



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FELIPE CÂMARA DE FREITAS

REGRAS DE SINTONIA DO PREDITOR DE SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO
PARA SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM COM ATRASO

FORTALEZA

2025

FELIPE CÂMARA DE FREITAS

REGRAS DE SINTONIA DO PREDITOR DE SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO PARA
SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM COM ATRASO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marcus V. S. Costa

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F936r Freitas, Felipe Câmara de.
Regras de sintonia do preditor de Smith filtrado simplificado para sistemas de primeira ordem com atraso / Felipe Câmara de Freitas. – 2025.
53 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa.

1. Atraso de transporte. 2. Preditor de Smith filtrado simplificado. 3. Sistemas de primeira ordem. 4. Condição de robustez. I. Título.

CDD 621.3

FELIPE CÂMARA DE FREITAS

REGRAS DE SINTONIA DO PREDITOR DE SMITH FILTRADO SIMPLIFICADO PARA
SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM COM ATRASO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus V. S. Costa (Orientador)
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
(UFERSA)

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. René D. O. Pereira
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
(UFERSA)

Prof. Dra. Michela Mulas (Externo)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família; aos meus falecidos tios, Francisco e Eunice; aos amigos, colegas e a todos aqueles que me ajudaram na realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Não se pode conseguir nada sem ajuda. Agradeço primeiramente à Deus por ser quem Ele é e por tudo que fez por mim durante toda minha vida e, principalmente, quando tive que me tratar de um câncer. Foste meu refúgio quando não havia lugar no mundo onde pudesse fugir daquela realidade, foste minha força quando percebi que era muito fraco para lutar contra aquela doença. És INCONPARÁVEL.

Agradeço à minha família por tudo que fizeram por mim, especialmente minha mãe, Neide, meu pai, César, e meu irmão mais velho, Thiago.

Aos médicos, enfermeiros, técnicos, farmacêuticos, psicólogos, fisioterapeutas e amigos que adquiri ao longo do meu tratamento, assim como a todos da "turma do barulho".

Aos irmãos da igreja, Regina, Fred e Bruno pelo apoio e amizade sincera.

Agradeço ao meu orientador Marcus, bem como aos professores José Carlos e Laurinda, por me darem a primeira oportunidade no departamento, e aos professores Bismark e Fabrício.

Ao meu amigo Vanier, por todo o apoio que me deu desde a primeira vez que eu tentei o mestrado, tanto no meio acadêmico quanto fora dele. Aos demais amigos: Amaury, Aluísio, Lucas, Fernando, Caio, Dênio, Silas, Igor, Juliana, Jéssica, Mapurunga, Clauson, René e Mário (*in memoriam*). Aos colegas e amigos do GPAR nessa última jornada: Alanio, Piloto (Juan), João, Gustavo, Sérgio, Ítalo, Militão, Klysmann, Xará (Felipe), Fonseca, Raoni, Jack, Balbino e Roberta.

Aos colegas Piloto, Jack e Daniel pelas dicas e ajuda que enriqueceram essa dissertação, assim como aos integrantes da banca pelas correções sugeridas.

Ao professor Pierluigi (*in memoriam*) por me ensinar o caminho para desenvolver minha inteligência, bem como o ambiente de estímulo onde isso ocorre.

A todos os colaboradores da universidade e àqueles que de forma direta ou indireta ajudaram na minha caminhada acadêmica e que não foram citados, minhas sinceras desculpas.

Ao Doutor em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

“Sabemos que todas as coisas cooperam para o bem daqueles que amam a Deus, daqueles que são chamados segundo o seu propósito.”

(Romanos 8:28)

RESUMO

O presente trabalho propõe regras de ajuste do Preditor de Smith Filtrado Simplificado para sistemas de primeira ordem com atraso de transporte. Tais regras são obtidas a partir da condição de estabilidade robusta do controlador e fornecem o menor parâmetro desejado para garantir estabilidade e rápida rejeição de perturbações constantes, bastando para isso fornecer o ganho do sistema, o polo, bem como o atraso e sua máxima incerteza e o ganho de controle. Uma vez obtida a forma analítica de tais regras, determinam-se as soluções das equações transcendentais envolvidas através de método aproximado ou numérico. Um programa para cálculo automático do parâmetro de sintonia é desenvolvido a fim de facilitar o trabalho do projetista. Finalmente, cada regra é testada nos respectivos sistemas de primeira ordem através da simulação e comparação com outros trabalhos recentes da literatura. Os resultados mostram que as regras propostas são eficazes na determinação do valor do parâmetro do filtro que seja pequeno o suficiente para garantir bom desempenho na rejeição de perturbações e que ainda garanta estabilidade do sistema de controle frente à incerteza no valor do atraso de transporte.

Palavras-chave: Atraso de transporte, Preditor de Smith Filtrado Simplificado, Sistemas de primeira ordem, condição de robustez.

ABSTRACT

This paper proposes tuning rules for the Simplified Filtered Smith Predictor for first-order systems with transport delay. These rules are derived from the robust stability condition of the controller and provide the minimum desired parameter to ensure stability and fast rejection of constant disturbances. To achieve this, it is only necessary to provide the system gain, the pole, as well as the time delay along with its maximum uncertainty, and the control gain. Once the analytical form of these rules is obtained, the solutions to the involved transcendental equations are determined through an approximate or numerical method. A program for automatic calculation of the tuning parameter is developed to ease the designer's task. Finally, each rule is tested on the respective first-order systems through simulation and compared with other recent works in the literature. The results show that the proposed rules are effective in determining the value of the filter parameter that is small enough to ensure good performance in disturbance rejection while still ensuring the stability of the control system in the presence of uncertainty in the transport delay value.

Keywords: Time-Delay, Simplified Filtered Smith Predictor, First-order systems, robustness condition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema do Preditor de Smith.	20
Figura 2 – Estrutura do Preditor de Smith Filtrado.	21
Figura 3 – Esquema de controle do SFSP no domínio contínuo.	22
Figura 4 – Estrutura de implementação estável do SFSP.	24
Figura 5 – Representação do sistema real.	25
Figura 6 – Estrutura equivalente do SFSP.	26
Figura 7 – Diagrama de Nyquist para análise de robustez da estabilidade.	26
Figura 8 – Comportamentos de $g(\omega)$ e $f_\alpha(\omega)$ para diferentes valores de α	28
Figura 9 – Simulação processo integrador com atraso nominal.	35
Figura 10 – Simulação processo integrador com incerteza de +20% no atraso.	36
Figura 11 – Simulação processo integrador com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 1,5$	37
Figura 12 – Simulação processo integrador com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 1,2$, inferior ao fornecido pela regra.	37
Figura 13 – Simulação processo estável com atraso nominal.	38
Figura 14 – Simulação processo estável com incerteza de +20% no atraso.	39
Figura 15 – Simulação processo estável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,06$	40
Figura 16 – Simulação processo estável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,03997$, inferior ao fornecido pela regra.	40
Figura 17 – Simulação processo instável com atraso nominal.	41
Figura 18 – Simulação processo instável com incerteza de +20% no atraso.	42
Figura 19 – Simulação processo instável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,095$	43
Figura 20 – Simulação processo instável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,0726$, inferior ao fornecido pela regra.	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de fórmulas das regras (caso $\Delta L < 1$).	32
Tabela 2 – Índices de desempenho sistema integrador.	36
Tabela 3 – Índices de desempenho sistema estável.	39
Tabela 4 – Índices de desempenho sistema instável.	42
Tabela 5 – Valores de α	44

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CV	<i>Control Variance</i>
DTC	<i>Dead-Time Compensator</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
FSP	<i>Filtered Smith Predictor</i>
I-PD	<i>Integral Proportional-Derivative</i>
IAE	<i>Integrated Absolute Error</i>
ISE	<i>Integrated Squared Error</i>
ITAE	<i>Integrated Time-weighted Absolute Error</i>
ITSE	<i>Integrated Time-weighted Squared Error</i>
LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
PI-PD	<i>Proportional-Integral Proportional-Derivative</i>
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
SFSP	<i>Simplified Filtered Smith Predictor</i>
SP	<i>Smith Predictor</i>
TV	<i>Total Variation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz de estados
B	Matriz de entrada
b_1	Coefficiente filtro de robustez
b_2	Coefficiente filtro de robustez
C	Matriz de saída
e	Sinal de erro
$f_\alpha(\omega)$	Função módulo dependente de α
f_{final}	Valor final de $f_\alpha(\omega)$
F	Filtro de referência FSP
F_r	Filtro FSP
$g(\omega)$	Função módulo
$\bar{g}_{\text{máximo}}$	Valor máximo superior de $g(\omega)$
G_n	Modelo sem atraso
H_{yr}	Relação entre saída e referência
H_{yq}	Relação entre saída e perturbação
H_{uw}	Relação entre sinal de controle e ruído
i	Amostra
$I_r(\omega)$	Índice de robustez
j	Unidade imaginária
K	Ganho do controlador
K_r	Filtro do segmento de referência SFSP
L	Atraso real
L_n	Atraso nominal
N_q	Quantidade de amostras da rejeição de perturbação
N_w	Quantidade de amostras da atenuação de ruído
P	Processo real

q	Perturbação de entrada
r	Sinal de referência
s	Operador de Laplace
S	Função de transferência para implementação do SFSP
t	Tempo
t_q	Instante de aplicação da perturbação
t_w	Instante de aplicação do ruído
u	Sinal de controle
V	Filtro de robustez SFSP
w	Ruído de medição
y	Saída do sistema
α	Polo do filtro V
δP	Incerteza multiplicativa
ΔP	Incerteza aditiva
$\overline{\delta P}(\omega)$	Norma limitada da incerteza multiplicativa
ΔL	Incerteza no atraso
μ	Média do sinal de controle
ω	Frequência em rad/s
$\bar{\omega}_M$	Frequência onde ocorre o máximo superior de $g(\omega)$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Levantamento Bibliográfico	16
1.2	Motivação	17
1.3	Objetivos	18
1.4	Contribuição proposta	18
1.5	Trabalho publicado	18
1.6	Organização do texto	19
2	COMPENSADORES DE ATRASO DE TRANSPORTE	20
2.1	O Preditor de Smith (SP)	20
2.2	O Preditor de Smith Filtrado (FSP)	21
2.3	O Preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP)	22
2.3.1	<i>Implementação Estável do SFSP</i>	24
3	REGRAS DE SINTONIA	25
3.1	Estabilidade robusta	25
3.2	Obtenção das Regras de Sintonia	27
3.2.1	<i>Integrador puro</i>	30
3.2.2	<i>Sistema de primeira ordem estável</i>	30
3.2.3	<i>Sistema de primeira ordem instável</i>	31
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	34
4.1	Exemplos de Simulação	34
4.1.1	<i>Sistema Integrador</i>	35
4.1.2	<i>Sistema Estável</i>	38
4.1.3	<i>Sistema Instável</i>	41
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	46
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICES	49
	APÊNDICE A – Demonstração das equações.	49
	APÊNDICE B – Código da função que fornece o parâmetro α.	51

1 INTRODUÇÃO

Diferentes fatores podem determinar o surgimento do atraso de transporte em processos, são eles: tempo demandado para transporte de massa, bem como de energia ou informação, ou ainda, em sistemas de controle digitais, devido ao tempo para os dados serem processados e ao período de ciclo do computador, em outras situações, pelo acúmulo de tempo de atrasos em vários sistemas dinâmicos simples conectados em série e, finalmente, na modelagem de baixa ordem de muitos sistemas industriais (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Uma característica indesejada dos sistemas com atraso de transporte é o fato de a ação de controle ter efeito na variável controlada somente após decorrer algum tempo, além de levar-se um tempo considerável para o efeito das perturbações serem percebidas, conforme consta em Normey-Rico e Camacho (2007).

