



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**BARTOLOMEU MAMEDE LEITE**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS COMPLEXAS COM COEFICIENTES**  
**CONSTANTES: SOLUÇÃO GERAL E APLICAÇÕES**

**FORTALEZA**

**2025**

BARTOLOMEU MAMEDE LEITE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COMPLEXAS COM  
COEFICIENTES CONSTANTES: SOLUÇÃO GERAL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do centro de ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- L55e      Leite, Bartolomeu Mamede.  
Equações diferenciais ordinárias complexas com coeficientes constantes: : solução geral e aplicações /  
Bartolomeu Mamede Leite. – 2025.  
63 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.  
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo..
1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Números complexos. 3. Aplicações. I. Título.
- CDD 510
-

BARTOLOMEU MAMEDE LEITE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COMPLEXAS COM  
COEFICIENTES CONSTANTES: SOLUÇÃO GERAL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do centro de ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 06/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro  
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPa)

À minha família, em especial à minha esposa,  
pelo incentivo, apoio e companheirismo em  
todos os momentos desta etapa da minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, à Deus, pela saúde, perseverança e sabedoria que me concedeu para cumprir este objetivo da minha vida acadêmica.

Aos meus pais, Cícero e Francisca, que sempre enxergaram na educação o caminho para meu crescimento, incentivando-me sem cessar.

À minha amada esposa, Paulina, cuja presença foi fundamental para que eu encontrasse motivação para seguir em frente.

Aos colegas do PROFMAT, que se transformou em uma verdadeira rede de apoio mútuo.

Aos dedicados professores do PROFMAT da UFC, que compartilharam seu conhecimento com excelência ao longo do curso.

Aos Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, pela excelente orientação.

“Não é conhecimento, mas o ato de aprender,  
não a posse, mas o ato de chegar lá, que  
concede o maior prazer.”

(Gauss, 1820, p.58)

## RESUMO

Nesta dissertação, apresentamos a teoria geral de existência e unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares complexas com coeficientes constantes, utilizando apenas um resultado sobre derivadas. Diferentemente das abordagens tradicionais, que frequentemente dependem de técnicas de integração, séries de potências ou do teorema clássico de existência e unicidade, mostramos um método alternativo para obter a solução geral dessas EDOs. Além da fundamentação teórica, exploramos aplicações concretas desses resultados, destacando sua relevância em problemas físicos e matemáticos. A dissertação está organizada em três eixos principais: a estrutura algébrica e analítica dos números complexos, a teoria de funções holomorfas e a resolução explícita de EDOs lineares de ordem qualquer. Por fim, ilustramos a utilidade desses conceitos em modelos aplicados, como circuitos elétricos e movimento harmônico, demonstrando a conexão entre a teoria matemática e aplicações práticas.

**Palavras-chave:** EDO; números complexos; aplicações.



## ABSTRACT

In this dissertation, we present a general theory of existence and uniqueness for complex linear Ordinary Differential Equations (ODEs) with constant coefficients, using only a result on derivatives. Unlike traditional approaches, which often rely on integration techniques, power series, or the classical existence and uniqueness theorem, we demonstrate an alternative method for obtaining the general solution to these ODEs. In addition to the theoretical foundation, we explore concrete applications of these results, highlighting their relevance in physical and mathematical problems. The dissertation is organized into three main axes: the algebraic and analytic structure of complex numbers, the theory of holomorphic functions, and the explicit resolution of linear ODEs of any order. Finally, we illustrate the usefulness of these concepts in applied models, such as electrical circuits and harmonic motion, demonstrating the connection between mathematical theory and practical applications.

**Keywords:** ODE; complex numbers; applications.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>NÚMEROS COMPLEXOS .....</b>	<b>11</b>
<b>2.1</b>	<b>O corpo <math>\mathbb{C}</math> .....</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>Forma algébrica de um número complexo .....</b>	<b>12</b>
<b>2.3</b>	<b>Módulo e conjugado .....</b>	<b>13</b>
<b>2.4</b>	<b>Forma polar de um número complexo.....</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>FUNÇÕES HOLOMORFAS .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Limite e continuidade.....</b>	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>A derivada complexa .....</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>EDOs LINEARES COMPLEXAS COM COEFICIENTES</b>	
	<b>CONSTANTES .....</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>Existência de soluções .....</b>	<b>28</b>
<b>4.2</b>	<b>Solução geral .....</b>	<b>30</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>EDOs homogêneas de primeira ordem .....</i></b>	<b>30</b>
<b>4.2.2</b>	<b><i>EDOs homogêneas de segunda ordem .....</i></b>	<b>32</b>
<b>4.2.3</b>	<b><i>EDOs homogêneas de terceira ordem .....</i></b>	<b>37</b>
<b>4.2.4</b>	<b><i>EDOs de ordem quatro ou superior .....</i></b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES .....</b>	<b>45</b>
<b>5.1</b>	<b>Circuito elétrico .....</b>	<b>45</b>
<b>5.2</b>	<b>Movimento harmônico simples.....</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A - RECURSO EDUCACIONAL .....</b>	<b>52</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) com coeficientes constantes desempenham um papel fundamental em diversas áreas da ciência. Elas descrevem a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas, e são chamadas "lineares" porque a função desconhecida e suas derivadas aparecem de forma linear. Diversos problemas, provenientes de diferentes áreas do conhecimento, têm sido modelados e solucionados utilizando Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares com coeficientes constantes. Em problemas de crescimento populacional, nos quais a taxa de variação de uma população é proporcional ao seu próprio tamanho, a solução é modelada pela equação

$$\frac{dp}{dt} = kp,$$

onde  $k$  representa a taxa de crescimento populacional.

Quando estendidas para o domínio complexo, essas equações ganham ainda mais relevância, especialmente em situações em que as soluções reais não são suficientes para descrever a dinâmica do problema ou em que a introdução de variáveis complexas facilita a sua análise e solução. As EDOs lineares complexas são fundamentais, por exemplo, para análise de circuitos elétricos em corrente alternada.

No caso de circuitos elétricos do tipo RLC, as leis de Ohm e Kirchhoff garantem que é válida a seguinte equação

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \varepsilon$$

onde  $L$  é a indutância,  $R$  a resistência,  $C$  a capacitância,  $Q = Q(t)$  representa a carga e  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  é a tensão fornecida pela fonte ao circuito a cada instante  $t$ .

No sistema massa-mola, por exemplo, ao combinar a Lei de Hooke  $F(x) = -kx$  com a Segunda Lei de Newton

$$F(x) = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

chega-se à equação que descreve o movimento de um corpo de massa  $m$  preso a uma mola,

considerando que não há atrito. Essa equação é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

em que  $k$  é a constante da mola.

Nos problemas de pêndulo simples, admitindo pequenas oscilações, ou seja  $\sin \theta \approx \theta$ , a equação que descreve o movimento angular do pêndulo é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0,$$

onde  $g$  é gravidade,  $L$  o comprimento do pêndulo e  $\theta$  o ângulo do pêndulo.

Diante desses exemplos, e de muitos outros, torna-se claro o interesse em encontrar soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) da forma

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = \varphi(z),$$

Em que  $n \geq 1$  é um inteiro,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  são constantes complexas dadas e  $\varphi = \varphi(z)$  é uma função de uma variável complexa.

## 2 NÚMEROS COMPLEXOS

Desde a sua criação, os números complexos tornaram-se um importante objeto de estudo e passaram por um longo processo de desenvolvimento até chegarem à forma que conhecemos hoje. Esses números, inicialmente, surgiram da necessidade de resolver certas equações, o que os torna fundamentais para a história das equações algébricas. Ao longo dos séculos, o estudo dos números complexos evoluiu, consolidando sua importância não apenas na teoria matemática, mas também em diversas aplicações práticas.

### 2.1 O corpo $\mathbb{C}$

Considere em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , o plano cartesiano, duas operações dadas por:

1. Adição:  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ;
2. Multiplicação:  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ .

Um número  $z = (x, y)$  que satisfaz as duas operações acima é chamado de número complexo. O conjunto dos números complexos é denotado por  $\mathbb{C}$ . Obviamente para que ocorra a igualdade entre dois números complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , deve-se ter a seguinte relação:

$$z_2 = z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

As operações acima de soma e produto, gozam das seguintes propriedades quaisquer que sejam os complexos  $z_2, z_1, z_3$ :

- I. Comutatividade:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ ;
- II. Associatividade:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3)$ ;
- III. O número complexo  $(0, 0)$  é o elemento neutro aditivo;
- IV. O número complexo  $(1, 0)$  é o elemento neutro multiplicativo;
- V. O simétrico aditivo de qualquer número complexo  $z = (x, y)$  é o número complexo

$$-z = (-x, -y).$$

VI. O simétrico multiplicativo de um número  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  é o número

$$z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

VII. Distributividade do produto em relação à soma:

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

A comprovação dessas propriedades é uma consequência direta das definições das operações 1 e 2, além das propriedades já conhecidas dos números reais. Utilizando as propriedades V e VI, é possível introduzir mais duas operações no conjunto  $\mathbb{C}$ :

3. Subtração:  $z - w = z + (-w)$ .

4. Divisão:

$$\frac{w}{z} = z^{-1}w.$$

De acordo com Ávila (2008), um corpo é definido como um conjunto equipado com duas operações, chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem as propriedades mencionadas anteriormente. Portanto, o conjunto dos números complexos é um corpo.

## 2.2 Forma algébrica de um número complexo

Considere o conjunto  $\mathbb{C}' = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ , de  $\mathbb{C}$ . Podemos definir a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}', f(x) = (x, 0)$ , que é claramente uma bijeção. Além disso,  $f$  preserva tanto a adição quanto a multiplicação em  $\mathbb{R}$ . Em outras palavras, dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = f(x_1) + f(x_2); \\ f(x_1 x_2) &= (x_1 x_2, 0) = (x_1, 0)(x_2, 0) = f(x_1)f(x_2). \end{aligned}$$

Assim, podemos usar, pela bijeção  $f$  acima a seguinte notação  $(x, 0) = x$ , e definindo o número complexo  $(0, 1) = i$ , obtemos que:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy.$$

Observe também que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 + (-1)1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

A expressão  $x + iy$  é chamada forma algébrica do número complexo  $z = (x, y)$ . Dessa forma podemos escrever  $\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$ . O número real  $x = \operatorname{Re}(z)$  é chamado parte real de  $z$  e  $y = \operatorname{Im}(z)$  é chamada parte imaginária de  $z$ .

Os números reais  $x = \operatorname{Re}(z)$  e  $y = \operatorname{Im}(z)$  são as coordenadas do ponto  $z$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , ao qual chamaremos de plano complexo sempre que considerarmos seus pontos como números complexos. Um número complexo  $z$  é real se ele está sobre o eixo real no plano complexo, ou seja  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , e é imaginário puro quando  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$  e  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .

### 2.3 Módulo e conjugado

**Definição 2.3.1:** O conjugado de um número complexo  $z = x + iy$  é denotado por  $\bar{z}$  e definido por  $\bar{z} = x - iy$ .

**Proposição 2.3.1** Dados os números complexos  $z = x_1 + iy_1$  e  $w = x_2 + iy_2$ , são válidas as seguintes propriedades:

- (I)  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ;
- (II)  $\bar{\bar{z}} = z$ ;
- (III)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ;
- (IV)  $\bar{z} + z = 2\operatorname{Re}(z)$ ,  $z - \bar{z} = i2\operatorname{Im}(z)$ .

Demonstração:

- (I)  $z = \bar{z} \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_1 - iy_1 \Leftrightarrow 2iy_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- (II)  $\bar{\bar{z}} = \overline{(x_1 - iy_1)} = (x_1 + iy_1) = z$
- (III)  $\overline{z \cdot w} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (IV)  $z + \bar{z} = (x_1 + iy_1) + (x_1 - iy_1) = 2x_1 = 2\operatorname{Re}(z)$  e  $z - \bar{z} = (x_1 + iy_1) - (x_1 - iy_1) = i2y_1 = i2\operatorname{Im}(z)$ .

**Definição 2.3.2:** Dado o número complexo  $z = x + iy$ , define-se o módulo de  $z$  como sendo o número real não negativo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Geometricamente o módulo representa a distância do número complexo  $z$  à origem no plano complexo.

**Proposição 2.3.2** Dados os números complexos  $z = x_1 + iy_1$  e  $w = x_2 + iy_2$ , são válidas as seguintes propriedades:

$$(I) \quad |z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$(II) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|;$$

$$(III) \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, w \neq 0;$$

$$(IV) \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Demonstração:

$$(I) \quad \text{Observe que } |z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

$$\begin{aligned} (II) \quad |z \cdot w| &= |(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i| = \\ &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2} = \\ &= \sqrt{(x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2} = |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

$$(III) \quad \left| \frac{z}{w} \right| = |z \cdot w^{-1}| = |z| \cdot |w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}.$$

$$\begin{aligned} (IV) \quad |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + \\ &+ |w|^2 = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + \\ &+ 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |z|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, obtém-se o resultado desejado.

## 2.4 Forma polar de um número complexo

Dado o número complexo  $z = x + iy$  não nulo, considere  $r$  como sendo a distância de  $z$  até a origem, isto é,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| > 0$  e seja  $\theta$  o ângulo que  $z$  forma com o eixo real positivo. Nessas condições temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$



Podemos, então, escrever  $z$  da seguinte maneira:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , que é conhecida como forma polar de um número complexo  $z$ . O ângulo  $\theta$  é chamado de argumento de  $z$ , denotado por  $\arg(z)$ .

Considere, agora, os números complexos

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Utilizando as fórmulas de adição para o seno e o cosseno, temos que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Usando indução matemática pode-se mostrar facilmente que

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n)].$$

De modo particular, dado  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , temos

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

**Definição 2.4.1** Considere o número complexo  $z_0$ . O número complexo  $z$  tal que  $z^n = z_0$  é chamado raiz  $n$ -ésima de  $z_0$ .

