



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

JOÃO GONÇALVES LIMA NETO

**ANÁLISE ESTRUTURAL DO CHASSI DE UM BAJA SAE A PARTIR DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A MODELO DINÂMICO MULTICORPO
DO TIPO FOUR-POST**

FORTALEZA

2022

JOÃO GONÇALVES LIMA NETO

ANÁLISE ESTRUTURAL DO CHASSI DE UM BAJA SAE A PARTIR DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS APLICADO A MODELO DINÂMICO MULTICORPO DO TIPO
FOUR-POST

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
do Centro de Tecnologia da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do grau de bacharel em Engenharia
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo do Nascimento
Rodrigues.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L698a Lima Neto, João Gonçalves.

Análise estrutural do chassi de um Baja SAE a partir do método dos elementos finitos aplicado a modelo dinâmico multicorpo do tipo four-post / João Gonçalves Lima Neto. – 2022.
205 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Mecânica, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Rômulo do Nascimento Rodrigues.

1. Baja SAE. 2. Elementos finitos. 3. Análise estrutural. 4. Engenharia mecânica. 5. Mecânica estrutural.
I. Título.

CDD 620.1

**ANÁLISE ESTRUTURAL DO CHASSI DE UM BAJA SAE A PARTIR DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS APLICADO A MODELO DINÂMICO MULTICORPO DO TIPO
FOUR-POST**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
do Centro de Tecnologia da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do grau de bacharel em Engenharia
Mecânica.

Aprovada em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rômulo do Nascimento Rodrigues (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roberto de Araújo Bezerra
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Vanessa Vieira Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família.

Aos meus amigos e colegas da Universidade
Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que, com o sacrifício cotidiano, me forneceram continuamente condições plenas de me dedicar integralmente aos estudos, destino o meu maior agradecimento.

Ao meu irmão, cuja companhia me alegra, que durante os cinco anos da graduação pude ver crescer e tanto mudar, como deve ser.

Ao professor doutor Rômulo do Nascimento Rodrigues, pela orientação neste e em outros trabalhos desenvolvidos, pela completa referência em didática e por me apresentar o belíssimo ramo da mecânica dos sólidos.

Ao professor doutor Roberto de Araújo Bezerra, pelas diversas orientações acadêmicas e profissionais, por todo o suporte destinado ao meu ingresso na pós-graduação e por me fazer compartilhar de parte de sua fascinação pelas vibrações mecânicas.

Ao meu amigo João Paulo, que suporta quase diariamente as incomodações e meus devaneios por consequência da minha amizade, e que me deu apoio neste difícil ano.

Aos meus amigos Victor Hugo e Castelo, que tornaram a graduação mais fácil com seu apoio e amizade.

Ao meu amigo Alberto, que, a partir de diversas discussões e discordâncias, tanto me ensinou sobre engenharia.

Agradeço a equipe Siará Baja, por me apresentar a magnífica dinâmica veicular e o interessantíssimo método dos elementos finitos, pelos aprendizados e aventuras.

A todos os colaboradores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Ceará, em especial ao Secretário de Coordenação Fernando, pela eficiência em sua função.

“João
O tempo andou mexendo com a gente, sim
John, eu não esqueço
A felicidade é uma arma quente!”
(Antônio Carlos Gomes Belchior)

RESUMO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) vêm sendo utilizado continuamente no projeto de componentes e sistemas automotivos, como no projeto de protótipos Baja SAE. Dentre as principais dificuldades associadas à modelagem computacional a partir do MEF, tem-se a determinação das cargas a serem aplicadas nos modelos estruturais desenvolvidos, quando estes são mais solicitados a partir da interação entre o veículo e a via. O presente trabalho centrou-se na análise estrutural do chassi de um Baja SAE a partir da construção de um modelo dinâmico multicorpo do SB-20 - protótipo do projeto de extensão local Siará Baja - do tipo simulador de pista *four-post*, mitigando a dificuldade associada à quantificação das solicitações, sob ótica do veículo como um sistema excitado pela base. Os materiais e métodos utilizados para a análise estrutural incluem a construção das funções de excitação do sistema - tomada a partir da síntese do perfil de operação do veículo -, a construção do modelo mecânico de elementos finitos - a partir das etapas de concepção, preparação de geometria, modelo elasto-plástico, distribuição de massa e descrição geral -, a análise modal, a análise estrutural transiente, a análise da resposta dinâmica do sistema e as análises de falha estática e por fadiga. A partir do elaborado, foram obtidos resultados para a transmissibilidade de deslocamento, aceleração da massa suspensa em função do conforto do piloto, coeficientes de segurança para falha estática e tempo de operação do veículo até a falha por fadiga. Em conclusão, as estratégias de modelagem computacional empregadas para a construção do modelo mecânico mostraram-se efetivas, o modelo elaborado demonstrou comportamento mecânico satisfatório e o chassi, componente de análise, obteve resultados compatíveis com os requisitos de operação, sendo a falha estática o seu modo de falha crítico.

Palavras-chave: Elementos Finitos; Baja SAE; Análise Estrutural.

ABSTRACT

The Finite Element Method (FEM) has been continuously used in the design of automotive components and systems, such as in the design of Baja SAE prototypes. Among the main difficulties associated with computational modeling from the FEM, there is the determination of the loads to be applied in the developed structural models, when these are most requested from the interaction between the vehicle and the road. The present work focused on the structural analysis of the roll cage of a Baja SAE from the construction of a dynamic multibody model of the SB-20 - prototype of the “Siará Baja” local extension project - of the four-post track simulator type, mitigating the difficulty associated with the quantification of loads, from the perspective of the vehicle as a system excited by the base. The materials and methods used for the structural analysis include the construction of the excitation functions of the system - taken from the synthesis of the vehicle operating profile -, the construction of the mechanical model of finite elements - from the stages of general conception, preparation of geometry, elasto-plastic model, mass distribution and general description - modal analysis, transient structural analysis, dynamic system response analysis and static and fatigue failure analysis. From the elaborated, results were obtained for the transmissibility of displacement, acceleration of the sprung mass in function of the driver comfort, safety factors for static failure and time of operation of the vehicle until fatigue failure. In conclusion, the computational modeling strategies used for the construction of the mechanical model proved to be effective, the model developed showed satisfactory mechanical behavior and the roll cage, component of analysis, obtained results compatible with the operation requirements, with static failure being its critical failure mode.

Keywords: Finite Element; Baja SAE; Structural Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema de teste four-post	25
Figura 2 - Sistemas de testes internos e externos.	26
Figura 3 - Protótipo SB-20 “Dragão do Mar”.	27
Figura 4 - Modelo estrutural de carro completo, “full car”.	29
Figura 5 - Rigidezes de vários sistemas mecânicos. Vê-se que a rigidez é determinada a partir de propriedades do material e da geometria do sistema.	34
Figura 6 - Elemento de viga e seus 12 graus de liberdade.	35
Figura 7 - Localização dos nós no sistema de coordenadas natural.	44
Figura 8 - Elemento retangular linear e seus graus de liberdade conforme o sistema de coordenadas natural.	45
Figura 9 - Elemento SOLID187.	52
Figura 10 - Elemento SHELL281.....	52
Figura 11 - Elemento BEAM189.....	53
Figura 12 - Elemento COMBIN14.	53
Figura 13 - Classe MPC184.	54
Figura 14 - Decomposição polar do gradiente de deformação.....	62
Figura 15 - Procedimentos associados ao método de Newton-Raphson.	65
Figura 16 - Amortecimento de Rayleigh.	83
Figura 17 - Tetraedro elementar de Cauchy.	89
Figura 18 - Envelopes de falha das teorias de falha por fadiga associadas ao método S-N...101	101
Figura 19 - Superfície $\sigma_a - \sigma_m - N$ e suas projeções.	101
Figura 20 - Diagramas de vida constante $\sigma_a - \sigma_m$ e pontos de trinca.....	102
Figura 21 - Algoritmo de contagem de ciclos a partir do método rainflow padronizado pela ASTM E1049.....	105
Figura 22 - Sistema de coordenadas veicular SAE.....	107
Figura 23 - Membros da gaiola de proteção, conforme o RATS.....	109
Figura 24 - Fluxograma que destaca os parâmetros associados à construção das funções de excitação do sistema.	112
Figura 25 - Obstáculo “Vala” na competição regional Baja SAE 2019.....	113
Figura 26 - Obstáculo “Rampa” na competição regional Baja SAE 2019.....	113
Figura 27 - Obstáculo “Tronco” na competição regional Baja SAE 2019.....	113
Figura 28 - Detalhamento do obstáculo “Vala”.....	114
Figura 29 - Detalhamento do obstáculo “Rampa”.....	114

Figura 30 - Detalhamento do obstáculo “Tronco”.....	115
Figura 31 - Frequências de pitch, bounce e roll do protótipo SB-20, considerando o primeiro e segundo estágio de suspensão.....	117
Figura 32 - Perfil da via de operação.....	120
Figura 33 - Fluxograma que destaca os parâmetros associados à construção do modelo mecânico de elementos finitos.....	121
Figura 34 - Sistemas tire-coupled e spindle-coupled.	121
Figura 35 - Detalhamento da preparação de geometria: simplificação geométrica da carcaça da caixa de redução.....	125
Figura 36 - Preparação geométrica típica dos perfis tubulares.....	125
Figura 37 - Corte realizado na gaiola, para discretização em elementos de casca e de viga, tomado em porções com baixa magnitude de esforços internos, com o veículo em condições usuais de operação.	126
Figura 38 - Preparação de geometria associada aos pneus, com destaque à geometria original (corpo sólido) e à simplificada (corpo em superfície), obtida por revolução.	127
Figura 39 - Recurso de compartilhamento de topologia.....	128
Figura 40 - Visualização da geometria de análise: vista isométrica traseira.	129
Figura 41 - Visualização da geometria de análise: vista lateral direita.	129
Figura 42 - Visualização da geometria de análise: detalhe dianteiro.	130
Figura 43 - Visualização da geometria de análise: detalhe traseiro.	130
Figura 44 - Distribuição de massa teórica do protótipo SB-20.	134
Figura 45 - Visualização do posicionamento do manequim no veículo.	134
Figura 46 - Obtenção das propriedades de massa.....	135
Figura 47 - Geometria de análise no ambiente ANSYS mechanical.....	136
Figura 48 - Ponto de massa com os grupos massa suspensa; chassi; piloto, associado à geometria em destaque.	137
Figura 49 - Visualização local das juntas mola-amortecedor dianteiras.	138
Figura 50 - Visualização local das juntas mola-amortecedor traseiras.	139
Figura 51 - Visualização local da junta geral entre o pneu e a base excitadora.	139
Figura 52 - Visualização local de junta esférica associada a terminal rotular.....	140
Figura 53 - Visualização local de junta de revolução associada ao terminal rotular que conecta o link de direção à cremalheira.	141
Figura 54 - Visualização local das juntas gerais associadas aos amortecedores dianteiros. ..	142

Figura 55 - Visualização local da junta geral associada à conexão entre o mancal de suporte e a cremalheira.....	142
Figura 56 - Visualização local das juntas de revolução associadas aos pinos e cruzetas.....	143
Figura 57 - Visualização local das juntas fixas associadas aos parafusos de fixação da caixa.	
.....	144
Figura 58 - Visualização local das juntas de revolução associadas aos rolamentos da caixa.	144
Figura 59 - Visualização local da junta de revolução associada ao rolamento da roda.	145
Figura 60 - Visualização local da junta fixa entre o pneu e o cubo de roda.....	145
Figura 61 - Visualização das molas fracas.	146
Figura 62 - Visualização local das juntas fixas associadas às ligações viga-casca.	147
Figura 63 - Visualização da malha: elementos BEAM189.	148
Figura 64 - Visualização da malha: elementos SHELL281.	149
Figura 65 - Visualização da malha: elementos SOLID187.	149
Figura 66 - Plotagem global da métrica Element Quality.	150
Figura 67 - Plotagem global da métrica Skewness.....	150
Figura 68 - Plotagem global da métrica Jacobian Ratio (Corner Nodes).	151
Figura 69 - Condições de contorno da análise modal.....	152
Figura 70 - Plotagem global do autovetor (mode-shape) associado ao modo 1.....	153
Figura 71 - Plotagem global do autovetor (mode-shape) associado ao modo 2.....	153
Figura 72 - Plotagem global do autovetor (mode-shape) associado ao modo 4.....	154
Figura 73 - Condições de contorno da análise estrutural transiente associada ao obstáculo “Vala”.....	155
Figura 74 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Vala”: porção dianteira.	156
Figura 75 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Vala”: porção traseira.	156
Figura 76 - Condições de contorno da análise estrutural transiente associada ao obstáculo “Rampa”.....	157
Figura 77 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Rampa”: porção dianteira.	157
Figura 78 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Rampa”: porção traseira.....	157
Figura 79 - Condições de contorno da análise estrutural transiente associada ao obstáculo “Tronco”.....	158
Figura 80 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Tronco”: porção dianteira.	158
Figura 81 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Tronco”: porção traseira.	159
Figura 82 - Plotagem global da tensão equivalente de von Mises: instante de valor máximo, obstáculo “Vala”.....	159

Figura 83 - Plotagem global da tensão equivalente de von Mises: instante de valor máximo, obstáculo “Rampa”.....	160
Figura 84 - Plotagem global da tensão equivalente de von Mises: instante de valor máximo, obstáculo “Tronco”.....	160
Figura 85 - Subsistema considerado para a discussão acerca dos pontos de análise, associado ao membro “SIM”	161
Figura 86 - Subsistema considerado para a discussão acerca dos pontos de análise, associado à treliça do membro “FAB _{mid} ”	162
Figura 87 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo.	164
Figura 88 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo.	164
Figura 89 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado à treliça do membro “FAB _{mid} ” situado na porção direita do veículo.	165
Figura 90 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado à treliça do membro “FAB _{mid} ” situado na porção esquerda do veículo.	165
Figura 91 - Resultados em deslocamento total para as massas suspensas e bases frontais direita e esquerda.	167
Figura 92 - Resultados em deslocamento total para as massas suspensas e bases traseiras direita e esquerda.	168
Figura 93 - Resultados em aceleração total para o membro “LFDB”.....	169
Figura 94 - Resultados em aceleração total e RMS para o membro “LFDB”.....	170
Figura 95 - Interface primária do script de falha estática.	171
Figura 96 - Interface secundária do script de falha estática.	172
Figura 97 - Condições de contorno da análise estrutural estática para obtenção da resposta estática do protótipo.	173
Figura 98 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo, após tratamento dos dados.....	174
Figura 99 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo, após tratamento dos dados.....	174
Figura 100 - Dados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo, adicionados para contagem a partir do rainflow.....	175

Figura 101 - Resultados da ciclagem a partir do rainflow: histograma de número de ciclos versus amplitude do ciclo e média do ciclo para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo	175
Figura 102 - Dados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo, adicionados para contagem a partir do rainflow.....	176
Figura 103 - Resultados da ciclagem a partir do rainflow: histograma de número de ciclos versus amplitude do ciclo e média do ciclo para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo	176
Figura 104 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção frontal direita.....	177
Figura 105 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção frontal esquerda.....	178
Figura 106 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção traseira direita.....	179
Figura 107 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção traseira esquerda.....	179
Figura 108 - Análise gráfica da aceleração da massa suspensa: limites de aceleração recomendados para o piloto.....	181
Figura 109 - Interface terciária do script de falha estática: resultados finais.	182

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de referência para a métrica Element Quality conforme o autor.	49
Tabela 2 - Valores de referência para a métrica Skewness conforme Elmekawy.....	50
Tabela 3 - Valores de referência para a métrica Skewness conforme Aneta.	50
Tabela 4 - Valores de referência para a métrica Jacobian Ratio conforme Aneta.....	51
Tabela 5 - Elementos finitos utilizados para a construção do modelo mecânico.	51
Tabela 6 - Tipos de análise considerando as não linearidades estruturais.....	57
Tabela 7 - Características gerais dos métodos de integração explícitos e implícitos.	72
Tabela 8 - Características do modelo desenvolvido associadas à formulação do MEF.	75
Tabela 9 - Tipos de falha e mecanismos indutores de falha.	93
Tabela 10 - Algumas das teorias de falha estática.	97
Tabela 11 - Casos de carregamento típicos.	110
Tabela 12 - Cálculo do step size inicial.	117
Tabela 13 - Cálculo do tempo de deslocamento entre os eixos.	118
Tabela 14 - Cálculo do número de incrementos de tempo.	118
Tabela 15 - Cálculo do tempo de queda e do número de incrementos de tempo associado. .	119
Tabela 16 - Componentes estruturais incluídos na geometria de análise.	130
Tabela 17 - Propriedades mecânicas do material associado ao modelo mecânico, Structural Steel.	131
Tabela 18 - Levantamento de massa do protótipo SB-20.....	132
Tabela 19 - Cálculo do erro associado ao levantamento de massa realizado.	133
Tabela 20 - Parâmetros de entrada para as juntas mola-amortecedor associadas aos amortecedores dianteiros.	138
Tabela 21 - Parâmetros de entrada para as juntas mola-amortecedor associadas aos amortecedores traseiros.	138
Tabela 22 - Parâmetros de entrada para as juntas mola-amortecedor associadas às molas fracas.....	146
Tabela 23 - Body sizing associado aos corpos de linha.	148
Tabela 24 - Body sizing associado aos corpos de superfície.....	148
Tabela 25 - Body sizing associado aos corpos sólidos.....	149
Tabela 26 - Verificação da métrica Element Quality.	150
Tabela 27 - Verificação da métrica Skewness.....	150
Tabela 28 - Verificação da métrica Jacobian Ratio (Corner Nodes).	150
Tabela 29 - Resultados obtidos da extração modal.	152

Tabela 30 - Parâmetros de integração do método HHT- α utilizados.	155
Tabela 31 - Resultado obtido para $aRMS$	169
Tabela 32 - Tensões principais associadas ao pico de tensão equivalente de von Mises no ponto crítico associado ao membro “SIM” direito.	170
Tabela 33 - Propriedades mecânicas de resistência (valores médios) do aço AISI/SAE 1020 utilizados para as análises de falha estática e por fadiga.	171
Tabela 34 - Resultados obtidos para as respostas estáticas no membro “SIM”, associados às porções direita a esquerda do veículo.	173
Tabela 35 - Resultados obtidos para os parâmetros associados ao método S-N.	176
Tabela 36 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento máxima das porções frontal direita e esquerda.	178
Tabela 37 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento máxima das porções traseira direita e esquerda.	180
Tabela 38 - Parâmetros associados à análise da aceleração da massa suspensa.	180
Tabela 39 - Resultados obtidos para a análise de falha estática no ponto crítico a partir das teorias da energia de distorção e da tensão de cisalhamento máxima, respectivamente.	182
Tabela 40 - Resultados obtidos para a análise de falha por fadiga para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo.	182
Tabela 41 - Resultados obtidos para a análise de falha por fadiga para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo.	182
Tabela 42 - Resumo dos resultados obtidos para as análises realizadas.	183

LISTA DE SÍMBOLOS

g	Aceleração da gravidade; Constantes de Lagrange
H	Altura
c	Amortecimento generalizado; Velocidade de onda
θ	Ângulo interno
A	Área do elemento; Área de seção transversal da viga; Amplitude de tensão
λ	Autovalor; Multiplicadores de Lagrange; Extensão (<i>stretch</i>)
ζ	Coeficiente de amortecimento (<i>damping ratio</i>)
ν	Coeficiente de Poisson; Volume na configuração deformada
b	Coeficiente para o método S-N
a	Coeficiente para o método S-N; Aceleração
σ	Componente do tensor tensão; Componente de tensão qualquer; Tensão equivalente de von Mises; Fator tensão-deformação real
L	Comprimento da viga
β	Constante de Rayleigh; Constante de multiplicação
D	Dano em fadiga
ε	Deformação normal; Tolerância
γ	Deformação tangencial
J_F	Determinante do gradiente de deformação
$d; \partial$	Diferencial
EQ	<i>Element Quality</i>
u	Energia de deformação específica
U	Energia de deformação; Componente hidrostática de energia de deformação; Componente de distorção de energia de deformação
w	Entre eixos
ϕ	Fator de correção para inclusão do efeito <i>warping</i> na flexão
C	Fator de correlação para EQ ; Constante de proporcionalidade
F	Força
f	Força generalizada; Frequência de vibração; Fator de segurança; Fração de resistência à fadiga
ω	Frequência circular
N	Função de forma do elemento

h	Função de interpolação isoparamétrica; <i>Step size</i> ; Tamanho característico
u	Função de interpolação para os deslocamentos na direção X; Matriz de deslocamento nodal da estrutura no sistema global de coordenadas
v	Função de interpolação para os deslocamentos na direção Y
w	Função de interpolação para os deslocamentos na direção Z
MAX	Função que retorna o valor máximo dentre o conjunto
Δt	Incremento de tempo
t	Instante de tempo; Tempo de evento qualquer
JR	<i>Jacobian Ratio</i>
	Limite de escoamento; Limite de resistência à fadiga; Limite de resistência à tração; Resistência à fadiga; Magnitude do comprimento de fibra na configuração de referência
s	Magnitude do comprimento de fibra na configuração deformada
ρ	Massa específica; Raio espectral
m	Massa generalizada
ϕ	Matriz Autovetor
L	Matriz das derivadas cartesianas de N
A	Matriz de “termos geométricos” do elemento; Matriz de amplificação
d	Matriz de deslocamento nodal no sistema local de coordenadas; Matriz dos deslocamentos nodais interpolados
D	Matriz de elasticidade ou matriz tensão-deformação
E	Matriz de erro numérico
f	Matriz de força nodal no sistema local de coordenadas
M	Matriz de massa da estrutura; Matriz de massa do elemento no sistema global de coordenadas
m	Matriz de massa do elemento no sistema local de coordenadas
	Matriz de rigidez no sistema global de coordenadas; Matriz de rigidez
K	geométrica no sistema global de coordenadas; Matriz de rigidez tangente; Matriz de coeficientes efetiva
k	Matriz de rigidez no sistema local de coordenadas; Matriz de rigidez geométrica no sistema local de coordenadas
G	Matriz de termos numéricos para a representação matricial de ϵ a partir de C
T	Matriz de transformação de coordenadas

H	Matriz de variáveis X; Y; Z para representação matricial dos deslocamentos nodais interpolados
B	Matriz deslocamento-deformação; Tensor esquerdo de deslocamento de Cauchy-Green
S	Matriz deslocamento-tensão
C	Matriz dos coeficientes de $\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}$; Matriz de amortecimento da estrutura; Tensor direito de deslocamento de Cauchy-Green
I	Matriz identidade
E	Módulo de elasticidade longitudinal; Erro; Comprimento de aresta
G	Módulo de elasticidade transversal
N	Número de ciclos
n	Número de graus de liberdade do elemento; Número de graus de liberdade da estrutura; Coeficiente de segurança; Número de ciclos; Número de incrementos
J	Operador Jacobiano
p	Ordem de acurácia
X	Perfil horizontal
Y	Perfil vertical; Deslocamento vertical
T	Período de vibração
R	Peso para a quadratura de Gauss; Parâmetro de integração de Newmark;
α	Parâmetro de integração $HHT - \alpha$; Constante de Rayleigh; Constante de multiplicação
k	Razão de tensão
I	Rigidez generalizada
J	Segundo momento de área; Momento de inércia de massa
I	Segundo momento polar de área
$\ \Psi\ $	Simbologia para a norma euclidiana de Ψ
$\ddot{\Psi}; \dot{\Psi}$	Simbologia para derivadas temporais de Ψ
$ \Psi $	Simbologia para determinante de Ψ
$[\Psi]^{-1}$	Simbologia para matriz inversa de Ψ
$[\Psi]^T$	Simbologia para matriz transposta de Ψ
$\nabla \bullet \Psi$	Simbologia para o divergente de Ψ
$\Psi \bullet \psi$	Simbologia para o produto interno de Ψ por ψ
$\Psi \otimes \psi$	Simbologia para o produto tensorial de Ψ por ψ

$\psi^e; \psi^e$	Simbologia para variáveis tomadas no domínio do elemento (sobrescrito)
$\Psi; \boldsymbol{\psi}$	Simbologia para variável multidimensional: tensor, vetor (negrito)
$\{\Psi\}$	Simbologia para Ψ em matriz coluna
$[\Psi]$	Simbologia para Ψ em matriz quadrada
SK	<i>Skewness</i>
CZ	Tamanho de célula atual
OCZ	Tamanho de célula ótimo
K	Tenacidade à fratura; Fator de intensidade de tensão
R	Tensor de rotação; Vetor residual
e	Tensor deformação; Matriz erro; Vetor unitário
ε	Tensor deformação; Tensores deformação diversos
U	Tensor direito de extensão de Cauchy
V	Tensor esquerdo de extensão de Cauchy
F	Tensor gradiente de deformação; Matriz de forças externas; Matriz de forças internas
$\mathbf{1}$	Tensor identidade
σ	Tensor tensão; Tensor tensão de Cauchy
W	Trabalho
TD	Transmissibilidade de deslocamento
δ	Variação; Diferencial; Parâmetro de integração de Newmark; Dimensão característica do tetraedro de Cauchy
Δ	Variação; Matriz de deslocamento nodal da estrutura no sistema global de coordenadas
X	Vetor comprimento na configuração de deformada
x	Vetor comprimento na configuração de referência; Vetor posição
b	Vetor força de corpo
t	Vetor tensão
n	Vetor unitário
V	Volume; Volume do elemento; Volume na configuração de referência; Velocidade

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	25
1.1.	Sistemas de teste <i>four-post</i>	25
1.2.	O programa Baja SAE	27
1.3.	Motivação do trabalho	28
1.4.	Objetivos do trabalho.....	30
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
2.1.	Método dos Elementos Finitos.....	31
2.1.1.	<i>Sistemas contínuos e discretos</i>	31
2.1.2.	<i>Síntese do Método dos Elementos Finitos</i>	32
2.1.3.	<i>Rigidez da estrutura e do elemento</i>	33
2.1.3.1.	<i>Aspectos gerais acerca da rigidez</i>.....	33
2.1.3.2.	<i>Determinação da rigidez pelo método direto</i>.....	34
2.1.3.3.	<i>Determinação da rigidez pelo método de energia</i>	37
2.1.4.	<i>Formulação isoparamétrica</i>	44
2.1.5.	<i>Distorção do elemento</i>.....	47
2.1.6.	<i>Formulação dos elementos finitos utilizados no modelo</i>	51
2.1.6.1.	<i>SOLID187</i>.....	51
2.1.6.2.	<i>SHELL281</i>	52
2.1.6.3.	<i>BEAM189</i>	53
2.1.6.4.	<i>COMBIN14</i>.....	53
2.1.6.5.	<i>MPC184</i>	53
2.1.7.	<i>Não linearidades estruturais</i>	54
2.1.7.1.	<i>Aspectos gerais da análise não linear</i>.....	54
2.1.7.2.	<i>Aspectos-chave da análise não linear</i>	55
2.1.7.3.	<i>Tipos de não linearidade</i>	56
2.1.7.4.	<i>Matriz de rigidez geométrica</i>	57
2.1.7.5.	<i>Tensor gradiente de deformação</i>	60
2.1.7.6.	<i>Formulação geral do Método dos Elementos Finitos não linear</i>	62
2.1.8.	<i>Método de Newton-Raphson</i>	64
2.1.8.1.	<i>Aspectos gerais acerca do método</i>	64
2.1.8.2.	<i>Newton-Raphson na formulação do MEF não linear</i>	67
2.1.9.	<i>Análise estrutural dinâmica</i>	68
2.1.9.1.	<i>Análise estrutural dinâmica linear</i>.....	68

2.1.9.2.	<i>Método da superposição modal</i>	69
2.1.9.3.	<i>Método da integração direta</i>	71
2.1.9.3.1.	Método de Newmark em modelos lineares	74
2.1.9.3.2.	Método HHT- α em modelos lineares	74
2.1.9.4.	<i>Análise estrutural dinâmica não linear</i>	76
2.1.9.4.1.	Método de Newmark em modelos não lineares.....	76
2.1.9.4.2.	Método HHT- α em modelos não lineares	78
2.1.9.5.	<i>Determinação do step size</i>	78
2.1.10.	<i>Massa da estrutura e do elemento</i>	81
2.1.11.	<i>Amortecimento da estrutura e do elemento</i>	82
2.2.	MECÂNICA ESTRUTURAL	85
2.2.1.	Tensor deformação	85
2.2.1.1.	<i>Extensão e rotação</i>	85
2.2.1.2.	<i>Tensor deformação de Biot</i>	87
2.2.1.3.	<i>Tensor deformação de Green</i>	87
2.2.1.4.	<i>Tensor deformação de Hencky</i>	87
2.2.1.5.	<i>Tensor deformação infinitesimal</i>	88
2.2.2.	Tensor tensão	88
2.2.2.1.	<i>Hipótese de Cauchy</i>	88
2.2.2.2.	<i>Tensor tensão de Cauchy</i>	88
2.2.2.3.	<i>Teorema de Cauchy</i>	90
2.2.2.4.	<i>Tensões principais</i>	90
2.2.2.5.	<i>Medidas de tensão</i>	92
2.2.3.	Falhas estruturais	92
2.2.3.1.	<i>Escoamento</i>	93
2.2.3.2.	<i>Fadiga</i>	94
2.2.3.3.	<i>Teorias de falha estática</i>	96
2.2.3.3.1.	<i>Teoria de energia de distorção de von Mises-Hencky</i>	97
2.2.3.3.2.	<i>Teoria da máxima tensão de cisalhamento de Tresca-Guest</i>	99
2.2.3.4.	<i>Teorias de falha por fadiga</i>	100
2.2.3.4.1.	<i>Envelopes de falha por fadiga</i>	100
2.2.3.4.2.	<i>Diagrama S-N</i>	103
2.2.3.5.	<i>Teorias de acúmulo de dano e ciclagem</i>	104
2.2.3.6.	<i>Determinação da vida em fadiga</i>	106
2.3.	Mecânica veicular e o protótipo SB-20	107

2.3.1.	<i>Modelos dinâmicos veiculares</i>	107
2.3.2.	<i>Sistemas do protótipo SB-20</i>	108
2.3.3.	<i>Chassi do protótipo SB-20</i>	109
2.3.4.	<i>Condições de operação do SB-20</i>	109
2.3.5.	<i>Solicitações atuantes no chassi</i>	110
3.	MATERIAIS E MÉTODOS	112
3.1.	Construção das funções de excitação do sistema	112
3.1.1.	<i>Síntese do perfil de operação simplificado</i>	112
3.1.2.	<i>Concepção da via de operação</i>	112
3.1.3.	<i>Concepção da velocidade de operação</i>	116
3.1.4.	<i>Funções de excitação do sistema</i>	116
3.2.	Construção do modelo mecânico de elementos finitos	121
3.2.1.	<i>Concepção do modelo mecânico e hipóteses simplificadoras</i>	121
3.2.1.1.	<i>Concepção geral do modelo</i>	121
3.2.1.2.	<i>Hipóteses simplificadoras</i>	122
3.2.1.3.	<i>Concepção dos sistemas individuais</i>	122
3.2.2.	<i>Preparação de geometria</i>	124
3.2.3.	<i>Material e modelo elasto-plástico</i>	131
3.2.4.	<i>Distribuição de massa</i>	131
3.2.5.	<i>Descrição do modelo mecânico</i>	135
3.2.5.1.	<i>Geometria</i>	135
3.2.5.2.	<i>Conexões</i>	137
3.2.5.2.1.	<i>Amortecedores</i>	137
3.2.5.2.2.	<i>Pneus-bases</i>	139
3.2.5.2.3.	<i>Suspensão</i>	140
3.2.5.2.4.	<i>Direção</i>	142
3.2.5.2.5.	<i>Powertrain</i>	143
3.2.5.2.6.	<i>Rodas</i>	144
3.2.5.2.7.	<i>Molas fracas</i>	145
3.2.5.2.8.	<i>Ligações viga-casca</i>	146
3.2.5.3.	<i>Malha</i>	147
3.3.	Análise modal	151
3.4.	Análise estrutural transiente	154
3.4.1.	<i>Parte 1 – obstáculo “Vala”</i>	155
3.4.2.	<i>Parte 2 – obstáculo “Rampa”</i>	156

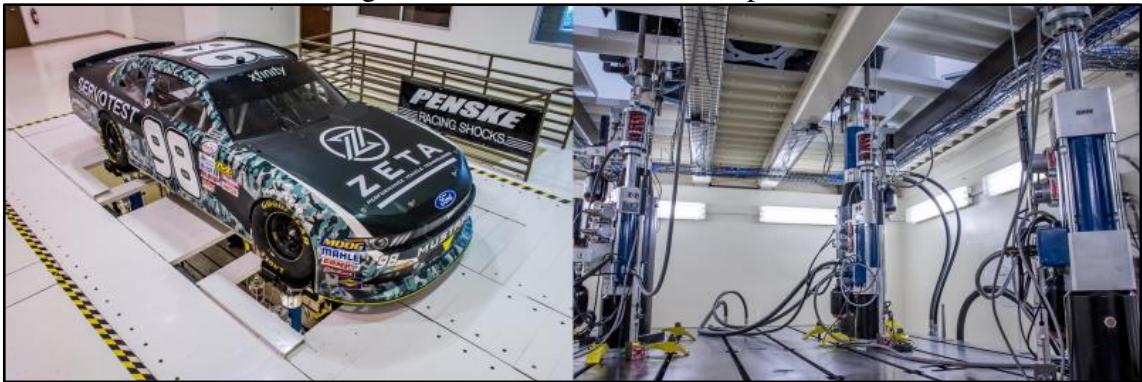
3.4.3.	<i>Parte 3 – obstáculo “Tronco”</i>	158
3.4.4.	<i>Resultados gerais e definição do ponto crítico</i>	159
3.5.	Análise da resposta dinâmica do sistema	166
3.5.1.	<i>Transmissibilidade de deslocamento</i>	166
3.5.2.	<i>Aceleração da massa suspensa</i>	168
3.6.	Análise de falha estática	170
3.7.	Análise de falha por fadiga	172
4.	RESULTADOS E DISCUSSÃO	177
4.1.	Resultados da análise de resposta dinâmica	177
4.1.1.	<i>Transmissibilidade de deslocamento</i>	177
4.1.2.	<i>Aceleração da massa suspensa</i>	180
4.2.	Resultados da análise de falha estática	181
4.3.	Resultados da análise de falha por fadiga	182
4.4.	Resumo dos resultados	183
4.5.	Discussão dos resultados	183
5.	CONCLUSÃO	185
5.1.	Cumprimento dos objetivos	185
5.2.	Conclusões gerais	185
5.3.	Trabalhos futuros	188
REFERÊNCIAS		189
ANEXO A - FUNÇÕES DE EXCITAÇÃO		193
ANEXO B - ANÁLISE DE FALHA POR FADIGA		204

1. INTRODUÇÃO

1.1. Sistemas de teste *four-post*

Em síntese, um sistema de teste do tipo *four-post* é um sistema projetado para a testagem de veículos automotores, de modo que podem ser caracterizados por quatro atuadores hidráulicos sob os quais o veículo é posicionado acima, conforme a figura 1. O movimento dos atuadores é, em geral, controlado eletronicamente, de modo que é possível programá-los para reproduzir o perfil de uma superfície de estrada, ou uma determinada função de excitação, dentre outras configurações.

Figura 1 - Sistema de teste four-post.



Fonte: (ZETA, 2022).

A depender da aplicação, existem ainda outros sistemas disponíveis, com uma maior quantidade de atuadores, como no caso de veículos com mais de dois eixos, ou ainda utilizados para a representação de solicitações aerodinâmicas e da transferência de carga, configuração típica do *seven-post*, aplicado no automobilismo de alta performance.

O sistema, caracterizado como um teste do tipo interno (*indoor*), possui maior viabilidade em relação a testes externos comumente realizados dentro de um plano de validação automotivo, ao passo que possui melhor controlabilidade, repetibilidade e eficiência. Vê-se que, para ensaios de durabilidade em veículos de passeio, testes externos (*outdoor*) possuem elevado custo financeiro e em tempo, ao passo que diversos componentes estruturais destes tipos de veículos são projetados para, em geral, fadiga de alto ciclo. Esses tipos de testes podem ser visualizados na figura 2.

Além disso, testes externos requerem maior complexidade do sistema de aquisição de dados, tendo em vista prováveis sobrecargas provenientes de fatores externos não controláveis, além da possível necessidade de um sistema de transmissão de dados de maior robustez, e consequentemente, maior custo.

Figura 2 - Sistemas de testes internos e externos.



Fonte: (MOTOR 1, 2022).

Deste modo, tem-se uma grande utilização dos sistemas *four-post* para ensaios de durabilidade estrutural, a partir de excitações realizadas de diferentes formas pelos atuadores (deslocamentos, velocidades, acelerações, entre outras), com posterior cálculo de falha por fadiga pautada no acúmulo de dano. Ademais, enquanto tem-se o veículo completo em uma configuração “irrestrita”, e com total representatividade em massa, rigidez e amortecimento, podem ser realizados diversos ensaios além dos estruturais, como, por exemplo:

1. NVH (Ruído, vibração e aspereza);
2. BSR: *Buzz, Squeak e Rattle* (Ruídos estruturais de montagem);
3. *Ride* (Resposta do veículo em transmissibilidade);
4. *Handling* (Resposta do veículo em controle direcional);
5. Análise modal (Resposta do veículo sob o espectro de frequência).

Dentre as fabricantes de tais sistemas de teste, a que possui maior aplicação dentre os laboratórios de teste mundiais é a MTS, que introduziu a mais de 45 anos e aperfeiçoou desde então uma tecnologia de teste *four-post* com acoplamento dos pneus (*tire-coupled four-post rig*), permitindo a consideração da massa, rigidez e amortecimento destes, melhor caracterizando a distribuição de massa suspensa e não suspensa e aumentando a representatividade do modelo dinâmico em geral. Atualmente, a empresa conta com diversas tecnologias de teste para veículo completo, possibilitando uma maior especialização dos sistemas em relação às aplicações e uma ampliação da quantidade de ensaios executáveis.

Nacionalmente, a empresa RUIDCAR apresenta um sistema de teste com atuadores em um eixo do veículo, com maior ênfase na análise e diagnóstico de ruídos automotivos, oferecendo compatibilidade para variados modelos. O sistema é composto por suportes/cavaletes, máquinas atuadoras e um painel de controle eletrônico.

1.2.O programa Baja SAE

O programa universitário Baja SAE é uma oportunidade de estudantes de diversos cursos de graduação, em uma proposta multidisciplinar, compreenderem os aspectos técnicos e gerenciais do projeto, fabricação e montagem de um protótipo do tipo “mini Baja”, um veículo *off-road* monoposto.

O programa foi criado na Universidade da Carolina do Sul, em 1976, sendo lançado no Brasil no ano de 1994. Atualmente, há a realização de competições regionais, nacionais e internacionais, a partir de organizações realizadas por comitês. No Brasil, as competições são divididas em nacionais, Competição Baja SAE BRASIL, e regionais, etapas Sul, Sudeste e Nordeste.

Neste meio, a equipe Siará Baja atua desde 1999 como projeto oficial de extensão da Universidade Federal do Ceará, sendo pioneira no estado. Desde então, a equipe obteve crescimento contínuo em relação ao nível técnico do protótipo e das apresentações de gestão, projeto e negócios. Isto se deu a partir de participações ativas e obtenção de resultados relevantes nas competições regionais, da etapa Nordeste.

Em 2020, a equipe apresentou o seu mais recente projeto, SB-20 (figura 3), associado à campanha Dragão do Mar, em homenagem a Francisco José do Nascimento, líder jangadeiro que teve participação ativa no Movimento Abolicionista no Ceará, estado pioneiro na abolição da escravidão.

Figura 3 - Protótipo SB-20 “Dragão do Mar”.



Fonte: Autor.

O programa fornece a oportunidade de o estudante extrapolar as áreas do conhecimento de seu curso específico de graduação, ao passo que a engenharia automotiva associada ao desenvolvimento de um veículo é multiárea e multifísica. Ainda assim, é de fundamental importância o reconhecimento do programa Baja SAE como um ambiente aberto para a aplicação dos conhecimentos obtidos em sala de aula, aumentando o aprendizado.

1.3.Motivação do trabalho

Dentro da proposta do programa estudantil Baja SAE de desenvolver, de forma geral, um protótipo Off-Road, é especialmente desafiador o projeto e análise estrutural dos diversos componentes do veículo, em especial a gaiola, tendo em vista sua complexidade construtiva.

Garantir a performance e durabilidade de um componente é um desafio enérgico nas mais diversas áreas da Engenharia, em especial na engenharia automotiva associada à competição, de modo que, sendo a aceleração o parâmetro mais importante em um veículo de corrida (MILLIKEN; MILLIKEN, 1994), faz-se necessário o projeto de componentes e estruturas com extrema leveza e suficientemente resistentes, possibilitando máxima potência por massa.

Na equipe Siará Baja, é perceptível a evolução em relação a este desafio, o que permite realizar uma contextualização histórica resumida do modo com o qual a equipe associou as análises estruturais ao fluxo de projeto do protótipo, bem como os modelos utilizados para tal.

Tendo em vista a intrínseca complexidade relacionada aos modelos, foi continuamente utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF) para o projeto e análise dos componentes estruturais, à exceção daqueles que possuem formulação analítica tradicional, como parte dos elementos de máquina presentes no protótipo. Inicialmente, os modelos eram predominantemente consistidos em componentes individuais submetidos a análises estruturais lineares estáticas, de modo que os locais de aplicação da carga e de restrição eram os que o componente em questão realizava a “troca” de forças externas (conforme o princípio da ação e reação) mediante a condição de equilíbrio estático.

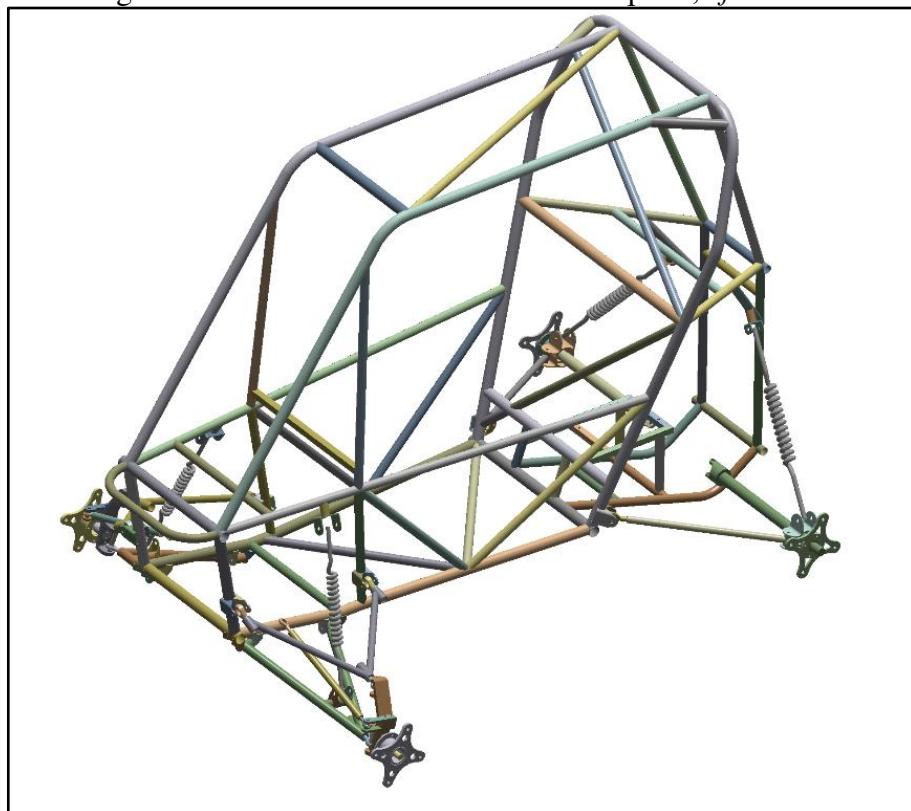
Posteriormente, foram iniciadas as concepções de modelos baseados em montagens de dois ou mais componentes, notadamente em formato de “quarto de carro” (suportes à gaiola, *links* de suspensão e *knuckle*), entre outros. Começavam a ser trabalhados uma maior quantidade de conceitos-chave dentro do âmbito dos modelos estruturais em elementos finitos:

os contatos, as juntas cinemáticas, estudos acerca da modelagem de juntas parafusadas e soldadas, dentre outros.