No projeto de sistemas de controle, processos com atraso de transporte considerável apresentam dificuldades para controlar quando se utiliza controle por realimentação como, por exemplo, o fato do tempo morto provocar uma diminuição extra na fase do sistema em malha fechada, podendo gerar instabilidade (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Nesse caso, a utilização de um controle preditivo é recomendável, principalmente em situações em que o atraso de transporte é elevado (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Uma alternativa consagrada são os chamados compensadores de tempo-morto (*Dead-Time Compensator* (DTC)) (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2008a).

Neste trabalho são desenvolvidas regras de sintonia para um dos parâmetros do filtro de um compensador de atraso, ou DTC, uma para cada tipo de sistema de primeira ordem com atraso de transporte, tais que os controladores sejam capazes de rejeitar rapidamente perturbações tipo degrau e que garantam estabilidade. As regras fornecem o parâmetro a partir de valores característicos do processo, bem como da incerteza máxima considerada no atraso de transporte e do valor de ganho do controle.

Finalmente, simulações de sistemas de controle ajustados por cada uma das regras mostram que as mesmas são seguras quanto à previsão do parâmetro no sentido de garantir estabilidade na saída do sistema.

1.1 Levantamento Bibliográfico

Um preditor integrado a um sistema de controle remonta do final da década de 1950, quando Otto J. M. Smith (1917-2009) propôs, em um artigo, aquilo que viria a ser conhecido como o Preditor de Smith (*Smith Predictor* (SP)) (SMITH, 1957), o algoritmo de compensação de atraso de transporte mais conhecido e utilizado na indústria (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Contudo, tratando-se de compensação de sistemas estáveis, o SP tem desempenho na rejeição de perturbação de entrada limitado pela dinâmica de malha aberta do processo. Nesse contexto, vários controladores foram desenvolvidos para resolver essa e outras limitações, como a aplicação do SP em processos integradores e instáveis (TORRICO *et al.*, 2024). Uma das estratégias propostas foi o Preditor de Smith filtrado (*Filtered Smith Predictor* (FSP)) (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009) em 2009, constituído de um controlador responsável pelo seguimento de referência e de um filtro cuja função é garantir rejeição de perturbações, além de robustez e estabilidade.

A partir do FSP, surgiu o Preditor de Smith filtrado simplificado (*Simplified Filtered Smith Predictor* (SFSP)) (TORRICO *et al.*, 2013), trazendo, como o nome indica, controladores de ordem inferior àquele, mas com desempenho no mínimo equivalente quando se considera rejeição de perturbações e robustez.

O artigo de Torrico *et al.* (2018), traz um novo conjunto de regras para ajuste de filtro do SFSP que permitem o uso de filtros de ordem inferior capazes de garantir rejeição de perturbações e robustez em malha fechada. Os autores mostram melhor desempenho da solução proposta em comparação a outros trabalhos da literatura quanto à rejeição de perturbações e ruídos, além de aplicá-la a um processo real representado por uma câmara térmica.

No trabalho de Torrico *et al.* (2019) é proposta a extensão do SFSP para sistemas em espaço de estados visando a rejeição de perturbações desconhecidas no cenário de sistemas lineares invariantes no tempo (*Linear Time Invariant* (LTI)) com atraso na entrada. O artigo mostra que a estratégia proposta é simples, se comparada àquelas presentes na literatura, com a vantagem de ser aplicável tanto a sistemas no tempo contínuo quanto no tempo discreto.

O artigo de Torrico *et al.* (2021) traz o desenvolvimento de uma estrutura de controle do SFSP para processos de fase não mínima de ordem elevada. A principal vantagem proposta é que o controle primário consiste de uma realimentação de estados com elemento integrador implícito, resultando em filtros de ordem inferior, bem como menos parâmetros de ajuste.

Através de simulações, observam-se resultados no mínimo equivalentes aos obtidos com outras estratégias disponíveis na área de compensação de atraso de transporte.

Novos métodos de sintonia para o SFSP foram propostos nos últimos anos. Nos trabalhos de Rodrigues (2021) e Sá Rodrigues *et al.* (2021), os autores desenvolvem uma regra que fornece a sintonia do preditor para a compensação de sistemas de primeira ordem instáveis em malha aberta com atraso de transporte a partir do seu valor, da máxima incerteza do mesmo e da constante de tempo de malha fechada desejada. A lei de sintonia é obtida através da otimização de simulações realizadas dentro da região desejada para sua validade. Além disso, esses trabalhos fornecem um método para determinar o máximo tempo de amostragem sem alterar de forma significativa o desempenho e a robustez do sistema de controle.

Oliveira *et al.* (2022) propõem a obtenção do preditor diretamente pela sintonia na forma de filtro tipo *Finite Impulse Response* (FIR). Tal método apresenta a vantagem de garantir intrinsecamente a rejeição de perturbações tipo degrau, bem como da dinâmica de malha aberta do processo, além da simplicidade para a determinação dos parâmetros do controlador.

O artigo de Freitas *et al.* (2024) traz uma proposta de sintonia do SFSP para sistemas integradores com atraso de transporte. O desempenho do compensador assim ajustado é comparado com outros trabalhos recentes da literatura, onde se concluiu que a regra desenvolvida pelos autores representa uma estratégia segura de ajuste do preditor dentro do cenário apresentado por eles.

1.2 Motivação

Alguns parâmetros do SFSP são obtidos a partir de condições como, por exemplo, o desempenho desejado em malha fechada. Porém, um dos parâmetros, α , tem sintonia livre. Quanto menor o valor desse parâmetro, mais rápida a rejeição de perturbações. Por outro lado, um valor muito baixo de α pode levar o sistema à instabilidade. Apesar de os trabalhos de Rodrigues (2021) e Sá Rodrigues *et al.* (2021), bem como de Freitas *et al.* (2024) apresentarem contribuições de regras para obtenção desse parâmetro, ambos se restringem a uma faixa restrita de desempenho em malha fechada e a um único tipo de sistema cada. Diante disso, cabe ao projetista resolver esse problema de compromisso através de um procedimento de tentativa e erro nas demais situações não contempladas naqueles trabalhos.

1.3 Objetivos

Esse trabalho objetiva determinar fórmulas que forneçam o valor do parâmetro α pequeno o suficiente para rejeitar rapidamente as perturbações do tipo degrau, mas que ainda garanta a robustez da estabilidade do sistema de controle. Serão desenvolvidas três fórmulas, uma para cada tipo de sistema de primeira ordem (estável, instável e integrador), que fornecem o valor do parâmetro do filtro a partir de valores característicos do processo, tais como: o ganho, o valor do polo, o atraso e a incerteza no atraso e o ganho de controle. Assim, o problema de compromisso desempenho-estabilidade na determinação do filtro será resolvido de forma a facilitar o trabalho do projetista.

Objetivos específicos:

- Desenvolver procedimentos analíticos dos quais seja possível a obtenção do parâmetro α do filtro do SFSP para cada tipo de sistema de primeira ordem;
- Determinar a solução das equações que permitem o cálculo de α (de forma aproximada ou numérica);
- Criar uma função para fornecer automaticamente o valor do parâmetro do filtro a partir dos valores característicos do sistema (ganho, polo, atraso de transporte e sua máxima incerteza) e do ganho de controle;
- Validar as regras propostas para cada tipo de sistema comparando com outros trabalhos da literatura.

1.4 Contribuição proposta

Obter o parâmetro α do filtro do SFSP através de procedimento analítico teórico-numérico, para cada sistema de primeira ordem com atraso (polo estável, instável e integrador puro), capaz de garantir ao controle tanto estabilidade robusta na presença de incertezas no valor do atraso de transporte quanto rápida rejeição de perturbações tipo degrau.

1.5 Trabalho publicado

No decorrer do curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, o autor dessa dissertação participou como autor do seguinte artigo:

1. Regra de sintonia para o preditor de Smith filtrado simplificado aplicado a processos integradores com atraso de transporte. XXV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) -

2024.

1.6 Organização do texto

Esse texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os trabalhos publicados sobre o SFSP nos últimos anos. O Capítulo 2 apresenta o esquema de controle de alguns compensadores de atraso de transporte, como o SP, o FSP e, especificamente, o SFSP, com sua estrutura de implementação estável, além da determinação dos parâmetros do numerador do filtro. O Capítulo 3 traz uma revisão sobre estabilidade robusta aplicada ao SFSP e o desenvolvimento das regras de ajuste do filtro a partir dessa condição de robustez, bem como a obtenção prática do parâmetro do filtro através de um programa ou por aproximação. No Capítulo 4 são mostrados os resultados de simulação do sistema de controle ajustado pelas regras propostas para cada tipo de sistema em comparação com outros trabalhos da literatura, além da discussão. O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e proposta de trabalhos futuros.

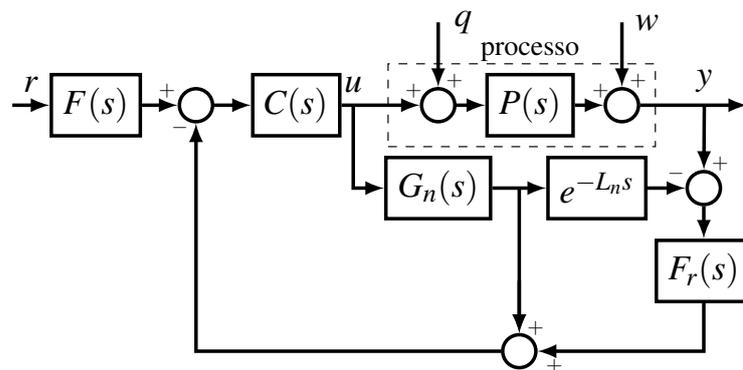
A Eq. (2.3) evidencia o fato do SP apresentar problema ao ser aplicado em sistemas instáveis em malha aberta, uma vez que tal dinâmica está presente na função de transferência que relaciona a saída com a perturbação. Além disso, não há liberdade de ajuste para obter dinâmica desejada de seguimento de referência sem interferir no desempenho desejado para rejeição de perturbação e vice-versa.

2.2 O Preditor de Smith Filtrado (FSP)

Uma proposta simples de solução para o controle de sistemas de primeira ordem instáveis em malha aberta com tempo morto é o chamado Preditor de Smith Filtrado (FSP) (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2008b). A Figura 2 mostra sua estrutura em diagrama de blocos, onde $C(s)$ é um controle proporcional e integrativo (PI) e $F(s)$ é o filtro de referência.

O filtro $F_r(s)$ garante rejeição de perturbações, bem como robustez do controle frente a incerteza no atraso de transporte (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2009).

Figura 2 – Estrutura do Preditor de Smith Filtrado.



Fonte: Próprio autor.

As funções de transferência em malha fechada, quando o modelo do processo é perfeito, são:

$$H_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)}, \quad (2.5)$$

$$H_{yq} = \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \left[1 - \frac{C(s)P_n(s)F_r(s)}{1 + C(s)G_n(s)} \right], \quad (2.6)$$

$$H_{uw} = \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{-C(s)F_r(s)}{1 + C(s)G_n(s)}. \quad (2.7)$$

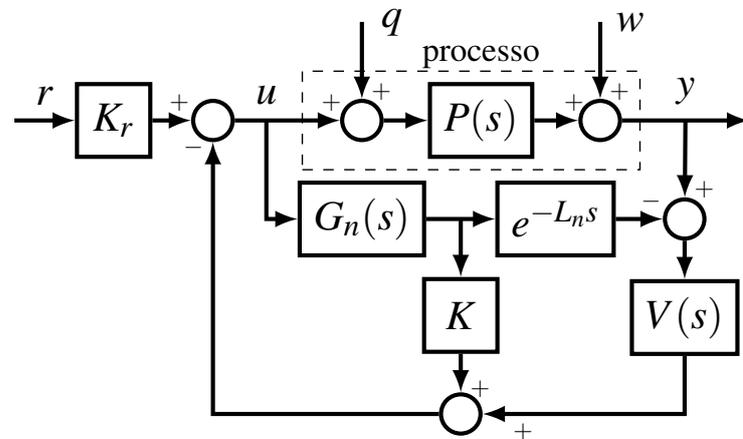
Analisando as Eqs. (2.5) e (2.6), vemos que é possível ajustar o filtro $F_r(s)$ para alcançar rejeição de perturbação e robustez sem alterar o desempenho saída-referência. Através

desse filtro pode-se obter também um sistema internamente estável para o controle de processos instáveis em malha aberta.