Agora vamos obter as soluções da equação  $z^n = z_0$ . Escrevendo  $z^n$  e  $z_0$  na sua forma polar obtemos

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0).$$

Observe que  $|z^n| = |z|^n = |z_0|$ , portanto, temos que  $r = r_0^{\frac{1}{n}}$  e reduzimos a igualdade acima a

$$(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0.$$

Pela igualdade de números complexos segue que:

$$\cos(n\theta) = \cos \theta_0 \text{ e } \sin(n\theta) = \sin \theta_0.$$

Utilizando o fato das funções seno e cosseno serem periódicas de período  $2\pi$ , obtemos

$$n\theta = \theta_0 + 2\pi j \Rightarrow \theta = \frac{\theta_0 + 2\pi j}{n}, j \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, temos que

$$z_j = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2j\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2j\pi}{n} \right), j \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, note que para  $k, l, s \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} z_k = z_j &\Leftrightarrow \frac{\theta_0 + 2\pi k}{n} - \frac{\theta_0 + 2\pi j}{n} = 2\pi s \Leftrightarrow \frac{2\pi k}{n} - \frac{2\pi j}{n} = 2\pi s \Leftrightarrow \frac{k}{n} - \frac{j}{n} = s \Leftrightarrow k - j = ns \\ &\Leftrightarrow k \equiv j \pmod{n}. \end{aligned}$$

Portanto, para cada resto na divisão de  $j$  por  $n$ , há uma raiz  $n$ -ésima de  $z_0$ , ou seja, para cada  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , há uma raiz  $n$ -ésima

$$z_j = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2j\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2j\pi}{n} \right).$$

Enunciaremos agora o teorema fundamental da álgebra (TFA), resultado essencial para a teoria de EDOs lineares com coeficientes constantes, pois assegura que o polinômio característico associado sempre terá raízes, permitindo a decomposição em termos exponenciais complexos.

**Teorema 2.4.1** Se  $p(z)$  é um polinômio da forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

onde  $n \geq 1, a_n \neq 0$  e  $a_k \in \mathbb{C} \forall k$ , então existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $p(\alpha) = 0$ .

Como consequência do teorema fundamental da álgebra temos que todo polinômio de grau  $n$  pode ser fatorado em  $\mathbb{C}$  da seguinte forma

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n),$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são as raízes complexas de  $p$ , não necessariamente distintas.

### 3 FUNÇÕES HOLOMORFAS

#### 3.1 Limite e continuidade

**Definição 3.1.1** Dado um ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  no plano complexo e um número real  $a$ , chamamos disco de raio  $a$  e centro em  $z_0$  o conjunto  $D(z_0, a)$  formado pelos pontos  $z$  do plano complexo que satisfazem a seguinte condição:

$$|z - z_0| < a.$$

**Definição 3.1.2** Um subconjunto  $D$  do plano é considerado um conjunto aberto se cumprir a seguinte condição: para qualquer ponto  $z$  pertencente a  $D$ , existe um número real positivo  $a$  tal que o disco com centro em  $z$  e raio  $a$  está completamente contido em  $D$ .

**Definição 3.1.3** Seja  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  possui limite em  $z_0$  se existir um valor  $L \in \mathbb{C}$  tal que, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , é possível encontrar um  $\delta > 0$  satisfazendo a seguinte condição:  $\forall z \in D, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$ . Quando o limite existe, escrevemos  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ . Análogo ao caso real temos que o limite, quando existe, ele é único.

**Exemplo 3.1.1** Mostre que  $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$ .

Demonstração:

Basta tomarmos  $\delta = \epsilon$  na definição de limite, pois nesse caso

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - z_0| = |z - z_0| < \delta = \epsilon.$$

**Proposição 3.1.1** Sejam  $f$  e  $g$  funções para as quais os limites  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$  existam.

Assim, temos:

$$\text{I } \lim_{z \rightarrow z_0} (g(z) + f(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} f(z);$$

$$\text{II } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z);$$

$$\text{III } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

Demonstração:

I Sejam  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ . Temos que  $\forall \epsilon > 0$ , existem  $\delta_1, \delta_2$ , tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - L| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , sempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ , temos

$$|f(z) + g(z) - (L + M)| = |f(z) - L + g(z) - M| \leq |f(z) - L| + |g(z) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

II Sejam  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ . Na definição de limite tome  $\epsilon = 1$  para obter um  $\delta_1$ , tal que  $0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - L| < 1$ . Daí temos que se  $0 < |z - z_0| < \delta_1$ , então

$$|f(z)| = |f(z) - L + L| \leq |f(z) - L| + |L| = 1 + |L|.$$

Usando novamente a definição de limite temos que dado  $\epsilon > 0$ , existem  $\delta_2, \delta_3$  tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - L| < \frac{\epsilon}{2|M|}$$

e

$$0 < |z - z_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(z) - M| < \frac{\epsilon}{2(1 + |L|)}.$$

Agora tome  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  e note que se  $0 < |z - z_0| < \delta$ , então

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - LM| &= |f(z)g(z) - f(z)M + f(z)M - LM| \\ &= |f(z)(g(z) - M) + M(f(z) - L)| < (1 + |L|) \frac{\epsilon}{2(1 + |L|)} + |M| \frac{\epsilon}{2|M|} = \epsilon. \end{aligned}$$

III Sejam  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ . Mostremos primeiramente que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{M}.$$

Pela definição de limite temos que dado  $\epsilon > 0$ , existem  $\delta_1, \delta_2$  tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - L| < \frac{\epsilon}{2} |M|^2$$

e

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - L| < \frac{|M|}{2}.$$

Pela desigualdade triangular temos

$$|M| = |M + g(z) - g(z)| \leq |g(z) - M| + |g(z)|$$

de modo que se  $0 < |z - z_0| < \delta_2$ , então

$$|g(z)| \geq |M| - |g(z) - M| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2}.$$

Portanto, tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(z)}{g(z)M} \right| = \frac{|M - g(z)|}{|M||g(z)|} < \frac{1}{|M|} \frac{\epsilon}{2} |M|^2 \frac{2}{|M|} = \epsilon.$$

**Teorema 3.1.1** Seja  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , onde  $u$  e  $v$  são funções das variáveis reais  $x$  e  $y$ , e seja  $L = u_0 + iv_0$ . Então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = u_0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = v_0.$$

Demonstração: Considere  $z_0 = x_0 + iy_0$  e suponha que existam

$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = u_0$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = v_0$ . Nesse caso temos que  $\forall \epsilon > 0$ , existem  $\delta_1, \delta_2$ , tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |u(x, y) - u_0| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |v(x, y) - v_0| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos

$$\begin{aligned} |f(z) - (u_0 + iv_0)| &= |u(x, y) - u_0 + i(v(x, y) - v_0)| \leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta, \text{ e portanto } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L. \end{aligned}$$

Suponha agora que exista  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ . Nesse caso temos que  $\forall \epsilon > 0$  existe um

$\delta > 0$ , tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Para concluir o resultado desejado basta observar que

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u_0| &= \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2} \leq \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2} \\ &= |u(x, y) + iv(x, y) - (u_0 + iv_0)| = |f(z) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

$e$

$$\begin{aligned} |v(x, y) - v_0| &= \sqrt{(v(x, y) - v_0)^2} \leq \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2} \\ &= |u(x, y) + iv(x, y) - (u_0 + iv_0)| = |f(z) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

sempre que  $0 < |z - z_0|$ .

**Definição 3.1.4:** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa. Dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $z_0 \in D$  se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Se  $f$  possui essa propriedade em cada ponto de  $D$ , então  $f$  é contínua em  $D$ .

**Exemplo 3.1.2** Mostre que a função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z$  é contínua.

Demonstração: Vimos no exemplo 3.1.1 que dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ , temos  $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$ , ou seja  $f$  é contínua.

**Definição 3.1.5:** Definimos a função exponencial  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  da seguinte maneira:

$$f(z) = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

em que  $x$  e  $y$  representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de  $z$ .

**Exemplo 3.1.3** Mostre que a função exponencial é contínua em  $\mathbb{C}$ .

Demonstração: Aplicando o teorema 3.1.1 e analisando as partes real e imaginária da função exponencial, obtemos que, se  $z_0 \in \mathbb{C}$ , então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \exp z = \exp z_0.$$

Desse modo, utilizando a definição 3.1.4 conclui-se o resultado desejado.

### 3.2 A derivada complexa

**Definição 3.2.1:** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa. A derivada de  $f$  no ponto  $z_0 \in D$  é definida como

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

se esse limite existir.

**Exemplo 3.2.1:** Sejam  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Determine, caso exista, a derivada de  $f$  em  $z_0$ .

Solução: Note que

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0$$

portanto

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

**Proposição 3.2.1:** Considere  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa. Se  $f$  é derivável em  $z_0$  então  $f$  é contínua em  $z_0$ .

Demonstração: Observe que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

Segue  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

**Definição 3.2.2:** Uma função complexa  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ , definida em um subconjunto aberto  $D$  do plano complexo, que seja diferenciável em todos os pontos de  $D$ , é chamada função holomorfa.

**Proposição 3.2.2:** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto,  $z_0 \in D$ , e  $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$  funções complexas. Suponha que  $f$  e  $g$  são deriváveis em  $z_0$ . Então, as seguintes propriedades são válidas:

- I.  $(cf)'(z_0) = cf'(z_0), c \in \mathbb{C};$
- II.  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0);$
- III.  $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0);$
- IV.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2},$

desde que  $g(z_0) \neq 0$ .

Demonstração:

I Como existe  $f'(z_0)$ , temos

$$(cf)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(cf)(z) - (cf)(z_0)}{z - z_0} = c \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = cf'(z_0);$$

II Como existem  $f'(z_0)$  e  $g'(z_0)$ , usando as propriedades de limite temos

$$\begin{aligned} (f + g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f + g)(z) - (f + g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) + g(z) - (f(z_0) + g(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + g'(z_0); \end{aligned}$$

III Como existem  $f'(z_0)$  e  $g'(z_0)$ , usando as propriedades de limite e o fato de  $f$  ser contínua em  $z_0$ , temos

$$\begin{aligned} (fg)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(g(z) - g(z_0)) + g(z_0)(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0); \end{aligned}$$

IV Vamos mostrar inicialmente que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

De fato, como  $g'(z_0)$  existe,  $g$  é contínua em  $z_0$  e  $g(z_0) \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{-g(z) + g(z_0)}{g(z)g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{-(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \\ &= -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando o item anterior, temos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(z_0) = f'(z_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) + \left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) f(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

**Proposição 3.2.3:** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto,  $z_0 \in D$ , e  $f_1, f_2, \dots, f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$  funções complexas. Se  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são deriváveis em  $z_0$ , então

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(z_0) = f_1'(z_0) + f_2'(z_0) + \dots + f_n'(z_0).$$

Demonstração: Vamos provar por indução sobre  $n$  que derivada da soma é a soma das derivadas das parcelas. Para  $n=2$  é justamente a propriedade II da proposição anterior.

Suponha que  $(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(z_0) = f_1'(z_0) + f_2'(z_0) + \dots + f_k'(z_0)$ .

Vamos mostrar que  $(f_1 + f_2 + \dots + f_{k+1})'(z_0) = f_1'(z_0) + f_2'(z_0) + \dots + f_{k+1}'(z_0)$ . De fato,



observe que

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1})'(z_0) &= ((f_1 + f_2 + \dots + f_k) + f_{k+1})'(z_0) \\ &= (f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(z_0) + f_{k+1}'(z_0) = f_1'(z_0) + f_2'(z_0) + \dots + f_{k+1}'(z_0).\end{aligned}$$

A segunda igualdade ocorre devido ao caso inicial, enquanto a terceira ocorre pela hipótese de indução.

**Corolário 3.2.1:** A soma de um número finito de funções holomorfas é holomorfa.

**Teorema 3.2.1:** Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ . Se  $f$  é derivável em  $z_0$  então existem as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  em  $(x_0, y_0)$  satisfazendo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Além disso

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y) + iv(x, y) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x + iy - (x_0 + iy_0)} \\ &= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} \\ &= \frac{[u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))][x - x_0 - i(y - y_0)]}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(x - x_0) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &\quad + i \frac{(v(x, y) - v(x_0, y_0))(x - x_0) - (u(x, y) - u(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.\end{aligned}$$

Como  $f'(z_0)$  existe por hipótese, podemos determiná-la de duas maneiras:

Primeira maneira: Fazendo  $z$  tender a  $z_0$  ao longo da reta  $y = y_0$ , nesse caso temos

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(x - x_0) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &\quad + i \frac{(v(x, y) - v(x_0, y_0))(x - x_0) - (u(x, y) - u(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Segunda maneira: Tome agora  $z$  tendendo a  $z_0$  ao longo da reta  $x = x_0$ , ou seja, faça  $z = x_0 + iy$ . Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(x - x_0) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\
&\quad + i \frac{(v(x, y) - v(x_0, y_0))(x - x_0) - (u(x, y) - u(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\
&= \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Ora, temos então que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

donde concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

As igualdades acima são conhecidas como as condições de Cauchy-Riemann.

A recíproca do teorema acima é falsa. Isto significa que, mesmo que as componentes  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  de uma função satisfaçam as condições de Cauchy-Riemann em um ponto, isso não implica que seja derivável nesse ponto. A seguir, apresentamos um exemplo que evidencia essa situação.

Considere a função definida por

$$f(z) = \begin{cases} 0 + i0 & \text{se } xy = 0 \\ 1 + i0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

Essa função possui todas as derivadas parciais na origem e essas são iguais a 0, portanto as condições Cauchy-Riemann são satisfeitas em  $z_0 = 0 + i0$ . Porém, como não é contínua em  $z_0$  não pode ser derivável em  $z_0$ .

A seguir mostraremos uma condição suficiente para que uma função complexa possua derivada complexa.

**Teorema 3.2.2:** Seja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$  aberto,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , uma função complexa tal que as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  em relação a  $x$  e  $y$  existem em  $A$  e são contínuas no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ . Se as condições Cauchy-Riemann são satisfeitas em  $z_0$ , então  $f$  é derivável em  $z_0$ .

