

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

"MODELO DE ISING ALEATÓRIO"

José Ramos Gonçalves

ORIENTADOR Lindberg Lima Gonçalves

Tese apresentada ao Departamento de
Física da Universidade Federal do
Ceará, como parte dos requisitos
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciências.

AGOSTO DE 1991.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G625m Gonçalves, José Ramos.

Modelo de Ising aleatório / José Ramos Gonçalves. – 1991.

95 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1991.

Orientação: Prof. Dr. Lindberg Lima Gonçalves.

1. Ising, Modelo de. 2. Spin nuclear. I. Título.

CDD 530

MODELO DE ISING ALEATÓRIO

José Ramos Gonçalves

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Comissão Julgadora:

Lindberg Lima Gonçalves (UFC) - Orientador

Mariano López de Haro (UNAM - México)

José Maurício Oliveira Matos (UFC)

Aprovada em 29 de agosto de 1991.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais

José Guimarães Gonçalves e

Luísa Ramos Gonçalves

À minha esposa

Silvana de Moraes Gonçalves

À minha irmã

Hilda Ramos Gonçalves de Freitas

AGRADECIMENTOS

. Ao Professor Lindberg Lima Gonçalves pela inesgotável paciência para comigo, pela orientação deste trabalho e pela consideração demonstrada, além dos sábios ensinamentos que tentou me transmitir.

. Ao Professor Josué Mendes Filho pelo constante incentivo dado a mim e pela grande consideração com que sempre me tratou desde os anos da Graduação.

. Ao Professor Francisco Alcides Germano por possibilitar o uso do computador do seu laboratório numa etapa bastante crítica do trabalho.

. Aos demais Professores, que de forma direta ou indireta, contribuíram para a minha formação.

. Aos colegas da minha turma de Mestrado, Ana Emilia e Antônio de Pádua, pela amizade e companheirismo demonstrados ao longo deste tempo.

. Ao grande amigo Sanclayton Geraldo Moreira pela forma com que sempre me tratou.

. A todos os demais colegas do Mestrado e Doutorado pelos bons momentos que passamos juntos.

. Aos funcionários do Departamento de Física pela presteza com que sempre me atenderam.

. À CAPES, que através do seu Programa de Demanda Social, possibilitou a realização deste Mestrado.

. Ao Dedé pela confecção das figuras.

ABSTRACT

In this work, random Ising models are studied for one- and two-dimensional systems. In the one-dimensional case, the random field ferromagnetic model and the antiferromagnetic model with bond and site dilution are studied. In the two-dimensional case, the mixed spins Ising model on the honeycomb lattice with random exchange interactions and random uniaxial anisotropy is studied. The critical behaviour of these systems is analyzed.

RESUMO

Neste trabalho, são estudados modelos de Ising aleatórios em sistemas unidimensionais e bidimensionais. Em uma dimensão, são estudados o modelo ferromagnético em campo aleatório e modelo antiferromagnético com diluição por ligações e por sítios. Em duas dimensões, é estudado o modelo de Ising com spins mistos sobre uma rede favo de mel com constante de troca e anisotropia uniaxial aleatórias. O comportamento crítico destes sistemas é analisado.

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO GERAL	1
CAPÍTULO 1 - MODELO DE ISING FERROMAGNÉTICO	
UNIDIMENSIONAL EM UM CAMPO ALEATÓRIO	
1.1 - INTRODUÇÃO	6
1.2 - MODELO COM CAMPO ALEATÓRIO RECOZIDO	7
CAPÍTULO 2 - MODELO DE ISING ANTIFERROMAGNÉTICO	
UNIDIMENSIONAL DILUÍDO	
2.1 - INTRODUÇÃO	16
2.2 - DILUIÇÃO POR LIGAÇÕES	17
2.3 - DILUIÇÃO POR SÍTIOS	26
CAPÍTULO 3 - MODELO DE ISING ALEATÓRIO COM SPINS MISTOS	
SOBRE UMA REDE FAVO DE MEL	
3.1 - INTRODUÇÃO	39
3.2 - CONSTANTE DE TROCA ALEATÓRIA	42
3.3 - ANISOTROPIA UNIAXIAL ALEATÓRIA	62
CONCLUSÕES	88
REFERÊNCIAS	92

INTRODUÇÃO GERAL

O modelo de Ising foi introduzido por Ising (1925) com a finalidade de fornecer uma descrição microscópica do ferromagnetismo. Uma forma para testar o modelo foi verificar se ele dava origem às singularidades observadas nas propriedades termodinâmicas de um material ferromagnético. Em particular, se possuía uma temperatura de Curie, T_c , tal que, para $T < T_c$, existisse uma magnetização espontânea não nula. Ising só foi capaz de resolver o problema em uma dimensão, e mesmo assim, sua solução não apresentava qualquer singularidade. Onsager (1944) conseguiu calcular a função de partição e determinar a temperatura de Curie para o modelo sem campo externo sobre uma rede quadrada, o que possibilitou cálculos posteriores da magnetização espontânea e das funções de correlação para esta e outras redes bidimensionais.

O modelo de Ising tem sido utilizado para descrever ligas binárias, gás na rede ("lattice gas"), sistemas magnéticos puros e desordenados. Entre estes últimos, destacam-se os magnetos em campo aleatório, com constante de troca aleatória e os vidros de spin ("spin glass") (Sherrington e Kirkpatrick, 1975). Em particular, os magnetos diluídos (Stinchcombe, 1983), por exibirem características bastante interessantes, têm sido muito estudados tanto por teóricos como por experimentais (Sato et al. (1959), Elliot (1960), Elliot et al. (1960), Domb e Sykes (1961), entre

outros. Os primeiros experimentos em magnetos diluídos, cobrindo uma faixa ampla de concentrações, foram realizados por Baker *et al.* (1961), Breed *et al.* (1970) e Lagendijk e Huiskamp (1972).

Dois tipos de situação podem ser obtidos quando são colocadas impurezas no sistema a uma temperatura bastante alta e realiza-se o seu resfriamento (Brout, 1959). Se o resfriamento é feito de forma muito rápida ("quenching"), as impurezas são distribuídas aleatoriamente na rede e o tipo de distribuição obtida é a temperada ("quenched"). Se, por outro lado, o resfriamento é lento, de modo a obter-se o equilíbrio térmico, a distribuição das impurezas no sistema é dita recozida ("annealed"). O equilíbrio térmico é, portanto, atingido no caso recozido e não atingido no caso temperado. Em termos da função de partição do sistema, da qual podem ser extraídas as suas propriedades termodinâmicas, a energia livre no caso recozido é proporcional a $\ln \langle Z \rangle_{s,c}$, enquanto que, no sistema temperado, a energia livre é dada por $\langle \ln Z \rangle_s^c$, onde s denota a média estatística e c a média configuracional tomada sobre a distribuição das impurezas. No caso de impurezas com distribuições recozidas, é necessária a introdução de um potencial químico para o cálculo destas médias.

Para os magnetos com constante de troca aleatória, a aleatoriedade pode ser de duas formas: por sítios e por ligações. Na aleatoriedade por sítios, constituintes magnéticos de um tipo são substituídos por outros magnéticos de outro tipo ou por não

magnéticos. Como exemplo, pode ser tomado um magneto diluído com fórmula $A_p B_{1-p} C$, onde os átomos não magnéticos do tipo B substituem parcialmente os átomos do tipo A em um magneto puro do tipo AC, até que a concentração p de átomos magnéticos seja atingida. Na aleatoriedade por ligações, a constante de troca associada a cada ligação da rede pode assumir um conjunto de valores com probabilidade especificada p .

Entre os magnetos aleatórios estão também os magnetos amorfos. O modelo com anisotropia uniaxial aleatória descreve materiais amorfos magnéticos tal como a liga de terra rara *DyCu* (Grinstein, 1984). Em sistemas cristalinos, a rede regular proporciona direções globais, ao longo das quais, os spins preferem apontar. A ausência de uma rede regular nos materiais amorfos significa que eles não possuem direções globalmente preferidas, mas alguns eixos locais, cuja orientação varia de sítio para sítio. Esta orientação é uma função completamente aleatória da posição e esses eixos, aleatoriamente preferidos, podem modelar magnetos amorfos como redes ferromagnéticas regulares com uma constante de troca uniforme e eixos preferidos aleatórios.

Fishman e Aharony (1979) propuseram a equivalência entre o modelo de Ising antiferromagnético diluído em um campo uniforme e o modelo de Ising ferromagnético em um campo aleatório para sistemas com distribuições temperadas. Esta proposição permitiu a materialização do modelo com campo aleatório, como por

exemplo o $\text{Fe}_x \text{Zn}_{1-x} \text{F}_2$ (King and Belanger, 1986). Isto serviu como motivação para a investigação desta equivalência no modelo unidimensional com impurezas recozidas, já que, neste caso, é possível uma solução exata. Esta investigação constitui a primeira parte deste trabalho.

Por outro lado, o artigo de Gonçalves (1985), sobre os efeitos da anisotropia uniaxial no modelo de Ising em uma rede favo de mel com spins mistos, proporcionou a idéia de se estender seus resultados para os casos em que a constante de troca e a anisotropia uniaxial fossem aleatórias. Resultados aproximados para distribuições temperadas foram obtidos por Kaneyoshi (Kaneyoshi, 1988a; Kaneyoshi, 1988b; Kaneyoshi, 1988c). O estudo do modelo de Ising aleatório com spins mistos e distribuições recozidas constitui a segunda parte do trabalho.

Desta forma, esta dissertação é desenvolvida em três capítulos.

No primeiro capítulo, é abordado o modelo de Ising ferromagnético em um campo aleatório. A distribuição para o campo aleatório é discreta e dada por: $p(h_i) = p\delta(h_i - h) + (1-p)\delta(h_i + h)$. A magnetização é explicitamente avaliada com a finalidade de se estudar o comportamento crítico do modelo.

No segundo capítulo, estuda-se o modelo de Ising antiferromagnético unidimensional diluído sob a ação de um campo magnético uniforme. O sistema é tratado com diluição por ligações e por sítios. A magnetização é determinada e o seu comportamento

em baixas temperaturas é analisado.

No terceiro capítulo, o modelo de Ising com spins mistos sobre uma rede favo de mel é estudado para os casos em que possui constante de troca e anisotropia aleatórias. A temperatura de transição é determinada de forma exata para os dois casos usando-se distribuições recozidas. São realizados alguns comentários sobre os resultados aproximados obtidos para o mesmo modelo por Kaneyoshi para distribuições temperadas (Kaneyoshi, 1988a; Kaneyoshi, 1988b; Kaneyoshi, 1988c).

Finalizando, são apresentadas as conclusões sobre os resultados encontrados nos três capítulos.

CAPÍTULO 1

MODELO DE ISING FERROMAGNÉTICO UNIDIMENSIONAL EM UM CAMPO ALEATÓRIO

1.1 INTRODUÇÃO

Os sistemas aleatórios são reconhecidamente difíceis de serem tratados. Uma possibilidade para vencer essa dificuldade é extrair as características básicas destes sistemas a partir dos modelos que permitem cálculos exatos. O modelo de Ising em um campo aleatório só pode ser resolvido exatamente, ou abordado por aproximações completamente controladas, para redes especiais. Mesmo em uma dimensão, uma solução exata para temperaturas arbitrárias requer uma escolha adequada do tipo de distribuição para o campo aleatório. De qualquer maneira, as cadeias unidimensionais revelam algumas propriedades gerais dos sistemas com campo aleatório, incluindo efeitos não perturbativos (Nattermann e Rujan, 1989). Resultados exatos em uma dimensão foram obtidos por Grinstein e Mukamel (1983) para uma distribuição de campo temperado, onde o campo assume os valores 0, $\pm\infty$. Neste caso, os campos são tão fortes que fixam os spins em qualquer

temperatura, dividindo a rede em agregados ("clusters") finitos independentes. Muito recentemente, o modelo unidimensional com campo aleatório temperado foi estudado usando-se a abordagem do grupo de renormalização (Möss de Oliveira et al., 1990). Outros resultados para o modelo unidimensional também campo aleatório temperado podem ser encontrados em Derrida et al. (1978), Nieuwenhuizen e Luck (1986), Funke et al. (1989) e Luck e Nieuwenhuizen (1989). Gonçalves e Stinchcombe (1986), Gonçalves e Horiguchi (1987) e Gonçalves e Horiguchi (1990) estudaram o comportamento crítico do modelo e Ising sobre uma rede quadrada com distribuições de campo aleatório recozidas.

Neste capítulo, o modelo de Ising ferromagnético unidimensional em um campo aleatório é estudado considerando-se uma distribuição discreta. São obtidos resultados exatos para a magnetização, levando-se em conta que a distribuição estudada é recozida.

1.2 MODELO COM CAMPO ALEATÓRIO RECOZIDO

O modelo de Ising unidimensional será considerado em uma cadeia linear fechada com N sítios. A Hamiltoniana para este sistema é dada por

$$H = - \sum_{j=1}^N J \sigma_j \sigma_{j+1} - \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j - \sum_{j=1}^N \mu \tau_j , \quad J > 0 , \quad (1.1)$$

onde μ é o pseudo-potencial químico que controla a distribuição do campo aleatório h_j ($h_j = h\tau_j$ e $\tau_j = \pm 1$), a qual é dada por:

$$p(h_j) = p \delta(h_j - h) + (1-p) \delta(h_j + h). \quad (1.2)$$

A função de partição do sistema é, então, dada por

$$Z = Tr\{\exp(-\beta H)\} = \sum_{(\sigma, \tau)} \exp\left\{ \beta \left[\sum_{j=1}^N J\sigma_j \sigma_{j+1} + \sum_{j=1}^N h\tau_j \sigma_j + \sum_{j=1}^N \mu\tau_j \right] \right\}, \quad (1.3)$$

onde $\beta = 1/k_B T$. Esta função pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Z = \sum_{(\sigma)} \exp\left\{ \beta \left[\sum_{j=1}^N J\sigma_j \sigma_{j+1} \right] \right\} \prod_{k=1}^N \sum_{\tau_k} \exp\left\{ \beta [h\tau_k \sigma_k + \mu\tau_k] \right\} \quad (1.4)$$

Efetuando-se a decimação das variáveis τ , obtém-se

$$\sum_{\tau_k} \exp\left\{ \beta [h\tau_k \sigma_k + \mu\tau_k] \right\} = r \exp(\beta h' \sigma_k), \quad (1.5)$$

onde

$$r = 2 [\cosh \beta (h+\mu) \cdot \cosh \beta (h-\mu)]^{1/2} ; \quad (1.6)$$

$$h' = \frac{1}{2} k_B T \ln \left[\frac{\cosh \beta (h+\mu)}{\cosh \beta (h-\mu)} \right] \quad (1.7)$$

mapeando-se o sistema no modelo de Ising unidimensional com um campo efetivo uniforme h' . Desta maneira, a função de partição deste sistema, Z , pode ser escrita em termos da função de partição $Z'(\beta J, \beta h')$ do modelo de Ising com campo efetivo h' , ou seja:

$$Z = r^N Z'(\beta J, \beta h') \quad (1.8)$$

Observando-se a equação (1.7), verifica-se que h' depende do pseudo-potencial químico μ , o qual é obtido a partir da distribuição do campo (eq. (1.2)). Assim, μ é dado pela equação:

$$p = \left\langle \frac{\tau_j + 1}{2} \right\rangle . \quad (1.9)$$

O valor médio de $(\tau_j + 1)/2$ é obtido efetuando-se a decimação das variáveis τ , e daí, obtém-se

$$\sum_{\tau_j} \left(\frac{\tau_j + 1}{2} \right) \exp \left\{ \beta(h\sigma_j + \mu)\tau_j \right\} \equiv r \exp(\beta h' \sigma_j) \cdot (x_1 \sigma_j + x_2), \quad (1.10)$$

onde

$$x_1 = \frac{z}{r} \cdot \operatorname{senh} \beta(h-h'), \quad x_2 = \frac{z}{r} \cdot \cosh \beta(h-h'), \quad z = e^{\beta \mu}. \quad (1.11)$$

Desta forma,

$$p = x_1 \langle \sigma_j \rangle + x_2. \quad (1.12)$$

onde $\langle \sigma_j \rangle$ é a magnetização por spin do sistema.

É possível, então, utilizando-se as equações (1.6), (1.7) e (1.13), eliminar r e z , e obter-se o campo efetivo h' em função da probabilidade p . Tem-se, portanto,

$$p = \frac{\operatorname{senh} \beta(h+h')}{\operatorname{senh} 2\beta h} \left[\langle \sigma_j \rangle \operatorname{senh} \beta(h-h') + \cosh \beta(h-h') \right], \quad (1.13)$$

onde (McCoy e Wu, 1973)

$$M = \langle \sigma_j \rangle = \frac{\operatorname{senh} \beta h'}{\left[\operatorname{senh}^2 \beta h' + e^{-4\beta J} \right]^{1/2}}. \quad (1.14)$$

Assim, para um dado p , obtém-se o campo efetivo como uma função da temperatura a partir das equações (1.13) e (1.14). A partir da equação (1.13), verifica-se que o campo efetivo h' , para $p=0.5$, é nulo em qualquer temperatura. Este resultado mostra que, pelo menos para distribuição simétrica, o sistema apresenta ordem no estado fundamental.

A magnetização em função da probabilidade p , de um parâmetro relevante α ($\alpha \equiv h/J$) e da temperatura, é obtida a partir das equações (1.13) e (1.14) e mostrada nas Figs. 1.1 - 1.3.

Na Fig. 1.1, tem-se a magnetização como função da probabilidade p , para $\alpha=0.01$ e alguns valores de T próximos de zero. Verifica-se que para valores de $p < 0.5$, o campo efetivo é negativo. Isto faz com que se tenha uma magnetização induzida negativa. No caso em que $p > 0.5$, o campo efetivo é positivo e, consequentemente, a magnetização induzida também é positiva. Quando $p=0.5$, o campo efetivo é nulo para qualquer temperatura e não há magnetização induzida.

Na Fig. 1.2, a magnetização é representada como uma função do parâmetro α , considerando-se $J/K_B T=10.0$ e alguns valores de p . Observa-se que, para $p \neq 0.5$, existe magnetização induzida, independente do valor de α . Para valores de α muito grandes, demonstra-se analiticamente que a magnetização induzida é dada por $2p-1$. Isto é observado na Fig. 1.2.

Na Fig. 1.3, a magnetização é dada como uma função da temperatura para alguns valores de p e $\alpha=0.01$. Observa-se

novamente que, para $p \neq 0.5$, existe magnetização induzida em todas as temperaturas.

Conclui-se destes resultados, que, para $p=0.5$, não há magnetização induzida, já que o campo efetivo é zero em qualquer temperatura. Desta forma, o sistema se ordena em $T=0$. Para valores de p diferentes de 0.5, há sempre uma magnetização induzida, e portanto, o sistema não apresenta comportamento crítico neste caso.

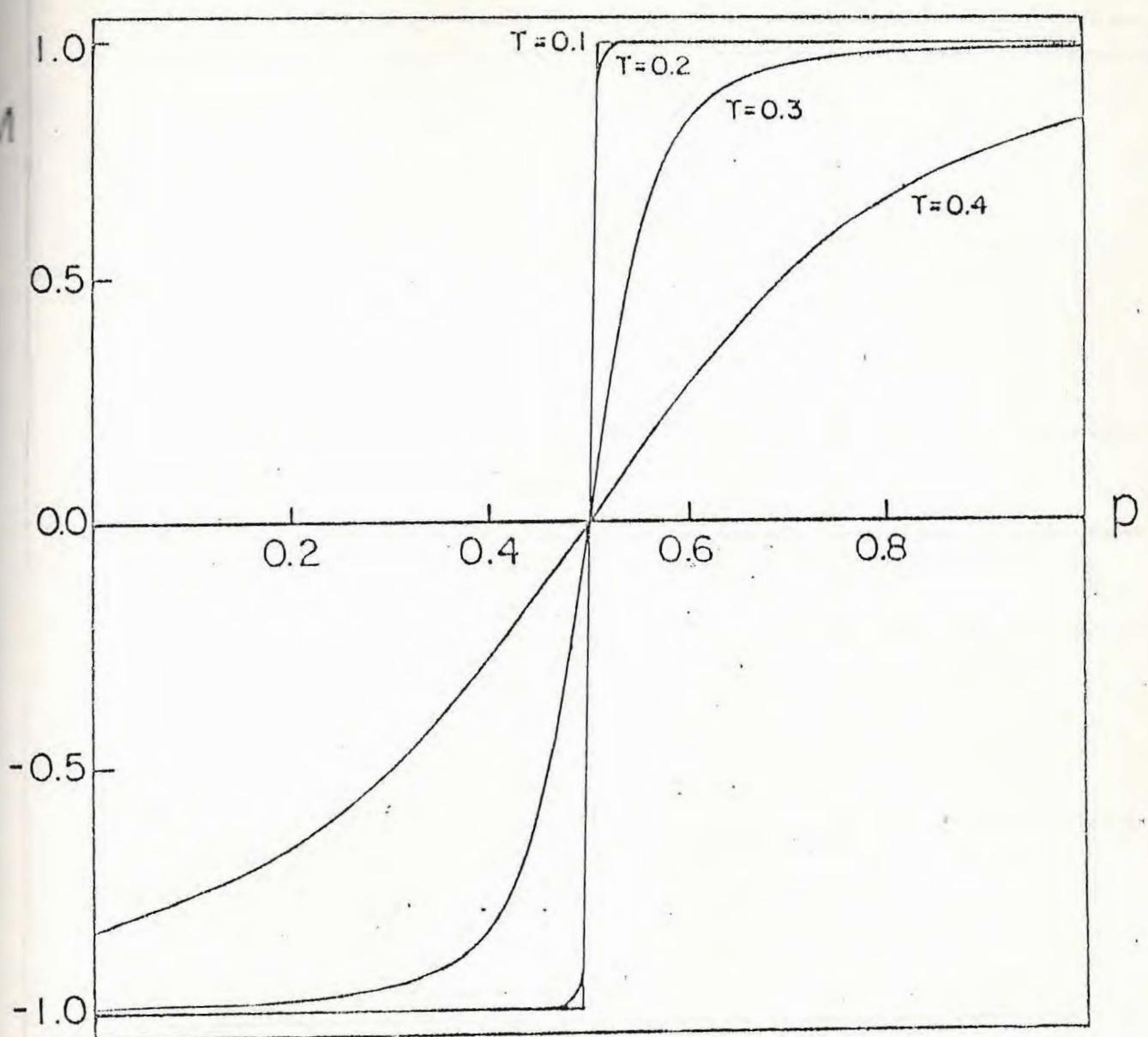


Fig.1.1 - Magnetização como uma função da probabilidade p para alguns valores da temperatura ($J/k_B = 1.0$) e $\alpha = 0.01$ ($\alpha \equiv h/J$).

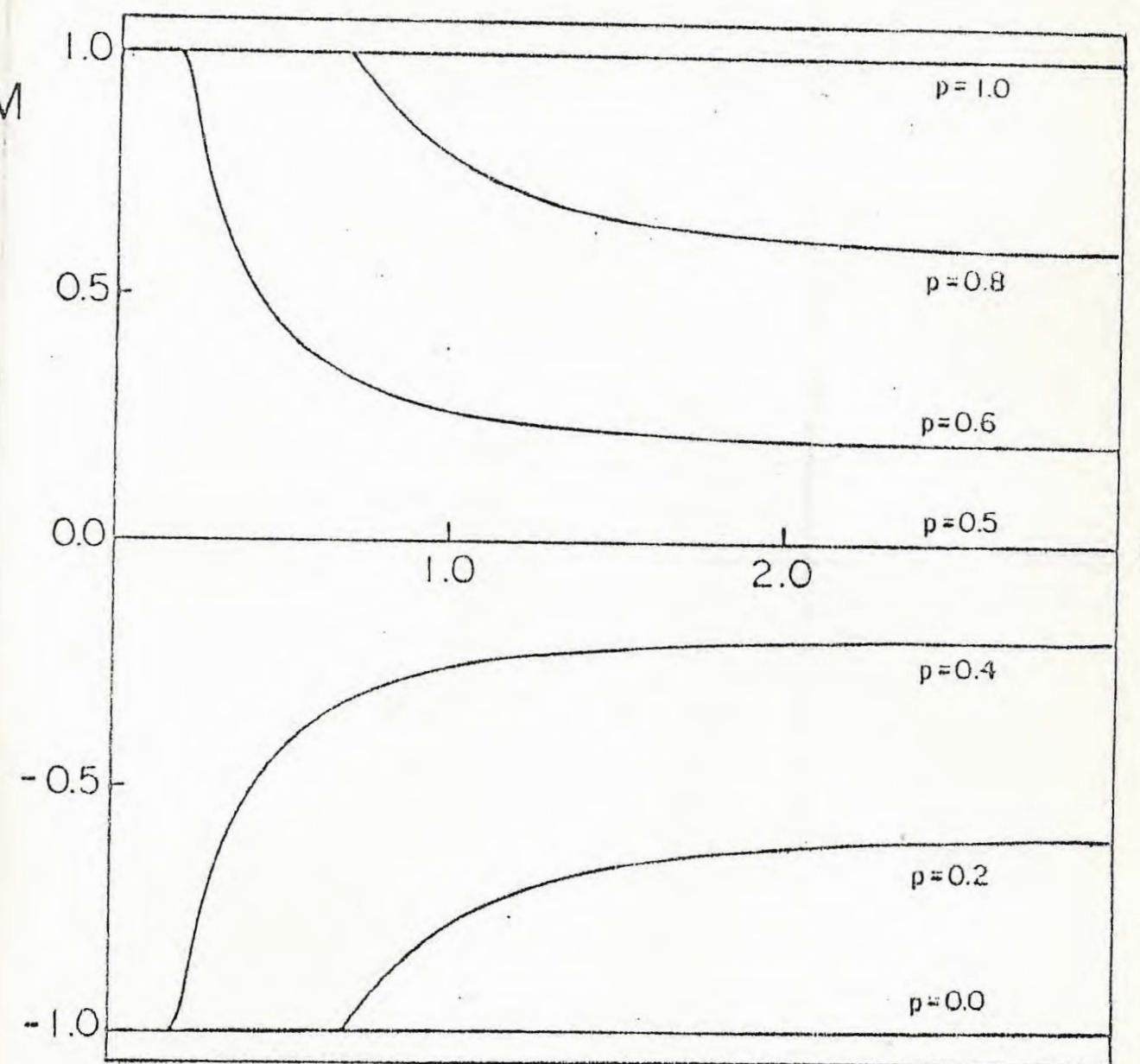


Fig. 1.2 - Magnetização como uma função de α ($\alpha \equiv h/J$) para vários valores da probabilidade p e $J/k_B T = 10.0$.

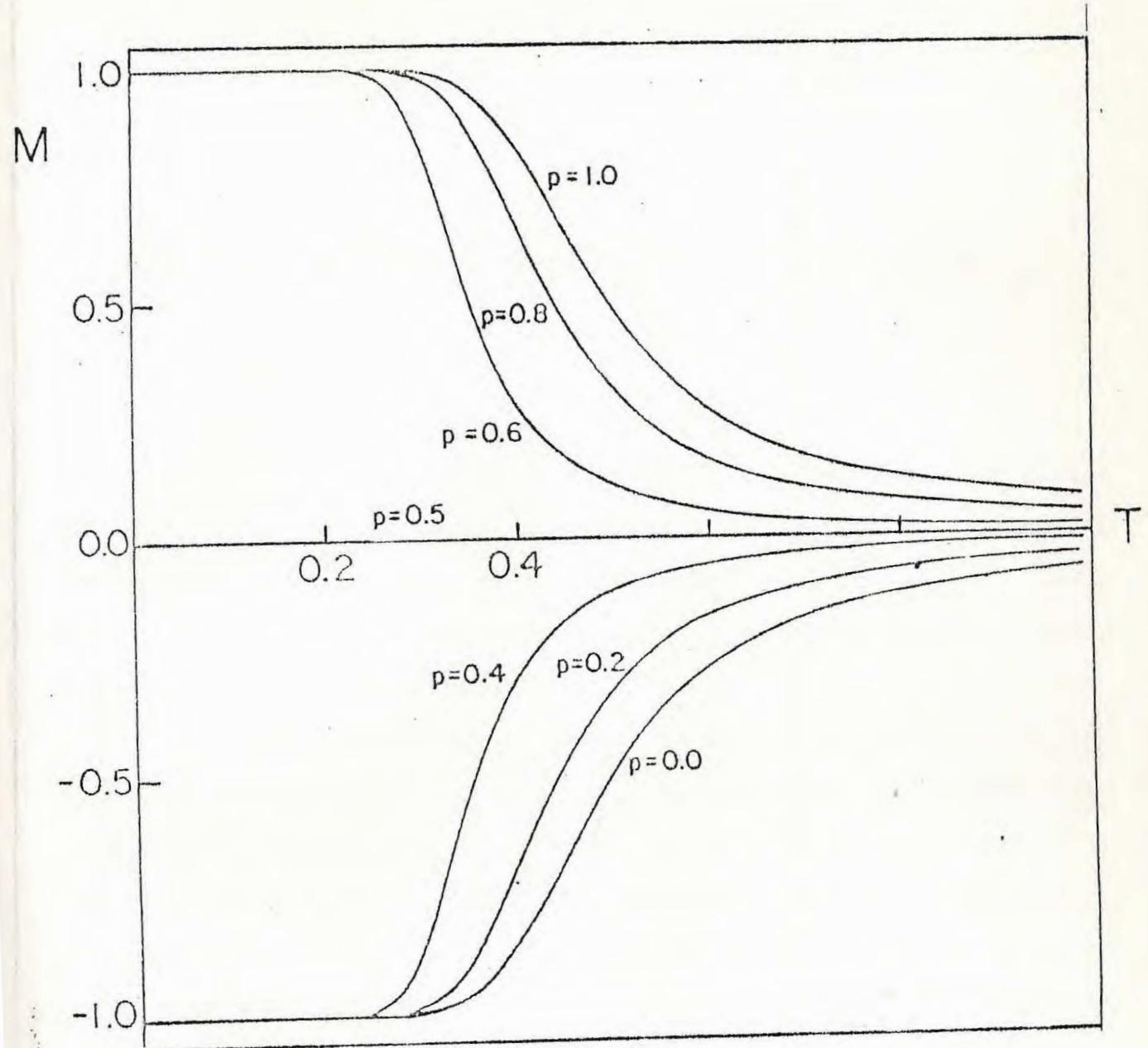


Fig. 1.3 - Magnetização como uma função da temperatura $T(J/k_B=1)$ para vários valores da probabilidade p e $\alpha=0.01$ ($\alpha=h/J$).