2.3 O Preditor de Smith filtrado simplificado (SFSP)

A Figura 3 mostra a estrutura do preditor de Smith filtrado simplificado para modelos de primeira ordem. Os parâmetros do sistema de controle são: o ganho de referência K_r , o ganho K e o filtro de robustez $V(s)$.

Figura 3 – Esquema de controle do SFSP no domínio contínuo.



Fonte: Oliveira *et al.* (2021) adaptado.

O filtro $V(s)$ é dado por:

$$V(s) = \frac{b_1s + b_2}{\alpha s + 1}. \quad (2.8)$$

As funções de transferência associadas ao SFSP, quando o modelo é fiel ao processo real, são:

$$H_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_r K P_n(s)}{1 + K G_n(s)}, \quad (2.9)$$

$$H_{yq} = \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \left[1 - \frac{V(s) K P_n(s)}{1 + K G_n(s)} \right], \quad (2.10)$$

$$H_{uw} = \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{-K V(s)}{1 + K G_n(s)}. \quad (2.11)$$

Considerando o modelo nominal sem atraso como

$$G_n(s) = \frac{b}{(s \pm a)}, \quad (2.12)$$

em que $a \geq 0$, a função de transferência em malha fechada, que relaciona y com r é:

$$H_{yr}(s) = \frac{K_r b e^{-L_n s}}{s \pm a + b K}. \quad (2.13)$$

O ganho K é tal que:

$$K > 0, \quad (2.14)$$

para os sistemas integrador e estável, e

$$K > \frac{a}{b}, \quad (2.15)$$

no caso do sistema instável.

Para o sistema integrador ($a = 0$), os coeficientes do numerador do filtro são obtidos resolvendo-se as equações:

$$1 + G_n(s)[K - V(s)e^{L_n s}]|_{s=0} = 0, \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{d}{ds}(G_n(s)[K - V(s)e^{L_n s}]) \right|_{s=0} = 0, \quad (2.17)$$

o que resulta:

$$b_1 = \frac{1 + (\alpha + L_n)bK}{b}, \quad (2.18)$$

$$b_2 = K. \quad (2.19)$$

Caso o sistema seja instável, seu denominador será $(s - a)$ e os coeficientes b_1 e b_2 do filtro são obtidos a partir da Eq. (2.16) e da equação abaixo:

$$K - V(s)e^{L_n s}|_{s=a} = 0, \quad (2.20)$$

das quais obtemos:

$$b_1 = \frac{a - Kb + Kb(1 + \alpha a)e^{aL_n}}{ab}, \quad (2.21)$$

$$b_2 = K - \frac{a}{b}. \quad (2.22)$$

Para o sistema estável, ou seja, com denominador $(s + a)$, os parâmetros b_1 e b_2 do filtro são obtidos resolvendo-se a Eq. (2.16) e também a seguinte equação:

$$K - V(s)e^{L_n s}|_{s=-a} = 0, \quad (2.23)$$

que fornecem:

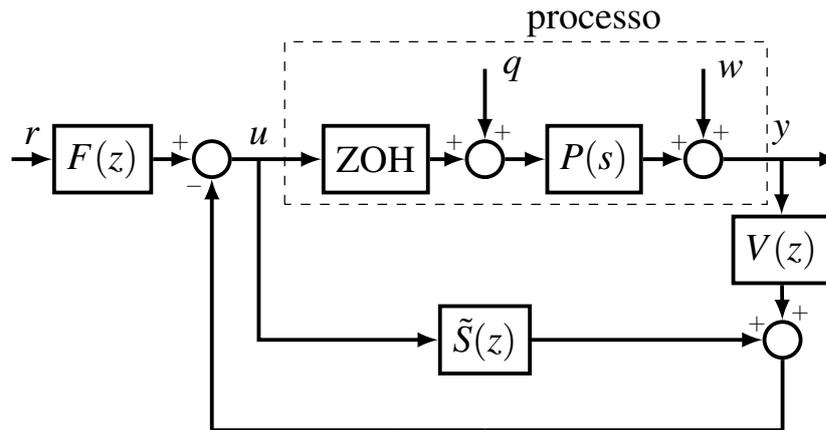
$$b_1 = \frac{a + Kb - Kb(1 - \alpha a)e^{-aL_n}}{ab}, \quad (2.24)$$

$$b_2 = K + \frac{a}{b}. \quad (2.25)$$

2.3.1 Implementação Estável do SFSP

Há problema de instabilidade interna caso a estrutura de implementação mostrada na Figura 3 seja utilizada para sistemas integradores ou instáveis. O trabalho de Oliveira *et al.* (2021) propõe, para esses casos, a estrutura de implementação estável mostrada na Figura 4.

Figura 4 – Estrutura de implementação estável do SFSP.



Fonte: Oliveira *et al.* (2021) adaptado.

Onde

$$F(s) = \frac{K_r}{V(s)}, \quad (2.26)$$

e $\tilde{S}(s)$ é a realização mínima de

$$S(s) = (K - e^{-Ls}V(s)C)(sI - A)^{-1}B, \quad (2.27)$$

dada por

$$\tilde{S}(s) = KS_1(s) - S_2(s)e^{-Ls}, \quad (2.28)$$

em que

$$S_1(t) = \int_{t-L}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad (2.29)$$

$$S_2(s) = \mathbb{M}[(V(s) - Ke^{AL})G_n(s)], \quad (2.30)$$

onde $\mathbb{M}[\cdot]$ denota a realização mínima de um sistema LTI em espaço de estados, A , B e C são matrizes da representação do sistema sem atraso na forma canônica observável.

Procedemos a seguir com a proposta de regra de sintonia para o filtro do SFSP para diferentes tipos de sistemas com atraso de transporte: integrador puro, sistemas de primeira ordem estável e instável.

3 REGRAS DE SINTONIA

Nesse capítulo são revisados os conceitos para determinar a condição de estabilidade robusta do sistema de controle, como o índice de robustez, além do desenvolvimento do procedimento analítico-numérico para obtenção das regras de sintonia para cada tipo de sistema de primeira ordem com atraso de transporte. Considera-se incerteza apenas no atraso do sistema, uma vez que gera grande impacto na descrição dos erros de modelagem do processo, o que faz do erro no atraso de transporte o principal fator que leva o sistema à instabilidade em malha fechada (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

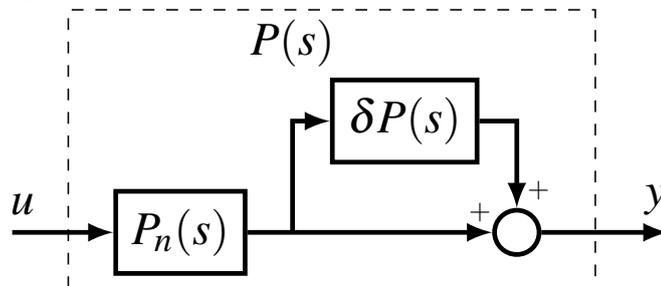
3.1 Estabilidade robusta

O sistema real $P(s)$ essencialmente difere do seu modelo $P_n(s) = G_n(s)e^{-L_n s}$, sendo melhor representado pela família de processos dada por:

$$P(s) = P_n(s)(1 + \delta P(s)) = P_n(s) + \Delta P(s), \quad (3.1)$$

onde $\Delta P(s)$ é a incerteza aditiva e $\delta P(s)$ representa a incerteza multiplicativa.

Figura 5 – Representação do sistema real.



Fonte: Próprio autor.

Consideremos, por hipótese, que todas as plantas da família possuem o mesmo número de polos no lado direito do plano s e que as normas das incertezas aditivas e multiplicativas são limitadas (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007). Assim, temos para a incerteza multiplicativa:

$$|\delta P(j\omega)| \leq \overline{\delta P}(\omega), \quad \omega > 0, \quad (3.2)$$

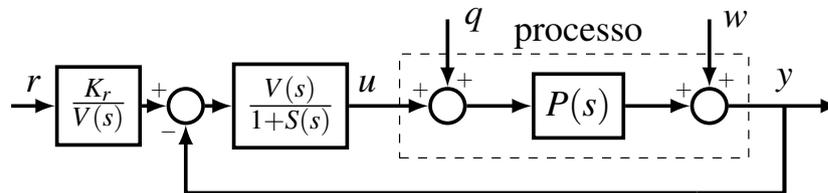
em que $\overline{\delta P}$ é a norma limitada da incerteza multiplicativa.

A equação característica de malha fechada será:

$$1 + C(s)P(s) = 1 + C(s)(P_n(s) + \Delta P(s)) = 0, \quad (3.3)$$

onde $C(s)$ é o controle em cascata com o processo, conforme a estrutura equivalente do SFSP representada na Figura 6.

Figura 6 – Estrutura equivalente do SFSP.



Fonte: Próprio autor.

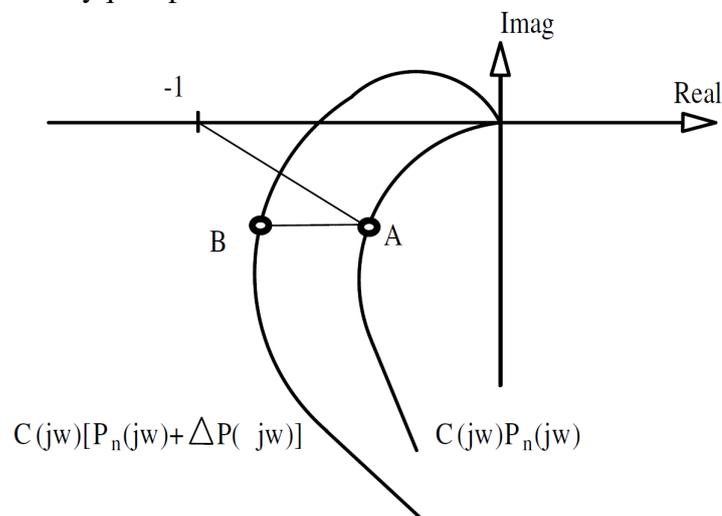
E $S(s)$ é dado por:

$$S(s) = KG_n(s) - G_n(s)V(s)e^{-Lns}. \quad (3.4)$$

Considere que o controle estabiliza o sistema nominal e que o diagrama correspondente de $C(j\omega)P_n(j\omega)$ não envolve o ponto $(-1, 0)$, então o controle estabiliza o processo real caso o diagrama de Nyquist da família de processos $C(j\omega)(P_n(j\omega) + \Delta P(j\omega))$ também não envolva esse ponto, o que ocorre se, e somente se, a distância entre $C(j\omega)P_n(j\omega)$ e o ponto $(-1, 0)$ no diagrama de Nyquist for maior que $|C(j\omega)\Delta P(j\omega)|$ (distância \overline{AB} na Figura 7) (MORARI; ZAFIRIOU, 1989):

$$|1 + C(j\omega)P_n(j\omega)| > |C(j\omega)\Delta P(j\omega)|, \quad \forall \omega. \quad (3.5)$$

Figura 7 – Diagrama de Nyquist para análise de robustez da estabilidade.