Demonstração: Começamos mostrando o seguinte

Lema. Seja  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^2$  aberto, uma função admitindo derivadas parciais em  $A$ , que sejam contínuas no ponto  $(x_0, y_0) \in A$ . Então

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= (x - x_0) \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + H(x - x_0, y - y_0) \right) \\ &\quad + (y - y_0) \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + K(x - x_0, y - y_0) \right) \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} H(x - x_0, y - y_0) = 0 \text{ e } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} K(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Demonstração do lema: Ponha  $x = x_0 + h$  e  $y = y_0 + k$  e escreva

$$\begin{aligned} F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) &= F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k) + F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Aplicando teorema do valor médio para funções reais de uma variável, podemos garantir que existe um número real  $0 < t < 1$  tal que

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k) = h \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + k).$$

Como  $\frac{\partial F}{\partial x}$  é contínua no ponto  $(x_0, y_0)$ , a diferença

$$H(h, k) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + k) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$$

tende a 0 para  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Logo,

$$(1) \quad F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k) = h \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + H(h, k) \right).$$

De modo análogo

$$F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = k \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0 + tk)$$

para algum  $0 < t < 1$  e a diferença

$$K(h, k) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0 + tk) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

tende a 0 para  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Desse modo temos

$$(2) \quad F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = k \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + K(h, k) \right).$$

Agora para obter o lema basta somar (1) e (2).

Para demonstrar o teorema aplicamos o lema às componentes  $u$  e  $v$  de  $f$  para escrever

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z_0) &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) \\
&= (x - x_0) \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + H_1 \right) + (y - y_0) \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + K_1 \right) \\
&\quad + i \left[ (x - x_0) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + H_2 \right) + (y - y_0) \left( \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + K_2 \right) \right].
\end{aligned}$$

Usando as condições de Cauchy-Riemann temos que

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z_0) &= (z - z_0) \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \\
&\quad + (x - x_0)(H_1 + iH_2) + (y - y_0)(K_1 + iK_2).
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por  $z - z_0$  ficamos com

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{x - x_0}{z - z_0} (H_1 + iH_2) + \frac{y - y_0}{z - z_0} (K_1 + iK_2).$$

Para concluir o resultado basta mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{x - x_0}{z - z_0} (H_1 + iH_2) + \frac{y - y_0}{z - z_0} (K_1 + iK_2) \right] = 0.$$

Agora, observe que

$$\left| \frac{x - x_0}{z - z_0} \right| \leq 1 \text{ e } \left| \frac{y - y_0}{z - z_0} \right| \leq 1.$$

Portanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \left| \frac{x - x_0}{z - z_0} \right| |H_1 + iH_2| + \left| \frac{y - y_0}{z - z_0} \right| |K_1 + iK_2| \right] \leq \lim_{z \rightarrow z_0} (|H_1 + iH_2| + |K_1 + iK_2|) = 0.$$

**Definição 3.2.3** Um conjunto  $D$  é dito conexo se não pode ser dividido em dois subconjuntos abertos disjuntos e não vazios. Em outras palavras, não existem dois conjuntos abertos  $A$  e  $B$  tais que  $D = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e ambos  $A$  e  $B$  são não vazios.

**Teorema 3.2.3** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto conexo e  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa. Temos que  $f'(z) = 0 \forall z \in D \Leftrightarrow f$  é constante.

Demonstração:  $\Rightarrow$  Como  $f'(z) = 0 \forall z \in D$ , temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Como  $D$  é um aberto conexo, sabemos do cálculo de variável real que  $u$  e  $v$  são constantes em  $D$ . Portanto,  $f = u + iv$  é constante.

$\Leftarrow$  Seja  $f(z) = c, \forall z \in D$ , onde  $c \in \mathbb{C}$ . Usando a definição de derivada temos que  $\forall z_0 \in D$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0.$$

**Definição 3.2.4** Uma função complexa definida em todo  $\mathbb{C}$  e que é holomorfa em  $\mathbb{C}$ , é

classificada como uma função inteira.

**Proposição 3.2.4** Mostre que a função exponencial é uma função inteira. Mostre ainda que

$$\exp'(z) = \exp z.$$

Demonstração: Inicialmente, note que

$$\exp z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Além do mais suas componentes são dadas por

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$$

e daí obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

ou seja, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Como as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são contínuas e as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo o plano complexo, concluímos que  $\exp z$  é holomorfa em  $\mathbb{C}$  e portanto, é uma função inteira. Finalmente, temos que sua derivada é dada por

$$\exp'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = \exp z.$$

## 4 EDOs LINEARES COMPLEXAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Ressalta-se que a solução geral de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear com coeficientes constantes é tradicionalmente obtida mediante a aplicação de conceitos fundamentais da álgebra linear, técnicas de integração, séries de potências ou do teorema clássico de existência e unicidade. Neste trabalho, propomos apresentar um método alternativo simples que utiliza exclusivamente um resultado elementar sobre derivadas, a saber: uma função derivável num aberto conexo é constante se, e somente se, sua derivada é identicamente nula.

### 4.1 Existência de soluções

**Definição 4.1.1.** Uma equação diferencial ordinária complexa com coeficientes constantes e ordem  $n$  é uma equação da forma

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = \varphi(z),$$

onde  $n \geq 1$  é um inteiro,  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  são constantes complexas e  $\varphi = \varphi(z)$  é uma função de uma variável complexa.

Resolver a EDO acima num domínio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é encontrar uma função holomorfa  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$f^n(z) + a_{n-1}f^{n-1}(z) + \dots + a_1f'(z) + a_0f(z) = \varphi(z), \forall z \in \Omega.$$

Suponha agora que seja possível destacar duas soluções  $f_1$  e  $f_2$  para a EDO acima. Nesse caso temos que

$$f_1^n(z) + a_{n-1}f_1^{n-1}(z) + \dots + a_1f_1'(z) + a_0f_1(z) = \varphi(z)$$

e

$$f_2^n(z) + a_{n-1}f_2^{n-1}(z) + \dots + a_1f_2'(z) + a_0f_2(z) = \varphi(z).$$

Logo

$$\begin{aligned} & f_1^n(z) + a_{n-1}f_1^{n-1}(z) + \dots + a_1f_1'(z) + a_0f_1(z) - (f_2^n(z) + a_{n-1}f_2^{n-1}(z) + \dots + a_1f_2'(z) + a_0f_2(z)) \\ &= f_1^n(z) - f_2^n(z) + a_{n-1}(f_1^{n-1}(z) - f_2^{n-1}(z)) + \dots + a_1(f_1'(z) - f_2'(z)) \\ &+ a_0(f_1(z) - f_2(z)) \\ &= (f_1 - f_2)^n(z) + a_{n-1}(f_1 - f_2)^{n-1}(z) + \dots + a_1(f_1 - f_2)'(z) + a_0(f_1 - f_2)(z) = 0. \end{aligned}$$

Portanto segue que  $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$  é uma solução da equação

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

que é denominada EDO homogênea associada. Isto significa que se  $f_p(z)$  é uma solução

particular de

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = \varphi(z)$$

e  $\mathcal{H}_n$  é o conjunto solução de todas as soluções de

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = 0,$$

então  $\mathcal{H}_n + f_p = \{f_p + f_h; f_h \in \mathcal{H}_n\}$  é o conjunto solução da equação

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = \varphi(z).$$

Em outras palavras, o conjunto das soluções de uma EDO pode ser obtido somando a solução particular  $f_p(z)$  a cada solução da equação homogênea associada. Dessa maneira a resolução da EDO

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = \varphi(z)$$

se reduz a da EDO homogênea associada, após fixar uma solução particular de

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = \varphi(z).$$

Demonstrar que a EDO

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = 0$$

sempre possui solução inteira é fácil, pois a função exponencial complexa  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(z) = e^{\lambda z}$ , com  $\lambda \in \mathbb{C}$  previamente fixado, resolve a EDO se, e somente se,  $\lambda$  for uma raiz da equação polinomial

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} f^n(z) + a_{n-1} f^{n-1}(z) + \dots + a_1 f'(z) + a_0 f(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^n e^{\lambda z} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda z} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda z} + a_0 e^{\lambda z} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{\lambda z} (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, como o teorema fundamental da álgebra garante que toda equação da forma

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

possui raízes complexas, segue que

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0$$

sempre possui solução inteira.

A equação  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$  é conhecida como equação característica associada à EDO. Portanto, a relação entre a solução da EDO e as raízes da equação característica garante a existência de uma solução inteira. Note ainda que particularmente se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  e são as raízes da equação característica  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$ , então a função inteira  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$F(z) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k z}$$

é solução da EDO homogênea, independentemente dos números  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  que foram previamente determinados. De fato, se  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $f(z) = c_k e^{\lambda_k z}$  então

$$\begin{aligned} f^n(z) + a_{n-1}f^{n-1}(z) + \dots + a_1f'(z) + a_0f(z) \\ = c_k \lambda_k^n e^{\lambda_k z} + c_k a_{n-1} \lambda_k^{n-1} e^{\lambda_k z} + \dots + c_k a_1 \lambda_k e^{\lambda_k z} + c_k a_0 e^{\lambda_k z} \\ = c_k e^{\lambda_k z} (\lambda_k^n + a_{n-1} \lambda_k^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_k + a_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto  $f(z) = c_k e^{\lambda_k z}$  é solução da EDO homogênea para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , e daí segue o resultado desejado.

Quando as raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são todas distintas, é natural questionar se todas as soluções da EDO apresentam a forma

$$F(z) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k z},$$

ou, de outra maneira, se essa é a expressão que representa a solução geral da EDO

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Por outro lado, se houver raízes repetidas e o somatório puder ser simplificado agrupando alguns termos, a nova questão é identificar a forma da solução geral da EDO, levando em conta as multiplicidades dessas raízes.

## 4.2 Solução geral

Para obter a solução geral da equação diferencial ordinária (EDO) linear homogênea complexa com coeficientes constantes de ordem  $n$ ,

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = 0,$$



examinamos de maneira individual, os possíveis valores do inteiro  $n \geq 1$ , que corresponde exatamente ao grau da equação polinomial  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$ , cujas raízes estão associadas às soluções da EDO.

#### 4.2.1 EDOs homogêneas de primeira ordem

Se  $n = 1$ , então a EDO homogênea é dada por

$$\frac{dw}{dz} + a_0w = 0.$$

Portanto, sua equação característica associada é

$$z + a_0 = 0,$$

cujas raiz é  $\lambda_1 = -a_0$ .

**Teorema 4.2.1.1** Se  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é solução de

$$\frac{dw}{dz} + a_0w = 0,$$

então existe uma constante  $c_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Demonstração: Inicialmente observe que se  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  é uma solução da EDO

$$\frac{dw}{dz} + a_0w = 0,$$

então  $c_1 = e^{-\lambda_1 z} f(z)$ .

Mas de um modo geral se  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é solução de

$$\frac{dw}{dz} + a_0w = 0,$$

defina a função inteira  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $g(z) = e^{-\lambda_1 z} f(z)$  para todo  $z$  complexo. Pela maneira como  $g$  foi definida é razoável esperar que ela seja constante. De fato, note que

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{d}{dz} [e^{-\lambda_1 z} f(z)] = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} f(z) + f'(z) e^{-\lambda_1 z} = e^{-\lambda_1 z} [-\lambda_1 f(z) + f'(z)] \\ &= e^{-\lambda_1 z} [a_0 f(z) + f'(z)] = e^{-\lambda_1 z} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Portanto, segue do teorema 3.2.3 que  $g$  é constante, ou seja, existe  $c_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $g(z) = c_1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Dessa forma temos que  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , e portanto concluímos que  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  é a solução geral da EDO

$$\frac{dw}{dz} + a_0w = 0.$$

**Corolário 4.2.1.1** Dado  $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ , existe uma única solução inteira para o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = \lambda_1 w \\ w(z_0) = w_0 \end{cases}$$

a saber,  $w(z) = w_0 e^{\lambda_1(z-z_0)}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Demonstração: Observe que

$$w(z_0) = w_0 \Rightarrow w_0 = c_1 e^{\lambda_1 z_0} \Rightarrow c_1 = w_0 e^{-\lambda_1 z_0},$$

portanto temos que  $w(z) = w_0 e^{\lambda_1(z-z_0)}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

#### 4.2.2 EDOs homogêneas de segunda ordem

Se  $n = 2$ , então a EDO homogênea é dada por

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Portanto sua equação característica associada é

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

que possui duas raízes complexas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  podendo ser iguais ou distintas. Vamos considerar, primeiramente, o caso em que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

**Teorema 4.2.2.1.** Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes distintas da equação característica  $z^2 + a_1 z + a_0 = 0$  e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então existem constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Demonstração:** Primeiramente, note que se

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$$

é solução da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então as constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem ser expressas em função de  $f$  e suas derivadas, de forma independente. De fato, observe que

$$f'(z) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 z},$$

e daí segue que

$$\begin{aligned} f'(z) - \lambda_2 f(z) &= \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 z} - \lambda_2 (c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}) \\ \Rightarrow f'(z) - \lambda_2 f(z) &= \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z} - \lambda_2 c_1 e^{\lambda_1 z} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)]. \end{aligned}$$

Para obter o valor de  $c_2$  basta notar que

$$c_2 = e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}].$$

Agora, seja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Defina a função  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$g(z) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)].$$

Pelo que acabamos de ver é razoável que a função  $g$  seja constante. De fato, note que  $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = a_0$  e  $f''(z) = -a_1 f'(z) - a_0 f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , daí obtemos

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{-\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)] + [f''(z) - \lambda_2 f'(z)] e^{-\lambda_1 z}\} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} [-\lambda_1 f'(z) + \lambda_1 \lambda_2 f(z) + f''(z) - \lambda_2 f'(z)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} [-\lambda_1 f'(z) + \lambda_1 \lambda_2 f(z) - a_1 f'(z) - a_0 f(z) - \lambda_2 f'(z)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_1 \lambda_2 - a_0) f(z) - (\lambda_1 + \lambda_2 + a_1) f'(z)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} [(a_0 - a_0) f(z) - (-a_1 + a_1) f'(z)] = 0 \end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Portanto, segue do teorema 3.2.3 que  $g$  é constante, ou seja,  $g(z) = c_1$ , com  $c_1 \in \mathbb{C}$ . Finalmente, demonstremos que a função inteira  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$h(z) = e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}]$$

é também constante. Com efeito, aplicando a identidade

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)] \Rightarrow f'(z) - \lambda_2 f(z) = c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_1 z},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}] + e^{-\lambda_2 z} [f'(z) - \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z}] \\ &= e^{-\lambda_2 z} [-\lambda_2 f(z) + \lambda_2 c_1 e^{\lambda_1 z} + f'(z) - \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z}] \\ &= e^{-\lambda_2 z} [c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_1 z} + \lambda_2 c_1 e^{\lambda_1 z} - \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z}] \\ &= e^{-\lambda_2 z} [c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_1 z} - c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_1 z}] \\ &= e^{(\lambda_1 - \lambda_2) z} [c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) - c_1 (\lambda_1 - \lambda_2)] = 0, \end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Desse modo temos que  $h$  é constante. Agora tomando  $c_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $h(z) = c_2$ , obtemos

$$c_2 = e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}] \Rightarrow f(z) = c_2 e^{\lambda_2 z} + c_1 e^{\lambda_1 z},$$

como queríamos demonstrar.