Na 15^a Competição Baja SAE BRASIL - Etapa Nordeste (2020), a equipe Siará Baja apresentou um modelo estrutural linear estático de carro completo (figura 4), a partir do qual foram representados todos os componentes estruturais do veículo, sustentando o projeto de variados componentes dos sistemas de suspensão e direção, além da gaiola.

O modelo de carro completo permitiu maior representatividade em relação às trocas de esforços entre os componentes e em relação a distribuição de tensão nos componentes em geral, especialmente os submetidos a carregamentos combinados como os *links* de suspensão, além dos submetidos a esforços típicos de cisalhamento e rasgamento. Além disso, foi possível avaliar o comportamento estrutural do chassi a partir do trabalho simultâneo das suspensões dianteira e traseira, aproximando o modelo da condição de operação do veículo.

Figura 4 - Modelo estrutural de carro completo, “full car”.



Fonte: Autor.

Dos modelos iniciais baseados em componentes iniciais até o modelo de carro completo, um desafio se manteve: a determinação dos esforços a serem utilizados nas análises estruturais. Foram realizadas diversas modelagens analíticas baseadas em modelos dinâmicos

simplificados, métodos de energia e cargas baseadas em parâmetros de suspensão (como, por exemplo, a rigidez das molas, a partir das forças de fechamento).

Tais métodos ofereceram valores estimados de cargas estacionárias, sendo aplicadas em análises estáticas, podendo ainda serem acrescidas de fatores de majoração que propunham a representação de efeitos dinâmicos, isto é, forças decorrentes de amplificações dinâmicas (BROWN; ROBERTSON; SERPENTO, 2002).

Os resultados correspondentes eram utilizados em análises de falha estáticas, majoritariamente utilizando a teoria da energia de distorção de von Mises-Hencky, bem como em análises de falha por fadiga simplificadas, baseadas na consideração de um carregamento repetido, definido a partir da carga supracitada como força máxima e um valor nulo como força mínima.

De fato, analisou-se continuamente um sistema indiscutivelmente dinâmico – o veículo off-road em operação-, sendo submetido a um carregamento de classe quatro (NORTON, 2013), a partir de análises estruturais que desconsideravam solicitações variantes com o tempo e efeitos inerciais, relacionados aos pares “massa-aceleração” e “amortecimento-velocidade”.

A motivação do presente trabalho baseia-se na inclusão desses efeitos como uma contribuição para o melhoramento contínuo dos modelos estruturais da equipe, por meio de uma análise estrutural dinâmica pelo MEF e posterior análise de falha aplicada ao chassi.

1.4.Objetivos do trabalho

O presente estudo possui como objetivo geral a análise estrutural do chassi do protótipo Baja SAE SB-20 pautado na interação veículo-via, sendo o veículo modelado como um sistema dinâmico multicorpo parcialmente flexível e excitado pela base, com o modelo estrutural concebido como do tipo simulador de pista *four-post* com pneu acoplado (*tire-coupled road simulator*).

Os objetivos específicos são:

1. Construção de um modelo dinâmico multicorpo do protótipo SB-20 do tipo *tire-coupled four-post road simulator* a partir do pacote comercial ANSYS;
2. Elaboração das funções de excitação com base em perfil de operação simplificado, pautado em um circuito padrão e velocidade constante;
3. Análise da resposta dinâmica do modelo: transmissibilidade de deslocamento e aceleração da massa suspensa;

4. Análise de falha estática do chassi do protótipo: determinação dos coeficientes de segurança a partir das teorias de falha estática dúctil da energia de distorção (von Mises-Hencky) e do cisalhamento máximo (Tresca-Guest);
5. Análise de falha por fadiga do chassi do protótipo: determinação da vida a partir da teoria de falha por fadiga de Goodman modificada e da teoria de acúmulo de dano de Palmgren-Miner.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente tópico é destinado a embasar as decisões de projeto e o modelo elaborado, de forma geral, conforme as teorias pertinentes. Deste modo, tem-se como intuito principal o destaque de conceitos fundamentais que permitem uma aplicação coerente dos métodos e das teorias destacadas, embora trabalhadas à nível introdutório.

Neste sentido, serão trabalhados os subtópicos 2.1 – acerca do MEF, 2.2 – acerca da Mecânica Estrutural e o 2.3 – pautado nos aspectos pertinentes da Mecânica Veicular e do protótipo SB-20.

2.1. Método dos Elementos Finitos

2.1.1. *Sistemas contínuos e discretos*

A conceituação e discussão acerca de sistemas contínuos e discretos inicia-se a partir da ideia de subdivisão, mais especificamente em entender o comportamento de um sistema a partir do comportamento das partes que o compõem.

De um modo geral, um sistema contínuo é dividido em infinitas partes, e a solução obtida para um sistema contínuo é válida para suas infinitas partes, dada a partir de uma função matemática. Estas soluções são comumente nomeadas de soluções analíticas, e permitem a obtenção de valores exatos.

Como exemplo, para a análise de flexão, o modelo de viga de Euler-Bernoulli permite a obtenção da resposta de um elemento de viga em termos de deslocamentos, deformações e tensões a partir de diferentes condições de apoio e carregamento, fazendo uso de equações diferenciais, de forma que o elemento de viga é dividido em infinitos elementos diferenciais. Esta resposta é exata e definida nos infinitos pontos da viga, porém, o modelo é incompatível com algumas condições encontradas em diversas situações em estruturas reais, como componentes e estruturas de geometria complexa, por exemplo.

Um sistema discreto é dividido em finitas partes, sendo a solução aproximada e obtida inicialmente para as junções entre elas, sendo posteriormente a solução destas partes calculada a partir das junções. As junções são mais comumente chamadas de nós, e as partes, chamadas de elementos. Contrapondo os sistemas contínuos, os elementos são de tamanho finito, e não diferencial. Como não é obtida a resposta do sistema para infinitos pontos, observa-se um ponto chave para o entendimento de sistemas discretos: para que o sistema discreto seja satisfatoriamente “utilizável”, os nós devem representar apropriadamente o comportamento do conjunto inteiro, isto é, do sistema.

Ainda no exemplo da análise de flexão, é comum a utilização de um sistema discreto de fácil modelagem para aplicação em problemas de baixa complexidade, baseado no método das diferenças finitas.

2.1.2. Síntese do Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos, conforme Filho (2000), é um método aproximado de cálculo de sistemas contínuos que utiliza da discretização de um corpo contínuo em finitos elementos conectados entre si por meio de nós.

A montagem de elementos constitui o modelo matemático, tendo o seu comportamento especificado a partir dos deslocamentos nodais, nos problemas de análise estrutural. Segundo Madenci e Guven (2015), para justificar a aplicação do MEF, o sistema de análise, que consiste no domínio, é de elevada complexidade e submetida a condições de contorno gerais, inviabilizando a solução analítica. Ainda segundo os autores, pode-se definir o método a partir dos seguintes passos:

1. Discretização do domínio em um número finito de subdomínios (elementos);
2. Seleção das funções de interpolação para as variáveis de estado, sendo, para aplicações estruturais, os deslocamentos nodais;
3. Contabilização das matrizes do subdomínio e montagem da matriz do domínio;
4. Imposição das condições de contorno;
5. Solução das equações resultantes;
6. Computações adicionais, caso necessário.

Os comportamentos de diversos sistemas físicos são modelados a partir de equações de equilíbrio governantes, sendo estes comportamentos descritos pelas variáveis de estado do problema. As variáveis de estado podem ser diversas quantidades físicas, como deslocamentos

para o caso de problemas mecânicos estruturais e temperaturas para problemas de transmissão de calor.

2.1.3. Rigidez da estrutura e do elemento

2.1.3.1. Aspectos gerais acerca da rigidez

Em um sistema discretizado, a rigidez da estrutura é contabilizada a partir da rigidez dos elementos que a compõem, permanecendo a ideia de entendimento do comportamento global a partir dos comportamentos locais. Essa contabilização é realizada de modo a considerar os seguintes aspectos do sistema, conforme a formulação geral do MEF (MADENCI; GUVEN, 2015; FILHO, 2000):

1. Determinação da matriz de rigidez de cada elemento isolado (subdomínio);
2. Transformação da matriz de rigidez de cada elemento do sistema local $[k^e]$ para o sistema global $[K^e]$ a partir da matriz de transformação $[T]$, sendo:

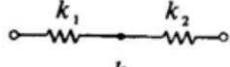
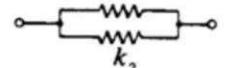
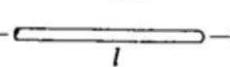
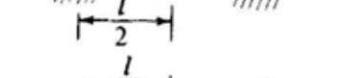
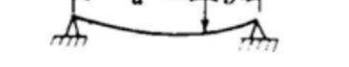
$$[K^e] = [T]^T \cdot [k^e] \cdot [T] \quad (1)$$

3. Montagem da matriz de rigidez da estrutura (“domínio”) a partir da identificação dos diversos graus de liberdade (GDL) da estrutura nos vetores de localização, conforme a expressão simbólica: $[K] = \sum [K^e]$.

Para qualquer sistema mecânico, a rigidez porta o sentido físico de força associada a um deslocamento unitário. Sendo força uma grandeza vetorial, devendo ser definida a partir de um sentido, direção e um módulo, a rigidez também não pode ser simplesmente definida a partir de uma intensidade, ao passo que um sistema possui diversas rigidezes, a depender da direção e sentido de análise, bem como das condições de contorno gerais.

Além disso, do sistema mais simples ao mais complexo, vê-se que a rigidez (ou as rigidezes) se relacionam diretamente com a geometria e o material do sistema (conforme exibe a figura 5), relação que também é evidenciada na matriz de rigidez de cada elemento finito e, consequentemente, na matriz de rigidez da estrutura.

Figura 5 - Rigidezes de vários sistemas mecânicos. Vê-se que a rigidez é determinada a partir de propriedades do material e da geometria do sistema.

	$k = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}$		$k = k_1 + k_2$		$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$
	$k = \frac{EI}{l}$		$k = \frac{EA}{l}$		$k = \frac{3EI}{l^3}$
	$k = \frac{48EI}{l^3}$		$k = \frac{192EI}{l^3}$		$k = \frac{768EI}{7l^3}$
	$k = \frac{3EI}{a^2b^2}$				

Fonte: (TRANSTUTORS, 2022).

Sendo a determinação da matriz de rigidez da estrutura feita a partir das matrizes de rigidez dos vários elementos finitos, faz-se fundamental o entendimento da matriz de rigidez de um elemento. Mais que simplesmente determinar a relação entre cargas e deslocamentos nodais, é possível entender de forma detalhada o significado físico dos variados termos da matriz: cada elemento da matriz representa uma força associada à um deslocamento unitário, do seguinte modo: o coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez do elemento finito representa a força no grau de liberdade i em decorrência do deslocamento unitário no grau de liberdade j , enquanto todos os outros GDL estão restritos, possuindo deslocamento nulo (FILHO, 2000).

Desta forma, uma força nodal é escrita a partir de uma equação algébrica, de modo que k_{ij} carrega o sentido físico supracitado, sendo a força resultante dos efeitos simultâneos dos deslocamentos em todos os n GDL da estrutura. Tomando as equações algébricas para forças nodais nos outros vários graus de liberdade, tem-se uma justificativa do tratamento matricial realizado no MEF.

$$f_i = k_{i,j} \cdot d_j + k_{i,j+1} \cdot d_{j+1} + \cdots + k_{i,n} \cdot d_n \quad (2)$$

2.1.3.2. Determinação da rigidez pelo método direto

Quando, para um elemento estrutural, pode-se estabelecer as relações diretas e exatas entre as forças e deslocamentos nodais, a partir da mecânica dos sólidos/resistência dos

materiais, diz-se que a matriz de rigidez pode ser determinada pelo método direto, a partir da determinação direta dos variados elementos pertencentes à esta matriz.

Isto é realizado para os elementos unidimensionais de mola, barra (treliça) e viga, ao passo que a lei de deformação interna possui formulação simples e exatamente determinada e que estes elementos não são do tipo “conectados continuamente” (diz-se que possuem topologia reticular), sendo conectados aos elementos adjacentes nos nós e não existindo interações entre elementos em outros locais.

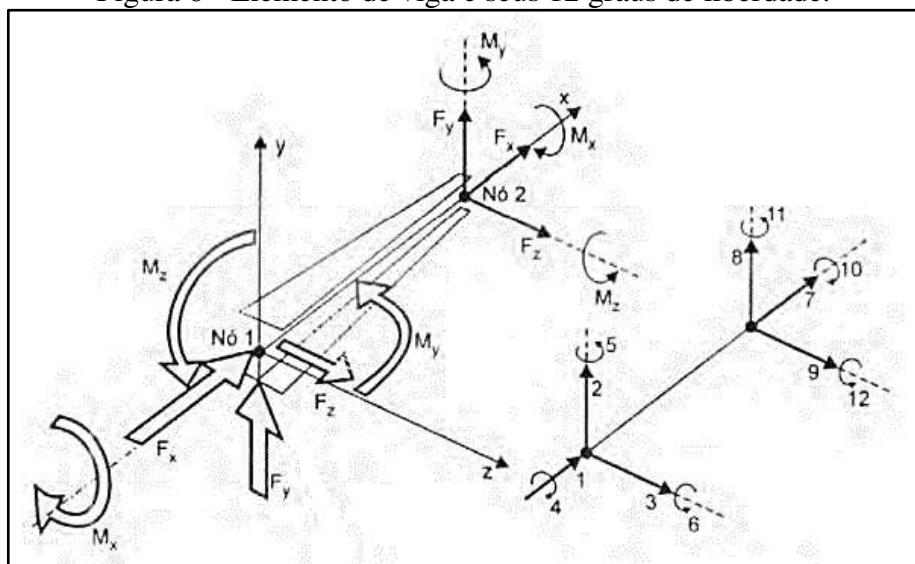
Ainda explorando o sentido físico dos elementos da matriz de rigidez de uma estrutura, no âmbito das matrizes montadas pelo método direto, pode-se avaliar alguns termos da matriz de rigidez de um elemento de viga. O elemento de viga retratado possui 12 GDL (figura 6), sendo compatível com solicitações espaciais axiais, de flexão e de torção, incluindo ainda termos adicionais para consideração da deformação por cisalhamento, de fundamental importância para as vigas curtas (TIMOSHENKO; GERE, 1983; FILHO, 2000).

Tem-se:

$$\{f\}_{12x1} = [k^e]_{12x12} \cdot \{d\}_{12x1} \quad (3)$$

Em que $\{f\}_{12x1}$ é a matriz de força nodal, $[k^e]_{12x12}$ é a matriz de rigidez do elemento, e $\{d\}_{12x1}$ é a matriz de deslocamento nodal, tomando-se tais matrizes no sistema local (subdomínio do elemento).

Figura 6 - Elemento de viga e seus 12 graus de liberdade.



Fonte: Adaptado de (FILHO, 2000).

1. k_{11} : Força no grau de liberdade 1 em decorrência do deslocamento unitário no grau de liberdade 1, enquanto todos os outros 11 GDL estão restritos, possuindo deslocamento

nulo. Tendo em vista que no sistema de coordenadas selecionado o grau de liberdade um é referente ao deslocamento linear no sentido longitudinal (sentido do comprimento) da viga, vem de imediato que k_{11} representa apenas a rigidez axial da viga.

$$k_{11} = \frac{E \cdot A}{L} \quad (4)$$

2. k_{21} : Força no grau de liberdade 2 em decorrência do deslocamento unitário no grau de liberdade 1, enquanto todos os outros 11 GDL estão restritos, possuindo deslocamento nulo. O grau de liberdade 1, como visto, é referente ao deslocamento linear no sentido longitudinal da viga. O grau de liberdade 2 é referente ao deslocamento linear no sentido sagital (direção da altura). Como não há relação entre as forças e deslocamentos nodais entre estes GDL, tem-se que este termo é nulo. O mesmo raciocínio pode ser aplicado a todos os demais termos com valor nulo.

$$k_{21} = 0 \quad (5)$$

3. k_{22} : Força no grau de liberdade 2 em decorrência do deslocamento unitário no grau de liberdade 2, enquanto todos os outros 11 GDL estão restritos, possuindo deslocamento nulo. Sendo o grau de liberdade 2 o deslocamento linear no sentido sagital, pode-se associar de forma direta esta rigidez a rigidez a flexão no plano XY, dada pela seguinte expressão, na qual ϕ_y é um fator de correção que incorpora o efeito das deformações por cisalhamento (*warping*) na direção sagital Y (FILHO, 2000), em decorrência da flexão no plano XY, e A_{sy} é a área da seção transversal efetiva quanto ao cisalhamento (dada a partir da distribuição da tensão de cisalhamento). Para termos associados a flexão no plano XZ, tem-se formulação semelhante, alterando-se o sentido dos respectivos termos nas equações.

$$k_{22} = \frac{12 \cdot E \cdot I_Z}{(1 + \phi_y) \cdot L^3}; \quad \phi_y = \frac{12 \cdot E \cdot I_Z}{G \cdot A_{sy} \cdot L^2} \quad (6)$$

4. k_{44} : Força no grau de liberdade 4 em decorrência do deslocamento unitário no grau de liberdade 4, enquanto todos os outros 11 GDL estão restritos, possuindo deslocamento nulo. O grau de liberdade 4 é o de deslocamento angular no sentido longitudinal da viga, sendo o termo correspondente à rigidez a torção.

$$k_{44} = \frac{G \cdot J}{L} \quad (7)$$

2.1.3.3.Determinação da rigidez pelo método de energia

Embora o significado físico de cada termo pertencente à matriz de rigidez do elemento permaneça no caso dos elementos bidimensionais e tridimensionais, o método direto não pode ser aplicado, devido a indisponibilidade das relações diretas entre as forças e deslocamentos nodais e da problemática das interações entre os elementos nos locais de contorno, que também devem ser consideradas ao se pensar em aplicar o modo supracitado de determinação direta de um elemento da matriz. Deste modo, a matriz de rigidez é determinada por outro modo, e de forma aproximada.

O modo utilizado pode ser sintetizado a partir da definição de uma função de deslocamento “artificial”, contínua e válida para todo o elemento finito e da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais. De acordo com Timoshenko e Gere (1983), o princípio do trabalho virtual pode ser definido do seguinte modo: quando a uma estrutura deformável, em equilíbrio, sob a ação de um sistema de cargas, é dada uma pequena deformação virtual, o trabalho realizado pelas forças externas (ou cargas) é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas (ou tensões resultantes).

Deste modo, o trabalho externo ao elemento, realizado por forças nodais, se iguala ao trabalho interno, realizado pelas forças internas, traduzindo assim a condição de equivalência entre as forças internas no elemento e as forças externas nodais estaticamente equivalentes (FILHO, 2000). Neste caso, o trabalho das forças internas exibe a condição deformada aproximada, ao passo que tal condição é dependente da função de interpolação escolhida (função de deslocamento).

Filho (2000) simplifica de forma didática o processo de montagem da matriz de rigidez de um elemento finito a partir de um procedimento geral baseado em cinco passos, aplicando-o para a formulação de diversos elementos finitos. Generalizando este processo para qualquer elemento finito pode-se ter uma descrição geral, por mais que se sacrifique parte da didática inerente.

Da mecânica do contínuo, tem-se a seguinte equação constitutiva, que traduz a relação entre tensão e deformação, segundo o tensor tensão σ e sua representação em matriz coluna (SCIAMMARELLA, A.; SCIAMMARELLA, M., 2012).

$$\{\sigma\}_{9x1} = [D]_{9x9} \cdot \{\epsilon\}_{9x1} \quad (8)$$

Conforme o teorema de Cauchy, tem-se que o tensor tensão é simétrico (cisalhamento simétrico) (TIMOSHENKO; GERE, 1983; ANAND; GOVINDJEE, 2020). Deste modo, há uma redução de três termos no tensor tensão, sendo:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad (9)$$

Desta forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{6x1} = [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{6x1} \quad (10)$$

Considerando o material isotrópico, há uma simplificação ainda maior na relação constitutiva, de modo que a matriz \mathbf{D} pode ser completamente definida a partir de duas constantes do material, que definem a elasticidade isotrópica: o módulo de elasticidade longitudinal E e o módulo de elasticidade transversal G ou o módulo de elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson ν , de modo que $G = E/2(1 + \nu)$, relação demonstrada por Timoshenko e Gere (1983), aplicando-se o estado de cisalhamento puro a um elemento.

Esta relação simplificada também pode ser exibida pelo seguinte conjunto de equações.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (11)$$

Será introduzida a notação (x, y, z) , indicando que a relação constitutiva é generalizada para o caso tridimensional. A matriz de coeficientes \mathbf{D} é também chamada de matriz de elasticidade.

Tendo como base a teoria das pequenas deformações (ANAND; GOVINDJEE, 2020), é possível descrever as deformações de forma linearizada, a partir das funções de deslocamento e por meio das seguintes derivadas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z)}{\partial x} \quad (12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \mathbf{v}(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \mathbf{w}(x, y, z)}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \mathbf{v}(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}(x, y, z)}{\partial y}$$

Em que $\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}$ são as funções de interpolação, de modo que qualquer deslocamento no elemento finito é descrito por estas componentes. A partir do conhecimento dos deslocamentos nodais, pode-se determinar os deslocamentos dentro do elemento a partir destas funções.

As funções de interpolação que serão utilizadas serão séries polinomiais completas, de modo que o número de GDL (caracterizando a matriz de deslocamentos nodais) do elemento é igual a quantidade de coeficientes do polinômio, possibilitando a determinação completa destes coeficientes a partir da determinação dos deslocamentos nodais.

Para um elemento com n GDL, tem-se $\{\mathbf{f}\}_{nx1} = [\mathbf{k}^e]_{nxn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1}$. Para funções de interpolação polinomiais completas, tem-se a forma geral:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) = & C_{\frac{n}{c}} x^e + C_{\frac{n}{c}-1} y^e + C_{\frac{n}{c}-2} z^e + C_{\frac{n}{c}-3} x^{e-1} + C_{\frac{n}{c}-4} y^{e-1} + \\ & C_{\frac{n}{c}-5} z^{e-1} + \dots + C_3 x^1 + C_2 y^1 + C_1 z^1 + C_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Sendo $\mathbf{v}; \mathbf{w}$ definidos de forma semelhante. Foi incluída a variável c referente a quantidade de funções necessárias para descrever o movimento de um ponto no espaço. Por exemplo, para o caso tridimensional, em que se estabelecem as funções de deslocamento $\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}$, tem-se $c = 3$. Ao passo que o elemento tem n GDL, cada função de interpolação é um polinômio com n/c coeficientes, distribuído da forma exibida.

Além disso, a variável incluída e representa o grau da função de interpolação, de modo que elementos nos quais as funções de deslocamento são estabelecidas com $e = 1$ são ditos lineares, com $e = 2$ são ditos quadráticos ou parabólicos, também havendo a nomenclatura “elemento de alta ordem” para qualquer $e > 1$. É possível observar que não é dada nenhuma

preferência em relação a uma das direções ($x; y; z$), de modo que os expoentes são distribuídos os mesmos para cada direção.

Como destaca Madenci e Guven (2015), as funções de interpolação polinomiais, para possibilitar a obtenção de uma solução convergida e única, devem satisfazer as requisições:

1. Continuidade de deslocamentos para o elemento, isto é, representação da variação contínua dos deslocamentos ponto a ponto, sendo uma função contínua. A depender do comportamento físico que o elemento pretende representar, pode haver ainda a necessidade de continuidade nas derivadas das funções de deslocamento. Para estas funções, o grau de continuidade é representado pela nomenclatura Continuidade C^m para uma função com derivadas até ordem m contínuas (FILHO, 2000);
2. Compatibilidade ao longo de entidades adjacentes entre elementos, sendo os elementos que satisfazem as condições de continuidade e de compatibilidade chamados conformes (*conformal elements*) ou de modos compatíveis. A condição de compatibilidade nos nós, para os deslocamentos, diz respeito à restrição cinemática entre nós compartilhados por diferentes elementos da estrutura discretizada, de modo que tais nós permanecem conectados aos nós associados após a aplicação da carga e ocorrência dos consequentes deslocamentos nodais, isto é, na condição deformada da estrutura. Isto é descrito pelas componentes de deslocamento do nó relacionado. Em resumo, um nó, ao atender a condição de compatibilidade, faz que a estrutura não possua uma “abertura” no referido nó, o que reduziria a rigidez do modelo estrutural e conduziria a uma representação física equivocada;
3. Devem ser completas, permitindo a ocorrência de movimento de corpo rígido e garantindo variação dos deslocamentos e suas derivadas, conforme grau de continuidade;
4. Isotropia geométrica, promovendo mesmo comportamento em todas as direções, isto é, não é dada preferência a nenhuma direção para as funções de deslocamento, conforme supracitado. Isto é feito a partir da própria construção da função de interpolação em relação a quantidade de GDL do elemento e a quantidade de coeficientes das funções.

As funções de deslocamento são representadas e agrupadas de forma matricial do seguinte modo, sendo as variáveis c e n definidas conforme supracitado, a matriz \mathbf{H} a das variáveis (x, y, z), e a matriz \mathbf{C} a dos coeficientes dos polinômios. O subscrito “*interp*” é descreve a matriz dos deslocamentos interpolados.

$$\{\mathbf{d}_{interp}(x, y, z)\}_{cx1} = [\mathbf{H}(x, y, z)]_{cxn} \cdot \{\mathbf{C}\}_{nx1} \quad (14)$$

Os deslocamentos nodais conhecidos podem ser escritos a partir das funções de interpolação, permitindo assim a obtenção dos valores dos coeficientes desconhecidos. Esta substituição gera um novo conjunto de equações algébricas, que também pode ser representado matricialmente. A matriz \mathbf{A} contém termos conhecidos, referentes a geometria do elemento. A matriz \mathbf{d} é a de deslocamentos nodais, conforme já utilizado.

$$\{\mathbf{d}\}_{nx1} = [\mathbf{A}]_{nxn} \cdot \{\mathbf{C}\}_{nx1} \quad (15)$$

A partir das equações (13) e (14), é possível escrever uma expressão de fundamental importância, que descreve a relação entre os deslocamentos interpolados e os deslocamentos nodais:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{C}\}_{nx1} &= [\mathbf{A}]^{-1}_{nxn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1} \\ \therefore \{\mathbf{d}_{interp}(x, y, z)\}_{cx1} &= [\mathbf{H}(x, y, z)]_{cxn} \cdot [\mathbf{A}]^{-1}_{nxn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (16)$$

Define-se a matriz \mathbf{N} , que permite descrever os deslocamentos interpolados a partir dos deslocamentos nodais, traduzindo a interpolação dos deslocamentos no elemento. A matriz é chamada de função de forma (*shape function*) do elemento.

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}(x, y, z)]_{cxn} &\stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{H}(x, y, z)]_{cxn} \cdot [\mathbf{A}]^{-1}_{nxn} \\ \therefore \{\mathbf{d}_{interp}(x, y, z)\}_{cx1} &= [\mathbf{N}(x, y, z)]_{cxn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (17)$$

Em posse das funções de deslocamento, pode-se calcular as deformações no elemento a partir das derivadas provenientes da teoria das pequenas deformações, citadas anteriormente. Novamente, são geradas equações algébricas que podem ser organizadas matricialmente. A matriz \mathbf{G} contém os termos numéricos que possibilitam a representação matricial.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)\}_{6x1} = [\mathbf{G}]_{6xn} \cdot \{\mathbf{C}\}_{nx1} \quad (18)$$

A partir das equações (15) e (18), tem-se:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{C}\}_{nx1} &= [\mathbf{A}]^{-1}_{nxn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1} \\ \therefore \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)\}_{6x1} &= [\mathbf{G}]_{6xn} \cdot [\mathbf{A}]^{-1}_{nxn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (19)$$

Define-se a matriz \mathbf{B} , que permite descrever as deformações a partir dos deslocamentos nodais, traduzindo a interpolação das deformações no elemento. A matriz é chamada de matriz deslocamento-deformação.

$$[\mathbf{B}]_{6xn} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{G}]_{6xn} \cdot [\mathbf{A}]_{nxn}^{-1} \quad (20)$$

$$\therefore \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)\}_{6x1} = [\mathbf{B}]_{6xn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1}$$

A partir das equações (10) e (20), pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\}_{6x1} = [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot [\mathbf{B}]_{6xn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1} \quad (21)$$

Define-se a matriz \mathbf{S} , que permite descrever as tensões a partir dos deslocamentos nodais, traduzindo a interpolação das tensões no elemento. A matriz pode ser chamada de matriz deslocamento-tensão.

$$[\mathbf{S}]_{6xn} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot [\mathbf{B}]_{6xn} \quad (22)$$

$$\therefore \{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\}_{6x1} = [\mathbf{S}]_{6xn} \cdot \{\mathbf{d}\}_{nx1}$$

A partir da análise da matriz \mathbf{S} pode-se avaliar o comportamento das tensões no elemento finito a partir dos deslocamentos nodais. Este comportamento, por sua vez, possui “início” no processo de derivação das funções de interpolação para a determinação das deformações.

Ao passo que a derivação é uma operação matemática que, por sua definição, reduz o grau da função à que está aplicada, nota-se a questão central da importância do grau das funções de interpolação associadas ao elemento finito, e entende-se o esforço para a formulação de elementos de interpolação mais “sensível”, de ordem superior.

Como exemplo da temática, tem-se os elementos triangulares (bidimensionais) e tetraédricos (tridimensionais) lineares, que, a partir de funções de interpolação de ordem $e = 1$ em combinação com o número de GDL, possuem deformações e tensões constantes em todo o elemento (FILHO, 2000).

Não somente o entendimento a nível de tensão e deformação, mas o entendimento das funções de interpolação como “intérpretes” da condição deformada da estrutura confirma a problemática do grau do polinômio, à medida que elementos lineares possuem uma capacidade de representação de curvatura menor (evidentemente, conforme o comportamento das funções de interpolação), aumentando os valores de distorção (FILHO, 2000).

A partir da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, tem-se a determinação da matriz de rigidez aproximada do elemento finito.

Anotando-se o trabalho externo, realizado pelas forças nodais, em que o asterisco representa que os deslocamentos são virtuais (“imaginários” ou fictícios) e T representa a transposição realizada para a realização do produto matricial, com um elemento de n GDL:

$$W^e_{ext} = \{\boldsymbol{d}^*\}_{1xn}^T \cdot \{\boldsymbol{f}\}_{nx1} \quad (23)$$

O trabalho interno é dado pela expressão de energia de deformação relacionando-se tensão e deformação. A expressão para a energia específica (por unidade de volume) de deformação que contabiliza deformações normais e tangenciais em todo o volume do elemento é:

$$u = \sum \sigma_i \cdot d\varepsilon_i \quad (24)$$

A partir da integração da expressão anterior em todo o volume do elemento, tem-se a energia de deformação expressa a partir de uma integral de volume:

$$U = W^e_{int} = \int_{V^e} u \cdot dV \quad (25)$$

A partir das notações utilizadas anteriores, pode-se escrever:

$$W^e_{int} = \int_{V^e} \{\boldsymbol{\varepsilon}^*(x, y, z)\}_{1x6}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\}_{6x1} \cdot dV \quad (26)$$

Dadas as expressões para o trabalho externo e o trabalho interno, pode-se prosseguir a partir da inclusão das relações obtidas anteriormente. A matriz de rigidez do elemento deve ser aquela que exibe a relação entre forças e deslocamentos nodais, sendo este o guia para o desenvolvimento realizado.

A partir das relações já estabelecidas, e posteriormente substituindo na expressão do trabalho interno, tem-se:

$$W^e_{int} = \int_{V^e} \{\boldsymbol{d}^*\}_{1xn}^T \cdot [\boldsymbol{B}]_{nx6}^T \cdot [\boldsymbol{D}]_{6x6} \cdot [\boldsymbol{B}]_{6xn} \cdot \{\boldsymbol{d}\}_{nx1} \cdot dV \quad (27)$$

Com a equivalência de energia, é obtido:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{d}^*\}_{1xn}^T \cdot \{\boldsymbol{f}\}_{nx1} &= \int_{V^e} \{\boldsymbol{d}^*\}_{1xn}^T \cdot [\boldsymbol{B}]_{nx6}^T \cdot [\boldsymbol{D}]_{6x6} \cdot [\boldsymbol{B}]_{6xn} \cdot \{\boldsymbol{d}\}_{nx1} \cdot dV \\ \therefore \{\boldsymbol{f}\}_{nx1} &= \left[\int_{V^e} [\boldsymbol{B}]_{nx6}^T \cdot [\boldsymbol{D}]_{6x6} \cdot [\boldsymbol{B}]_{6xn} \cdot dV \right] \cdot \{\boldsymbol{d}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (28)$$

$$[\boldsymbol{k}^e]_{nxn} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{V^e} [\boldsymbol{B}]_{nx6}^T \cdot [\boldsymbol{D}]_{6x6} \cdot [\boldsymbol{B}]_{6xn} \cdot dV \quad (29)$$

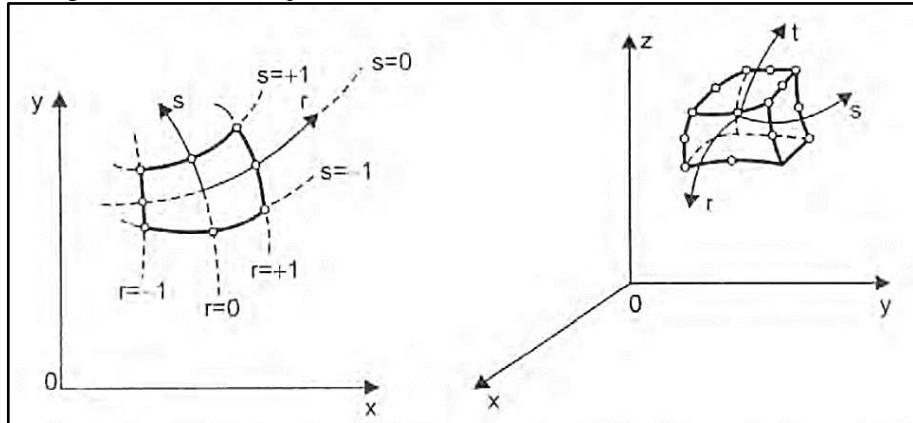
Desta forma, tem-se a matriz de rigidez do elemento finito de n GDL, relacionando as forças e deslocamentos nodais, sendo de dimensão $n \times n$. Vê-se que a matriz de rigidez, conforme retratado no raciocínio anterior, possui relação direta com o material (matriz de elasticidade \mathbf{D}), com a geometria (matriz \mathbf{A}), mas especialmente, para o MEF, com as funções de interpolação e suas peculiaridades retratadas em parte, sendo isto incluído na matriz deslocamento-deformação (matriz \mathbf{B}), englobando as demais matrizes definidas ao longo do desenvolvimento.

2.1.4. Formulação isoparamétrica

No tópico anterior, foram destacados vários aspectos relativos às funções de interpolação, de modo que estas possuem fundamental importância para o MEF. Computacionalmente, as funções de interpolação são formuladas tendo como base o sistema de coordenadas natural, ao invés do sistema de coordenadas cartesiano local utilizado anteriormente.

No sistema de coordenadas natural, a localização de um ponto é dada a partir de sua localização no elemento finito, ou seja, de forma relativa ao elemento, e ainda, de forma adimensional (FILHO, 2000), conforme a figura 7:

Figura 7 - Localização dos nós no sistema de coordenadas natural.



Fonte: Adaptado de (FILHO, 2000).

Um aspecto de relevância é que, para a formulação isoparamétrica, a mesma função que descreve os deslocamentos (campo de deslocamentos) também descreve a geometria (coordenadas dos pontos), ao passo que os deslocamentos são dados a partir da localização no elemento (HUGHES, 2012; FILHO, 2000).

Para obter a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas natural, caracterizando a chamada formulação isoparamétrica do elemento, é necessário relacionar as

variáveis do sistema cartesiano local ($x; y; z$) com as do sistema natural ($r; s; t$), possibilitando a obtenção das deformações, que foram definidas a partir de derivadas no sistema cartesiano local.

Para um elemento retangular linear (figura 8), as funções de interpolação no sistema natural são dadas pelas seguintes expressões, em que h_i interpola linearmente em função das variáveis $r; s$ (FILHO, 2000):

$$u(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) \cdot u_i$$

$$v(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) \cdot v_i$$

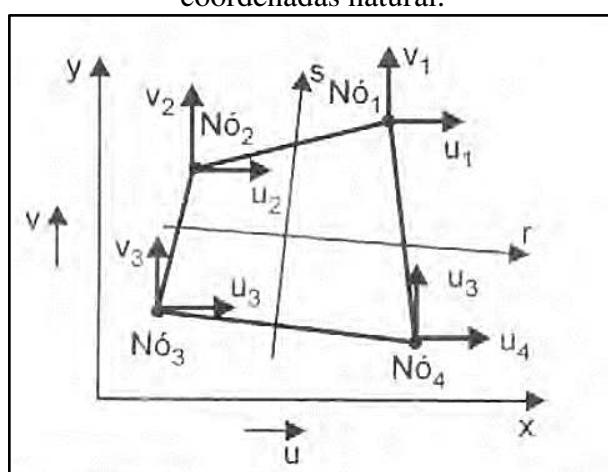
$$h_1 = \frac{1}{4} \cdot (1+r) \cdot (1+s) \quad (30)$$

$$h_2 = \frac{1}{4} \cdot (1-r) \cdot (1+s)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} \cdot (1-r) \cdot (1-s)$$

$$h_4 = \frac{1}{4} \cdot (1+r) \cdot (1-s)$$

Figura 8 - Elemento retangular linear e seus graus de liberdade conforme o sistema de coordenadas natural.



Fonte: Adaptado de (FILHO, 2000).

O chamado operador jacobiano J estabelece a relação entre as variáveis nos dois sistemas, especificamente, a partir de suas derivadas, tendo em vista que a relação é dada a partir das expressões das deformações.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]_{2x2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1}_{2x2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

De uma forma generalizada, também pode-se descrever o operador jacobiano a partir da expressão abaixo, sendo este uma matriz que descreve a correspondência entre as derivadas no sistema natural e no sistema local. O operador jacobiano também é chamado de função de mapeamento (*mapping function*) (HUGHES, 2012).

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x, y, z} \right\} = [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r, s, t} \right\} \quad (32)$$

Conforme a expressão desenvolvida para a matriz de rigidez do elemento de n GDL, pode-se justificar a importância do operador jacobiano na representação dessa rigidez no sistema natural, tendo em vista que a matriz deslocamento-deformação \mathbf{B} , que contém derivadas que permitem descrever as deformações a partir dos deslocamentos nodais, foi inicialmente formulada no sistema cartesiano local.

Deste modo, a representação da rigidez do elemento no sistema natural se dá a partir da transformação das “derivadas cartesianas” para as “derivadas naturais” em \mathbf{B} .

Pode-se escrever a matriz de rigidez do elemento no sistema natural da seguinte forma, em que $|\mathbf{J}|$ é o determinante do operador jacobiano (FILHO, 2000):

$$[\mathbf{k}^e]_{nxn} = \int_{V^e} [\mathbf{B}]^T_{nx6} \cdot [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot [\mathbf{B}]_{6xn} \cdot |\mathbf{J}| \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (33)$$

Ou ainda, expandindo a integral e definindo os limites de integração para todo o volume do elemento, a partir das coordenadas naturais:

$$[\mathbf{k}^e]_{nxn} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T_{nx6} \cdot [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot [\mathbf{B}]_{6xn} \cdot |\mathbf{J}| \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (34)$$

De um modo geral, tem-se que a expressão anterior associa-se a um desenvolvimento analítico de grande dificuldade. Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento finito via software, o cálculo da integral é realizado de forma numérica, podendo ser feito a partir do método da Quadratura de Gauss, sob a forma de uma “soma ponderada”, sendo o método mais utilizado no âmbito das análises por Elementos Finitos (AZEVEDO, 2003).

Considerando ψ , pode-se escrever a rigidez do elemento a partir da seguinte expressão (AZEVEDO, 2003; FILHO, 2000):

$$[\psi(r, s, t)]_{nxn} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{B}]^T_{nx6} \cdot [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot [\mathbf{B}]_{6xn} \cdot |\mathbf{J}| \quad (35)$$

$$[\mathbf{k}^e]_{nxn} = \sum_{i,j,k} \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_k \cdot [\psi(r_i, s_j, t_k)]_{nxn} + [\mathbf{E}]_{nxn} \quad (36)$$

Nesta expressão, a matriz de rigidez é obtida a partir da soma dos valores da matriz ψ em alguns pontos, chamados pontos de integração de Gauss. Estes valores são acompanhados, no somatório, dos pesos α , associados a cada valor da função ψ . O erro numérico é dado por \mathbf{E} , sendo a diferença entre o valor obtido pela integral e o valor obtido pela Quadratura de Gauss.

Um detalhe importante é que, conforme visto anteriormente, o elemento é delimitado a partir da escolha de sua função de interpolação, de modo que os desenvolvimentos posteriores, e a matriz deslocamento-deformação, são dependentes desta escolha inicial, sendo o erro referente apenas ao valor exato dado pela integral, e não necessariamente a um valor de rigidez real ou de referência.

Na formulação de cada elemento finito disponível na “biblioteca” do software de análise, há a descrição acerca dos pontos de integração utilizados, bem como das demais especificações retratadas nos tópicos anteriores. Os elementos finitos utilizados no modelo estrutural do presente trabalho serão especificados em um tópico posterior.

2.1.5. Distorção do elemento

Sendo o operador jacobiano representado de forma generalizada conforme a equação apresentada anteriormente, vê-se que a sua inversa, $[\mathbf{J}]^{-1}$, deve existir, estabelecendo a relação entre os dois sistemas de coordenadas, de modo que $|\mathbf{J}| \neq 0$, ou seja, \mathbf{J} não deve ser singular.

Ao aplicar o Teorema de Cramer a este sistema quadrado, tem-se que com $|\mathbf{J}| \neq 0$ o sistema é possível e determinado, sendo esta discussão também aplicável à matriz de rigidez da estrutura.

A singularidade do operador jacobiano é identificada a partir da não existência entre uma correspondência única, também chamada biunívoca, entre os sistemas de coordenadas natural e cartesiano local, sendo esta não existência associada à distorção excessiva do elemento finito, de modo que cada elemento finito possui uma “distorção admissível” (*smoothness criterion*) para não ocorrência de tal singularidade (HUGHES, 2012).

Com isto, vê-se a importância da análise da distorção dos elementos finitos como prerrogativa para uma correta representação física, ao passo que uma elevada distorção inviabiliza a correlação entre os sistemas de coordenadas e origina uma descrição física equivocada, ou seja, uma análise com valores de resposta incoerentes (ANSYS, 2015).