CAPÍTULO 2

MODELO DE ISING ANTIFERROMAGNÉTICO UNIDIMENSIONAL DILUÍDO

2.1 INTRODUÇÃO

O caso do magnetismo diluído já foi estudado por vários autores, tanto em sistemas temperados como recozidos (Katsura e Matsubara, 1974; Katsura e Tsuiyama, 1966; Kasai *et al.*, 1969; Muto e Oguchi, 1976; Pekalski e Oguchi, 1975; Matsubara, 1974; Rapaport, 1972; Syozi, 1965).

Syozi (1965) fez um estudo do modelo ferromagnético com diluição, decorando as ligações da rede com impurezas magnéticas. Determinou, ainda, para o seu modelo, o calor e específico e a concentração crítica (concentração de percolação) de várias redes. Muto e Oguchi (1976) calcularam a susceptibilidade e o calor específico para o modelo unidimensional sem campo externo com diluição recozida por sítios usando uma matriz de transferência 4×4 , a mesma técnica usada neste trabalho para o cálculo da magnetização. Neste capítulo, é determinada a magnetização para o modelo unidimensional diluído com distribuições recozidas.

Na seção 2.2, considera-se o modelo de Ising antiferromagnético diluído por ligações, e na seção 2.3, o modelo diluído por sítios. Em ambos os casos, obtém-se a magnetização. No primeiro, usa-se o processo de decimação da variável relacionada

com a diluição, e no segundo, a técnica da matriz de transferência. As impurezas consideradas neste estudo são recozidas.

2.2 DILUIÇÃO POR LIGAÇÕES

A Hamiltoniana para o antiferromagneto unidimensional com diluição por ligações em uma cadeia fechada é dada por

$$H = \sum_{j=1}^N J\eta_{j,j+1}\sigma_j\sigma_{j+1} - \sum_{j=1}^N h\sigma_j - \sum_{j=1}^N \mu\eta_{j,j+1}, \quad J > 0, \quad (2.1)$$

onde μ é o pseudo-potencial químico que controla a diluição e $\eta_{j,j+1}=0,1$ é a variável de ocupação da ligação.

A função de partição do sistema é então dada por:

$$Z = Tr\{\exp(-\beta H)\} = \sum_{(\sigma, \eta)} \exp\left\{\beta\left[-\sum_{j=1}^N J\eta_{j,j+1}\sigma_j\sigma_{j+1} + \sum_{j=1}^N h\sigma_j + \sum_{j=1}^N \mu\eta_{j,j+1}\right]\right\}. \quad (2.2)$$

Efetuando-se a decimação das variáveis η , obtém-se

$$\sum_{\eta_{j,j+1}} \exp\left\{\beta\left[-J\sigma_j\sigma_{j+1} + \mu\right]\right\} \equiv r \exp\left\{\beta J' \sigma_j\sigma_{j+1}\right\}, \quad (2.3)$$

onde

$$J' = \frac{1}{2} k_B T \ln \left[\frac{1 + e^{\beta(\mu - J)}}{1 + e^{\beta(\mu + J)}} \right] , \quad (2.4)$$

$$r = \left[\left(1 + e^{\beta(\mu - J)} \right) \cdot \left(1 + e^{\beta(\mu + J)} \right) \right]^{1/2} . \quad (2.5)$$

Assim, mapeia-se o sistema no modelo de Ising com uma constante de troca efetiva J' . Isto é representado por:

$$Z = r^N Z'(\beta J', \beta h) \quad (2.6)$$

A constante de troca efetiva J' depende, portanto, do pseudo-potencial químico. Este pseudo-potencial químico é obtido a partir da distribuição

$$p(J_j) = p \delta(J_j - J) + (1-p) \delta(J_j) , \quad (2.7)$$

impondo-se a condição

$$p = \langle \eta_{j,j+1} \rangle . \quad (2.8)$$

O valor médio de $\eta_{j,j+1}$ é obtido através da decimação das variáveis η , que pode ser escrita na forma:

$$\eta_{j,j+1} = \sum \exp \left\{ \beta \left[-J_j \sigma_j \sigma_{j+1} + \mu \right] \right\} = \exp \left\{ \beta J' \sigma_j \sigma_{j+1} \right\} \cdot (x_1 \sigma_j \sigma_{j+1} + x_2) , \quad (2.9)$$

onde

$$x_1 = -\frac{z}{r} \cdot \operatorname{senh}\beta(J+J') , \quad x_2 = \frac{z}{r} \cdot \cosh\beta(J+J') , \quad z = e^{\beta\mu}. \quad (2.10)$$

Então, utilizando-se o resultado anterior na equação (2.8), obtém-se:

$$p = x_1 \langle \sigma_j \sigma_{j+1} \rangle + x_2 , \quad (2.11)$$

onde $\langle \sigma_j \sigma_{j+1} \rangle = \epsilon$ é a função de correlação entre os dois spins vizinhos mais próximos do modelo de Ising unidimensional com constante de troca efetiva J' .

A partir das equações (2.4), (2.5) e (2.10), eliminam-se r e z e obtém-se a constante de troca efetiva J' em função da concentração de ligações magnéticas p . Tem-se, então,

$$p = \frac{\operatorname{senh}\beta J'}{\operatorname{senh}\beta J} \left[\epsilon \operatorname{senh}\beta(J+J') - \cosh\beta(J+J') \right] , \quad (2.12)$$

onde ϵ é dada por (McCoy e Wu, 1973)

$$\epsilon = \frac{\operatorname{senh}^2 \beta h + (\lambda_- / \lambda_+) e^{-4\beta J'}}{\operatorname{senh}^2 \beta h + e^{-4\beta J'}} , \quad (2.13)$$

com

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J'} \left[\cosh \beta h \pm (\operatorname{senh}^2 \beta h + e^{-4\beta J'})^{1/2} \right]. \quad (2.14)$$

A equação (2.12) pode ser derivada também a partir da expressão

$$\int \frac{p(J_j) dJ_j}{\operatorname{cotgh} \beta (J+J') - \epsilon} = 0, \quad (2.15)$$

obtida por Thorpe e Beeman (1976), com a distribuição $p(J_j)$ dada pela equação (2.7). Das equações (2.12) e (2.13), obtém-se, para um dado p , J' como uma função da temperatura. Desse resultado, obtém-se a magnetização por sítio através da expressão (McCoy e Wu, 1973)

$$M = \langle \sigma_j \rangle = \frac{\operatorname{senh} \beta h}{\left[\operatorname{senh}^2 \beta h + e^{-4\beta J'} \right]^{1/2}}. \quad (2.16)$$

Os resultados para a magnetização do modelo diluído por ligações são mostrados nas Figs. 2.1 - 2.4.

Na Fig. 2.1, a magnetização é dada como uma função do parâmetro α ($\alpha \equiv h/J$) para alguns valores da concentração p , no limite de baixas temperaturas. Verifica-se que, para valores de p diferentes de 1.0 e para qualquer valor finito do campo uniforme, há uma magnetização induzida em qualquer temperatura.

Nas Figs. 2.2 e 2.3, tem-se a magnetização em função da

temperatura para dois valores do campo próximos do campo crítico, $h_c = 2J$ (McCoy e Wu, 1973b). Para h abaixo do campo crítico, em $T=0$, as curvas da magnetização tendem para valores dados por $1-p$. Para h acima do campo crítico, todas as curvas da magnetização tendem para o valor 1.0.

Na Fig. 2.4, a magnetização é dada em função da concentração p , considerando-se alguns valores de α e $J/k_B T=10.0$. Quando $T \rightarrow 0$, a magnetização induzida é dada por $M=1-p$, para $\alpha < 2.0$, e $M=1.0$, para $\alpha \geq 2.0$. Isto implica que, neste limite de temperatura, as curvas mostradas na Fig. 2.4 colapsam em duas retas. Verifica-se, então, que, para $T=0$, a cadeia antiferromagnética diluída por ligações se divide em dois agregados, um contendo N_p spins, que interagem entre si, e o outro com $N(1-p)$ spins livres, onde N é o número total de spins. Para $\alpha < 2.0$, dos N_p spins do primeiro agregado, $N_p/2$ apontam na direção do campo e $N_p/2$ na direção contrária. Para $\alpha \geq 2.0$, todos os N_p spins deste agregado apontam na direção do campo.

Conclui-se, então, que, para valores de p diferentes de 1.0 e para qualquer valor finito do campo uniforme, o comportamento crítico do sistema é destruído, já que há uma magnetização induzida em qualquer temperatura.

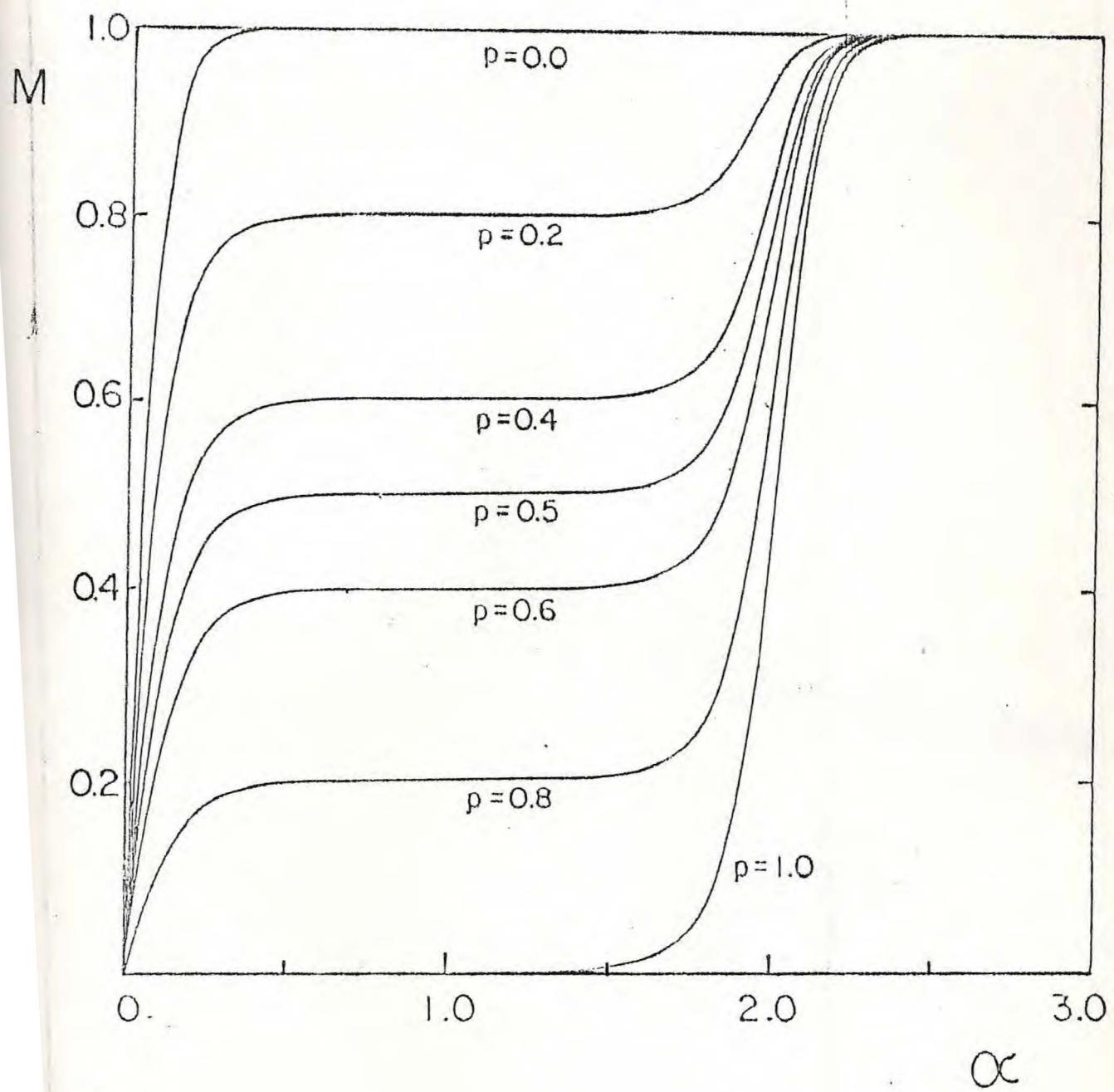


Fig. 2.1 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por ligações em um campo uniforme h como uma função de α ($\alpha = h/J$) para várias diluições e $J/k_b T = 10.0$.

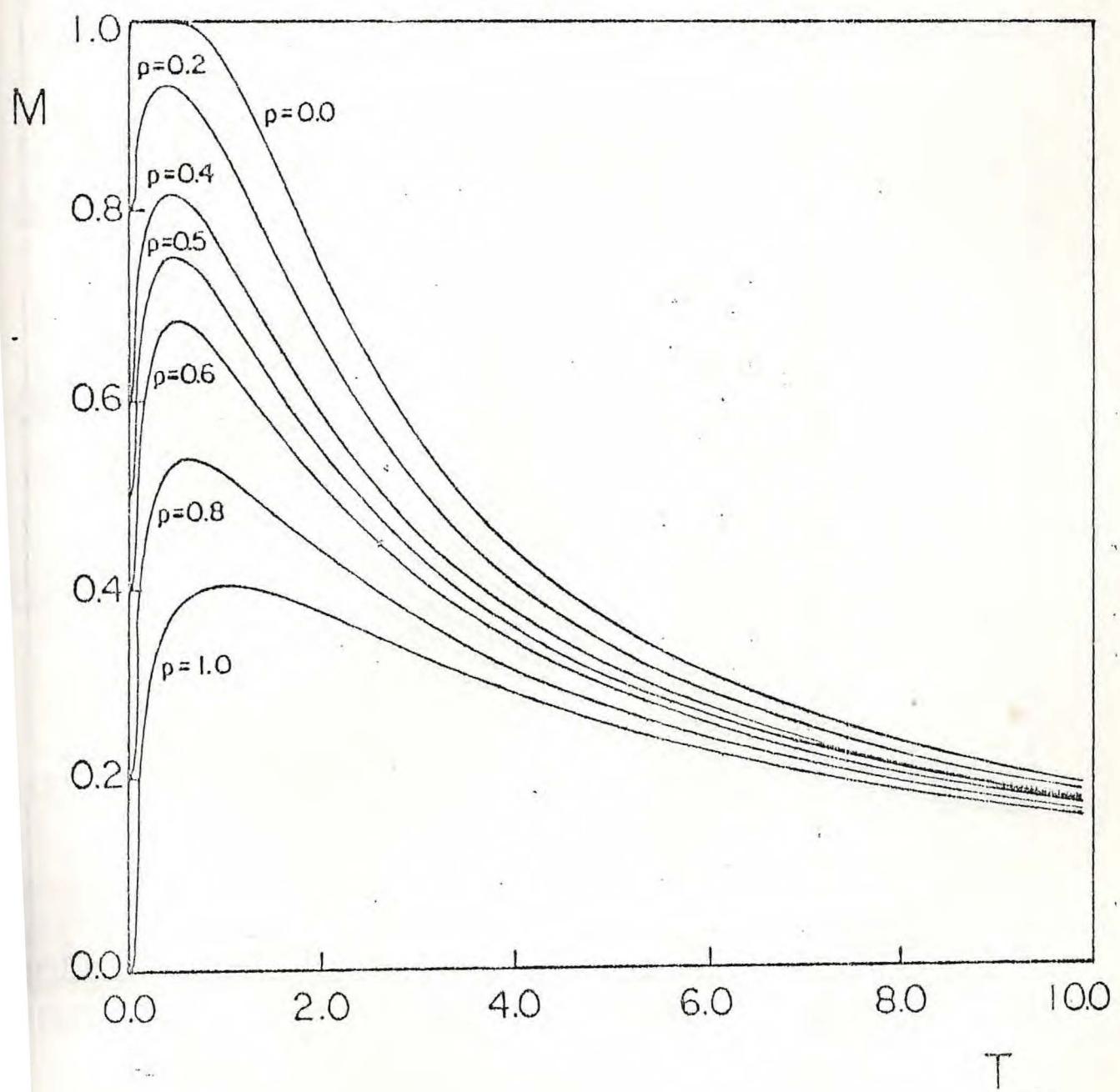


Fig. 2.2 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por ligações em um campo uniforme h como uma função da temperatura T para várias diluições e $\alpha=1.90$.

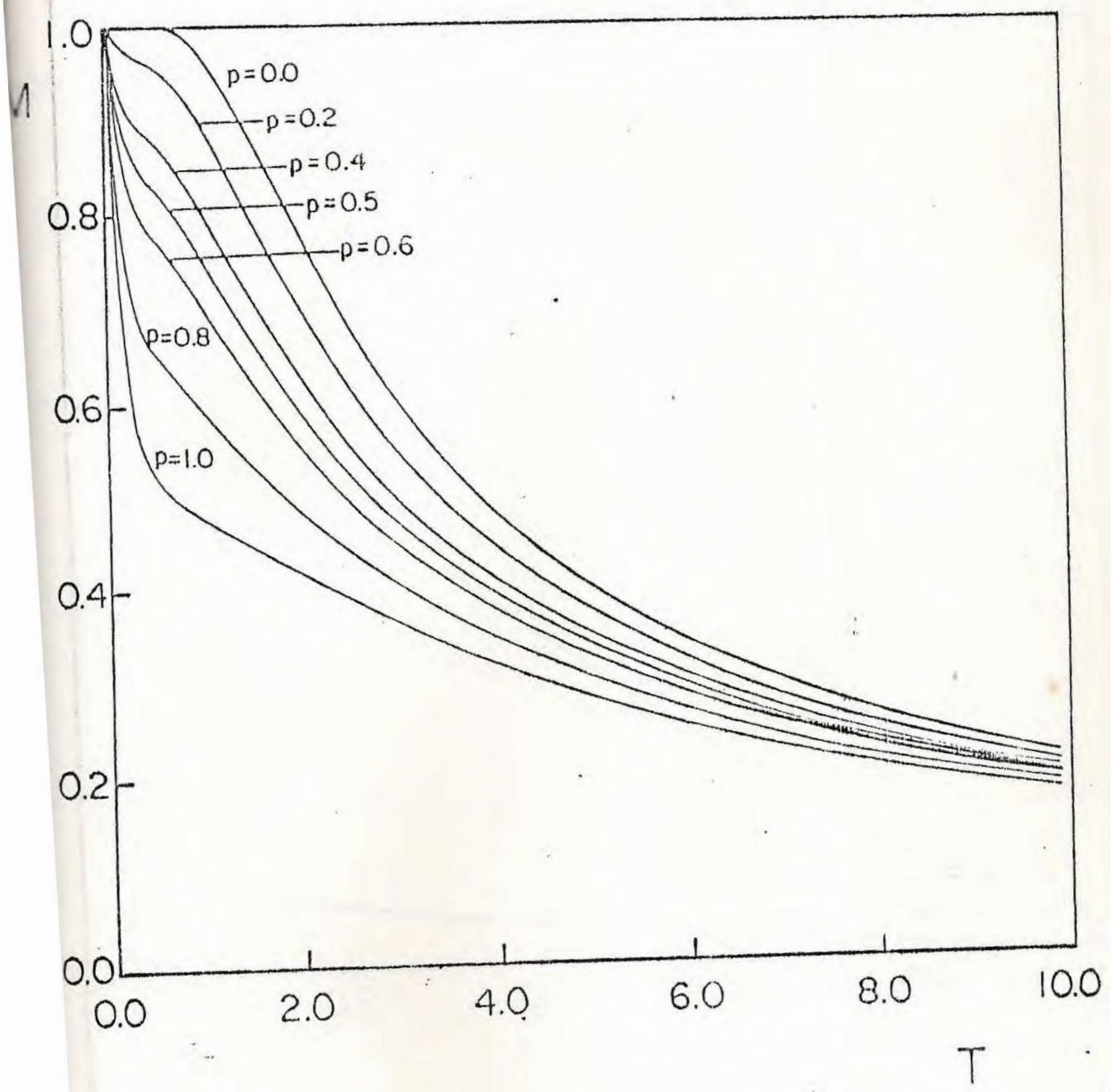


Fig. 2.3 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por ligações em um campo uniforme h como uma função da temperatura T . ($J/k_u T = 1.0$) para várias diluições e $\alpha = 2 \cdot 10^3$.

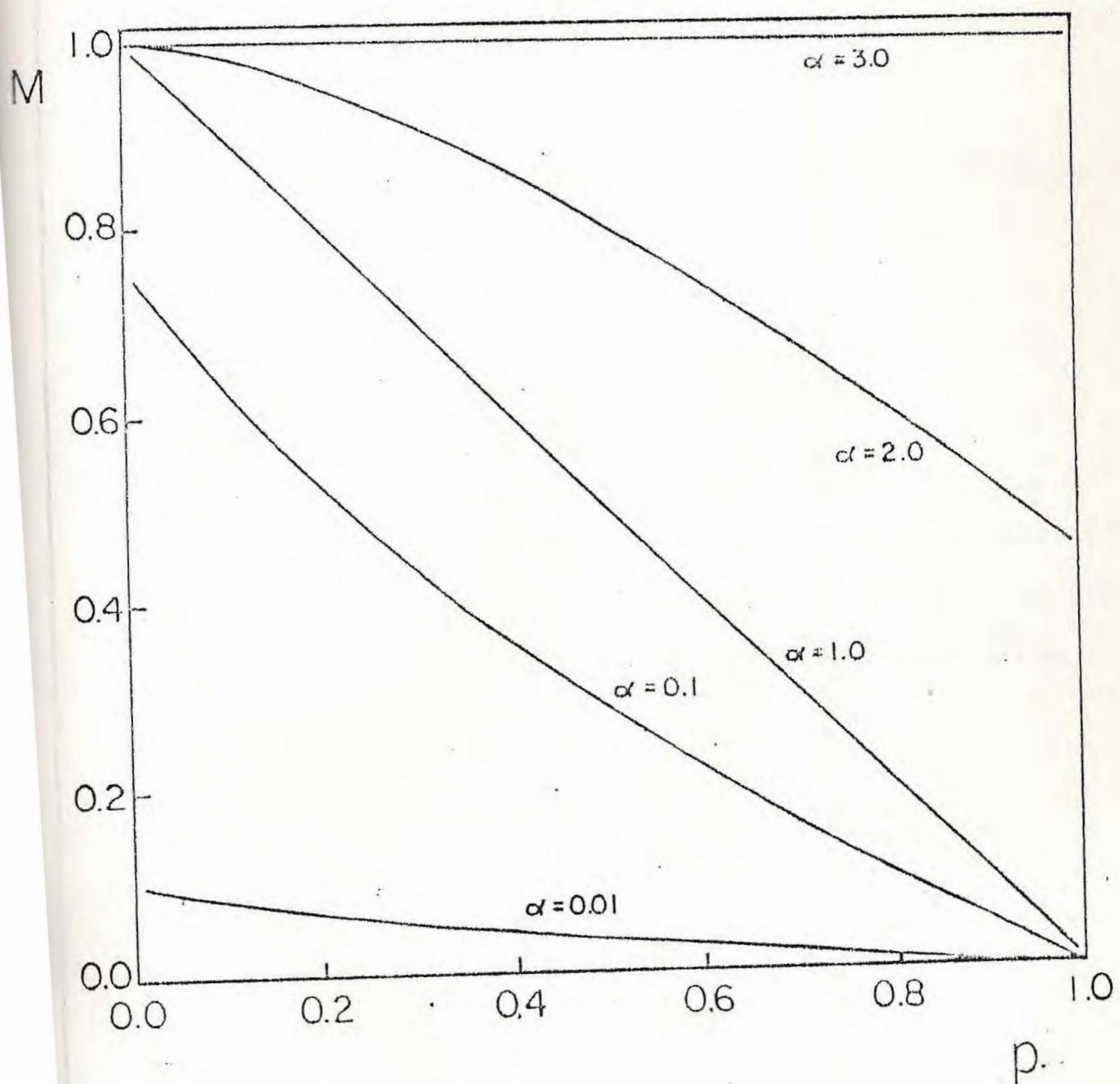


Fig. 2.4 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por ligações em um campo uniforme h como uma função da concentração p para alguns valores de α e $J/k_B T = 10.0$.

2.3 DILUIÇÃO POR SÍTIOS

A Hamiltoniana do antiferromagneto diluído por sítios em uma cadeia fechada é dada por:

$$H = \sum_{j=1}^N J\eta_j \eta_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} - \sum_{j=1}^N h\eta_j \sigma_j - \sum_{j=1}^N \mu\eta'_j , \quad J > 0, \quad (2.17)$$

onde $\eta_j = 0,1$ é a variável de ocupação do sítio j , e μ' , o pseudo-potencial químico. Para se obter a função de partição, usa-se a técnica da matriz de transferência (veja, por exemplo, McCoy e Wu, 1973), considerando-se o termo adicional $-\sum_{j=1}^N h_0 \sigma_j$ na Hamiltoniana. A função de partição é dada então por:

$$Z = \sum_{\{\sigma, \eta\}} \exp \left\{ \beta \left[- \sum_{j=1}^N J\eta_j \eta_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} + \sum_{j=1}^N h\eta_j \sigma_j + \sum_{j=1}^N h_0 \sigma_j + \sum_{j=1}^N \mu' \eta_j \right] \right\} . \quad (2.18)$$

Usando-se a base $|\eta\sigma\rangle$, representada por

$$|\eta\sigma\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } \eta=0 \text{ e } \sigma=+1; \quad |\eta\sigma\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } \eta=0 \text{ e } \sigma=-1;$$

$$|\eta\sigma\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } \eta=1 \text{ e } \sigma=+1; \quad |\eta\sigma\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ para } \eta=1 \text{ e } \sigma=-1, \quad (2.19)$$

têm-se os elementos da matriz de transferência T dados pela expressão:

$$\langle \eta\sigma | T | \eta'\sigma' \rangle = \exp \left\{ -\beta J \eta\sigma\eta'\sigma' + \frac{1}{2} \beta \left[h(\eta\sigma+\eta'\sigma') + h_0(\sigma+\sigma') + \mu'(\eta+\eta') \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Desta maneira, pode-se mostrar que a função de partição assume a forma

$$Z = \sum_{\sigma_1} \langle \eta_1 \sigma_1 | T^N | \eta_1 \sigma_1 \rangle = \text{Tr } T^N, \quad (2.21)$$

onde $\text{Tr } T^N$ indica o traço da matriz T^N , onde T é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} e^{\beta h_0} & 1 & e^{\beta(\mu'+h)/2+\beta h_0} & e^{\beta(\mu'-h)/2} \\ 1 & e^{-\beta h_0} & e^{\beta(\mu'+h)/2} & e^{\beta(\mu'-h)/2-\beta h_0} \\ e^{\beta(\mu'+h)/2+\beta h_0} & e^{\beta(\mu'+h)/2} & e^{\beta(\mu'+h-J)} & e^{\beta(\mu'+J)} \\ e^{\beta(\mu'-h)/2} & e^{\beta(\mu'-h)/2-\beta h_0} & e^{\beta(\mu'+J)} & e^{\beta(\mu'-h-J-h_0)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Da equação (2.22), percebe-se que a matriz T é simétrica, e portanto, pode ser diagonalizada através de uma transformação de similaridade com uma matriz U , escolhida convenientemente, tal que

$$U^{-1}TU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 são os autovalores da matriz T. Estes autovalores são obtidos a partir da equação

$$\begin{vmatrix} e^{\beta h_0} - \lambda & 1 & e^{\beta(\mu'+h)/2+\beta h_0} & e^{\beta(\mu'-h)/2} \\ 1 & e^{-\beta h_0} - \lambda & e^{\beta(\mu'+h)/2} & e^{\beta(\mu'-h)/2-\beta h_0} \\ e^{\beta(\mu'+h)/2+\beta h_0} & e^{\beta(\mu'+h)/2} & e^{\beta(\mu'+h-J)} - \lambda & e^{\beta(\mu'+J)} \\ e^{\beta(\mu'-h)/2} & e^{\beta(\mu'-h)/2-\beta h_0} & e^{\beta(\mu'+J)} & e^{\beta(\mu'-h-J-h_0)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

Desenvolvendo-se o determinante acima (este determinante foi desenvolvido também utilizando-se REDUCE (Rayna, 1987)), verifica-se que a equação (2.24) possui uma raiz nula e que as outras três são obtidas da equação

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 2 \left\{ e^{-\beta(J+\mu')} \cosh \beta(h+h_0) + \cosh \beta h_0 \right\} \lambda^2 + \\ 2e^{\beta\mu'} \left\{ (e^{-\beta J} - 1) [\cosh \beta(h+2h_0) + \cosh \beta h] - e^{\beta\mu'} \operatorname{senh} 2\beta J \right\} \lambda + \\ 4e^{2\beta\mu'} \cosh \beta h_0 (\operatorname{senh} 2\beta J - 2 \operatorname{senh} \beta J) = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

As raízes desta equação polinomial do terceiro grau são obtidas

usando-se a solução trigonométrica para equações cúbicas (Birkhoff e MacLane, 1977) e são dadas por

$$\lambda_1 = 2\alpha_1 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] \right\} - a , \quad (2.26)$$

$$\lambda_2 = 2\alpha_1 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] + \frac{2\pi}{3} \right\} - a , \quad (2.27)$$

$$\lambda_3 = 2\alpha_1 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] + \frac{4\pi}{3} \right\} - a , \quad (2.28)$$

onde

$$\alpha_1 = [a^2 - b]^{1/2} , \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} ab - a^3 - c ,$$

$$a = - \frac{2}{3} \left[e^{\beta(\mu' - J)} \cosh \beta(h + h_0) + \cosh \beta h_0 \right] ,$$

$$b = \frac{2}{3} e^{\beta \mu'} \left[\left(e^{-\beta J} - 1 \right) \cdot \left(\cosh \beta(h + 2h_0) + \cos \beta h \right) - e^{\beta \mu'} \sinh 2\beta J \right] ,$$

$$c = 2e^{\beta \mu'} \cosh \beta h_0 (\sinh 2\beta J - 2 \sinh \beta J) . \quad (2.29)$$

Analizando-se as equações (2.26), (2.27) e (2.28), verifica-se que o maior autovalor é λ_1 . Tomando-se o caso em que não há campo externo ($h_0=0$ e $h=0$), reproduz-se, para λ_1 , o resultado obtido por Muto e Oguchi (1976) para um sistema unidimensional recorrido com diluição recorrida por sítios.