Vamos considerar agora o caso em que a equação

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

possui uma raiz dupla.

**Teorema 4.2.2.2.** Se  $\lambda$  é raiz dupla da equação característica

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então existem constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = (c_1 z + c_2) e^{\lambda z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Demonstração:** Como no teorema anterior, observe que se

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$$

é solução da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então as constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem ser expressas em função de  $f$  e suas derivadas, de forma independente. De fato, observe que

$$f'(z) = \lambda c_1 z e^{\lambda z} + c_1 e^{\lambda z} + \lambda c_2 e^{\lambda z},$$

daí segue que

$$\begin{aligned} f'(z) - \lambda f(z) &= \lambda c_1 z e^{\lambda z} + c_1 e^{\lambda z} + \lambda c_2 e^{\lambda z} - \lambda((c_1 z + c_2) e^{\lambda z}) \\ &\Rightarrow f'(z) - \lambda f(z) = c_1 e^{\lambda z} \Rightarrow c_1 = e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)]. \end{aligned}$$

Para obter o valor de  $c_2$  basta notar que

$$c_2 = e^{-\lambda z} [f(z) - c_1 z e^{\lambda z}].$$

Agora, seja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Defina a função  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$g(z) = e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)].$$

Pela maneira que a função  $g$  foi definida é razoável esperar que ela seja constante.

De fato, note que  $2\lambda = -a_1$ ,  $\lambda^2 = a_0$  e  $f''(z) = -a_1 f'(z) - a_0 f(z)$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , daí obtemos

$$\begin{aligned}
g'(z) &= -\lambda e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)] + [f''(z) - \lambda f'(z)] e^{-\lambda z} \\
&= e^{-\lambda z} [-\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z) + f''(z) - \lambda f'(z)] \\
&= e^{-\lambda z} [-\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z) - a_1 f'(z) - a_0 f(z) - \lambda f'(z)] \\
&= e^{-\lambda z} [(-2\lambda - a_1) f'(z) + (\lambda^2 - a_0) f(z)] \\
&= e^{-\lambda z} [(a_1 - a_1) f'(z) + (a_0 - a_0) f(z)] \\
&= e^{-\lambda z} (0) = 0,
\end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Portanto segue do teorema 3.2.3 que  $g$  é constante, ou seja,  $g(z) = c_1$ , com  $c_1 \in \mathbb{C}$ .

Finalmente, mostremos que a função inteira  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$h(z) = e^{-\lambda z} [f(z) - c_1 z e^{\lambda z}]$$

é também constante. Com efeito, usando a identidade

$$c_1 = e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)],$$

temos que

$$\begin{aligned}
h'(z) &= -\lambda e^{-\lambda z} [f(z) - c_1 z e^{\lambda z}] + e^{-\lambda z} [f'(z) - c_1 e^{\lambda z} - \lambda c_1 z e^{\lambda z}] \\
&= e^{-\lambda z} [-\lambda f(z) + \lambda c_1 z e^{\lambda z} + f'(z) - c_1 e^{\lambda z} - \lambda c_1 z e^{\lambda z}] \\
&= e^{-\lambda z} [c_1 e^{\lambda z} - c_1 e^{\lambda z} + \lambda c_1 z e^{\lambda z} - \lambda c_1 z e^{\lambda z}] = 0,
\end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Desse modo temos que  $h$  é constante. Agora tomando  $c_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $h(z) = c_2$ , obtemos

$$c_2 = e^{-\lambda z} [f(z) - c_1 z e^{\lambda z}] \Rightarrow f(z) - c_1 z e^{\lambda z} = c_2 e^{\lambda z} \Rightarrow f(z) = (c_1 z + c_2) e^{\lambda z} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

como queríamos demonstrar. Utilizando os dois teoremas mencionados anteriormente, chegamos ao seguinte resultado.

**Corolário 4.2.2.1.** Fixados  $(z_0, w_0), (z'_0, w'_0) \in \mathbb{C}^2$ , existe uma única solução inteira para problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0 \\ w(z_0) = w_0 \\ \frac{dw}{dz}(z'_0) = w'_0. \end{cases}$$

**Demonstração:** Vamos demonstrar o caso em que as raízes da equação característica são distintas. O outro caso pode ser resolvido de maneira análoga. Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então

$$w(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

é a solução geral da EDO

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Desse modo, usando as condições do PVI temos que

$$\begin{cases} w'_0 = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 z'_0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 z'_0} \\ w_0 = c_1 e^{\lambda_1 z_0} + c_2 e^{\lambda_2 z_0} \end{cases}.$$

Da primeira equação obtemos

$$c_1 = \frac{w'_0 - c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 z'_0}}{\lambda_1 e^{\lambda_1 z'_0}}.$$

Substituindo o valor de  $c_1$  na segunda equação temos que

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{w'_0 - c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 z'_0}}{\lambda_1 e^{\lambda_1 z'_0}} e^{\lambda_1 z_0} + c_2 e^{\lambda_2 z_0} \Rightarrow \\ w_0 - \frac{w'_0 e^{\lambda_1(z_0 - z'_0)}}{\lambda_1} &= c_2 \left( -\frac{e^{\lambda_1(z_0 - z'_0) + \lambda_2 z'_0}}{\lambda_1} + e^{\lambda_2 z_0} \right) \Rightarrow c_2 = \frac{w_0 \lambda_1 - w'_0 e^{\lambda_1(z_0 - z'_0)}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 z_0} - e^{\lambda_1(z_0 - z'_0) + \lambda_2 z'_0}}. \end{aligned}$$

Por fim, obtemos que

$$c_1 = \frac{w'_0}{\lambda_1 e^{\lambda_1 z'_0}} - \left( \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 z'_0}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 z_0} - e^{\lambda_1(z_0 - z'_0) + \lambda_2 z'_0}} \right) \left( \frac{w_0 \lambda_1 - w'_0 e^{\lambda_1(z_0 - z'_0)}}{\lambda_1 e^{\lambda_1 z'_0}} \right).$$

Portanto existem únicos  $c_1, c_2$  satisfazendo as condições do PVI dadas, ou seja, existe uma única solução inteira para problema de valor inicial (PVI).

**Definição 4.2.2.1** Dada uma função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , define-se a expressão

$$\left( \frac{d}{dz} - \lambda_1 \right) f(z)$$

Da seguinte maneira:

$$\left( \frac{d}{dz} - \lambda_1 \right) f(z) = f'(z) - \lambda_1 f(z).$$

Considere a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da respectiva equação característica

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

são determinantes para a solução geral da equação. Sabemos que o polinômio característico pode ser fatorado na forma

$$z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2),$$

o que sugere uma decomposição análoga para o operador diferencial associado à equação original.

Dessa forma, é natural esperar que a equação diferencial possa ser reescrita como

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = \left( \frac{d}{dz} - \lambda_1 \right) \left( \frac{d}{dz} - \lambda_2 \right) w.$$

De fato, usando a definição 4.2.2.1 temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dz} - \lambda_2\right)w &= \left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right)\left(\frac{dw}{dz} - \lambda_2 w\right) = \frac{d^2 w}{dz^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{dw}{dz} + \lambda_1 \lambda_2 w \\ &= \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w. \end{aligned}$$

De um modo mais geral ainda, considere a equação

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  as raízes da sua equação característica associada

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Como podemos fatorar o polinômio característico pode ser fatorado na forma

$$z^n + \dots + a_1 z + a_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n),$$

é natural conjecturar que a equação diferencial possa ser reescrita como

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = \left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dz} - \lambda_2\right) \dots \left(\frac{d}{dz} - \lambda_n\right)w.$$

Usaremos esse fato para encontrar a solução geral das EDOs de ordem  $n \geq 3$ .

#### 4.2.3 EDOs homogêneas de terceira ordem

Se  $n = 3$ , então a EDO homogênea é dada por

$$\frac{d^3 w}{dz^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Portanto, sua equação característica associada é

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

que possui três raízes complexas  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , que podem ser todas distintas, todas iguais ou tais que existem duas distintas. Vamos considera, primeiramente, o caso em que  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

**Teorema 4.2.3.1** Se  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são as raízes distintas da equação característica

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^3 w}{dz^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então existem constantes  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  tais que

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 &\Rightarrow -a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, a_1 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \text{ e } -a_0 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

Usando as equações acima e o fato de

$$f'''(z) + a_2 f''(z) + a_1 f'(z) + a_0 f(z) = 0,$$

observamos que

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{d}{dz} - \lambda_1 \right) [f''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) + \lambda_2\lambda_3f(z)] \\
 &= f'''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f''(z) + \lambda_2\lambda_3f'(z) - \lambda_1f''(z) + \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) \\
 & \quad - \lambda_1\lambda_2\lambda_3f(z) \\
 &= f'''(z) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)f''(z) + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)f'(z) \\
 & \quad - \lambda_1\lambda_2\lambda_3f(z) = f'''(z) + a_2f''(z) + a_1f'(z) + a_0f(z) = 0,
 \end{aligned}$$

ou seja,  $f''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) + \lambda_2\lambda_3f(z)$  é solução da EDO de primeira ordem

$$\frac{dw}{dz} = \lambda_1 w$$

e, conseqüentemente, existe uma constante  $\hat{c} \in \mathbb{C}$  tal que

$$f''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) + \lambda_2\lambda_3f(z) = \hat{c}e^{\lambda_1 z}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Como a equação

$$f''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) + \lambda_2\lambda_3f(z) = \hat{c}e^{\lambda_1 z}$$

é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, conclui-se que a solução geral pode ser escrita  $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$ , onde  $f_h(z)$  representa a solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é dada por  $(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) = 0$ , enquanto  $f_p(z)$  corresponde a uma solução particular EDO

$$f''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) + \lambda_2\lambda_3f(z) = \hat{c}e^{\lambda_1 z}.$$

Pelo teorema 4.2.2.1 existem constantes  $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  tal que

$$f_h(z) = c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por fim, como  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ , segue que  $(\lambda_1^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \neq 0$ , daí tomando

$$c_1 = \frac{\hat{c}}{\lambda_1^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}$$

temos que  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  é uma solução particular de

$$f''(z) - (\lambda_2 + \lambda_3)f'(z) + \lambda_2\lambda_3f(z) = \hat{c}e^{\lambda_1 z}.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 z} - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z} + \lambda_2\lambda_3 c_1 e^{\lambda_1 z} = \hat{c}e^{\lambda_1 z} \\
 & \Leftrightarrow e^{\lambda_1 z} c_1 (\lambda_1^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = \hat{c}e^{\lambda_1 z} \\
 & \Leftrightarrow c_1 (\lambda_1^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = \hat{c} \\
 & \Leftrightarrow c_1 = \frac{\hat{c}}{\lambda_1^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}.
 \end{aligned}$$

Portanto temos que



$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 4.2.3.2** Se  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são as raízes da equação característica

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

com  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$  e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^3 w}{dz^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então existem constantes  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  tais que

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + (c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Inicialmente, note que

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow -a_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2, a_1 = 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2, -a_0 = \lambda_1 \lambda_2^2.$$

Usando as equações acima e o fato de

$$f'''(z) + a_2 f''(z) + a_1 f'(z) + a_0 f(z) = 0,$$

observamos que

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} - \lambda_1 \right) [f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z)] \\ &= f'''(z) - 2\lambda_2 f''(z) + \lambda_2^2 f'(z) - \lambda_1 f''(z) + \lambda_1 2\lambda_2 f'(z) - \lambda_1 \lambda_2^2 f(z) \\ &= f'''(z) - (\lambda_1 + 2\lambda_2) f''(z) + (2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) f'(z) - \lambda_1 \lambda_2^2 f(z) \\ &= f'''(z) + a_2 f''(z) + a_1 f'(z) + a_0 f(z) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z)$  é solução da EDO de primeira ordem

$$\frac{dw}{dz} = \lambda_1 w$$

e, conseqüentemente, existe uma constante  $\hat{c} \in \mathbb{C}$  tal que

$$f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z) = \hat{c} e^{\lambda_1 z}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Como a equação

$$f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z) = \hat{c} e^{\lambda_1 z}$$

é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, conclui-se que a solução geral pode ser escrita  $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$ , onde  $f_h(z)$  representa a solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é dada por  $(z - \lambda_2)^2 = 0$ , enquanto  $f_p(z)$  corresponde a uma solução particular da EDO

$$f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z) = \hat{c} e^{\lambda_1 z}.$$

Pelo teorema 4.2.2.2 existem constantes  $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  tal que

$$f_h(z) = (c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por fim, como  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ , segue que  $(\lambda_1^2 - 2\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2^2) \neq 0$ , daí tomando

$$c_1 = \frac{\hat{c}}{\lambda_1^2 - 2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2^2}$$

temos que  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  é uma solução particular de

$$f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z) = \hat{c} e^{\lambda_1 z}.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 z} - 2\lambda_2 \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z} + \lambda_2^2 c_1 e^{\lambda_1 z} &= \hat{c} e^{\lambda_1 z} \\ \Leftrightarrow e^{\lambda_1 z} c_1 (\lambda_1^2 - 2\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2^2) &= \hat{c} e^{\lambda_1 z} \\ \Leftrightarrow c_1 (\lambda_1^2 - 2\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2^2) &= \hat{c} \\ \Leftrightarrow c_1 &= \frac{\hat{c}}{\lambda_1^2 - 2\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + (c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 4.2.3.3** Se  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são as raízes da equação característica

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

com  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^3 w}{dz^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então existem constantes  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  tais que

$f(z) = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3) e^{\lambda z}, \forall z \in \mathbb{C}$ , onde  $\lambda$  é a raiz tripla da equação característica

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que a função inteira  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(z) = \frac{1}{2} e^{-\lambda z} (f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z))$$

é constante. De fato, note que

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \lambda)^3 \Rightarrow 3\lambda = -a_2, 3\lambda^2 = a_1 \text{ e } \lambda^3 = -a_0.$$