Fonte: (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

Dividindo ambos os membros da expressão (3.5) por $|C(j\omega)P_n(j\omega)|$, obtemos:

$$\frac{|1 + C(j\omega)P_n(j\omega)|}{|C(j\omega)P_n(j\omega)|} > \frac{|C(j\omega)\Delta P(j\omega)|}{|C(j\omega)P_n(j\omega)|} = |\delta P(j\omega)|, \quad \forall \omega. \quad (3.6)$$

Assim, obtemos a condição de estabilidade robusta em termos do índice de robustez, $I_r(\omega)$:

$$I_r(\omega) = \left| \frac{1 + C(s)P_n(s)}{C(s)P_n(s)} \right|_{s=j\omega} > \overline{\delta P}(\omega), \quad \forall \omega. \quad (3.7)$$

Na situação considerada, temos $C(s) = V(s)/(1 + S(s))$, então a Eq. (3.7) fica:

$$I_r(\omega) = \left| \frac{1 + KG_n(s)}{G_n(s)V(s)} \right|_{s=j\omega} > \overline{\delta P}(\omega), \quad \forall \omega. \quad (3.8)$$

Esta é a condição de estabilidade robusta do SFSP.

3.2 Obtenção das Regras de Sintonia

Seja a incerteza multiplicativa associada ao atraso, dada por:

$$\overline{\delta P}(\omega) \geq \left| \frac{P(s) - P_n(s)}{P_n(s)} \right|_{s=j\omega} = |e^{-\Delta L s} - 1|_{s=j\omega}, \quad \omega > 0, \quad (3.9)$$

em que $\Delta L = L - L_n$ é a incerteza no atraso.

Substituindo as Eqs. (2.8) e (2.12) na Eq. (3.8) e combinando com a Eq. (3.9), obtemos:

$$\left| \frac{(s \pm a + Kb)(\alpha s + 1)}{b(b_1 s + b_2)} \right|_{s=j\omega} > |e^{-\Delta L s} - 1|_{s=j\omega}. \quad (3.10)$$

Rearranjando a expressão acima, temos:

$$\left| \frac{\alpha s + 1}{b(b_1(\alpha)s + b_2)} \right|_{s=j\omega} > \left| \frac{e^{-\Delta L s} - 1}{s \pm a + Kb} \right|_{s=j\omega}. \quad (3.11)$$

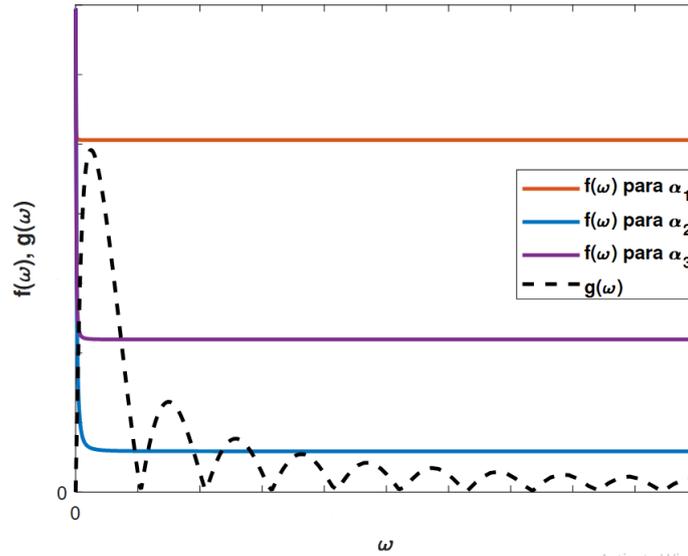
Que pode ser escrita como:

$$f_\alpha(\omega) > g(\omega), \quad \forall \omega, \quad (3.12)$$

onde $f_\alpha(\omega)$ e $g(\omega)$ são as respectivas funções módulo na Eq. (3.11).

A Figura 8 mostra o comportamento das funções $f_\alpha(\omega)$, para diferentes valores de α , e $g(\omega)$.

Figura 8 – Comportamentos de $g(\omega)$ e $f_\alpha(\omega)$ para diferentes valores de α .



Fonte: Próprio autor.

Para os três valores de α , apenas α_1 satisfaz a Eq. (3.12). A seguir, desenvolve-se uma estratégia de sintonia para α que satisfaça tal desigualdade para um dado sistema dinâmico e, conseqüentemente, a condição de estabilidade robusta do controle e que seja obtida através de parâmetros da planta.

Uma condição para que a desigualdade da Eq. (3.12) seja satisfeita é:

$$f_{\text{final}} > \bar{g}_{\text{máximo}}, \quad (3.13)$$

em que $\bar{g}_{\text{máximo}}$ é o valor máximo superior de $g(\omega)$ e

$$f_{\text{final}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha j\omega + 1}{b(b_1(\alpha)j\omega + b_2)} \right| = \frac{\alpha}{bb_1(\alpha)}. \quad (3.14)$$

A condição (3.13) fica:

$$\frac{\alpha}{bb_1(\alpha)} > \bar{g}_{\text{máximo}}. \quad (3.15)$$

A expressão acima mostra que o valor de α pode ser obtido explicitamente a partir do parâmetro da planta, b , do valor de um parâmetro do filtro que depende de α , $b_1(\alpha)$, e do valor máximo superior de $g(\omega)$. Entretanto, o valor $\bar{g}_{\text{máximo}}$ não pode ser obtido analiticamente, conforme se justifica a seguir.

Para o cálculo de $g(\omega)$, primeiro façamos:

$$e^{-\Delta Ls} - 1 \Big|_{s=j\omega} = e^{-j\Delta L\omega} - 1 = (\cos(\Delta L\omega) - 1) - j \sin(\Delta L\omega). \quad (3.16)$$

Assim

$$|e^{-\Delta L s} - 1|_{s=j\omega} = \sqrt{(\cos(\Delta L \omega) - 1)^2 + (\sin(\Delta L \omega))^2} = \sqrt{2(1 - \cos(\Delta L \omega))}. \quad (3.17)$$

E $g(\omega)$ poderá ser escrita como:

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\Delta L \omega))}{\omega^2 + (Kb \pm a)^2}}. \quad (3.18)$$

O radicando da expressão acima possui um numerador periódico, que varia de 0 a 4, e um denominador que cresce com o quadrado da frequência. Assim, $g(\omega)$ tem o aspecto de sucessão de picos com amplitude decrescente, conforme mostra a Figura 8.

A função dada pela Eq. (3.18) possui máximo superior em uma frequência $\bar{\omega}_M$ que satisfaz a equação:

$$\tan\left(\frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2}\right) = \frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2} + \frac{\Delta L (Kb \pm a)^2}{2 \bar{\omega}_M}. \quad (3.19)$$

Ou seja, uma equação transcendental em $\bar{\omega}_M$, cuja solução não pode ser obtida de forma analítica. Há dois modos para a determinação da raiz dessa equação.

Utilizando os dois primeiros termos da expansão em série de $\tan(\Delta L \bar{\omega}_M/2)$, obtemos a aproximação, válida para $\Delta L < 1$:

$$\bar{\omega}_M \approx \sqrt[4]{12} \left(\frac{Kb \pm a}{\Delta L} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Substituindo o valor da frequência acima na Eq. (3.18), determina-se:

$$\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12} \sqrt{(Kb \pm a)\Delta L}))}{\sqrt{12}(Kb \pm a)/\Delta L + (Kb \pm a)^2}}. \quad (3.21)$$

Caso $\Delta L > 1$, o valor máximo superior de $g(\omega)$ é calculado substituindo na Eq. (3.18) o valor de $\bar{\omega}_M$ obtido ao se resolver a Eq. (3.19) através de algum método numérico. Nesse trabalho, utiliza-se o método de Newton-Raphson com precisão de 1×10^{-5} e definindo a seguinte função:

$$h(\bar{\omega}_M) = \tan\left(\frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2}\right) - \frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2} - \frac{\Delta L (Kb \pm a)^2}{2 \bar{\omega}_M}, \quad (3.22)$$

e suas derivadas primeira e segunda:

$$h'(\bar{\omega}_M) = \frac{\Delta L}{2} \left(\sec^2\left(\frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2}\right) + \frac{(Kb \pm a)^2}{\bar{\omega}_M^2} - 1 \right), \quad (3.23)$$

$$h''(\bar{\omega}_M) = \frac{\Delta L^2}{2} \sec^2\left(\frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2}\right) \tan\left(\frac{\Delta L \bar{\omega}_M}{2}\right) - \frac{\Delta L(Kb \pm a)^2}{\bar{\omega}_M^3}. \quad (3.24)$$

O método de Newton-Raphson é iniciado com um valor inicial para a raiz. Nesse caso, utilizou-se o valor $\bar{\omega}_0 = 2\pi/(3\Delta L)$ que está dentro do primeiro intervalo de frequências em que $g(\omega)$ sai e retorna a zero, claramente o intervalo onde ocorre o valor máximo superior procurado, dispensando a análise gráfica prévia para avaliar o valor do palpite inicial que inicia o método numérico empregado.

A seguir, serão mostradas as fórmulas para obtenção do parâmetro α para cada tipo de sistema de primeira ordem, uma vez já tendo em mãos o valor de $g(\omega)$ máximo superior.

3.2.1 Integrador puro

Considerando o caso do integrador puro, temos o sistema dado pela Eq. (2.1) em que $G_n(s)$ tem polo $a = 0$. O filtro possui parâmetros dados pelas Eqs. (2.18) e (2.19). Assim, a condição (3.15) assume a forma:

$$\frac{\alpha}{1 + (L_n + \alpha)Kb} > \bar{g}_{\text{máximo}}. \quad (3.25)$$

A partir da qual obtêm-se:

$$\alpha > \frac{\bar{g}_{\text{máximo}}(1 + KbL_n)}{1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kb}. \quad (3.26)$$

A regra é válida caso:

$$1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kb > 0, \quad (3.27)$$

uma vez que $\alpha > 0$.

Se $\Delta L < 1$, o valor máximo superior de $g(\omega)$ é dado aproximadamente por:

$$\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12}\sqrt{Kb\Delta L}))}{\sqrt{12}Kb/\Delta L + K^2b^2}}. \quad (3.28)$$

3.2.2 Sistema de primeira ordem estável

O sistema estável de primeira ordem possui modelo dado pela Eq. (2.1) com $G_n(s)$ tendo o denominador $(s + a)$. Os parâmetros do filtro são dados pelas Eqs. (2.24) e (2.25). A desigualdade (3.15) fica:

$$\frac{a\alpha}{-Kb(1 - \alpha a)e^{-aL_n} + a + Kb} > \bar{g}_{\text{máximo}}. \quad (3.29)$$

O que fornece:

$$\alpha > \frac{\bar{g}_{\text{máximo}}[a + Kb(1 - e^{-aL_n})]}{a(1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kbe^{-aL_n})}, \quad (3.30)$$

onde

$$1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kbe^{-aL_n} > 0. \quad (3.31)$$

O valor $\bar{g}_{\text{máximo}}$ é tal que (se $\Delta L < 1$):

$$\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12}\sqrt{(Kb+a)\Delta L}))}{\sqrt{12}(Kb+a)/\Delta L + (Kb+a)^2}}. \quad (3.32)$$

3.2.3 Sistema de primeira ordem instável

Para o sistema instável, o modelo é dado pela Eq. (2.1) em que $G_n(s)$ tem denominador $(s - a)$. Têm-se os parâmetros do filtro dados pelas Eqs. (2.21) e (2.22). A desigualdade (3.15) será:

$$\frac{a\alpha}{Kb(1 + \alpha a)e^{aL_n} + a - Kb} > \bar{g}_{\text{máximo}}. \quad (3.33)$$

Resultando:

$$\alpha > \frac{\bar{g}_{\text{máximo}}[a + Kb(e^{aL_n} - 1)]}{a(1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kbe^{aL_n})}, \quad (3.34)$$

tendo a condição:

$$1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kbe^{aL_n} > 0. \quad (3.35)$$

Caso $\Delta L < 1$, a expressão do valor aproximado de $g(\omega)$ máximo superior é:

$$\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12}\sqrt{(Kb-a)\Delta L}))}{\sqrt{12}(Kb-a)/\Delta L + (Kb-a)^2}}. \quad (3.36)$$

Uma vez determinadas as fórmulas das quais obtêm-se o parâmetro α para cada tipo de sistema de primeira ordem, criou-se uma função que fornece automaticamente o valor do parâmetro a partir do ganho de controle, do ganho do sistema, do polo, do valor nominal do atraso e sua máxima incerteza. O método de Newton-Raphson para o cálculo do valor de $\bar{g}_{\text{máximo}}$ é empregado dentro da referida função, válida para qualquer valor de incerteza no atraso de transporte, cujo pseudocódigo está descrito no Algoritmo 1. No Apêndice B é mostrado um exemplo de implementação em MATLAB[®].