De modo geral, uma discretização adequada para um modelo estrutural que utiliza o MEF pode ser caracterizada por quatro aspectos fundamentais, que serão esmiuçados no tópico de construção do modelo mecânico. Restringindo a atual discussão para a distorção dos elementos, vê-se que existem variadas métricas nos softwares (ferramentas de aplicação) que avaliam aspectos relacionados ao formato e, consequentemente, à distorção, de todos os elementos da malha do modelo, sendo cada uma formulada de forma diferente, a depender, ainda, do software utilizado, embora mantenha-se a essência conceitual. Algumas das métricas disponíveis são (ANSYS, 2015):

1. *Element Quality;*
2. *Aspect Ratio;*
3. *Jacobian Ratio;*
4. *Warping Factor;*
5. *Parallel Deviation.*
6. *Maximum Corner Angle;*
7. *Skewness;*
8. *Orthogonal Quality.*

Para o presente estudo, no qual o modelo computacional foi elaborado no software ANSYS, foram utilizadas três métricas para a análise da distorção dos elementos, sendo avaliadas a partir do valor médio e do desvio padrão, em relação ao número total de elementos do modelo discretizado. As métricas adotadas foram: *Element Quality*, *Skewness* e *Jacobian Ratio*, cujas formulações serão discutidas a seguir.

A métrica *Element Quality EQ*, amplamente utilizada em variados tipos de elementos, é pautada na relação entre entidades características dos elementos, a depender de suas formulações, delimitada entre os valores 0 (pior) e 1 (melhor).

Para elementos bidimensionais, tem-se a seguinte definição, em que A_e é a área do elemento e E_e é o comprimento da aresta do elemento. O fator C é o responsável pela correlação entre a área e a soma dos quadrados dos comprimentos das arestas, de modo que EQ é delimitado pelo supracitado.

$$EQ = C \cdot \left(\frac{A_e}{\sum E_e^2} \right) \quad (37)$$

Para elementos tridimensionais, tem-se formulação semelhante, sendo EQ obtido a partir da seguinte expressão, na qual V_e é o volume do elemento. O fator C pode assumir diferentes valores, a depender do tipo de elemento em análise.

$$EQ = C \cdot \left[\frac{V_e}{\sqrt{(\sum E_e^2)^3}} \right] \quad (38)$$

Os intervalos de referência para a métrica *Element Quality* (tabela 1) foram estabelecidos a partir de 130 modelos computacionais associados a aplicações comerciais, sendo estes valores utilizados para a verificação da discretização do modelo estrutural no presente trabalho, conforme o formato estabelecido por Aneta (2020).

Tabela 1 - Valores de referência para a métrica *Element Quality* conforme o autor.

Aceitável	Relativamente aceitável	Inaceitável
1,00 – 0,65	0,65 – 0,45	0,45 – 0,00

Fonte: Autor.

O *Skewness SK* é uma das medidas primárias de avaliação da distorção e qualidade geral da malha, de modo a determinar o quão próximo do formato ideal os elementos estão. Esta métrica pode ser determinada de duas formas diferentes, a depender da geometria do elemento que se deseja avaliar, de forma que pode ser definida de duas formas:

1. Para elementos triangulares e tetraédricos, pode ser definido como “Desvio do Volume Equilátero” (*Equilateral Volume Deviation*), calculado a partir da razão entre a diferença do tamanho de célula ótimo (geometria perfeita; OCZ) e do tamanho de célula atual (CZ) e entre o tamanho de célula ótimo;

$$SK = \frac{OCZ - CZ}{OCZ} \quad (39)$$

2. Para todas as diversas geometrias de elemento, pode ser definido como “Desvio do Ângulo Normalizado” (*Normalized Angle Deviation*), de modo que pode ser calculado a partir da seguinte expressão, na qual θ_{max} é o ângulo interno máximo, θ_{min} é o ângulo interno mínimo e θ_e é o ângulo interno equiângulo (geometria perfeita). Nesta expressão, *MAX* “retorna” o valor máximo do conjunto.

$$SK = MAX \left[\frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}; \frac{\theta_e - \theta_{min}}{\theta_e} \right] \quad (40)$$

Elmekawy (2018) exibe recomendações acerca de algumas métricas, incluindo o *Skewness*. A tabela 2 adapta os valores conforme o formato estabelecido por Aneta (2020).

Tabela 2 - Valores de referência para a métrica *Skewness* conforme Elmekawy.

Aceitável	Relativamente aceitável	Inaceitável
0,00 – 0,50	0,50 – 0,95	0,95 – 1,00

Fonte: (ELMEKAWY, 2018).

Por sua vez, os valores estabelecidos por Aneta (2020) são os exibidos a partir da tabela 3:

Tabela 3 - Valores de referência para a métrica *Skewness* conforme Aneta.

Aceitável	Relativamente aceitável	Inaceitável
0,00 – 0,50	0,50 – 0,60	0,60 - 1,00

Fonte: (ANETA, 2020).

O *Jacobian Ratio JR* é definido como a razão entre o máximo e o mínimo ou entre o mínimo e o máximo valor do determinante da matriz operador jacobiano amostrado dentre algumas localizações específicas no elemento finito, de modo que um elemento com formato ideal possui tal determinante relativamente constante e com mesmo sinal algébrico no elemento em análise (ANSYS, 2009).

Em síntese, o *Jacobian Ratio* pode ser calculado de duas formas, de forma que a amostragem pode ser realizada nos nós localizados nos vértices ou nos pontos gaussianos. Dentro as formas de cálculo, tem-se três tipos diferentes da métrica: *Jacobian Ratio* do tipo *Corner Nodes*, *MAPDL* e *Gauss Points*. O tipo adotado foi o de *Corner Nodes*, tendo em vista a formulação mais simplificada, os resultados obtidos em elementos bidimensionais (ANSYS, 2009) e a compatibilidade com o estudo desenvolvido por Aneta (2020). Deste modo, destacam-se as seguintes características acerca da métrica *Jacobian Ratio (Corner Nodes)*:

1. É definido a partir da razão entre os valores mínimo e máximo do determinante da matriz operador jacobiano;
2. É delimitado entre os valores -1 (pior) e 1 (melhor), de modo que devem ser evitados elementos com valores ≤ 0 ;
3. Se o valor do determinante do operador jacobiano diferir em sinal algébrico, dentre os locais de amostragem, em relação a algum valor nodal, é atribuído o valor -1 ao *Jacobian Ratio*;
4. Os pontos de amostragem concentram-se nos nós localizados nos vértices (*corner nodes*).

Aneta (2020) estabelece intervalos de referência do *JR* (tabela 4), sendo estes valores utilizados para a verificação da discretização do modelo estrutural no presente trabalho:

Tabela 4 - Valores de referência para a métrica *Jacobian Ratio* conforme Aneta.

Aceitável	Relativamente aceitável	Inaceitável
0,50 – 1,00	0,40 – 0,50	-1,00 – 0,40

Fonte: (ANETA, 2020).

2.1.6. *Formulação dos elementos finitos utilizados no modelo*

Para a construção do modelo mecânico a partir do MEF, foram utilizados os seguintes elementos finitos, dispostos na tabela 5:

Tabela 5 - Elementos finitos utilizados para a construção do modelo mecânico.

Elemento	Aplicação
SOLID187	Discretização dos componentes estruturais do SB-20 de topologia complexa, de comportamento mecânico geral.
SHELL281	Discretização dos componentes estruturais do SB-20 de constante e pequena espessura, compatíveis com o comportamento mecânico de casca.
BEAM189	Discretização dos componentes estruturais do SB-20 de elevado comprimento e seção transversal constante, compatíveis com o comportamento mecânico de viga curta. Devido a impossibilidade de captação de efeitos locais associados à distribuição de tensão, foram utilizados unicamente para representação de rigidez.
COMBIN14	Modelagem do comportamento mecânico associado às molas helicoidais do sistema de suspensão do veículo.
Elementos MPC184	Juntas cinemáticas gerais: modelagem do comportamento mecânico associado aos parafusos, pinos, rolamentos, e componentes de ligação em geral, no que diz respeito à transmissão dos esforços entre componentes, rigidezes locais e graus de liberdade do veículo.

Fonte: Autor.

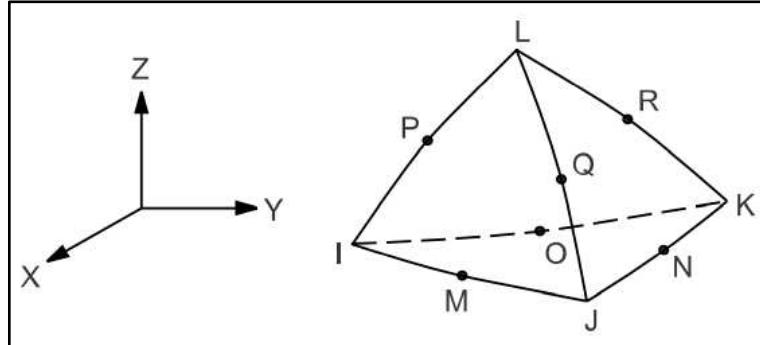
Nos subtópicos a seguir, tem-se especificações associadas aos elementos supracitados.

2.1.6.1. *SOLID187*

O SOLID187 (figura 9) é um elemento sólido tetraédrico quadrático, com 10 nós (“Tet10”), que permite variações lineares de tensão e deformação, sendo utilizado para

representação de comportamentos mecânicos gerais e modelos com malha irregular. Tem-se 3 GDL em cada nó, de deslocamento translacional.

Figura 9 - Elemento SOLID187.

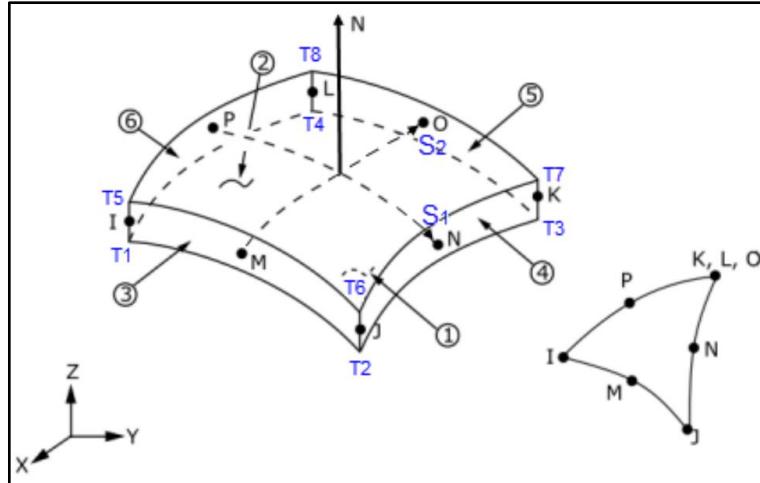


Fonte: (ANSYS, 2020).

2.1.6.2. SHELL281

O elemento SHELL281 (figura 10) se propõe a representar simultaneamente os comportamentos mecânicos de membrana, a partir de componentes de rigidez à ação de forças agindo paralelamente ao seu plano, e de placa, a partir de componentes de rigidez à ação de cargas perpendiculares ao seu plano, podendo ter geometrias do tipo quadrilátero ou triângulo, sendo utilizado, no presente trabalho, na configuração triangular, na qual se tem 6 nós (“Tri6”).

Figura 10 - Elemento SHELL281.



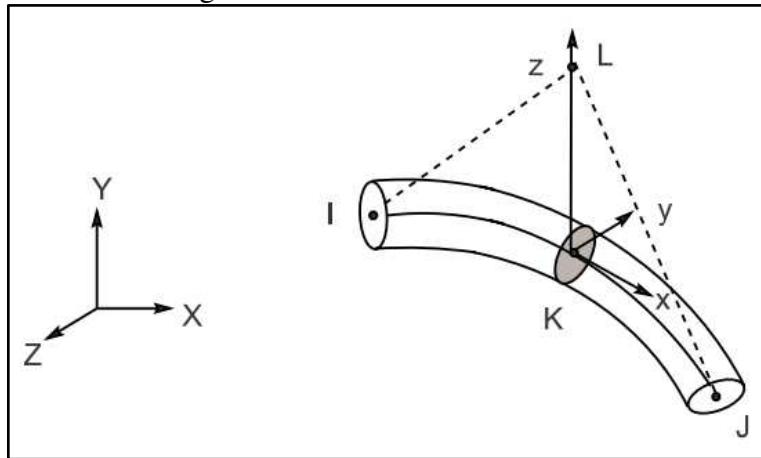
Fonte: (ANSYS, 2020).

Deste modo, tem-se um elemento do tipo triangular quadrático. O comportamento de casca é obtido a partir de 6 GDL em cada nó: deslocamentos translacionais e rotacionais. A formulação deste elemento é pautada nas medidas de deformação de Hencky (deformação logarítmica) e de tensão de Cauchy.

2.1.6.3.BEAM189

Este elemento (figura 11) se propõe a representar o comportamento mecânico de viga de Timoshenko, unindo os esforços mecânicos em vigas de tração/compressão, torção e flexão aos efeitos provenientes das deformações por cisalhamento. Trata-se de um elemento de viga quadrático de três nós, no qual cada nó possui 6 GDL.

Figura 11 - Elemento BEAM189.

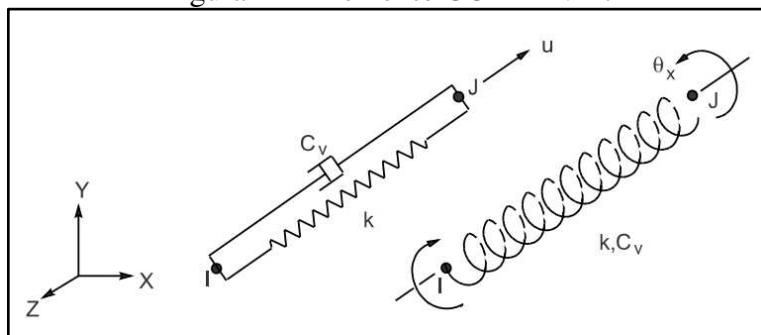


Fonte: (ANSYS, 2020).

2.1.6.4.COMBIN14

Trata-se de um elemento mola-amortecedor (figura 12) que pode ser do tipo longitudinal ou torcional, sendo este primeiro tipo o utilizado. Neste tipo, tem-se 2 nós, cada um com 3 GDL, associados à deslocamentos translacionais. O elemento possui rigidez e amortecimento unicamente em sua direção longitudinal e não possui massa.

Figura 12 - Elemento COMBIN14.



Fonte: (ANSYS, 2020).

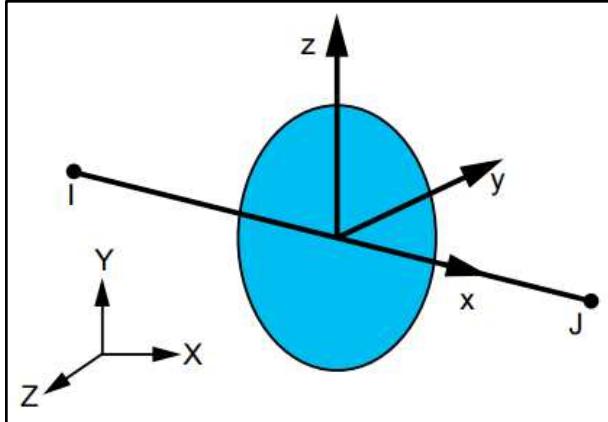
2.1.6.5.MPC184

MPC184 refere-se a uma classe de elementos comumente nomeados juntas cinemáticas do tipo *multipoint constraint*, que aplicam restrições cinemáticas entre os nós do modelo em análise. Estas restrições são impostas a partir do método dos multiplicadores de Lagrange, que

aumenta a energia interna a partir de um termo adicional que contém os multiplicadores λ_i e constantes g_i associadas à restrição i .

A formulação e os graus de liberdade de cada elemento da classe MPC184 (figura 13) varia conforme o tipo de junta associada. Foram utilizados elementos do tipo *Revolute*, *Spherical* e *General*.

Figura 13 - Classe MPC184.



Fonte: (ANSYS, 2020).

2.1.7. Não linearidades estruturais

De um modo geral, as não linearidades estruturais configuram-se como tema central associado ao MEF. O modelo estrutural desenvolvido no presente trabalho foi concebido inicialmente para contemplar as não linearidades do tipo material e geométrica, porém, teve de ser trabalhado linear a partir de limitações computacionais. Todavia, tendo em vista a importância do tópico para a formulação geral do MEF, justifica-se a introdução ao MEF não linear feita a partir dos subtópicos a seguir, que permitem ainda maior entendimento das limitações de um modelo linear.

2.1.7.1. Aspectos gerais da análise não linear

É possível identificar as suposições associadas à análise estrutural linear a partir de sua formulação, de modo que as integrações realizadas são feitas a partir do volume original dos elementos finitos, considerando a estrutura indeformada. Além disso, tem-se que a matriz deslocamento-deformação \mathbf{B} de cada elemento é constante e independente dos deslocamentos, de modo que se tem uma relação linear entre deslocamento e deformação. (BATHÉ, 2014).

Ainda incluído nestas suposições, tem-se que é adotado um material de comportamento linear elástico a partir de uma matriz tensão-deformação \mathbf{D} constante, de modo que se tem uma relação linear entre tensão e deformação (BATHÉ, 2014).

Ademais, vê-se que há a suposição de que as condições de contorno não se alteram enquanto a carga é aplicada e há, por consequência, os deslocamentos. Esta suposição é sustentada a partir de relações de restrição constantes, que não se alteram durante a análise (BATHÉ, 2014).

Quando qualquer uma destas suposições não são utilizadas, tem-se uma análise não linear. De um modo geral, tem-se que a não linearidade estrutural diz respeito à relação não linear entre força e deslocamento em um sistema estrutural, de modo que a rigidez deste, que agrupa, em relação aos graus de liberdade, tal relação (forças associadas a deslocamentos unitários, conforme visto no tópico acerca da matriz de rigidez da estrutura), é variável em relação ao carregamento atuante e os consequentes deslocamentos.

Em relação a uma análise estrutural não linear, tem-se as seguintes questões fundamentais, à priori (FILHO, 2012):

1. A necessidade de conhecimento acerca da justificativa associada à variação da rigidez da estrutura, de modo a evidenciar os parâmetros relacionados a esta variação. Esta justificativa caracteriza os chamados tipos de não linearidade estrutural;
2. A necessidade de compreensão dos métodos de quantificação da rigidez, compreendendo a sua variação. Tem-se a formulação de modelos estruturais contínuos, que resultam em soluções exatas, e modelos discretos, que resultam em soluções aproximadas obtidas a partir de processos incrementais e iterativos.

2.1.7.2. Aspectos-chave da análise não linear

Segundo Filho (2012), a análise estrutural não linear é caracterizada, essencialmente, por três pilares: usa de métodos incrementais, iterativos e de algoritmos de integração no domínio do tempo. Estes três, que constituem os aspectos-chave da análise não linear, serão tratados a seguir.

Como já tratado, a não linearidade estrutural demarca a variação da rigidez da estrutura conforme a carga aplicada e os consequentes deslocamentos. A partir da aplicação de um método incremental, tem-se a divisão da carga em incrementos de carga, associados a consequentes incrementos de deslocamento. Desde uma divisão adequada da carga em incrementos, tem-se que, em detrimento de uma rigidez continuamente variável, é possível tratá-la como de valor constante em cada incremento, podendo este valor ser diferente em cada um deles. A partir deste valor de rigidez em cada incremento e do incremento de carga, podem

ser calculados os incrementos de deslocamento, de modo que o problema é simplificado, ao passo que se obtém a modificação da rigidez à medida da aplicação dos incrementos de carga.

Uma questão fundamental é como obter este valor de rigidez em cada incremento, possibilitando o cálculo dos incrementos de deslocamento associados. A partir do equilíbrio entre as forças externas e as forças internas, em cada incremento, é possível, a partir de uma condição deformada proposta e da relação constitutiva associada, calcular as forças internas. Se as forças internas calculadas a partir desta tentativa equilibram as forças externas associadas ao incremento de carga aplicado, tem-se uma condição deformada verdadeira. Do contrário, se realiza uma nova tentativa, ou uma nova iteração no sentido de atingir esta condição verdadeira. Este método de tentativas é nomeado método iterativo, de modo que a busca pela condição deformada verdadeira é otimizada a partir de técnicas numéricas adequadas, como será tratado no tópico referente ao método incremental e iterativo de Newton-Raphson.

Em sistemas em que estão presentes forças iniciais, a partir dos “efeitos” de massa e de amortecimento, tem-se um problema do tipo dinâmico. Nestes problemas, a equação de equilíbrio envolve derivadas em relação à variável tempo, relativas a aceleração e a velocidade. A partir destas derivadas, os deslocamentos nodais são obtidos a partir de um algoritmo de integração, responsável por descrever como se dá a variação de deslocamento, velocidade e aceleração entre intervalos de tempo, processo que envolve, também, uma discretização do tempo, ou (também nomeada) no domínio do tempo. Nestas aplicações, tem-se o conceito-chave dos algoritmos de integração no tempo. Tendo em vista que o presente trabalho se caracteriza como um sistema deste tipo, faz-se necessária a discussão acerca dos aspectos introduzidos, o que foi feito no tópico de análise estrutural dinâmica.

2.1.7.3. Tipos de não linearidade

Conforme tratado anteriormente, algumas suposições garantem a linearidade da análise, de modo que a partir delas é possível identificar quando a análise é não linear, permitindo a obtenção das justificativas associadas à variação da rigidez da estrutura, e os associados tipos de não linearidade.

É possível categorizar as não linearidades a partir de efeitos não lineares associados ao material e efeitos não lineares cinemáticos, associados a deslocamentos (BATHE, 2014), obtendo os seguintes tipos de análise, conforme a tabela 6:

Tabela 6 - Tipos de análise considerando as não linearidades estruturais.

Tipo de análise	Deslocamento	Deformação	Relação tensão-deformação
Não linear a partir do material	Infinitesimal	Infinitesimal	Não linear
Não linear a partir de grandes deslocamentos	Grandes deslocamentos (finitos)	Infinitesimal	Linear ou não linear
Não linear a partir de grandes deslocamentos e grandes deformações	Grandes deslocamentos (finitos)	Grandes deformações (finitas)	Linear ou não linear

Fonte: Autor.

Há ainda a não linearidade decorrente da modificação das condições de contorno do sistema enquanto a carga é aplicada, sendo este tipo característico de problemas de contato, podendo ainda estar presente de forma combinada a qualquer outro dos tipos de não linearidade exibidos (BATHE, 2014).

2.1.7.4. Matriz de rigidez geométrica

A partir da variação da rigidez da estrutura devido a alteração de seu estado de equilíbrio (não linearidade geométrica) e do cálculo incremental, tem-se que, em cada intervalo, uma correção da rigidez suposta (de partida) é necessária para que, a partir desta rigidez corrigida, seja possível o cálculo do incremento de deslocamento neste intervalo. Deste modo, tem-se, a cada intervalo, uma atualização da rigidez da estrutura, de forma que a rigidez do incremento $p + 1$ é igual à do incremento p , corrigida pela matriz de rigidez geométrica (FILHO, 2012).

$$[\mathbf{K}_{p+1}]_{nxn} = [\mathbf{K}_p]_{nxn} + [\mathbf{K}_G]_{nxn} \quad (41)$$

No incremento p , iteração i , em um processo incremental e iterativo, tem-se a matriz de rigidez suposta $\mathbf{K}^T_{p,i}$, simbologia que será utilizada na descrição do método de Newton-Raphson.

No início da análise, com $p = 0$, tem-se \mathbf{K}_0 determinado conforme já tratado, a partir da montagem dos diferentes elementos finitos, considerando suas rigidezes e os seus graus de liberdade. De forma equivalente, a matriz de rigidez geométrica da estrutura é montada a partir da matriz de rigidez geométrica de seus elementos, sendo inicialmente concebida no sistema

local de coordenadas e posteriormente apresentada no sistema global, a partir da matriz de transformação. Desta forma, tem-se as seguintes relações, conforme notação já utilizada.

1. Montagem da matriz de rigidez geométrica da estrutura: $[\mathbf{K}_G] = \sum [\mathbf{K}_G^e]$;
2. Transformação de coordenadas local para global:

$$[\mathbf{K}_G^e] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{k}_G^e] \cdot [\mathbf{T}] \quad (42)$$

A matriz de rigidez geométrica, tal qual a matriz de rigidez já discutida, também pode ser determinada, de forma aproximada, pelo método de energia. Anteriormente, se tinha a consideração acerca do princípio dos trabalhos virtuais, mediante o trabalho realizado pelas forças externas, ou trabalho externo, e o realizado pelas forças internas, ou trabalho interno.

A partir do cálculo incremental característico da análise estrutural não linear, tem-se a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais em sua forma variacional, de forma que se tem as variações do trabalho externo e interno em um incremento, a partir de uma mudança nas condições de equilíbrio, isto é, a partir de uma condição de equilíbrio diferente da anterior.

Um aspecto fundamental desta formulação variacional é que se considera que esta mudança é de magnitude suficiente para garantir que, durante um incremento, considere-se as forças externas e internas constantes (FILHO, 2012). Dito isto, tem-se o princípio: a variação do trabalho externo é igual a variação do trabalho interno. Utilizando o símbolo δ para variação, tem-se que, no domínio de um elemento:

$$\delta W_{ext}^e = \delta W_{int}^e \quad (43)$$

Tendo em vista que subscritos $6x1$ presentes anteriormente nas matrizes de deformação e de tensão da expressão para o trabalho interno são decorrentes da utilização de simplificações na relação entre os tensores tensão e deformação, conforme já retratado, estes serão substituídos pela relação constitutiva mais geral, a partir de tensores tensão e deformação de 9 componentes, de forma que seus componentes podem ser representados por matrizes coluna $9x1$.

$$W_{int}^e = \int_{V^e} \{\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z)\}_{1x9}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\}_{9x1} dV \quad (44)$$

Aplicando a variação do trabalho externo, se obtém:

$$\delta W_{ext}^e = \delta(\{\mathbf{d}\}_{1xn}^T \cdot \{\mathbf{f}\}_{nx1}) \quad (45)$$

Com as forças nodais constantes, conforme uma pequena variação do deslocamento, tem-se, a partir da diferenciação do produto:

$$\delta(\{\mathbf{d}\}_{1xn}^T \cdot \{\mathbf{f}\}_{nx1}) = \delta\{\mathbf{d}\}_{1xn}^T \cdot \{\mathbf{f}\}_{nx1} \quad (46)$$

Aplicando a variação do trabalho interno, se obtém:

$$\delta W^e_{int} = \delta \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)\}_{1x9}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\}_{9x1} dV \quad (47)$$

Com as tensões constantes, tem-se:

$$\delta W^e_{int} = \int_V \delta \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)\}_{1x9}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\}_{9x1} dV \quad (48)$$

A partir da função de forma do elemento, \mathbf{N} , tem-se a descrição dos deslocamentos interpolados a partir dos deslocamentos nodais, conforme já tratado. Com as funções de interpolação estabelecidas para os GDL do elemento, presentes em d_{interp} , e com as especificações geométricas da forma do elemento, necessárias para o tratamento das funções de forma de modo paramétrico (conforme a formulação isoparamétrica), é possível expressar o trabalho interno com deformações dadas a partir de elementos da matriz função de forma associados aos seus GDL.

Ao igualar o trabalho externo e interno, é possível obter, conforme desenvolvimento já realizado, a relação entre força e deslocamento nodal, evidenciando a matriz de rigidez do elemento. A partir de expressões não lineares para as deformações, considerando grandes deslocamentos, é possível evidenciar, na matriz de rigidez do elemento, termos adicionais resultantes desta não linearidade, nos GDL associados.

Filho (2012) realiza o desenvolvimento completo para uma viga de seis GDL, com sua deformação longitudinal compreendendo três componentes: axial, flexional e associada ao acoplamento entre as duas últimas, sendo a que realiza o acoplamento não linear. É obtida a matriz de rigidez abaixo, na qual é possível evidenciar o surgimento de um termo adicional \mathbf{k}_{vG} referente a não linearidade geométrica no grau de liberdade v , sendo este termo a rigidez geométrica deste elemento.

$$[\mathbf{k}^e]_{6x6} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_u]_{2x2} & 0 \\ 0 & [\mathbf{k}_v]_{4x4} + [\mathbf{k}_{vG}]_{4x4} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Em que \mathbf{k}_i representa a porção da matriz de rigidez do elemento com termos associados ao grau de liberdade i .

$$[\mathbf{k}_{vG}]_{4x4} = \frac{F_x}{30.L} \cdot \begin{bmatrix} 36 & & & \\ 3.L & 4.L^2 & & \\ -36 & -3.L & 36 & \\ -3.L & -L^2 & -3.L & 4.L^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Em que os termos ocultos simbolizam a simetria da matriz. Se observa que a matriz de rigidez geométrica evidencia a não linearidade do elemento, tendo em vista que se estabelece uma descrição de sua rigidez não apenas a partir de termos relativos ao material (incluídos em \mathbf{k}_u e \mathbf{k}_v) e geometria, mas também a partir da carga, sendo, neste caso, a força axial F_x .

A matriz de rigidez geométrica, em um caso geral (elemento de n GDL), pode ser escrita a partir da seguinte equação, na qual a matriz \mathbf{L} contém as derivadas $\frac{\partial N_{i,2,\dots,n}}{\partial x,y,z}$, com N da função de forma do elemento e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão associado à medida de tensão atual (ANSYS, 2020), de modo que se tem, novamente, a rigidez geométrica associada à carga e à geometria.

$$[\mathbf{L}]_{3xn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix}; [\mathbf{N}]_{cxn} = [\mathbf{N}(x, y, z)]_{cxn} \quad (51)$$

$$[\mathbf{k}_G^e]_{nxn} = \int_{V_e} [\mathbf{L}]^T_{nx3} \cdot [\boldsymbol{\sigma}]_{3x3} \cdot [\mathbf{L}]_{3xn} \cdot dV \quad (52)$$

Ademais, à contabilização da rigidez geométrica, em adição à rigidez formulada inicialmente, dá-se o nome de *stress stiffening* ou de *geometric stiffening*.

2.1.7.5. Tensor gradiente de deformação

O chamado tensor gradiente de deformação, \mathbf{F} , é responsável por captar, a partir do domínio do elemento, como a estrutura se movimenta entre os incrementos da análise, seja a partir de movimentos de corpo rígido, translações e rotações, ou a partir de deformações propriamente ditas, normais e tangenciais.

Matricialmente, o gradiente de deformação é dado pela seguinte expressão, na qual as componentes que representam o comprimento de uma “fibra” (elemento de linha do material) dX_i se transformam nos dx_i , de modo que a configuração do corpo caracterizada pelas componentes dX_i é anterior à configuração caracterizada pelas componentes dx_i , também podendo ser dito que a primeira é uma configuração de referência e a segunda uma configuração deformada (ANAND; GOVINDJEE, 2020).

$$[\mathbf{F}]_{3x3} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\{dx\}_{3x1} = [\mathbf{F}]_{3x3} \cdot \{dX\}_{3x1} \quad (54)$$

Acerca da representação matricial exibida do tensor gradiente de deformação e de seus componentes, são válidas as seguintes observações (FILHO, 2012):

1. Em relação ao componente pertencente à diagonal da matriz, com $\frac{\partial x_i}{\partial X_i} = c$, tem-se um aumento de c vezes na direção i associada;
2. Em relação ao componente pertencente à diagonal da matriz, com $\frac{\partial x_i}{\partial X_i} = 0$, tem-se que não há movimento translacional na direção i associada;
3. Com todos os termos não pertencentes à diagonal da matriz nulos, tem-se inexistência de rotação na fibra;
4. Vê-se que existem termos associados a extensões e a rotações, divisão mais bem analisada a partir do chamado teorema da decomposição polar de Cauchy, que será tratado posteriormente.

Ainda acerca do tensor gradiente de deformação, tem-se $J_F \stackrel{\text{def}}{=} \det \mathbf{F} \neq 0$, de modo que \mathbf{F}^{-1} existe e, desta forma, é válido que (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\{dX\}_{3x1} = [\mathbf{F}]^{-1}_{3x3} \cdot \{dx\}_{3x1} \quad (55)$$

Por extensão, podem ser encontradas relações importantes que traduzem transformações em termos de elementos de área e em elementos de volume, utilizando da definição do gradiente de deformação como $dx_i = F_{ij} \cdot dX_j$ e de seu determinante, J_F , também chamado de jacobiano volumétrico ou jacobiano da deformação (ANAND; GOVINDJEE, 2020). Estas relações são exibidas a seguir.

A seguinte relação exibe a transformação de elementos de área, nomeada fórmula de Nanson, em que A denota a área na configuração de referência, a denota a área na configuração deformada, \mathbf{n}_a é o vetor normal unitário da área considerada na configuração de referência e \mathbf{n}_A o vetor normal unitário da área na configuração deformada (ANAND; GOVINDJEE, 2020).

$$\{\mathbf{n}_a\}_{3x1} \cdot \mathbf{a} = J_F \cdot [\mathbf{F}]^{-T} \cdot \{\mathbf{n}_A\}_{3x1} \cdot A \quad (56)$$

A transformação de elementos de volume é dada a partir da expressão abaixo, na qual V denota o volume na condição de referência e v denota o volume na condição deformada. Vê-se que, como não se pode deformar um elemento para um volume nulo ou negativo, tem-se $J_F > 0$ (ANAND; GOVINDJEE, 2020).

$$v = J_F \cdot V \quad (57)$$

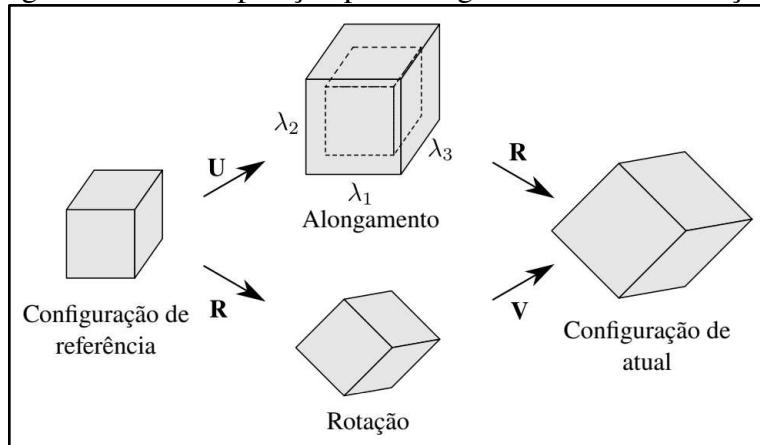
A partir do chamado teorema da decomposição polar de Cauchy, tem-se que o movimento da estrutura pode ser caracterizado a partir de rotações, translações e extensões, de modo que o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} é decomposto em um tensor de rotação \mathbf{R} , cujas componentes estão associadas a rotações de corpo rígido, e em um tensor de extensão \mathbf{U} (*stretch*), cujas componentes associam-se a extensões e a translações de corpo rígido. Por extensão, tem-se a razão entre o comprimento final e o original (FILHO, 2012).

Aplicando o teorema da decomposição polar de forma geral (conforme ilustra a figura 14), tem-se (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$[\mathbf{F}]_{3x3} = [\mathbf{R}]_{3x3} \cdot [\mathbf{U}]_{3x3} = [V]_{3x3} \cdot [\mathbf{R}]_{3x3} \quad (58)$$

Sendo \mathbf{U} também chamado de tensor direito de extensão de Cauchy e desta forma, \mathbf{V} chamado tensor esquerdo de extensão de Cauchy (ARGENTA, 2020).

Figura 14 - Decomposição polar do gradiente de deformação.



Fonte: (ARGENTA, 2020)

2.1.7.6. Formulação geral do Método dos Elementos Finitos não linear

Considerando a forma variacional do teorema dos trabalhos virtuais, necessária a partir da abordagem incremental dos modelos estruturais não lineares, é possível estabelecer a formulação geral do MEF não linear.

Esta formulação será apresentada a partir de um caso não linear geral, pautado em um modelo com grandes deslocamentos, grandes deformações e uma relação constitutiva tensão-deformação não linear.

Conforme Bathe (2014), pode-se caracterizar a formulação utilizada para o problema estrutural não linear a partir da formulação de “descrição de movimento”, e das medidas utilizadas para tensão e deformação, de forma que estas questões serão evidenciadas na presente formulação. As medidas de tensão e de deformação serão discutidas no tópico de mecânica estrutural.

Neste caso geral, podem ser utilizadas as formulações de “descrição de movimento” Lagrangiana total (ou simplesmente Lagrangiana) e Lagrangiana atualizada (ou Euleriana), que circundam a escolha do sistema de referência para a descrição do movimento. Nesta primeira, as variáveis estáticas e cinemáticas que descrevem o movimento da estrutura são referentes à uma condição inicial, que não é alterada. Na descrição atualizada, tem-se uma alteração na condição de referência, de modo que cada condição de equilíbrio é dada em relação à condição do instante anterior, ou seja, atualiza-se, de fato, a condição de referência.

De todo modo, conforme o procedimento incremental e iterativo já tratado, o equilíbrio da estrutura é considerado na condição deformada desconhecida no instante $t + \Delta t$, em que o incremento de tempo Δt representa a evolução incremental da estrutura em relação a condição de equilíbrio, em detrimento de efeitos iniciais que, de fato, utilizam de derivadas temporais.

Deste modo, a equivalência de energia no instante $t + \Delta t$ é dada pela seguinte expressão, na qual a parcela à esquerda é referente à variação do trabalho interno, dada a partir da variação das deformações. $\sigma(t + \Delta t)$ e $\delta e(t + \Delta t)$ são referentes aos tensores tensão e à variação do tensor deformação, respectivamente, no instante considerado.

$$\int_{V^e(t+\Delta t)} \sigma(t + \Delta t) \cdot \delta e(t + \Delta t) \cdot dV = \delta W^e_{ext}(t + \Delta t) \quad (59)$$

No caso não linear geral considerado, o software de análise utiliza uma descrição do movimento Lagrangiana atualizada, a tensão de Cauchy (“*true stress*”) e a deformação logarítmica ou de Hencky, de forma que estes três elementos caracterizam a formulação utilizada pelo software para este caso. Estes elementos serão trabalhados a seguir.

Com o tensor direito de extensão de Cauchy, U , pode-se definir a medida de deformação logarítmica ou de Hencky ϵ_{HU} .

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{HU}]_{3x3} = \ln [\mathbf{U}]_{3x3} \quad (60)$$

A partir da chamada decomposição espectral, ao passo que U caracteriza-se como simétrico e definido positivo, tem-se sua representação a partir de seus autovalores e autovetores: λ_{U_i} (extensões principais) e $\boldsymbol{\phi}_{U_i}$ (direções principais), respectivamente (ANSYS, 2020).

$$[\mathbf{U}]_{3x3} = \sum_{i=1}^3 \lambda_{U_i} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{3x1} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{1x3}^T \quad (61)$$

Desta forma:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{HU}]_{3x3} = \ln \sum_{i=1}^3 \lambda_{U_i} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{3x1} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{1x3}^T = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_{U_i} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{3x1} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{1x3}^T \quad (62)$$

É válido destacar que o tensor deformação de Hencky, ao ser definido a partir do tensor de extensão, “descarta” as rotações de corpo rígido presentes na matriz de rotação \mathbf{R} . No cálculo incremental, no qual se interessa o incremento do tensor deformação de Hencky, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{HU}$, faz-se uso da nomenclatura incremento de deformação do tipo *rotation-neutralized*.

O tensor tensão de Cauchy, proveniente do teorema de Cauchy, é aplicado ao passo que fornece a medida da força atuante no incremento de análise considerado, também nomeada força corrente, por unidade de área deformada, ou seja, associada à configuração deformada (FILHO, 2012).

Em consonância com os aspectos essenciais destacados, a análise não linear a partir do MEF é implementada a partir do método de Newton-Raphson, tratado no tópico a seguir.

2.1.8. Método de Newton-Raphson

2.1.8.1. Aspectos gerais acerca do método

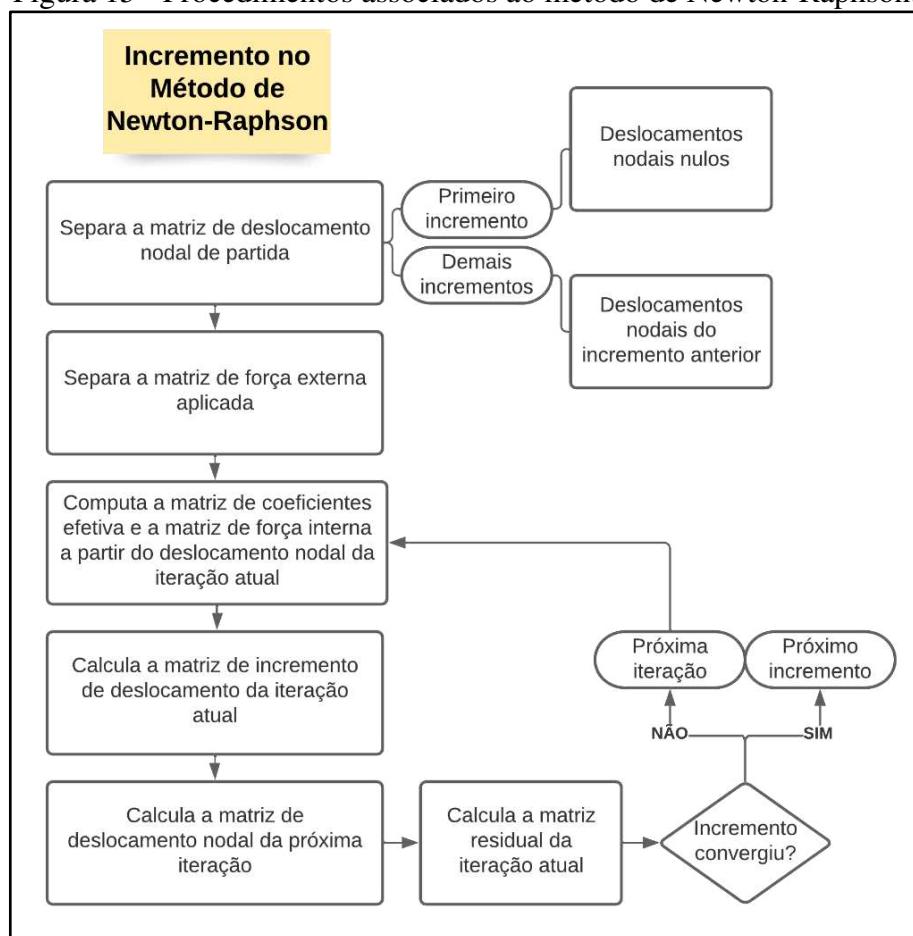
De modo simplificado, o processo incremental e iterativo utilizado nas análises estruturais não lineares foi exibido no tópico dos aspectos-chave da análise não linear. Este processo é implementado, no software de análise, a partir do chamado método de Newton-Raphson, conforme o equilíbrio entre forças internas \mathbf{F}^{nr} e externas \mathbf{F}^a em um incremento (*step*) p , iteração i (BATHÉ, 2014):

$$[\mathbf{K}^T]_{nxn} \cdot \{\Delta_i\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} - \{\mathbf{F}^{nr}\}_{nx1} \quad (63)$$

Em uma análise estrutural estática, $\mathbf{K}^T_{p,i}$ é nomeada matriz de rigidez tangente. Em uma análise estrutural dinâmica, $\mathbf{K}^T_{p,i}$ deve conter as contribuições dos efeitos iniciais de massa e amortecimento, sendo nomeada matriz de coeficientes efetiva (*effective coefficient matrix*). Neste último caso, de forma semelhante, as matrizes de força também devem conter os efeitos iniciais, de acordo com os GDL associados.

Neste sentido, um incremento a partir do método em exposição pode ser representado a partir do seguinte algoritmo, exibido a partir da figura 15.