Usando as equações acima e o fato de

$$f'''(z) + a_2 f''(z) + a_1 f'(z) + a_0 f(z) = 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} g'(z) &= -\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z} (f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z)) + \frac{1}{2} e^{-\lambda z} (f'''(z) - 2\lambda f''(z) + \lambda^2 f'(z)) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda z} [f'''(z) - 3\lambda f''(z) + 3\lambda^2 f'(z) - \lambda^3 f(z)] \\ &= f'''(z) + a_2 f''(z) + a_1 f'(z) + a_0 f(z) = 0, \end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Portanto temos que  $g$  é constante, ou seja, existe  $c_1 \in \mathbb{C}$  tal que

$$c_1 = \frac{1}{2} e^{-\lambda z} (f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z)) \Rightarrow f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z) = 2c_1 e^{\lambda z}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Como a equação

$$f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z) = c_1 e^{\lambda z}$$

é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, conclui-se que a solução geral pode ser escrita como  $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$ , onde  $f_h(z)$  representa a solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é dada por  $(z - \lambda)^2 = 0$ , enquanto  $f_p(z)$  corresponde a uma solução particular EDO

$$f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z) = 2c_1 e^{\lambda z}.$$

Pelo teorema 4.2.2.2 existem constantes  $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  tal que

$$f_h(z) = (c_2 z + c_3) e^{\lambda z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Finalmente, observemos que  $f_p(z) = c_1 z^2 e^{\lambda z}$  é uma solução particular da EDO

$$f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z) = 2c_1 e^{\lambda z}.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} f_p''(z) - 2\lambda f_p'(z) + \lambda^2 f_p(z) &= c_1 z^2 \lambda^2 e^{\lambda z} + 2c_1 z \lambda e^{\lambda z} + 2c_1 e^{\lambda z} + 2c_1 z \lambda e^{\lambda z} - 2\lambda(c_1 z^2 \lambda e^{\lambda z} + 2c_1 z e^{\lambda z}) \\ &\quad + \lambda^2 c_1 z^2 e^{\lambda z} = 2c_1 e^{\lambda z}. \end{aligned}$$

Segue que

$$f(z) = (c_2 z + c_3) e^{\lambda z} + c_1 z^2 e^{\lambda z} = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3) e^{\lambda z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Usando os três teoremas anteriores, chegamos a seguinte conclusão.

**Corolário 4.2.3.1** Dados  $(z_0, w_0), (z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$ , existe uma única solução inteira para o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{d^3 w}{dz^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0 \\ w(z_0) = w_0 \\ \frac{dw}{dz}(z_1) = w_1 \\ \frac{d^2 w}{dz^2}(z_2) = w_2 \end{cases}.$$

Demonstração: A demonstração é feita de modo análogo à solução do corolário 4.2.2.1.

#### 4.2.4 EDOs de ordem quatro ou superior

**Teorema 4.2.4.1** Seja  $n \geq 4$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  as raízes da equação característica

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0.$$

Suponha que  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  seja uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0.$$

Nesse caso, temos que

I. Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são dois a dois distintos, então

$$f(z) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k z}.$$

II. Sendo  $\lambda_1 = \lambda_2$  a única raiz dupla, temos

$$f(z) = (c_1 z + c_2) e^{\lambda_2 z} + \sum_{k=3}^n c_k e^{\lambda_k z}.$$

III. Sendo  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  a única raiz tripla, temos

$$f(z) = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z} + \sum_{k=4}^n c_k e^{\lambda_k z}.$$

IV. Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$  são as raízes distintas da equação característica

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0,$$

com  $\lambda_k$  de multiplicidade  $m_k$  e  $p_k(z) \in \mathbb{C}[z]$  um polinômio de grau  $m_k - 1$ , para cada  $k \in \{1, 2, \dots, j\}$  e  $m_1 + m_2 + \dots + m_j = n$ , então

$$f(z) = \sum_{k=1}^j p_k(z) e^{\lambda_k z}.$$

Demonstração: I. Vamos fazer a demonstração usando indução matemática sobre  $n$ .

Os casos em que  $n = 1, 2, 3$  já foram demonstrados anteriormente. Suponha agora que o resultado seja válido para  $n = k$ , ou seja, se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  dois a dois distintos, são as raízes da equação característica

$$z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma solução inteira da EDO

$$\frac{d^k w}{dz^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1} w}{dz^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dz} + a_0 w = 0,$$

então

$$f(z) = \sum_{i=1}^k c_i e^{\lambda_i z}.$$

Vamos mostrar que o resultado vale para  $n = k + 1$ . Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
z^{k+1} + a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0 &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_{k+1}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k+1} = -a_k, \\
\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_k \lambda_{k+1} &= a_{k-1}, \\
&\vdots \\
\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} &= (-1)^n a_0.
\end{aligned}$$

Usando as igualdades acima e considerando que

$$f^{k+1}(z) + a_k f^k(z) + \dots + a_1 f'(z) + a_0 f(z) = 0,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right) [f^k(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \dots + \lambda_k \lambda_{k+1})f^{k-2}(z) \\
+ \dots + (-1)^n \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f(z)] \\
= f^{k+1}(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^k(z) \\
+ (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \dots + \lambda_k \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + \dots + (-1)^n \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f'(z) \\
- \lambda_1 f^k(z) + \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + \dots \\
+ (-1)^{n+1} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f(z) \\
= f^{k+1}(z) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^k(z) + \dots \\
+ (-1)^{n+1} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f(z) \\
= f^{k+1}(z) + a_k f^k(z) + \dots + a_1 f'(z) + a_0 f(z) \\
= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f^k(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \dots + \lambda_k \lambda_{k+1})f^{k-2}(z) + \dots \\
+ (-1)^n \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f(z)
\end{aligned}$$

é solução da EDO de primeira ordem

$$\frac{dw}{dz} = \lambda_1 w$$

e, conseqüentemente, existe uma constante  $\hat{c} \in \mathbb{C}$  tal que

$$\begin{aligned}
f^k(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \dots + \lambda_k \lambda_{k+1})f^{k-2}(z) + \dots \\
+ (-1)^n \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f(z) = \hat{c} e^{\lambda_1 z}
\end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Como a equação

$$\begin{aligned}
f^k(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \dots + \lambda_k \lambda_{k+1})f^{k-2}(z) + \dots \\
+ (-1)^n \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \lambda_{k+1} f(z) = \hat{c} e^{\lambda_1 z}
\end{aligned}$$

é uma EDO linear não homogênea, conclui-se que a solução geral pode ser escrita como  $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$ , onde  $f_h(z)$  representa a solução da EDO homogênea associada, cuja

equação característica é dada por  $(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) \dots (z - \lambda_{k+1}) = 0$ , enquanto  $f_p(z)$  corresponde a uma solução particular EDO

$$f^k(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \dots + \lambda_k\lambda_{k+1})f^{k-2}(z) + \dots \\ + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1}f(z) = \hat{c}e^{\lambda_1 z}.$$

Por hipótese de indução, temos que

$$f_h(z) = \sum_{i=2}^{k+1} c_i e^{\lambda_i z}.$$

Por fim, considerando que  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_{k+1}$ , pode-se afirmar que

$$\lambda_1^k - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})\lambda_1^{k-1} + \dots + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1} \neq 0.$$

Assim, ao definir

$$c_1 = \frac{\hat{c}}{\lambda_1^k - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})\lambda_1^{k-1} + \dots + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1}}$$

obtemos que  $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$  representa uma solução particular da equação

$$f^k(z) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})f^{k-1}(z) + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \dots + \lambda_k\lambda_{k+1})f^{k-2}(z) + \dots \\ + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1}f(z) = \hat{c}e^{\lambda_1 z}.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} \lambda_1^k c_1 e^{\lambda_1 z} - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})\lambda_1^{k-1} c_1 e^{\lambda_1 z} + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1} c_1 e^{\lambda_1 z} &= \hat{c}e^{\lambda_1 z} \\ \Leftrightarrow e^{\lambda_1 z} c_1 (\lambda_1^k - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})\lambda_1^{k-1} + \dots + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1}) &= \hat{c}e^{\lambda_1 z} \\ \Leftrightarrow c_1 (\lambda_1^k - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})\lambda_1^{k-1} + \dots + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1}) &= \hat{c} \\ \Leftrightarrow c_1 &= \frac{\hat{c}}{\lambda_1^k - (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{k+1})\lambda_1^{k-1} + \dots + (-1)^n \lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_k\lambda_{k+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$f(z) = f_h(z) + f_p(z), = \sum_{i=2}^{k+1} c_i e^{\lambda_i z} + c_1 e^{\lambda_1 z} = \sum_{i=1}^{k+1} c_i e^{\lambda_i z},$$

como queríamos demonstrar. Os demais casos podem ser demonstrados de maneira análoga.

## 5 APLICAÇÕES

### 5.1 Circuito elétrico

**Exemplo 5.1.1** Um circuito possui um capacitor de  $\frac{1}{8} F$ , um resistor de  $4\Omega$  e um indutor de  $2H$ , em série. O capacitor encontra-se descarregado. No instante  $t = 0$  conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de  $12e^{-t}V$ , e o circuito é fechado. Determine a carga no capacitor em qualquer instante  $t > 0$ .

Solução: Pela lei das tensões de Kirchhoff temos que

$$V_L + V_R + V_C = V(t),$$

com

$$V_L = L \frac{dI}{dt}, V_R = RI, V_C = \frac{Q}{C},$$

onde  $L$  é um indutor,  $R$  o resistor,  $C$  o capacitor,  $Q = Q(t)$  a carga e  $I = \frac{dQ}{dt}$  a corrente do circuito. Dessa forma segue que a EDO para a carga  $Q(t)$  no capacitor é dada por

$$2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + 4 \frac{dQ}{dt} + 8Q = 12e^{-t}.$$

Dividindo por 2 temos que

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2 \frac{dQ}{dt} + 4Q = 6e^{-t}.$$

A equação homogênea associada a EDO

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2 \frac{dQ}{dt} + 4Q = 6e^{-t}$$

é

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2 \frac{dQ}{dt} + 4Q = 0.$$

Portanto, sua equação característica é

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0,$$

cujas raízes são

$$\lambda = -1 \mp i\sqrt{3}.$$

Segue do teorema que

$$Q(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{3}i)t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{3}i)t}, c_1 \text{ e } c_2 \text{ complexos.}$$

Usando a definição da exponencial complexa temos que

$$\begin{aligned}
Q(t) &= c_1 e^{(-1-\sqrt{3}i)t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{3}i)t} \\
&= e^{-t} [c_1 (\cos(-\sqrt{3}t) + i \sin(-\sqrt{3}t)) + c_2 (\cos \sqrt{3}t + i \sin -\sqrt{3}t)] \\
&= e^{-t} [c_1 (\cos \sqrt{3}t - i \sin \sqrt{3}t) + c_2 (\cos \sqrt{3}t + i \sin -\sqrt{3}t)] \\
&= e^{-t} [(c_1 + c_2) \cos \sqrt{3}t + i(c_1 - c_2) \sin \sqrt{3}t].
\end{aligned}$$

Portanto, tomando  $\bar{c}_1 = c_2$ , existem  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  tais que

$$Q(t) = e^{-t} (c_3 \cos \sqrt{3}t + c_4 \sin \sqrt{3}t),$$

onde  $c_3 = c_1 + c_2$  e  $c_4 = (c_1 - c_2)i$ .

Como a fonte é  $12e^{-t}$ , assumimos uma solução particular da forma  $Q_p(t) = ke^{-t}$ .

Calculando  $Q_p''$ ,  $Q_p'$  e substituindo na EDO, obtemos

$$ke^{-t} - 2ke^{-t} + 4ke^{-t} = 6e^{-t} \Rightarrow 3ke^{-t} = 6e^{-t} \Rightarrow k = 2.$$

Portanto,  $Q_p(t) = 2e^{-t}$  e  $Q(t) = e^{-t} (c_3 \cos \sqrt{3}t + c_4 \sin \sqrt{3}t) + 2e^{-t}$ .

Finalmente, usando as condições iniciais, obtemos

$$Q(0) = 0 \Rightarrow 0 = e^{-0} (c_3 \cos 0 + c_4 \sin 0) + 2e^{-0} \Rightarrow c_3 = -2$$

e

$$\begin{aligned}
I(0) = Q'(0) = 0 \Rightarrow 0 &= -e^{-0} (-2 \cos 0 + c_4 \sin 0) + e^{-0} (2 \sin 0 + c_4 \cos 0) - 2e^{-0} \\
&\Rightarrow c_4 = 0.
\end{aligned}$$

Desse modo concluímos que

$$Q(t) = -2e^{-t} \cos \sqrt{3}t + 2e^{-t}.$$

De modo análogo ao exemplo anterior, podemos obter o seguinte resultado:

Considere a EDO

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

Se  $\lambda = a \mp bi$  são as raízes complexas da equação característica associada, então a solução geral da edo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

é dada por

$$f(y) = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx), \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

**Exemplo 5.1.2** Um circuito LC em série possui um capacitor  $C = \frac{1}{10}F$  e um indutor  $L = 1H$ .

O capacitor está inicialmente carregado com uma carga  $Q(0) = 6C$ , e a corrente inicial é zero.

Determine a carga no capacitor em qualquer instante  $t > 0$ .

Solução: Para um circuito LC em serie, temos a seguinte equação



$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Substituindo os valores  $C = \frac{1}{10}$  e  $L = 1$ , obtemos

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 10Q = 0,$$

que é uma EDO homogênea de segunda ordem, cuja equação característica associada

$$\lambda^2 + 10 = 0$$

possui raízes complexas  $\lambda = \mp i\sqrt{10}$ .

Dessa forma, temos que

$$Q(t) = c_1 \cos \sqrt{10}t + c_2 \sin \sqrt{10}t.$$

Finalmente, utilizamos as condições iniciais para encontrar os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

Note que

$$Q(0) = 6 \Rightarrow c_1 = 6$$

e

$$Q'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$Q(t) = 6 \cos \sqrt{10}t.$$

## 5.2 Movimento harmônico simples

**Exemplo 5.2.1** Uma partícula de massa  $m = 1$  desloca-se sobre o eixo  $x$  sob a ação de uma força elástica  $F = -4x$ . Supondo  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = -1$ , determine a velocidade no instante  $t$ .