Caso $\Delta L < 1$, há a opção de usar as fórmulas aproximadas das regras de sintonia para cada tipo de sistema de primeira ordem com atraso organizadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela de fórmulas das regras (caso $\Delta L < 1$).

SISTEMA	Parâmetros
INTEGRADOR	$b_1 = \frac{1 + (\alpha + L_n)bK}{b}$ $b_2 = K$ $\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12}\sqrt{Kb\Delta L}))}{\sqrt{12}Kb/\Delta L + K^2b^2}}$ $\alpha > \frac{\bar{g}_{\text{máximo}}(1 + KbL_n)}{1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kb}$
ESTÁVEL	$b_1 = \frac{a + Kb - Kb(1 - \alpha a)e^{-aL_n}}{ab}$ $b_2 = K + \frac{a}{b}$ $\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12}\sqrt{(Kb + a)\Delta L}))}{\sqrt{12}(Kb + a)/\Delta L + (Kb + a)^2}}$ $\alpha > \frac{\bar{g}_{\text{máximo}}[a + Kb(1 - e^{-aL_n})]}{a(1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kbe^{-aL_n})}$
INSTÁVEL	$b_1 = \frac{a - Kb + Kb(1 + \alpha a)e^{aL_n}}{ab}$ $b_2 = K - \frac{a}{b}$ $\bar{g}_{\text{máximo}} \approx \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\sqrt[4]{12}\sqrt{(Kb - a)\Delta L}))}{\sqrt{12}(Kb - a)/\Delta L + (Kb - a)^2}}$ $\alpha > \frac{\bar{g}_{\text{máximo}}[a + Kb(e^{aL_n} - 1)]}{a(1 - \bar{g}_{\text{máximo}}Kbe^{aL_n})}$

Fonte: Próprio autor.

Algoritmo 1: Função alpha

Entrada: a, b, L, dl, K : real

```

1 início
2   função alp( $a, b, L, dl, K$ ): real
3      $x \leftarrow \frac{2\pi}{3 \cdot dl \cdot L}$                                 ▷ Valor inicial da raiz
4     calcula  $h(x), h'(x), h''(x)$                                 ▷ Equações (3.22), (3.23) e (3.24)
5      $k \leftarrow 0$ 
6     se  $h(x) \cdot h''(x) \leq 0$  ou  $h'(x) = 0$  então
7       escreva ('Corrigir palpite inicial')
8       senão
9         enquanto  $|h(x)| > 10^{-5}$  faça
10           $x \leftarrow x - \frac{h(x)}{h'(x)}$                                 ▷ Início do método de Newton-Raphson
11          calcula  $h(x), h'(x)$                                 ▷ Equações (3.22) e (3.23)
12           $k \leftarrow k + 1$ 
13        fim
14         $g_M \leftarrow \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\Delta Lx))}{x^2 + (Kb + a)^2}}$ 
15        se  $a = 0$  então
16           $\alpha \leftarrow \text{alp}(a, b, L, dl, K)$                                 ▷ Equação (3.26)
17          senão se  $a > 0$ 
18             $\alpha \leftarrow \text{alp}(a, b, L, dl, K)$                                 ▷ Equação (3.30)
19            senão
20               $a \leftarrow -a$ 
21               $\alpha \leftarrow \text{alp}(a, b, L, dl, K)$                                 ▷ Equação (3.34)
22            fim
23          retorna alpha
24        fim
25 fim

```

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, serão mostrados os desempenhos dos controladores ajustados pelas regras propostas em seus respectivos sistemas. Todos os processos utilizados são exemplos numéricos retirados dos seus artigos de origem. A análise de desempenho é feita tanto gráfica quanto numericamente a partir de índices de desempenho específicos, considerando os cenários com e sem incerteza no valor do atraso de transporte. O percentual de incerteza no atraso considerado nos exemplos foi o mesmo de Singha *et al.* (2024). O capítulo encerra com a discussão dos resultados obtidos.

4.1 Exemplos de Simulação

O SFSP sintonizado pelas regras de sintonia proposta é comparado com outros trabalhos da literatura recente. Para tanto, utilizam-se os seguintes índices de desempenho (DORF; BISHOP, 2008; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1996): a integral do erro absoluto (*Integrated Absolute Error* (IAE)), a integral do erro ao quadrado (*Integrated Squared Error* (ISE)), a integral do erro absoluto ponderado no tempo (*Integrated Time-weighted Absolute Error* (ITAE)), a integral do erro ao quadrado ponderado no tempo (*Integrated Time-weighted Squared Error* (ITSE)), a variação total (*Total Variation* (TV)) e a variância do sinal de controle (*Control Variance* (CV)), que são calculados por

$$\text{IAE} = \int_{t_q+2L}^{t_w} |e(t)| dt, \quad (4.1)$$

$$\text{ISE} = \int_{t_q+2L}^{t_w} e^2(t) dt, \quad (4.2)$$

$$\text{ITAE} = \int_{t_q+2L}^{t_w} t |e(t)| dt, \quad (4.3)$$

$$\text{ITSE} = \int_{t_q+2L}^{t_w} t e^2(t) dt, \quad (4.4)$$

$$\text{TV} = \sum_{i=1}^{N_q} |u_{i+1} - u_i|, \quad (4.5)$$

$$\text{CV} = \frac{1}{N_w - 1} \sum_{i=1}^{N_w} |u_i - \mu|^2, \quad (4.6)$$

onde t é o tempo, t_q é o instante em que é aplicada a perturbação de entrada, t_w é o instante em que é aplicado o ruído, $e(t) = r(t) - y(t)$ é o sinal de erro, i é a amostra, N_q é a quantidade de amostras relacionada à rejeição de perturbação, μ é a média do sinal de controle e N_w é

a quantidade de amostras relacionada à atenuação do ruído. Quanto menor o valor do índice, melhor o desempenho do controlador.

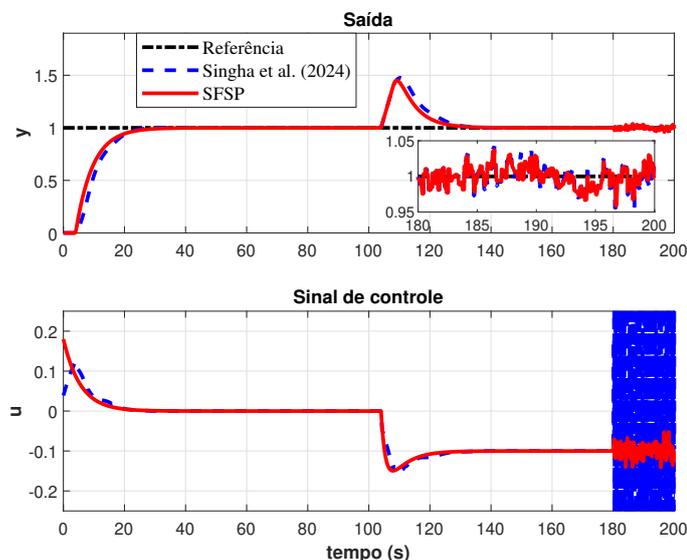
4.1.1 Sistema Integrador

As Figuras 9 e 10 mostram o desempenho do SFSP, com o parâmetro α sintonizado pela regra proposta, comparado ao controle proporcional integral-proporcional derivativo (*Proportional-Integral Proportional-Derivative (PI-PD)*) com preditor de Singha *et al.* (2024), ambos aplicados ao sistema utilizado por estes, dado pela Eq. (4.7), em que há um atraso de 4 segundos. Consideram-se as situações com atraso nominal e na presença de incerteza (20%, correspondendo a 0,8 segundos), aplicação de uma perturbação degrau de 0,1 no instante $t_q = 100$ segundos e um ruído branco com largura de banda limitada e densidade espectral de potência (*Power Spectral Density (PSD)*) de 5×10^{-5} foi adicionado à saída do processo no instante $t_w = 180$ segundos. Os seguintes valores foram utilizados no projeto do SFSP: $K = K_r = 0,18$ e $\alpha = 1,5321$ (fornecido pela regra).

$$P(s) = \frac{1}{s} e^{-4s}. \quad (4.7)$$

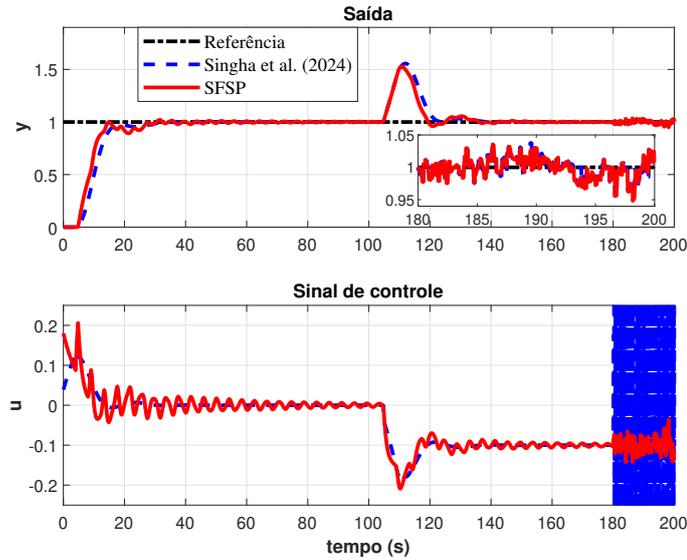
A fim de fazer uma comparação quantitativa, diferentes índices de desempenho foram calculados. Os valores estão organizados na Tabela 2, onde os melhores índices estão em negrito. Observa-se que o SFSP apresenta os menores índices, que correspondem ao melhor desempenho.

Figura 9 – Simulação processo integrador com atraso nominal.



Fonte: Próprio autor.

Figura 10 – Simulação processo integrador com incerteza de +20% no atraso.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 2 – Índices de desempenho sistema integrador.

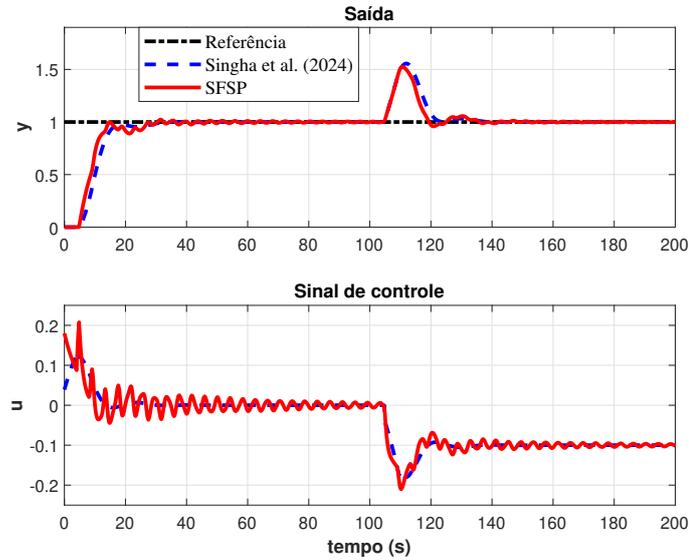
Índice	Nominal		Com incerteza	
	Singha <i>et al.</i> (2024)	SFSP	Singha <i>et al.</i> (2024)	SFSP
IAE	5,5549	4,4863	5,5489	4,9115
ISE	1,7472	1,2680	2,1856	1,6890
ITAE	631,1824	506,1712	630,2479	562,4594
ITSE	195,3343	140,5104	245,4308	188,5703
TV	0,2399	0,1990	0,3225	0,9032
CV	0,0139	$2,4817 \times 10^{-4}$	0,0140	$3,1192 \times 10^{-4}$

Fonte: Próprio autor.