Considerando-se a distribuição para a constante de troca dada pela equação (2.7), obtém-se o pseudo-potencial químico impondo-se a condição

$$\begin{aligned}
 p &= \lim_{h_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial(\beta\mu')} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left[\lambda_1^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^N \right) \right] \right\} = \lim_{h_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial(\beta\mu')} \\
 &= \lim_{h_0 \rightarrow 0} \left\{ \left(2a - \frac{\partial a}{\partial \mu'} - \frac{\partial b}{\partial \mu'} \right) \frac{\cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] \right\}}{\lambda_1 \alpha_1} + \right. \\
 &\quad \left[\left(2ab - b^2 \right) \frac{\partial a}{\partial \mu'} + \left(\frac{1}{2} ab - c \right) \frac{\partial b}{\partial \mu'} - \frac{2}{3} \left(a^2 - b \right) \frac{\partial c}{\partial \mu'} \right] \\
 &\quad \left. \cdot \frac{\sin \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] \right\}}{\lambda_1 \alpha_1^4 \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right]^2 \right\}^{1/2}} - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mu'} \right\}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

A magnetização é, então, dada por

$$M = \lim_{h_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial(\beta h_0)} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left[\lambda_1^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^N \right) \right] \right\} = \lim_{h_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial(\beta h_0)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h_0 \rightarrow 0} \left\{ \left(2a - \frac{\partial a}{\partial h_0} - \frac{\partial b}{\partial h_0} \right) \frac{\cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] \right\}}{\lambda_1 \alpha_1} + \right. \\
 &\quad \left[\left(2ab - b^2 \right) \frac{\partial a}{\partial h_0} + \left(\frac{1}{2} ab - c \right) \frac{\partial b}{\partial h_0} \right] \cdot \\
 &\quad \left. \frac{\sin \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right] \right\}}{\lambda_1 \alpha_1^4 \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \right]^2 \right\}^{1/2}} - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial a}{\partial h_0} \right\} . \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Tomando-se um dado valor para p , obtém-se o pseudo-potencial químico a partir da equação (2.30), e a magnetização, da equação (2.31).

Os resultados para a magnetização são mostrados nas Figs. 2.5 - 2.10 .

Na Fig. 2.5, a magnetização é dada como uma função do parâmetro α ($\alpha \equiv h/J$) para determinados valores de p e $J/k_B T = 10.0$. Os resultados mostram que, para $p > 0.5$ e $T = 0$, há dois valores críticos para α ($\alpha_{1c} = 1.0$ e $\alpha_{2c} = 2.0$), diferente do modelo sem diluição ($p = 1$), em que tem-se apenas $\alpha_c = 2.0$ (McCoy e Wu, 1973b). Neste caso, para $\alpha < \alpha_{1c}$, não há magnetização induzida, para $\alpha_{1c} < \alpha < \alpha_{2c}$, a magnetização induzida é $1-p$, e para $\alpha > \alpha_{2c}$, é igual a p . Para $p \leq 0.5$ e $T = 0$, há apenas um valor crítico para α ($\alpha_c = 1.0$). Para $\alpha > \alpha_{1c}$, a magnetização é dada por p , e para $\alpha < \alpha_{1c}$, não há magnetização induzida.

Na Fig. 2.6, a magnetização é representada como uma função da concentração p para alguns valores de α e $J/k_B T=10.0$. Analisando-se as curvas que aparecem nesta figura, percebe-se que elas evoluem com α até o limite em que variam linearmente com p . O valor de α , para o qual isto ocorre, é superior a α_{2c} , tendendo para este valor quando $T \rightarrow 0$.

As Figs. 2.7 - 2.10 mostram a magnetização como uma função da temperatura para alguns valores da concentração p e $J/k_B = 1.0$, nos casos em que $\alpha < \alpha_{1c}$, $\alpha_{1c} < \alpha < \alpha_{2c}$ e $\alpha > \alpha_{2c}$. Na Fig. 2.7, em que $\alpha < \alpha_{1c}$, as curvas de magnetização tendem a zero quando $T \rightarrow 0$. Nas Figs. 2.8 e 2.9, em que $\alpha_{1c} < \alpha < \alpha_{2c}$, a magnetização tende para p , quando $p \leq 0.5$, e para $1-p$, quando $p > 0.5$, no limite $T \rightarrow 0$. Na Fig. 2.10, $\alpha > \alpha_{2c}$ e as curvas de magnetização tendem para o valor p quando $T \rightarrow 0$.

Como no caso diluído por ligações, pode-se concluir, pelos resultados mostrados, que existe também a formação de agregados em $T=0$. Para $\alpha < \alpha_{1c}$, qualquer que seja p , os spins formam um único agregado, tendo-se magnetização induzida zero e ordem anti-ferromagnética no estado fundamental. Quando $\alpha_{1c} < \alpha < \alpha_{2c}$, o sistema tem, para $p \leq 0.5$, todos os spins livres, e para $p > 0.5$, há a formação de dois agregados: um com $N(2p-1)$ spins ($N(2p-1)/2$ apontando na direção do campo externo e $N(2p-1)/2$ na direção contrária) e outro com $N(1-p)$ spins livres. Assim, para $p \leq 0.5$, a magnetização é p e, para $p > 0.5$, é $1-p$. No caso em que $\alpha > \alpha_{2c}$, os spins são todos livres para $p \leq 0.5$. Para $p > 0.5$, existem ainda dois agregados com todos os spins apontando na direção do campo. Portanto, a magnetização resultante é dada por p .

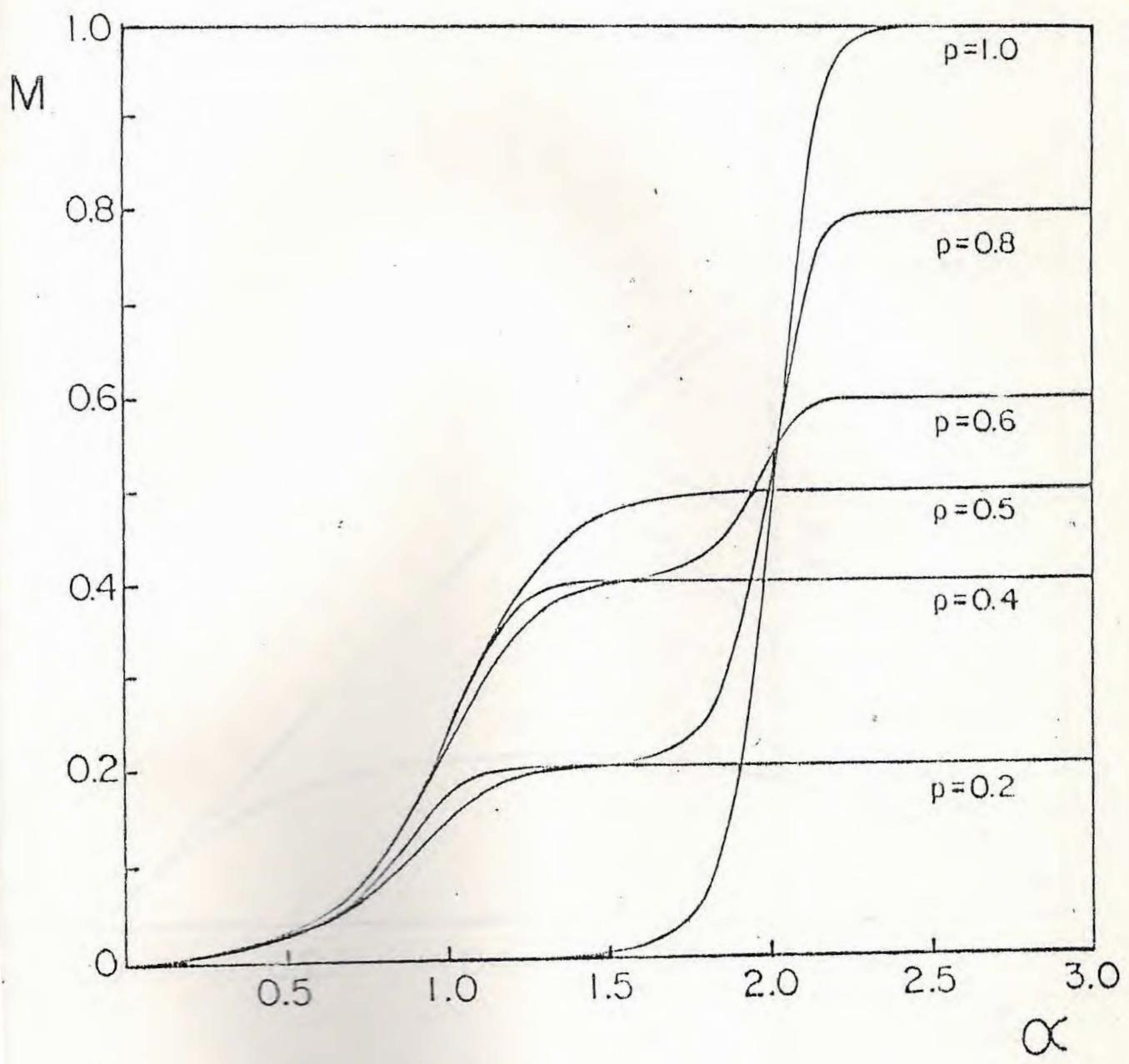


Fig. 2.5 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por sítios em um campo uniforme h como uma função de α ($\alpha \equiv h/J$) para várias diluições e $J/k_B T = 10.0$.

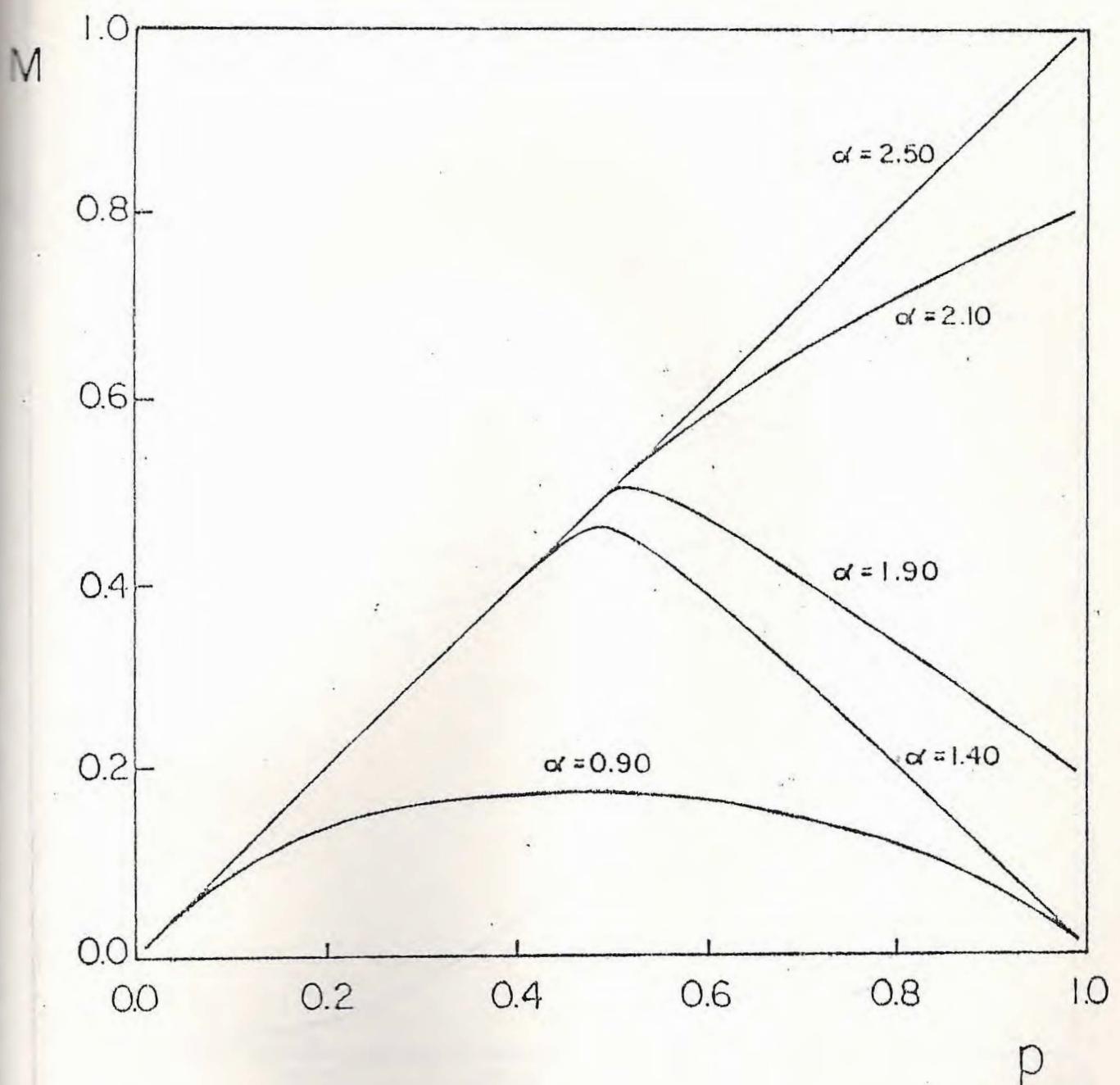


Fig. 2.6 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por sítios em um campo uniforme h como uma função da concentração p para alguns valores de α e $J/k_B T = 10.0$.

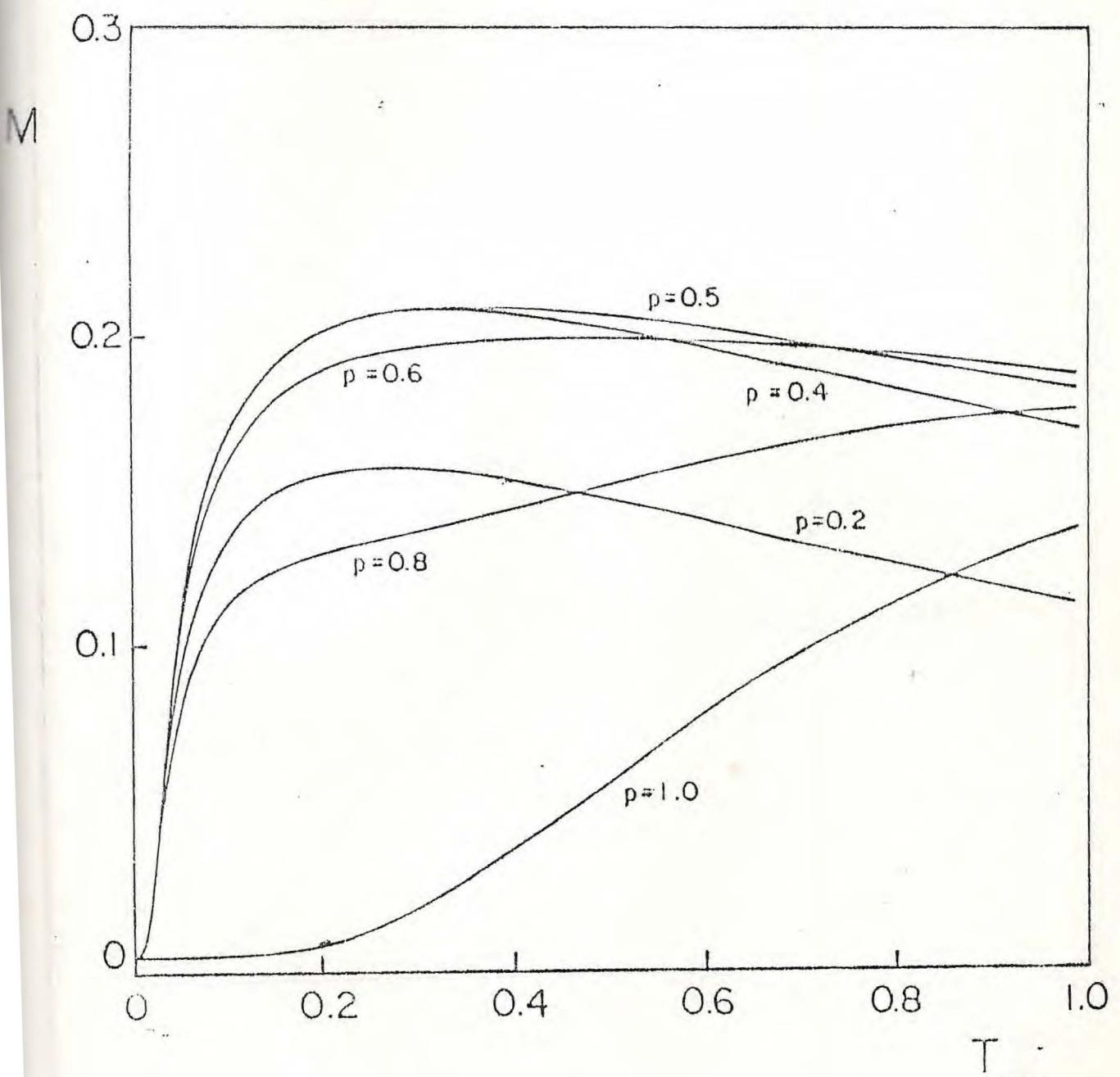


Fig. 2.7 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por sítios em um campo uniforme h como uma função da temperatura ($J/k_b T=1.0$) para várias diluições e $\alpha=0.9$.

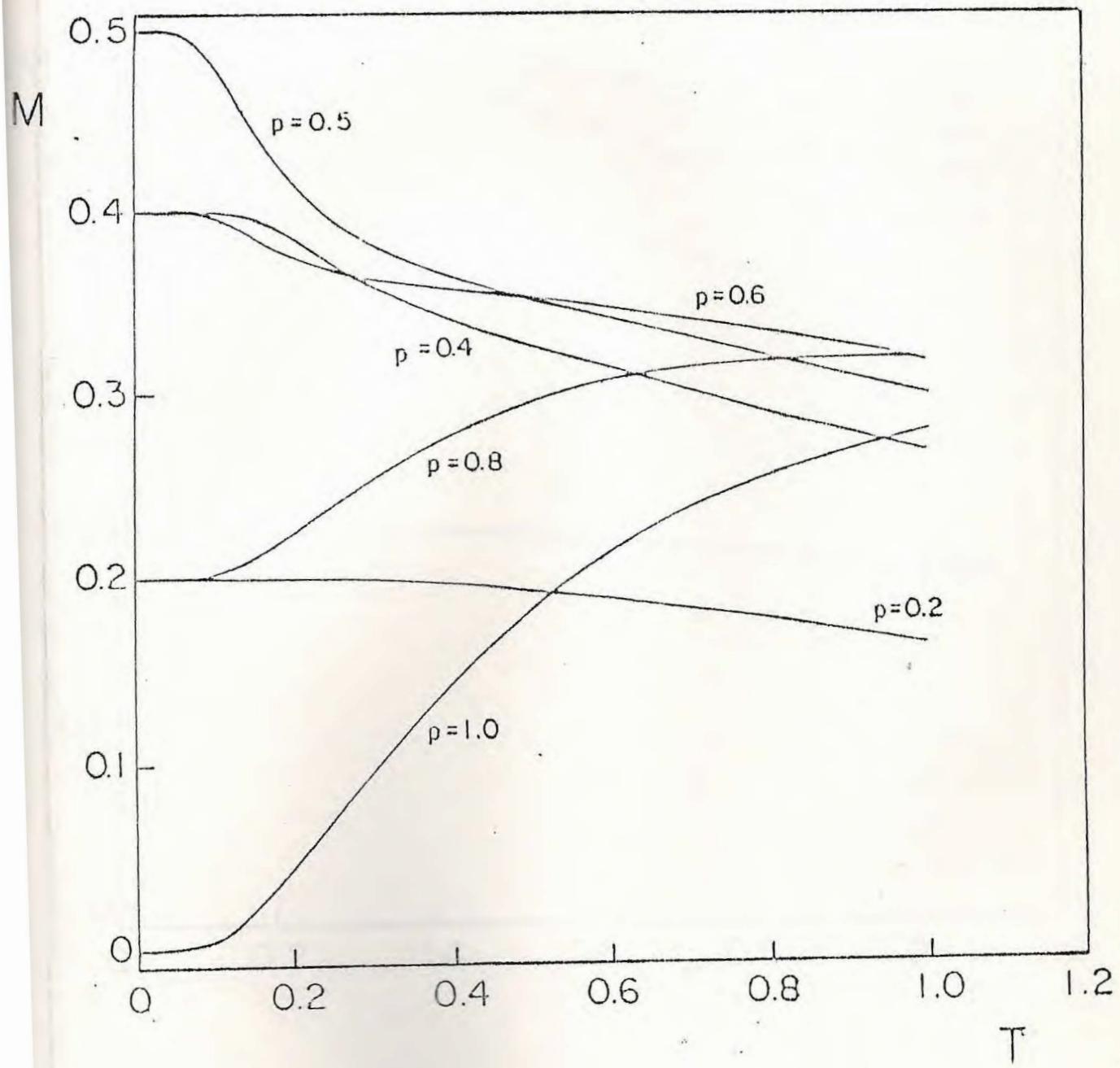


Fig. 2.8 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por sítios em um campo uniforme h como uma função da temperatura ($J/k_B=1.0$) para várias diluições e $\alpha=1.50$.

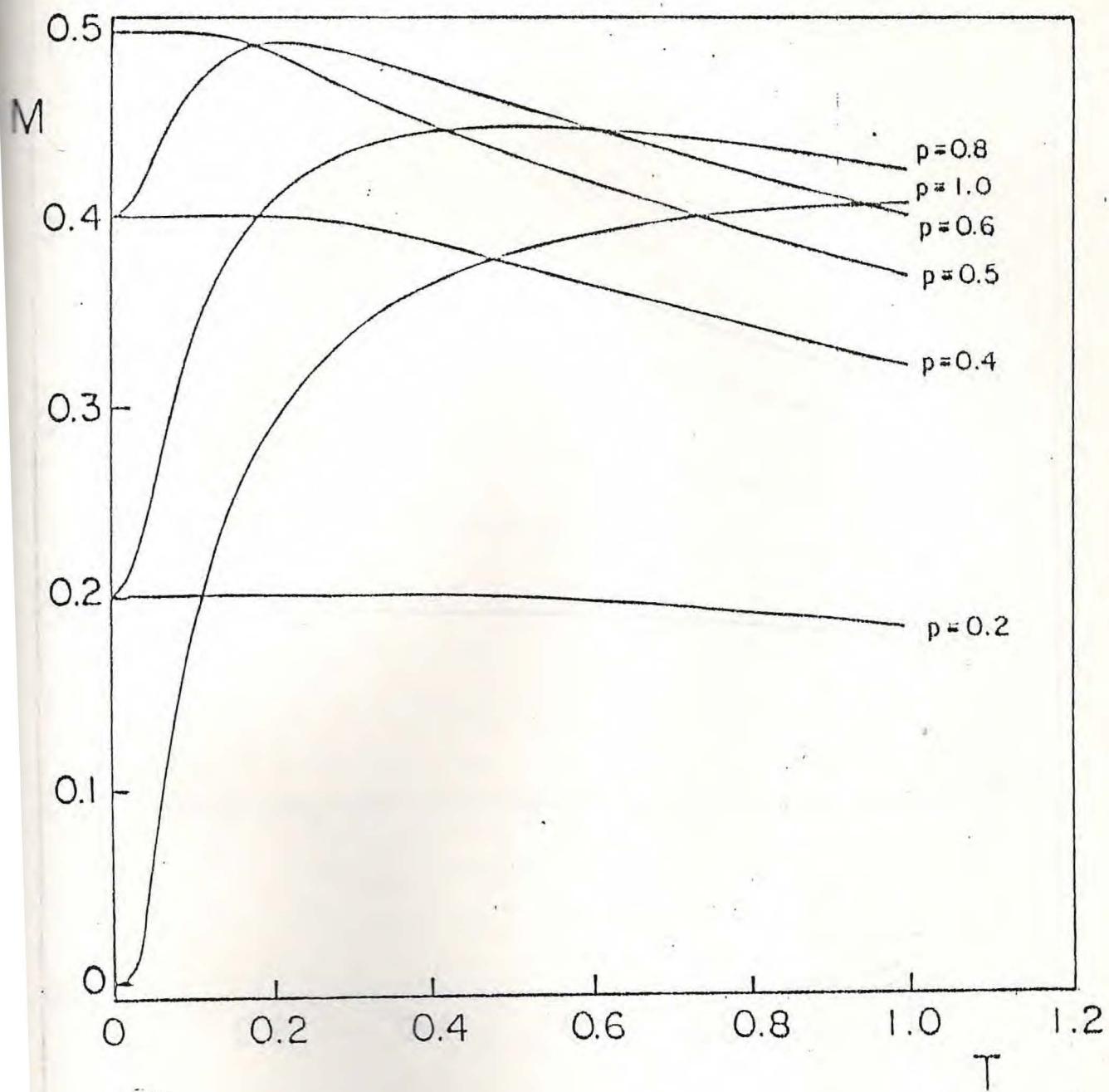


Fig. 2.9 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por sítios em um campo uniforme h como uma função da temperatura T ($J/k_B = 1.0$) para várias diluições e $\alpha = 1.90$.

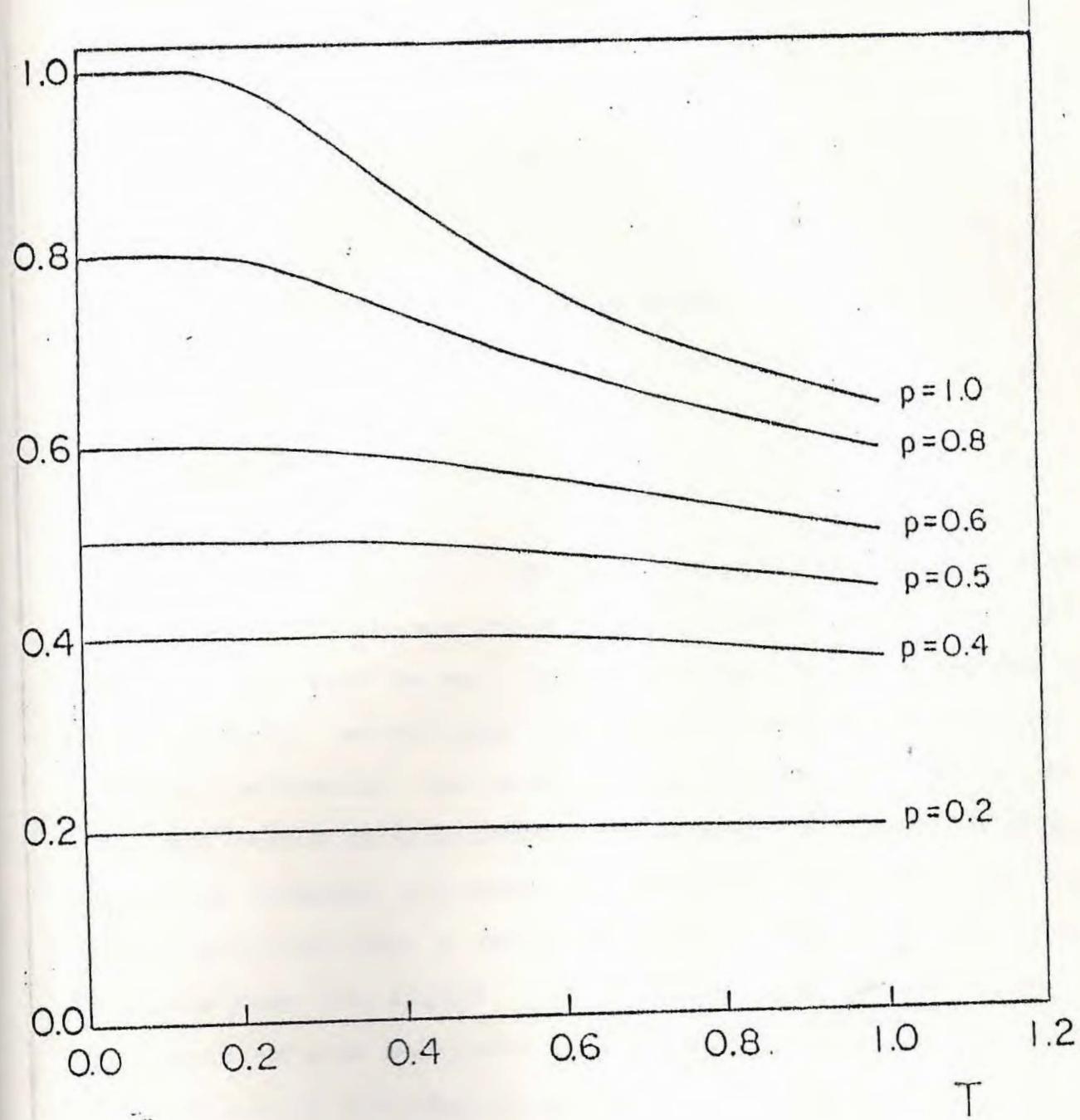


Fig. 2.10 - Magnetização de um antiferromagneto diluído por sítios em um campo uniforme h como uma função da temperatura T ($J/k_B = 1.0$) para várias diluições e $\alpha = 2.10$.