Solução: Pela segunda lei de Newton, com  $m = 1$ , temos que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -4x.$$

Reorganizando, obtemos a EDO homogênea

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 0,$$

cujas equação característica associada é dada por

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Como  $\lambda = \mp 2i$ , segue do teorema que

$$x(t) = c_1 e^{(2i)t} + c_2 e^{(-2i)t}, c_1 \text{ e } c_2 \text{ complexos.}$$

Dessa forma, temos que existem constantes  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ , tais que

$$x(t) = c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t.$$

Usando a condição  $x(0) = 1$ , obtemos

$$1 = c_3 \cos 0 + c_4 \sin 0 \Rightarrow c_3 = 1,$$

ou seja,

$$x(t) = \cos 2t + c_4 \sin 2t.$$

Finalmente, usando o fato de  $x'(0) = -1$ , obtemos

$$-1 = -2 \sin 0 + 2c_4 \cos 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$x(t) = \cos 2t + -\frac{1}{2} \sin 2t \text{ e } x'(t) = v(t) = -2 \sin 2t - \cos 2t.$$

**Exemplo 5.2.2** Uma esfera de massa  $m = 1$  está presa a um fio de comprimento  $L = 2,45 \text{ m}$  e oscila sob ação da gravidade  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , formando um pêndulo simples. Suponha que, no instante  $t = 0$ , o pêndulo é solto do repouso com um ângulo  $0,1 \text{ rad}$ . Determine a medida do ângulo  $\theta$  em função do tempo.

Solução: Para pequenas oscilações, a equação do movimento de um pêndulo simples é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

Substituindo os valores  $g = 9,8$  e  $L = 2,45$ , obtemos a EDO

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4\theta = 0,$$

cujas equação característica associada é dada por

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Portanto, pelo exemplo anterior temos que

$$\theta(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t,$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Usando a condição inicial  $\theta(0) = 0,1$ , obtemos

$$0,1 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Rightarrow c_1 = 0,1,$$

ou seja,

$$\theta(t) = 0,1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Por último, usando que  $\theta'(0) = 0$ , obtemos

$$0 = -0,2\sin 0 + 2c_2\cos 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Logo,  $\theta(t) = 0,1\cos 2t$ .

**Exemplo 5.2.3** Um corpo de massa  $m = 2 \text{ kg}$  está preso a uma mola com constante elástica  $k = 16 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Inicialmente, o corpo é deslocado para  $x(0) = 0,1\text{m}$  de sua posição de equilíbrio e liberada a partir do repouso. Determine a posição  $x(t)$  do corpo em função do tempo.

Solução: Pela segunda lei de Newton, a equação que descreve o movimento do sistema massa mola sem amortecimento é dada por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Substituindo os valores,  $m = 2$  e  $k = 16$ , obtemos

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0,$$

ou ainda, equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8x = 0,$$

que é uma EDO homogênea de segunda ordem, cuja equação característica associada

$$\lambda^2 + 8 = 0$$

possui raízes complexas  $\lambda = \mp i2\sqrt{2}$ .

Dessa forma, temos que

$$x(t) = c_1\cos 2\sqrt{2}t + c_2\sin 2\sqrt{2}t.$$

Finalmente, utilizamos as condições iniciais para encontrar os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

Note que

$$x(0) = 0,1 \Rightarrow c_1 = 0,1$$

e

$$x'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$x(t) = \frac{1}{10}\cos 2\sqrt{2}t.$$

## 6 CONCLUSÃO

Esta dissertação explorou os números complexos, as funções holomorfas e as equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares com coeficientes constantes, finalizando com aplicações em problemas reais.

Inicialmente, foram introduzidos os números complexos, suas propriedades algébricas e geométricas, estabelecendo a base necessária para a análise complexa.

Em seguida, aprofundou-se na teoria das funções holomorfas, apresentando os conceitos de derivabilidade complexa e as condições de Cauchy-Riemann. Um resultado fundamental demonstrado foi que uma função holomorfa definida em um aberto conexo é constante se, e somente se, sua derivada é nula em todo o domínio, um teorema essencial para o desenvolvimento teórico posterior.

Voltamos, então, nossa atenção para as equações diferenciais lineares de coeficientes constantes no contexto complexo. Utilizando o método da equação característica, mostramos como encontrar soluções gerais para EDOs de ordem arbitrária, sem o uso de técnicas de integração.

Por fim, exploramos aplicações concretas dessas equações. Analisamos circuitos elétricos (RLC) e (LC), sistemas massa-mola e o pêndulo simples, destacando como as soluções de EDOs modelam o comportamento dinâmico desses sistemas. Em todos os casos, a modelagem matemática baseada em EDOs permitiu compreender fenômenos oscilatórios e amortecimentos, aspectos fundamentais em engenharia e física.

Concluimos, portanto, que o estudo dos números complexos e das funções holomorfas não apenas enriquece a teoria matemática, mas também fornece ferramentas eficazes para a resolução de problemas aplicados. A teoria das EDOs com coeficientes constantes, fortemente apoiada pela análise complexa, mostra-se extremamente útil na modelagem de problemas reais, unindo teoria e prática de forma harmoniosa. Essa interligação entre o rigor matemático e sua utilidade prática ressalta a relevância do estudo desenvolvido ao longo desta dissertação.

## REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo:** volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

MELO, M. F. Edos lineares complexas com coeficientes constantes: teoria geral com um mínimo de pré-requisitos. **Revista do professor de matemática**, [S.l.]: v. 1, 2020.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. Tradução de Márcio Koji Umezawa. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 437 p.

## **APÊNDICE A – ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS UTILIZANDO O GEOGEBRA**

### **Apresentação**

Este recurso educacional tem como objetivo facilitar a compreensão dos números complexos no Ensino Médio, destacando suas aplicações em problemas concretos e introduzindo as equações diferenciais ordinárias (EDOs) como equações que aparecem na resolução de problemas reais, sem o rigor matemático avançado. A proposta busca tornar esses tópicos mais acessíveis e compreensíveis aos estudantes, promovendo uma integração harmoniosa entre teoria e prática no currículo escolar.

A introdução desses temas visa não apenas ampliar o conhecimento matemático dos alunos, mas também estimular o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico, habilidades essenciais para estudos futuros em Matemática e áreas correlatas, como Física e Engenharia. Para isso, será elaborada uma sequência didática com o auxílio do GeoGebra, ferramenta que permite uma abordagem visual e interativa.

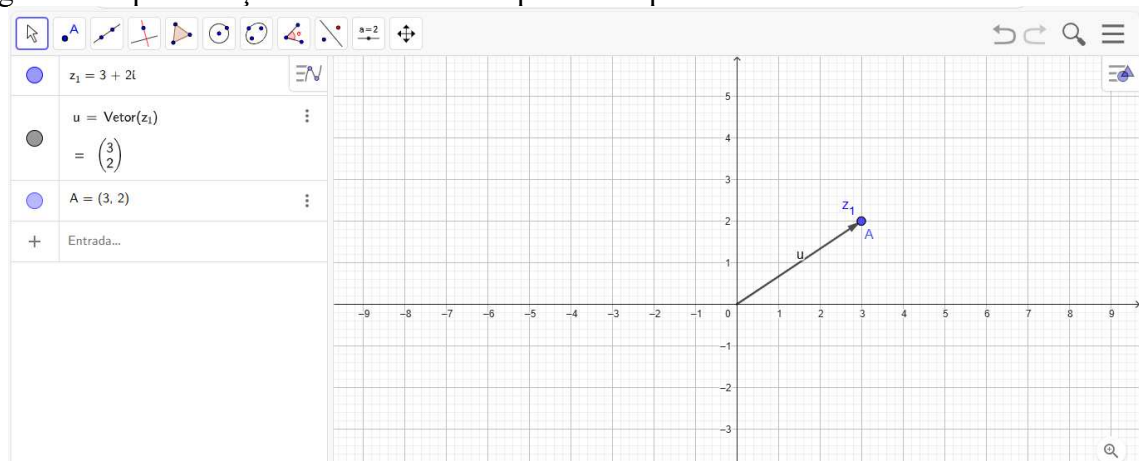
Inicialmente, serão apresentados os números complexos, suas propriedades e representações geométricas, estabelecendo uma base intuitiva para sua compreensão. Em seguida, serão explorados problemas práticos modelados por EDOs, com ênfase na visualização gráfica de suas soluções. Essa abordagem permitirá que os alunos relacionem conceitos abstratos a fenômenos reais, como oscilações em sistemas mecânicos e circuitos elétricos, consolidando o aprendizado de maneira significativa.

Dessa forma, este trabalho não só contribui para a modernização do ensino de Matemática no Ensino Médio, mas também demonstra como ferramentas computacionais, como o GeoGebra, podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, tornando conceitos complexos mais palpáveis e motivadores.

### **Representar números complexos no plano**

Acesse o geogebra online ou abra o aplicativo. Na barra de entrada, digite um número complexo qualquer e clique na tecla enter, por exemplo,  $z_1 = 3 + 2i$ . O geogebra automaticamente interpretará  $z$  como um número complexo e o representará no plano como o ponto (3,2), onde 3 é a parte real (abscissa) e 2 a parte imaginária (ordenada). De modo geral observe que ao inserir um número complexo  $z = a + bi$  na barra de entrada, o geogebra o representará no plano como o ponto (a,b).

Figura 1- Representação dos números complexos no plano



Fonte: Elaborada pelo autor

Geometricamente podemos visualizar o número complexo  $z_1$  como um vetor a partir da origem  $(0,0)$ , basta digitar  $\text{vetor}(z_1)$  na barra de entrada e clicar na tecla enter.

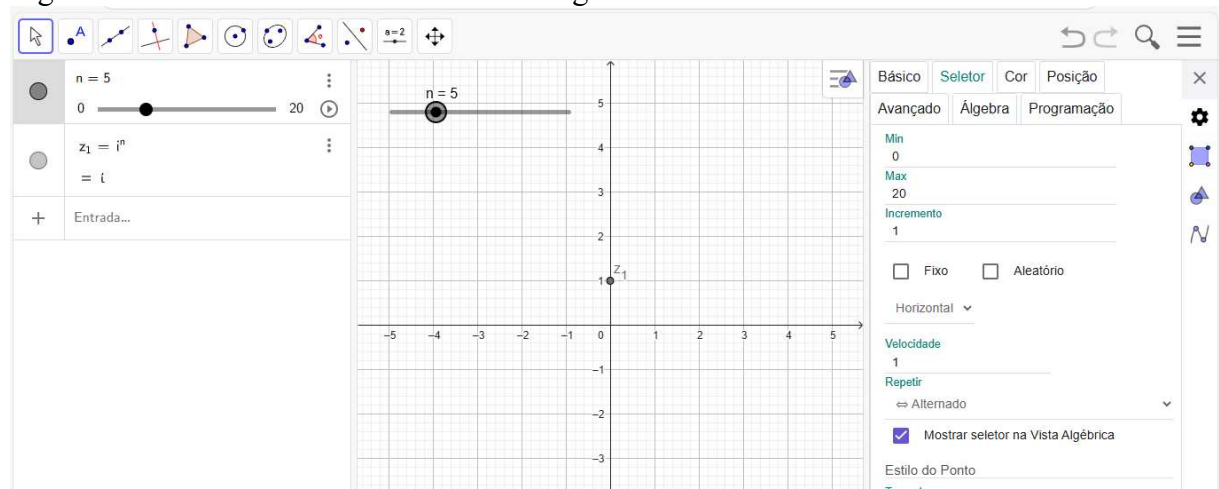
### Potências naturais da unidade imaginária

Para a análise dinâmica das potências da unidade imaginária, utilizaremos o recurso de controle deslizante do GeoGebra. Adiciona-se inicialmente a expressão  $i^n$  na barra de entrada do software, o que automaticamente gera um controle deslizante associado à variável  $n$ . Configure os parâmetros do controle deslizante conforme segue:

- Intervalo de variação:  $[0,20]$ ;
- Incremento: 1.

Esta configuração otimiza a visualização e manipulação interativa das potências sucessivas da unidade imaginária.

Figura 2- Potências naturais da unidade imaginária  $i$



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao mover o controle deslizante, o ponto girará no plano, mostrando em tempo real que:

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i \dots,$$

ou seja, a unidade imaginária  $i$  possui um comportamento cíclico em suas potências, repetindo-se a cada 4 expoentes. Desse modo podemos concluir que

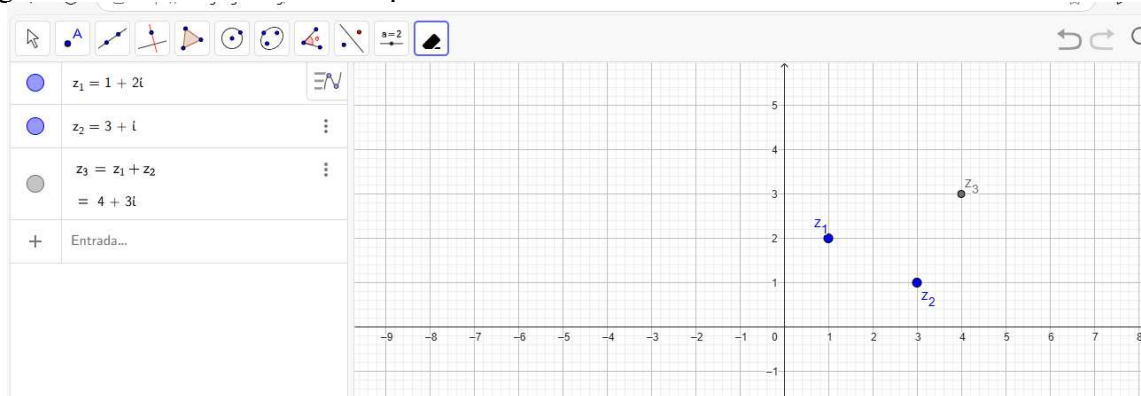
$$i^n = i^r,$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por 4.

### Soma de números complexos

Digite na barra de entrada do geogebra dois números complexos  $z_1, z_2$  quaisquer, por exemplo,  $z_1 = 1 + 2i$  e  $z_2 = 3 + i$ . Para calcular a soma digite  $z_3 = z_1 + z_2$  na barra de entrada.