Avaliou-se o sistema de controle com atraso incerto para $\alpha = 1,5$ (um valor pouco abaixo do fornecido pela regra). O resultado é apresentado na Figura 11.

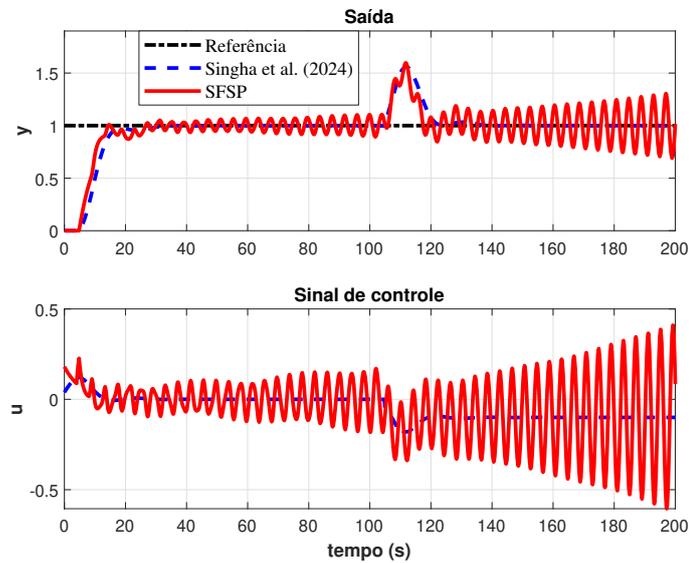
Simulou-se ainda o sistema com incerteza e o SFSP com parâmetro $\alpha = 1,2$, ou seja, menor que o valor fornecido pela fórmula. O resultado mostrado na Figura 12 confirma a previsão de que o sistema de controle poderia se tornar instável para esse valor de α .

Figura 11 – Simulação processo integrador com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 1,5$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 12 – Simulação processo integrador com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 1,2$, inferior ao fornecido pela regra.



Fonte: Próprio autor.

4.1.2 Sistema Estável

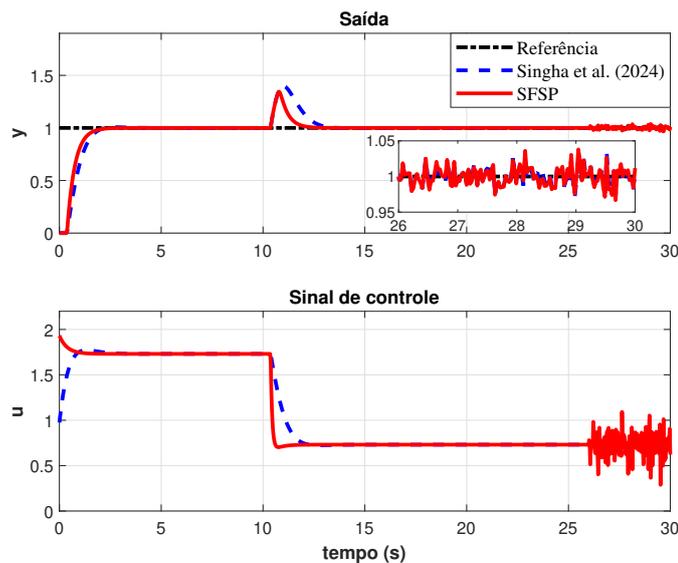
Considera-se agora o caso do sistema de primeira ordem estável. O sistema utilizado na simulação, dado pela Eq. (4.8), é o mesmo de Singha *et al.* (2024), em que há um atraso de 0,3715 segundos. O controle utilizado por estes, ou seja, um PI-PD com preditor, é comparado ao SFSP com parâmetro α sintonizado pela regra proposta ($\alpha = 0,0756$) e os demais parâmetros: $K = 0,2$ e $K_r = 1,9307$. Aplica-se uma perturbação degrau unitário no instante $t_q = 10$ segundos, além de um ruído branco com largura de banda limitada e PSD de $1,8 \times 10^{-5}$ adicionado à saída do processo no instante $t_w = 26$ segundos. O resultado para o sistema com atraso nominal é mostrado na Figura 13.

$$P(s) = \frac{1,363}{s + 2,359} e^{-0,3715s}. \quad (4.8)$$

A Figura 14 mostra o desempenho dos controladores para a situação em que há incerteza no atraso (20%, equivalente a 0,0743 segundos). Visando realizar uma comparação quantitativa entre ambos, calculou-se alguns índices e os resultados estão disponíveis na Tabela 3.

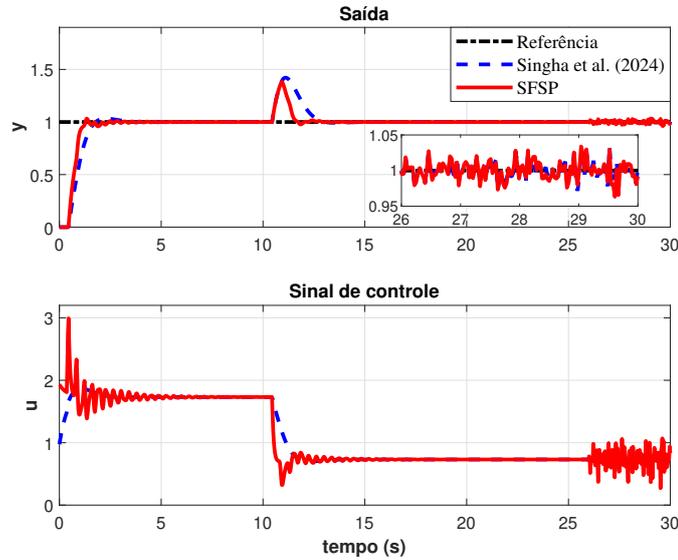
Os gráficos e os valores dos índices demonstram melhor desempenho do SFSP quanto à rejeição de perturbações, tanto na ausência quanto na presença de incerteza no atraso de transporte.

Figura 13 – Simulação processo estável com atraso nominal.



Fonte: Próprio autor.

Figura 14 – Simulação processo estável com incerteza de +20% no atraso.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Índices de desempenho sistema estável.

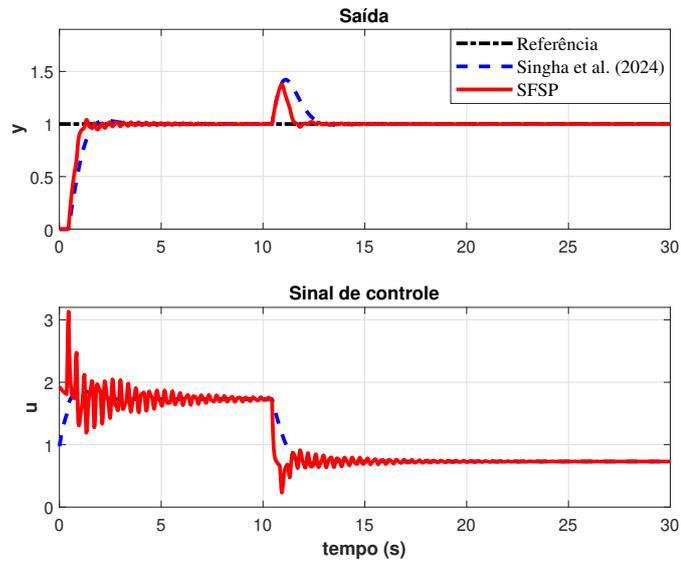
Índice	Nominal		Com incerteza	
	Singha <i>et al.</i> (2024)	SFSP	Singha <i>et al.</i> (2024)	SFSP
IAE	0,5179	0,2420	0,5311	0,2547
ISE	0,1458	0,0526	0,1607	0,0656
ITAE	5,8682	2,6584	6,0503	2,8201
ITSE	1,6296	0,5709	1,8083	0,7185
TV	1,0136	1,0554	1,0686	3,8795
CV	$1,2734 \times 10^{-4}$	0,0178	$1,2746 \times 10^{-4}$	0,0216

Fonte: Próprio autor.

Considerando novamente um valor pouco menor que o fornecido pela regra, $\alpha = 0,06$, obtêm-se para o sistema com incerteza o resultado ilustrado na Figura 15.

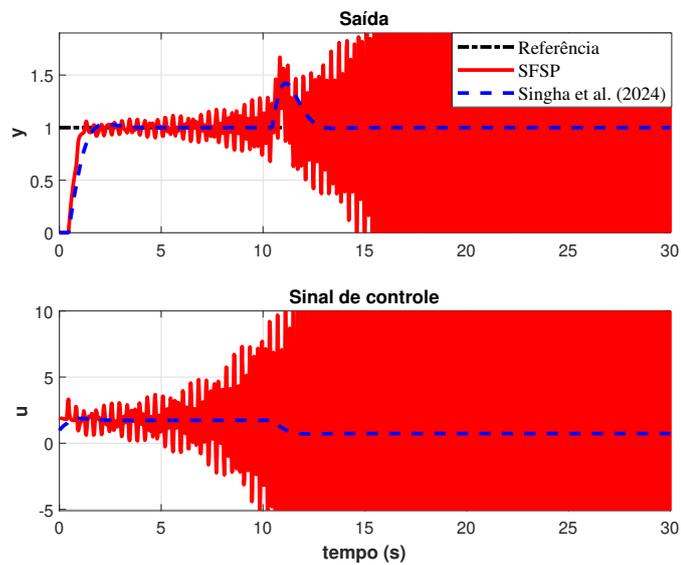
O SFSP também foi avaliado para o caso em que $\alpha = 0,03997$, ou seja, menor que o valor fornecido pela fórmula proposta. O resultado pode ser visto na Figura 16, onde é possível perceber que o sistema de controle se torna instável, confirmando a previsão da fórmula.

Figura 15 – Simulação processo estável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,06$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 16 – Simulação processo estável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,03997$, inferior ao fornecido pela regra.



Fonte: Próprio autor.

4.1.3 Sistema Instável

Para o caso instável, considerou-se o exemplo utilizado por Tsai *et al.* (2022), conforme dado pela Eq. (4.9), onde o processo, que apresenta atraso de 0,2 segundos, foi controlado por um controlador integral proporcional-derivativo (*Integral Proportional-Derivative* (I-PD)).