CAPÍTULO 3

MODELO DE ISING ALEATÓRIO COM SPINS MISTOS SOBRE UMA REDE FAVO DE MEL

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estuda-se o modelo de Ising aleatório com spins de magnitudes $1/2$ e s ($s > 1/2$, arbitrário, mas finito) sobre uma rede favo de mel. A estrutura favo de mel é uma das mais freqüentemente encontradas em estruturas bidimensionais na natureza, ocorrendo, por exemplo, no pigmento da retina de um olho, nos restos de esqueletos de organismos marinhos, em arranjos geológicos formados por magma abruptamente resfriado e em formas cristalográficas como o basal do grafite (Barry *et al.*, 1982). Como mostrado na figura 3.1, a rede favo de mel pode ser decomposta em duas sub-redes (Λ_A , com sítios marcados com um "o", e Λ_B , com sítios marcados com um "x").

A solução exata do modelo uniforme na rede favo de mel foi obtida por Gonçalves (1985). Gonçalves (1987) estudou ainda os efeitos da anisotropia uniaxial no mesmo modelo, considerando agora a interação entre os segundos vizinhos. O modelo aleatório com distribuições temperadas foi tratado, usando a teoria do campo efetivo, por Kaneyoshi na rede favo de mel (Kaneyoshi,

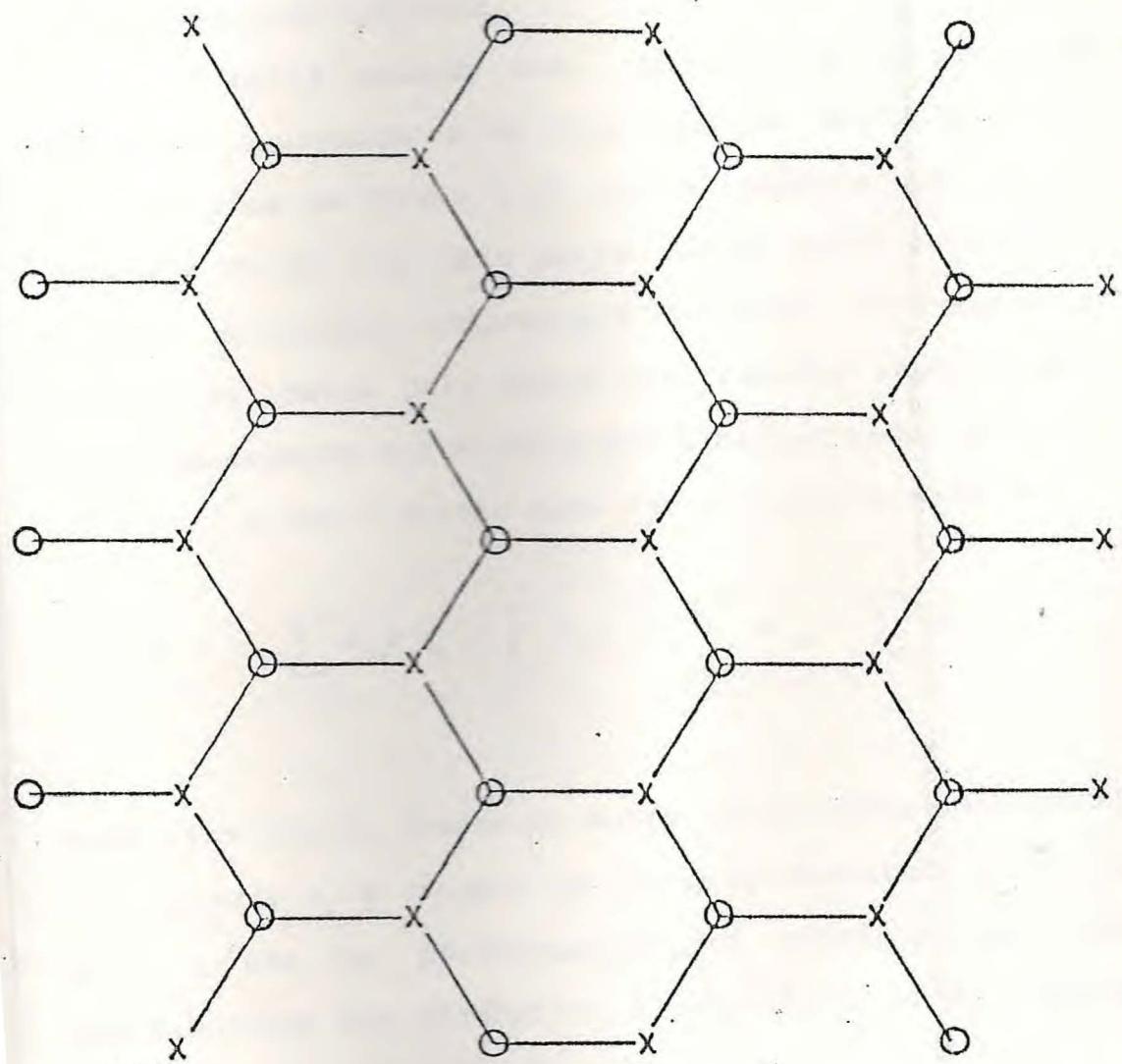


Fig. 3.1 - Decomposição da rede favo de mel em duas sub-redes triangulares: Λ_A (sítios "o") e Λ_B (sítios "x").

1988a; Kaneyoshi, (1988b; Kaneyoshi, 1988c; Kaneyoshi, 1989a; Kaneyoshi, 1989b; Kaneyoshi, 1989c), e por Siqueira e Fittipaldi (1986), na rede quadrada.

Neste modelo cada conjunto de spins ocupa uma das sub-redes equivalentes da rede favo de mel (denotadas por Λ_A e Λ_B , indicadas na figura 3.1), de tal maneira que, os vizinhos mais próximos de um dado spin pertencem ao outro conjunto de spins. O sistema apresenta anisotropia uniaxial e constante de troca aleatórias. Estes dois casos são tratados separadamente, cada um deles obedecendo a distribuições binárias recozidas.

A Hamiltoniana para este sistema é dada por

$$H = - \sum_{\langle j k \rangle} J_{jk} \sigma_j \tau_k - \sum_k D_k \tau_k^2 - \sum_{\langle j k \rangle} \mu \bar{\sigma}_{jk} - \sum_k \eta \bar{\sigma}'_k , \quad (3.1)$$

onde $\langle j k \rangle$ indica interação entre os vizinhos mais próximos, $j \in \Lambda_A$, $k \in \Lambda_B$, $\sigma_j = \pm 1$, τ_k é um spin de Ising de magnitude s, $\bar{\sigma}_{jk} = \pm 1$, $\bar{\sigma}'_k = \pm 1$ e μ e η são os pseudo-potenciais químicos que controlam as distribuições dos parâmetros aleatórios J_{jk} e D_k , respectivamente, que são dados por

$$J_{jk} = \frac{J_1 (1 + \bar{\sigma}_{jk})}{2} + \frac{J_2 (1 - \bar{\sigma}_{jk})}{2} \quad (3.2)$$

$$D_k = \frac{D_1 (1 + \bar{\sigma}'_k)}{2} + \frac{D_2 (1 - \bar{\sigma}'_k)}{2} . \quad (3.3)$$

Para a constante de troca aleatória, a distribuição considerada é representada por

$$p(J_{jk}) = p \delta(J_{jk} - J_1) + (1-p) \delta(J_{jk} - J_2) \quad (3.4)$$

e para a anisotropia uniaxial aleatória por

$$p(D_k) = p \delta(D_k - D_1) + (1-p) \delta(D_k - D_2) . \quad (3.5)$$

Na seção 3.2, estuda-se o modelo com a constante de troca aleatória e anisotropia uniaxial uniforme e na seção 3.3, considera-se o modelo com anisotropia uniaxial aleatória e constante de troca uniforme.

3.2 CONSTANTE DE TROCA ALEATÓRIA

A Hamiltoniana para o modelo de Ising com spins mistos sobre uma rede favo de mel que apresenta constante de troca aleatória e anisotropia uniaxial uniforme é obtida a partir da equação (3.1), fazendo-se $D_k = D$ e $\eta = 0$. A Hamiltoniana é dada então por:

$$H = - \sum_{\langle j k \rangle} J_{jk} \sigma_j \tau_k - \sum_k D \tau_k^2 - \sum_{\langle j k \rangle} \mu \bar{\sigma}_{jk} . \quad (3.6)$$

A distribuição a que obedece o parâmetro aleatório J_{jk} é definida pela equação (3.4) e $\bar{p}(D_k)$ dada por (3.5) para $D_1=D_2=D$. Utilizando-se a expressão (3.2) para J_{jk} , pode-se reescrever a Hamiltoniana H , na forma

$$H = - \sum_{\langle j k \rangle} \left[\frac{J_1 (1 + \bar{\sigma}_{jk})}{2} + \frac{J_2 (1 - \bar{\sigma}_{jk})}{2} \right] \sigma_j \sigma_k - \sum_k D \tau_k^2 - \sum_{\langle j k \rangle} \mu \bar{\sigma}_{jk} . \quad (3.7)$$

A função de partição é obtida a partir da expressão

$$Z = \sum_{\{\sigma, \sigma, \tau\}} \exp(-\beta H) , \quad (3.8)$$

que pode ser reescrita como

$$Z = \sum_{\{\sigma, \sigma, \tau\}} \exp \left\{ \sum_{\langle j k \rangle} \beta \left[\frac{J_1 (1 + \bar{\sigma}_{jk})}{2} + \frac{J_2 (1 - \bar{\sigma}_{jk})}{2} \right] \sigma_j \tau_k + \sum_k \beta D \tau_k^2 + \sum_{\langle j k \rangle} \beta \mu \bar{\sigma}_{jk} \right\} , \quad (3.9)$$

Esta função é calculada realizando-se o traço parcial sobre os spins τ e as variáveis $\bar{\sigma}$, de forma que, o modelo com spins mistos sobre uma rede favo de mel pode ser mapeado no modelo de Ising com spin 1/2 sobre uma rede triangular. Isto pode ser realizado

considerando-se a decimação de um dado spin τ_0 (com vizinhos mais próximos σ_1 , σ_2 e σ_3) e das variáveis $\bar{\sigma}_{10}$, $\bar{\sigma}_{20}$ e $\bar{\sigma}_{30}$. A relação resultante deste procedimento é dada por

$$\sum_{\{\sigma, \tau_0\}} e^{\beta D \tau_0^2} F_{\tau_0}(\sigma_1, \bar{\sigma}_{10}) F_{\tau_0}(\sigma_2, \bar{\sigma}_{20}) F_{\tau_0}(\sigma_3, \bar{\sigma}_{30}) = r \exp \left\{ \beta J' (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right\}, \quad (3.10)$$

onde

$$F_{\tau_0}(\sigma, \bar{\sigma}) = \exp \left\{ \beta \left[\frac{J_1(1 + \bar{\sigma})}{2} + \frac{J_2(1 - \bar{\sigma})}{2} \right] \sigma \tau_0 + \beta \mu \bar{\sigma} \right\}. \quad (3.11)$$

Da equação (3.10), pode-se encontrar r e J' , que são expressos por

$$r = \left[V_1^3 \cdot V_2 \right]^{1/4}, \quad (3.12)$$

$$J' = \frac{1}{4} k_B T \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right], \quad (3.13)$$

onde

$$V_1 = z^3 G(J_1, D) + z^2 \left[G(2J_1 - J_2, D) + 2G(J_2, D) \right] +$$

$$z \left[G(2J_2 - J_1, D) + 2G(J_1, D) \right] + G(J_2, D)$$

$$V_2 = z^3 G(3J_1, D) + 3z^2 G(2J_1 + J_2, D) + 3z G(J_1 + 2J_2, D) + G(3J_2, D) . \quad (3.14)$$

e

$$G(x, y) = \sum_{m=-s}^s e^{\beta y m^2} \cosh(\beta mx) , \quad z = e^{2\beta\mu} . \quad (3.15)$$

Assim, a função de partição pode agora ser escrita sob a forma

$$Z = r^N \sum_{\{\sigma\}} \exp\{-\beta H'\} , \quad (3.16)$$

onde N é o número total de sítios da sub-rede Λ_B (ou Λ_A) e H' descreve o modelo de Ising sobre uma rede triangular com uma constante de troca efetiva J' . As propriedades termodinâmicas do sistema podem ser obtidas do modelo sobre uma rede triangular, o qual já possui uma solução conhecida (veja, por exemplo, Baxter (1982)).

O pseudo-potencial químico μ é determinado impondo-se a condição

$$p = \frac{1 + \langle \bar{\sigma}_{10} \rangle}{2} , \quad (3.17)$$

onde $\langle \bar{\sigma}_{10} \rangle = \langle \bar{\sigma}_{20} \rangle = \langle \bar{\sigma}_{30} \rangle = \langle \bar{\sigma}_{10} + \bar{\sigma}_{20} + \bar{\sigma}_{30} \rangle / 3$ podem ser calculados com um procedimento análogo ao utilizado para o cálculo da função de partição. Um sumário deste procedimento é colocado a seguir.

Realiza-se a decimação sobre um dado spin τ_0 e sobre as variáveis $\bar{\sigma}_{10}$, $\bar{\sigma}_{20}$ e $\bar{\sigma}_{30}$. Isto é representado por

$$\sum_{(\sigma, \tau_0)} (\bar{\sigma}_{10} + \bar{\sigma}_{20} + \bar{\sigma}_{30}) e^{\beta D \tau_0^2} F_{\tau_0}(\sigma_1, \bar{\sigma}_{10}) F_{\tau_0}(\sigma_2, \bar{\sigma}_{20}) F_{\tau_0}(\sigma_3, \bar{\sigma}_{30}) \equiv r \exp\left\{ \beta J' (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right\} \cdot [t_1 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + t_2] , \quad (3.18)$$

com r , J' e $F_{\tau_0}(\sigma, \bar{\sigma})$ definidos pelas equações (3.12), (3.13) e (3.11), respectivamente. Da equação (3.18) têm-se t_1 e t_2 dados por

$$t_1 = \left[\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1} \right] , \quad t_2 = \left[\frac{U_2}{V_2} + \frac{3U_1}{V_1} \right] , \quad (3.19)$$

com

$$\begin{aligned} U_1 &= 3z^3 G(J_1, D) + z^2 \left[G(2J_1 - J_2, D) + 2G(J_2, D) \right] - \\ &\quad z \left[G(2J_2 - J_1, D) + 2G(J_1, D) \right] - 3G(J_2, D) , \\ U_2 &= 3 \left[z^3 G(3J_1, D) + z^2 G(2J_1 + J_2, D) - zG(J_1 + 2J_2, D) - G(3J_2, D) \right] , \end{aligned} \quad (3.20)$$

e v_1 e v_2 definidos pela equação (3.14). Tem-se, então,
 $\langle \bar{\sigma}_{10} + \bar{\sigma}_{20} + \bar{\sigma}_{30} \rangle$ dado por

$$\langle \bar{\sigma}_{10} + \bar{\sigma}_{20} + \bar{\sigma}_{30} \rangle = 3t_1 \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr} + t_2, \quad (3.21)$$

onde $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr}$ é a função de correlação entre dois spins vizinhos mais próximos para o modelo de Ising efetivo sobre a rede triangular.

Se $J_2=0$, J' é sempre positivo independentemente do sinal de J_1 . Isto implica que, para $J_1, J_2 \neq 0$, a ordem ferromagnética sempre será favorecida, quaisquer que sejam os sinais das interações. Assim sendo, o caso de interesse é o modelo diluído ($J_1=J$ e $J_2=0$), por ser o caso que apresenta as características mais importantes do modelo. Desta maneira, a temperatura crítica é obtida considerando-se os valores críticos de $\beta J'$, $\exp(4\beta J'_C)=3$, e de $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr}=2/3$ (Stephenson, 1964). Assim, substituindo-se (3.14), (3.19) e (3.20), $\exp(4\beta J'_C)=3$ e $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr}=2/3$ nas equações (3.13) e (3.17), obtém-se

$$[G(3J, D) - 3G(J, D)]z^3 - 6G(0, D)z^2 - 6G(J, D)z - 2G(0, D) = 0, \quad (3.22)$$

$$[(8p-7)G(3J, D) - 3G(J, D)]z^3 + 2[4(3p-2)G(2J, D) - G(0, D)]z^2 + 12pG(J, D)z + 2(4p+1)G(0, D) = 0. \quad (3.23)$$

onde z é dado pela equação (3.15). Nestas equações, elimina-se z e determina-se a temperatura crítica em função de p e de um outro

parâmetro, $\alpha \equiv D/J$.

As Figs. 3.2 - 3.5 mostram a temperatura crítica como função da concentração p , para spins τ com magnitudes 1, 2, $3/2$ e $5/2$, respectivamente, e para alguns valores de α .

Nas Figs. 3.2 e 3.3, em que o spin τ tem magnitudes 1 e 2, respectivamente, verifica-se que, para um dado α , há uma concentração p_c , abaixo da qual não há transição, chamada concentração crítica. Para $\alpha > 0$, $p_c = (3 + 5\sqrt{3})/18$, e para $\alpha < 0$, $p_c = 1/2$.

Nas Figs. 3.4 e 3.5, τ tem magnitudes $1/2$ e $3/2$, respectivamente. Para $-3/2 > \alpha > 0$, $p_c = (3 + 5\sqrt{3})/18$, para $-3/2 < \alpha < 0$, $p_c = 1/2$ e, para $\alpha = -3/2$, $p_c = 23/36$.

Para $\alpha = 0$, caso em que não há anisotropia uniaxial, observa-se que p_c depende continuamente da magnitude do spin τ .

Através de um estudo analítico das equações (3.22) e (3.23), são determinadas as concentrações críticas para diversos valores do parâmetro α . Esta análise é dividida em três casos: $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$.

CASO 1. : $\alpha > 0$.

Para determinar-se a concentração crítica p_c , toma-se o limite $T \rightarrow 0$. Para $\alpha > 0$, os termos dominantes das funções $G(nJ, D)$ são os seguintes:

$$G(0, D) \cong 2e^{\alpha\beta Js^2}, \quad G(nJ, D) \cong e^{\beta Js(\alpha s + n)}, \quad n=1, 2, 3. \quad (3.24)$$

Considerando-se apenas os termos dominantes na equação (3.22) e fazendo-se a mudança de variáveis

$$y = z e^{\beta Js} , \quad (3.25)$$

obtém-se

$$y^3 - 6y - 4 \approx 0 , \quad (3.26)$$

A raiz positiva da equação acima é $y = 1 + \sqrt{3}$. Substituindo-se este resultado na equação (3.23) e levando-se em conta os termos dominantes, obtém-se para a concentração crítica

$$p_c = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{18} . \quad (3.27)$$

CASO 2. : $\alpha = 0$.

Para $\alpha=0$ e $T \rightarrow 0$, os termos dominantes das funções $G(nJ, D)$ são dados por:

$$G(0, D) \approx 2s + 1 , \quad G(nJ, D) \approx e^{n\beta Js}, \quad n=1, 2, 3. \quad (3.28)$$

Neste caso, a equação (3.22), apenas com os termos dominantes se reduz, após a mudança de variáveis (3.25), a

$$y^3 - 6y - 2(2s+1) \approx 0 . \quad (3.29)$$

A solução real positiva para a equação acima é dada por

$$y = \{v + [v^2 - 8]^{1/2}\}^{1/3} + \frac{2}{\{v + [v^2 - 8]^{1/2}\}^{1/3}}, \quad v=2s+1. \quad (3.30)$$

Substituindo-se este resultado na equação (3.23) e mantendo-se apenas os termos dominantes, obtém-se a concentração crítica

$$p_c = \frac{2}{3} - \frac{v}{3y^2(y+2)}. \quad (3.31)$$

Considerando-se $s=1/2$ e $\alpha=0$ (modelo sem anisotropia uniaxial), reproduz-se o resultado obtido por Syozi (1965), $p_c = (3+5\sqrt{3})/18$. Observa-se que, neste caso ($\alpha=0$), à medida que s aumenta, p_c tende para $1/2$.

CASO 3. : $\alpha < 0$.

Este caso é um pouco mais complexo. A análise é realizada considerando-se spins inteiros e semi-inteiros separadamente. No caso de spins inteiros, a equação (3.22) se reduz a

$$y^3 - 2 \approx 0 \quad \text{ou} \quad y^3 - 1 \approx 0, \quad (3.32)$$

Substituindo-se qualquer dos resultados acima na equação (3.23),

obtém-se, para a concentração crítica, o valor

$$p_c = \frac{1}{2} . \quad (3.33)$$

Para spins semi-inteiros, através da mudança de variáveis (3.25), obtém-se:

$$Y^3 - 6Y - 4 \cong 0, \quad p_c = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{18}, \quad \text{para } \alpha < -\frac{3}{2} ,$$

$$Y^3 - 3Y - 2 \cong 0, \quad p_c = \frac{23}{36}, \quad \text{para } \alpha = -\frac{3}{2} ,$$

$$Y^3 - 4 \cong 0, \quad p_c = \frac{1}{2}, \quad \text{para } -\frac{3}{2} < \alpha < 0 . \quad (3.34)$$

Portanto, são obtidas três concentrações críticas para spins inteiros e quatro para spins semi-inteiros. Para spins inteiros, têm-se

$$p_c = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{18}, \quad \text{para } \alpha > 0,$$

$$p_c = \frac{2}{3} - \frac{v}{3Y^2(Y+2)}, \quad \text{para } \alpha = 0 \quad (y \text{ e } v \text{ dados por (3.30)}),$$

$$p_c = \frac{1}{2}, \quad \text{para } \alpha < 0. \quad (3.35)$$

Para spins semi-inteiros, têm-se

$$p_c = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{18}, \text{ para } -\frac{3}{2} > \alpha > 0,$$

$$p_c = \frac{2}{3} - \frac{v}{3y^2(y+2)}, \text{ para } \alpha = 0 \text{ (y e v dados por (3.30))},$$

$$p_c = \frac{1}{2}, \text{ para } -\frac{3}{2} < \alpha < 0,$$

$$p_c = \frac{23}{36}, \text{ para } \alpha = -\frac{3}{2} \quad (3.36)$$

Conclui-se, então, que há mais de uma concentração de percolação.

Nas Figs. 3.6 - 3.9, a temperatura crítica é dada como uma função do parâmetro α para alguns valores de p e para spins com magnitudes 1, 2, 3/2 e 5/2, respectivamente.

Nas Figs. 3.6 e 3.7, em que o spin τ tem magnitudes 1 e 2, respectivamente, observam-se dois valores críticos para α , $\alpha_{1c} = -3.0$ e $\alpha_{2c} = 0.0$. Para $\alpha < \alpha_{1c}$, o sistema não apresenta transição e o estado fundamental corresponde àquele em que todos os spins τ se encontram no estado $m=0$, não havendo, portanto, ordem de longo alcance no sistema. Para concentrações compreendidas no intervalo $p_c(\alpha=0) < p < p_c(\alpha>0)$, onde $p_c(\alpha=0) \approx 0.6412$ para $s=1$, $p_c(\alpha>0) = (3+5\sqrt{3})/18 \approx 0.6478$, ocorre o fenômeno de reentrância, onde

temos duas temperaturas de transição para cada α .

Nas Figs. 3.8 (spin τ com magnitude 3/2) e 3.9 (spin τ com magnitude 5/2), há dois valores críticos para α , $\alpha_{1c}=-3/2$ e $\alpha_{2c}=0.0$. O fenômeno de reentrância ocorre para concentrações compreendidas no intervalo $p_c(\alpha=0) < p < p_c(\alpha>0)$. Para $p > p_c(\alpha>0)$, o sistema apresenta um estado ordenado. Este resultado é consistente com a ausência do estado $m=0$, responsável pelo desaparecimento da ordem de longo alcance.

Os valores críticos de α são determinados a partir das equações (3.22) e (3.23) reescritas, respectivamente, sob a forma $F_1(\alpha, T_c, z)=0$ e $F_2(\alpha, T_c, z)=0$, sujeitas a uma condição adicional:

$$\frac{\partial F_2}{\partial T_c} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial T_c} = 0 . \text{ Esta última condição é obtida a partir de } \frac{d\alpha}{dT_c} = 0, \frac{dF_1}{dT_c} = 0 \text{ e } \frac{dF_2}{dT_c} = 0 .$$

Os resultados obtidos aqui reproduzem aqueles obtidos por Gonçalves (1985) para o modelo homogêneo.

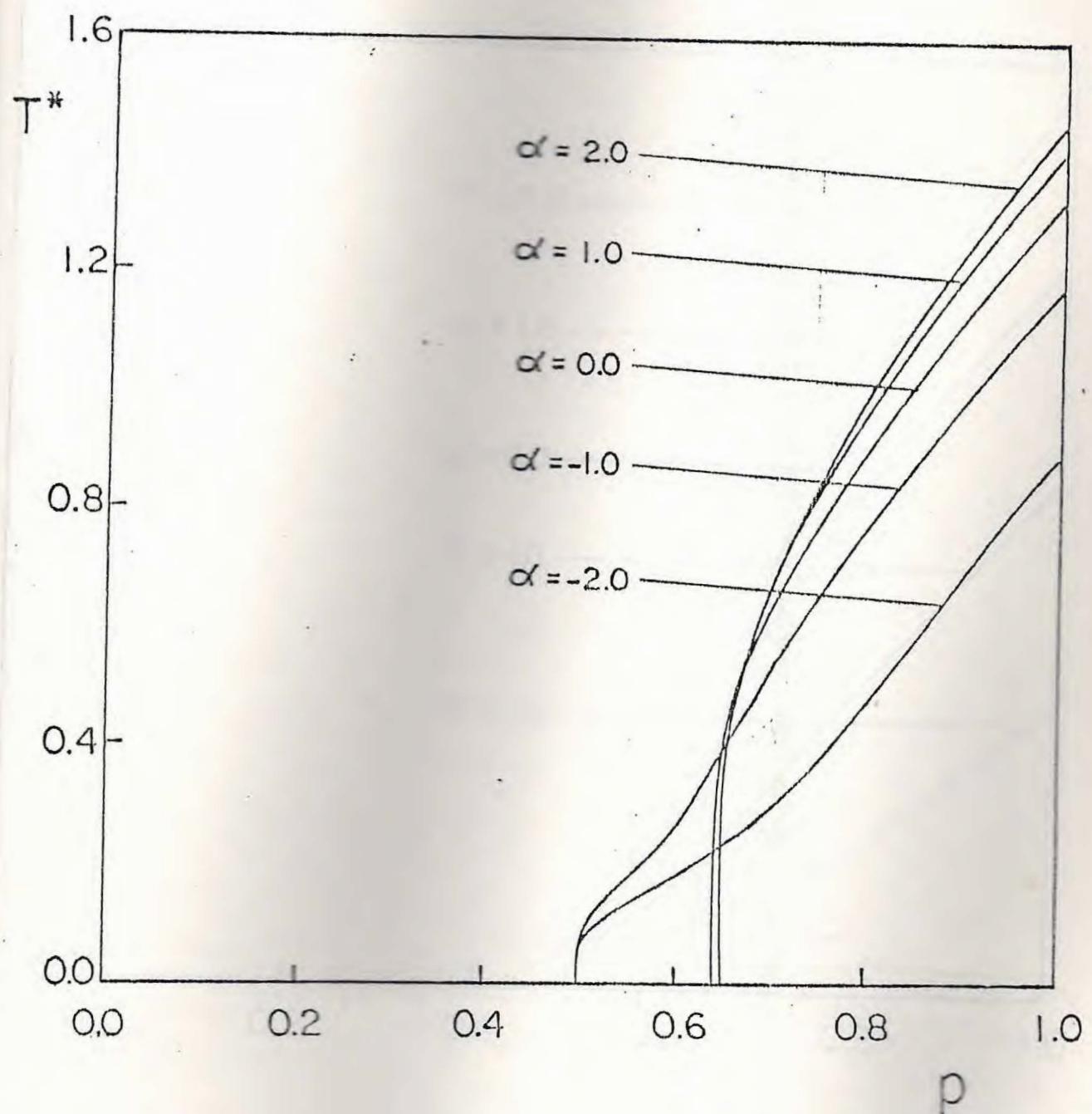


Fig. 3.2 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T_c / J$) como uma função de p para a distribuição $\delta(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk})$ e vários α para spin r com magnitude 1.