Figura 3- Soma de números complexos



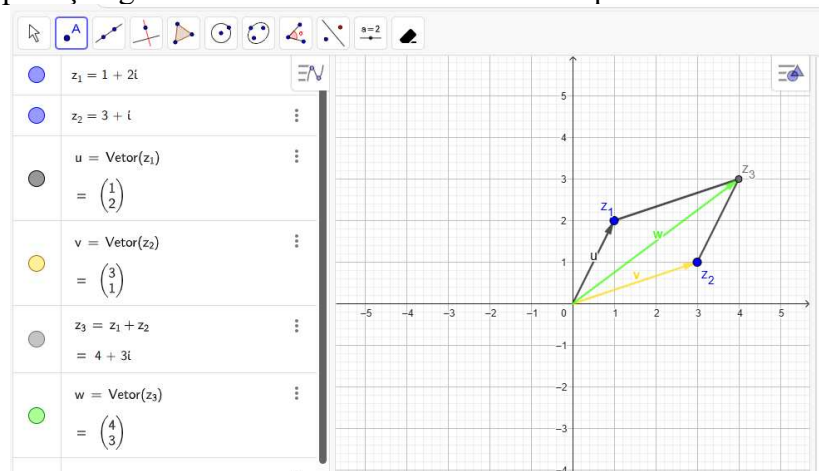
Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos colocar vários exemplos e observar que a parte real de  $z_3$  é obtida pela soma da parte real de  $z_1$  com a parte real de  $z_2$  e a parte imaginária de  $z_3$  pela soma da parte imaginária de  $z_1$  com a parte imaginária de  $z_2$ . Para interpretar geometricamente a soma de números complexos vamos seguir os seguintes passos:

- Digite na barra de entrada  $\text{vetor}(z_1)$ ,  $\text{vetor}(z_2)$  e  $\text{vetor}(z_3)$ ;
- Usando a ferramenta segmento definido por dois pontos crie os segmentos de reta ligando  $z_1$  a  $z_3$  e  $z_2$  a  $z_3$ , formando assim um paralelogramo.



Figura 4- Interpretação geométrica da soma de números complexos



Fonte: Elaborada pelo autor.

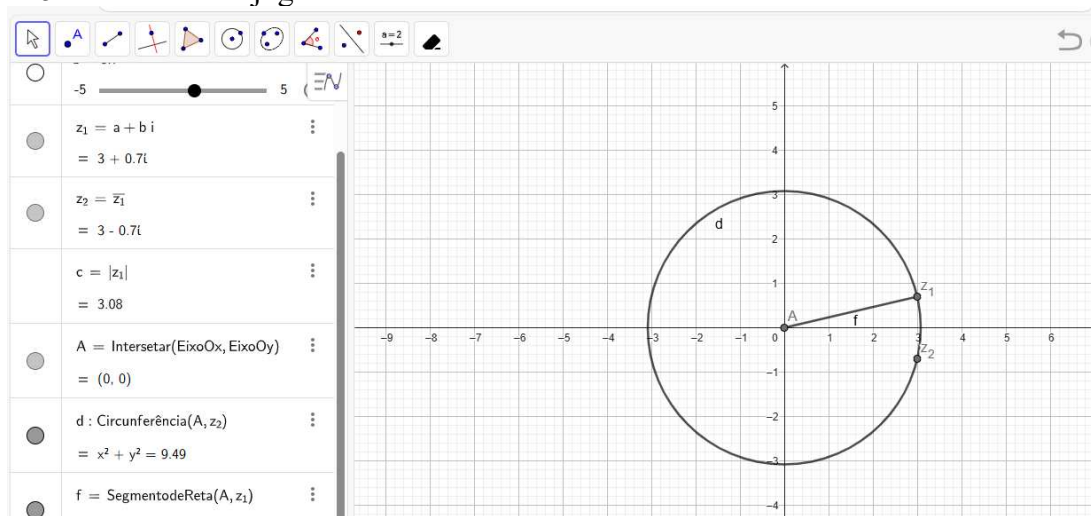
Podemos notar que geometricamente o vetor  $z_3 = z_1 + z_2$  é a diagonal do paralelogramo. A subtração pode ser abordada de maneira totalmente análoga, pois, dados dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , temos que  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ .

### Módulo e conjugado

Para a análise das propriedades de módulo e conjugado de números complexos, adotaremos como recurso metodológico os controles deslizantes do software GeoGebra. A implementação seguirá a seguinte sequência de procedimentos na barra de entrada do programa:

- Digite o número complexo  $z_1 = a + bi$ , automaticamente o geogebra criará um controle deslizante;
- Digite  $\text{vetor}(z_1)$ ;
- Calcule o módulo e o conjugado de  $z_1$  digitando  $\text{abs}(z_1)$  e  $\text{conjugate}(z_1)$ ;
- Utilizando a ferramenta circunferência, dados o centro e raio, crie um círculo centrado na origem com raio  $|z_1|$ .

Figura 5- Módulo e conjugado



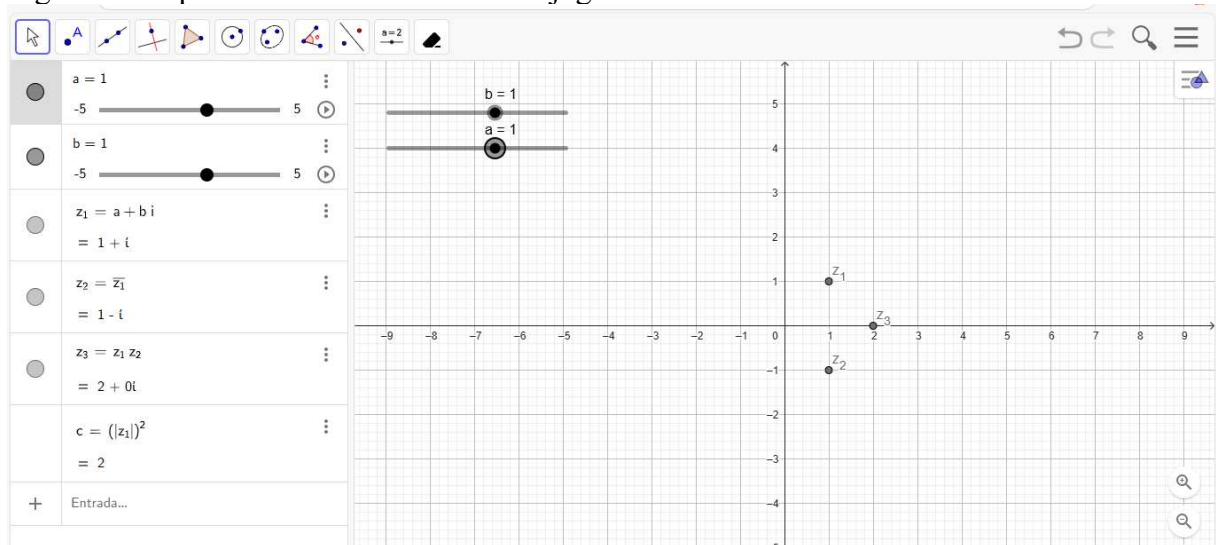
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao mover os controles deslizantes, o ponto  $z_1$ , a circunferência e o conjugado atualizam-se automaticamente, de modo que o vetor  $z_1$  terá sempre sua extremidade final sobre a circunferência e os pontos  $z_1$  e  $z_2$  estarão sempre a mesma distância do eixo real. Dessa forma podemos concluir que o módulo de  $z_1$  é igual a distância de  $z_1$  até a origem e o conjugado de  $z_1$  é a reflexão em relação ao eixo real, além de facilmente notar que se  $z = a + bi$ , então  $\bar{z} = a - bi$ . Podemos ainda deduzir as propriedades do módulo e do conjugado de um número complexo  $z$ . Vamos deduzir, por exemplo, que o produto de um número complexo  $z$  pelo seu conjugado  $\bar{z}$  é igual ao quadrado do seu módulo, seguindo estes passos:

- Escreva o número complexo de  $z = a + bi$ . Isso definirá o número complexo  $z$ , e o GeoGebra criará automaticamente controles deslizantes para a parte real ( $a$ ) e a parte imaginária ( $b$ ) de  $z = a + bi$ .
- Digite  $\text{conjugate}(z_1)$  para obter o conjugado de  $z_1$ ;
- Calcule o produto  $z_1 \bar{z}_1$  e quadrado do módulo de  $z_1$  digitando  $z_3 = z_1 \bar{z}_1$  e  $c = |z_1|^2$ .

Ao mover o controle deslizante, verifica-se que a igualdade  $z_1 \bar{z}_1 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$  permanece válida. Dessa forma, conclui-se que, dado um número complexo  $z = a + bi$ , tem-se que  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ . As demais propriedades relacionadas ao módulo e ao conjugado de números complexos podem ser verificadas seguindo uma metodologia análoga.

Figura 6- Propriedade do módulo e do conjugado



Fonte: Elaborada pelo autor

### Multiplicação de números complexos na forma polar

Para multiplicar números complexos na forma polar no GeoGebra, execute os seguintes passos na barra de entrada:

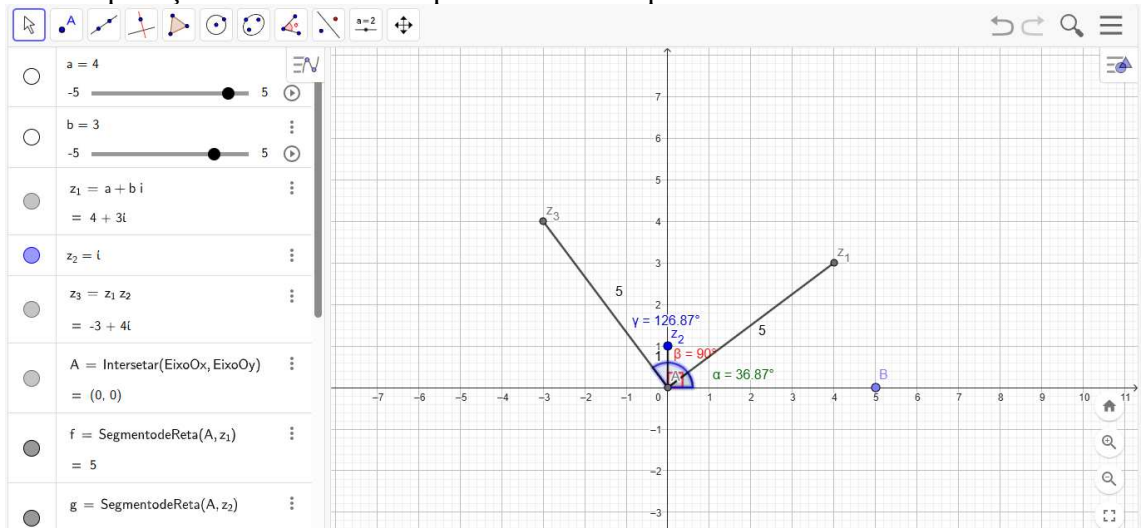
- Escreva o número complexo de  $z_1 = a + bi$ . Isso definirá o número complexo  $z$ , e o GeoGebra criará automaticamente controles deslizantes para a parte real ( $a$ ) e a parte imaginária ( $b$ ) de  $z_1 = a + bi$ ;
- Escreva um número complexo qualquer, por exemplo,  $z_2 = i$ ;
- Calcule o produto  $z_2 \cdot z_1 = z_3$ ;
- Usando a ferramenta segmento, crie os segmentos de reta que ligam o ponto A aos pontos  $z_1, z_2, z_3$ , onde A é a origem do plano.
- Utilizando a ferramenta ângulo, calcule os ângulos que  $z_1, z_2$  e  $z_3$  formam com o eixo real.

Podemos observar, conforme a figura 7, que

$$\arg(z_3) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

e o módulo de  $z_3$  é igual ao produto dos módulos de  $z_1$  e  $z_2$ .

Figura 7- Multiplicação de números complexos na forma polar



Fonte: Elaborada pelo autor

Note ainda que a relação permanece válida durante a variação dos controles deslizantes, comprovando a propriedade para números complexos genéricos. Portanto, a multiplicação na forma polar resume-se a multiplicar os módulos, somar os argumentos e expressar o resultado na forma trigonométrica.

### Divisão de números complexos na forma polar

Para efetuar a divisão de números complexos na forma polar usando o GeoGebra, execute os seguintes passos na barra de entrada:

- Escreva o número complexo de  $z_1 = a + bi$ . Isso definirá o número complexo  $z$ , e o GeoGebra criará automaticamente controles deslizantes para a parte real ( $a$ ) e a parte imaginária ( $b$ ) de  $z_1 = a + bi$ ;
- Escreva um número complexo qualquer, por exemplo,  $z_2 = i$ ;
- Calcule a divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3;$$

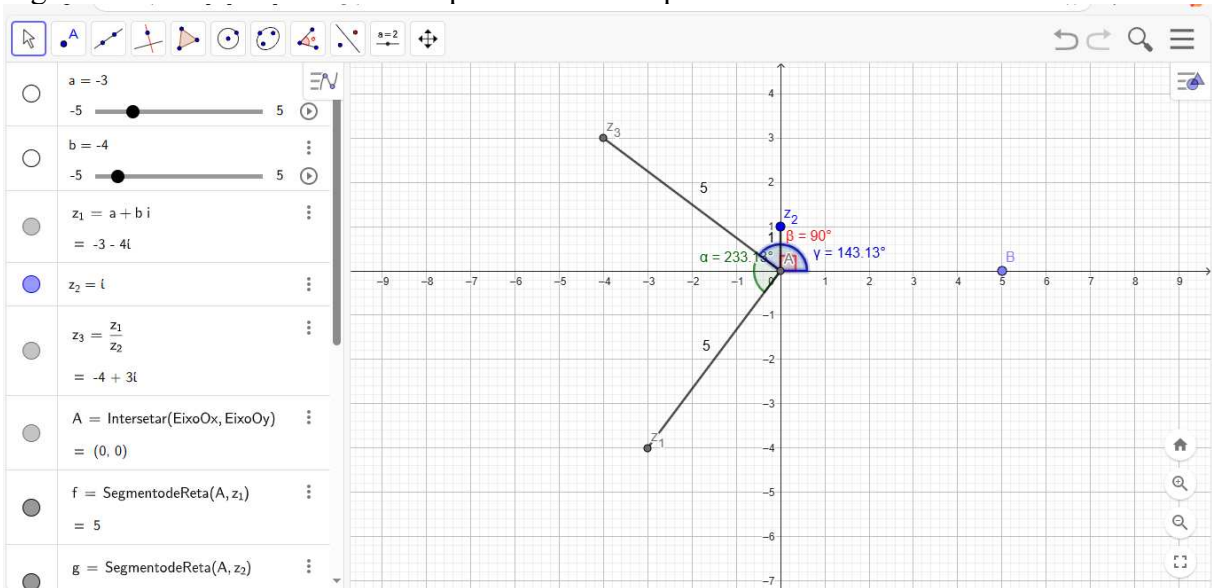
- Usando a ferramenta segmento, crie os segmentos de reta que ligam o ponto A aos pontos  $z_1, z_2, z_3$ , onde A é a origem do plano.
- Utilizando a ferramenta ângulo, calcule os ângulos que  $z_1, z_2$  e  $z_3$  formam com o eixo real.