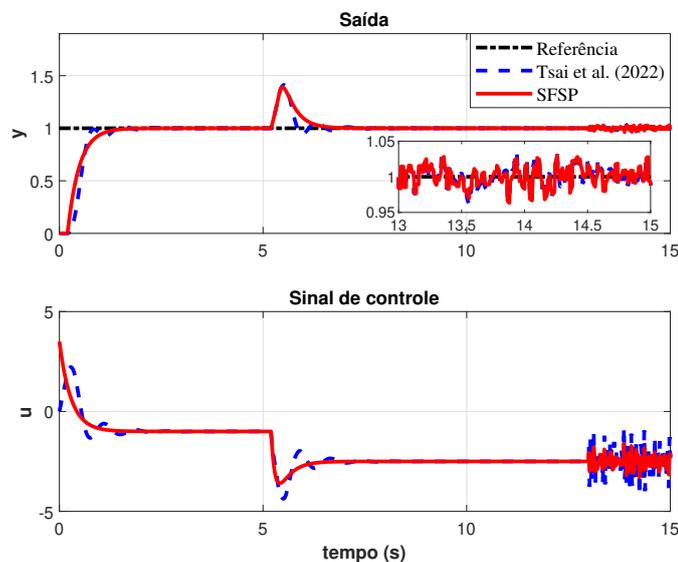
$$P(s) = \frac{1}{s-1} e^{-0,2s}. \quad (4.9)$$

Seu desempenho é mostrado na Figura 17, juntamente com o do SFSP, cujos parâmetros são $K = 4,5$, $K_r = 3,5$ e o filtro está sintonizado pela fórmula proposta, onde determinou-se $\alpha = 0,0973$. O desempenho de ambos os controladores também é comparado quando há incerteza no atraso do processo (20%, ou 0,04 segundos), conforme mostra a Figura 18. Nas duas situações, é aplicada uma perturbação degrau de 1,5 no instante $t_q = 5$ segundos e um ruído branco com largura de banda limitada e PSD de $1,25 \times 10^{-5}$ foi adicionado à saída do processo no instante $t_w = 13$ segundos.

Por diferentes índices, o desempenho dos controladores foi medido de forma quantitativa, sendo os valores fornecidos na Tabela 4.

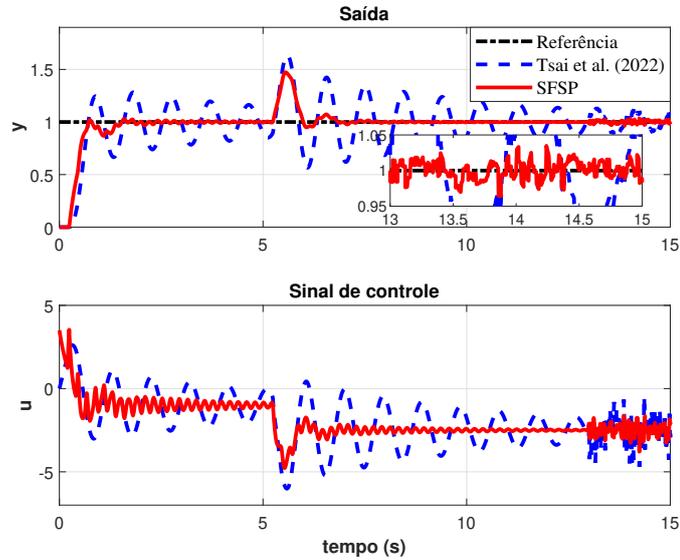
Novamente, avaliando o desempenho do sistema de controle para o processo com incerteza e $\alpha = 0,095$, portanto pouco abaixo do valor obtido pela regra, têm-se o resultado mostrado na Figura 19.

Figura 17 – Simulação processo instável com atraso nominal.



Fonte: Próprio autor.

Figura 18 – Simulação processo instável com incerteza de +20% no atraso.



Fonte: Próprio autor.

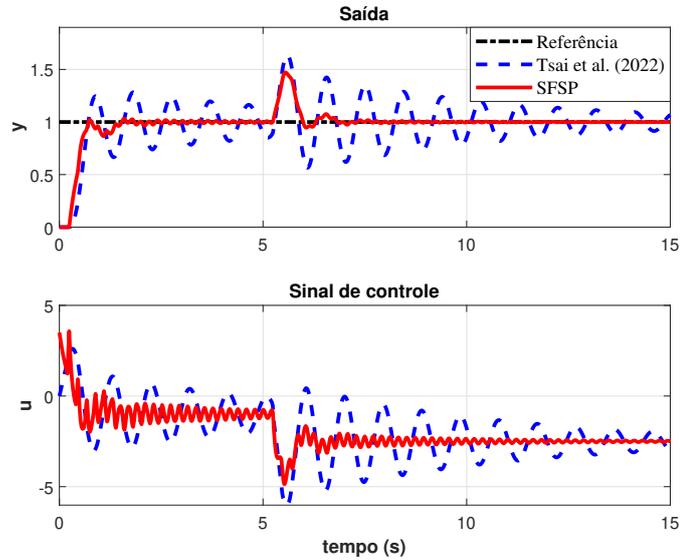
Tabela 4 – Índices de desempenho sistema instável.

Índice	Nominal		Com incerteza	
	Tsai <i>et al.</i> (2022)	SFSP	Tsai <i>et al.</i> (2022)	SFSP
IAE	0,1883	0,2079	1,4244	0,2592
ISE	0,0490	0,0516	0,3869	0,0723
ITAE	1,0719	1,1788	11,4791	1,5616
ITSE	0,2713	0,2869	2,8067	0,4064
TV	7,5854	3,6980	60,3825	36,8030
CV	0,1827	0,0870	0,3900	0,1115

Fonte: Próprio autor.

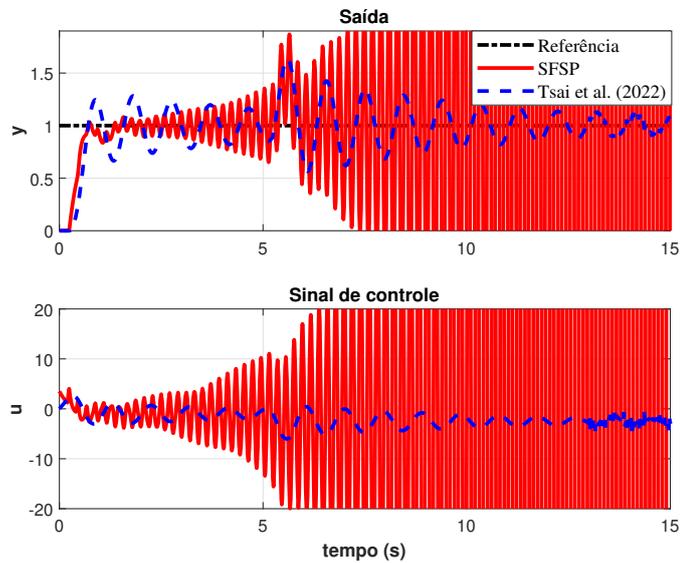
Avaliou-se ainda o comportamento do SFSP quando o filtro é ajustado com um valor de $\alpha = 0,0726$, menor que o indicado pela fórmula proposta. A Figura 20 mostra que o sistema de controle se torna instável, comprovando a previsão da fórmula proposta para o caso de sistema instável.

Figura 19 – Simulação processo instável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,095$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 20 – Simulação processo instável com incerteza de +20% no atraso e $\alpha = 0,0726$, inferior ao fornecido pela regra.



Fonte: Próprio autor.

Nos três exemplos de sistemas vistos anteriormente, é válida a aproximação: $\Delta L < 1$ (incerteza menor que a unidade de tempo considerada). A Tabela 5 mostra os valores de α aproximado e o obtido numericamente.

Tabela 5 – Valores de α .

SISTEMA	APROXIMADO	NUMÉRICO
INTEGRADOR	1,532126904687234	1,532149175503782
ESTÁVEL	0,075607360879191	0,075609724699146
INSTÁVEL	0,097255195791358	0,097256616424344

Fonte: Próprio autor.

Todos os sistemas utilizados para comparação representam exemplos numéricos nos respectivos artigos de origem. Contudo, as regras não se limitam a sistemas hipotéticos, mas podem ser aplicadas a sistemas reais, uma vez que todas se originam de um procedimento que tem por base a condição de estabilidade robusta e fornecem o parâmetro α a partir de valores característicos do sistema em questão e do valor de projeto do ganho de controle, não havendo qualquer restrição se a origem desses valores é hipotética ou obtidos de um sistema real.

Os resultados mostram que as três regras de obtenção do parâmetro α do filtro são eficazes para os respectivos tipos de sistemas aos quais se destinam, tanto nas suas versões aproximadas quanto numéricas. Isso se traduz no valor mínimo necessário de α fornecido por cada uma das regras para rápida rejeição de perturbações sem provocar instabilidade nos sistemas de controle. Para valores pouco abaixo dos fornecidos pelas regras, o sistema de controle ainda apresenta estabilidade na presença de incerteza. Isso se deve ao fato de as regras serem derivadas da condição de estabilidade robusta, possuindo portanto o conservadorismo presente na mesma.

Cada uma das regras apresentou segurança na previsão do valor mínimo do parâmetro a fim de garantir estabilidade, uma vez que apenas valores abaixo dos fornecidos causaram instabilidade do SFSP. Além disso, as regras permitem ao projetista obter o ajuste do filtro sem necessidade de análise dos gráficos do índice de robustez e da norma da incerteza versus frequência.

O SFSP sintonizado pela regra proposta apresentou melhor desempenho que os demais controladores na maior parte dos índices em ambos os cenários, nominal ou com incerteza, exceto no caso nominal do sistema instável, mas por uma diferença pouco significativa.

Os valores do parâmetro do filtro para os quais cada sistema de controle apresenta instabilidade foram obtidos de forma arbitrária. As fórmulas de sintonia do parâmetro do filtro foram obtidas através da condição de estabilidade robusta. Assim, não é necessário uma busca exaustiva para comprovar a estabilidade para valores maiores ou iguais aos fornecidos pelas mesmas, nem para mostrar que há instabilidade na faixa de valores abaixo dos fornecidos. Isso

porque valores maiores ou iguais aos fornecidos pelas regras equivalem ao caso em que a curva do índice de robustez do sistema de controle está acima ou interceptando a curva da norma da incerteza do atraso de transporte e, de forma semelhante, valores abaixo dos fornecidos pelos métodos de sintonia equivalem ao caso da curva do índice de robustez abaixo daquela representativa da norma da incerteza do atraso em algum intervalo de frequências. Os valores de α para os quais ocorre instabilidade dos sistemas de controle nos exemplos provavelmente não são os limites para os quais começa haver instabilidade nos respectivos controles, pois foram escolhidos de forma arbitrária apenas para comprovar a instabilidade na faixa abaixo da fornecida pelos métodos em cada um dos tipos de sistema de primeira ordem, bastando para isso utilizar apenas um valor para cada caso.

Através da análise da Tabela 5, percebe-se que a fórmula aproximada fornece o parâmetro com uma diferença pequena daquele fornecido pelo método numérico. Os valores serão os mesmos se for adotada apenas quatro casas decimais, ainda que se faça o arredondamento. Isso mostra que as fórmulas aproximadas são uma boa opção com a vantagem de não ser preciso utilizar um método numérico na determinação do parâmetro. Vale ressaltar que utilizou-se um valor de α com muitas casas decimais para comprovar a precisão das fórmulas aproximadas, mas para fins de utilização em controle são necessárias apenas uma ou duas casas decimais não nulas.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho desenvolveu-se regras de sintonia para o filtro do SFSP, mais especificamente do parâmetro α , para cada tipo de sistema de primeira ordem com atraso de transporte: integrador, estável e instável. Assim, determinou-se a partir da condição de estabilidade robusta as referidas regras, tais que fornecem o menor valor de α capaz de garantir rápida rejeição de perturbações tipo degrau sem perda da robustez da estabilidade do sistema, bastando para isso fornecer os parâmetros do processo, o valor da incerteza no atraso e o ganho de controle.

O valor do referido parâmetro do filtro possui relação com a estabilidade do sistema de controle. Portanto, suas regras de sintonia só poderiam ter origem em alguma condição de estabilidade, sendo preferível aquela em que se leva em consideração a robustez da estabilidade.