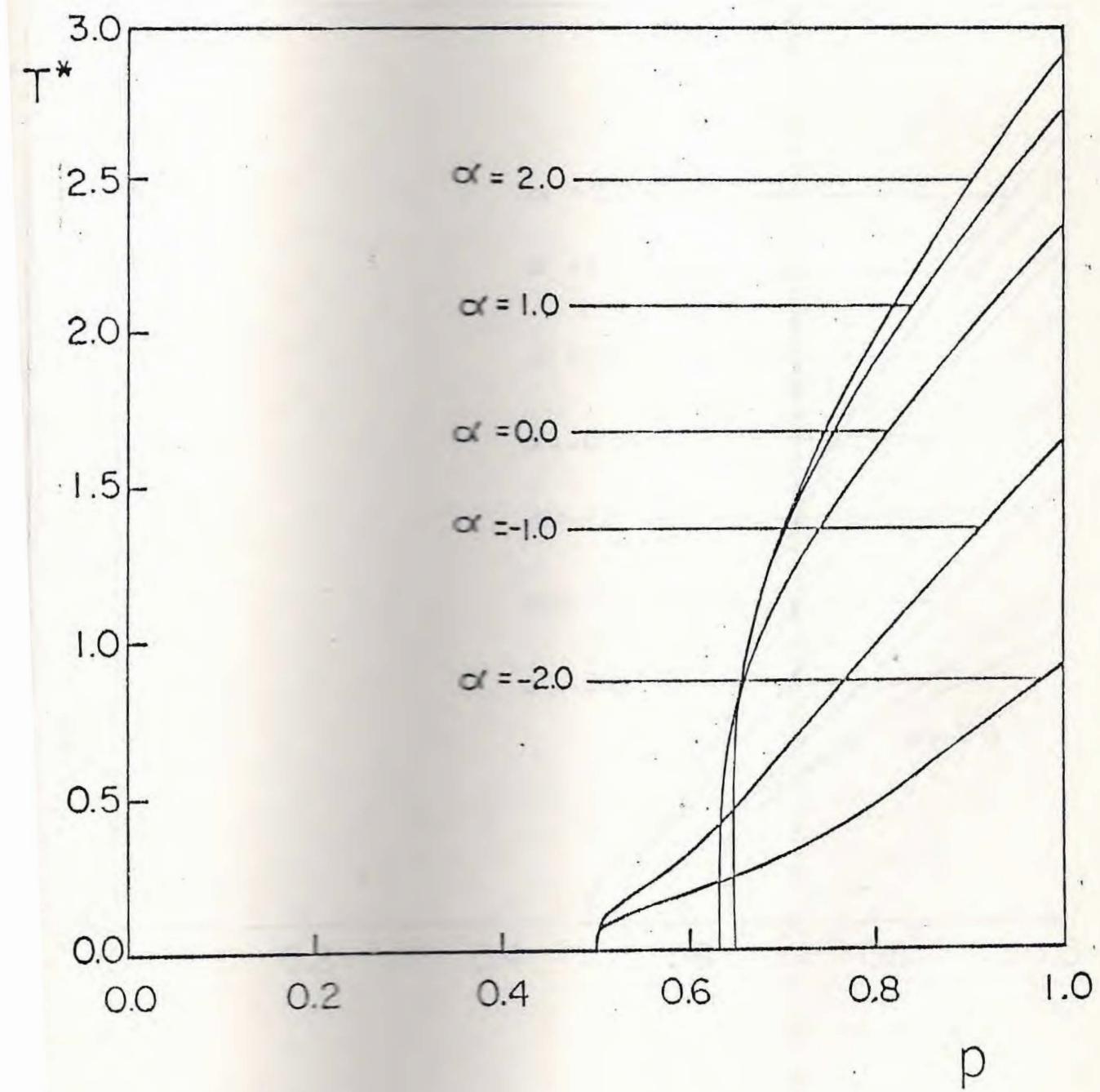


Fig. 3.3 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T_c / J$) como uma função de p para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk})$ e vários α para spin τ com magnitude 2.

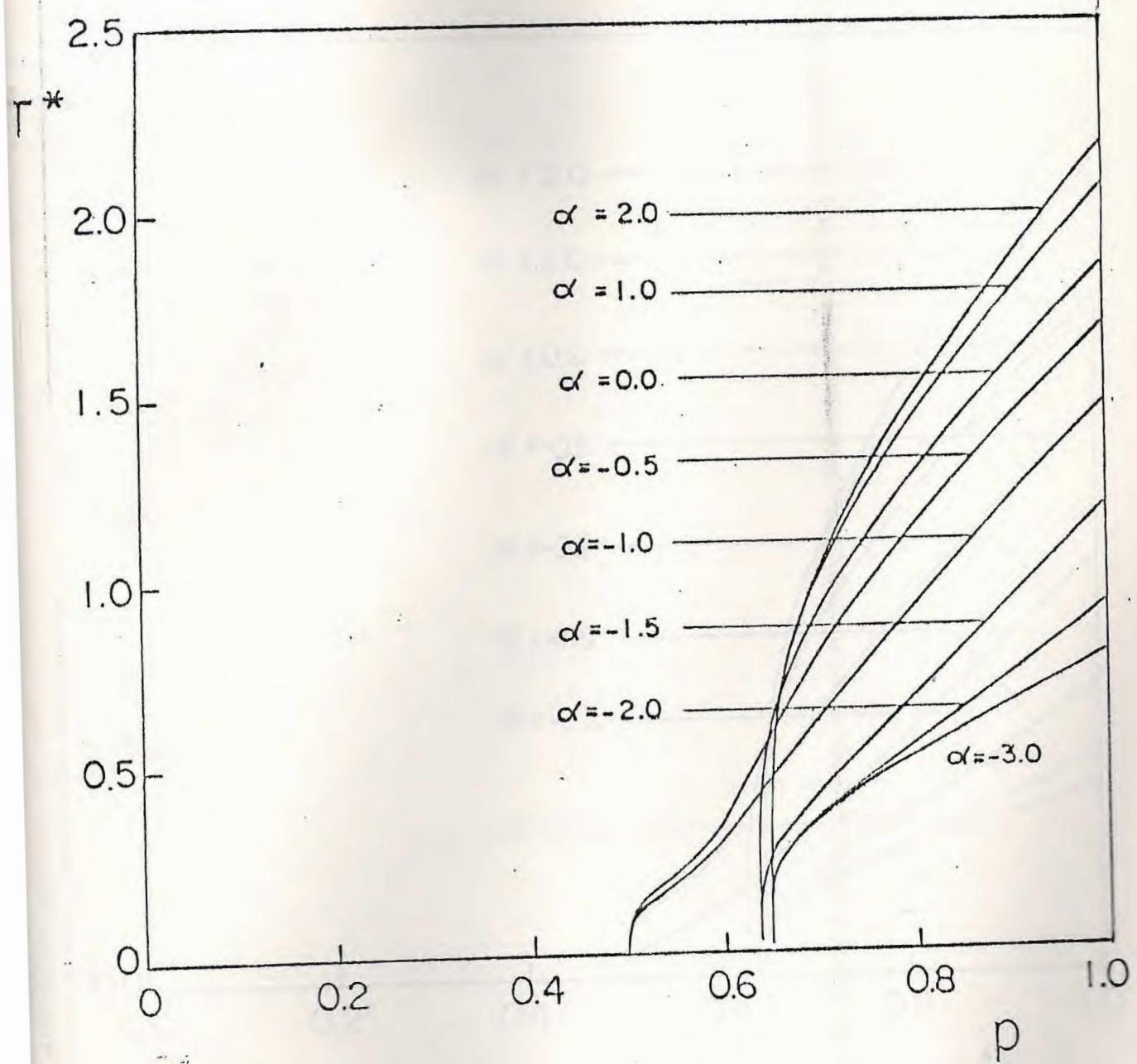


Fig. 3.4 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T_c / J$) como uma função de p para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk})$ e vários α para spin τ com magnitude $3/2$.

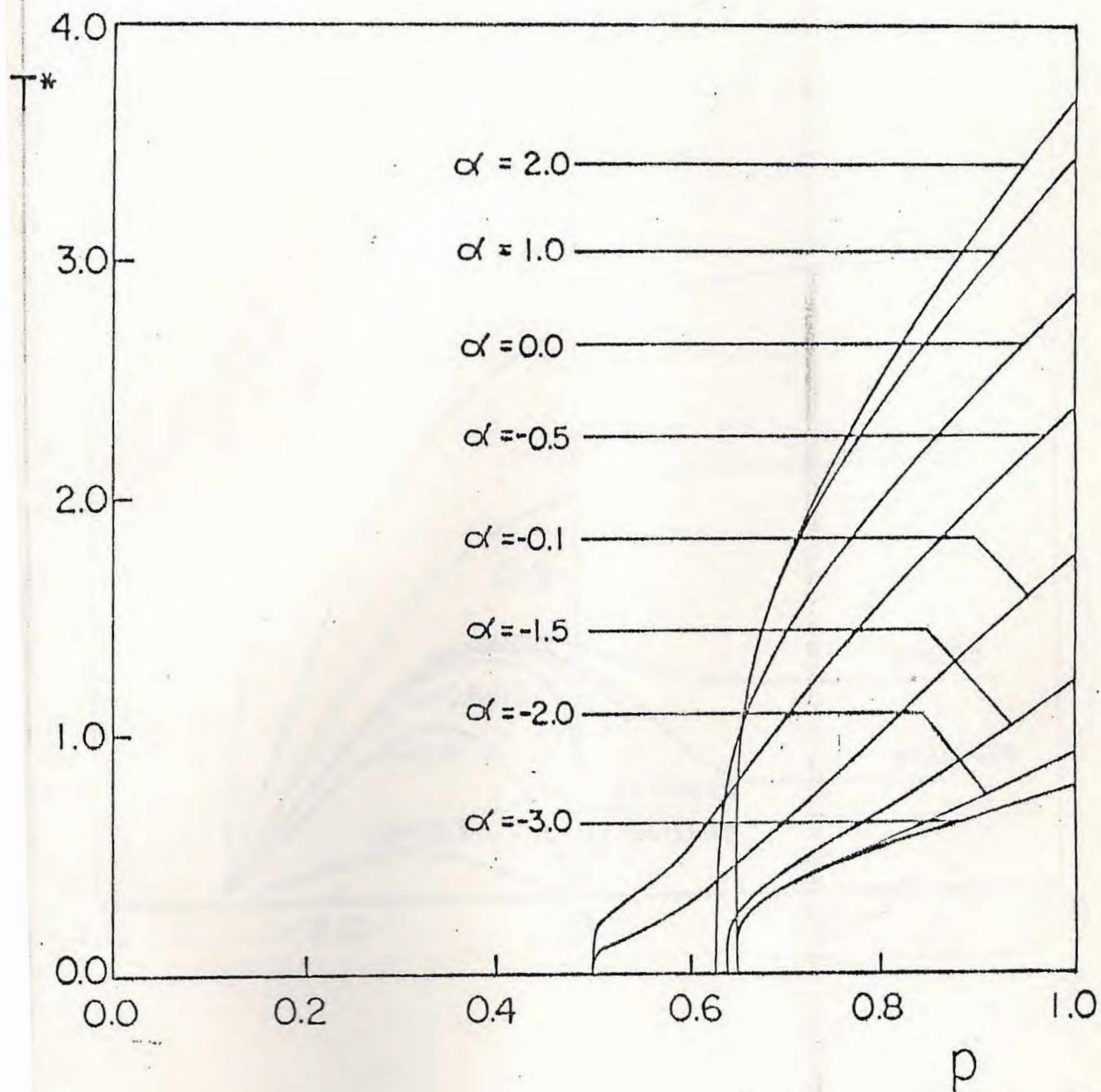


Fig. 3.5 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T_c/J$) como uma função de p para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk})$ e vários α para spin com magnitude 5/2.

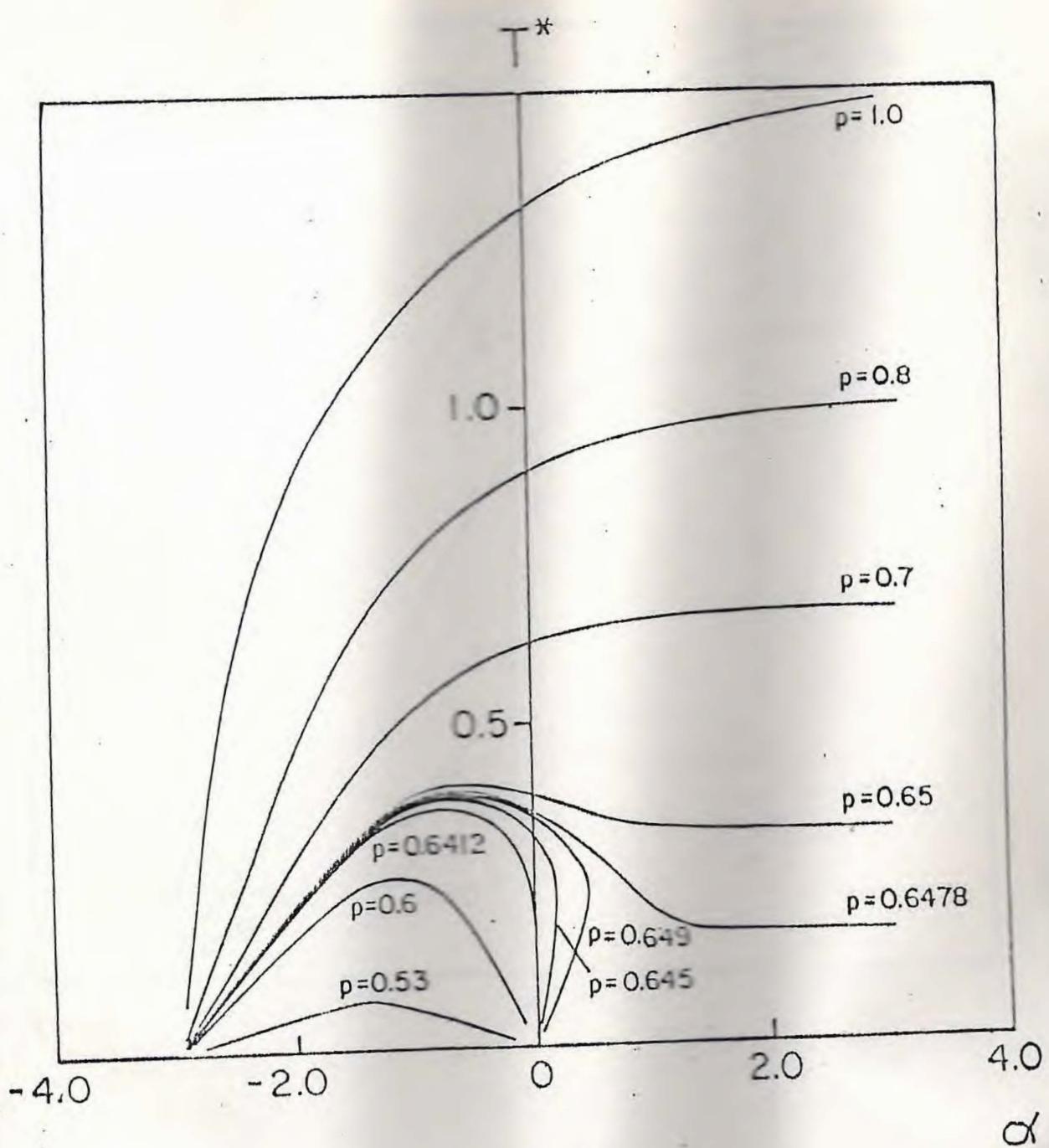


Fig. 3.6 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T_c/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)s(J_{jk})$ para vários valores de p e para spin com magnitude 1.

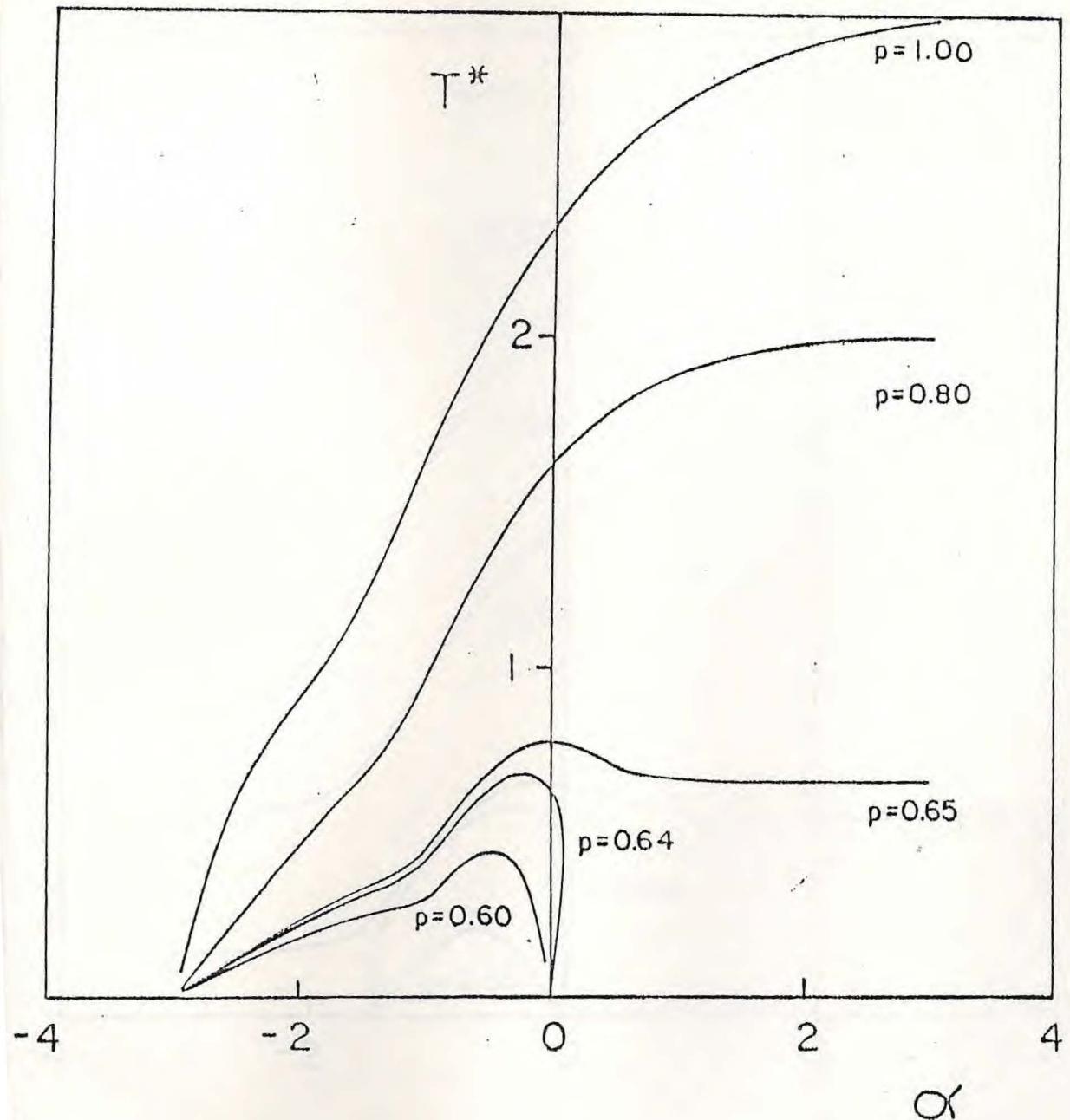


Fig. 3.7 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T_c / J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk})$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude 2.

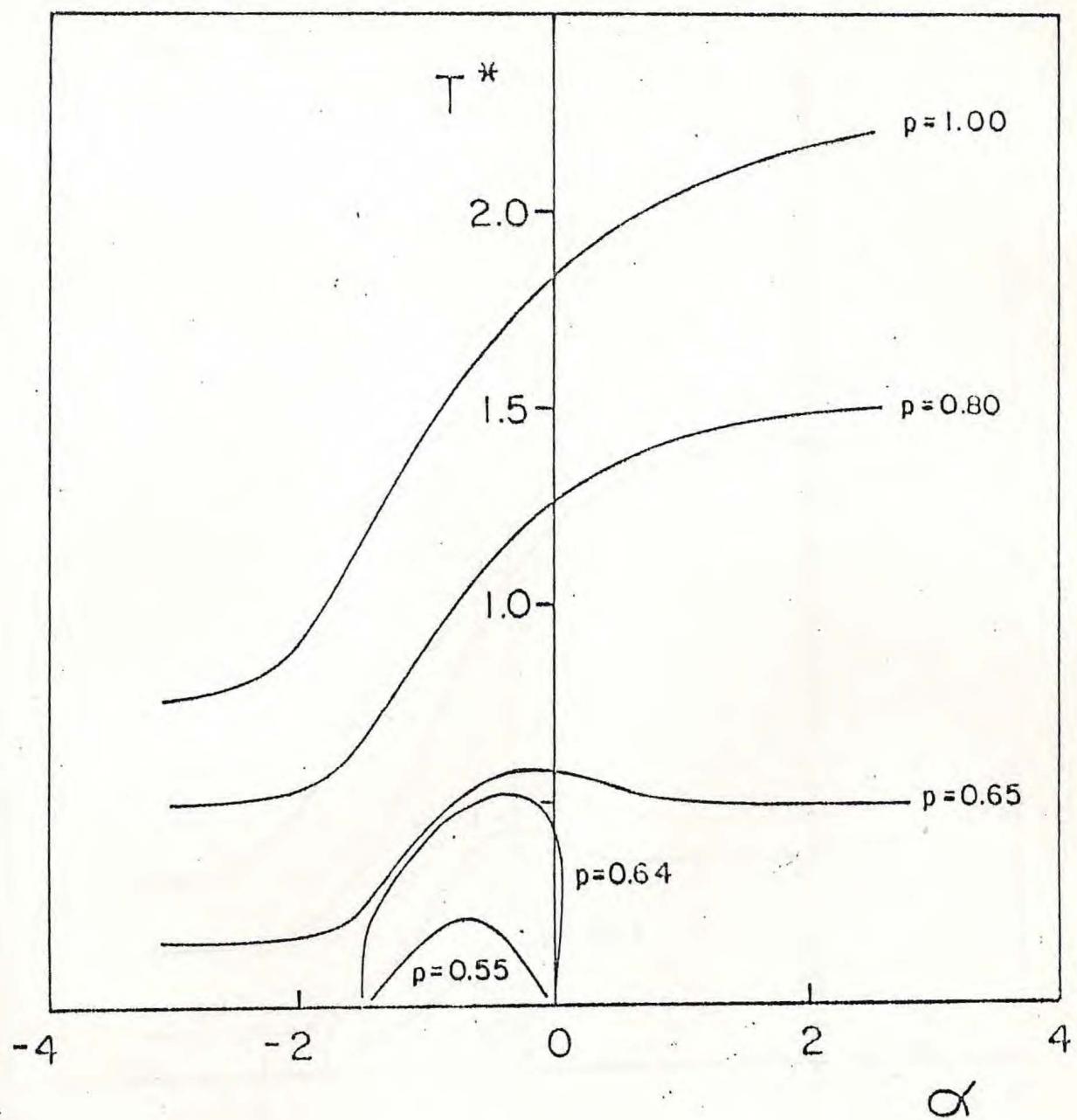


Fig. 3.8 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T_c / J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk} + J)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude $3/2$.

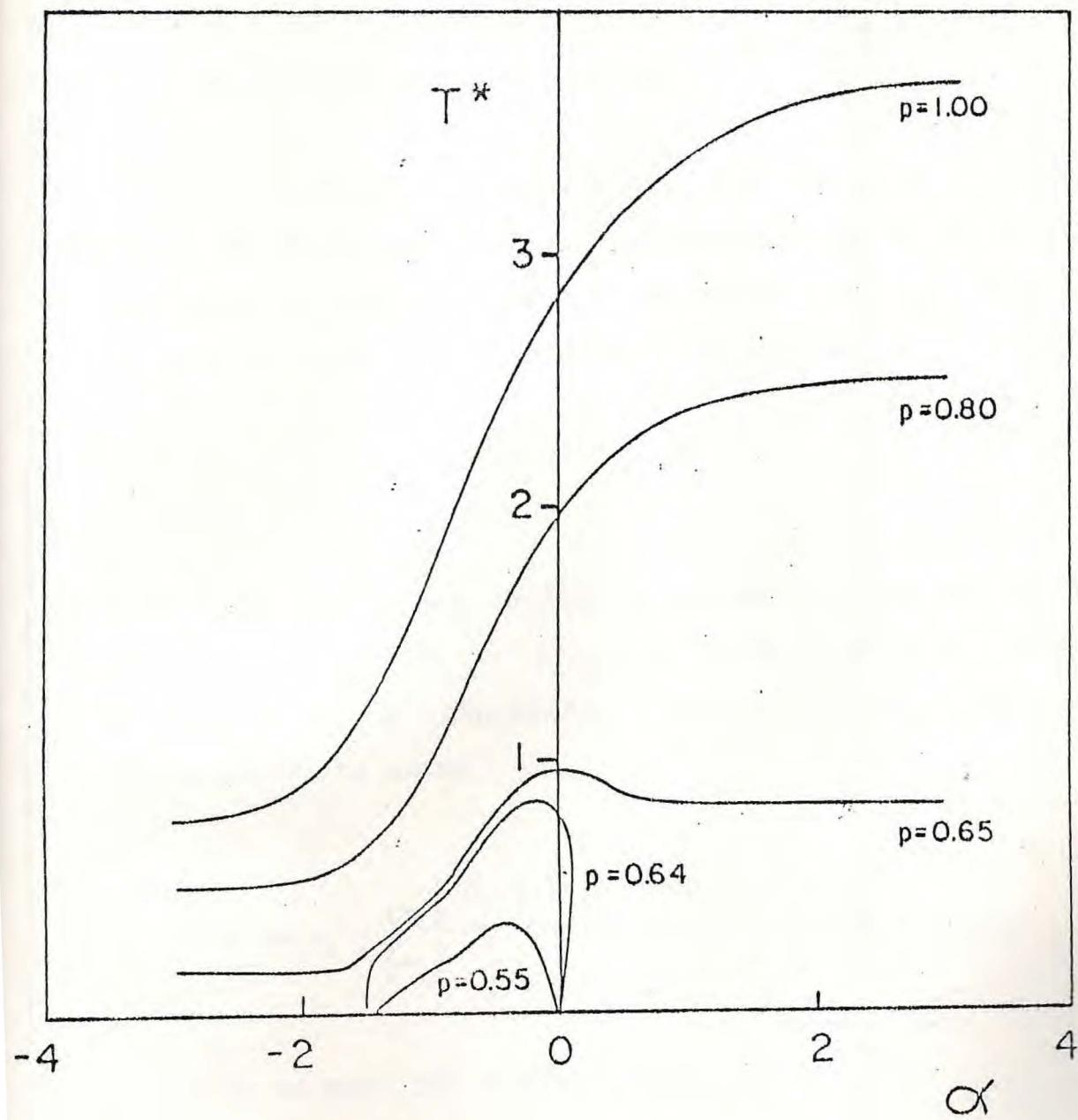


Fig. 3.9 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T_c / J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(J_{jk}) = p\delta(J_{jk} - J) + (1-p)\delta(J_{jk})$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude $5/2$.

3.3 ANISOTROPIA UNIAXIAL ALEATÓRIA

A Hamiltoniana para o modelo de Ising com spins mistos sobre uma rede favo de mel com anisotropia uniaxial aleatória e constante de troca uniforme é obtida a partir da equação (3.1), fazendo-se $J_{jk} = J$ e $\mu = 0$. A Hamiltoniana é dada então por:

$$H = - \sum_{\langle jk \rangle} J \sigma_j \tau_k - \sum_k D_k \tau_k^2 - \sum_k \eta \bar{\sigma}'_k . \quad (3.37)$$

A distribuição a que obedece o parâmetro aleatório D_k é definida pela equação (3.5) e $P(J_{jk})$ é dada por (3.4) para $J_1 = J_2 = J$. Utilizando-se a expressão (3.3) para D_k , reescreve-se a Hamiltoniana na forma

$$H = - \sum_{\langle jk \rangle} J \sigma_j \tau_k - \sum_k \left[\frac{D_1 (1 + \bar{\sigma}'_k)}{2} + \frac{D_2 (1 - \bar{\sigma}'_k)}{2} \right] \tau_k^2 - \sum_k \eta \bar{\sigma}'_k . \quad (3.38)$$

A função de partição é dada, então, por:

$$Z = \sum_{(\sigma, \bar{\sigma}, \tau)} \exp \left\{ \sum_{\langle jk \rangle} \beta J \sigma_j \sigma_k + \sum_k \beta \left[\frac{D_1 (1 + \bar{\sigma}'_k)}{2} + \frac{D_2 (1 - \bar{\sigma}'_k)}{2} \right] \tau_k^2 + \sum_k \beta \eta \bar{\sigma}'_k \right\} . \quad (3.39)$$

Esta função é calculada realizando-se o traço parcial sobre os spins τ e as variáveis $\bar{\sigma}'$, de forma que, o modelo com spins mistos

sobre uma rede favo de mel pode ser mapeado no modelo de Ising com spin 1/2 sobre uma rede triangular. Isto pode ser realizado considerando-se a decimação de um dado spin τ_0 (com vizinhos mais próximos σ_1 , σ_2 e σ_3) e da variável $\bar{\sigma}'_0$. A relação resultante deste procedimento é dada então por

$$\sum_{\tau_0, \sigma'_0} \exp \left\{ \beta J (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tau_0 + \beta \left[\frac{D_1 (1 + \sigma'_0)}{2} + \frac{D_2 (1 - \sigma'_0)}{2} \right] \tau_0^2 + \beta \eta \bar{\sigma}'_0 \right\} = r' \exp \left\{ \beta J'' (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right\} . \quad (3.40)$$

Da relação acima, obtém-se

$$r' = \left[W_1^3 \cdot W_2 \right]^{1/4} \quad (3.41)$$

$$\beta J'' = \frac{1}{4} k_B T \ln \left[\frac{W_2}{W_1} \right] , \quad (3.42)$$

onde

$$W_1 = \bar{z} G(J, D_1) + G(J, D_2)$$

$$W_2 = \bar{z} G(3J, D_1) + G(3J, D_2) \quad (3.43)$$

com $G(x, y)$ definida pela equação (3.15) e $\bar{z} = e^{2\beta\eta}$.