Figura 15 - Procedimentos associados ao método de Newton-Raphson.



Fonte: Autor.

Podem ser utilizadas, ainda, as seguintes notações:

1. $\{\mathbf{u}_0\}_{nx1}$: Matriz de deslocamento nodal de partida;
2. $\{\mathbf{u}_i\}_{nx1}$: Matriz de deslocamento nodal da iteração i ;
3. $\{\Delta\mathbf{u}_i\}_{nx1}$: Matriz de incremento de deslocamento da iteração i ;
4. $\{\mathbf{u}_{i+1}\}_{nx1} = \{\mathbf{u}_i\}_{nx1} + \{\Delta\mathbf{u}_i\}_{nx1}$: Matriz de deslocamento nodal da iteração $i + 1$.

A partir de uma quantidade adequada de iterações, abaixo de um valor limite, o método numérico obtém uma solução convergida para o incremento, isto é, são realizadas iterações até o atingimento da convergência, conforme o algoritmo exibido.

Por padrão, o software de análise utiliza uma convergência do tipo *out-of-balance*, que assume que a convergência é atingida quando a seguinte expressão for verdadeira, na qual \mathbf{R} é nomeado vetor residual, ε_R é um valor de tolerância para \mathbf{R} e R_{ref} é um valor de referência para \mathbf{R} . $\|\{\mathbf{R}\}_{nx1}\|$ denota a norma do vetor residual, quantidade escalar referente à sua magnitude (ANSYS, 2020).

$$\|\{\mathbf{R}\}_{nx1}\| < \varepsilon_R \cdot R_{ref} \quad (64)$$

O vetor residual, que fornece uma medida do desequilíbrio entre as forças internas e externas, conforme a discussão precedente, é dado por:

$$\{\mathbf{R}_{p,i}\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} - \{\mathbf{F}^{nr}\}_{nx1} \quad (65)$$

O valor de referência para o resíduo em uma convergência do tipo *out-of-balance* utilizada pelo software é, em um grau de liberdade (associado a um deslocamento nodal) qualquer (ANSYS, 2020):

$$R_{ref} = \|\{\mathbf{F}^a\}_{nx1}\| \quad (66)$$

Para os GDL associados a deslocamentos impostos como condições de contorno, tem-se:

$$R_{ref} = \|\{\mathbf{F}^{nr}\}_{nx1}\| \quad (67)$$

Também pode ser aplicada uma convergência do tipo *DOF increment*, de modo que a convergência é checada a partir do incremento de deslocamento da iteração atual $\Delta\mathbf{u}_i$, da seguinte forma, na qual ε_u é um valor de tolerância para $\Delta\mathbf{u}_i$ e u_{ref} é um valor de referência para $\Delta\mathbf{u}_i$ (ANSYS, 2020):

$$\|\{\Delta\mathbf{u}_i\}_{nx1}\| < \varepsilon_u \cdot u_{ref} \quad (68)$$

O software de análise utiliza como padrão, para as relações anteriores, a chamada norma “L2”, também nomeada norma euclidiana, de modo que, tem-se, para a matriz \mathbf{Z} : $\|\{\mathbf{Z}\}_{nx1}\|_2 = (\sum \mathbf{Z}_i^2)^{1/2}$.

2.1.8.2. Newton-Raphson na formulação do MEF não linear

Como discutido no tópico anterior, em uma análise não linear geral, o software de análise faz uso do chamado tensor deformação de Hencky, já definido. Computacionalmente, a partir do cálculo incremental, tem-se a definição deste tensor aplicada a um incremento p :

$$[\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{HU_p}]_{3x3} = \ln [\Delta \mathbf{U}_p]_{3x3} \quad (69)$$

O incremento do tensor de extensão \mathbf{U} é dado a partir do incremento do tensor gradiente de deformação \mathbf{F} (ANSYS, 2020):

$$[\Delta \mathbf{F}_p]_{3x3} = [\Delta \mathbf{R}_p]_{3x3} \cdot [\Delta \mathbf{U}_p]_{3x3} \quad (70)$$

$$[\Delta \mathbf{F}_p]_{3x3} = [\mathbf{F}_p]_{3x3} \cdot [\mathbf{F}_{p-1}]_{3x3}^{-1} \quad (71)$$

O incremento do tensor deformação de Hencky pode ser aproximado a partir do tensor de rotação, método adequado para incrementos de deformação menores que aproximadamente 10% (ANSYS, 2020).

$$[\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{HU_p}]_{3x3} = [\mathbf{R}_{1/2}]_{3x3}^T \cdot [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{HU_p}]_{3x3} \cdot [\mathbf{R}_{1/2}]_{3x3} \quad (72)$$

O subscrito “1/2” é referente à chamada configuração de ponto médio (*midpoint*). Nesta expressão, esta configuração de ponto médio acompanha os demais tensores e vetores associados, a partir das seguintes expressões, resultantes da aplicação desta configuração às relações já apresentadas.

$$[\mathbf{F}_{1/2}]_{3x3} = [\mathbf{R}_{1/2}]_{3x3} \cdot [\mathbf{U}_{1/2}]_{3x3} \quad (73)$$

$$[\mathbf{F}]_{3x3} = [\mathbf{I}]_{3x3} + \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{1/2}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{3x3} \quad (74)$$

Em que $\mathbf{u}_{1/2}$ permite estabelecer o entendimento do que é a configuração de ponto médio:

$$\{\mathbf{u}_{1/2}\}_{3x1} = \frac{1}{2} \cdot (\{\mathbf{u}_p\}_{3x1} + \{\mathbf{u}_{p-1}\}_{3x1}) \quad (75)$$

A partir do incremento do tensor deformação de Hencky, tem-se:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{HU_p}\}_{9x1} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{HU_{p-1}}\}_{9x1} + \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{HU_p}\}_{9x1} \quad (76)$$

Estas equações traduzem conceitos já explorados, porém, adicionados do cálculo incremental característico do método numérico em estudo.

A partir de uma análise estática, na qual se desprezam os efeitos inerciais, \mathbf{K}^T_i é a chamada matriz de rigidez tangente. Em uma análise estática não linear, a matriz de rigidez tangente inclui os efeitos não lineares, sendo constituída a partir da matriz de rigidez \mathbf{K} e da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_G , explorada nos tópicos posteriores.

A partir da inclusão dos efeitos inerciais, caracterizando a análise como dinâmica, tem-se que \mathbf{K}^T , que passa a ser nomeada de matriz de coeficientes efetiva, precisa contabilizar estes efeitos. Para isto, tem-se a parcela adicional \mathbf{K}_I .

Deste modo, tem-se:

$$[\mathbf{K}^T]^e_i]_{nxn} = [\mathbf{K}^e]_{nxn} + [\mathbf{K}_G^e]^e_i]_{nxn} + [\mathbf{K}_I^e]_{nxn} \quad (77)$$

A força interna associada à equação de equilíbrio exibida anteriormente é também nomeada força restauradora de Newton-Raphson, sendo dada, no domínio de um elemento, pela seguinte equação, a partir da matriz deslocamento-deformação atual \mathbf{B}_i e do tensor tensão de Cauchy atual $\boldsymbol{\sigma}_i$ (ANSYS, 2020)

$$\{\mathbf{F}^{nr}\}_i]_{nx1} = \int_{V_e} \{\mathbf{B}_i\}^T_{nx9} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}_i\}_{9x1} \cdot dV \quad (78)$$

2.1.9. Análise estrutural dinâmica

2.1.9.1. Análise estrutural dinâmica linear

Em um sistema discretizado de n GDL, tem-se a seguinte equação governante de equilíbrio para a resposta linear dinâmica.

$$[\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\Delta}\}_{nx1} + [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\Delta}\}_{nx1} + [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot \{\Delta\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} \quad (79)$$

Tal equação é associada à aplicação do Princípio Fundamental da Dinâmica ao sistema em um certo instante t , sendo $\mathbf{M}; \mathbf{C}; \mathbf{K}; \Delta$ as matrizes de massa, amortecimento, rigidez e deslocamento nodal montadas para o sistema discretizado, no sistema global. A matriz \mathbf{F}^a é a de forças externas aplicadas, de modo que o equacionamento é posto conforme o princípio do “equilíbrio dinâmico” de d’Alembert. Cada parcela participante da equação constitui uma matriz de força transiente. Ao lado esquerdo tem-se forças de inércia, forças de amortecimento e forças elásticas, respectivamente.

A equação governante representa um sistema linear de equações diferenciais de segunda ordem, que são solucionados, em aplicações do MEF, a partir de métodos que tomam vantagem das características específicas das matrizes de coeficientes $\mathbf{M}; \mathbf{C}; \mathbf{K}$. De forma resumida, podem

ser divididos dois métodos de solução: integração direta e superposição modal (FILHO, 2005; FILHO, 2012; BATHE, 2014).

2.1.9.2. Método da superposição modal

O método da superposição modal utiliza da propriedade de ortogonalidade entre os modos naturais de vibração da estrutura aplicada às matrizes que a caracterizam, de modo que a resposta dinâmica é dada por uma combinação linear destes modos de vibração.

A partir da hipótese da superposição modal, a resposta dinâmica é dada pela seguinte expressão, em que y_i é o fator de participação ou “peso” associado ao modo i e ϕ_i é o autovetor associado ao modo i (FILHO, 2005):

$$\{\Delta(t)\}_{nx1} = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot \{\phi_i\}_{nx1} \quad (80)$$

Por meio da aplicação da expressão anterior e de suas derivadas na equação governante, tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \ddot{y}_i \cdot \{\phi_i\}_{nx1} + \sum_{i=1}^n [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \dot{y}_i \cdot \{\phi_i\}_{nx1} + \sum_{i=1}^n [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot y_i \cdot \{\phi_i\}_{nx1} \\ & = \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} \end{aligned} \quad (81)$$

Ao passo que a ortogonalidade entre dois modos j e k ($j \neq k$) aplicada às matrizes de massa, amortecimento e rigidez pode ser escrita a partir da seguinte expressão:

$$\{\phi_j\}_{1xn}^T \cdot [\Psi]_{nxn} \cdot \{\phi_k\}_{nx1} = 0; \quad \Psi = \mathbf{M}; \mathbf{C}; \mathbf{K} \quad (82)$$

O fator de participação associado ao modo de vibração j (y_j) pode ser determinado a partir da multiplicação da equação (81) por $\{\phi_j\}_{1xn}^T$.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \{\phi_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \ddot{y}_i \cdot \{\phi_i\}_{nx1} + \sum_{i=1}^n \{\phi_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \dot{y}_i \cdot \{\phi_i\}_{nx1} \\ & + \sum_{i=1}^n \{\phi_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot y_i \cdot \{\phi_i\}_{nx1} = \{\phi_j\}_{1xn}^T \cdot \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} \end{aligned} \quad (83)$$

Evidenciada a expressão referente à propriedade de ortogonalidade entre os modos, vê-se que, ao expandir os somatórios, tem-se os seguintes resultados, para qualquer modo k diferente de j :

$$\{\phi_j\}_{1xn}^T \cdot [\Psi]_{nxn} \cdot \Omega \cdot \{\phi_k\}_{nx1} = 0; \quad \Omega = \ddot{y}_j; \dot{y}_j; y_j \quad (84)$$

Aplicando estes resultados, a expressão é simplificada, resultando em:

$$\begin{aligned} & \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \ddot{y}_j \cdot \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{nx1} + \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \dot{y}_j \cdot \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{nx1} \\ & + \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot y_j \cdot \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{nx1} = \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} \end{aligned} \quad (85)$$

A partir dos conceitos de massa, amortecimento, rigidez e força generalizadas, pode-se expressar a equação anterior de forma compacta:

$$m_j \cdot \ddot{y}_j(t) + c_j \cdot \dot{y}_j(t) + k_j \cdot y_j(t) = f_j(t) \quad (86)$$

Vê-se que a expressão resultante possui formato e solução similar ao sistema dinâmico de 1 grau de liberdade, sendo as coordenadas “y” chamadas de normais ou generalizadas, de modo que o fator de participação associado ao modo de vibração j (y_j) é determinado a partir da solução do sistema auxiliar de 1 grau de liberdade, associado ao modo j , em coordenadas generalizadas.

A partir da determinação dos demais fatores de participação, de forma semelhante, determina-se a resposta dinâmica da estrutura. Pode-se evidenciar que a equação de equilíbrio governante, inicialmente um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem acopladas e expressas nas coordenadas físicas do sistema, é “transformada”, a partir da utilização do método da superposição modal, em um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem desacopladas pela propriedade de ortogonalidade, expressas em coordenadas normais ou generalizadas.

Filho (2005) propõe uma sequência que sintetiza o método, consistida dos seguintes pontos:

1. Determinação dos modos e frequências naturais, autovetores $\{\boldsymbol{\phi}_i\}_{nx1}$ e autovalores λ_i ;
2. Computo da massa, rigidez, amortecimento e força generalizada para cada modo de vibração:

$$m_j = \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{nx1}$$

$$k_j = \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{nx1}$$

(87)

$$c_j = \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{nx1}$$

$$f_j = \{\boldsymbol{\phi}_j\}_{1xn}^T \cdot \{\mathbf{F}^a\}_{nx1}$$

3. Determinação dos fatores de participação a partir da solução do sistema auxiliar de 1 grau de liberdade em coordenadas generalizadas;
4. Efetuação da superposição modal.

2.1.9.3. Método da integração direta

De acordo com Bathe (2014), a integração numérica direta (isto é, na qual não há uma transformação na forma das equações antes da integração, como o desacoplamento) é baseada em duas ideias, exploradas a seguir:

1. Ao contrário de satisfazer a equação governante de equilíbrio em qualquer instante t , satisfazê-la em intervalos discretos de tempo, Δt . Tal ideia, de fundamental importância, exibe uma segunda discretização realizada, a do tempo, de modo que o “equilíbrio dinâmico” é satisfeito nos intervalos discretizados. A discretização do tempo é nomeada *time stepping*, de forma que o intervalo é nomeado passo (*step*). Desta forma, o fenômeno é discretizado no domínio do tempo;
2. É assumido dentre os intervalos de tempo Δt que há variação nos deslocamentos, velocidades e acelerações, ao passo que o modo com o qual esta variação se dá afeta diretamente a precisão, a estabilidade e o custo computacional do procedimento de solução. Este modo de variação é traduzido por uma lei de variação, que pode ser definida de variadas formas. Os formatos de lei de variação disponíveis, que formulam os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, compõem os métodos de integração no domínio do tempo disponíveis.

Dentre os diversos métodos disponíveis de integração, há uma divisão entre métodos implícitos e explícitos, que é pautada na suposição-base para os deslocamentos e suas derivadas, em relação a dois intervalos de tempo consecutivos. Embora a forma geral das equações supostas (leis de variação) varie em cada método, é possível destacar o conceito-chave (BATHE, 2014; ANSYS, 2022):

1. A integração explícita supõe que a solução desconhecida do instante $t + \Delta t$ pode ser obtida a partir da solução conhecida do instante t , ou seja, a partir das condições de equilíbrio no instante t . Desta forma, a solução do instante $t + \Delta t$ é explicitamente conhecida após a substituição das expressões supostas pelo método em específico (entre os diversos disponíveis) na equação governante para o instante t . O fundamento pode ser expresso a partir da seguinte expressão simbólica, na qual vê-se que, conhecida a solução no instante t e determinado o intervalo de tempo (*step size*), sabe-se $y(t)$ e

$\dot{y}(t)$, e desta forma, determina-se de forma explícita $y(t + \Delta t)$: $y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot \dot{y}(t)$;

2. A integração implícita supõe que a solução desconhecida do instante $t + \Delta t$ pode ser obtida a partir das condições de equilíbrio no instante $t + \Delta t$. Desta forma, a solução do instante $t + \Delta t$ se mantém implícita após a substituição das expressões supostas pelo método em específico (entre os diversos disponíveis) na equação governante para o instante $t + \Delta t$. O fundamento pode ser expresso a partir da seguinte expressão simbólica, na qual vê-se que, conhecida a solução no instante t e determinado o intervalo de tempo (*step size*), sabe-se $y(t)$, porém, se desconhece $\dot{y}(t + \Delta t)$, e desta forma, $y(t + \Delta t)$ mantém-se implícito, necessitando solução posterior: $y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot \dot{y}(t + \Delta t)$.

Adicionalmente, em relação aos métodos implícitos e explícitos, destacam-se as seguintes características (ANSYS, 2022) a partir da tabela 7:

Tabela 7 - Características gerais dos métodos de integração explícitos e implícitos.

Critério	Integração explícita	Integração implícita
Tamanho do incremento de tempo necessário	“Pequeno”; inviabilizando utilização em problemas de longa duração. Apresenta viabilidade para eventos com duração da ordem de segundos e milissegundos.	“Grande”; viabilizando utilização em problemas de longa duração.
Solução de sistema não linear	Não necessita de iterações	Obtenção da solução de cada intervalo de tempo a partir de método iterativo
Velocidade de solução de um intervalo de tempo	Alta	Baixa

Fonte: Autor.

A partir das características do fenômeno físico que o modelo computacional do presente trabalho se propõe a representar, em termos de duração dos eventos associados, tem-se maior compatibilidade com os métodos de integração implícitos.

Em relação aos algoritmos de integração disponíveis, tem-se que os fatores mais pertinentes para a escolha do mesmo são (ANSYS, 2020): acurácia, estabilidade e dissipação.

Em um esquema numérico para cálculo aproximado de equações diferenciais, o erro E , que mede a magnitude do desvio entre a solução exata e a aproximada, comporta-se como (LEVEQUE, 2006):

$$E = E(h) \approx C \cdot h^p \quad (88)$$

Em que h é o valor do passo, incremento, ou *step size*, que caracteriza a aproximação, C é uma constante que mantém a proporcionalidade, sendo independente de h e associada ao método utilizado, e p é a chamada ordem de acurácia (*order of accuracy*).

Deste modo, tem-se que com um método numérico que apresenta ordem de acurácia i , também dita aproximação de i -ésima ordem (*i -th order accurate approximation*) há um erro proporcional a h^i .

A estabilidade do método de integração, conceito associado ao fenômeno físico da estabilidade em vibrações de sistemas mecânicos, diz respeito ao comportamento do método ao longo dos incrementos e iterações, conceito associado às nomeadas equações “rígidas” (*stiff equations*). Também é utilizado, comumente, o termo estabilidade numérica.

Equações “rígidas” são equações diferenciais que, a partir de uma determinada solução numérica (associada a um determinado método numérico), comportam-se de forma instável, a menos que o incremento seja suficientemente pequeno. Em variadas situações, tem-se que o tamanho do incremento necessário para obtenção da estabilidade numérica é computacionalmente inviável (exigem-se recursos computacionais não disponíveis, por exemplo).

Em consonância, algoritmos de integração no domínio do tempo são ditos condicionalmente estáveis quando a estabilidade é afetada pela escolha do tamanho do incremento de tempo (*time step*), ou incondicionalmente estáveis quando a escolha do *step size* não é condicionada pela estabilidade, de modo que o tamanho do incremento não afeta a estabilidade numérica do método.

A partir da instabilidade numérica tratada anteriormente, podem ocorrer oscilações incompatíveis com a solução exata, levando aos conceitos de ruído numérico e de dissipação ou amortecimento numérico. Os métodos de integração implementados no software de análise para a solução de problemas estruturais dinâmicos utilizam de parâmetros com a finalidade de diminuir estas oscilações, proporcionando a dissipação. Faz-se de grande relevância a

dissipação de alta frequência, reduzindo o ruído numérico, conforme Hughes (2012) e Ansys (2020).

Os métodos de integração de Newmark e o HHT- α , a partir de suas diferenças em relação à formulação, produzem resultados diferentes em relação à dissipação numérica. Estes métodos serão introduzidos a seguir.

2.1.9.3.1. Método de Newmark em modelos lineares

A partir do processo incremental associado à análise dinâmica, tem-se a equação de equilíbrio da estrutura de n GDL em um instante $p + 1$ expresso a partir da seguinte expressão:

$$[\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\Delta}_{p+1}\}_{nx1} + [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\Delta}_{p+1}\}_{nx1} + [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot \{\Delta_{p+1}\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a\}_{nx1} \quad (89)$$

Introduz-se o método de integração no domínio do tempo de Newmark a partir das seguintes leis de variação para atualização do deslocamento Δ_{p+1} e velocidade $\dot{\Delta}_{p+1}$ dentre os incrementos (HUGHES, 2012; ANSYS, 2020). Também é comum a notação \mathbf{u} para o deslocamento nodal, conforme visto no tópico acerca do método de Newton-Raphson. Esta notação é preferível ao incluir o incremento de tempo como Δt , e será utilizada na presença do incremento temporal. Nesta notação, tem-se as leis de variação:

$$\{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} = \{\ddot{\mathbf{u}}_p\}_{nx1} + [(1 - \delta) \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_p\}_{nx1} + \delta \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1}] \cdot \Delta t \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} &= \{\mathbf{u}_p\}_{nx1} + \{\dot{\mathbf{u}}_p\}_{nx1} \cdot \Delta t \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_p\}_{nx1} + \alpha \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} \right] \cdot \Delta t^2 \end{aligned} \quad (91)$$

Nestas equações, δ e α são os parâmetros de integração de Newmark, enquanto Δt denota o incremento de tempo, conforme as discussões anteriores. Adicionalmente, tem-se que os parâmetros de Newmark podem ser determinados para obter determinada acurácia e estabilidade do método numérico (BATHE, 2014).

De forma geral, o método de Newmark é pautado em três equações de diferenças finitas, equações (89), (90) e (91), e as quantidades desconhecidas \mathbf{u}_{p+1} , $\dot{\mathbf{u}}_{p+1}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}$ são calculadas numericamente a partir das quantidades conhecidas \mathbf{u}_p , $\dot{\mathbf{u}}_p$ e $\ddot{\mathbf{u}}_p$ (ANSYS, 2020).

2.1.9.3.2. Método HHT- α em modelos lineares

Com a ausência de fontes de amortecimento numérico, pode-se ter uma quantidade inaceitável de ruído em modos de alta frequência (RUGHES, 2012). O método HHT- α (método

Hilber-Hughes-Taylor) atua neste sentido a partir do controle da quantidade de dissipação numérica com os parâmetros δ , α , α_m e α_f , ou seja, a partir de uma maior quantidade de parâmetros que o método de Newmark.

Este método assume a seguinte equação governante para o equilíbrio dinâmico (ANSYS, 2020):

$$[\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_m}\}_{nx1} + [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} + [\mathbf{K}]_{nxn} \cdot \{\mathbf{u}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a(\alpha_f)\}_{nx1} \quad (92)$$

Esta equação é apresentada de forma simplificada, a partir da introdução de diversos termos, os quais:

$$\{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_m}\}_{nx1} = (1 - \alpha_m) \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} + \alpha_m \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_p\}_{nx1} \quad (93)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} = (1 - \alpha_f) \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} + \alpha_f \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_p\}_{nx1} \quad (94)$$

$$\{\mathbf{u}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} = (1 - \alpha_f) \cdot \{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} + \alpha_f \cdot \{\mathbf{u}_p\}_{nx1} \quad (95)$$

$$\{\mathbf{F}^a(\alpha_f)\}_{nx1} = (1 - \alpha_f) \cdot \{\mathbf{F}^a_{p+1}\}_{nx1} + \alpha_f \cdot \{\mathbf{F}^a_p\}_{nx1} \quad (96)$$

Tem-se o cálculo das quantidades desconhecidas \mathbf{u}_{p+1} , $\dot{\mathbf{u}}_{p+1}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}$ a partir das quantidades conhecidas \mathbf{u}_p , $\dot{\mathbf{u}}_p$ e $\ddot{\mathbf{u}}_p$, de forma semelhante ao método de Newmark. (ANSYS, 2020).

A partir de melhorias em relação ao método de Newmark, método HHT- α foi utilizado no presente trabalho, a partir de parâmetros δ , α , α_m e α_f pré-dispostos a partir de configurações-padrão do ANSYS, associados às características do sistema em análise, como destacado no subtópico de análise estrutural transiente.

É possível caracterizar o modelo computacional desenvolvido no presente trabalho a partir da tabela 8.

Tabela 8 - Características do modelo desenvolvido associadas à formulação do MEF.

Método de solução	Integração direta implícita
Esquema de integração	HHT- α
Medida de tensão	Tensor tensão de Cauchy
Medida de deformação	Tensor deformação de Hencky
Solver	Direto; Sparse Matrix

Fonte: Autor.

2.1.9.4. Análise estrutural dinâmica não linear

Em problemas dinâmicos estruturais não lineares, tem-se que as forças internas não são linearmente proporcionais aos deslocamentos nodais, de modo que a matriz de rigidez é dependente do deslocamento atual (iteração atual), conforme retratado no tópico de não linearidade. A equação governante é reescrita da seguinte forma, em que \mathbf{F}^i é a matriz de forças internas:

$$[\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} + [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} + \{\mathbf{F}^i_{p+1}\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a_{p+1}\}_{nx1} \quad (97)$$

A partir da não linearidade, o método de solução é utilizado de forma acoplada ao método incremental e iterativo de Newton-Raphson, haja vista a variação da rigidez da estrutura, conforme visto nos tópicos de não linearidades estruturais e do método de Newton-Raphson. Desta forma, os métodos de integração no domínio do tempo, que propõem as leis de variação para os deslocamentos, velocidades e acelerações, também são formulados de forma acoplada ao método de Newton-Raphson.

No software de análise, os sistemas estruturais dinâmicos não lineares são solucionados implicitamente a partir do método de integração de Newmark ou do método HHT- α . Especificações adicionais, provenientes da não linearidade, serão destacadas a seguir.

2.1.9.4.1. Método de Newmark em modelos não lineares

Tendo em vista o tratado nos tópicos de não linearidades estruturais e do método de Newton-Raphson, as forças internas dependem dos deslocamentos nodais. Deste modo, a equação de equilíbrio também pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} + [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} + \left\{ \mathbf{F}^i_{p+1} (\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1}) \right\}_{nx1} \\ &= \{\mathbf{F}^a_{p+1}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (98)$$

No método de integração no domínio do tempo de Newmark em modelos não lineares, tem-se as mesmas funções de variação apresentadas anteriormente, com o amortecimento numérico sendo controlado pelo parâmetro δ .

Descrevendo as forças internas a partir de suas componentes e ressaltando que o vetor residual depende, ao longo do processo iterativo, do deslocamento, tem-se a seguinte expressão para o vetor residual, conforme a equação (65):

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{R}_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} &= \left\{ \mathbf{F}^a_{p+1} \right\}_{nx1} - \left\{ \mathbf{F}^i_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} \\ &- [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} - [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (99)$$

A partir do método de Newton-Raphson, tem-se uma forma linearizada do operador de integração no domínio do tempo (ANSYS, 2020). Deste método, tem-se, no incremento p , iteração i :

$$\left\{ \mathbf{R}_{p+1} \right\}_{nx1} + \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p+1}^i} \right]_{nxn} \cdot \{\Delta \mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} = \{0\}_{nx1}; \quad (100)$$

$$\left\{ \mathbf{R}_{p+1} \right\}_{nx1} = \left\{ \mathbf{R}_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1}$$

Com o método de Newton-Raphson acoplado ao esquema de integração em apresentação, toma-se a seguinte equação, ao longo dos incrementos e iterações do processo de solução (ANSYS, 2020).

$$\left[\mathbf{K}_{p+1}^T \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right]_{nxn} \cdot \{\Delta \mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} = \left\{ \mathbf{R}_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} \quad (101)$$

Nesta equação, \mathbf{K}_{p+1}^T é a matriz de coeficientes efetiva, já apresentada anteriormente, sendo também nomeada matriz de rigidez efetiva (BATH, 2014), constituída a partir da matriz de rigidez \mathbf{K}_I , da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_{G_I} e da matriz disposta como \mathbf{K}_I , responsável pela consideração dos efeitos iniciais característicos da análise dinâmica.

A partir do posto a despeito do método de Newmark, a matriz \mathbf{K}_I é dada por:

$$[\mathbf{K}_I]_{nxn} = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [\mathbf{C}]_{nxn} \quad (102)$$

No método de Newmark, a quantidade de dissipação numérica pode ser controlada a partir do parâmetro δ . Vê-se que em modos de baixa frequência, a ordem de acurácia deste método é diminuída, ao passo que $\delta > \frac{1}{2}$ (ANSYS, 2020).

A equação de equilíbrio linearizada a partir do método de Newton-Raphson pode ser ainda escrita da seguinte forma, caso \mathbf{K}_{p+1}^{T*} designe a matriz de rigidez tangente (inclui os efeitos não lineares, exclui os efeitos iniciais).

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [\mathbf{C}]_{nxn} + \left[\mathbf{K}_{p+1}^{T*} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right]_{nxn} \right] \cdot \{\Delta \mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} \\ &= \left\{ \mathbf{R}_{p+1}^i \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1}; \end{aligned} \quad (103)$$

$$[\mathbf{K}_{p+1}^{T*}]_{nxn} = [\mathbf{K}_i]_{nxn} + [\mathbf{K}_{Gp+1}]_{nxn}$$

2.1.9.4.2. Método HHT- α em modelos não lineares

A partir deste método, tem-se a seguinte equação governante para o equilíbrio dinâmico (ANSYS, 2020):

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_m}\}_{nx1} + [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} \\ & + \left\{ \mathbf{F}^i_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a(\alpha_f)\}_{nx1} \end{aligned} \quad (104)$$

Tem-se os mesmos termos apresentados para o método em modelos lineares, à despeito da força interna $\{\mathbf{F}^i_{p+1} (\{\mathbf{u}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1})\}_{nx1}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{F}^i_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} = \\ & (1 - \alpha_f) \cdot \left\{ \mathbf{F}^i_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} + \alpha_f \cdot \left\{ \mathbf{F}^i_p \left(\{\mathbf{u}_p\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} \end{aligned} \quad (105)$$

A partir da equação assumida no método de integração HHT- α , o vetor residual pode ser escrito a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} = \{\mathbf{F}^a(\alpha_f)\}_{nx1} - \left\{ \mathbf{F}^i_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} \\ & - [\mathbf{M}]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_m}\}_{nx1} - [\mathbf{C}]_{nxn} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}_{p+1-\alpha_f}\}_{nx1} \end{aligned} \quad (106)$$

De forma semelhante à exibida no método de Newmark, tem-se, a partir do acoplamento com o método de Newton-Raphson, uma forma linearizada da equação que traduz o equilíbrio no método de integração HHT- α , exibida a seguir, na qual \mathbf{K}_{p+1}^{T*} é a matriz de rigidez tangente.

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}_{p+1} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} \right) \right\}_{nx1} = \\ & \left[\frac{1 - \alpha_m}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} + \frac{(1 - \alpha_f) \cdot \delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot [\mathbf{C}]_{nxn} \right. \\ & \left. + (1 - \alpha_f) \cdot \left[\mathbf{K}_{p+1}^{T*} \left(\{\mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} \right) \right]_{nxn} \right] \cdot \{\Delta \mathbf{u}_{p+1}^i\}_{nx1} \end{aligned} \quad (107)$$

2.1.9.5. Determinação do step size

Nos algoritmos de integração no domínio do tempo e no método de Newton-Raphson, o passo (*step*) e o seu tamanho ou magnitude (*step size*) são questões centrais, conforme introduzido nos tópicos posteriores. De forma geral, tem-se que o custo computacional de um

algoritmo de integração direta, associado ao número de operações requeridas, é diretamente proporcional ao número de passos requeridos para a solução (BATHÉ, 2014).

Deste modo, o passo Δt deve ser pequeno o suficiente para proporcionar acurácia e estabilidade ao método associado (por outro lado, com um passo menor que o necessário, tem-se um custo computacional adicional), sendo estes dois os conceitos fundamentais que norteiam a escolha do *step size*.

Em termos de acurácia da solução, de modo a obter, a partir de um modelo estrutural de n GDL, um comportamento dinâmico adequado, tem-se, inicialmente, que Δt deve ser estabelecido a partir do menor período de vibração, T_n , tal como $\Delta t = \frac{T_n}{10}$ (BATHÉ, 2014).

Considera-se, posteriormente, que a resposta dinâmica pode ser dada a partir da superposição de k modos, em detrimento dos n modos de vibração da estrutura, ao passo que outros modos não são excitados ou não são determinados com a acurácia necessária, conforme a discussão presente em Bathe (2014). Com o menor período de vibração dentre os k modos de interesse dado por T_k , pode-se estimar inicialmente $\Delta t = \frac{T_k}{10}$.

Em relação a estabilidade do método de integração, foram conceituados os métodos condicionalmente estáveis e os incondicionalmente estáveis. A partir da escolha do *step size*, a estabilidade pode ser avaliada a partir de seu significado, seja a partir da amplificação artificial de condições iniciais ou do acréscimo de erros ao decorrer dos passos, no processo de integração.

A partir da chamada análise de estabilidade, é possível avaliar a estabilidade do método de integração, quando utilizado um certo passo Δt . Entre dois passos de um método de integração, tem-se a matriz \mathbf{A} , nomeada matriz de amplificação ou operador de aproximação, de modo que:

$$\{\mathbf{u}_{p+1}\}_{nx1} = [\mathbf{A}]_{nxn} \cdot \{\mathbf{u}_p\}_{nx1} \quad (108)$$

E o erro associado ao processo de integração:

$$\{\mathbf{e}_{p+1}\}_{nx1} = [\mathbf{A}]_{nxn} \cdot \{\mathbf{e}_p\}_{nx1} \quad (109)$$

No método HHT- α , conforme o discutido, tem-se que: $[\mathbf{A}]_{nxn} = [\mathbf{A}(\Delta t, \delta, \alpha, \alpha_m, \alpha_f, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}^{T*})]_{nxn}$, de modo que a matriz de amplificação contém termos associados ao método de integração ($\Delta t, \delta, \alpha, \alpha_m, \alpha_f$) e as propriedades físicas do sistema estrutural ($\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}^{T*}$).

Ao aplicar a decomposição espectral na matriz de amplificação, vê-se que a propagação de erro é controlada a partir do chamado raio espectral ρ , definido como o valor absoluto máximo dentre os autovalores de \mathbf{A} (BATHE, 2014):

$$\rho(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{MAX}|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n| \quad (110)$$

Em relação a propagação de erro, tem-se, para a estabilidade do método, $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ (BATHE, 2014).

Desta forma, pode-se obter a estabilidade a partir dos autovalores de $[\mathbf{A}(\Delta t, \delta, \alpha, \alpha_m, \alpha_f, M, C, K^{T*})]_{nxn}$, ou seja, a partir do controle do *step size* e dos parâmetros associados ao método de integração, de modo que a condição de estabilidade varia conforme as propriedades físicas $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}^{T*}$ do sistema estrutural.

Para análises dinâmicas associadas à vibração estrutural, Bathe (2014) propõe o seguinte procedimento para a determinação do *step size*:

1. Identificação das frequências presentes de forma significativa no carregamento, de modo que a maior frequência tem o valor f_u ;
2. O modelo estrutural deve apresentar resposta dinâmica satisfatória até a frequência $f_{co} = 4.f_u$;
3. Com isto, o valor do *step size* pode ser estimado por $\Delta t = \frac{1}{20} \cdot T_{co}$, com $T_{co} = \frac{1}{f_{co}}$, de modo que $\Delta t = \frac{1}{20 \cdot f_{co}}$.

De forma semelhante, Ansys (2022) propõe a seguinte sugestão para a escolha do tamanho do incremento de tempo:

1. Seleção dos modos e frequências de vibração de maior participação para a resposta dinâmica da estrutura a partir das condições gerais associadas ao modelo estrutural, de modo que a maior frequência tem o valor f_u ;
2. O valor do *step size* pode ser estimado por $\Delta t = \frac{1}{20} \cdot T_u$, com $T_u = \frac{1}{f_u}$, de modo que $\Delta t = \frac{1}{20 \cdot f_u}$.

O *step size* pode ainda ser determinado, em outros tipos de análise, a partir da condição de Courant-Friedrichs-Lowy (condição CFL), como em análises de propagação de ondas, nas quais um maior número de modos é excitado (BATHE, 2014). Nesta condição, o incremento

de tempo é limitado de modo que uma onda de tensão não pode deslocar-se além da menor distância característica de um elemento em um *step*, de forma que:

$$\Delta t \leq f \cdot \left(\frac{h}{c} \right) \quad (111)$$

Nesta expressão, f é um fator de segurança ($f \leq 1$), c é a velocidade da onda no material do modelo em análise e h é a menor distância característica de um elemento (ANSYS, 2022; BATHE, 2014).

No presente estudo, o tamanho do incremento foi estimado a partir do proposto por Ansys (2022), de tal modo que a frequência de interesse f_u foi determinada a partir da análise modal do modelo estrutural e da inspeção dos modos de vibração associados. Ressalta-se que os meios de determinação do *step size* são relativos a valores iniciais, que podem ser modificados à vista de problemas associados a instabilidade, acurácia e convergência, de um modo geral.

2.1.10. Massa da estrutura e do elemento

Representando a massa da estrutura como sendo concentrada nos nós do modelo discretizado, tem-se como resultado uma matriz de massa diagonal, de dimensão $n \times n$, nomeada matriz de massa *lumped*. De forma semelhante ao que foi desenvolvido para a matriz de rigidez, partindo do estabelecimento de funções de interpolação para que, a partir dos deslocamentos nodais, seja possível determinar os deslocamentos (e consequentemente deformações e tensões) dentro do elemento, faz-se necessário o desenvolvimento da chamada matriz de massa consistente (*consistent*), possibilitando a obtenção das acelerações internas a partir das acelerações nodais.

A força de inércia é uma força de volume, isto é, definida a partir de um diferencial de volume, de modo que sua forma nodal equivalente é do seguinte tipo, em que b é a força por unidade de volume, ρ é a massa específica do material associado ao elemento e as demais incógnitas resguardam suas definições, de modo que o elemento em análise possui n GDL (FILHO, 2005):

$$\{\mathbf{f}_{inércia}\}_{nx1} = \int_{V^e} [\mathbf{N}(x, y, z)]^T {}_{nxc} \cdot \{\mathbf{b}(x, y, z)\}_{cx1} \cdot dV \quad (112)$$

$$\{\mathbf{b}(x, y, z)\}_{cx1} = \rho \cdot [\mathbf{N}(x, y, z)]_{cxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{nx1} \quad (113)$$

É possível evidenciar a massa consistente do elemento a partir do estabelecimento da relação entre as forças de inércia nodais e as acelerações nodais, possibilitando a consideração dos efeitos de inércia no elemento.

$$\{\mathbf{f}_{inércia}\}_{nx1} = [\mathbf{m}^e]_{nxn} \cdot \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{nx1}$$

$$\therefore [\mathbf{m}^e]_{nxn} = \int_{V_e} [\mathbf{N}(x, y, z)]^T_{nxc} \cdot \rho \cdot [\mathbf{N}(x, y, z)]_{cxn} \cdot dV \quad (114)$$

A partir da definição da massa consistente do elemento, é possível realizar o processo de montagem e transformação conforme destacado para a matriz de rigidez, partindo do elemento para a estrutura completa, caracterizando o sistema discretizado (FILHO, 2005).

1. Determinação da matriz de massa consistente de cada elemento isolado (subdomínio);
2. Transformação da matriz de massa de cada elemento do sistema local $[\mathbf{m}^e]$ para o sistema global $[\mathbf{M}^e]$ a partir da matriz de transformação $[T]$, sendo:

$$[\mathbf{M}^e] = [T]^T \cdot [\mathbf{m}^e] \cdot [T] \quad (115)$$

3. Montagem da matriz de massa da estrutura (domínio) a partir da identificação dos diversos GDL da estrutura nos vetores de localização $[\mathbf{M}] = \sum [\mathbf{M}^e]$.

2.1.11. Amortecimento da estrutura e do elemento

Em um sistema estrutural, é possível conceber o amortecimento proveniente de duas fontes, em geral:

1. A partir de elementos adicionados especificamente para tal função, nomeados amortecedores, desempenhando comumente amortecimento viscoso, a partir da movimentação de um corpo em um meio fluido;
2. A partir da estrutura, em geral, devido às movimentações com atrito nas juntas (amortecimento de Coulomb) e à deformação dos materiais, a partir da absorção de energia como energia de deformação (amortecimento histerético).

Além disso, vê-se que o amortecimento da estrutura depende da frequência, ao passo que cada modo natural de vibração associado aos GDL da estrutura apresenta amortecimento diferente (FILHO, 2005).

Um modelo da matriz de amortecimento é nomeado de amortecimento de Rayleigh ou amortecimento proporcional, formulado a partir da combinação linear das matrizes de massa e

rigidez (figura 16), de forma que se tem-se ortogonalidade em relação aos autovalores do sistema:

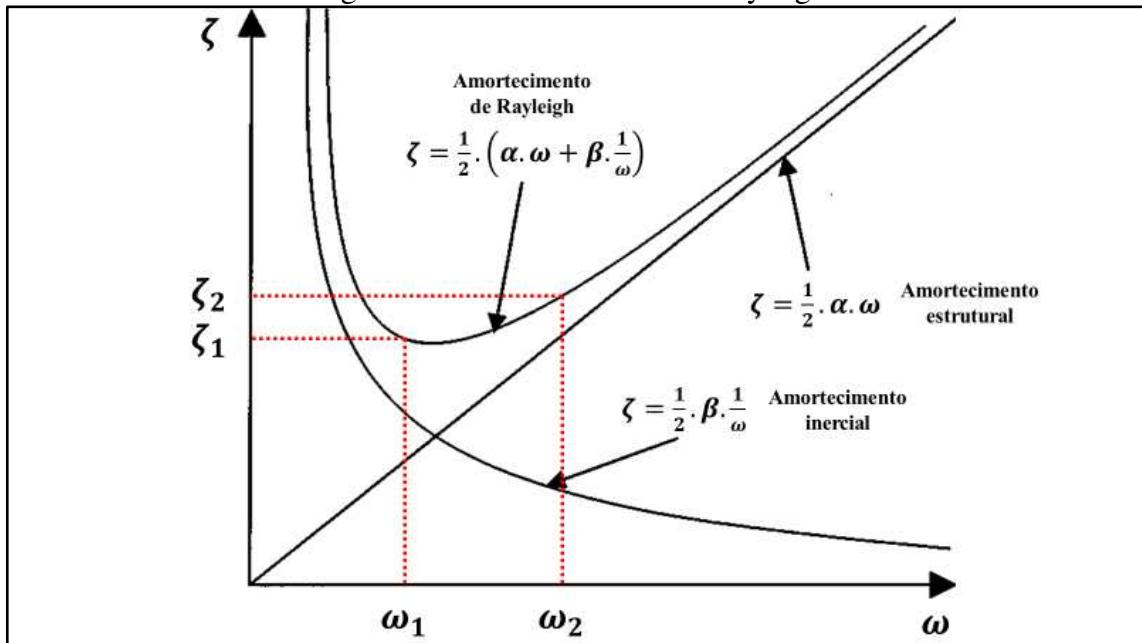
$$[\mathcal{C}]_{nxn} = \alpha \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} + \beta \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} \quad (116)$$

Neste modelo, α e β traduzem a dependência da matriz de amortecimento em relação aos modos de vibração, isto é, a variação da razão de amortecimento com a frequência. É possível, ainda, nomear as parcelas associadas ao amortecimento proporcional como amortecimento inercial e amortecimento estrutural, respectivamente.