Os resultados de simulação, em que aplicaram-se as regras propostas para a determinação de α , mostram que as fórmulas desenvolvidas cumprem de forma segura o objetivo de resolver automaticamente o problema de compromisso desempenho-estabilidade do filtro do SFSP, tanto na versão aproximada quanto numérica, para cada um dos diferentes tipos de sistemas de primeira ordem com atraso, dispensando a etapa de análise gráfica do índice de robustez e da norma da incerteza. Para valores pouco abaixo dos fornecidos pela fórmula, ainda é possível obter sistemas de controle estáveis na presença de incerteza, uma vez que as regras possuem o mesmo grau de conservadorismo da condição de estabilidade robusta que as originaram. Nesse caso, se preciso, a rejeição de perturbação pode ser melhorada, mas diferente de antes da existência das leis de sintonia propostas, o projetista tem apenas o trabalho de fazer um ajuste fino a partir do valor fornecido.

Como proposta de trabalhos futuros, pretende-se implementar um sistema de controle sintonizado pelas regras em um processo real com atraso de transporte, desenvolver métodos de obtenção do parâmetro α para sistemas de segunda ordem e/ou de fase não-mínima com atraso e para sistemas de primeira ordem em que se consideram incertezas no ganho, na constante de tempo e no atraso de transporte.

REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, K.; HÄGGLUND, T. *Pid controllers: theory, design and tuning*. **Research Triangle Park, Instrument Society of America**, 1995.
- DORF, R.; BISHOP, R. **Modern Control Systems**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008. ISBN 9780132270281.
- FREITAS, F. C. de; MOREIRA, J. P.; COSTA, M. V.; PEREIRA, R. D.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G.; VALE, C. G. Regra de sintonia para o preditor de smith filtrado simplificado aplicado a processos integradores com atraso de transporte. In: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**. [S.l.: s.n.], 2024.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. Robust process control. **Prentice-Hall**, v. 2, p. 31–33, 1989.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. **Control of dead-time processes**. [S.l.]: Springer, 2007.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Dead-time compensators: A survey. **Control engineering practice**, Elsevier, v. 16, n. 4, p. 407–428, 2008a.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Simple robust dead-time compensator for first-order plus dead-time unstable processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 47, n. 14, p. 4784–4790, 2008b.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Unified approach for robust dead-time compensator design. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 1, p. 38–47, 2009. ISSN 0959-1524.
- OLIVEIRA, J. R. de; MACHADO, F. G.; JR, J. N. do N.; PEREIRA, R. D.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G. Novo método de sintonia do preditor de smith filtrado simplificado para processos de primeira ordem com atraso de transporte. In: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**. [S.l.: s.n.], 2022. v. 3, n. 1.
- OLIVEIRA, J. R. de; PEREIRA, R. D. O.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G. Novo método de implementação estável para o preditor de smith filtrado simplificado. In: **2021 14th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**. [S.l.: s.n.], 2021. p. 1329–1334.
- RODRIGUES, R. C. S. Regras de sintonia para compensadores de tempo morto. 2021.
- SINGHA, P.; DAS, D.; CHAKRABORTY, S.; Lloyds Raja, G. Experimentally validated predictive pi-pd control strategy for delay-dominant chemical processes. **Chemical Engineering Science**, v. 295, p. 120197, 2024. ISSN 0009-2509.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. [S.l.]: Wiley, 1996. ISBN 9780471942771.
- SMITH, O. J. Closer control of loops with dead time. **Chemical engineering progress**, v. 53, p. 217–219, 1957.
- Sá Rodrigues, R. C.; SOMBRA, A. K.; TORRICO, B. C.; PEREIRA, R. D.; FORTE, M. D. N.; FILHO, M. P. de A.; NOGUEIRA, F. G. Tuning rules for unstable dead-time processes. **European Journal of Control**, v. 59, p. 250–263, 2021. ISSN 0947-3580.

TORRICO, B. C.; Almeida Filho, M. P. de; LIMA, T. A.; FORTE, M. D. do N.; Sá, R. C.; NOGUEIRA, F. G. Tuning of a dead-time compensator focusing on industrial processes. **ISA Transactions**, v. 83, p. 189–198, 2018. ISSN 0019-0578.

TORRICO, B. C.; BARROS, J. S.; VASCONCELOS, F. J.; NOGUEIRA, F. G.; NORMEY-RICO, J. E. Control of cascaded series dead-time processes with ideal achievable disturbance attenuation using a predictors-based structure. **Journal of Process Control**, v. 137, p. 103193, 2024. ISSN 0959-1524.

TORRICO, B. C.; CAVALCANTE, M. U.; BRAGA, A. P. S.; NORMEY-RICO, J. E.; ALBUQUERQUE, A. A. M. Simple tuning rules for dead-time compensation of stable, integrative, and unstable first-order dead-time processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, ACS Publications, v. 52, n. 33, p. 11646–11654, 2013.

TORRICO, B. C.; de Almeida Filho, M. P.; LIMA, T. A.; SANTOS, T. L.; NOGUEIRA, F. G. New simple approach for enhanced rejection of unknown disturbances in lti systems with input delay. **ISA Transactions**, v. 94, p. 316–325, 2019. ISSN 0019-0578.

TORRICO, B. C.; PEREIRA, R. D. O.; SOMBRA, A. K. R.; NOGUEIRA, F. G. Simplified filtered smith predictor for high-order dead-time processes. **ISA Transactions**, v. 109, p. 11–21, 2021.

TSAI, H.-H.; FUH, C.-C.; HO, J.-R.; LIN, C.-K.; TUNG, P.-C. Controller design for unstable time-delay systems with unknown transfer functions. **Mathematics**, MDPI, v. 10, n. 3, p. 431, 2022.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES.

Demonstração da Eq. (3.19):

Sabendo-se que:

$$e^{-\Delta Ls} - 1|_{s=j\omega} = e^{-j\Delta L\omega} - 1 = (\cos(\Delta L\omega) - 1) - j \sin(\Delta L\omega).$$

Temos

$$|e^{-\Delta Ls} - 1|_{s=j\omega} = \sqrt{(\cos(\Delta L\omega) - 1)^2 + (\sin(\Delta L\omega))^2} = \sqrt{2(1 - \cos(\Delta L\omega))}.$$

Dessa forma:

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2(1 - \cos(\Delta L\omega))}{\omega^2 + (Kb \pm a)^2}}. \quad (\text{A.1})$$

A frequência ω_M , onde $g(\omega)$ é máxima determina-se fazendo:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{2(1 - \cos(\Delta L\omega))}{\omega^2 + (Kb \pm a)^2} \right]_{\omega=\omega_M} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow \frac{(2\Delta L \sin(\Delta L\omega_M))(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2) - 2(1 - \cos(\Delta L\omega_M)) \cdot 2\omega_M}{(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2)^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\Rightarrow 2\Delta L \sin(\Delta L\omega_M)(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2) - 4(1 - \cos(\Delta L\omega_M))\omega_M = 0 \quad (\text{A.4})$$

ou ainda

$$\Rightarrow \Delta L \sin(\Delta L\omega_M)(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2) - 2(1 - \cos(\Delta L\omega_M))\omega_M = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\Delta L\omega_M)}{1 - \cos(\Delta L\omega_M)} = \frac{2\omega_M}{\Delta L(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2)}. \quad (\text{A.6})$$

Como $\sin(\Delta L\omega_M) = 2 \sin\left(\frac{\Delta L\omega_M}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta L\omega_M}{2}\right)$ e $1 - \cos(\Delta L\omega_M) = 2 \sin^2\left(\frac{\Delta L\omega_M}{2}\right)$,

a equação Eq. (A.6) fica:

$$\frac{2 \sin\left(\frac{\Delta L\omega_M}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta L\omega_M}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\Delta L\omega_M}{2}\right)} = \frac{2\omega_M}{\Delta L(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2)}. \quad (\text{A.7})$$

Uma vez que, em $\omega = \omega_M$, $\sin\left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right) \neq 0$, então

$$\frac{\cos\left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)} = \cot\left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right) = \frac{2\omega_M}{\Delta L(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2)}. \quad (\text{A.8})$$

Invertendo-se ambos os membros da Eq. (A.8), vem:

$$\tan\left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right) = \frac{\Delta L(\omega_M^2 + (Kb \pm a)^2)}{2\omega_M} = \frac{\Delta L \omega_M}{2} + \frac{\Delta L(Kb \pm a)^2}{2\omega_M}, \quad (\text{A.9})$$

demonstrando a Eq. (3.19), especificamente quando se faz $\omega_M = \bar{\omega}_M$.

Obtenção da expressão dada pela Eq. (3.20):

Expandindo $\tan\left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)$ em série de MacLaurin, temos:

$$\frac{\Delta L \omega_M}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)^5 + \dots = \frac{\Delta L \omega_M}{2} + \frac{\Delta L(Kb \pm a)^2}{2\omega_M}. \quad (\text{A.10})$$

Desprezando os termos de ordem maiores que 3, uma vez supondo $\Delta L < 1$, vem:

$$\frac{\Delta L \omega_M}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)^3 \approx \frac{\Delta L \omega_M}{2} + \frac{\Delta L(Kb \pm a)^2}{2\omega_M} \quad (\text{A.11})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta L \omega_M}{2}\right)^3 \approx \frac{\Delta L(Kb \pm a)^2}{2\omega_M} \quad (\text{A.12})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} \Delta L^3 \omega_M^3 \approx \frac{\Delta L(Kb \pm a)^2}{2\omega_M} \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow \omega_M^4 \approx \frac{12(Kb \pm a)^2}{\Delta L^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$\omega_M \approx \sqrt[4]{12} \left(\frac{Kb \pm a}{\Delta L}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.15})$$

demonstrando a Eq. (3.20) quando $\omega_M = \bar{\omega}_M$.

APÊNDICE B – CÓDIGO DA FUNÇÃO QUE FORNECE O PARÂMETRO α .

```

1 % Funcao que retorna o parametro alpha do SFSP utilizando o
   Metodo de Newton - Raphson
2
3 %  $h(x) = \tan(dl*L*x/2) - dl*L*x/2 - dl*L*(K*b+/-a)^2/(2*x)$ 
4 %  $h'(x) = (dl*L/2)*((\sec(dl*L*x/2))^2 - 1 + (K*b+/-a)^2/x^2)$ 
5 %  $h''(x) = ((dl*L)^2/2)*(\sec(dl*L*x/2))^2*\tan(dl*L*x/2) - dl*L$ 
    $*(K*b+/-a)^2/(x^3)$ 
6 % palpite inicial seria  $x_0 = 2*\pi/(3*dl*L)$  e dl a incerteza
   percentual
7
8 function alpha=alp(a,b,L,dl,K)
9
10 x=2*pi/(3*dl*L);
11
12 hx=tan(dl*L*x/2) - dl*L*x/2 - dl*L*(K*b+a)^2/(2*x);
13 dhx=(dl*L/2)*((sec(dl*L*x/2))^2 - 1 + (K*b+a)^2/x^2);
14 dh2x=((dl*L)^2/2)*(\sec(dl*L*x/2))^2*\tan(dl*L*x/2) - dl*L*(K*b
   +a)^2/(x^3);
15
16 k=0;
17
18 if (hx*dh2x) <= 0 || dhx==0
19     disp('Corrigir palpite inicial');
20 else
21     while abs(hx) > 1e-5
22
23         x=x-hx/dhx;
24         hx=tan(dl*L*x/2) - dl*L*x/2 - dl*L*(K*b+a)^2/(2*x);
25         dhx=(dl*L/2)*((sec(dl*L*x/2))^2 - 1 + (K*b+a)^2/x^2);
26         k=k+1;

```

```
27     end
28
29     g=sqrt(2*(1-cos(x*d1*L))/(x^2+(K*b+a)^2));
30     if a<0
31         a=-a;
32         alpha=g*(a+K*b*(exp(a*L)-1))/(a*(1-g*K*b*exp(a*L
33             )));
34     elseif a==0
35         alpha=g*(1+L*K*b)/(1-g*K*b);
36     else
37         alpha=g*(a+K*b*(1-exp(-a*L)))/(a*(1-g*K*b*exp(-a
38             *L)));
39     end
40 end
```