A função de partição é dada agora por

$$Z = r'^N \sum_{\{\sigma\}} \exp\{-\beta H''\} , \quad (3.44)$$

onde N é o número de sítios da sub-rede Λ_A (ou Λ_B) e H'' é a Hamiltoniana do modelo de Ising com spins $1/2$ sobre uma rede triangular com uma constante de troca efetiva J'' . As propriedades termodinâmicas podem, agora, ser determinadas, como no caso anterior, a partir do modelo sobre uma rede triangular (Baxter, 1982).

O pseudo-potencial químico η é determinado impondo-se a condição

$$p = \frac{1 + \langle \bar{\sigma}'_0 \rangle}{2} . \quad (3.45)$$

onde $\langle \bar{\sigma}'_0 \rangle$ é calculado realizando-se também a decimação do spin τ_0 e da variável $\bar{\sigma}'_0$. Tem-se:

$$\sum_{\bar{\sigma}'_0, \tau_0} \bar{\sigma}'_0 \exp \left\{ \beta J(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tau_0 + \beta \left[\frac{D_1(1+\bar{\sigma}'_0)}{2} + \frac{D_2(1-\bar{\sigma}'_0)}{2} \right] \tau_0^2 + \beta \eta \bar{\sigma}'_0 \right\} \equiv \\ r' \exp \left\{ \beta J'' (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right\} \cdot \left[v_1 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + v_2 \right], \quad (3.46)$$

com v_1 e v_2 dados por

$$v_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{Y_2}{W_2} - \frac{Y_1}{W_1} \right] , \quad v_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{Y_2}{W_2} + \frac{3Y_1}{W_1} \right]. \quad (3.47)$$

onde

$$Y_1 = \bar{z} G(J, D_1) - G(J, D_2)$$

$$Y_2 = \bar{z} G(3J, D_1) - G(3J, D_2) \quad (3.48)$$

e W_1 e W_2 são definidos pela equação (3.43).

Daí, vem que $\langle \sigma'_0 \rangle$ é dado por

$$\langle \sigma'_0 \rangle = 3 v_1 \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr} + v_2, \quad (3.49)$$

onde $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr}$ é a função de correlação entre os dois vizinhos mais próximos para o modelo de Ising efetivo sobre a rede triangular.

A equação (3.42) garante que J'' é sempre maior que zero. Como no caso anterior, a temperatura crítica é determinada, usando-se os valores críticos de $\beta J''$, $\exp(4\beta J_c'')=3$, e de $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr}$, $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle_{tr}=2/3$ (Stephenson, 1964). Assim, substituindo-se (3.43), (3.47) e (3.48), $\exp(4\beta J_c)=3$ e $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle=2/3$ nas equações (3.42) e (3.45), obtém-se

$$\bar{z} [G(3J, D_1) - 3G(J, D_1)] - [G(3J, D_2) - 3G(J, D_2)] = 0 \quad (3.50)$$

e

$$\bar{z} [G(3J, D_1) + (5-8p)G(J, D_1)] - [G(3J, D_2) + (8p-3)G(J, D_2)] = 0 \quad (3.51)$$

onde $\bar{z}=e^{2\beta\eta}$. Elimina-se \bar{z} nas equações acima e determina-se a temperatura crítica através da equação

$$3G(J, D_1)G(J, D_2) + (4p-1)G(J, D_1)G(3J, D_2) + (3-4p)G(J, D_2)G(3J, D_1) - G(3J, D_1)G(3J, D_2) = 0 \quad (3.52)$$

Consideram-se dois casos distintos para a distribuição $p(D_k)$. No primeiro caso, $D_1=D$ e $D_2=0$, a temperatura crítica é dada por:

$$3G(J, D)G(J, 0) + (4p-1)G(J, D)G(3J, 0) + (3-4p)G(J, 0)G(3J, D) - G(3J, D)G(3J, 0) = 0 \quad (3.53)$$

No segundo caso, $D_1=D$ e $D_2=-D$, a temperatura crítica é dada por:

$$3G(J, D)G(J, -D) + (4p-1)G(J, D)G(3J, -D) + (3-4p)G(J, -D)G(3J, D) - G(3J, D)G(3J, -D) = 0 \quad (3.54)$$

CASO 1. - $D_1=D$ e $D_2=0$.

Nas Figs. 3.10 - 3.13, a temperatura crítica é dada como uma função de p para alguns valores de α ($\alpha=D/J$) e para spins τ com magnitudes 1, 2, 3/2 e 5/2, respectivamente.

Nas Figs. 3.10 e 3.11, onde os spins τ possuem magnitudes 1 e 2, respectivamente, verifica-se que há dois valores críticos para a concentração p , $p_{1c}=0.5$ (para $\alpha < -3.0$) e $p_{2c}=0.75$ (para $\alpha = -3.0$). Para valores de p e α compreendidos nos intervalos $0.50 < p < 0.75$ e $-3.0 < \alpha < \alpha^*$, respectivamente, o sistema apresenta dois valores para a temperatura crítica. Este comportamento caracteriza

o fenômeno de reentrância. O valor de α^* pode ser determinado reescrevendo-se a equação (3.53) sob a forma $F(\alpha, T_c) = 0$ e impondo-se a condição $\frac{\partial F}{\partial T_c} = 0$.

Nas Figs. 3.12 e 3.13, os spins τ possuem magnitudes $3/2$ e $5/2$, respectivamente. Não há nenhum valor crítico para p , como também não há fenômeno de reentrância. Para valores positivos de α , a temperatura crítica aumenta com o valor de p , e para valores negativos, decresce com p .

As Figs. 3.14 - 3.17 mostram a temperatura crítica em função do parâmetro α para spins τ com magnitudes 1 , 2 , $3/2$ e $5/2$, respectivamente.

Nas Figs. 3.14 e 3.15, spins τ com magnitudes 1 e 2 , para alguns valores de p superiores a 0.5 , verifica-se o fenômeno de reentrância, que decorre da competição entre a constante de troca e a anisotropia uniaxial. Para $p > 0.5$, o valor crítico para α é $\alpha_c = -3.0$, abaixo do qual, o sistema não apresenta estado ordenado. Para $p < 0.5$, o sistema apresenta sempre um estado ordenado, independente do valor de α .

Nas Figs. 3.16 e 3.17, onde os spins τ possuem magnitudes $3/2$ e $5/2$, respectivamente, observa-se que a temperatura crítica cresce com o valor de α . Os valores assintóticos das curvas, para os vários valores de p , são obtidos fazendo-se $\alpha \rightarrow \pm \infty$ e são dados pelas equações:

$$G(J, 0) [3\cosh(\beta J/2) + (3-4p)\cosh(3\beta J/2)] +$$

$$G(3J, 0) [(4p-1)\cosh(\beta J/2) - \cosh(3\beta J/2)] = 0, \text{ para } \alpha \rightarrow \infty, \quad (3.55)$$

$$G(J, 0) [3\cosh(\beta J \tau) + (3-4p)\cosh(3\beta \tau)] + \\ G(3J, 0) [(4p-1)\cosh(\beta J \tau) - \cosh(3\beta J \tau)] = 0, \text{ para } \alpha \rightarrow +\infty, \quad (3.56)$$

Estes valores assintóticos mostram que, a partir de um certo valor de α , o aumento da anisotropia não contribui mais para aumentar a temperatura crítica.

Os valores de p_c foram determinados analiticamente.

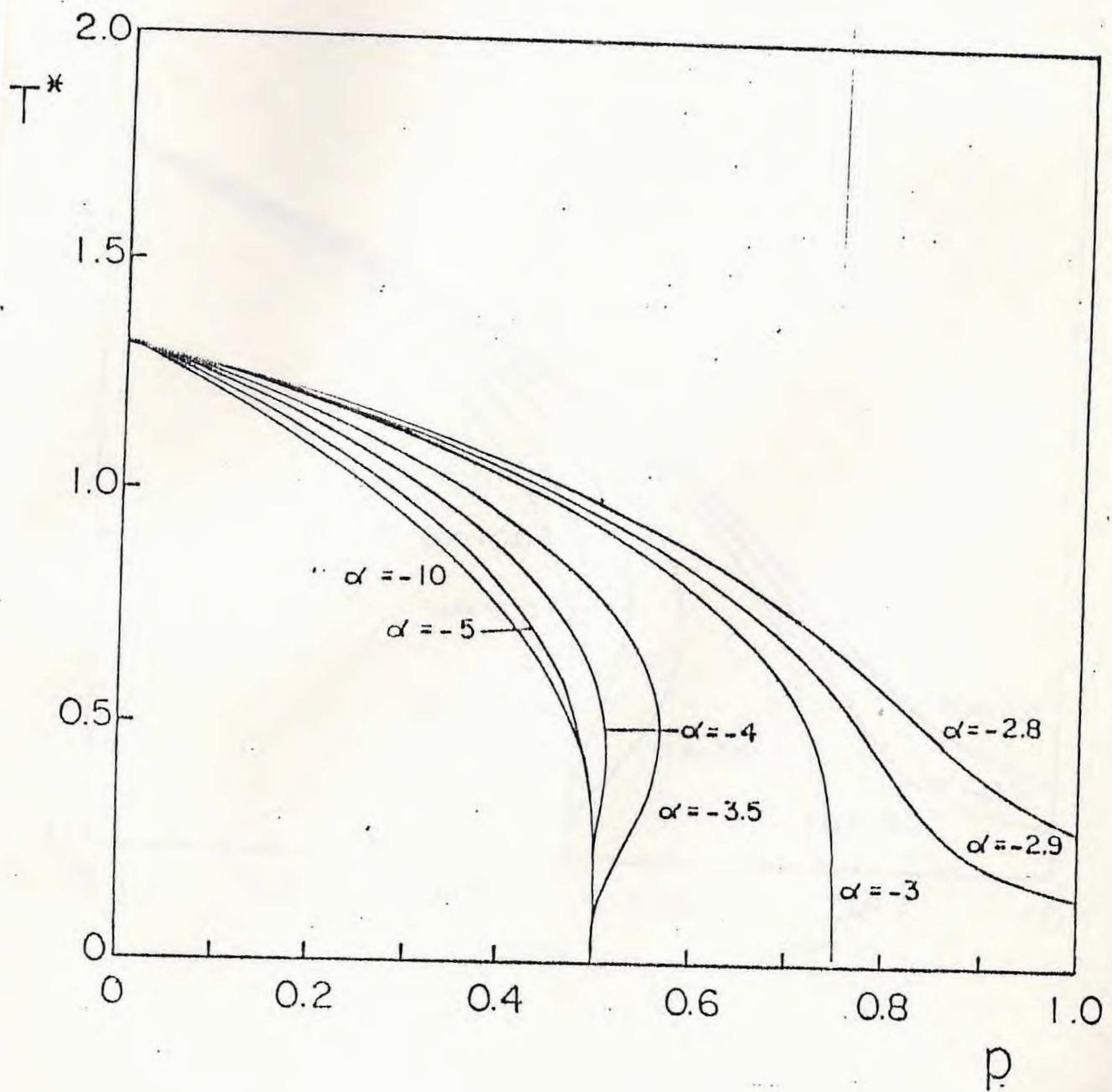


Fig. 3.10 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ e vários α para spin τ com magnitude 1.

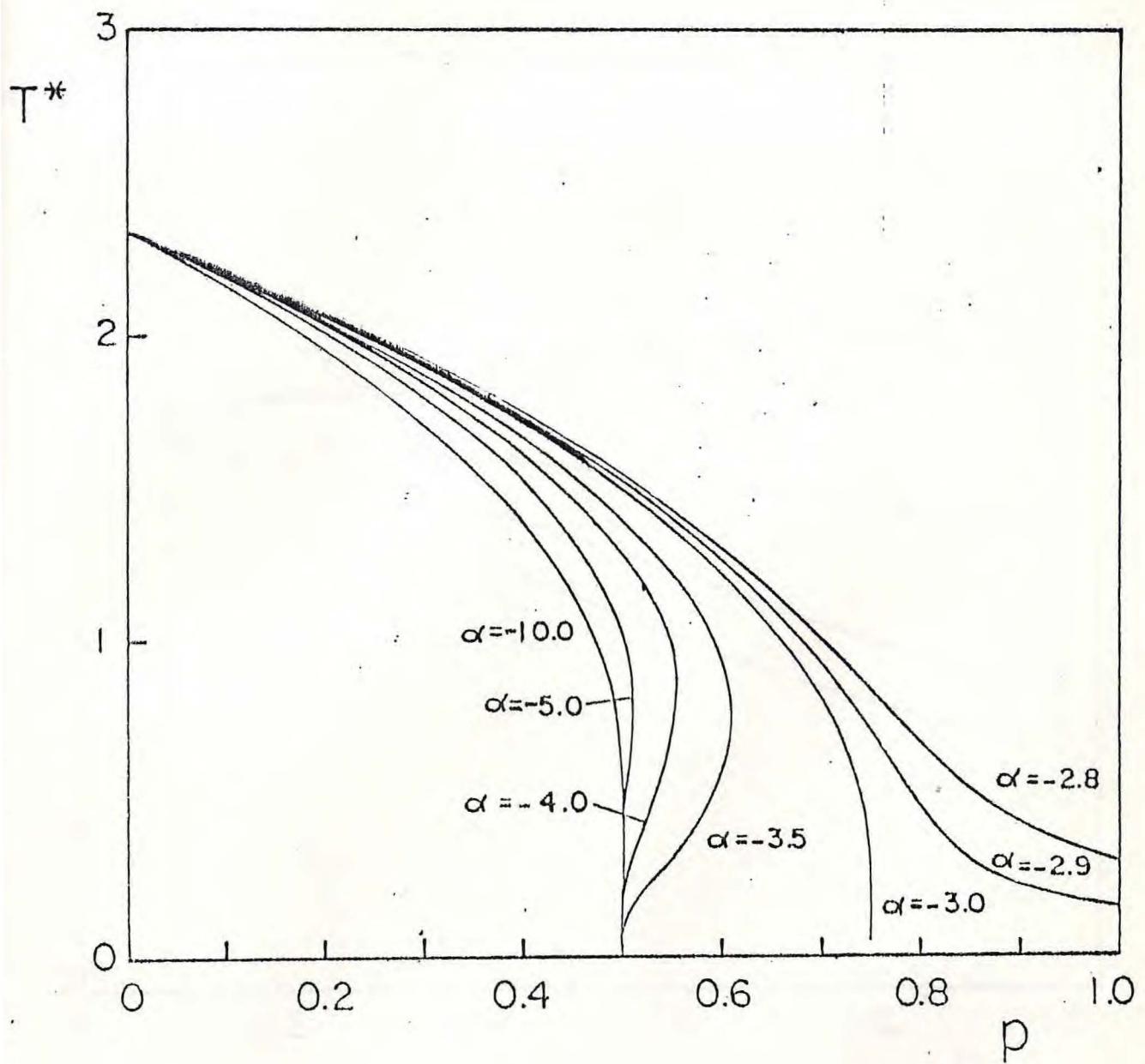


Fig. 3.11 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ e vários α para spin τ com magnitude 2.

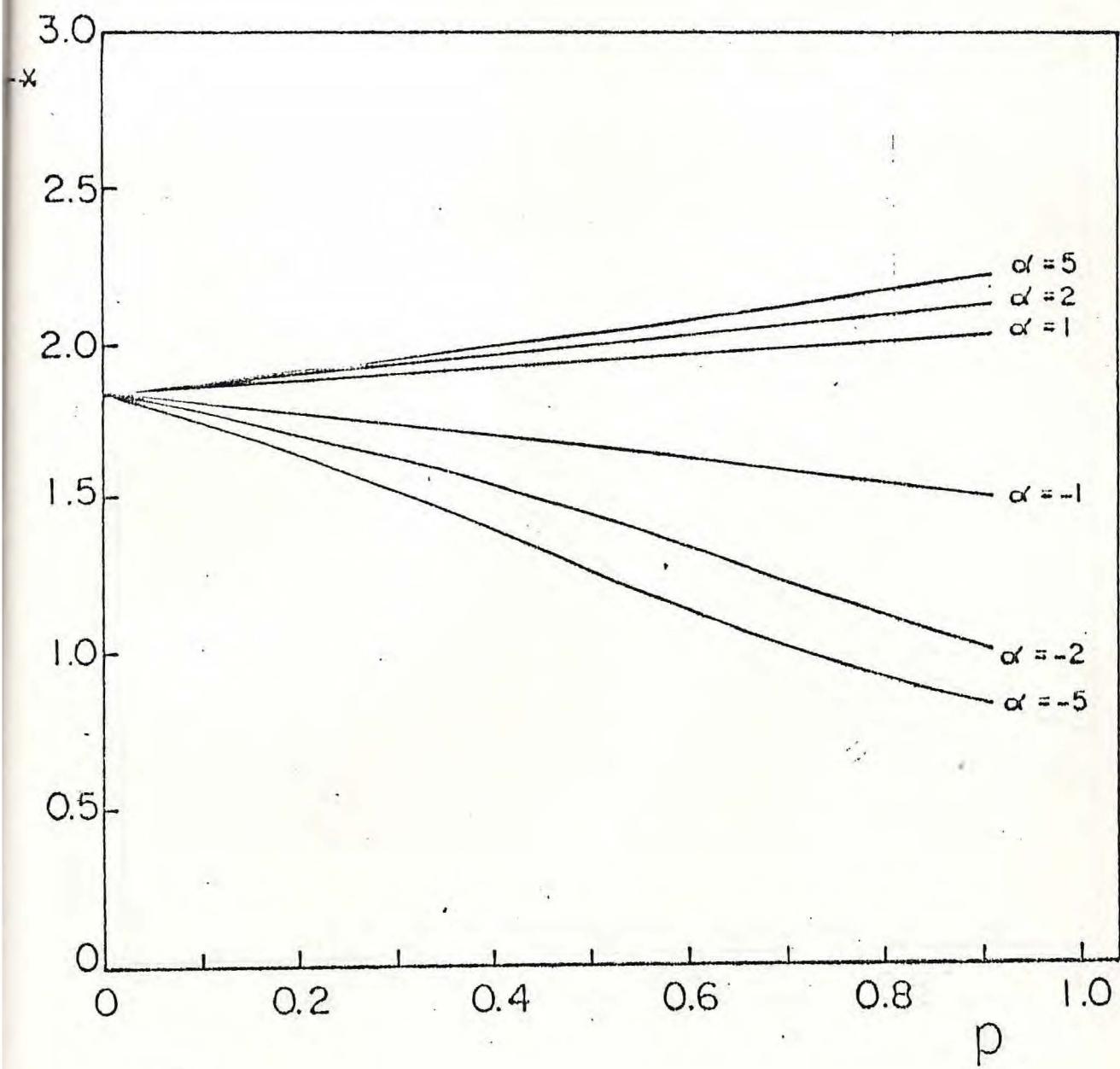


Fig. 3.12 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ e vários α para spin τ com magnitude 3/2.

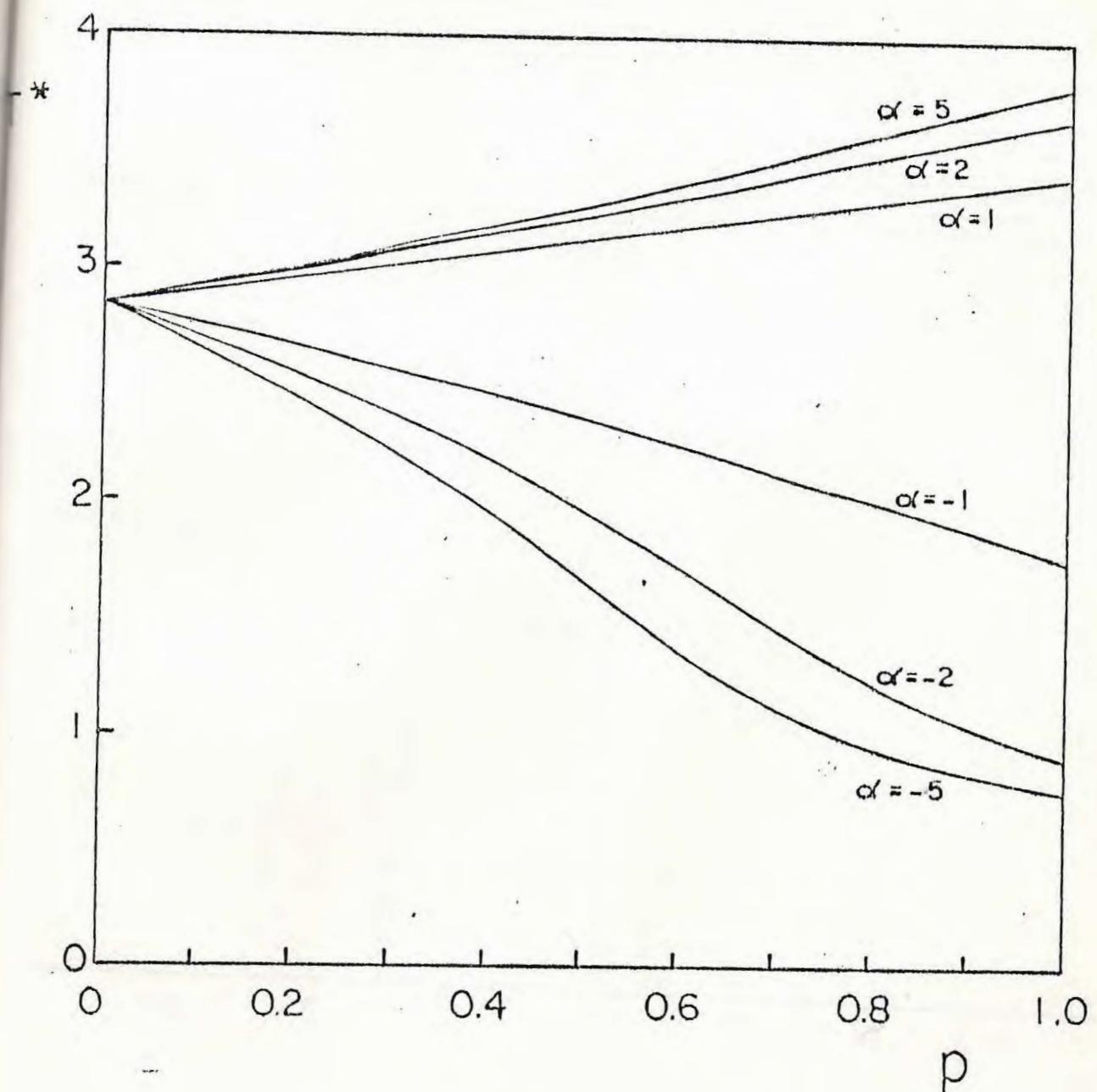


Fig. 3.13 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ e vários α para spin τ com magnitude 5/2.

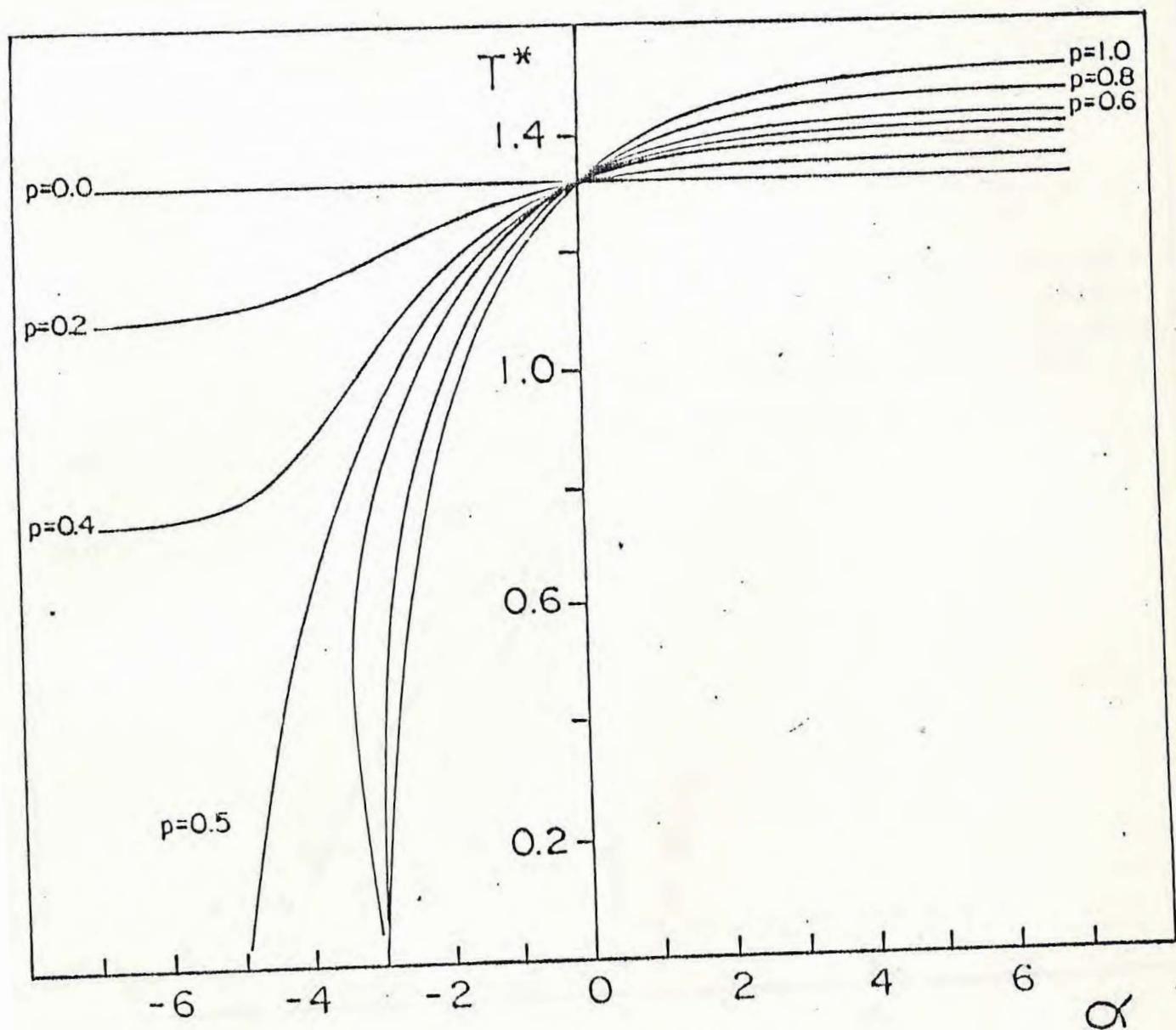


Fig. 3.14 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude 1.

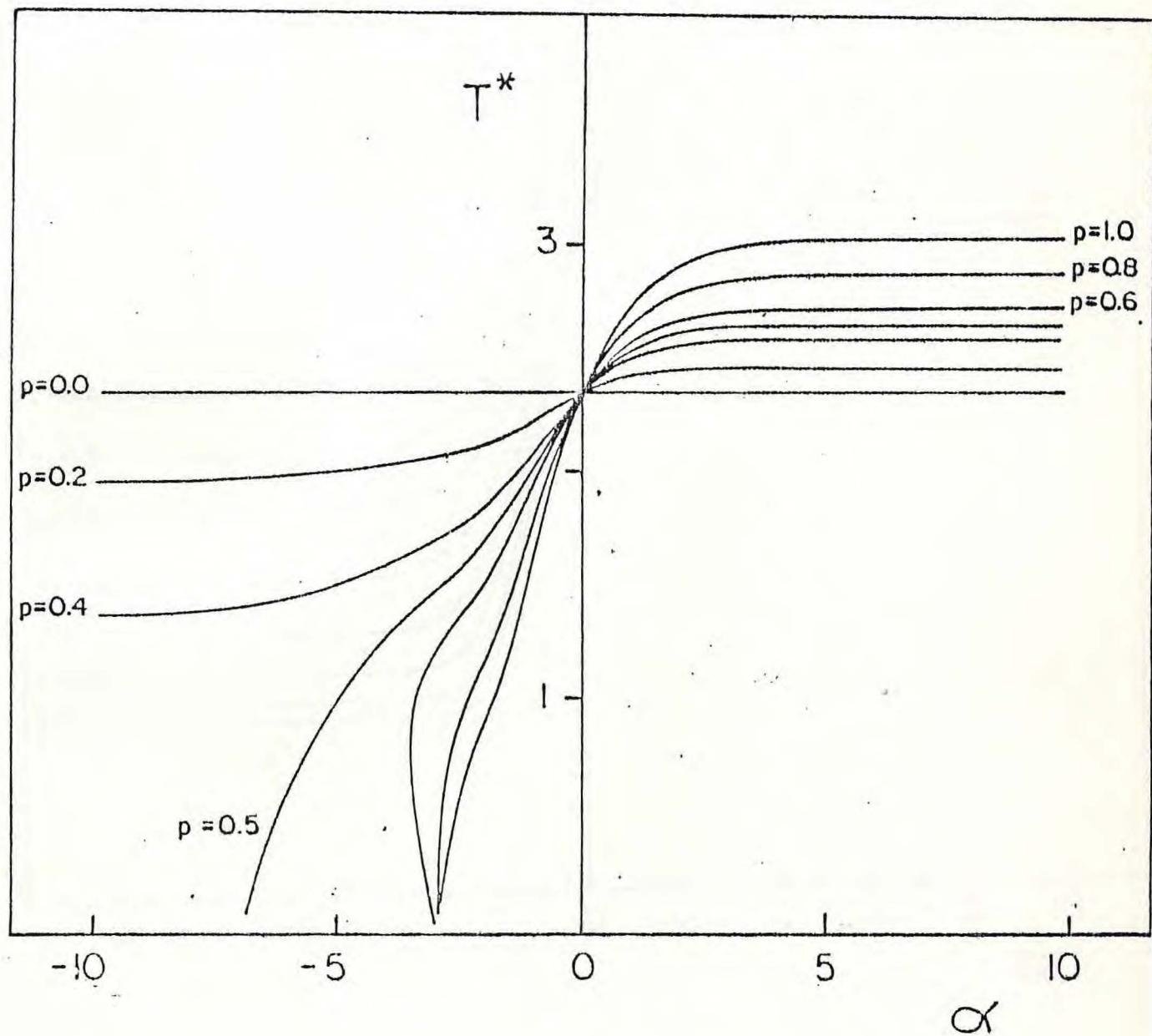


Fig. 3.15 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude 2.