A determinação das duas constantes α e β pode ser realizada a partir de duas frequências compatíveis com a faixa de interesse da análise $\omega_1; \omega_2$, associadas a dois fatores de amortecimento $\zeta_1; \zeta_2$, com possibilidade de $\zeta_1 = \zeta_2$ (FILHO, 2005), de modo que a expressão resultante evidencia que o amortecimento varia com a frequência, conforme diagrama a seguir, com:

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha \cdot \omega + \beta \cdot \frac{1}{\omega} \right) \quad (117)$$

Figura 16 - Amortecimento de Rayleigh.



Fonte: Adaptado de (ZERWER; CASCANTE; HUTCHINSON, 2002).

No software de análise, a matriz de amortecimento é formulada de forma semelhante, porém, adicionada de componentes que traduzem uma maior quantidade de fontes de amortecimento, a depender do modelo trabalhado. As seguintes parcelas de fontes de amortecimento podem ser consideradas (ANSYS, 2020):

1. \mathbf{C}_I : Amortecimento inercial com diferenciação em relação aos diferentes materiais da estrutura, de modo que \mathbf{M}_i é a parcela da matriz de massa associada ao material i e α_i^m é uma constante de multiplicação da matriz de massa referente a este material, sendo N_{ma} o número de materiais associados a tal fonte de amortecimento (inclusão do amortecimento proporcional a massa dependente do material):

$$[\mathbf{C}_I]_{nxn} = \sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m \cdot [\mathbf{M}_i]_{nxn} \quad (118)$$

2. \mathbf{C}_{II} : Amortecimento estrutural com diferenciação em relação aos diferentes materiais da estrutura, de modo que \mathbf{K}_j é a parcela da matriz de rigidez associada ao material j e β_j^m é uma constante de multiplicação da matriz de rigidez associada a este material, sendo N_{mb} o número de materiais associados a tal fonte de amortecimento (inclusão do amortecimento proporcional a rigidez dependente do material):

$$[\mathbf{C}_{II}]_{nxn} = \sum_{j=1}^{N_{mb}} \beta_j^m \cdot [\mathbf{K}_j]_{nxn} \quad (119)$$

3. \mathbf{C}_{III} : Elementos com amortecimento específico, comumente associados a componentes que desempenham função “direta” de amortecimento. Dentre estes, podem ser exemplificados, no software de análise: rolamento (COMBI214), bucha (COMBI250), mola-amortecedor (COMBIN14), entre outros. Os elementos com amortecimento utilizados no presente trabalho foram especificados no tópico de formulação dos elementos finitos utilizados no modelo. Finalmente, esta parcela é dada pela seguinte expressão, na qual \mathbf{C}_k é a matriz de amortecimento do elemento específico k e N_e é o número de elementos com amortecimento específico:

$$[\mathbf{C}_{III}]_{nxn} = \sum_{k=1}^{N_e} [\mathbf{C}_k]_{nxn} \quad (120)$$

4. \mathbf{C}_{IV} : Parcela relativa à consideração de efeitos rotordinâmicos em estruturas rotativas, dada pela expressão na qual \mathbf{G}_l é a matriz de amortecimento giroscópico associada ao elemento l e N_g é o número de elementos associados a tal fonte de amortecimento:

$$[\mathbf{C}_{IV}]_{nxn} = \sum_{l=1}^{N_g} [\mathbf{G}_l]_{nxn} \quad (121)$$

5. \mathbf{C}_V : Amortecimento histerético, incluído a partir de uma frequência de excitação média especificada, dado pela seguinte expressão, na qual ϑ é o coeficiente de amortecimento estrutural e $\bar{\Omega}$ é a frequência de excitação média:

$$[\mathbf{C}_V]_{nxn} = \frac{\vartheta}{2 \cdot \pi \cdot \bar{\Omega}} \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} \quad (122)$$

6. \mathbf{C}_{VI} : O amortecimento estrutural também pode ser quantificado em relação aos diferentes materiais da estrutura, assim como o amortecimento de Rayleigh, tendo \mathbf{K}_m como a parcela da matriz de rigidez associada ao material m , ϑ_m como o coeficiente de amortecimento estrutural de m e N_m o número de materiais associados a tal fonte de amortecimento:

$$[\mathbf{C}_{VI}]_{nxn} = \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\vartheta_m}{2 \cdot \pi \cdot \bar{\Omega}} \cdot [\mathbf{K}_m]_{nxn} \quad (123)$$

Finalmente, é possível descrever a matriz de amortecimento da estrutura a partir da contabilização das diversas fontes de amortecimento, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}]_{nxn} &= \alpha \cdot [\mathbf{M}]_{nxn} + \beta \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} + \sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m \cdot [\mathbf{M}_i]_{nxn} + \sum_{j=1}^{N_{mb}} \beta_j^m \cdot [\mathbf{K}_j]_{nxn} \\ &+ \sum_{k=1}^{N_e} [\mathbf{C}_k]_{nxn} + \sum_{l=1}^{N_g} [\mathbf{G}_l]_{nxn} + \frac{\vartheta}{2 \cdot \pi \cdot \bar{\Omega}} \cdot [\mathbf{K}]_{nxn} + \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\vartheta_m}{2 \cdot \pi \cdot \bar{\Omega}} \cdot [\mathbf{K}_m]_{nxn} \end{aligned} \quad (124)$$

2.2.MECÂNICA ESTRUTURAL

2.2.1. Tensor deformação

2.2.1.1. Extensão e rotação

A partir do estudo da cinemática, inserido na mecânica do contínuo, tem-se o tensor gradiente de deformação, \mathbf{F} , já apresentado anteriormente. Também, conforme visto, o tensor gradiente de deformação pode ser decomposto a partir do teorema da decomposição polar, seja a partir do tensor direito \mathbf{U} ou esquerdo \mathbf{V} de extensão de Cauchy (ARGENTA, 2020; ANAND; GOVINDJEE, 2020). A partir da decomposição, retira-se do gradiente de deformação componentes associadas a rotações de corpo rígido, de modo que se tem, nos tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} , componentes associadas a extensões e translações de corpo rígido (FILHO, 2012).

A partir da decomposição polar do gradiente de deformação F , tem-se as relações a seguir. (ANAND; GOVINDJEE, 2020). O símbolo “.” indica o produto.

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

(125)

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

A partir disto, faz-se útil a definição dos tensores direito e esquerdo de “deslocamento” (*deformation*) de Cauchy-Green, \mathbf{C} e \mathbf{B} , respectivamente. Estes tensores serão utilizados para a definição posterior de algumas medidas de deformação.

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

(126)

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

(127)

A definição escalar de extensão (*stretch*), λ , é dada a partir da consideração de um elemento de linha em sua configuração de referência $d\mathbf{X}$ e deformada $d\mathbf{x}$, podendo associar-se a direção cujo vetor unitário é $\mathbf{e}_X = \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|}$ ou à direção $\mathbf{e}_x = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|}$. Com $dS = |d\mathbf{X}|$ e $ds = |d\mathbf{x}|$, tem-se:

$$\lambda(\mathbf{e}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ds}{dS} = |\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|$$

(128)

Desta forma, tem-se a extensão do elemento de linha (fibra infinitesimal) na direção \mathbf{e}_i . Com $\lambda = 1$, a fibra experimenta translação de corpo rígido, e com $\lambda \neq 1$, tem-se uma extensão da fibra. Ainda é possível descrever a medida escalar de extensão a partir do tensor direito de deslocamento de Cauchy-Green, como $\lambda^2(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_i$ (ANAND; GOVINDJEE, 2020), em que o símbolo “•” indica o produto interno.

A apresentação da medida escalar de extensão, *stretch*, justifica-se ao passo que, a partir do posto, tem-se a definição da deformação normal de engenharia, associada à direção \mathbf{e}_i (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\varepsilon(\mathbf{e}_i) = \lambda(\mathbf{e}_i) - 1$$

(129)

A partir da extensão λ , ainda se tem a definição da deformação tangencial de engenharia (distorção) γ entre duas fibras de direções \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , dada por (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \sin^{-1} \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_2}{\lambda(\mathbf{e}_1) \cdot \lambda(\mathbf{e}_2)} \quad (130)$$

Adicionalmente, a deformação pode se dar sob forma multidimensional, a partir de medidas tensoriais. Os tensores que são referentes às medidas de deformação são obtidos, em primeira instância, a partir de \mathbf{U} e \mathbf{V} , os quais: deformação de Biot, de Green e de Hencky. A partir de manipulações, estes tensores também podem ser obtidos a partir dos tensores \mathbf{C} e \mathbf{B} .

2.2.1.2. Tensor deformação de Biot

O tensor deformação de Biot, $\boldsymbol{\varepsilon}_B$, é a associação direta da medida escalar de deformação à uma medida tensorial, e é definida a partir da retirada das componentes de translação de corpo rígido do tensor direito de extensão de Cauchy \mathbf{U} .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U} - \mathbf{1} \quad (131)$$

2.2.1.3. Tensor deformação de Green

O tensor deformação de Green, $\boldsymbol{\varepsilon}_G$, é definido a partir da retirada das componentes de rotação de corpo rígido do tensor gradiente de deformação, podendo ainda ser obtido a partir dos tensores \mathbf{C} e \mathbf{U} , conforme as relações exibidas anteriormente.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (132)$$

2.2.1.4. Tensor deformação de Hencky

O tensor deformação de Hencky, $\boldsymbol{\varepsilon}_H$, conforme visto no tópico de não lineares estruturais, é uma medida de deformação tensorial logarítmica, definida a partir dos tensores de extensão de Cauchy \mathbf{U} (conforme já exibido) ou de \mathbf{V} . Esta medida de deformação é utilizada nas aplicações não lineares no software de análise e na formulação de alguns elementos finitos, conforme destacado anteriormente.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{HU} = \ln \mathbf{U} \quad (133)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{HV} = \ln \mathbf{V} \quad (134)$$

A partir das decomposições espectrais de \mathbf{U} e \mathbf{V} , o tensor deformação de Hencky é dado por:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{HU}]_{3x3} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_{U_i} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{3x1} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{U_i}\}_{1x3}^T \quad (135)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{HV}]_{3x3} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_{V_i} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{V_i}\}_{3x1} \cdot \{\boldsymbol{\phi}_{V_i}\}_{1x3}^T \quad (136)$$

2.2.1.5. Tensor deformação infinitesimal

Uma condição particular é a de pequenas deformações, a partir da qual tem-se (ANAND; GOVINDJEE, 2020) $|\mathbf{F} - \mathbf{1}| \ll 1$. Nesta condição, o tensor deformação infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T); \mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (137)$$

Em que \mathbf{H} é o gradiente de deslocamento. Nestas condições, as componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ assumem os valores de deformação comumente conhecidos para medidas infinitesimais, valores estes exibidos no subtópico de determinação de rigidez pelo método de energia.

2.2.2. Tensor tensão

2.2.2.1. Hipótese de Cauchy

A hipótese de Cauchy introduz um campo de tensão superficial, ou vetor tensão, denotado por \mathbf{t} . Este campo representa a força por unidade de área exercida pelo material do lado positivo de S no material do lado negativo de S em um certo instante de tempo t , seja S qualquer superfície (interna ou externa) pertencente ao corpo em sua configuração deformada B_t .

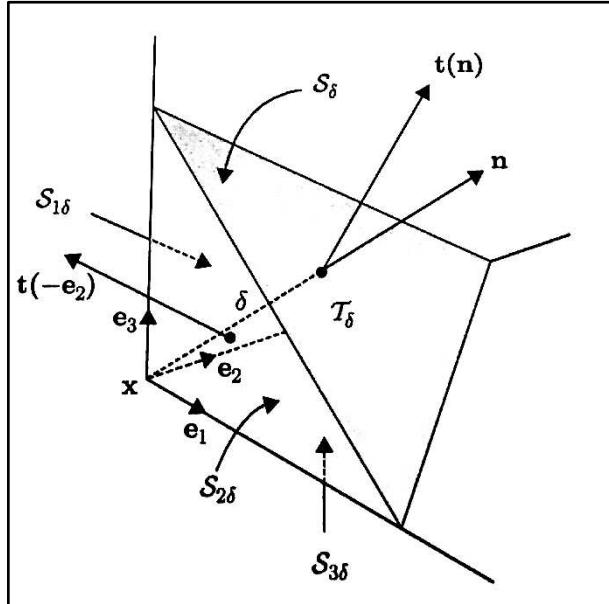
O campo \mathbf{t} é definido para cada ponto pertencente à superfície caracterizada pelo vetor unitário \mathbf{n} , de modo que $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$, ou seja, é função da normal \mathbf{n} , da posição \mathbf{x} e do tempo t (ARGENTA, 2020; ANAND; GOVINDJEE, 2020).

2.2.2.2. Tensor tensão de Cauchy

O tensor tensão de Cauchy pode ser definido a partir do balanço de forças aplicado ao chamado tetraedro de Cauchy Γ , de dimensão característica δ e faces de área A_δ e $A_{i\delta}$, considerando os vetores tensão atuando em cada face e uma força de corpo generalizada \mathbf{b}

atuando no volume, conforme a figura 17. Tem-se que a posição x pertence ao interior de B_t . O balanço de forças é dado por (ARGENTA, 2020; ANAND; GOVINDJEE, 2020):

Figura 17 - Tetraedro elementar de Cauchy.



Fonte: Adaptado de (ANAND; GOVINDJEE, 2020).

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot A_\delta + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) \cdot A_{i\delta} + \mathbf{b} \cdot V_\Gamma = 0; A_{i\delta} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \cdot A_\delta; V_\Gamma = \frac{1}{3} \cdot A_\delta \cdot \delta \quad (138)$$

Dividindo a expressão acima por A_δ e tomando o limite $\delta \rightarrow 0$, de modo que o tetraedro Γ disponha-se no interior de B_t , tem-se:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \quad (139)$$

Em consonância com a terceira lei de Newton, como pode ser visto a partir do balanço de força em um paralelepípedo infinitesimal (*Cauchy's pillbox*), tem-se (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) \therefore \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \quad (140)$$

Deste modo:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{n} \quad (141)$$

Em que $(\mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$, de modo que \otimes denota o produto tensorial. Ademais, tem-se que $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$.

Deste modo, tem-se a lei de Cauchy, como $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$, de modo que se define o tensor tensão de Cauchy por (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_i \quad (142)$$

Considerando o estado de tensão em um elemento cúbico infinitesimal centrado no ponto \mathbf{x} , pertencente a um corpo em configuração deformada B_t , tem-se os vetores tensão $\mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$, ou simplesmente $\mathbf{t}(\mathbf{e}_i)$.

Em relação a base \mathbf{e}_i , estes vetores têm as componentes $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_j)$, de modo que o tensor tensão de Cauchy detém nove componentes de tensão: três componentes de tensão normal ($i = j$) e seis componentes de tensão tangencial ($i \neq j$).

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}(\mathbf{e}_j) = \sigma_{ij} \quad (143)$$

2.2.2.3. Teorema de Cauchy

Os resultados associados à hipótese de Cauchy, à lei de Cauchy e ao balanço de forças e momentos reúnem-se no teorema de Cauchy, de modo que, para o sistema de forças associado a $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ e \mathbf{b} , tem-se o seguinte (ANAND; GOVINDJEE, 2020).

1. Da lei de Cauchy, tem-se o tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$: $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$; $t_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} \cdot n_j$;
2. Do balanço de momentos, vê-se que o tensor tensão é simétrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T; \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (144)$$

3. Da equação de movimento, vê-se o equilíbrio entre as componentes:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0; \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (145)$$

2.2.2.4. Tensões principais

A partir da expansão das componentes dos vetores tensão no equilíbrio de forças do sistema tetraedro de Cauchy, tem-se (MASCIA, 2006; PARENTE JUNIOR; DE MELO; MEDEIROS JR, 2022):

1. Na direção \mathbf{e}_1 :

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n})).A_\delta = \sigma_{11}.(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1).A_\delta + \sigma_{21}.(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2).A_\delta + \sigma_{31}.(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3).A_\delta; \quad (146)$$

$$(\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{t}(\mathbf{n})) = \sigma_{11} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + \sigma_{21} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) + \sigma_{31} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3)$$

2. De forma análoga, para \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 .

Tem-se um plano em que as componentes tangenciais de tensão são nulas, sendo este plano nomeado de plano principal. Neste plano, as componentes $(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{t}(\mathbf{n}))$ são nomeadas tensões principais, e são dadas por $\sigma \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_i)$. Desta forma, o vetor tensão principal tem magnitude σ e possui a mesma direção de \mathbf{n} . Para o tetraedro de Cauchy, em relação ao plano principal, tem-se, conforme desenvolvido anteriormente (MASCIA, 2006):

$$\begin{aligned}\sigma \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) &= \sigma_{11} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + \sigma_{21} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) + \sigma_{31} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) \\ \sigma \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) &= \sigma_{22} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) + \sigma_{12} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + \sigma_{32} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) \\ \sigma \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) &= \sigma_{33} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) + \sigma_{13} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + \sigma_{23} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2)\end{aligned}\quad (147)$$

Verificando-se a evidência dos termos $\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_i$ e organizando a ordem das equações, tem-se o sistema linear e homogêneo:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma) \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + \sigma_{21} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) + \sigma_{31} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) &= 0 \\ \sigma_{12} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + (\sigma_{22} - \sigma) \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) + \sigma_{32} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) &= 0 \\ \sigma_{13} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) + \sigma_{23} \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) + (\sigma_{33} - \sigma) \cdot (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) &= 0\end{aligned}\quad (148)$$

Sob forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\quad (149)$$

A solução não trivial é condicionada por:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0\quad (150)$$

A partir da efetuação do determinante, tem-se uma relação entre as componentes do tensor tensão e a tensão principal sob forma de uma equação polinomial de terceiro grau em σ , dada por (MASCIA, 2006; FILHO, 2012):

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0\quad (151)$$

Em que I_i são os invariantes do tensor tensão de Cauchy, quantidades mantidas constantes independentemente do sistema de coordenadas adotado:

1. $I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};$
2. $I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} + \sigma_{11} \cdot \sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2;$
3. $I_3 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} + 2 \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{23} \cdot \sigma_{13} - \sigma_{11} \cdot \sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \cdot \sigma_{13}^2 - \sigma_{33} \cdot \sigma_{12}^2.$

As três raízes da equação resultante, tensões principais associadas a três planos principais, são designadas por σ_1 , σ_2 e σ_3 . Costuma-se utilizar esta notação em conformidade com $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

As tensões principais também podem ser obtidas a partir da decomposição espectral do tensor tensão, ou seja, a partir de seus autovalores e autovetores, que são as tensões principais e direções principais, respectivamente (ARGENTA, 2020).

As tensões principais possuem fundamental importância ao passo que são utilizadas continuamente em diversas teorias de falha, sejam associadas a falhas estáticas ou por fadiga, ou ainda aplicadas à materiais dúcteis ou frágeis. Desta forma, fazem-se primordiais para a análise estrutural de diversos sistemas, como o do presente trabalho.

2.2.2.5. Medidas de tensão

Conforme tratado, o tensor tensão de Cauchy é definido a partir do corpo em configuração deformada, sendo associado à descrição do movimento Euleriana (FILHO, 2012). A partir da descrição Lagrangiana (pautada no corpo em configuração de referência), tem-se outras medidas de tensão, comumente utilizadas em modelos presentes na mecânica dos sólidos, como o primeiro e segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhof (FILHO, 2012; ARGENTA, 2020).

2.2.3. Falhas estruturais

Castro e Meggiolaro (2009) apontam falha como a perda parcial ou terminal da funcionalidade ou da capacidade operacional de qualquer equipamento, de tal modo que os processos variados que contribuem para esta falha são nomeados de mecanismos de dano, rebatizados, no presente trabalho, de mecanismos indutores de falha, tendo em vista a aplicação específica do termo “dano” em fadiga.

Os autores dividem as falhas em quatro grupos, os tipos de falhas, os quais associam-se a possíveis mecanismos indutores de falha, que podem agir de forma independente ou simultânea na contribuição para a falha. Os grupos associados a falhas mecânicas podem ser sintetizados a partir da tabela 9.

Tabela 9 - Tipos de falha e mecanismos indutores de falha.

Tipo de falha	Mecanismos indutores de falha
Quebra	Fadiga, fluênci, corrosão sob tensão, escoamento, sobrecargas, dentre outros.
Distorção excessiva	Escoamento, flambagem, colapso plástico, corrosão e/ou fluênci e sobrecargas.
Desgaste excessivo	Adesão, abrasão, erosão, fadiga superficial e corrosão.

Fonte: Adaptado de (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009).

Norton (2013) introduz o conceito de falha a partir de condições de falha, que por sua vez, associam-se a mecanismos causadores de falha. Neste sentido, uma condição de falha pode ser a perda de função a partir de deformações e distorções grandes o suficiente, ou mesmo a partir da ruptura e separação. Tem-se ainda a diferença entre o comportamento elasto-plástico de materiais dúcteis e frágeis e as implicações nas falhas associadas a estes materiais, além da influência da presença de trincas e a diferenciação entre carregamentos estáticos e dinâmicos.

O sistema em análise do presente trabalho caracteriza-se, por inspeção, pelos possíveis tipos de falha de quebra e de distorção excessiva. A análise estrutural centraliza-se nos mecanismos indutores de falha de escoamento e de fadiga, que norteiam as análises de falha estática e por fadiga, respectivamente. Deste modo, faz-se válido o maior detalhamento destes mecanismos, que será feito a seguir.

2.2.3.1. *Escoamento*

No ensaio de tração uniaxial, o escoamento ocorre, para um material que exibe ponto de escoamento claro, quando, acima do limite elástico, o material começa a ceder mais facilmente à carga aplicada e sua taxa de deformação aumenta sem um aumento considerável na tensão normal de tração (NORTON, 2013), de modo que tal comportamento é caracterizado a partir de uma diminuição da inclinação no diagrama tensão-deformação. Em geral, tem-se que o escoamento se dá a partir de uma pequena deformação plástica, em geral de 0,2%, definição que dá suporte a materiais sem ponto de escoamento claro, de maior fragilidade, em geral.

Em componentes e estruturas concebidas a partir de materiais dúcteis, tem-se a possibilidade de escoamento local a partir de níveis de tensão elevados, enquanto materiais frágeis experimentam microfratura local ou rachadura local para polímeros.

Deste modo, tem-se que nestes primeiros o escoamento localizado, por exemplo, na raiz de um entalhe, não configura uma falha mecânica (exceto quando este escoamento localizado é inconcebível, como em função de rigorosas tolerâncias), sendo, em geral, desprezado no dimensionamento estático de estruturas dúcteis (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009).

Para este dimensionamento, utiliza-se, em detrimento do escoamento localizado, o chamado escoamento global (geralmente caracterizado por tensões elevadas e distribuídas), que pode ocasionar falha a partir do colapso plástico do componente ou estrutura, isto é, a ocorrência de deformações plásticas intoleráveis, de elevada magnitude.

Em última instância, a fratura dúctil é causada pelo esgotamento da ductilidade do material (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009), o que, em materiais de elevada ductilidade, pode corresponder a uma configuração deformada completamente diferente da original. Deste modo, o escoamento configura-se como mecanismo indutor de falhas do tipo quebra e distorção excessiva, a partir do chamado escoamento global. No presente trabalho, tem-se o escoamento global como o indutor de falha global, que independe de detalhes locais.

2.2.3.2. Fadiga

Segundo Norton (2013), o fenômeno da fadiga foi observado por volta de 1800, a partir de falhas em eixos ferroviários (submetidos a flexão rotativa) com pouco tempo em serviço que, embora concebidos em aço dúctil, exibiam características de fraturas frágeis e repentinhas.

A partir de então, Rankine, em 1843, apontou em um artigo a fragilização do material dos eixos a partir das tensões flutuantes (teoria da cristalização da fadiga). Em 1870, Wöhler publicou sua investigação de 20 anos, que apontava o número de ciclos de tensão variante (componente alternada) como o causador da falha e a descoberta do limite de resistência para aços, introduzindo o diagrama *SN* (resistência à fadiga versus vida esperada) ou curva de Wöhler a partir de ensaios de flexão rotativa. Em 1930, Goodman e Sodeberg determinaram, de forma independente, a influência da tensão média (componente média) na fadiga.

A partir disso, as cargas de fadiga são descritas a partir das componentes de tensão alternada σ_a e média σ_m , que são calculadas a partir das componentes máxima σ_{max} e mínima σ_{min} , de modo que, para uma componente qualquer do tensor tensão, tem-se:

$$\sigma_{ij_a} = \frac{\sigma_{ij_{max}} - \sigma_{ij_{min}}}{2} \quad (152)$$

$$\sigma_{ij_m} = \frac{\sigma_{ij_max} + \sigma_{ij_min}}{2} \quad (153)$$

O carregamento é ainda caracterizado a partir da razão de tensão R e da razão de amplitude A :

$$R = \frac{\sigma_{ij_min}}{\sigma_{ij_max}} \quad (154)$$

$$A = \frac{\sigma_{ij_a}}{\sigma_{ij_m}} \quad (155)$$

De um modo geral, a fadiga é o mecanismo indutor de falha que é causado primariamente pela aplicação de cargas variáveis. A principal característica deste mecanismo é gerar e/ou (a partir de trincas pré-existentes) propagar progressivamente uma trinca, até a ocorrência da fratura. Isto se dá a partir do chamado mecanismo de falha por fadiga, consistido pelos estágios (NORTON, 2013): início da trinca, propagação da trinca e ruptura repentina devido ao crescimento instável da trinca. Estes estágios são introduzidos a seguir, para um material dúctil.

O estágio de início da trinca é caracterizado pelo estabelecimento de uma trinca microscópica. A partir da concentração de tensão geométrica em regiões de tamanho mínimo, seja a partir de entalhes, vazios ou inclusões, tem-se escoamento local. A partir do escoamento local, tem-se uma deformação plástica localizada, que causa distorções e cria bandas de deslizamento ao longo dos cristais do material. A partir da ocorrência dos ciclos de tensão e de deformações plásticas localizadas adicionais, tem-se o agrupamento de bandas de deslizamento em uma trinca microscópica, tem-se que a trinca foi iniciada.

Com maior detalhamento, segundo Castro e Meggiolaro (2009), tem-se que algumas das bandas de deslizamento criadas a partir da deformação plástica localizada progridem para uma microtrinca, que se propaga por alguns grãos em uma direção próxima à da máxima tensão de cisalhamento. A microtrinca progride para uma trinca quando troca de direção, propagando-se em um plano perpendicular à máxima tensão normal.

O estágio de propagação da trinca é caracterizado pelo crescimento da trinca, que ocorre durante o aumento do fator de intensidade de tensão em sua extremidade K até o nível de tenacidade à fratura do material K_c , conforme descreve a mecânica da fratura. O crescimento da trinca se dá a partir da alternância entre seu alongamento, provocado por uma tensão de

tração, e o seu fechamento, que pode ser provocado por uma tensão de tração suficientemente baixa, ou por uma tensão nula ou por uma tensão de compressão.

A partir do fator K , a mecânica da fratura linear elástica pode estabelecer o comportamento de estruturas e componentes contendo trincas e defeitos. A partir disso, é possível modelar o comportamento da trinca até a fratura em relação ao seu modo de crescimento, com base nas condições de carregamento, condições do ambiente e na tenacidade à fratura do material.

Deste modo, a trinca se propaga ao longo de planos normais aos da tensão máxima de tração. Vê-se que, de forma direta, o crescimento da trinca, e a falha por fadiga, em geral, se deve a tensão de tração, ao passo que uma tensão de compressão, ainda cíclica, não contribui para o crescimento da trinca (NORTON, 2013).

O estágio de fratura é caracterizado pela ocorrência de uma falha repentina, instantânea, no próximo ciclo de tensão de tração após a condição $K = K_c$, seja ela alcançada a partir do crescimento da trinca ou pelo aumento da tensão nominal. Com o atingimento da condição, a trinca instável propaga-se subitamente até a falha, em taxas de propagação associadas a velocidades da ordem de 1 mi/s ou 5793,64 km/h (NORTON, 2013).

Conforme Castro e Meggiolaro (2009), tem-se que as falhas cujo mecanismo indutor é a fadiga são localizadas, progressivas e cumulativas, de modo que se constituem como falhas locais, causadas por tensões que atuam em um ponto crítico, em detrimento de porções distribuídas. No presente trabalho, tem-se a fadiga como mecanismo o indutor de falha local, que pouco depende das tensões no componente/estrutura como um todo.

2.2.3.3. Teorias de falha estática

Este conjunto de teorias se propõe a delimitar um critério de falha ou estabelecer quando ela ocorre em função das componentes de tensão em uma porção crítica da estrutura ou componente, englobando os tipos de falha de quebra e de distorção excessiva, compreendendo os mecanismos de dano de escoamento e de ruptura.

A delimitação da falha é, nestas teorias, geometricamente evidenciada a partir da definição dos chamados envelopes de falha. Estes envelopes exibem, para cada teoria, as regiões seguras (não há falha) e inseguras (há falha) a partir das tensões principais dispostas nos eixos cartesianos, de modo que se vê a possibilidade de falha para um elemento infinitesimal do sistema (associado a porção crítica) a partir do seu estado de tensão.

As divisões existentes entre as teorias de falha estática se dão a partir dos micro mecanismos de falha associados ao escoamento e à ruptura, que diferem conforme a ductilidade do material (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009).

Além disso, faz-se necessária a diferenciação acerca da uniformidade do material, ao passo que as relações entre a elasticidade (relação tensão-deformação) e entre as resistências à tração, compressão e torção impactam diretamente na definição do critério de falha para um ponto de um componente ou estrutura.

Desta forma, é possível organizar as principais teorias de falha estática em três categorias gerais, da seguinte forma (tabela 10):

Tabela 10 - Algumas das teorias de falha estática.

Categoría	Teoria(s) de falha
Falha em materiais dúcteis e uniformes	Energia de distorção de von Mises-Hencky
	Máxima tensão de cisalhamento de Tresca-Guest
Falha em materiais dúcteis e não uniformes	Mohr-Coulomb dúctil
Falha em materiais frágeis (cuja não uniformidade é característica)	Mohr-Coulomb frágil
	Mohr modificada

Fonte: (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

Tendo em vista que os materiais associados ao modelo estrutural se caracterizam como dúcteis e uniformes, foram utilizadas as teorias da energia de distorção e da máxima tensão de cisalhamento, sintetizadas a seguir.

2.2.3.3.1. Teoria de energia de distorção de von Mises-Hencky

Em um estado qualquer de tensão, caracterizado pelas tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , a energia de deformação U , a partir de um material linear elástico e isotrópico é dada por (NORTON, 2013):

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot v \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)] \quad (156)$$

Ao passo que não ocorre escoamento de um sólido contínuo quando submetido a um estado de tensão hidrostático, conforme comprovação experimental (FILHO, 2012), estado no qual as tensões principais são iguais e dadas por $\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, faz-se válida a divisão da

energia de deformação em sua componente hidrostática U_h , caracterizada pelas componentes de tensão σ_h , e em sua componente de energia de distorção U_d , caracterizada pelas componentes de tensão σ_{1d} , σ_{2d} e σ_{3d} .

Desta forma, as componentes de tensão principal são dadas por:

$$\sigma_i = \sigma_h + \sigma_{id} \quad (157)$$

$$U = U_h + U_d \quad (158)$$

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{1}{2.E} \cdot [\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2 - 2.v.(\sigma_h \cdot \sigma_h + \sigma_h \cdot \sigma_h + \sigma_h \cdot \sigma_h)] \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-2.v)}{E} \cdot \sigma_h^2 \\ \text{Com } \sigma_h &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \text{ tem-se:} \end{aligned} \quad (159)$$

$$U_h = \frac{(1-2.v)}{6.E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2.(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)] \quad (160)$$

A partir daí, obtém-se a energia de deformação:

$$\begin{aligned} U_d &= U - U_h \\ \therefore U_d &= \frac{1+v}{3.E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3) \end{aligned} \quad (161)$$

O estado de tensão hidrostático também pode ser visualizado a partir da decomposição do tensor tensão, simétrico, em um tensor esférico e um tensor antiesférico. O tensor esférico representa o estado de tensão hidrostático, no qual não há componentes de cisalhamento, e o tensor antiesférico representa um estado de tensão tangencial com a presença de componentes de tensão desvio e cisalhantes (FILHO, 2012).

$$[\sigma]_{3x3} = [\sigma_h]_{3x3} + [\sigma_t]_{3x3};$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_h & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_h & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_h \end{bmatrix} \quad (162)$$

A tensão hidrostática σ_h também pode ser nomeada octaédrica, pois o equilíbrio estático de um elemento do tipo octaedro regular exibe tensões normais $\sigma_{oct} = \sigma_h$.

Exibida a energia de distorção e explorado o conceito do estado de tensão hidrostático e tangencial, apresenta-se a definição de falha a partir da teoria da energia de distorção de von

Mises-Hencky: a falha ocorre quando a quantidade de energia de distorção do estado atual de tensão se iguala ou excede a quantidade de energia de distorção na qual o escoamento ocorre no ensaio de tração uniaxial.

De imediato, pode-se escrever a energia de distorção na qual o escoamento ocorre no ensaio de tração uniaxial, em que $\sigma_1 = S_y$ e as demais tensões principais são nulas:

$$U_d = \frac{1 + \nu}{3 \cdot E} \cdot S_y^2 \quad (163)$$

Isto permite obter a combinação das tensões principais que promove a equivalência de energia de distorção no escoamento, isto é, com $U_d(S_y) = U_d(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} \quad (164)$$

Aproveitando-se ainda da equivalência de energia de distorção entre um estado de tensão uniaxial e um estado triplo de tensão, é conveniente a definição de uma tensão equivalente que represente uma combinação de tensões, nomeada de tensão equivalente de von Mises, definida como a tensão de tração uniaxial que criaria a mesma energia de distorção que é criada pela combinação atual das tensões aplicadas.

Nota-se que, sendo uma tensão de tração, é sempre positiva. Esta tensão é dada a partir da mesma equivalência de energia, diferindo apenas em relação à tensão em tração uniaxial, que é a de interesse, com $U_d(\sigma_{mises}) = U_d(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

$$\sigma_{mises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} \quad (165)$$

Deste modo, o coeficiente de segurança n_{dis} para esta teoria pode ser dado por:

$$n_{dis} = \frac{S_y}{\sigma_{mises}} \quad (166)$$

2.2.3.3.2. Teoria da máxima tensão de cisalhamento de Tresca-Guest

Esta teoria estabelece que, a partir da importância das tensões e deformações de cisalhamento nos micro mecanismos associados ao escoamento e à ruptura nos materiais dúcteis (ao passo que as resistências ao cisalhamento são menores que as resistências à compressão e à tração), tem-se que a falha ocorre quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta se iguala ou excede a tensão de cisalhamento máxima absoluta na qual o escoamento ocorre no ensaio de tração uniaxial.

A partir disto, o coeficiente de segurança é dado por:

$$n_{cis} = \frac{S_y/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{S_y}{(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (167)$$

2.2.3.4. Teorias de falha por fadiga

De um modo geral, a falha por fadiga pode ser tratada a partir de três métodos de análise: tensão-vida, deformação-vida e o da mecânica da fratura. Estes três métodos podem ser sintetizados a partir do seguinte, conforme Castro e Meggiolaro (2009):

1. O método tensão-vida, também nomeado S-N ou de Wöhler, modela o início do trincamento em um ponto crítico com base em ensaios de fadiga de corpos de prova, supondo que as tensões solicitantes são lineares elásticas. Este método é utilizado para evitar o trincamento por fadiga ou para quantificar uma longa vida associada à um carregamento que mantém o ponto crítico dentro do regime elástico. Deste modo, o método de Wöhler não trabalha com plastificação e não dispõe de meios de reconhecimento da presença de trincas;
2. O método deformação-vida, também nomeado ϵ -N ou de Coffin-Manson, reconhece deformações elásticas e plásticas cíclicas atuantes no ponto crítico, e as correlaciona com a vida de corpos de prova ensaiados a partir de um carregamento semelhante ao de serviço (carregamento de deformação);
3. O método a-N ou de Paris aplica a mecânica da fratura linear elástica para modelar e prever a propagação das trincas por fadiga, reconhecendo a presença de uma trinca e descrevendo matematicamente o seu crescimento.

No presente trabalho, o método tensão-vida foi utilizado em função de sua fácil aplicação, grande quantidade de dados de suporte e representatividade adequada para a fadiga de alto ciclo (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

Com o método S-N, o coeficiente de segurança à falha por fadiga é determinado a partir dos envelopes de falha do tipo componente de tensão alternada versus componente de tensão média. A vida em fadiga, por sua vez, é determinada a partir do diagrama S-N.

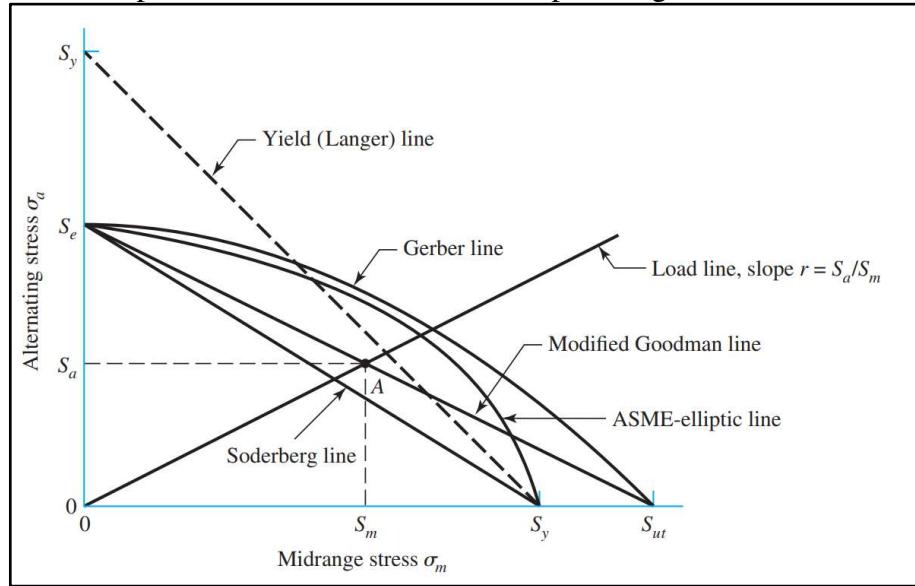
2.2.3.4.1. Envelopes de falha por fadiga

De modo geral, os envelopes de falha podem ser introduzidos como as teorias de falha por fadiga associadas ao método S-N. Estes envelopes definem uma interpretação geométrica

para o coeficiente de segurança para falha por fadiga em função das componentes de tensão alternada e média, sendo pautados em resultados experimentais.

A figura 18 exibe os critérios de falha, assim também chamados, de Soderberg, Goodman modificado, Gerber, ASME-elíptico e a linha de escoamento de Langer, que propõe a possibilidade de falha estática, também chamada escoamento de primeiro ciclo.

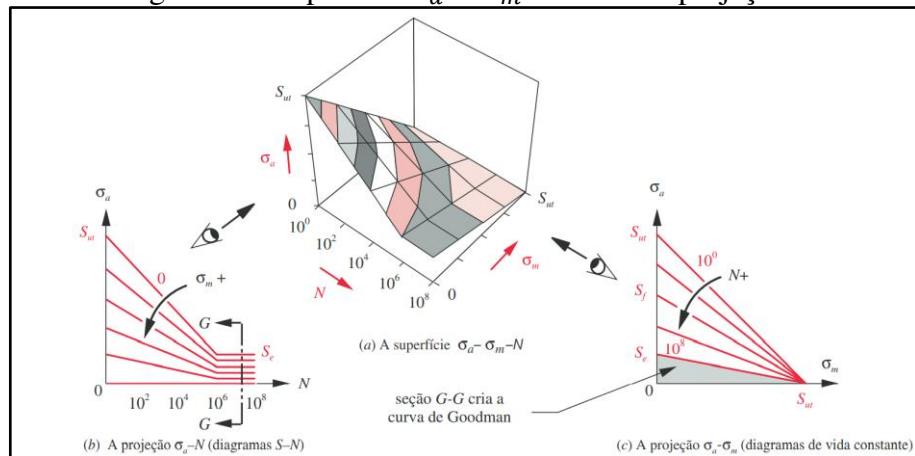
Figura 18 - Envelopes de falha das teorias de falha por fadiga associadas ao método S-N.



Fonte: (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

Os envelopes de falha das teorias exibidas são construídos, no eixo da componente de tensão alternada, a partir do ponto de limite de resistência à fadiga S_e , associado à vida infinita em fadiga. De um modo geral, este ponto pode ser substituído por uma resistência à fadiga qualquer, ainda de alto ciclo, $S_f = S_f(N)$, de modo que a partir da variação da vida em fadiga, diferentes envelopes para a mesma teoria podem ser plotados, como exibe a figura 19, para o critério de falha de Goodman modificado.

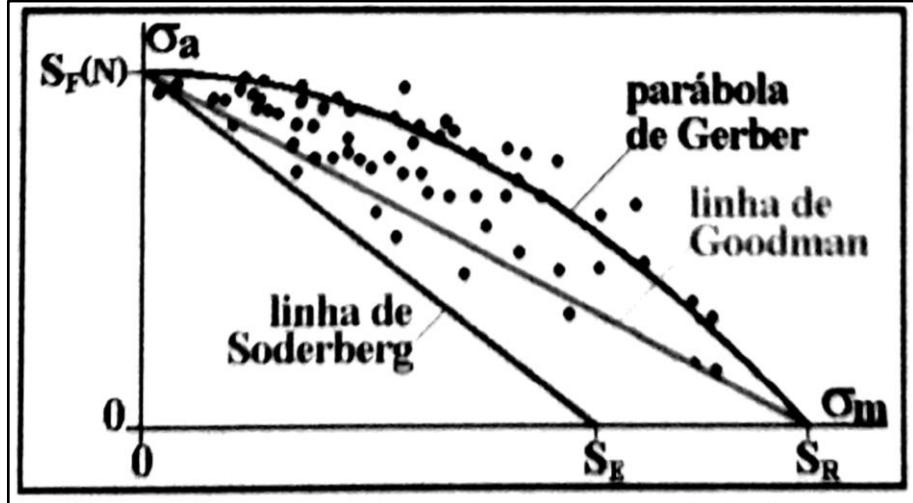
Figura 19 - Superfície $\sigma_a - \sigma_m - N$ e suas projeções.



Fonte: (NORTON, 2013).

Frente aos resultados experimentais, tem-se que a teoria de falha de Gerber ajusta-se melhor aos dados, enquanto a de Soderberg é, em geral, não utilizada devido ao seu conservadorismo exagerado (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009), conforme a figura 20.

Figura 20 - Diagramas de vida constante $\sigma_a - \sigma_m$ e pontos de trinca.



Fonte: (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009).

No presente trabalho, foi utilizado o critério de falha de Goodman modificado, ao passo que é comumente utilizada para o projeto de alto ciclo a partir do método S-N e que pode ser considerado satisfatoriamente conservativo (NORTON, 2013). Esta teoria de falha é descrita matematicamente a partir das seguintes equações (BUDYNAS; NISBETT, 2011), conforme a figura 18.

