL, P. L. Gauge field induced by ripples in graphene. **Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics**, APS, v. 77, n. 20, p. 205421, 2008.

- JUAN, F. de; CORTIJO, A.; VOZMEDIANO, M. A. H. Charge inhomogeneities due to smooth ripples in graphene sheets. **Physical Review B**, American Physical Society (APS), v. 76, n. 16, 2007.
- JUAN, F. de; MANES, J. L.; VOZMEDIANO, M. A. H. Gauge fields from strain in graphene. **Physical Review B**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 16, 2013.
- JUAN, F. de; STURLA, M.; VOZMEDIANO, M. A. H. Space dependent fermi velocity in strained graphene. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 108, n. 22, 2012.
- KATSNELSON, M. I. Graphene: carbon in two dimensions. **Materials today**, Elsevier, v. 10, n. 1-2, p. 20–27, 2007.
- KHVESHCHENKO, D. V. Coulomb-interacting dirac fermions in disordered graphene. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 74, p. 161402, 2006.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.; ATKIN, R.; FOX, N. **The theory of elasticity: Physics of continuous media.** [S. l.]: CRC press, p. 167–178, 2020.
- LITTLE, S.; WILLIAM, R. **Elasticity.** [S. l.]: Courier corporation, 2012.
- MANES, J. L. Symmetry-based approach to electron-phonon interactions in graphene. **Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics**, APS, v. 76, n. 4, p. 045430, 2007.
- MAVKO, G.; MUKERJI, T.; DVORKIN, J. **The rock physics handbook.** [S. l.]: Cambridge university press, 2020.
- MONTEIRO, L.; ALMEIDA, C.; SILVA, J. Dirac fermions on wires confined to the graphene möbius strip. **Physical Review B**, APS, v. 108, n. 11, p. 115436, 2023.
- MORALES, P. A.; COPINGER, P. Curvature-induced pseudogauge fields from time-dependent geometries in graphene. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 107, p. 075432, 2023.
- NAKAHARA, M. **Geometry, topology and physics.** [S. l.]: CRC press, 2018.
- NIKIFOROV, I.; DONTSOVA, E.; JAMES, R.; DUMITRICĂ, T. Tight-binding theory of graphene bending. **Physical Review B**, APS, v. 89, n. 15, p. 155437, 2014.
- NISSINEN, J.; VOLOVIK, G. E. Type-iii and iv interacting weyl points. **JETP Letters**, Springer, v. 105, n. 7, p. 447–452, 2017.
- NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K.; MOROZOV, S. V.; JIANG, D.; KATSNELSON, M. I.; GRIGORIEVA, I. V.; DUBONOS, S. V.; FIRSOV, A. A. Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. **nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 438, n. 7065, p. 197–200, 2005.
- PEREIRA, V. M.; NETO, A. C.; PERES, N. Tight-binding approach to uniaxial strain in graphene. **Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics**, APS, v. 80, n. 4, p. 045401, 2009.
- SEDRAKYAN, A.; SINNEN, A.; ZIEGLER, K. Deformation of a graphene sheet: Interaction of fermions with phonons. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 103, p. L201104, 2021.

- SEMENOFF, G. W. Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly. **Physical Review Letters**, APS, v. 53, n. 26, p. 2449, 1984.
- SEPEHRI, A.; PINCAK, R.; ALI, A. F. Emergence of $f(r)$ gravity-analogue due to defects in graphene. **The European Physical Journal B**, Springer, v. 89, n. 11, p. 250, 2016.
- SILVA, J.; YEŞILTAŞ, Ö.; FURTADO, J.; ARAUJO FILHO, A. Strain effects on the electronic properties of a graphene wormhole. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 139, n. 8, p. 762, 2024.
- SUZUURA, H.; ANDO, T. Phonons and electron-phonon scattering in carbon nanotubes. **Physical review B**, APS, v. 65, n. 23, p. 235412, 2002.
- VILLALBA, V. M.; MAGGIOLO, A. R. Energy spectrum of a 2d dirac electron in the presence of a constant magnetic field. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 22, p. 31–35, 2001.
- VOZMEDIANO, M. A.; KATSNELSON, M.; GUINEA, F. Gauge fields in graphene. **Physics Reports**, Elsevier, v. 496, n. 4-5, p. 109–148, 2010.
- WATANABE, M.; KOMATSU, H.; TSUJI, N.; AOKI, H. Electronic structure of helicoidal graphene: Massless dirac particles on a curved surface with a screw symmetry. **Physical Review B**, APS, v. 92, n. 20, p. 205425, 2015.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: principles and applications of the general theory of relativity. [S. l.]: John Wiley & Sons. 2013.
- YEŞILTAŞ, Ö. Dirac equation on the torus and rationally extended trigonometric potentials within supersymmetric qm. **Advances in High Energy Physics**, Wiley Online Library, v. 2018, n. 1, p. 6891402, 2018.
- YEŞILTAŞ, Ö.; FURTADO, J.; SILVA, J. E. G. d. Dirac equation on a catenoid bridge: a supersymmetric approach. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 137, n. 4, p. 1–12, 2022.