Podemos observar, conforme a figura 8, que

$$\arg(z_3) = \arg(z_1) - \arg(z_2),$$

e o módulo de  $z_3$  é igual a razão entre os módulos de  $z_1$  e  $z_2$ .

Figura 8- Divisão de números complexos na forma polar



Fonte: Elaborada pelo autor

Note ainda que a relação permanece válida durante a variação dos controles deslizantes, comprovando a propriedade para números complexos genéricos. Portanto, a divisão de números complexos na forma polar resume-se a calcular a razão entre os módulos, subtrair os argumentos e expressar o resultado na forma trigonométrica.

### Raízes enésimas da unidade

No estudo das raízes  $n$ -ésimas da unidade, utilizaremos o GeoGebra para visualização e análise. A implementação seguirá os seguintes passos, a serem executados na barra de entrada do software:

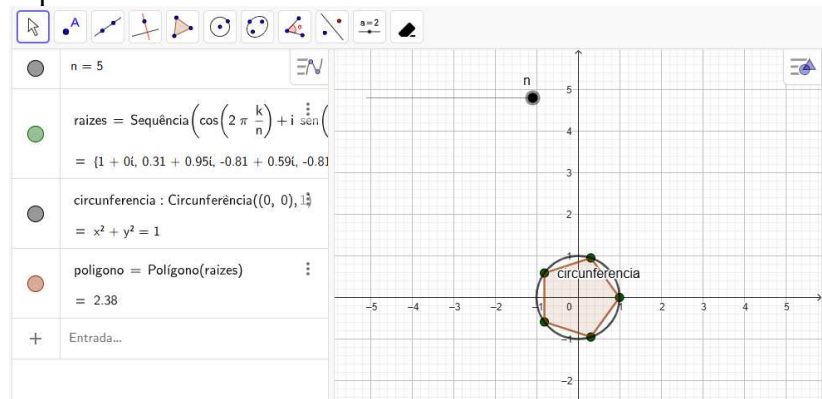
- Defina  $n$ , por exemplo,  $n = 5$ ;
- Digite o código  $\text{raizes}=\text{sequência}(\cos(2\pi * ((k)/(n)) + i \text{sen}(2\pi * ((k)/(n))), k, 0, n - 1)$ ;
- Desenhe o círculo unitário digitando  $\text{circunferência}((0,0),1)$ ;
- Digite  $\text{polígono}=\text{polígono}[\text{raízes}]$  para conectar as raízes e formar um polígono.

As raízes quintas da unidade distribuem-se uniformemente no círculo unitário, com ângulos

$$\frac{2k\pi}{5}, (k = 0,1,2,3,4),$$

conforme a figura 9, ou seja, determinam os vértices de um pentágono regular inscrito no círculo unitário do plano complexo.

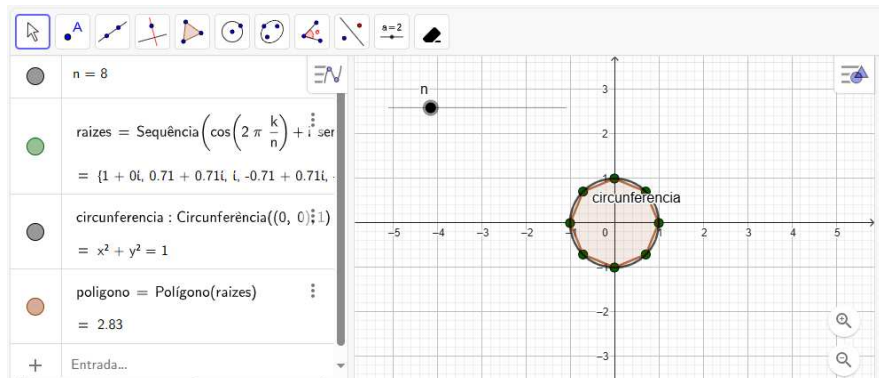
Figura 9-Raízes quinta da unidade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se ainda que a alteração do valor de  $n$  no passo inicial não invalida as propriedades anteriormente estabelecidas. Por exemplo, conforme a Figura 10, para o caso particular em que  $n = 8$ , verifica-se que as raízes oitavas da unidade correspondem precisamente aos vértices de um octógono regular, inscrito no círculo unitário do plano complexo.

Figura 10- Raízes oitavas da unidade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conclui-se, portanto, que as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo unitário determinam os vértices de um polígono regular inscrito no círculo unitário do plano complexo.

### Análise do Comportamento Dinâmico em Sistemas Amortecidos e Circuitos Elétricos: Abordagem Gráfica via GeoGebra

**Exemplo 1.** Um circuito possui um capacitor de  $\frac{1}{8} F$ , um resistor de  $4\Omega$  e um indutor de  $2H$ , em série. O capacitor encontra-se descarregado. No instante  $t = 0$  conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de  $12e^{-t}V$ , e o circuito é fechado. Determine a carga no capacitor em qualquer instante  $t > 0$ .

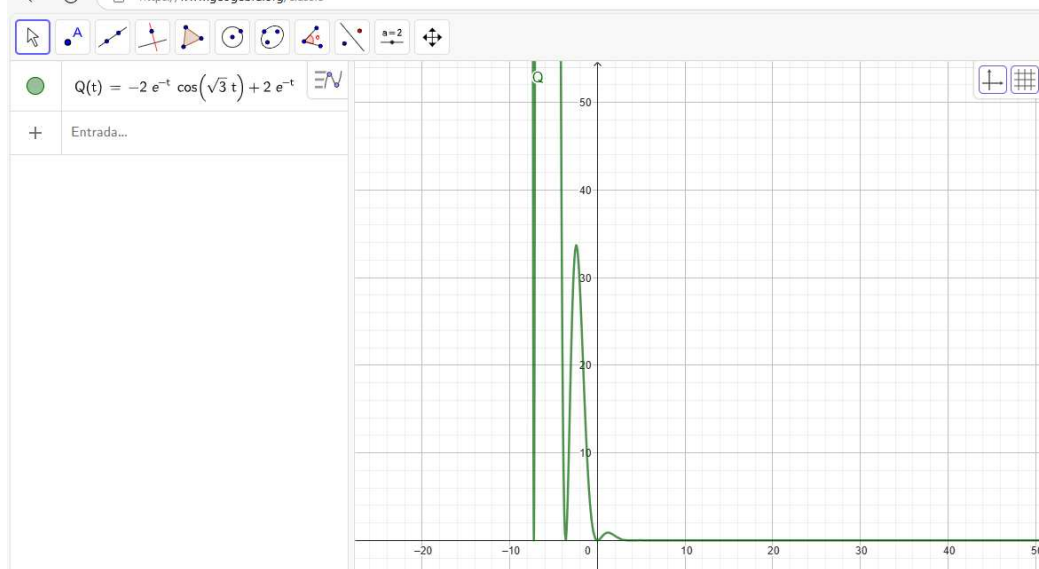
O sistema é modelado pela equação diferencial linear

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\frac{dQ}{dt} + 4Q = 6e^{-t},$$

cujas solução é dada por

$$Q(t) = -2e^{-t}(\cos \sqrt{3}t - 1).$$

Figura 11- Gráfico da solução do exemplo 1



Fonte: Elaborada pelo autor

**Exemplo 2** Um circuito LC em série possui um capacitor  $C = \frac{1}{10}F$  e um indutor  $L = 1H$ . O capacitor está inicialmente carregado com uma carga  $Q(0) = 6C$ , e a corrente inicial é zero. Determine a carga no capacitor em qualquer instante  $t > 0$ .

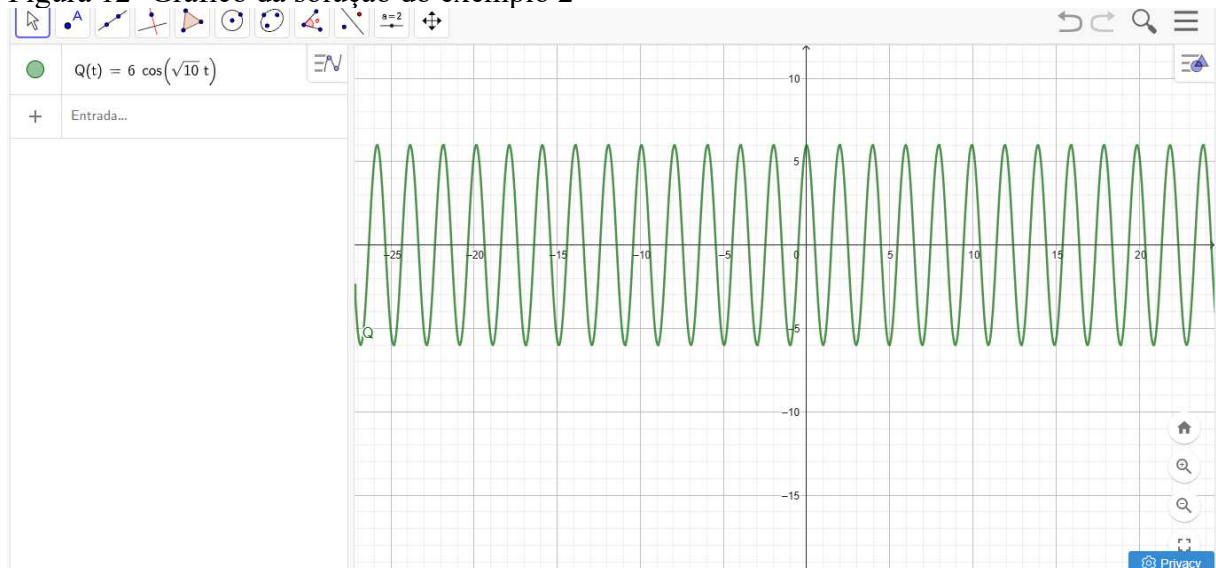
Para esse circuito, temos a seguinte equação

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 10Q = 0,$$

cuja solução é dada por

$$Q(t) = 6\cos \sqrt{10}t.$$

Figura 12- Gráfico da solução do exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor.



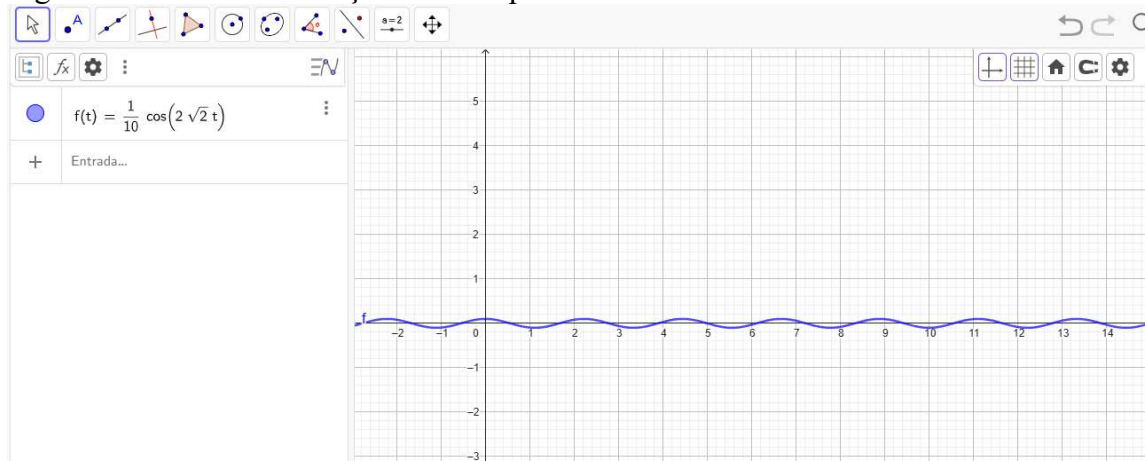
**Exemplo 3** Um corpo de massa  $m = 2 \text{ kg}$  está preso a uma mola com constante elástica  $k = 16 \frac{N}{m}$ . Inicialmente, o corpo é deslocado para  $x(0) = 0,1m$  de sua posição de equilíbrio e liberada a partir do repouso. Determine a posição  $x(t)$  do corpo em função do tempo. A equação que descreve o movimento do sistema massa mola sem amortecimento, com esses dados, é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8x = 0,$$

cuja solução é descrita pela função

$$x(t) = \frac{1}{10} \cos(2\sqrt{2}t).$$

Figura 13- Gráfico da solução do exemplo 3



Fonte: Elaborada pelo autor

### Considerações finais

A adoção do GeoGebra como ferramenta principal revelou-se particularmente eficaz no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que possibilitou a transformação de abstrações matemáticas em representações visuais e interativas. Essa abordagem contribuiu de maneira significativa para a compreensão dos alunos, ao tornar os conceitos mais acessíveis e concretos. Além disso, ao estabelecer conexões entre os conteúdos teóricos e suas aplicações práticas nas áreas da física e da engenharia, foi possível evidenciar a relevância da matemática na explicação de fenômenos do mundo real, como o comportamento de circuitos elétricos e sistemas mecânicos oscilatórios.

Conclui-se, portanto, que a incorporação de tópicos avançados de matemática no ensino médio é não apenas viável, mas também altamente proveitosa, desde que se adote uma abordagem pedagógica que valorize a intuição, a visualização e as aplicações concretas. Essa estratégia contribui não só para a preparação dos estudantes para níveis mais avançados de



estudo, mas também para o desenvolvimento de uma apreciação mais profunda da matemática como linguagem essencial para a compreensão e interpretação do mundo que nos cerca. A experiência proporcionada por esta proposta reforça a relevância de investirmos continuamente em práticas inovadoras que tornem o ensino de matemática mais dinâmico, significativo e inspirador para as novas gerações de estudantes.