Equação de interseção (envelope de falha):

$$\frac{S_a}{S_f(N)} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \quad (168)$$

Fator de segurança n_f :

$$\frac{\sigma_a}{S_f(N)} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n_f} \quad (169)$$

$$\therefore n_f = \left(\frac{\sigma_a}{S_f(N)} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \right)^{-1}$$

A partir do método de von Mises, as componentes de tensão alternada e média podem ser obtidas a partir das componentes σ_{ij} do tensor tensão, facilitando o tratamento para a fadiga multiaxial simples (NORTON, 2013). As componentes são obtidas por:

$$2 \cdot \sigma_{mises_{a,m}}^2 = (\sigma_{11a,m} - \sigma_{22a,m})^2 + (\sigma_{22a,m} - \sigma_{33a,m})^2 + (\sigma_{33a,m} - \sigma_{11a,m})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12a,m}^2 + \sigma_{23a,m}^2 + \sigma_{31a,m}^2);$$

$$\sigma_{ij_a} = \frac{\sigma_{ij_{max}} - \sigma_{ij_{min}}}{2}; \quad \sigma_{ij_m} = \frac{\sigma_{ij_{max}} + \sigma_{ij_{min}}}{2}$$

Tendo em vista a dificuldade inerente à fadiga multiaxial centralizada na ciclagem, ao passo que ter-se-ia uma contagem separada para cada componente do tensor tensão, o presente trabalho considera, para a análise de falha por fadiga, o cálculo de fadiga uniaxial incorporado a partir da tensão equivalente de von Mises, que contabiliza as contribuições de todas as componentes do tensor tensão para a equivalência em energia de deformação. Sendo $\sigma_{mises_{max}}$ calculado a partir das componentes $\sigma_{ij_{max}}$ e $\sigma_{mises_{min}}$ a partir das componentes $\sigma_{ij_{min}}$, foi realizada a aproximação:

$$\sigma_{mises_a} \cong \frac{\sigma_{mises_{max}} - \sigma_{mises_{min}}}{2};$$

$$\sigma_{mises_m} \cong \frac{\sigma_{mises_{max}} + \sigma_{mises_{min}}}{2}$$
(171)

Em comparação ao equacionamento proveniente do método de von Mises para a fadiga multiaxial (NORTON, 2013), a aproximação realizada resultou em erros inferiores a 8% para a componente σ_{mises_a} e 3% para a componente σ_{mises_m} , considerando 500 pontos em estado de tensão biaxial e um intervalo de tensão de 0 a 300 MPa.

2.2.3.4.2. Diagrama S-N

O chamado diagrama S-N ou de Wöhler descreve a variação da resistência à fadiga com o número de ciclos até a falha, constituindo a resposta principal do ensaio de fadiga completamente alternado, isto é, com componentes de tensão média nulas. O diagrama evidencia a distinção entre os regimes de fadiga de baixo e alto ciclo, e ainda a vida finita e infinita, sendo ainda o diagrama que exibe o limite de resistência à fadiga em aços.

Para o regime de fadiga de alto ciclo, este diagrama pode ser estimado a partir da metodologia descrita por Budynas e Nisbett (2011), nomeada no presente trabalho, didaticamente, de método S-N. Neste método, a variação da resistência à fadiga com o número de ciclos é dada por:

$$S_f(N) = a \cdot N^b; \quad a = \frac{(f \cdot S_{ut})^2}{S_e}; \quad b = -\frac{1}{3} \cdot \log \left(\frac{f \cdot S_{ut}}{S_e} \right) \quad (172)$$

Em que f é a fração de resistência à fadiga que caracteriza $S_f(10^3) = f \cdot S_{ut}$, que pode ser obtida a partir do fator σ'_F proveniente da equação tensão-deformação real.

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}} \cdot (2 \cdot 10^3)^b \quad (173)$$

S_e é o limite de resistência à fadiga, que para aços com $S_{ut} < 1400$ MPa pode ser estimado por $S_e = 0,5 \cdot S_{ut}$ (NORTON, 2013). O fator σ'_F , por sua vez, pode ser aproximado, segundo a SAE, para aços com dureza Brinell $H_B \leq 500$, por $\sigma'_F = S_{ut} + 345$, em MPa (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

Os fatores $b = b(f)$ e $f = f(b)$ são determinados de forma iterativa, para satisfação de ambas as equações. Com um carregamento completamente alternado cuja componente alternada é dada por σ_{rev} , o número de ciclos até a falha é dado por:

$$N = \left(\frac{\sigma_{rev}}{a} \right)^{1/b} \quad (174)$$

2.2.3.5. Teorias de acúmulo de dano e ciclagem

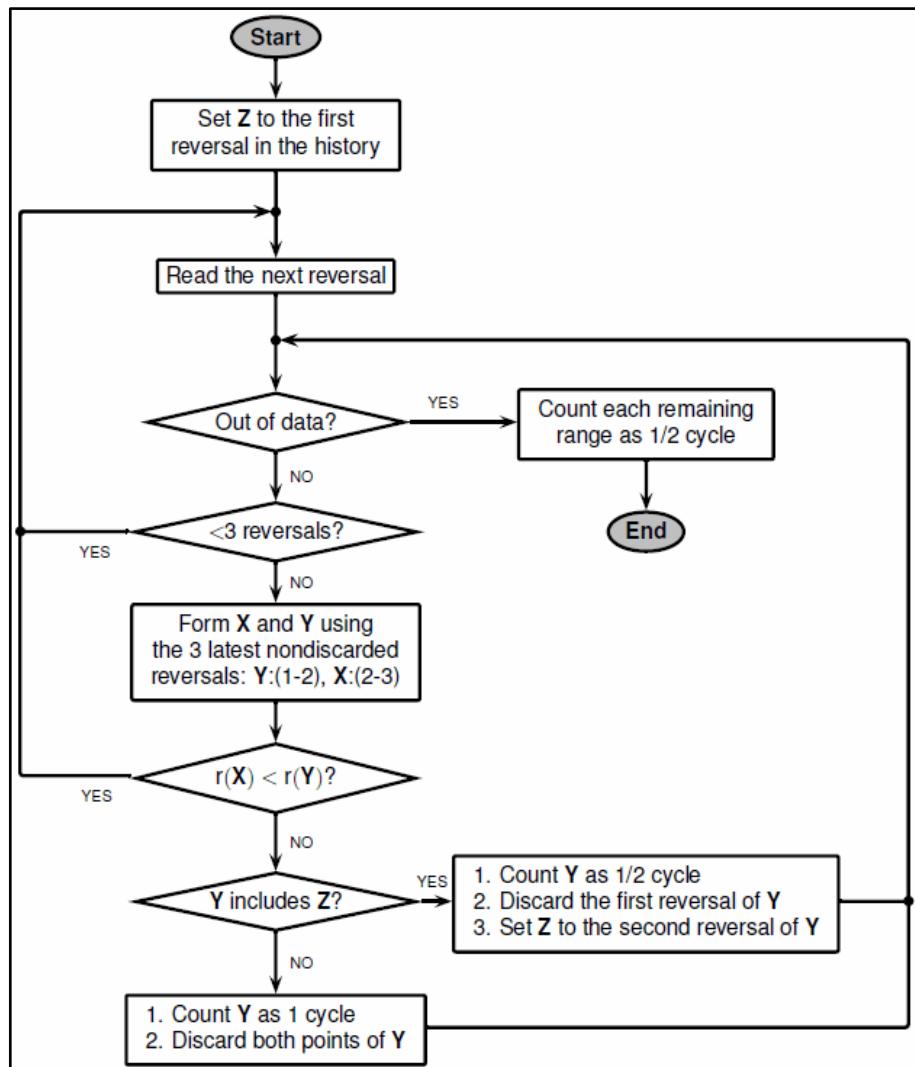
Conforme Castro e Meggiolaro (2009), o conceito de dano aplica-se a perda parcial de funcionalidade, seja ela dada a partir de qualquer mecanismo de falha. O dano por fadiga pode ser contabilizado a partir da variável D , com $0 \leq D \leq 1$, de modo que uma estrutura virgem, sem dano, apresenta $D = 0$ e a falha terminal se dá com $D = 1$. Tem-se que o dano por fadiga é cumulativo e irreversível (ao contrário de outros tipos de dano, como o por encruamento).

De um modo geral, o carregamento de fadiga proveniente de sistemas reais é complexo e possui amplitude variável. Nestes carregamentos complexos, o dano por fadiga é contabilizado a partir de cada variação da amplitude que, por sua vez, é descrita a partir dos picos e vales do carregamento.

Tem-se que esta contabilização, também nomeada de ciclagem, é efetuada a partir de um método de contagem, que, em suma, decompõe um carregamento complexo em um conjunto de vários blocos ou eventos, cada um caracterizado por uma tensão alternada σ_{a_i} , média σ_{m_i} e um número de ciclos que o bloco atuou n_i .

O método de contagem utilizado é, em geral, o método *rain-flow*, em detrimento de variados outros métodos cujas limitações desfavorecem o seu uso (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009). Este método apresenta ainda diferentes variações, de modo que uma padronização se faz necessária. Neste contexto, o presente trabalho utiliza o método de contagem *rain-flow* conforme o algoritmo padronizado pela norma ASTM E1049, exibido na figura 21.

Figura 21 - Algoritmo de contagem de ciclos a partir do método *rainflow* padronizado pela ASTM E1049.



Fonte: (MATHWORKS, 2022)

A partir de um carregamento de amplitude variável, cada bloco i ocasiona dano D_i , que é dado pela razão entre o número de ciclos em que o referido bloco atuou n_i e o número de ciclos até a falha caso apenas aquele bloco atuasse N_i :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (175)$$

Considerando os blocos de carga independentes, a regra de acúmulo linear de dano, também nomeada regra de Palmgren-Miner, define a falha por fadiga quando $D = 1$, com:

$$D = \sum D_i \quad (176)$$

Deste modo, tem-se a falha quando, a partir da contabilização de todos os blocos: $D = \sum \frac{n_i}{N_i} = 1$. Ou ainda, se os blocos pertencem a um evento de carga tal, este pode ser repetido por N_{evento} ciclos até a falha:

$$D = N_{evento} \cdot \sum \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (177)$$

$$\therefore N_{evento} = \left(\sum \frac{n_i}{N_i} \right)^{-1}$$

No presente trabalho, o bloco i é caracterizado pelas componentes de tensão $\sigma_{mises_{a_i}}$ e $\sigma_{mises_{m_i}}$.

2.2.3.6. Determinação da vida em fadiga

Vê-se que o acúmulo de dano leva em consideração, para um bloco i , o número de ciclos até a falha caso apenas aquele bloco atuasse, N_i . Neste trabalho, este número de ciclos é obtido a partir da teoria de falha por fadiga de Goodman modificada acoplada ao método SN , a partir da chamada componente alternada equivalente σ_{equiv_i} (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

Esta componente se propõe a substituir as componentes alternada e média em um bloco i , possibilitando o cálculo de N_i a partir do método SN por:

$$N_i = \left(\frac{\sigma_{equiv_i}}{a} \right)^{1/b} \quad (178)$$

A componente alternada equivalente é obtida a partir da substituição de $S_f(N)$ por σ_{equiv_i} na equação (168), resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{mises_{a_i}}}{\sigma_{equiv_i}} + \frac{\sigma_{mises_{m_i}}}{S_{ut}} &= 1 \\ \therefore \sigma_{equiv_i} &= \frac{\sigma_{mises_{a_i}}}{\left(1 - \frac{\sigma_{mises_{m_i}}}{S_{ut}} \right)} \end{aligned} \quad (179)$$

Vê-se que, conforme o posto, σ_{equiv} associa-se diretamente à teoria de falha por fadiga selecionada.

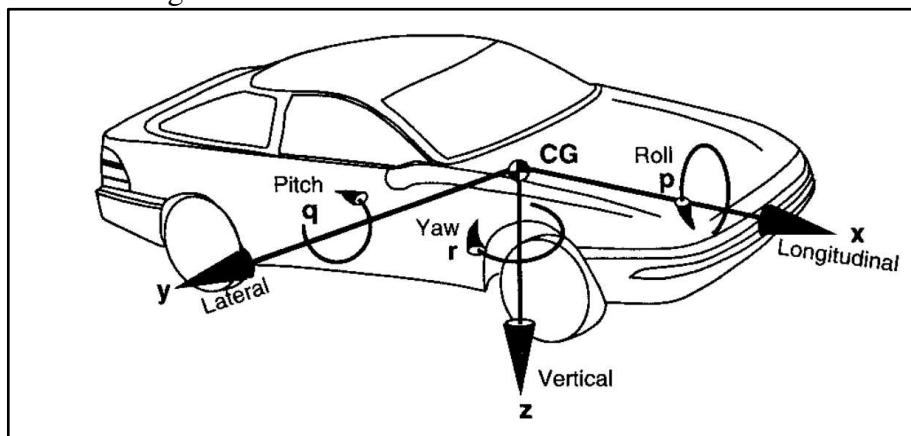
2.3.Mecânica veicular e o protótipo SB-20

2.3.1. Modelos dinâmicos veiculares

De modo geral, o veículo é um sistema de vários GDL cuja resposta dinâmica pode ser obtida a partir de variados tipos de modelos de vibração, a partir de soluções analíticas ou numéricas. A partir destes métodos, podem ser obtidas as equações de movimento e os modos e frequências naturais de vibração, dentre outras quantidades, como as de interesse para a análise estrutural, descritas nos tópicos anteriores.

Desde já, faz-se necessário o entendimento acerca da nomenclatura para os graus de liberdade de interesse, conforme o sistema de coordenadas da SAE (figura 22):

Figura 22 - Sistema de coordenadas veicular SAE.



Fonte: (GILLESPIE, 1992).

Os modelos de vibração para veículos podem ser, em síntese, do tipo (GILLESPIE, 1992; JAZAR, 2008):

1. 1 GDL (sistema massa-mola-amortecedor com deslocamento vertical *bounce*);
2. 2 GDL (modelo *quarter-car* no qual tem-se uma separação entre as massas suspensa e não suspensa);
3. 3 GDL (modelo *quarter-car* com o piloto constituindo um G.D.L. adicional);
4. 4 GDL (modelo *bicycle* que introduz o grau de liberdade *pitch*);
5. 4 GDL (modelo *half-car* que introduz o grau de liberdade *roll*);
6. 7 GDL (modelo *full car* que considera quatro deslocamentos verticais associados às massas não suspensas, um deslocamento vertical associado à massa suspensa (*bounce*) e os deslocamentos angulares de *pitch* e *roll*).

O presente trabalho utiliza de um modelo multicorpo concebido a partir do MEF em configuração do tipo four-post. A partir da discretização a partir do MEF, tem-se uma

quantidade de graus de liberdade drasticamente superior (sob custo computacional consonante), permitindo em adição aos GDL característicos que descrevem o movimento do veículo, variadas outras quantidades, como uma plotagem do campo de tensão, deformação e deslocamento que inclui todos os GDL do modelo. De modo geral, a modelagem a partir do MEF permite o acoplamento entre a análise estrutural e a resposta dinâmica do veículo.

Sob a perspectiva das vibrações mecânicas, o sistema em análise constitui-se como um de vários GDL subamortecido e submetido a vibrações forçadas por deslocamentos impostos na base.

2.3.2. Sistemas do protótipo SB-20

O protótipo SB-20, também nomeado Dragão do Mar, é um veículo *off-road* monoposto e compacto, cujas premissas de projeto associam-se a segurança, manobrabilidade, capacidade trativa, velocidade e robustez. Tendo em vista que o presente trabalho se destina a construção de um modelo computacional do SB-20, justifica-se uma descrição geral acerca dos sistemas e características que o compõem.

O chassi, componente de principal interesse para o presente trabalho, é concebido a partir de perfis tubulares em aço SAE 1020, constituindo uma estrutura reticular subdividida em porção dianteira (*cockpit*) e porção traseira.

O sistema de direção e suspensão governa as dinâmicas vertical e lateral, fundamentais para o conforto e dirigibilidade do veículo. Este sistema utiliza de um mecanismo de esterçamento dianteiro integralmente mecânico do tipo pinhão-cremalheira e contém variados componentes estruturais de interesse para o cálculo estrutural do protótipo. As geometrias de suspensão são do tipo duplo A na porção dianteira e *Swing Axle* na traseira.

O sistema de propulsão e transmissão, nomeado *Powertrain*, trata acerca do fluxo de potência no veículo, incidindo de forma direta na dinâmica longitudinal. O sistema é composto por um motor monocilíndrico ciclo Otto 4 tempos de 20 HP, uma transmissão continuamente variável (CVT) e uma caixa de redução com razão fixa a partir de um trem de engrenagens cilíndricas.

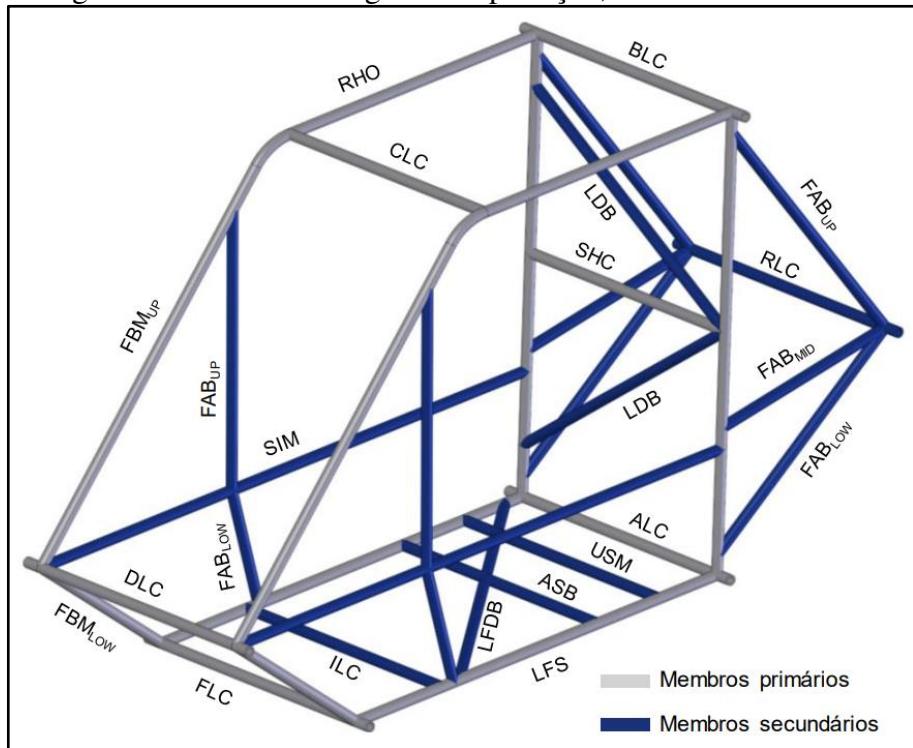
Também atuante na dinâmica longitudinal, o sistema de frenagem é do tipo hidráulico, governado por cilindro duplo que atua em uma pinça de freio em cada roda da porção dianteira e em uma única responsável pela frenagem do eixo traseiro.

A eletrônica atua em todos os demais sistemas a partir de componentes essenciais, responsáveis pelo monitoramento do veículo em operação a partir dos sensores de temperatura (temperatura do fluido de freio e do motor), capacitivo (nível de combustível) e indutivo (velocidades angulares), e a partir dos funcionais, dedicados ao desenvolvimento de projetos futuros e à análise de falhas, a partir dos sensores acelerômetros e do módulo de posicionamento global (GPS).

2.3.3. Chassi do protótipo SB-20

O chassi é composto por membros primários e secundários, definidos e nomeados pelo Regulamento Técnico e Administrativo Baja SAE Brasil (RATSB), conforme a figura a 23.

Figura 23 - Membros da gaiola de proteção, conforme o RATSB.



Fonte: (SAE BRASIL, 2022).

O material dos membros é dado a partir de exigências acerca das dimensões da seção transversal e de valores de rigidez e resistência à flexão mínimos, conforme metodologia descrita no RATSB. No protótipo SB-20, os membros são concebidos em aço AISI/SAE 1020 e unidos a partir de juntas soldadas.

2.3.4. Condições de operação do SB-20

O protótipo SB-20 pode ter suas condições de operação sintetizadas a partir de dois períodos-base: o período de testes pré-competição e a competição Baja SAE.

A competição inclui os chamados eventos dinâmicos, que se dividem nas provas aceleração, retomada, tração, super prime, suspensão e manobrabilidade, e o enduro de resistência, evento de maior importância para a classificação geral na competição. No enduro de resistência, os veículos devem completar voltas em uma pista de terreno irregular, *off-road*, com diversos obstáculos e em qualquer condição climática, por um período de 4 horas.

Em adição a validações estáticas, o período de testes inclui operações em condições similares à competição, em especial a partir de condições similares às do enduro de resistência, que se caracterizam como condições de maior requisição do protótipo.

Para a análise estrutural, as condições de operação implicam nos esforços externos aplicados sob a forma de deslocamentos impostos, sendo estas condições sintetizadas a partir de um perfil de operação simplificado, definido em tópico posterior. Este perfil de operação simplificado se propõe a representar as condições de serviço do protótipo, implicando diretamente na análise estrutural do veículo, alvo do presente trabalho.

2.3.5. *Solicitações atuantes no chassis*

Conforme Brown, Robertson e Serpento (2002), as cargas impostas aos veículos em operação podem ser classificadas conforme dois tipos: sobrecarga instantânea e carga de fadiga. A primeira é, no tempo de serviço, associada a um menor número de repetições que a segunda, enquanto sua magnitude é mais elevada.

No projeto automotivo, os critérios de aprovação para análises estruturais associadas aos dois tipos de carga são diferentes: para a sobrecarga, tem-se limites de deformação plástica e limites associados à manutenção de função, enquanto para a carga de fadiga tem-se número de ciclos até iniciação de uma trinca, limitação da propagação da trinca e manutenção de função. Em relação aos dois tipos de carga, tem-se também uma diferenciação acerca da fonte, isto é, dos obstáculos da via ou eventos que as causam.

Ainda segundo os autores, as cargas impostas podem ser classificadas por casos de carregamento globais, conforme as coordenadas exibidas na figura 22. A tabela 11 exibe estes casos, os obstáculos e/ou eventos associados e amplificações dinâmicas utilizadas.

Tabela 11 - Casos de carregamento típicos.

Caso de carregamento	Obstáculo/evento	Fator dinâmico	Informações adicionais
----------------------	------------------	----------------	------------------------

Flexão (vertical simétrico)	“Encontro” simultâneo (simétrico) de ambas as rodas de um eixo sob um obstáculo em ressalto.	Comumente utilizado: 3; Para veículos <i>off-road</i> pode chegar a 6.	Tem-se flexão no eixo Y.
Torção (vertical assimétrico)	“Encontro” não simultâneo (assimétrico) de ambas as rodas de um eixo sob um obstáculo em ressalto.	Comumente utilizado: 1,3; Para veículos <i>off-road</i> : 1,8.	Tem-se simultaneamente flexão no eixo Y e torção no eixo X; É um caso mais crítico para o projeto do chassi pois a rigidez à torção é menor que a rigidez à flexão, de modo que a solicitação torcional ocasiona maiores deslocamentos, deformações e tensões.
Cargas longitudinais (<i>fore and aft loads</i>)	<i>Clutch-drop</i> , Frenagem, obstáculo em ressalto.	A depender do obstáculo/evento.	Para o protótipo Baja SAE, considera-se que as cargas provenientes destes casos são significativas enquanto ainda provenientes de obstáculos na via, conforme o perfil de operação do veículo.
Cargas laterais	Condições associadas a manobrabilidade: <i>cornering</i> , <i>overturning</i> , distribuição de carga em curva, obstáculo em ressalto.		

Fonte: Autor.

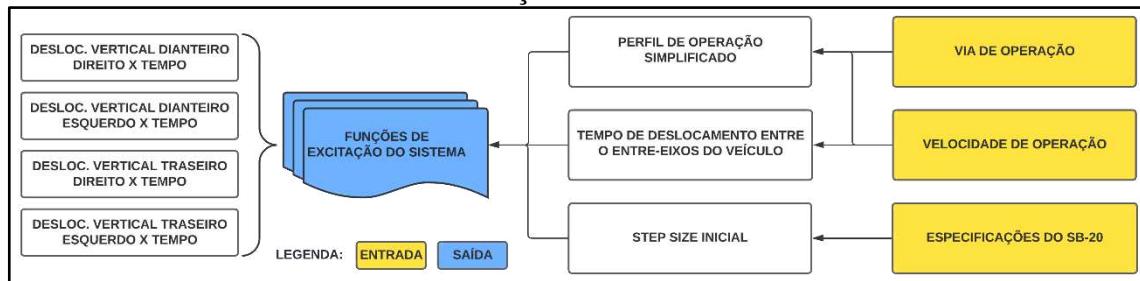
No presente trabalho, conforme as condições de operação associadas ao protótipo SB-20, o perfil de operação simplificado, a ser desenvolvido a seguir, considera os casos de carregamento de flexão e torção, que se traduzem nas cargas atuantes no chassi de maior magnitude.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1. Construção das funções de excitação do sistema

O fluxograma a seguir (figura 24) evidencia os itens relevantes, de forma geral, para a construção das funções de excitação do sistema, tratados nos subtópicos posteriores.

Figura 24 - Fluxograma que destaca os parâmetros associados à construção das funções de excitação do sistema.



Fonte: Autor.

3.1.1. Síntese do perfil de operação simplificado

De um modo geral, a análise estrutural de um componente ou de uma estrutura é pautada em suas condições de serviço, o que, em uma análise computacional como a do presente trabalho, incide diretamente nas condições de contorno do modelo mecânico.

O presente trabalho utiliza de um perfil de operação simplificado, baseado no perfil de operação real de um protótipo do tipo Baja SAE, sendo caracterizado a partir de dois aspectos simplificadores: via de operação retilínea com obstáculos geometricamente simples e velocidade de operação constante.

3.1.2. Concepção da via de operação

A via de operação foi concebida a partir do circuito da competição “2019 – Baja SAE BRASIL – Etapa Nordeste”, organizado para o evento “Enduro de Resistência”, formado por diversos obstáculos em configurações compatíveis com o RATS.

Dentre os obstáculos do circuito de referência, foram selecionados três para a composição primária da via de operação do veículo, os quais: “Vala”, “Tronco” e o “Degrau 90°”, também nomeado “Rampa”.

Esta seleção foi tomada por inspeção, a partir da seguinte consideração de projeto: os obstáculos selecionados configuram-se como os mais influentes para a contabilização do dano acumulado, isto é, os demais obstáculos representam baixo incremento ao dano acumulado

total, ao passo que representam dificuldade majoritariamente associada à manobrabilidade, e não à resistência estrutural do veículo.

A geometria dos obstáculos selecionados do circuito de referência foi simplificada e esboçada a partir da realização de análises de fotogrametria em imagens da competição 2019, exibidas a seguir (figuras 25, 26 e 27).

Figura 25 - Obstáculo “Vala” na competição regional Baja SAE 2019.



Fonte: Autor.

Figura 26 - Obstáculo “Rampa” na competição regional Baja SAE 2019.



Fonte: Autor.

Figura 27 - Obstáculo “Tronco” na competição regional Baja SAE 2019.

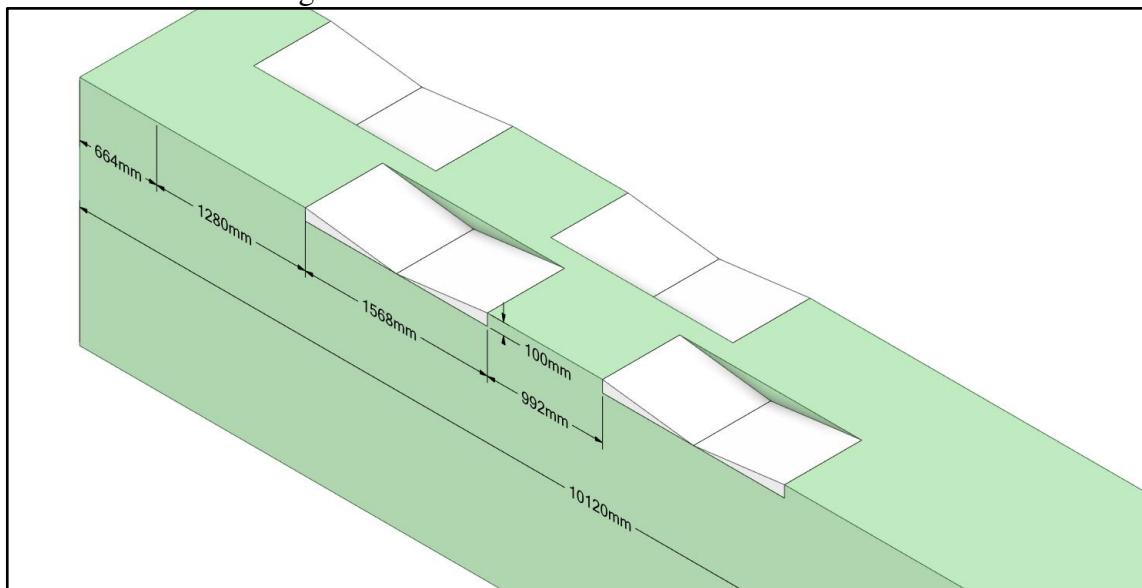


Fonte: Autor.

Considerando ainda que o modelo computacional é geometricamente linear, os obstáculos da via de operação tiveram o seu tamanho diminuído em relação aos da competição Baja SAE, tendo como objetivo a manutenção da representatividade do modelo, em termos de sua rigidez. A partir disso, foi utilizado o software CAD SpaceClaim, acoplado ao pacote comercial ANSYS, para uma visualização preliminar dos obstáculos simplificados.

O obstáculo “Vala”, comumente associado aos casos de carregamento combinado de torção e flexão, foi concebido a partir das seguintes dimensões (figura 28).

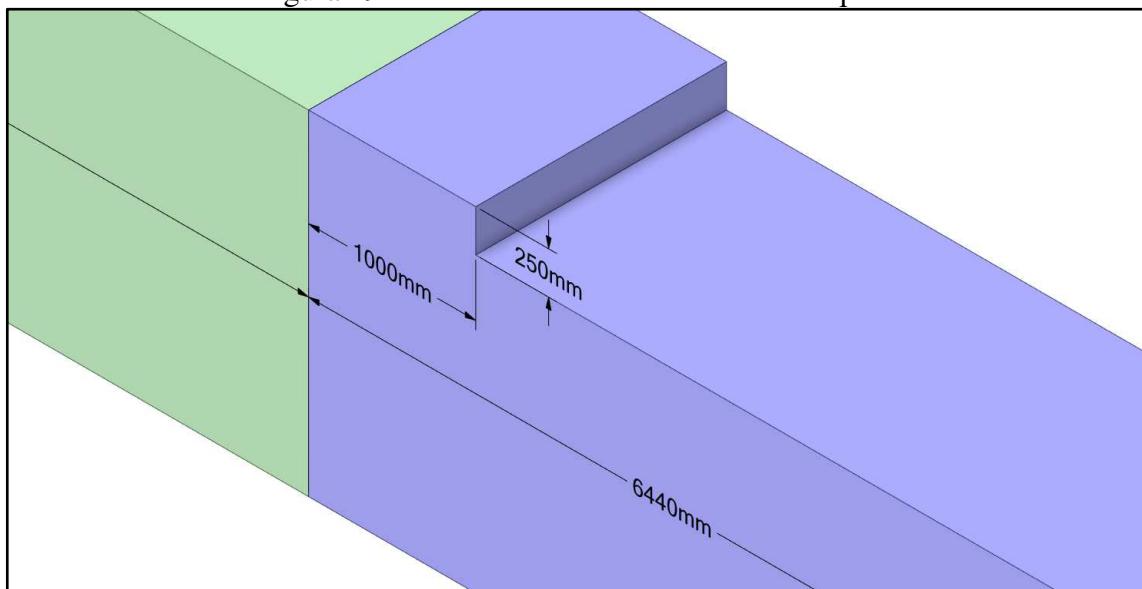
Figura 28 - Detalhamento do obstáculo “Vala”.



Fonte: Autor.

O obstáculo “Rampa”, associado ao caso de carregamento de flexão, foi considerado a partir da seguinte geometria (figura 29).

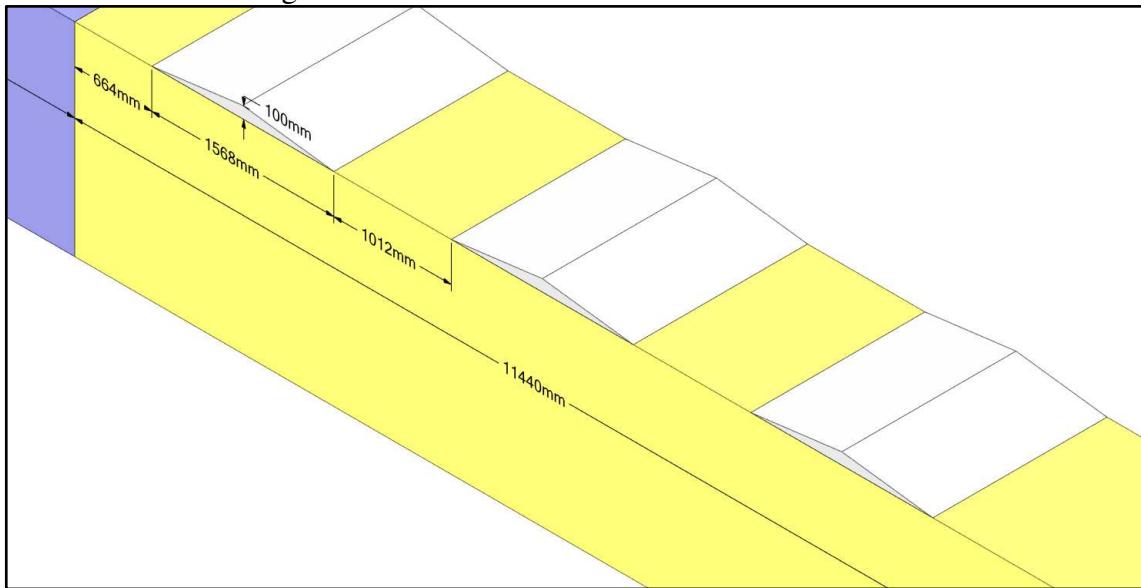
Figura 29 - Detalhamento do obstáculo “Rampa”.



Fonte: Autor.

Por fim, o obstáculo “Tronco”, também associado ao caso de carregamento de flexão, foi modelado a partir das dimensões a seguir (figura 30).

Figura 30 - Detalhamento do obstáculo “Tronco”.



Fonte: Autor.

Em relação à ordem dos obstáculos na via de operação, foi seguido o padrão do circuito de referência, embora o método de acúmulo de dano de Palmgren-Miner desconsidere a ordenação das solicitações.

Adicionalmente, como parte dos obstáculos, foram consideradas regiões de deslocamento horizontal com deslocamento vertical nulo, destinadas à atenuação das oscilações, condição compatível com o circuito de referência e que possibilita “independência dinâmica” entre os obstáculos da via de operação, ao passo que, após cada obstáculo, o veículo retorna à resposta permanente de deflexão estática.

Deste modo, a análise estrutural transiente pôde ser dividida em três, uma para cada obstáculo, possibilitando maior controle dos recursos computacionais, conforme especificado em subtópico posterior.

O comprimento dessas regiões, em conjunto ao comprimento total da via de operação retilínea, foi estabelecido a partir da velocidade de operação e dos comprimentos estabelecidos para os obstáculos, considerando uma duração de evento total de 5 segundos, tendo em vista limitações computacionais provenientes do conjunto “*step size – end time*”, isto é, da quantidade total de incrementos, que incide no tamanho de armazenamento da solução e no tempo de solução.

3.1.3. Concepção da velocidade de operação

O protótipo SB-20 apresenta velocidade máxima de projeto de aproximadamente 50 km/h, porém, na competição Baja SAE, esta velocidade é dificilmente mantida no Enduro de Resistência, em função dos obstáculos e dos requisitos de manobrabilidade do circuito.

Deste modo, a velocidade, neste evento da competição, é altamente variável, sendo estratégia dos pilotos a velocidade apropriada para a transposição de cada obstáculo, bem como para a execução das curvas.

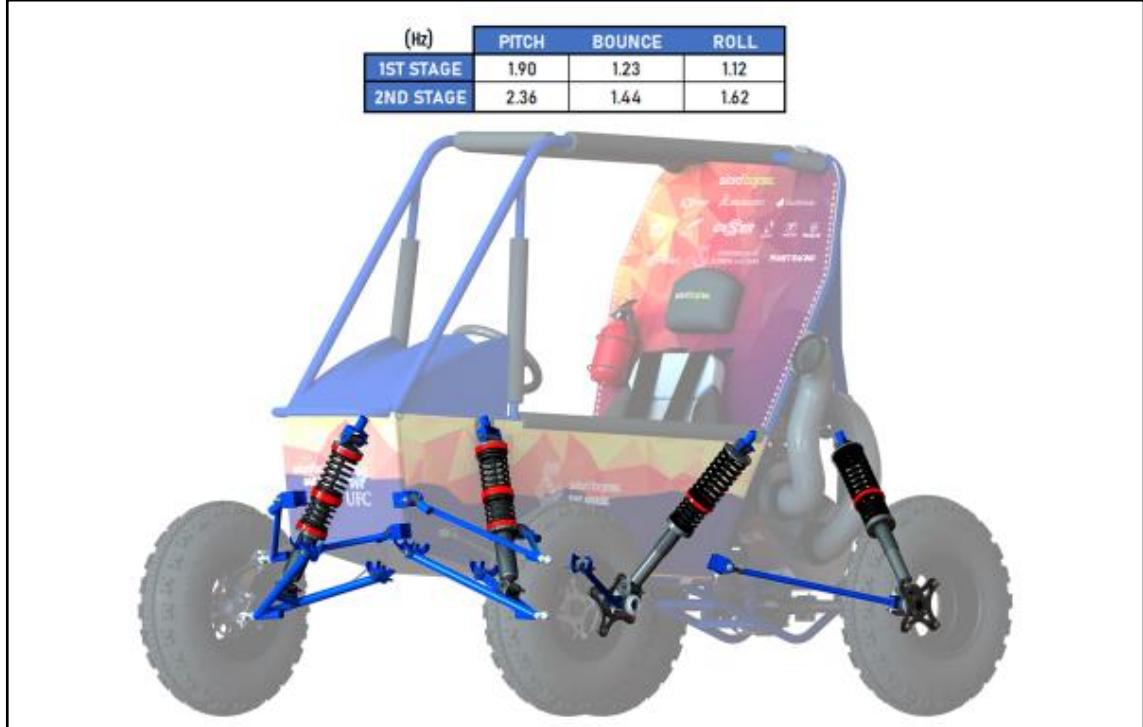
Sendo o Enduro um evento de resistência no qual a pontuação é dada pelo número de voltas no circuito, a velocidade é parâmetro chave para o *trade-off* entre a requisição estrutural do veículo e a distância percorrida durante o tempo de prova.

A velocidade de operação do veículo SB-20, utilizada no presente trabalho, foi concebida a partir da velocidade média do protótipo SB-19 “Volcano” em testes de campo e na competição Nordeste 2019, com valor de 5,6 m/s, aproximadamente 20 km/h. Esta velocidade pode ser considerada alta para os padrões de pista das competições regionais Baja SAE.

3.1.4. Funções de excitação do sistema

As funções de excitação foram esboçadas em formato tabular no software Microsoft Excel a partir de um *step size* inicial, tomado a partir da recomendação de Ansys (2022), considerando a frequência f_u como a maior dentre as frequências de movimento de *pitch*, *bounce* e *roll* do veículo (modos essenciais para a resposta dinâmica deste), dentre, ainda, o primeiro e segundo estágio de rigidez, em vista da utilização de molas associadas em série (figura 31).

Figura 31 - Frequências de *pitch*, *bounce* e *roll* do protótipo SB-20, considerando o primeiro e segundo estágio de suspensão.



Fonte: Autor.

A partir da tomada do maior valor dentre as frequências destacadas, tem-se um menor valor para o *step size* inicial, tomado por $\Delta t = \frac{1}{20.f_u}$. A partir de dificuldades de convergência ou de aspectos associados à análise de pós-processamento, abordada posteriormente, tem-se a possibilidade de refinamento, a partir da adoção de um incremento de tempo menor.

Deste modo, o *step size* inicial obtido foi o seguinte, conforme a tabela 12:

Tabela 12 - Cálculo do *step size* inicial.

Frequência de referência - f_u (hz)	2,36
Step size inicial - Δt (s)	0,02

Fonte: Autor.

Inicialmente, foi tomada a construção dos vetores de perfil da pista: perfil horizontal X_P (mm), perfil vertical da porção direita Y_{P_D} (mm) e perfil vertical da porção esquerda Y_{P_E} (mm), conforme o vetor de tempo t (s) e as seguintes condições iniciais, com o auxílio do vetor índice, i :

$$X_{i=0} = 0; \quad t_{i=0} = 0 \quad (180)$$

Considera-se o sistema de coordenadas com origem no ponto de início da via de operação, com deslocamento horizontal positivo no sentido da velocidade do veículo e

deslocamento vertical positivo para cima, de tal modo que o sistema de coordenadas na análise estrutural transiente é compatível.

A partir da velocidade de operação do veículo V , tem-se, em um incremento i :

$$X_{P_{i+1}} = X_{P_i} + V \cdot \Delta t; \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t; \quad i = 0, 1, 2 \dots n \quad (181)$$

Para as funções de excitação, foi utilizada ainda a seguinte nomenclatura:

1. Y_{FD} : Deslocamento vertical do pneu frontal direito (mm);
2. Y_{FE} : Deslocamento vertical do pneu frontal esquerdo (mm);
3. Y_{TD} : Deslocamento vertical do pneu traseiro direito (mm);
4. Y_{TE} : Deslocamento vertical do pneu traseiro esquerdo (mm).

Com a obtenção de Y_{FD} e Y_{FE} , os deslocamentos Y_{TD} e Y_{TE} são obtidos a partir da velocidade de operação do veículo V em conjunto à medida entre eixos w , conforme o equacionamento a seguir, em conformidade à tabela 13:

$$Y_{TD}(t_i + t_w) = Y_{FD}(t_i) \quad (182)$$

$$Y_{TE}(t_i + t_w) = Y_{FE}(t_i) \quad (183)$$

$$t_w = \frac{w}{V} \quad (184)$$

Tabela 13 - Cálculo do tempo de deslocamento entre os eixos.

Entre eixos - w (mm)	1420,00
Velocidade de operação - V (m/s)	5,60
Tempo de deslocamento entre os eixos - t_w (s) (aproximado como múltiplo de Δt)	0,24

Fonte: Autor.

Ao passo que o tempo é discretizado a partir dos incrementos Δt , o espaço também o é, de modo que a correspondência dos deslocamentos $X_P(t_i)$ com os da via de operação modelada foi tomada de forma aproximada, a partir de incrementos de deslocamento ΔX_P , de magnitude 112 mm, conforme a tabela 14.

Tabela 14 - Cálculo do número de incrementos de tempo.

Deslocamento final - X_n (mm)	28000,00
Instante de tempo final - t_n (s)	5,00
Número de incrementos - n (-)	250

Fonte: Autor.

Para o obstáculo “Vala”, os vetores Y_{FD} e Y_{FE} foram obtidos diretamente, considerando-se que os deslocamentos dos pneus seguem exatamente os perfis da pista. Nos equacionamentos a seguir, para cada obstáculo, os instantes limites t_0 e t_n foram atualizados conforme o obstáculo em discussão.

$$Y_{FD}(t_i) = Y_{P_D}(t_i); t_0 \leq t_i \leq t_n \quad (185)$$

$$Y_{FE}(t_i) = Y_{P_E}(t_i); t_0 \leq t_i \leq t_n \quad (186)$$

Para o obstáculo “Rampa”, esta mesma consideração não foi possível, tendo em vista a descontinuidade característica deste obstáculo, que ocasionaria uma aceleração de magnitude elevada e que não seria representativa, tendo em vista que ocorre o “descolamento” dos pneus durante a passagem neste obstáculo. Com isto, calculou-se o tempo de queda $t_q = \sqrt{2.H/g}$, de modo que, para este obstáculo:

$$Y_{FD}(t_i) = Y_{P_D}(t_i) = 0; t_0 \leq t_i < t_r \quad (187)$$

$$Y_{FE}(t_i) = Y_{P_E}(t_i) = 0; t_0 \leq t_i < t_r \quad (188)$$

$$Y_{FD}(t_r) = 0 \quad (189)$$

$$Y_{FE}(t_r) = 0 \quad (190)$$

$$Y_{FD}(t_r + t_q) = -250 \quad (191)$$

$$Y_{FE}(t_r + t_q) = -250 \quad (192)$$

$$Y_{FD}(t_i) = Y_{P_D}(t_i) = -250; t_r + t_q < t_i \leq t_n \quad (193)$$

$$Y_{FE}(t_i) = Y_{P_E}(t_i) = -250; t_r + t_q < t_i \leq t_n \quad (194)$$

Em que t_r é o instante de tempo em que se tem o desnível do obstáculo “Rampa”. Com isso, os deslocamentos entre os instantes t_r e $t_r + t_q$ foram interpolados linearmente. Foram obtidos os resultados da tabela 15:

Tabela 15 - Cálculo do tempo de queda e do número de incrementos de tempo associado.