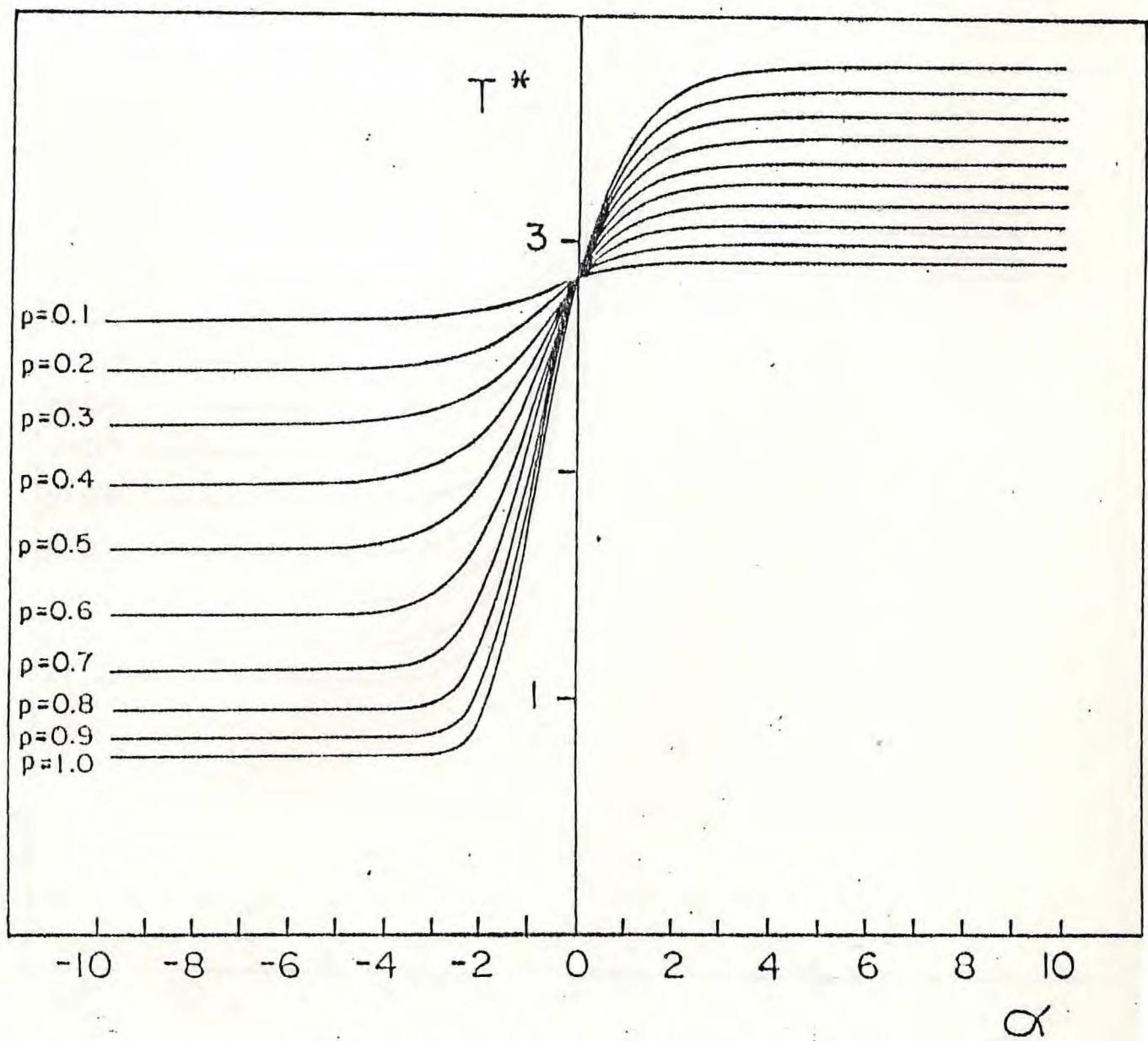


Fig. 3.16 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude $3/2$.

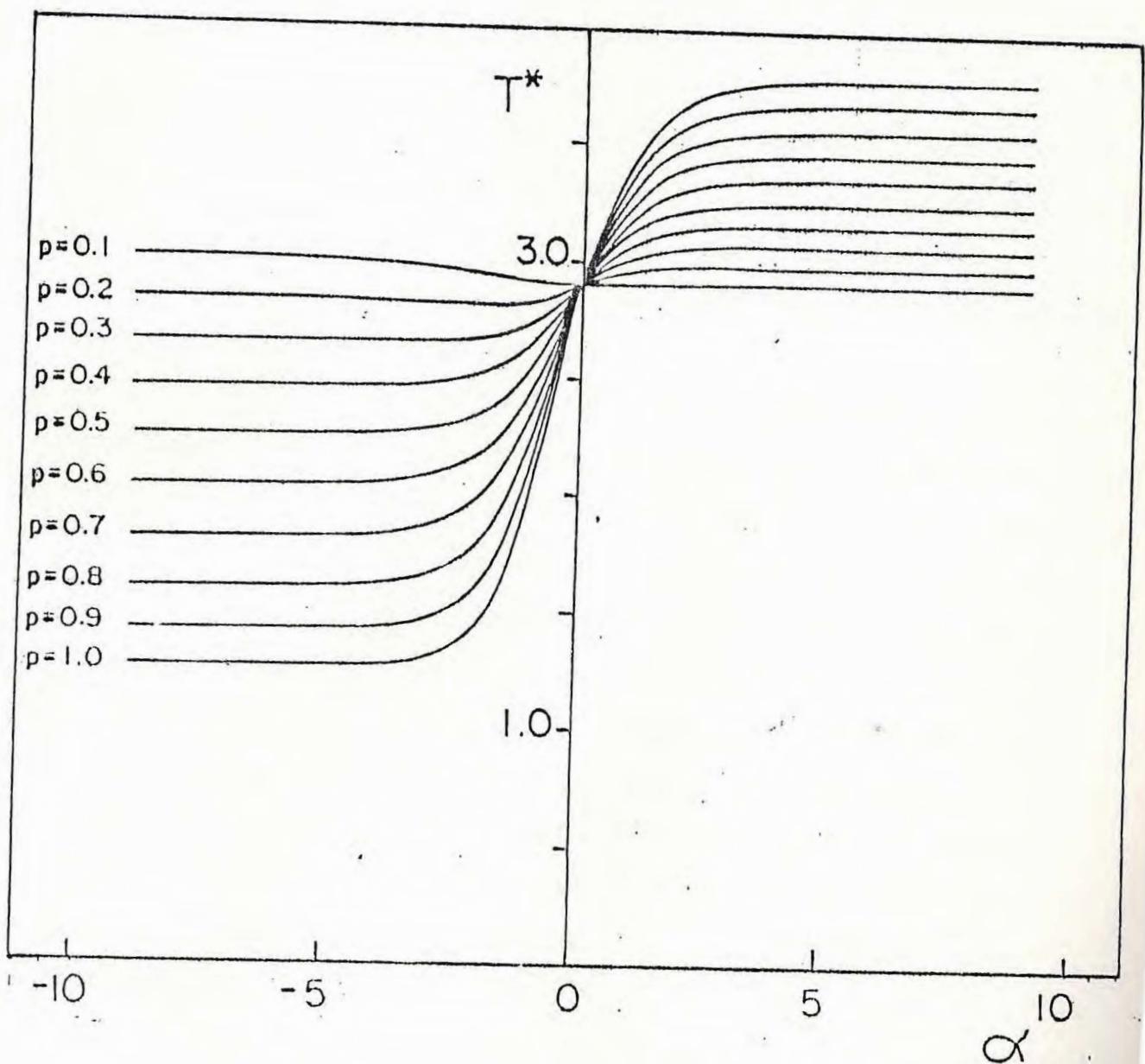


Fig. 3.17 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude $5/2$.

CASO 2. - $D_1 = D$ e $D_2 = -D$.

Nas Figs. 3.18 -3.21, a temperatura crítica é mostrada como uma função da probabilidade p para os spins τ com magnitudes 1, 2, $3/2$ e $5/2$, respectivamente. Nas Figs. 3.22 - 3.25, a temperatura crítica é mostrada agora como uma função do parâmetro α para os mesmos valores dos spins τ .

Nas Figs. 3.18 e 3.19, spins τ com magnitudes 1 e 2, respectivamente, os valores críticos de p são os mesmos do CASO 1 ($D_1=D$ e $D_2=0$). Isto deve-se ao fato de que eles são características universais do sistema. Nas Figs. 3.20 e 3.21, spins τ com magnitudes $3/2$ e $5/2$, respectivamente, não há valores críticos de p .

Nas Figs. 3.22 e 3.23 (spins τ com magnitudes 1 e 2), a temperatura crítica é dada como uma função do parâmetro α . Da mesma forma que no CASO 1, há a presença do fenômeno de reentrância para $-3.0 < \alpha < \alpha^*$ (onde α^* é obtido de forma similar ao CASO 1) e valores críticos de α iguais a ± 5.0 para $p=0.5$ e ± 3.0 para $p \geq 0.5$.

Nas Figs. 3.24 e 3.25, a temperatura crítica é dada como uma função do parâmetro α para spins τ com magnitudes $3/2$ e $5/2$. Não há valores críticos para p , nem a presença do efeito de reentrância, como no CASO 1. Os valores assintóticos para T_c são obtidos fazendo-se $\alpha \rightarrow \pm \infty$. Estes valores são obtidos a partir das equações:

$$\cosh(\beta J\tau) [3\cosh(\beta J/2) + (3-4p)\cosh(3\beta J/2)] + \cosh(3\beta J\tau) [(4p-1)\cosh(\beta J/2) - \cosh(3\beta J/2)] = 0, \text{ para } \alpha \rightarrow -\infty \quad (3.57)$$

$$\cosh(\beta J\tau) [3\cosh(\beta J/2) + (4p-1)\cosh(3\beta J/2)] + \cosh(3\beta J\tau) [(3-4p)\cosh(\beta J/2) - \cosh(3\beta J/2)] = 0, \text{ para } \alpha \rightarrow +\infty \quad (3.58)$$

A característica nova, em relação ao CASO 1, é a propriedade de simetria $\alpha \leftrightarrow -\alpha$ e $p \leftrightarrow 1-p$, constatada nas Figs. 3.18 - 3.25, o que é uma consequência da escolha dos parâmetros.

Em ambos os casos, para $p=1.0$, são reproduzidos os resultados obtidos por Gonçalves (1985) para o modelo homogêneo.

Na Fig. 3.26, é mostrada a temperatura crítica do para uma distribuição $p(D_k) = p\delta(D-\Delta D) + (1-p)\delta(D+\Delta D)$ em função do parâmetro d ($d \equiv \Delta D/D$), considerando-se $p=1/2$. Kaneyoshi (1988a) estudou o modelo com spins mistos sobre uma rede favo de mel, considerando esta distribuição temperada. Ele observou a presença de fenômeno de reentrância, o que não foi observado aqui para a distribuição recozida. A temperatura crítica, mostrada na Fig. 3.26, decresce com o valor o valor do parâmetro α ($\alpha \equiv D/J$). Nos resultados obtidos por Kaneyoshi isto ocorre apenas para valores de $\alpha > -1.25$.

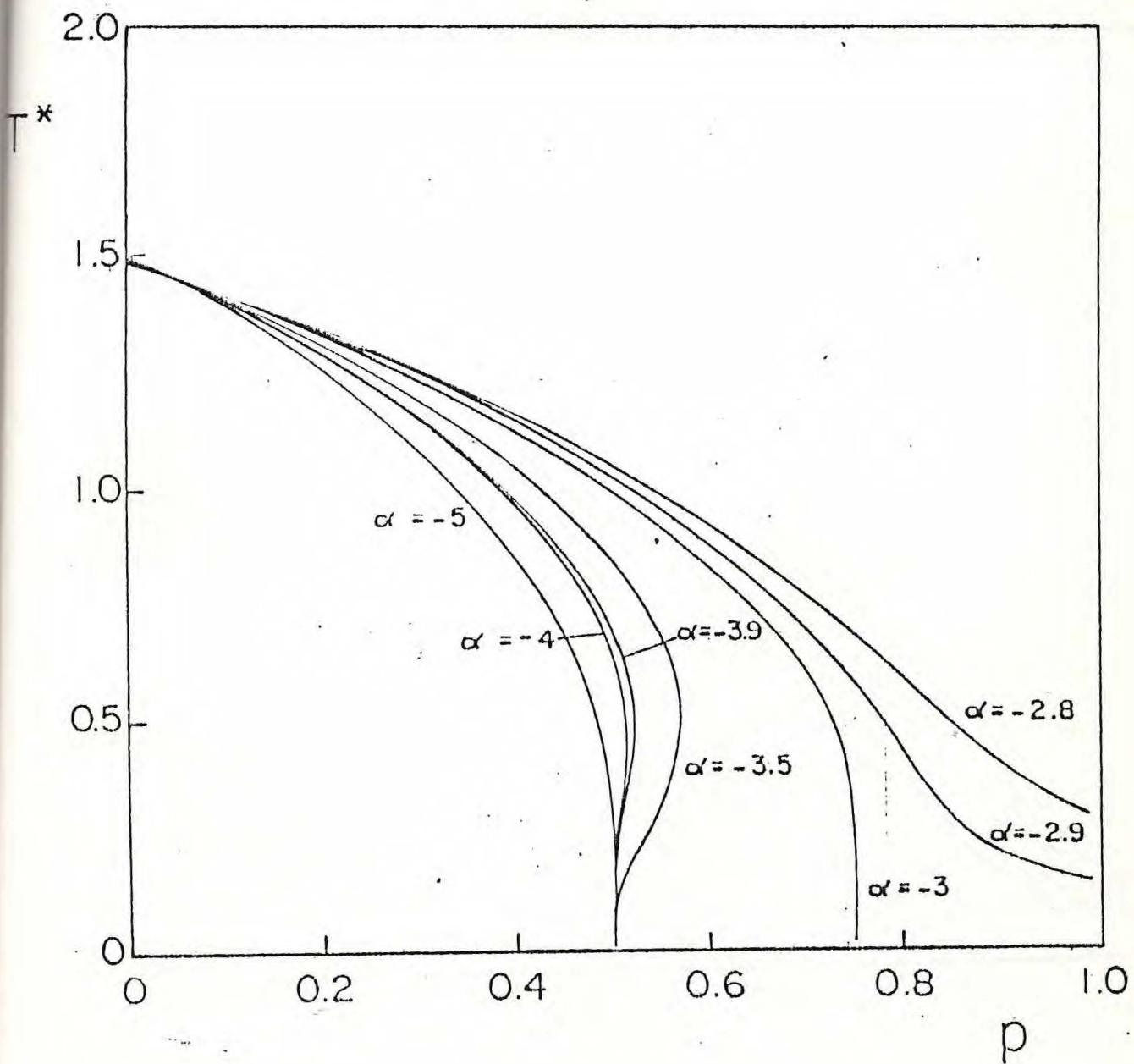


Fig. 3.18 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ e vários α para spin τ com magnitude 1.

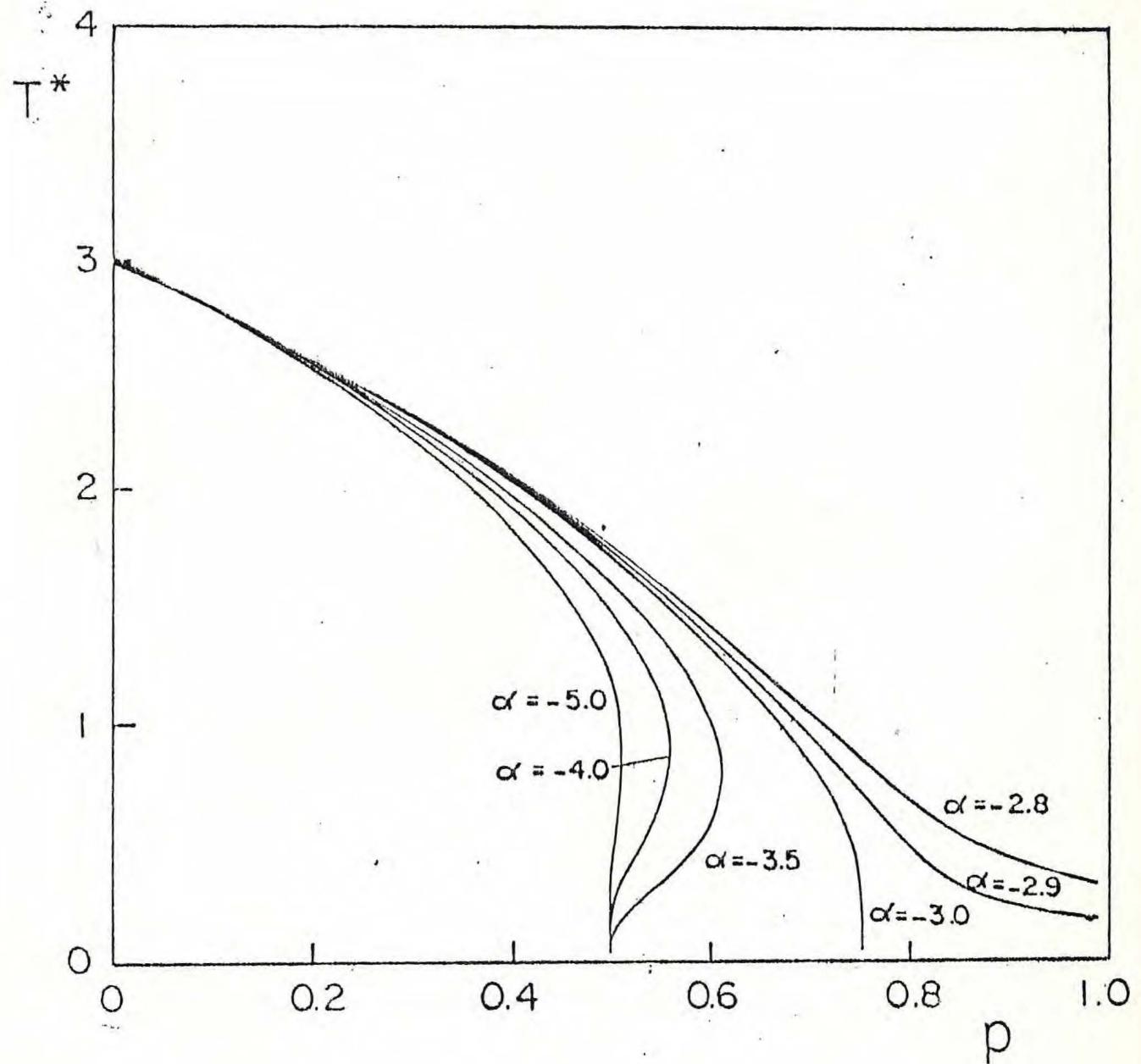


Fig. 3.19 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ e vários α para spin τ com magnitude 2.

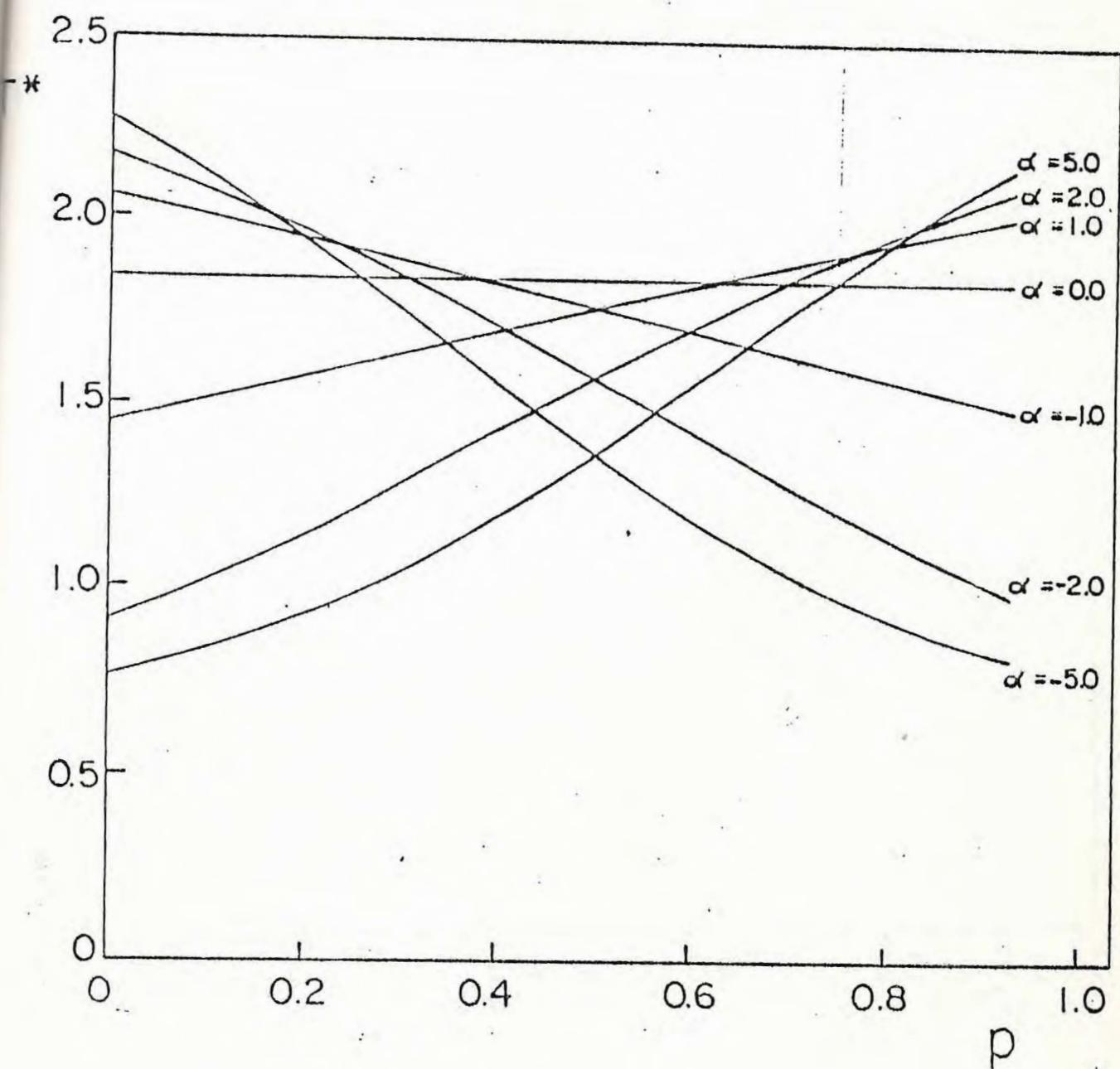


Fig. 3.20 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $\delta(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ e vários α para spin τ com magnitude $3/2$.

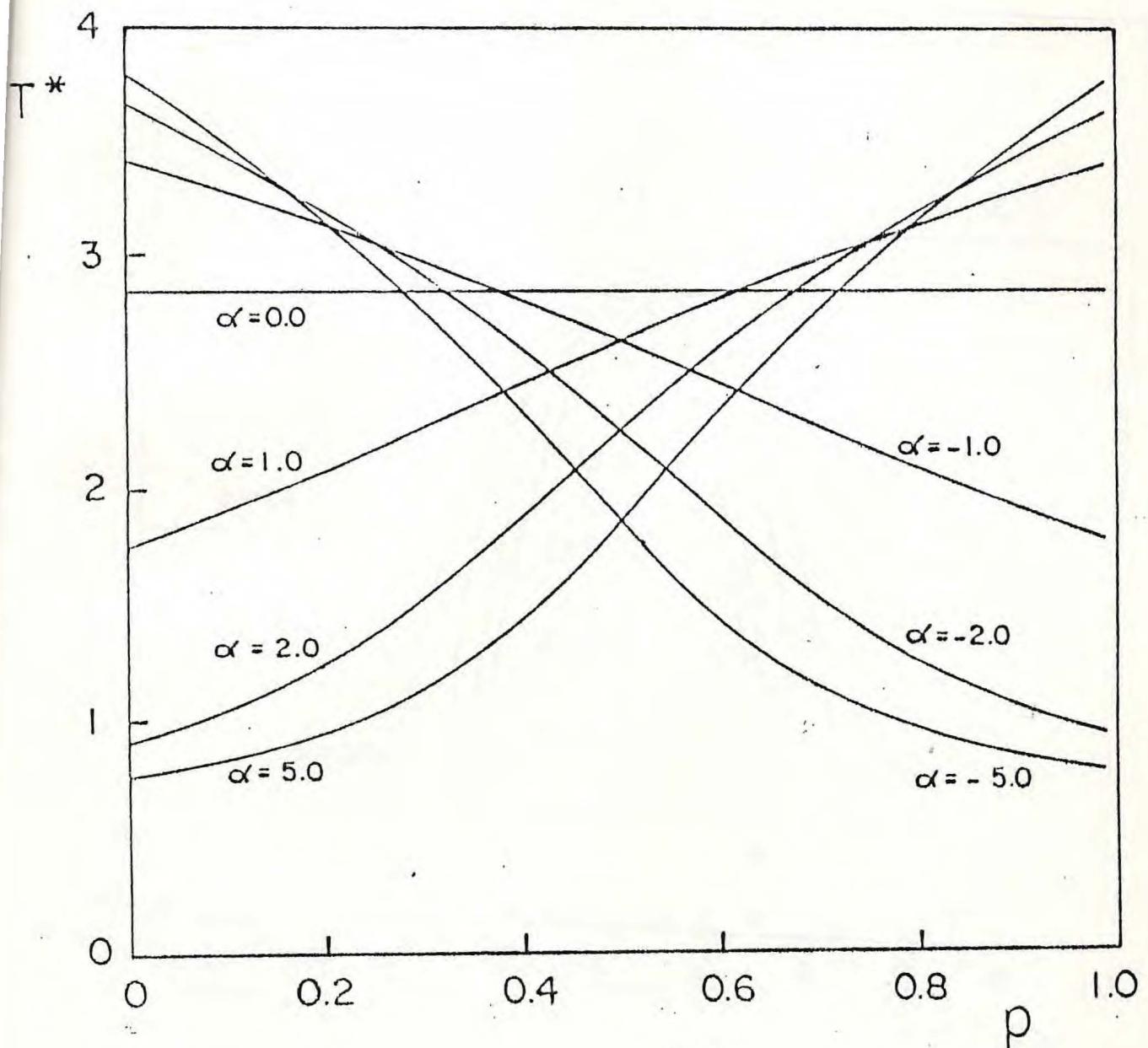


Fig. 3.21 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T/J$) como uma função de p para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ e vários α para spin τ com magnitude 5/2.