Altura da rampa – H (m)	
	0,25

Aceleração da gravidade – g (m/s²)	9,81
Tempo de queda - t_q (s)	0,23
Número de incrementos dos instantes de tempo t_r ao $t_r + t_q - n_r$ (-)	12

Fonte: Autor.

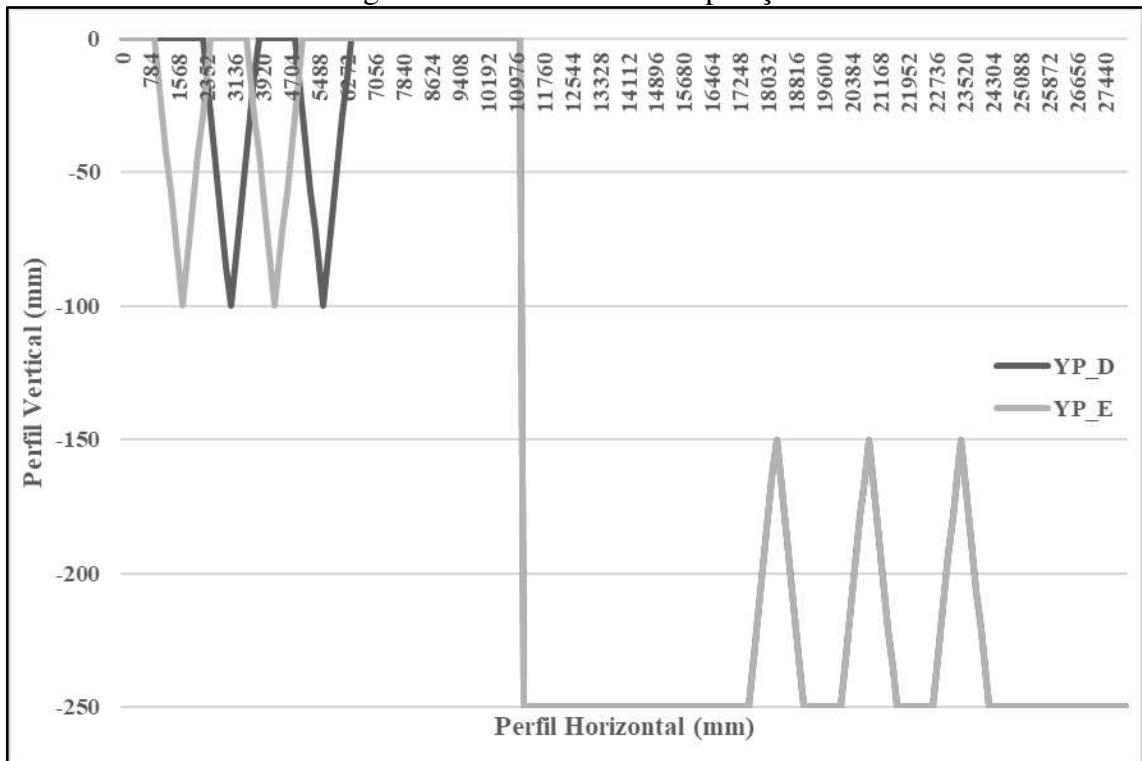
Por fim, para o obstáculo “Tronco”, foi novamente tomada a consideração de que os deslocamentos dos pneus seguem perfeitamente os perfis da pista, conforme feito no obstáculo “Vala”. Em adição, foi necessário, apenas, o deslocamento do sistema de coordenadas de referência em +250 no eixo vertical, ao passo que o obstáculo “Rampa” finalizou com $Y_{P_D}(t_i) = Y_{P_E}(t_i) = -250$. Isto é feito para que o deslocamento vertical seja, novamente, “zerado”, tendo em vista que as funções serão aplicadas em análises individuais. Desta forma, tem-se:

$$Y_{FD}(t_i) = Y_{P_D}(t_i) + 250; \quad t_0 \leq t_i \leq t_n \quad (195)$$

$$Y_{FE}(t_i) = Y_{P_E}(t_i) + 250; \quad t_0 \leq t_i \leq t_n \quad (196)$$

O perfil da pista pode ser visualizado a seguir (figura 32), a partir do diagrama X_P versus Y_{P_D} e Y_{P_E} . As funções de excitação $Y(t)$ foram dispostas graficamente no tópico de Análise Estrutural Transiente, enquanto os dados tabulares podem ser visualizados no anexo A.

Figura 32 - Perfil da via de operação.

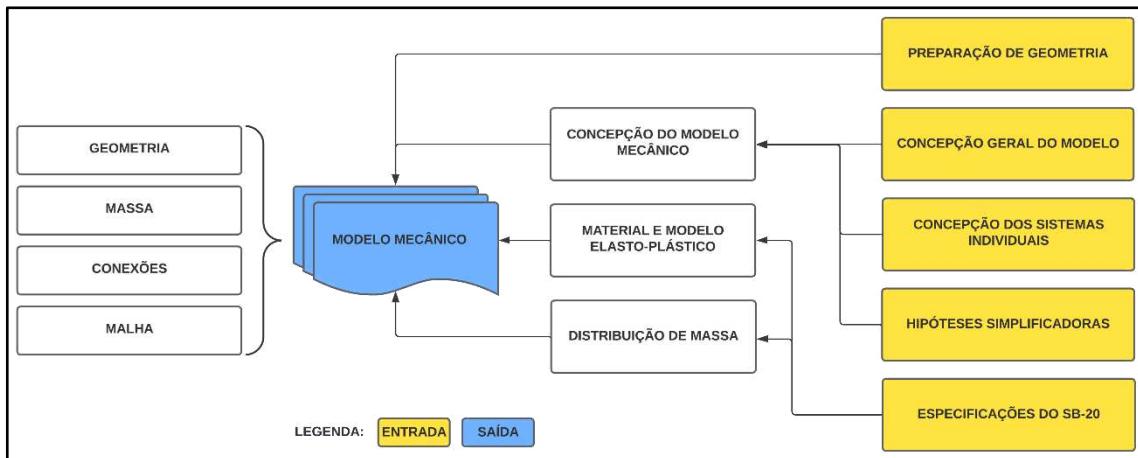


Fonte: Autor.

3.2.Construção do modelo mecânico de elementos finitos

A construção do modelo de elementos finitos foi pautada nos seguintes aspectos, expostos no fluxograma a seguir (figura 33).

Figura 33 - Fluxograma que destaca os parâmetros associados à construção do modelo mecânico de elementos finitos.



Fonte: Autor.

3.2.1. *Concepção do modelo mecânico e hipóteses simplificadoras*

3.2.1.1.*Concepção geral do modelo*

A construção do modelo mecânico norteia-se a partir de uma concepção pautada em sistemas experimentais do tipo *tire-coupled* e *four-post*, em que se tem, em síntese, quatro bases excitadoras acopladas aos pneus do veículo. Este tipo de sistema destaca-se, em relação a outros como o do tipo *spindle-coupled*, por, principalmente, fornecer maior representatividade na transmissão dos esforços, tendo em vista a atuação dos pneus e de suas angulações de roda nesta transmissão. Estes sistemas podem ser visualizados na figura 34.

Figura 34 - Sistemas *tire-coupled* e *spindle-coupled*.



Fonte: (MTS AUTOMOTIVE, 2022).

3.2.1.2.Hipóteses simplificadoras

As hipóteses simplificadoras foram estabelecidas para reduzir a complexidade do modelo computacional e garantir o cumprimento dos objetivos estabelecidos no escopo deste trabalho, face à possíveis limitações computacionais e de representatividade do modelo. Deste modo, estas foram apresentadas a seguir:

1. Sistema *four-post* concebido como do tipo *Tire-Coupled*, no qual tem-se a ligação dos pneus às bases excitadoras;
2. Modelo mecânico elaborado a partir da montagem geral do protótipo SB-20, a partir do mantimento dos componentes considerados estruturais, que efetivamente participam da transmissão de esforços para o chassi;
3. Consideração dos pneus a partir de uma geometria simplificada, unicamente direcionada à representação das angulações de roda e, desta forma, maior representatividade na transmissão de esforços aos demais componentes, de modo que se desconsidera a rigidez dos pneus;
4. Desconsideram-se os efeitos locais associados ao contato friccional do pneu com o solo, como a possibilidade de resistências ao escorregamento lateral e longitudinal, de modo que, a partir de juntas cinemáticas, os pneus comportam-se como sem atrito, em relação às bases excitadoras;
5. Desconsidera-se a possibilidade de descolamento do pneu em relação ao solo, bem como a possibilidade de penetração no solo;
6. A partir do comportamento sem atrito supracitado dos pneus em relação às bases, tem-se a existência de modos de corpo rígido de deslocamento longitudinal e lateral. Com isso, consideram-se molas fracas que conectam o chassi ao chão. Estas molas, mesmo em rigidez diminuta, permitem a exclusão destes modos de corpo rígido, permitindo verificações estáticas;
7. Ligações entre componentes diversos a partir do uso predominante de juntas cinemáticas e do compartilhamento de topologia, excluindo o uso de contatos;
8. Consideração da massa e da sua distribuição a partir, unicamente, da adição de elementos de massa, sendo o material de análise modelado com densidade nula.

3.2.1.3.Concepção dos sistemas individuais

A concepção dos sistemas individuais faz-se necessária ao passo que, na etapa de preparação de geometria, a exclusão de componentes desnecessários, a simplificação

geométrica de componentes de topologia complexa e a realização de outras atividades demandam a percepção preliminar da modelagem computacional destes sistemas, acarretando decisões iniciais como a utilização de juntas cinemáticas, contatos, compartilhamento de topologia, dentre outras. Esta concepção se dá em conformidade com as hipóteses simplificadoras supracitadas.

Ressalta-se, desde já, que as exclusões destacadas na concepção dos sistemas dizem respeito à consideração do corpo associado no modelo discretizado, embora ainda representado em rigidez a partir de juntas cinemáticas e em massa, como será tratado em subtópicos posteriores.

1. Bases excitadoras: serão modeladas a partir de corpos de superfície em formato retangular, com posicionamento compatível conforme o posicionamento dos pneus do protótipo, isto é, bitolas e entre eixos. Serão ainda consideradas superfícies de mesma geometria para o suporte das molas fracas;
2. Rodas e pneus: os pneus serão modelados a partir de uma geometria simplificada e posteriormente convertida para corpo de superfície, bidimensional. As rigidezes dos pneus e rodas não serão consideradas para a transmissão de esforços, de modo que os pneus, em superfície, serão definidos aproximadamente rígidos, a partir de uma espessura elevada. A geometria dos pneus, para a transmissão de esforços, será de principal importância, sendo as angulações de roda possibilitadas a partir de juntas cinemáticas gerais entre os pneus e as bases excitadoras, e as porções internas dos pneus conectadas aos cubos de roda a partir de juntas fixas. Ao passo que a transmissão de esforços dos pneus para os cubos de roda pode se dar a partir destas juntas, a utilização das rodas foi dispensada, sendo os seus corpos excluídos da geometria;
3. Olhais de suspensão e direção: serão mantidos os corpos sólidos de rótulas, buchas e espaçadores, e os graus de liberdade serão garantidos a partir da adição de juntas esféricas ou de revolução, conforme a predefinição do olhal;
4. Ligações parafusadas: todos os parafusos serão modelados a partir de juntas cinemáticas fixas ou de revolução, conforme a condição de restrição da junta, de forma que serão excluídos os corpos sólidos dos parafusos, porcas e arruelas;
5. Rolamentos: todos os rolamentos serão modelados a partir de juntas cinemáticas de revolução, de forma que serão excluídos todos os corpos sólidos associados, como roletes, gaiolas, pistas, dentre outros;

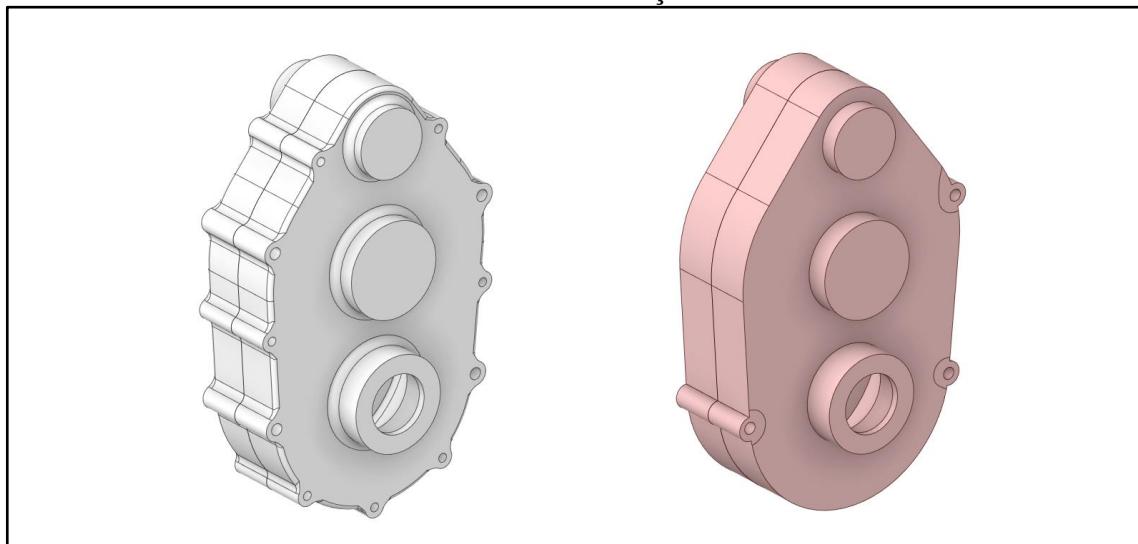
6. Amortecedores: serão mantidos os corpos (cilindros) e pratos dos amortecedores, enquanto os demais componentes serão excluídos. As molas helicoidais serão modeladas a partir de juntas cinemáticas do tipo mola. Serão adicionadas juntas gerais que permitem unicamente o deslocamento na direção do eixo longitudinal do amortecedor, restringindo os pratos a este grau de liberdade (função da haste no modelo real);
7. Sistema de esterçamento: será considerado o sistema de esterçamento desde as mangas de eixo até a cremalheira, possibilitando a transmissão de esforços entre os quartos de carro dianteiros e destes para o chassi;
8. Sistema de transmissão: serão considerados os componentes semieixo, cardans, eixo de saída, caixa de redução e suportes de fixação da caixa, participantes da transmissão de esforços das rodas para o chassi. As cruzetas e pinos flexíveis dos cardans serão modelados a partir de juntas cinemáticas;
9. Chassi: será modelado a partir de topologias de ordem inferior, bidimensional e unidimensional, tendo em vista questões associadas à discretização e a limitações computacionais, tratadas posteriormente.

3.2.2. Preparação de geometria

A preparação de geometria foi iniciada a partir da exclusão dos componentes não estruturais, conforme as concepções geral e dos sistemas individuais, além das hipóteses simplificadoras. Posteriormente, a geometria foi reparada a partir da detecção de vértices divisores, arestas extras, faces pequenas, arestas inexatas e interferências, mitigando possíveis erros na discretização da estrutura e no comportamento mecânico do modelo.

Após a reparação, a preparação foi prosseguida com a simplificação de topologias complexas (figura 35), a partir da exclusão de filetes de raio pequeno, roscas, sulcos e rebaixos, caso associados a uma baixa influência na resposta estrutural. As exclusões foram tomadas para facilitação da discretização do modelo, com o critério de mantimento da rigidez global e das distribuições locais de esforços.

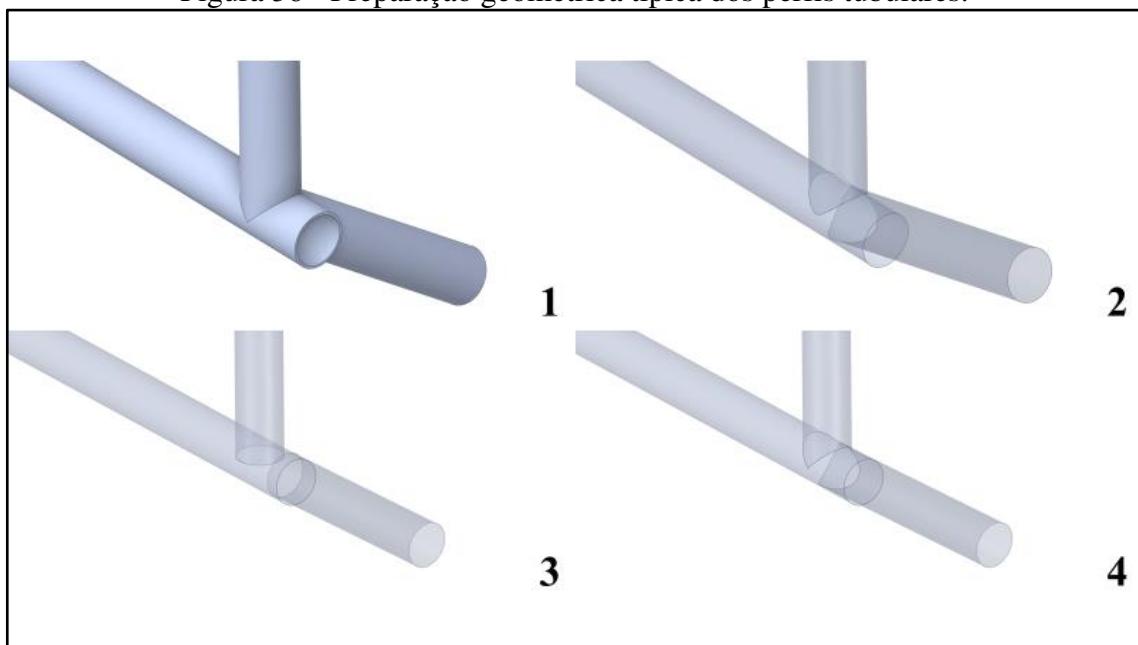
Figura 35 - Detalhamento da preparação de geometria: simplificação geométrica da carcaça da caixa de redução.



Fonte: Autor.

Com a simplificação geométrica dos variados componentes estruturais, foi possível prosseguir para a preparação da gaiola do veículo, dos *links* de suspensão e de direção, além dos pneus, tendo como pauta sua discretização em elementos de casca e de viga. Inicialmente, todos os tubos concebidos em corpos sólidos foram convertidos para superfícies a partir da ferramenta de superfície média (figura 36, detalhe 1; 2). Posteriormente, todas em extremidades dos perfis foram reparadas (figura 36, detalhe 3) e recombina das (figura 36, detalhe 4), possibilitando uma correta coincidência das arestas associadas.

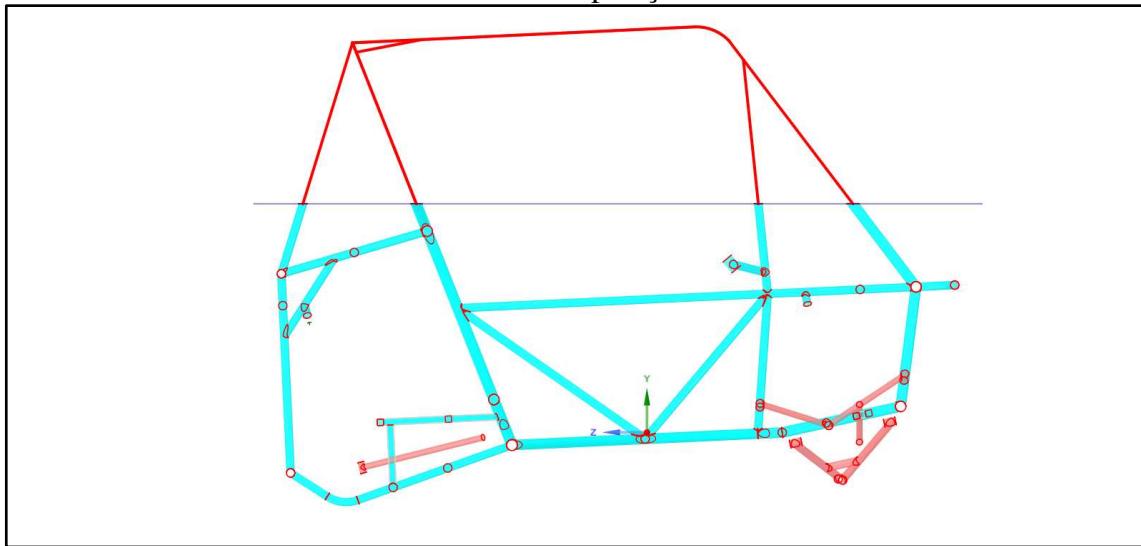
Figura 36 - Preparação geométrica típica dos perfis tubulares.



Fonte: Autor.

Em sequência, a geometria da gaiola, em corpos de superfície, foi cortada a partir de um plano paralelo ao XZ global (figura 37). A partir deste plano, os membros da gaiola posicionados acima foram modelados em corpos de linha, para discretização a partir de elementos de viga, de modo que este plano define a interseção entre a discretização do chassi a partir de elementos de casca e de viga, conforme a justificação realizada posteriormente, no subtópico de discretização geométrica.

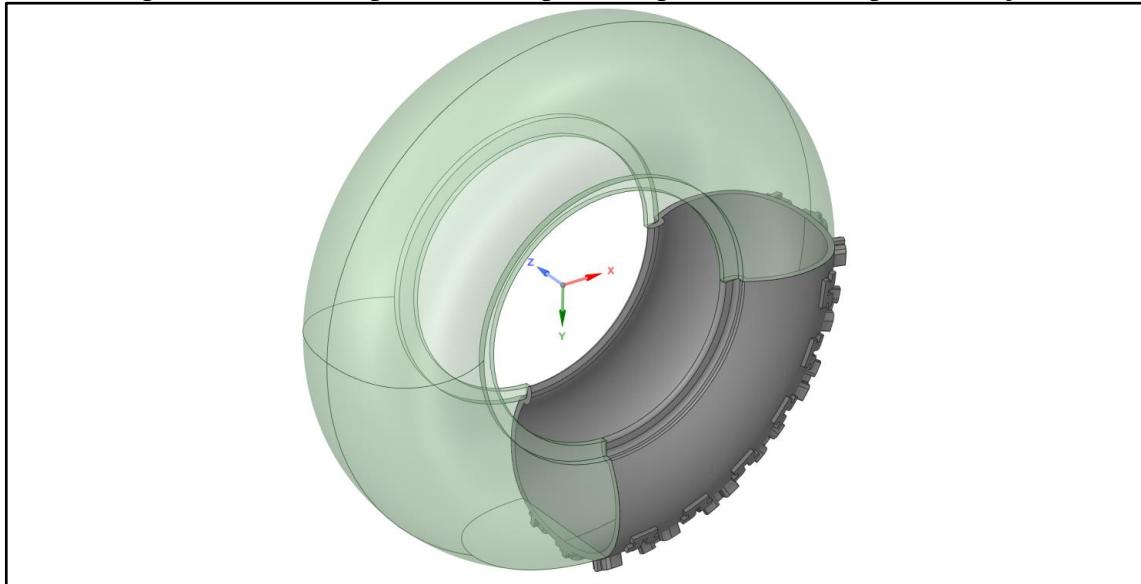
Figura 37 - Corte realizado na gaiola, para discretização em elementos de casca e de viga, tomado em porções com baixa magnitude de esforços internos, com o veículo em condições usuais de operação.



Fonte: Autor.

Em relação aos pneus, inicialmente foi retirada uma seção de revolução da geometria original, sendo posteriormente esta seção simplificada e, novamente, revolucionada em torno do eixo lateral central Z (figura 38). Após a revolução, o corpo sólido foi convertido em superfície a partir da ferramenta de superfície média. Foi feito, ainda, um corte na porção inferior, tendo como base uma deflexão estática de 20 mm. A partir deste corte, criou-se uma face inferior destinada à definição da junta cinemática geral entre o pneu e a base excitadora.

Figura 38 - Preparação de geometria associada aos pneus, com destaque à geometria original (corpo sólido) e à simplificada (corpo em superfície), obtida por revolução.

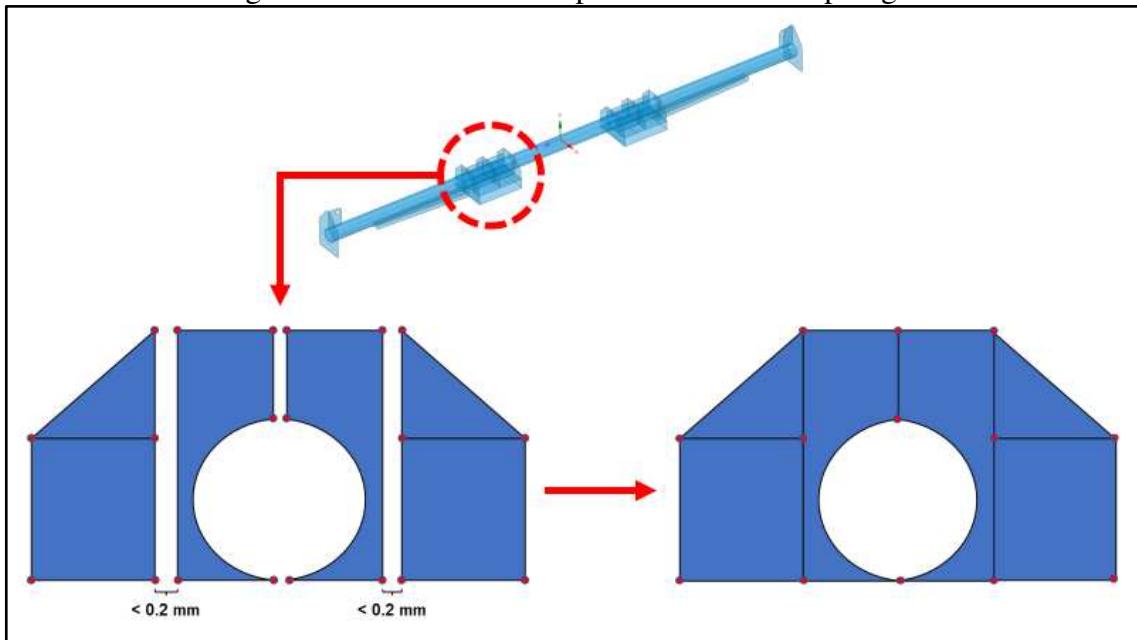


Fonte: Autor.

Finalmente, foi possível prosseguir para a última etapa da preparação de geometria: o compartilhamento de topologia. No modelo do presente trabalho, todas as regiões em contato concebidas sem graus de liberdade de deslizamento foram modeladas a partir do recurso de compartilhamento de topologia ao invés de contatos do tipo *bonded* ou de juntas do tipo fixa, evitando a adição de elementos ao modelo.

Este recurso atua na discretização do modelo a partir da criação de nós compartilhados entre dois corpos, de forma que os corpos em contato são “costurados” nas topologias aproximadamente coincidentes a partir dos nós presentes nestas, em detrimento da adição de elementos adicionais entre os dois corpos. O recurso foi ilustrado a partir da figura 39.

Figura 39 - Recurso de compartilhamento de topologia.



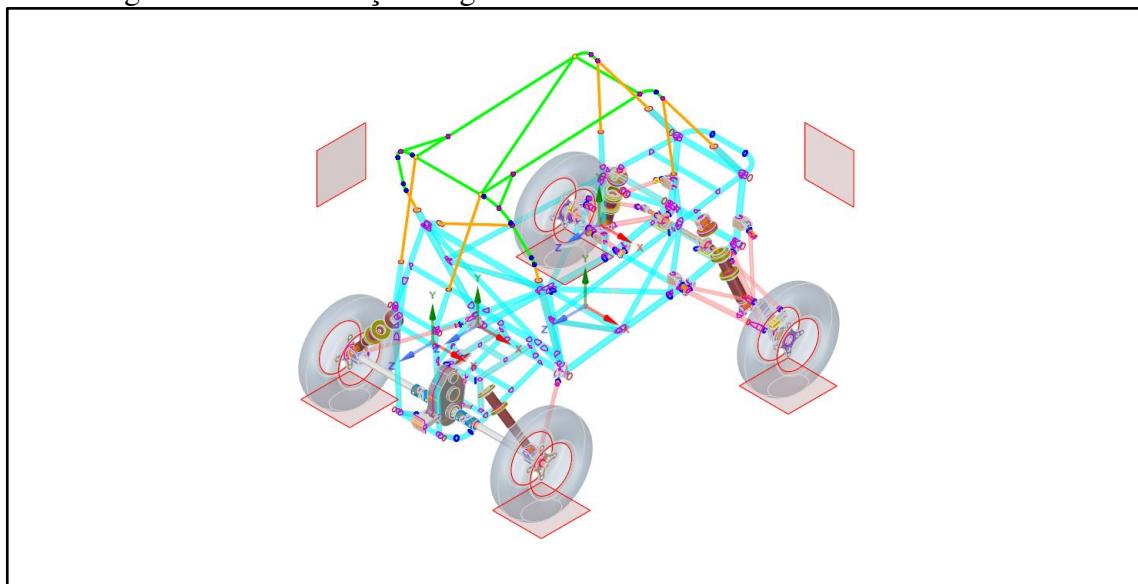
Fonte: Autor.

A coincidência entre topologias utilizada para o compartilhamento é dada por uma tolerância específica, com valor padrão de 0,2 mm, utilizado no presente trabalho. Com a identificação das entidades coincidentes, o compartilhamento é caracterizado a partir de um padrão de cores editável, que no presente trabalho, é dado por:

1. Verde: compartilhamento de face/ vigas conectadas em 2 pontos;
2. Laranja: vigas conectadas em 1 ponto;
3. Vermelho: arestas não compartilhadas/ vigas conectadas em nenhum ponto;
4. Azul: compartilhamento de arestas entre 2 corpos;
5. Roxo: compartilhamento de arestas entre 3 corpos;
6. Amarelo: compartilhamento de arestas entre 4 ou mais corpos.

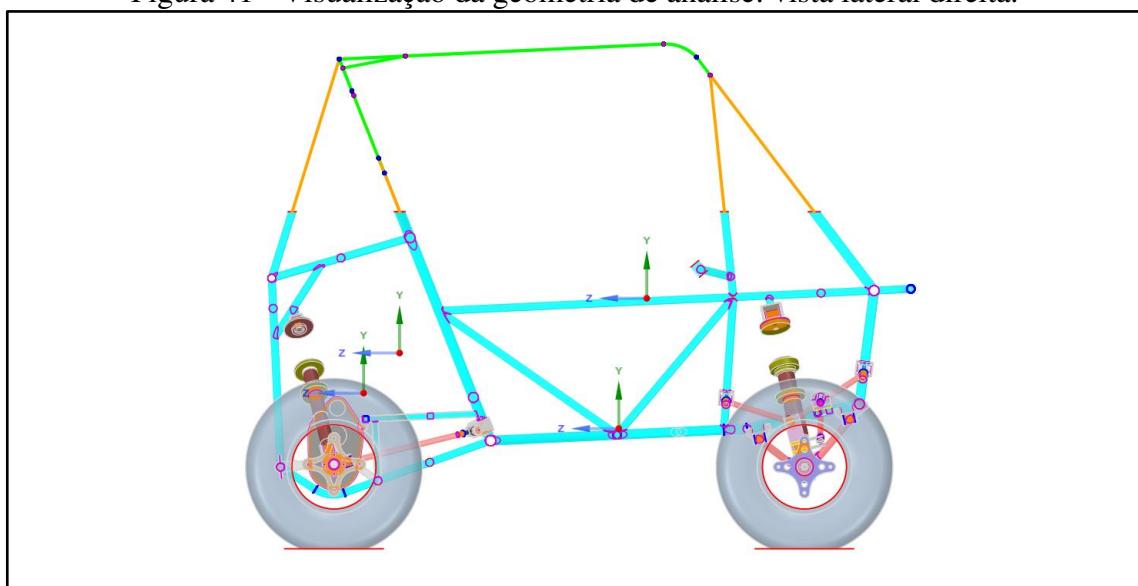
Desta forma, a geometria de análise é dada pelas imagens a seguir (figuras 40 a 43).

Figura 40 - Visualização da geometria de análise: vista isométrica traseira.



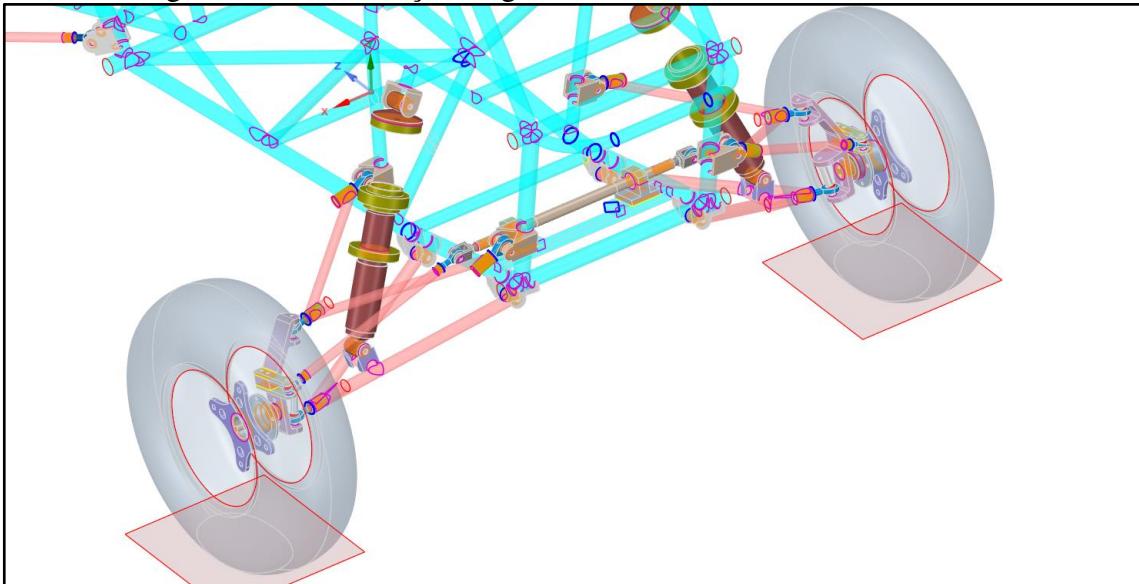
Fonte: Autor.

Figura 41 - Visualização da geometria de análise: vista lateral direita.



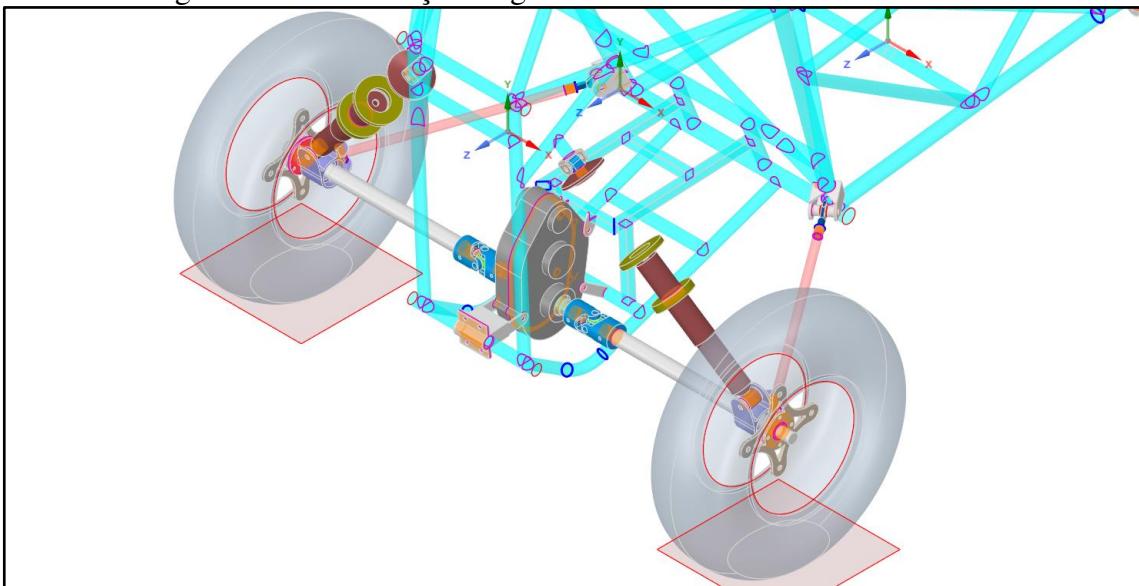
Fonte: Autor.

Figura 42 - Visualização da geometria de análise: detalhe dianteiro.



Fonte: Autor.

Figura 43 - Visualização da geometria de análise: detalhe traseiro.



Fonte: Autor.

Especifica-se ainda os componentes considerados estruturais (tabela 16), presentes na geometria de análise, os quais resultam em um total de 295 corpos:

Tabela 16 - Componentes estruturais incluídos na geometria de análise.

Sistema	Componentes
Suspensão	Corpos, pratos e olhais dos amortecedores, <i>links</i> , olhais, buchas, espaçadores, mangas de eixo traseiras, cubos de roda traseiros
Direção	Mangas de eixo dianteiras, <i>links</i> , olhais, buchas, espaçadores, cubos de roda dianteiros, cremalheira, mancais de suporte, pneus

<i>Powertrain</i>	Carcaça da caixa de redução e suportes ao chassi, eixo de saída, cardans, semieixos, flanges.
Chassi	Gaiola (incluindo perfis adicionais do freio, eletrônica e direção) e suportes dos amortecedores
Freios	Não possui componentes estruturais
Eletrônica	Não possui componentes estruturais

Fonte: Autor.

3.2.3. Material e modelo elasto-plástico

O modelo mecânico de elementos finitos foi concebido majoritariamente em componentes de aço ao baixo carbono, com exceção dos pratos “móveis” da suspensão, projetados em poliuretano, e dos pneus, concebidos em composto de borracha. Como, no presente trabalho, a massa destes componentes foi inserida a partir de pontos de massa, todo o modelo foi trabalhado, de forma simplificada, a partir do material padrão “*Structural Steel*”, ao passo que, a partir de uma maior rigidez, estes componentes contribuem de forma positiva com a majoração dos esforços transmitidos ao chassi, embora este efeito seja diminuto.

Este material possui relação constitutiva tensão-deformação dada a partir de um modelo de elasticidade isotrópico linear, a partir das propriedades mecânicas da tabela 17. Tem-se densidade nula em função da consideração da massa a partir de pontos de massa.

Tabela 17 - Propriedades mecânicas do material associado ao modelo mecânico, *Structural Steel*.

Densidade - ρ (g/cm³)	0,00
Módulo de elasticidade - E (GPa)	200,00
Coeficiente de Poisson - ν (-)	0,30

Fonte: Autor.

3.2.4. Distribuição de massa

Conforme especificado anteriormente, a massa do modelo computacional foi concebida a partir da adição de pontos de massa, para os componentes considerados e para o piloto. Em síntese, partir da adição de pontos de massa, foi possível a obtenção de um maior controle da massa total e de sua distribuição, conforme o *target* de massa do SB-20.

Nesta etapa da construção do modelo mecânico, dentre os que foram tratados a partir de pontos de massa, foram especificados os corpos de maior massa do sistema, para o atendimento da seguinte consideração de projeto: os corpos de maior massa terão, especificadas, resistências

à aceleração translacional (massas m_x , m_y , m_z) e à aceleração rotacional (momentos de inércia de massa I_{xx} , I_{yy} , I_{zz}), enquanto os demais terão apenas resistências à aceleração translacional.

Por inspeção, os corpos de maior massa selecionados foram:

1. Chassi;
2. Piloto;
3. Motor;
4. Amortecedores;
5. Conjunto de transmissão CVT;
6. Conjunto de caixa de redução.

Os pneus, rodas e componentes posicionados nas proximidades não foram tomados como corpos de maior massa, pois seus deslocamentos rotacionais são restringidos pelas bases excitadoras.

Os corpos cuja massa foi modelada a partir de pontos de massa foram separados em 16 grupos, de forma que a massa de cada grupo foi inserida, no software de análise, nas entidades geométricas do modelo estrutural mais próximas do centro de massa associado ao grupo. Desta forma, foram considerados os seguintes valores para a definição dos pontos de massa no modelo mecânico, bem como para a consideração geral da massa (tabela 18):

Tabela 18 - Levantamento de massa do protótipo SB-20.

Grupo	Massa X,Y,Z (kg)	Momento de Inércia X GLOBAL (kg.mm²)	Momento de Inércia Y GLOBAL (kg.mm²)	Momento de Inércia Z GLOBAL (kg.mm²)
Chassi	32,00	9164745,28	16681111,16	23200070,22
Piloto	70,03	5138877,82	12149008,15	15951202,21
Motor	19,52	195957,98	11747837,59	11776137,93
Amortecedor FD	5,70	77397,13	2253197,58	2324778,34
Amortecedor FE	5,70	77397,13	2253197,58	2324778,34
Amortecedor TD	4,80	84281,77	4875176,32	4954639,15
Amortecedor TE	4,80	84281,77	4875176,32	4954639,15
Conjunto CVT	14,41	165570,50	9140314,96	9243989,13
Conjunto caixa	10,72	73704,14	7910598,99	7958225,87

Massa não suspensa restante FD	16,72	-	-	-
Massa não suspensa restante FE	16,72	-	-	-
Massa não suspensa restante TD	13,23	-	-	-
Massa não suspensa restante TE	13,23	-	-	-
Massa suspensa restante 1/2 Cockpit (FBM-FAB)	16,44	-	-	-
Massa suspensa restante 2/2 Cockpit (FAB-RRH)	7,70	-	-	-
Massa suspensa restante traseira	6,40	-	-	-

Fonte: Autor.

Em relação aos momentos de inércia de massa dos corpos associados, foi considerado o valor tomado com referência ao sistema de coordenadas global, sendo, posteriormente, selecionado este sistema de coordenadas nas especificações de definição dos pontos de massa do modelo mecânico.

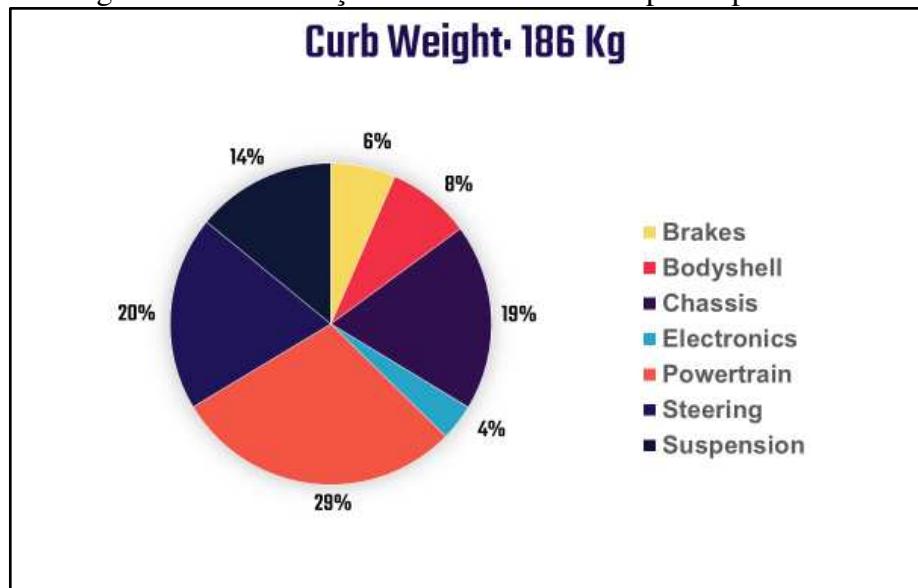
Em relação ao objetivo de massa posto para o protótipo SB-20 em seu projeto (figura 44), foram obtidos os seguintes resultados, exibidos a partir da tabela 19. O objetivo de massa total foi tomado a partir do *target* de massa do SB-20, de 186 kg, somado à massa de 70 kg do piloto.