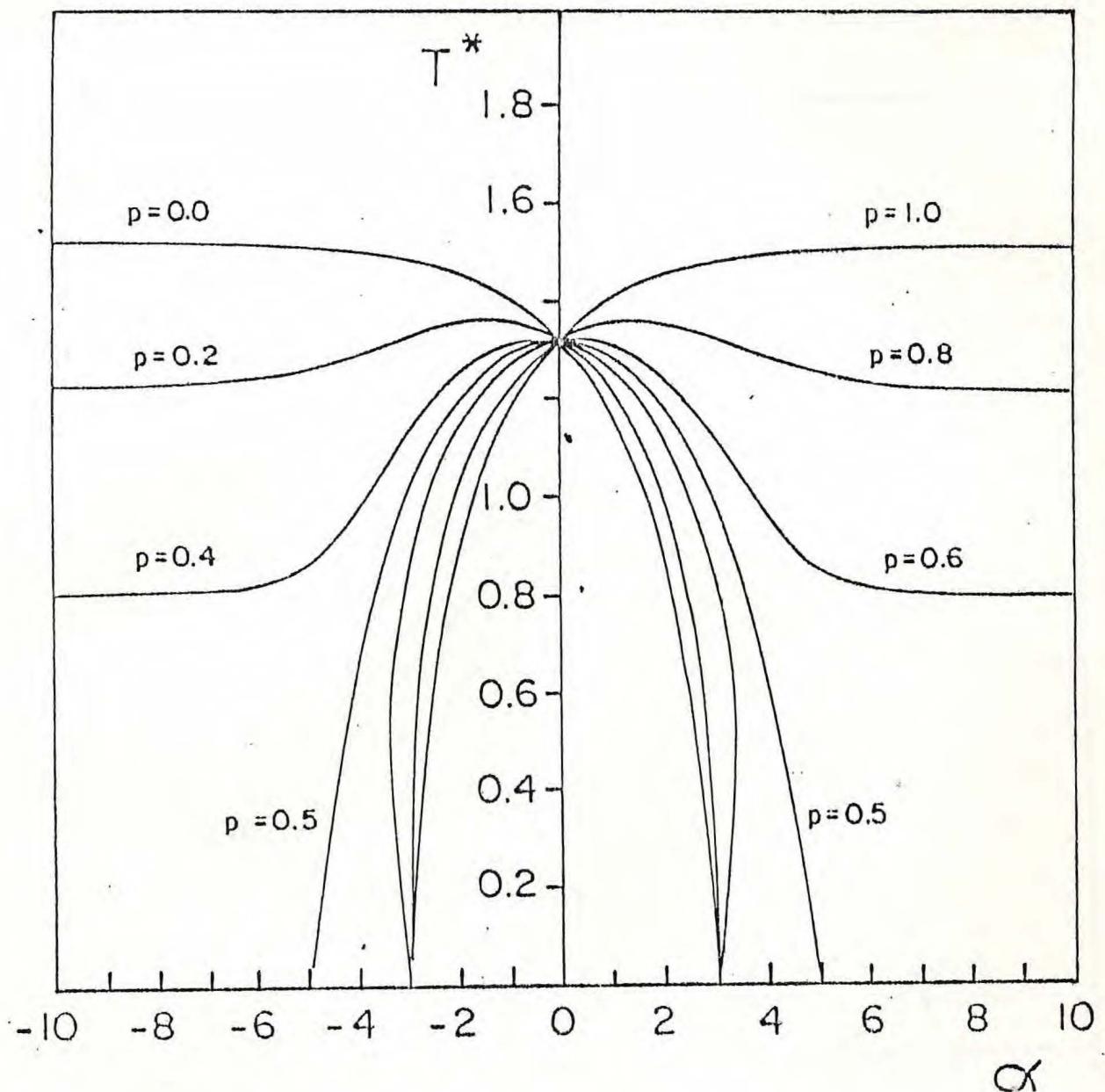


Fig. 3.22 - Temperatura de transição T^* ($T^* = k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude 1.

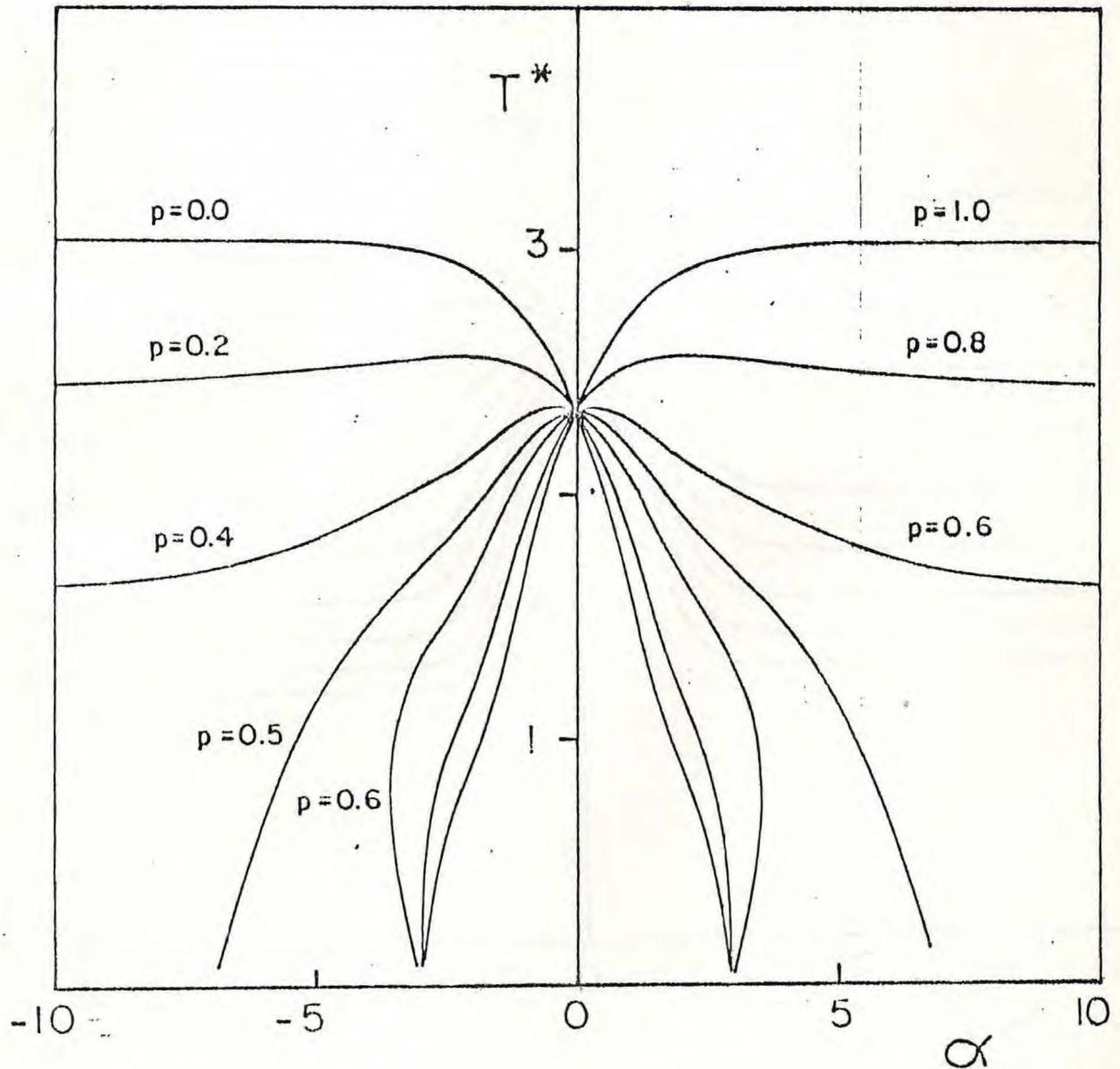


Fig. 3.23 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude 2.

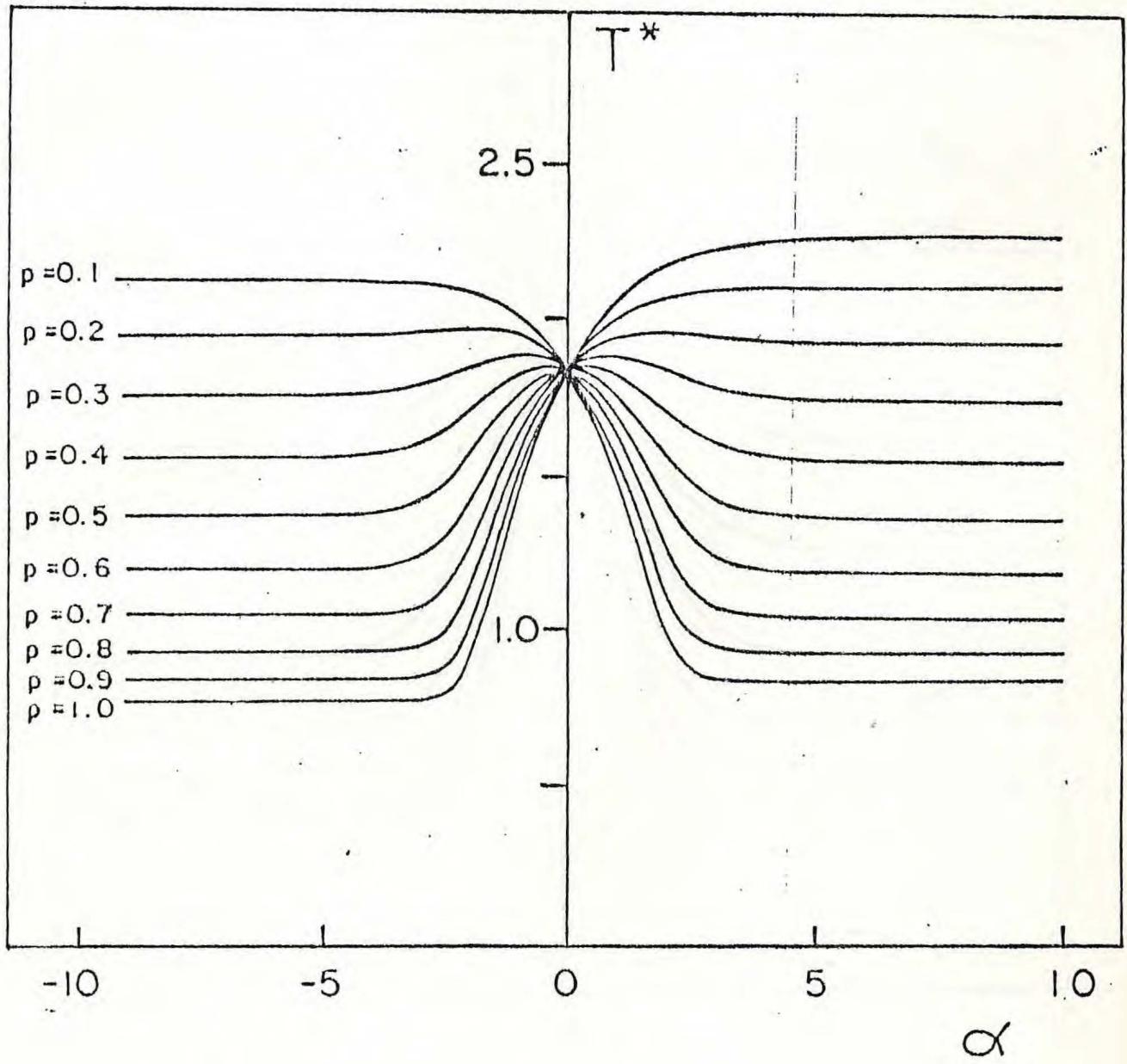


Fig. 3.24 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $p(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude $3/2$.

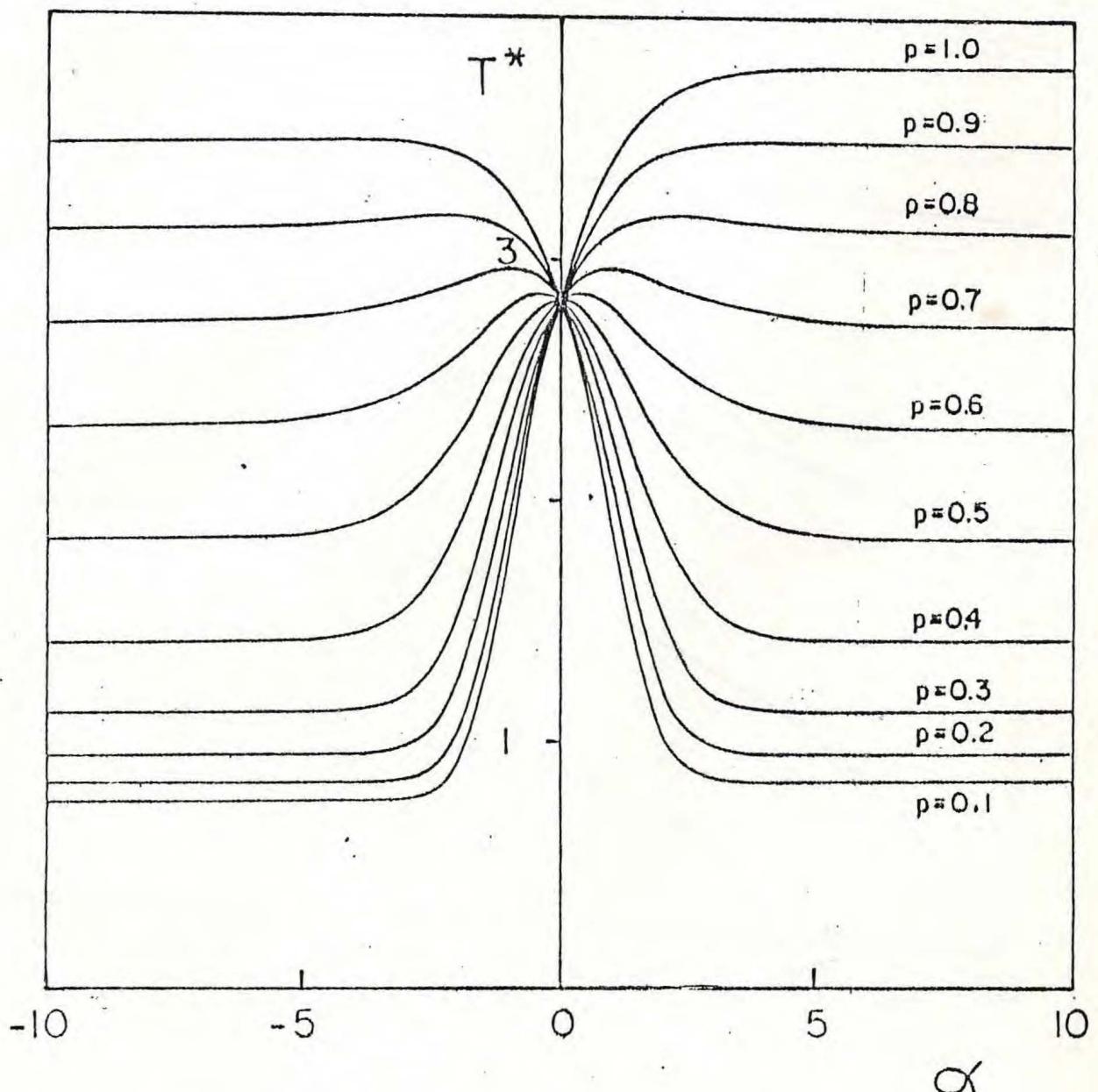


Fig. 3.25 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T/J$) como uma função de α ($\alpha \equiv D/J$) para a distribuição $P(D_k) = p\delta(D_k - D) + (1-p)\delta(D_k + D)$ para vários valores de p e para spin τ com magnitude 5/2.

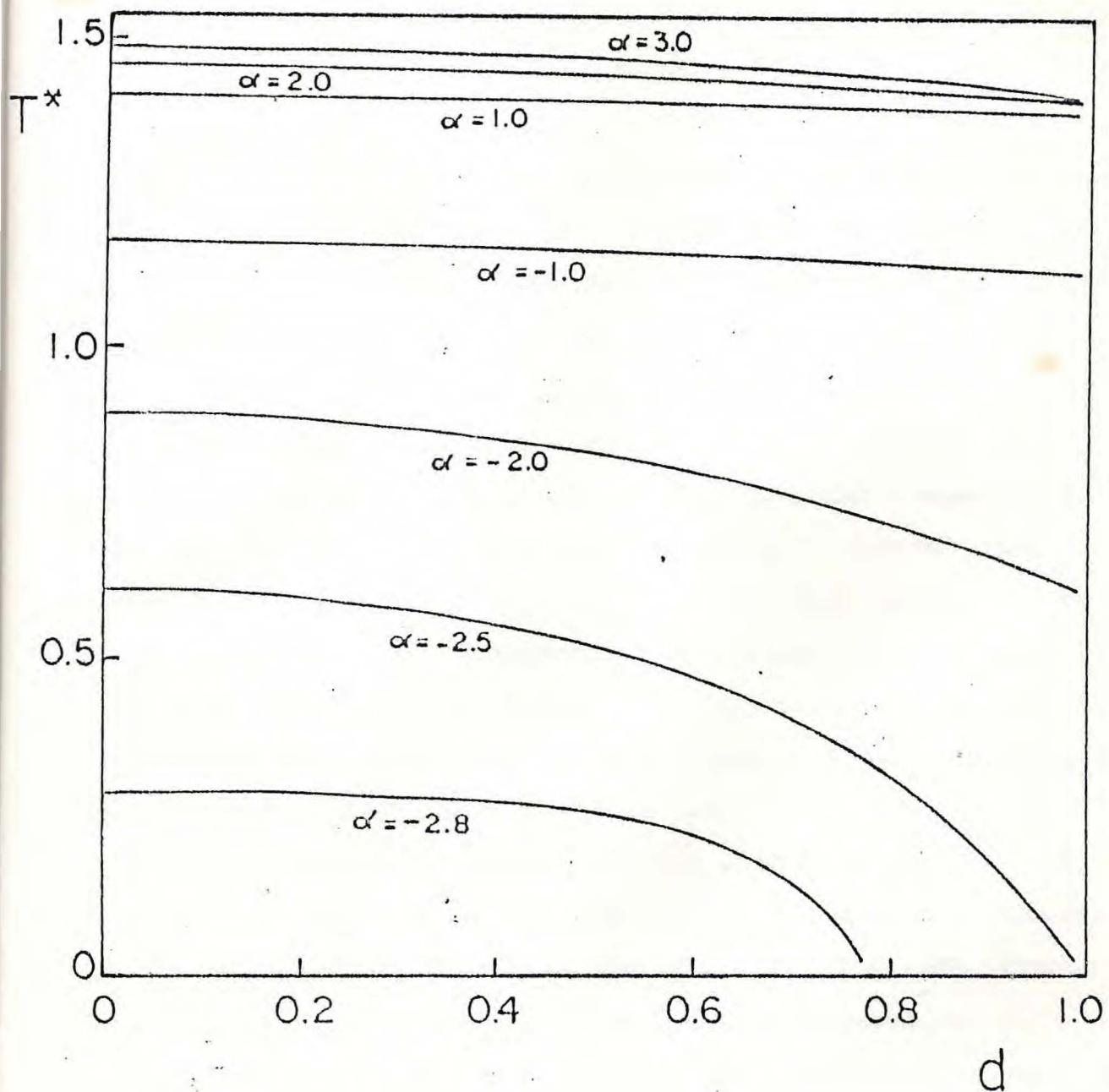


Fig. 3.26 - Temperatura de transição T^* ($T^* \equiv k_B T_c / J$) como uma função de d ($d \equiv \Delta D / D$) para a distribuição $p(D_k) = (1/2) \delta(D_k - D - \Delta D) + (1/2) \delta(D_k - D + \Delta D)$ para vários valores de α e spin τ com magnitude 1.

CONCLUSÕES

O modelo de Ising ferromagnético unidimensional em um campo aleatório foi estudado considerando-se a distribuição binária recozida $p(h_k) = p\delta(h_k - h) + (1-p)\delta(h_k + h)$. A magnetização foi obtida de forma exata, como função da probabilidade p e da temperatura, através do mapeamento do modelo em campo aleatório no modelo de Ising com campo efetivo h' . Verificou-se que, para $p=0.5$, o campo efetivo é sempre nulo em qualquer temperatura, não havendo, portanto, magnetização induzida. O sistema se ordena apenas para este valor de p , em $T=0$. Para $p \neq 0.5$, há sempre magnetização induzida, independente da relação entre o campo h e a constante de troca J ($\alpha \equiv h/J$), e o sistema não apresenta comportamento crítico. Para valores grandes de α , a magnetização induzida tende para o valor $2p-1$ em $T=0$.

O modelo antiferromagnético unidimensional diluído foi estudado considerando-se diluição por ligações e por sítios. Em ambos os casos, obteve-se a magnetização como uma função da concentração p , do parâmetro α ($\alpha \equiv h/J$) e da temperatura.

No modelo diluído por ligações, verificou-se que, para concentrações diferentes de 1 e para qualquer valor do campo uniforme, há sempre magnetização induzida em qualquer temperatura. Em $T=0$, a cadeia antiferromagnética se divide em dois agregados, um contendo Np spins que interagem entre si, e o outro com $N(1-p)$ spins livres, onde N é o número total de spins da cadeia.

Para valores do campo menores que $h_c = 2J$, no primeiro agregado há $Np/2$ spins apontando na direção do campo e $Np/2$ apontando na direção contrária. A magnetização induzida é, portanto, dada por $1-p$. Para $h > h_c$, todos os Np spins desse agregado apontam na direção do campo e a magnetização induzida é 1, já que os $N(1-p)$ spins livres do outro agregado apontam também na direção do campo. Conclui-se que, para valores de p diferentes de 1 e para qualquer valor finito do campo uniforme, o comportamento crítico do sistema é destruído, já que há uma magnetização induzida em qualquer temperatura.

No modelo diluído por sítios, foi verificada a existência de dois valores críticos para o campo em $T=0$: $h_{1c} = J$ e $h_{2c} = 2J$. Para $h < h_{1c}$, qualquer que seja p , não há magnetização induzida, pois os spins formam um agregado com $Np/2$ spins apontando na direção do campo e $Np/2$ na direção contrária. Para $h > h_{1c}$ e $p < 0.5$, os Np spins são livres e a magnetização induzida é p . Para $h_{1c} < h < h_{2c}$ e $p > 0.5$, há dois agregados: um com $N(2p-1)$ spins (metade apontando na direção do campo e metade na direção contrária) e o outro com $N(1-p)$ spins livres. A magnetização induzida é $1-p$. Para $h > h_{2c}$ e $p > 0.5$, há ainda dois agregados (como no caso $h_{1c} < h < h_{2c}$ e $p > 0.5$), mas agora todos os Np spins apontam na direção do campo. Portanto, a magnetização induzida é dada por p .

O antiferromagneto diluído por ligações não apresenta comportamento crítico e, portanto, não corresponde ao ferromagneto

em campo aleatório. O antiferromagneto diluído por sítios só apresenta comportamento crítico para $h < h_{1c}$ e é independente de p . Assim, a correspondência, como proposta por Fishman e Aharony (1979) para sistemas temperados, em que a intensidade do campo aleatório não é limitada, não vale também neste caso, já que $h < h_{1c}$.

O modelo de Ising com spins mistos sobre a rede favo de mel foi estudado considerando-se constante de troca aleatória e anisotropia uniaxial aleatória.

Para o modelo com constante de troca aleatória, o caso tratado foi o modelo diluído, por revelar as características mais importantes do sistema. Foram reproduzidos analiticamente alguns resultados do modelo homogêneo, calculados de forma exata por Gonçalves (1985). A temperatura crítica do sistema foi obtida, observando-se fenômeno de reentrância no caso de spins inteiros. Foram determinadas analiticamente as concentrações críticas, concentrações abaixo das quais não há transição. Essas concentrações críticas foram característica dos spins inteiros. Esses resultados mostram a não universalidade da concentração de percolação p_c .

No caso da anisotropia uniaxial aleatória, a distribuição para o parâmetro aleatório D_k foi tomada como sendo $\delta(D_k) = p\delta(D_k - D_1) + (1-p)\delta(D_k - D_2)$, nos casos em que $D_1 = D$ e $D_2 = 0$, e $D_1 = D$ e $D_2 = -D$. Foram verificados, nestes dois casos, o fenômeno de reentrância. No caso $D_1 = D$ e $D_2 = -D$, observou-se a simetria $\alpha \leftrightarrow -\alpha$ e

$p \rightarrow 1-p$. Os resultados obtidos foram colocados em termos dos parâmetros utilizados por Kaneyoshi (1998a). Para todos os valores de α ($\alpha \equiv D/J$), a temperatura crítica decresceu com o parâmetro d ($d \equiv D/\Delta D$), enquanto nos resultados obtidos por Kaneyoshi para distribuições temperadas, isto só ocorreu para $\alpha < -1.25$. Os resultados obtidos aqui para distribuições recozidas não apresentaram fenômeno de reentrância, enquanto que os resultados obtidos por Kaneyoshi apresentam este fenômeno para $\alpha < -1.50$. Os resultados obtidos por Gonçalves (1985) para o modelo homogêneo foram reproduzidos.

REFERÊNCIAS

- Baker, J. M., Laurens, J. A. and Stevenson, R. W. H., *Proc. Phys. Soc.* **77**, 1038 (1961).
- Barry, J. H., Múnera, C. H. and Tanaka, T., *Physica* **113A**, 367 (1982).
- Baxter, R. J., *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1982).
- Birkoff, K. and MacLane, S., *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan Publishing Co., New York, 1977.
- Breed, D. J., Gilijamse, K., Sterkenburg, J. W. E. and Miedema, A. R.; *Physica* **68**, 303 (1970).
- Brout, R., *Phys. Rev.* **115**, 824 (1959).
- Derrida, B., Vannimenus, J. and Pomeau, Y., *J. Phys. C* **11**, 4749 (1978).
- Doman, B. G. S. and Williams, J. K., *J. Phys. C* **15**, 1693 (1982).
- Domb, C., *Adv. Phys.* **9**, 149 (1960).
- Domb, C. and Sykes, M. F., *Phys. Rev.* **122**, 77 (1961).
- Elliot, R. J., *J. Phys. Chem. Solids* **16**, 165 (1960).
- Elliot, R. J., Heap, B. R., Morgan, D. J. and Rushbrooke, G. S.; *Phys. Rev. Lett.* **5**, 366 (1960).
- Falk, H., *J. Phys. C* **9**, L213 (1976).
- Fisher, D. S., Grinstein, G. M. and Khurana, A., *Phys. Today* **41**, 56 (1988).
- Fishman, S. and Aharony, A., *J. Phys. C* **12**, L729 (1979).
- Funke, M., Nieuwenhuizen, Th M. and Trimper, S., *J. Phys. A* **22**, 5097 (1989).

- Gonçalves, L. L., *Physica Scripta* **32**, 248 (1985); *Physica Scripta* **33**, 192 (1986).
- Gonçalves, L. L. and Stinchcombe, R. B., *Phys. Rev. B* **33**, 4762 (1986).
- Gonçalves, L. L., *Physica Scripta* **35**, 105 (1987).
- Gonçalves, L. L. and Horiguchi, T., *Physica* **150A**, 672 (1988).
- Gonçalves, L. L., *Int. J. Mod. Phys. B* **4**, 1693 (1990).
- Grinstein, G. and Mukamel, D., *Phys. Rev. B* **27**, 4503 (1983).
- Grinstein, G., *Fundamental Problems in Statistical Mechanics VI*, Proceedings of the 1984 Trondheim Summer School, North-Holland (1985).
- Houtappel, R. M. F., *Physica* **16**, 425 (1950).
- Ising, E., *Z. Phys.* **31**, 253. (1925).
- Iwashita, T. and Uryu, N., *Phys. Lett. A* **96**, 311 (1983).
- Iwashita, T. and Uryu, N., *Phys. Stat. Sol. (b)* **125**, 551 (1984).
- Kaneyoshi, T., *Physica* **153A**, 556 (1988a).
- Kaneyoshi, T., *Phys. Rev. B* **38**, 11878 (1988b).
- Kaneyoshi, T., *Z. Phys. B* **71**, 109 (1988c).
- Kaneyoshi, T., *Physica* **155A**, 460 (1989a).
- Kaneyoshi, T., *Sol. St. Comm.* **69**, 695 (1989b).
- Kaneyoshi, T., *Sol. St. Comm.* **70**, 975 (1989c).
- Kasai, Y., Miyazima, S. and Syozi, I., *Prog. Theor. Phys.* **42**, 1 (1969).
- Katsura, S. and Tsujiyama, B., *Critical Phenomena* (Editado por M. S. Green e J. V. Sengers), p. 219, Washington (1966).
- Katsura, S. and Matsubara, F., *Can. J. Phys.* **52**, 120 (1974).

- King, A. R. and Belanger, D. P., *J. Magn. Magn. Mater.* **54-57**, 19, (1986).
- Kramers, H. A. and Wannier, G. H., *Phys. Rev.* **60**, 252, 263 (1941).
- Lagendijk, E. and Huiskamp, W. J., *Physica* **62**, 444 (1972).
- Luck, J. M. and Nieuwenhuizen, Th M., *J. Phys. A* **22**, 2151 (1989).
- Matsubara, F., *Prog. Theor. Phys.* **51**, 378 (1974).
- McCoy, B. M. and Wu, T. T., *The Two-Dimensional Ising Model* (Harvard University Press), p. 34, Cambridge, Mass., (1973).
- Möss de Oliveira, S., Continentino, M. A. and Oliveira, P. M. C.; *Physica* **162A**, 458 (1990).
- Muto, S. and Oguchi, T., *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1669 (1976).
- Nattermann, T. and Rujan, P., *Int. J. Mod. Phys. B* **3**, 1597 (1989).
- Nieuwenhuizen, Th M. and Luck, J. M., *J. Phys. A* **19**, 1207 (1986).
- Onsager, L., *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
- Pekalski, A. and Oguchi, T., *Prog. Theor. Phys.* **54**, 1021 (1975).
- Rapaport, D. C., *J. Phys. C* **5**, 1830 (1972).
- Rayna, G., *REDUCE, Software for Algebraic Computation*, (Springer-Verlag), New York (1987).
- Sato, H., Arrot, A. and Kikuchi, R.; *J. Phys. Chem. Solids* **10**, 19 (1959).
- Siqueira, A. F. and Fittipaldi, I. P., *J. Magn. Magn. Mat.* **54-57**, 678 (1986).
- Smart, J. S., *J. Phys. Chem. Solids* **16**, 169 (1960).
- Stephenson, J., *J. Math. Phys.* **5**, 1009 (1964).

- Stinchcombe, R. B., *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Editado por C. Domb e J. Lebowitz), Vol. 7, Academic Press, London (1983).
- Syozi, I., *Prog. Theor. Phys.* **34**, 189 (1965).
- Syozi, I., *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Editado por C. Domb e M. S. Green), Vol. 1, Academic Press, London (1972).
- Thorpe, M. F. and Beeman, D., *Phys. Rev. B* **14**, 188 (1976).
- Wannier, G. H., *Rev. Mod. Phys.* **17**, 50 (1945).
- Williams, J. K., *J. Phys. C* **14**, 4095 (1981).