Tabela 19 - Cálculo do erro associado ao levantamento de massa realizado.

Massa total obtida (kg)	258,12
Objetivo de massa (kg)	256,00
Erro (%)	0,83

Fonte: Autor.

Figura 44 - Distribuição de massa teórica do protótipo SB-20.

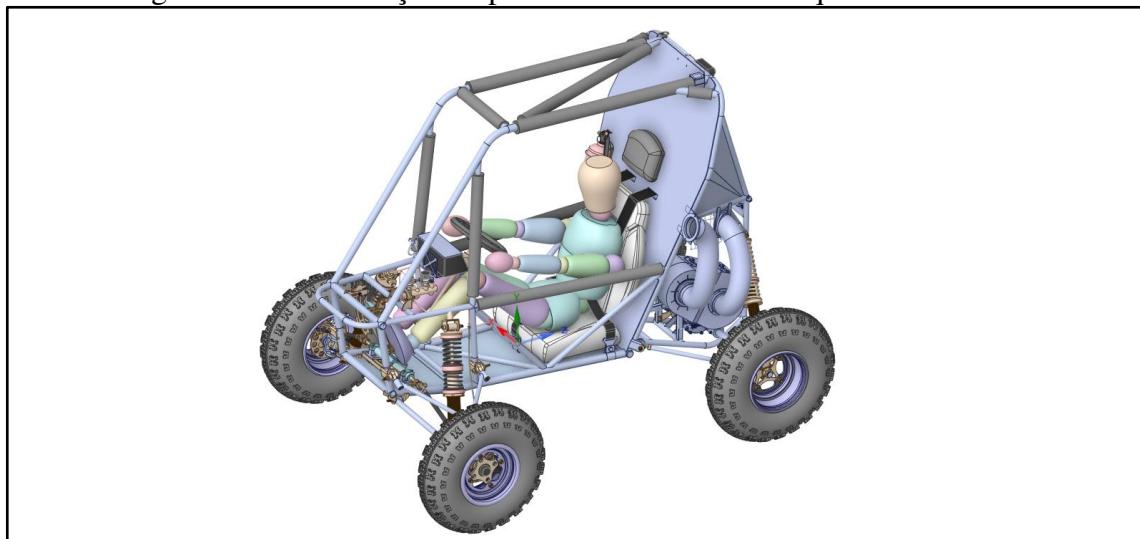


Fonte: Autor.

Dentre os valores obtidos, aqueles associados aos componentes do protótipo que apresentam geometria representativa e com material de densidade bem especificada, como no caso do aço, foram obtidos a partir do software *SpaceClaim*. Adicionalmente, alguns componentes do protótipo, como o banco, pneus, carenagens, dentre outros, tiveram sua massa obtida por medição com balança eletrônica.

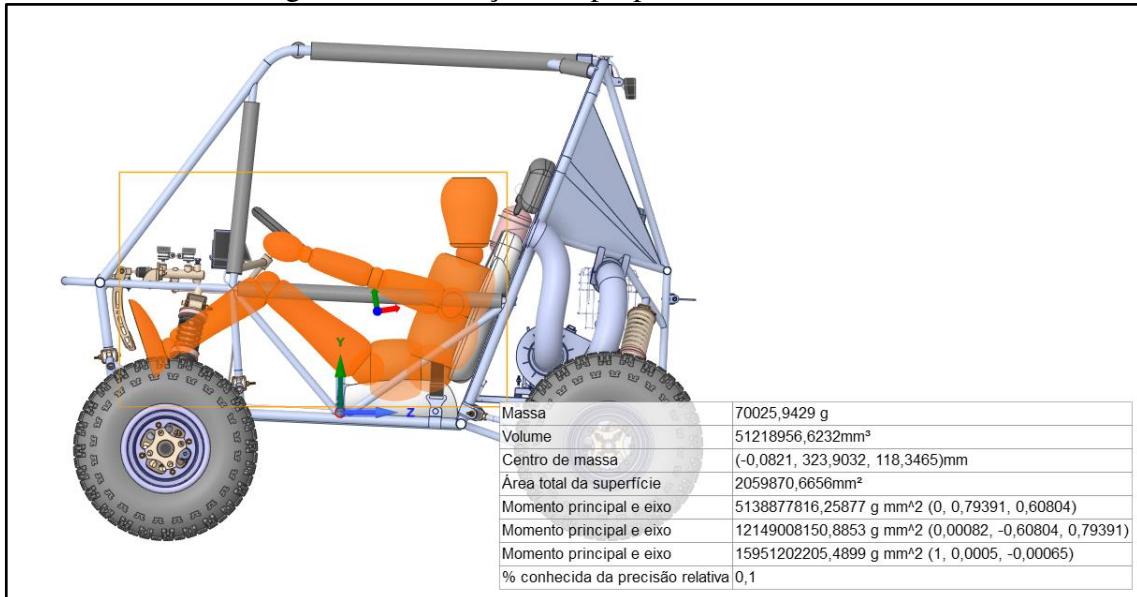
Em relação ao piloto, que constitui o corpo de maior massa translacional e rotacional, as propriedades de massa foram obtidas a partir de um manequim articulável concebido em estatura de 1,70 m e massa de 70 kg. Para que os momentos de inércia de massa fossem obtidos, o manequim foi posicionado para pilotagem no veículo, conforme as imagens abaixo (figuras 45 e 46).

Figura 45 - Visualização do posicionamento do manequim no veículo.



Fonte: Autor.

Figura 46 - Obtenção das propriedades de massa.



Fonte: Autor.

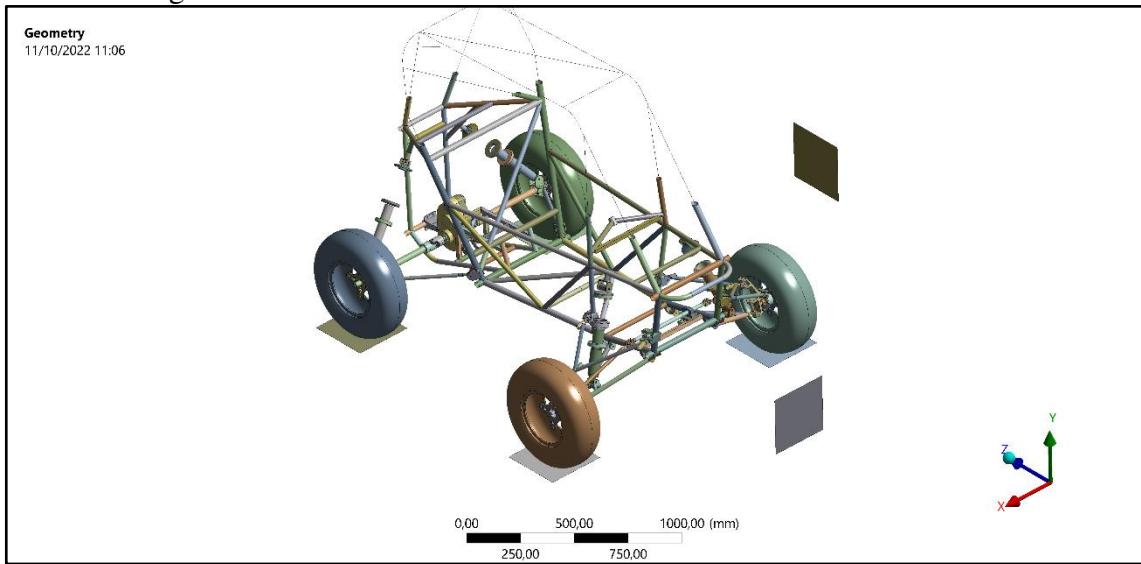
3.2.5. Descrição do modelo mecânico

Para a definição do modelo mecânico no ambiente *mechanical* do pacote comercial ANSYS, tem-se a especificação da geometria, materiais, sistemas de coordenadas, conexões e malha. Deste modo, estes itens foram especificados a seguir.

3.2.5.1. Geometria

A geometria do modelo mecânico (figura 47) é descrita a partir dos corpos associados e dos pontos de massa adicionados. Conforme descrito no subtópico de preparação de geometria, o chassi foi modelado em corpos de superfície e linha, os *links* de suspensão e direção foram concebidos em corpos de superfície, assim como os pneus, e os demais componentes a partir de corpos sólidos. Todos os corpos foram trabalhados com comportamento de rigidez do tipo flexível e, adicionalmente, especifica-se que o tipo de *offset* utilizado para os corpos em superfície foi do tipo *middle*, enquanto para os corpos em linha foi do tipo *centroid*.

Figura 47 - Geometria de análise no ambiente ANSYS mechanical.



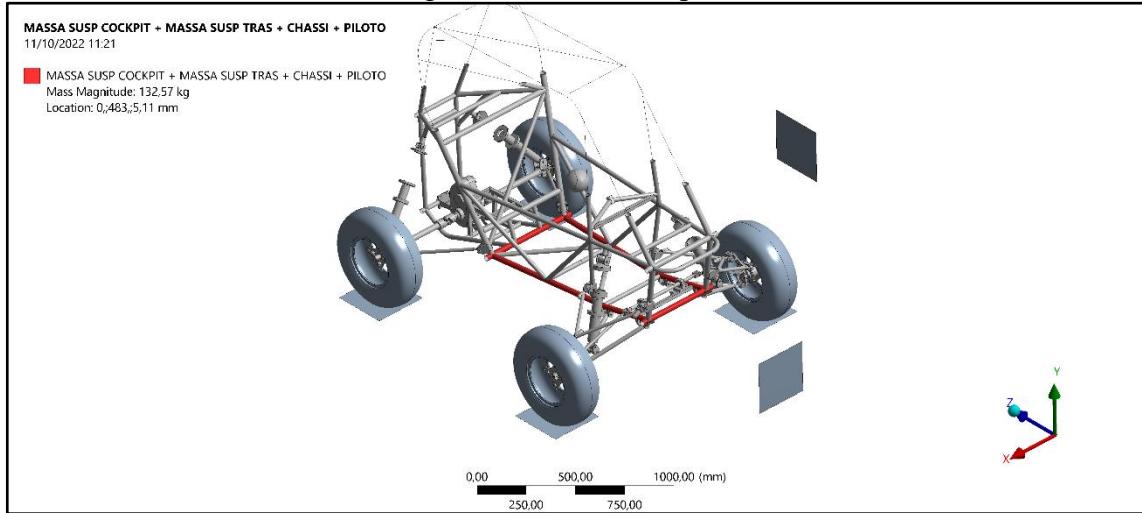
Fonte: Autor.

Os pontos de massa foram definidos a partir de quatro itens, os quais: geometria associada, sistema de coordenadas de referência, posição do ponto em relação ao sistema de coordenadas de referência e especificação dos valores de massa translacional e rotacional, conforme o subtópico de formulação dos EF utilizados no modelo.

A geometria associada foi tomada como a mais próxima do centro de massa do grupo, conforme supracitado. A partir da geometria associada, o ponto de massa pode ser distribuído aos nós correspondentes, de modo que, no presente trabalho, foram selecionadas geometrias associadas de menor dimensão possível (em relação ao número de nós, com a geometria discretizada) e que não gerasse efeitos locais indevidos (concentração de tensão a partir da distribuição de massa), possibilitando redução do custo computacional ao passo que as massas são associadas a um menor número de nós.

Deste modo, pontos de massa de elevada proximidade foram unidos e definidos a partir de um único ponto, a partir da soma das massas translacionais e rotacionais, como foi o caso dos grupos: motor; conjunto CVT e massa suspensa; chassis; piloto (figura 48). Esta união teve efeito considerável na redução do custo computacional do modelo.

Figura 48 - Ponto de massa com os grupos massa suspensa; chassi; piloto, associado à geometria em destaque.



Fonte: Autor.

Em todos os pontos de massa, o sistema de coordenadas foi o global, sendo este sistema de coordenadas também associado aos momentos de inércia de massa. A posição em relação ao sistema de coordenadas foi definida a partir do centro de massa do conjunto de corpos associado ao grupo correspondente. Por fim, os valores de massa foram tomados conforme o levantamento de massa realizado.

3.2.5.2. Conexões

No modelo mecânico, as conexões são referentes às juntas cinemáticas e aos contatos. Tendo em vista que, conforme as hipóteses simplificadoras, foi realizado o compartilhamento de topologia e a utilização de juntas fixas como alternativa aos contatos, este tópico se destina à descrição de cada junta cinemática utilizada no modelo, do total de 107 especificadas.

No software de análise, as juntas estabelecidas entre dois corpos (*body-body*) são definidas a partir de três itens, de forma básica: a topologia *reference*, a topologia *target* e o sistema de coordenadas da junta. Juntas diferenciadas podem requisitar itens adicionais para a sua definição, como no caso das juntas mola-amortecedor, nas quais são especificados os parâmetros rigidez da mola e coeficiente de amortecimento do amortecedor.

3.2.5.2.1. Amortecedores

Os amortecedores foram modelados a partir de duas juntas mola-amortecedor cada, tendo em vista o duplo estágio de suspensão, sendo a junta A definida entre o prato inferior e o prato móvel, com sistema de referência no prato inferior, e a junta B definida entre o prato

móvel e o superior, com sistema de referência no prato móvel (conforme as figuras 49 e 50). O amortecimento foi definido unicamente para a junta A.

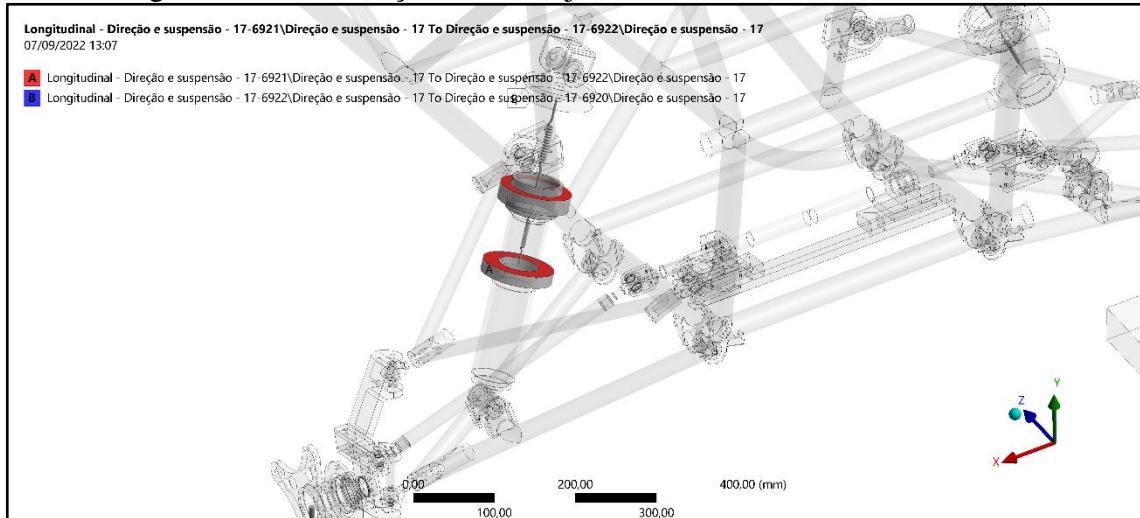
Para os amortecedores dianteiros, foram utilizados os seguintes dados, da tabela 20:

Tabela 20 - Parâmetros de entrada para as juntas mola-amortecedor associadas aos amortecedores dianteiros.

Junta A	Rigidez (N/mm)	22,80
	Coeficiente de amortecimento (N.s/mm)	1,70
Junta B	Rigidez (N/mm)	29,64
	Coeficiente de amortecimento (N.s/mm)	0,00

Fonte: Autor.

Figura 49 - Visualização local das juntas mola-amortecedor dianteiras.



Fonte: Autor.

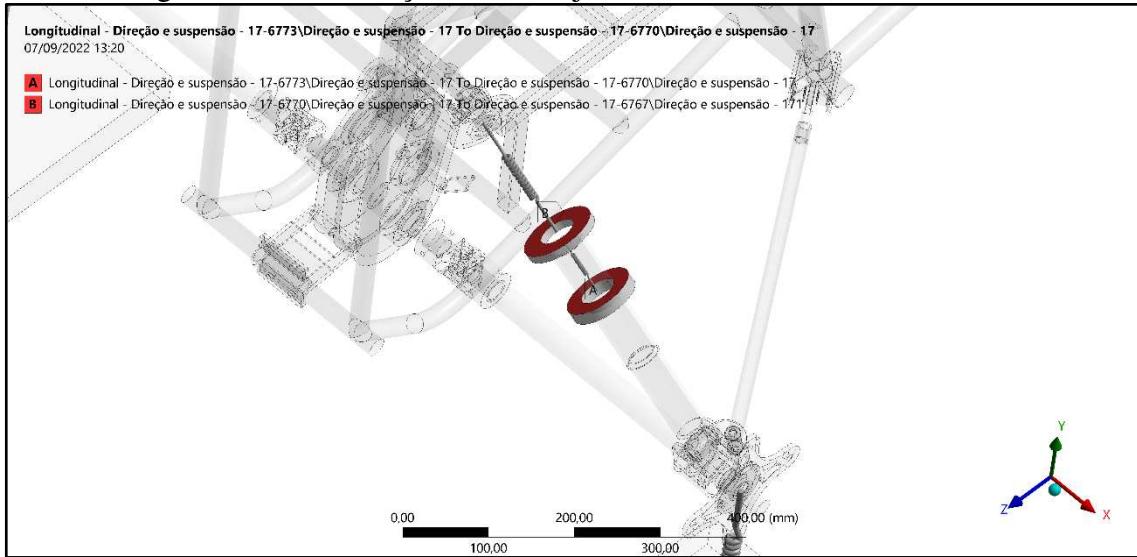
Já para os amortecedores traseiros, foram utilizados os dados a seguir, da tabela 21.

Tabela 21 - Parâmetros de entrada para as juntas mola-amortecedor associadas aos amortecedores traseiros.

Junta A	Rigidez (N/mm)	44,86
	Coeficiente de amortecimento (N.s/mm)	2,15
Junta B	Rigidez (N/mm)	44,86
	Coeficiente de amortecimento (N.s/mm)	0,00

Fonte: Autor.

Figura 50 - Visualização local das juntas mola-amortecedor traseiras.

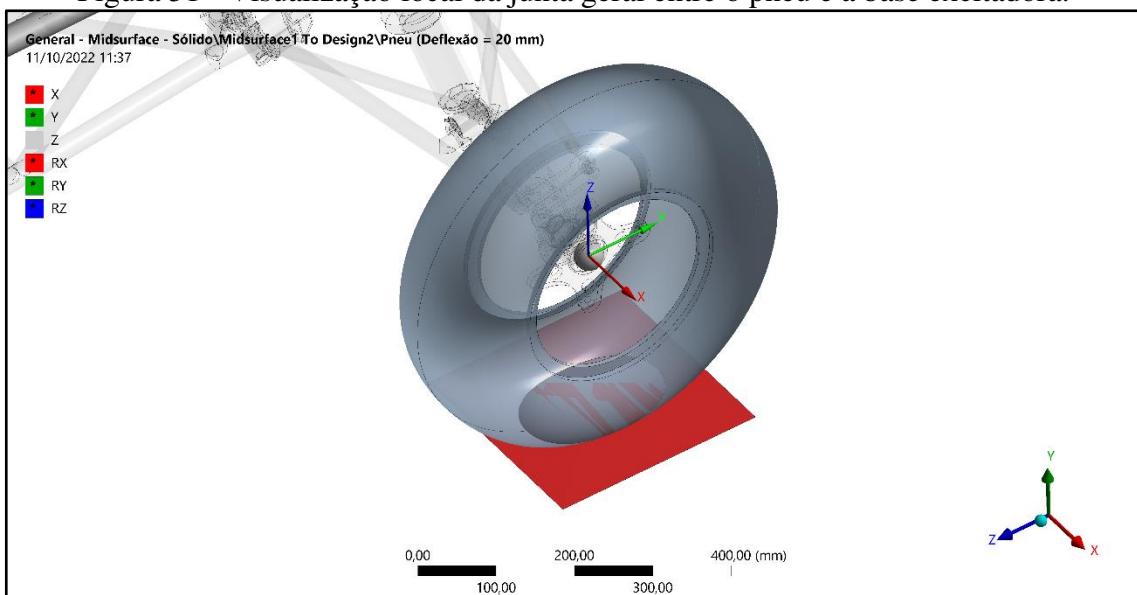


Fonte: Autor.

3.2.5.2.2. Pneus-bases

Os pneus foram conectados às bases excitadoras a partir de juntas cinemáticas gerais (figura 51), definidas entre a face da base excitadora e a face inferior do pneu, conforme o corte realizado, citado anteriormente, com sistema de coordenadas de referência no centro do pneu. Os deslocamentos translacionais em X permitem a variação de bitola, enquanto em Y, a variação do entre eixos. Os deslocamentos rotacionais em Z permitem a variação de *Toe*, em Y de *Camber*, e em X a rotação do pneu em relação ao solo. O deslocamento translacional em Z foi restringido conforme a hipótese simplificadora de não descolamento e de não penetração.

Figura 51 - Visualização local da junta geral entre o pneu e a base excitadora.



Fonte: Autor.

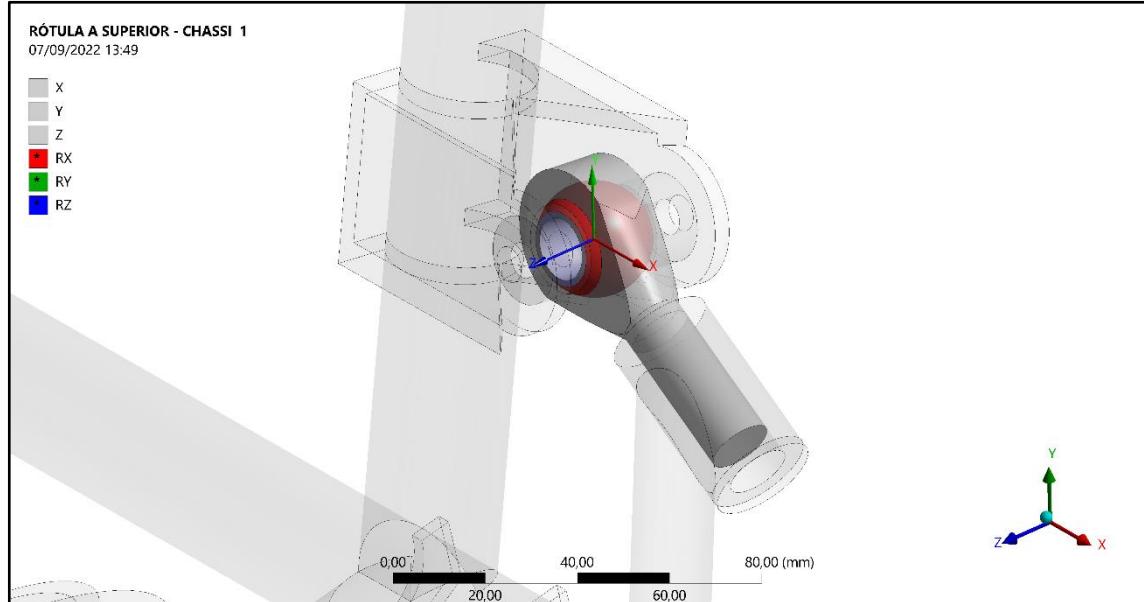
Faz-se importante destacar que o bloqueio indevido dos graus de liberdade dos pneus provoca esforços indevidos de elevada magnitude, ao passo que as geometrias de suspensão e direção são projetadas para ganhos característicos em relação aos deslocamentos rotacionais e translacionais destacados durante o curso de suspensão.

3.2.5.2.3. Suspensão

O sistema de suspensão foi modelado a partir de 56 juntas cinemáticas de tipologia variada, dentre as porções frontal e traseira, direita e esquerda. Faz-se fundamental o rigor para a formulação de cada junta deste sistema, pois uma incorreta descrição dos seus vários GDL rapidamente acarreta esforços indevidos, rigidez incoerente, dentre outras consequências.

Cada terminal rotular foi concebido a partir de uma junta esférica com graus de liberdade de rotação, definida entre a face externa da rótula e a face interna do furo do terminal, com sistema de coordenadas de referência no centro da rótula, conforme a figura 52.

Figura 52 - Visualização local de junta esférica associada a terminal rotular.

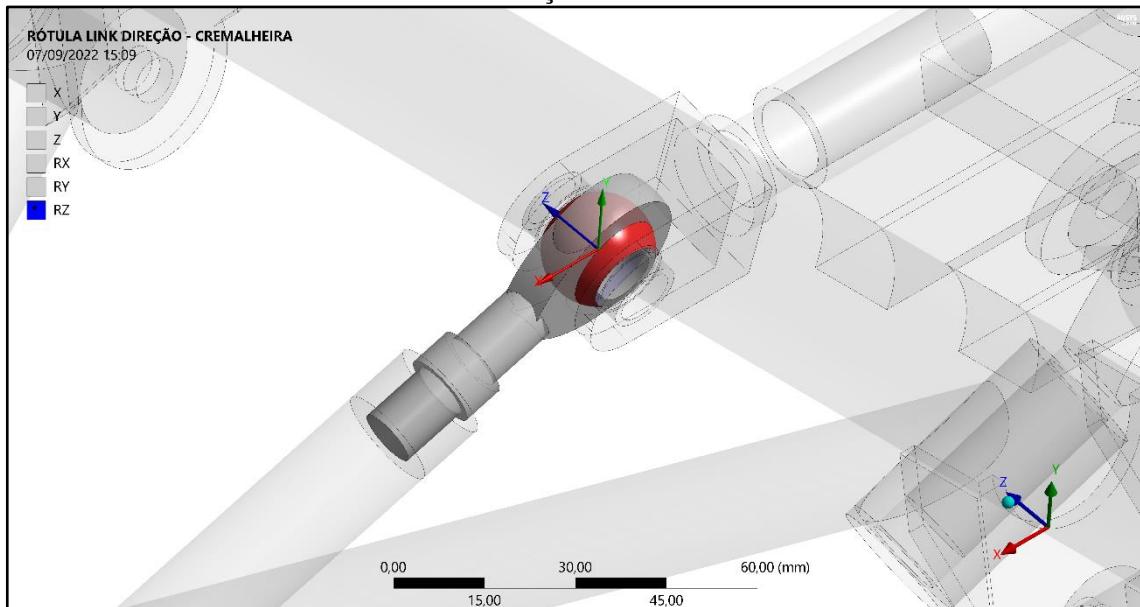


Fonte: Autor.

As juntas associadas aos terminais rotulares que realizam a conexão entre os *links* de direção e a cremalheira tiveram de ter os seus graus de liberdade reduzidos (figura 53), em função da existência de modos de vibração de corpo rígido associados à rotação dos *links* de direção em seu eixo longitudinal. No modelo real, o contato entre as faces dos terminais rotulares e os respectivos suportes do tipo “garfo” impossibilitam a ocorrência destes modos, porém, em termos de custo computacional, foi preferida esta redução em detrimento da adição

destes contatos. Por inspeção via análise modal, foi constatado, posteriormente, que a redução dos GDL nestas juntas afetou a rigidez de forma diminuta.

Figura 53 - Visualização local de junta de revolução associada ao terminal rotular que conecta o link de direção à cremalheira.



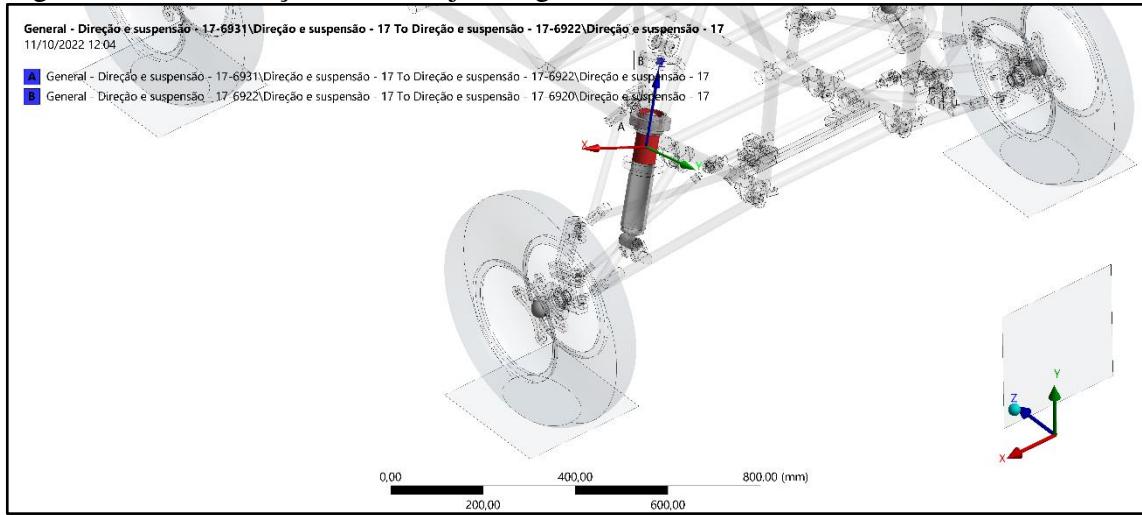
Fonte: Autor.

Por inspeção, os parafusos cuja condição de fixação permite rotação em seu eixo foram modelados a partir de juntas de revolução, com liberdade de rotação neste eixo, enquanto os parafusos cuja ligação não permite tal rotação foram modelados como juntas fixas com 0 GDL, como no caso dos parafusos entre a manga de eixo dianteira e o braço de direção. Em cada junta associada a uma ligação parafusada, o sistema de coordenadas de referência foi posicionado na porção central do parafuso.

Por fim, foram adicionadas juntas gerais com grau de liberdade de deslocamento uniaxial (eixo do amortecedor) para a representação das hastas dos amortecedores, possibilitando a restrição dos pratos móvel e superior ao eixo do amortecedor.

Para isto, foram adicionadas duas juntas gerais a cada amortecedor (figura 54), sendo uma definida entre a face externa superior do corpo do amortecedor e a face interna do prato móvel, com sistema de coordenadas de referência no centro desta primeira face, e outra definida entre a face interna do prato móvel e a face interna do prato superior, com sistema de coordenadas de referência no centro da primeira.

Figura 54 - Visualização local das juntas gerais associadas aos amortecedores dianteiros.

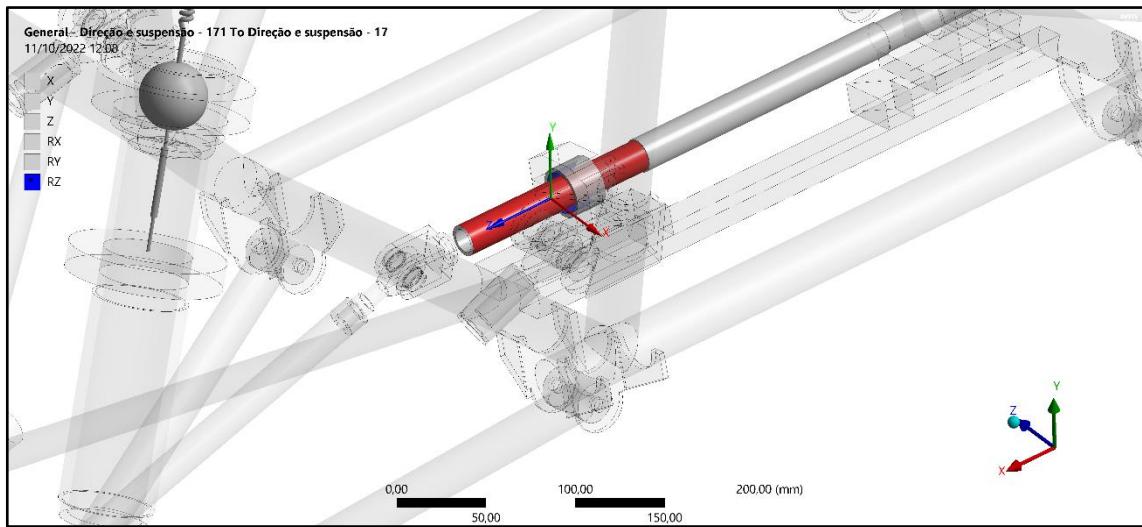


Fonte: Autor.

3.2.5.2.4. Direção

Tendo em vista os componentes do sistema de direção considerados, os quais podem ser sintetizados pelo sistema de esterçamento, foram utilizadas juntas gerais com grau de liberdade de rotação uniaxial (eixo da cremalheira) entre as faces internas dos mancais de suporte e as faces externas da cremalheira, com sistema de coordenadas de referência no centro destas primeiras, conforme a figura 55. O deslocamento de translação no sentido do eixo da cremalheira foi restringido para que se considere o veículo operando com o piloto mantendo-o em trajetória retilínea, com o esterçamento bloqueado.

Figura 55 - Visualização local da junta geral associada à conexão entre o mancal de suporte e a cremalheira.

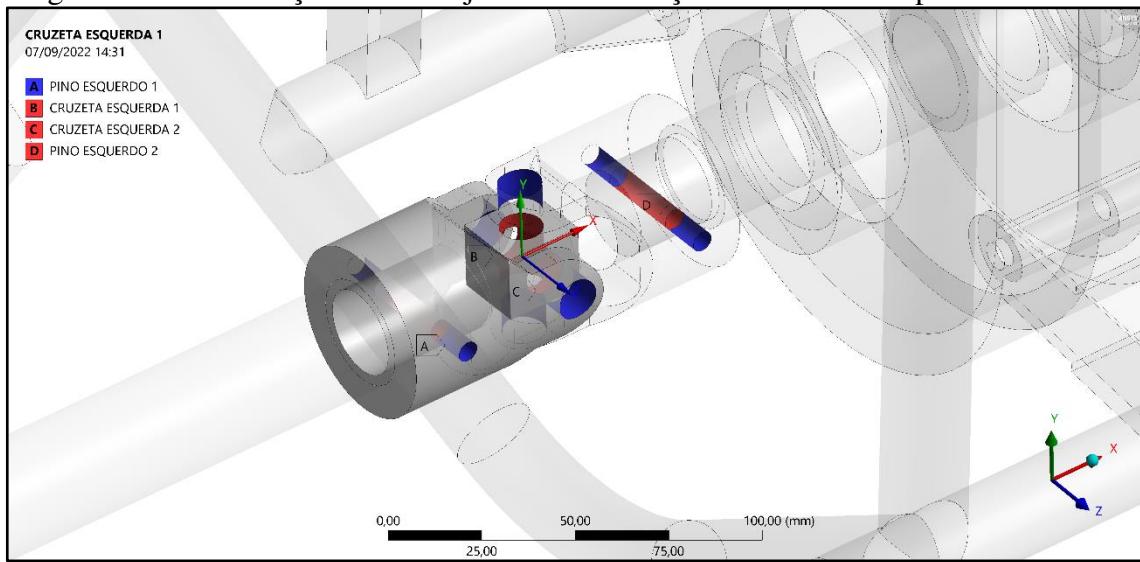


Fonte: Autor.

3.2.5.2.5. Powertrain

Para o sistema de *Powertrain*, foram utilizadas juntas para a modelagem das cruzetas, pinos, parafusos e rolamentos. Os cardans receberam juntas de revolução associadas às cruzetas e aos pinos (figura 56). Os pinos foram definidos entre a face interna do furo do semieixo e as faces internas dos furos associados dos cardans, com sistema de coordenadas de referência no centro desta primeira face. As cruzetas foram definidas entre a face interna do furo do corpo prismático central e as faces internas dos furos associados dos cardans.

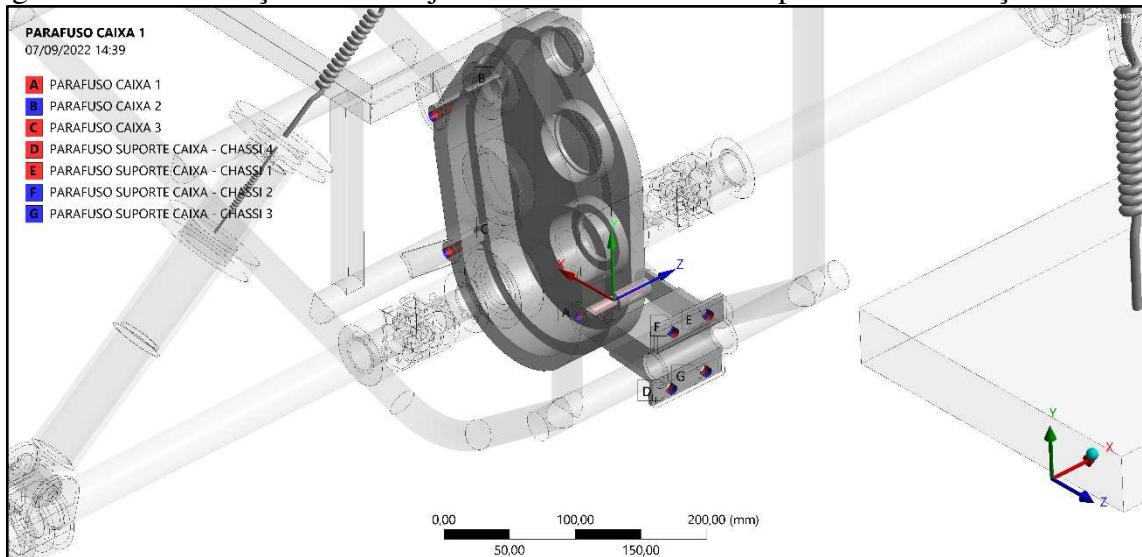
Figura 56 - Visualização local das juntas de revolução associadas aos pinos e cruzetas.



Fonte: Autor.

Os parafusos de fixação do conjunto de caixa de redução ao chassi foram modelados a partir de juntas fixas (figura 57), de modo que, novamente, em cada junta associada a uma ligação parafusada, o sistema de coordenadas de referência foi posicionado na porção central do parafuso.

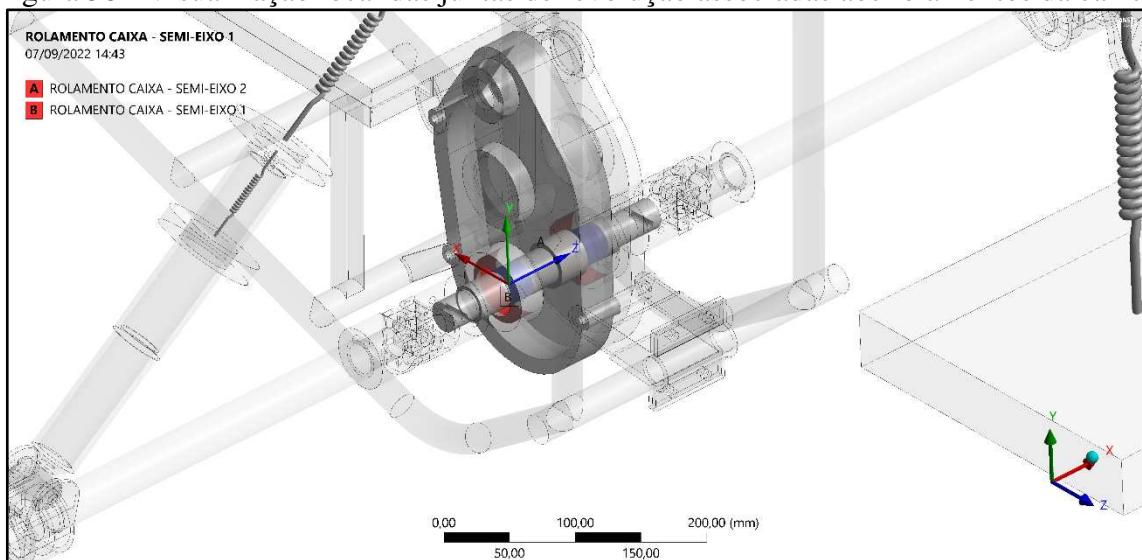
Figura 57 - Visualização local das juntas fixas associadas aos parafusos de fixação da caixa.



Fonte: Autor.

Os rolamentos que interligam o eixo de saída e a carcaça da caixa de redução foram modelados a partir de juntas de revolução (figura 58), definidas entre a seção interna de suporte da carcaça e a seção de suporte do rolamento, com sistema de coordenadas de referência no centro desta juntas. A partir destas juntas, é possível a transmissão de esforços do eixo de saída para a carcaça da caixa.

Figura 58 - Visualização local das juntas de revolução associadas aos rolamentos da caixa.



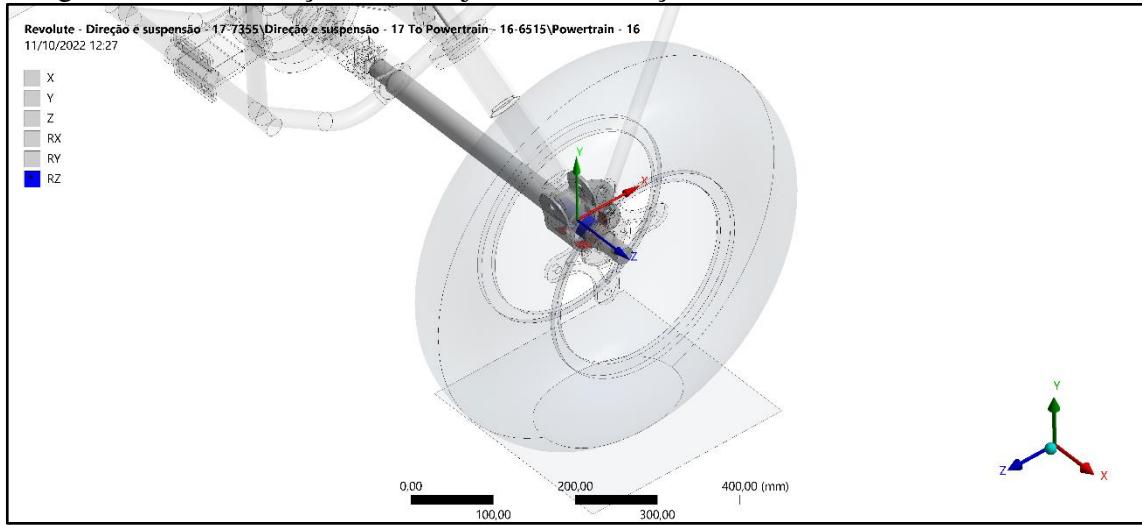
Fonte: Autor.

3.2.5.2.6. Rodas

Em cada roda do veículo, foram adicionadas ainda duas juntas cinemáticas, sendo uma associada aos rolamentos que interligam a ponta de eixo ao cubo de roda, no caso das rodas dianteiras, e que interligam o semieixo à manga de eixo, no caso das rodas traseiras. Estas

juntas, do tipo revolução, foram definidas entre as seções de suporte do elemento “cubo” e do elemento “eixo”, com sistema de coordenadas no centro das seções dos elementos “cubo” (figura 59).

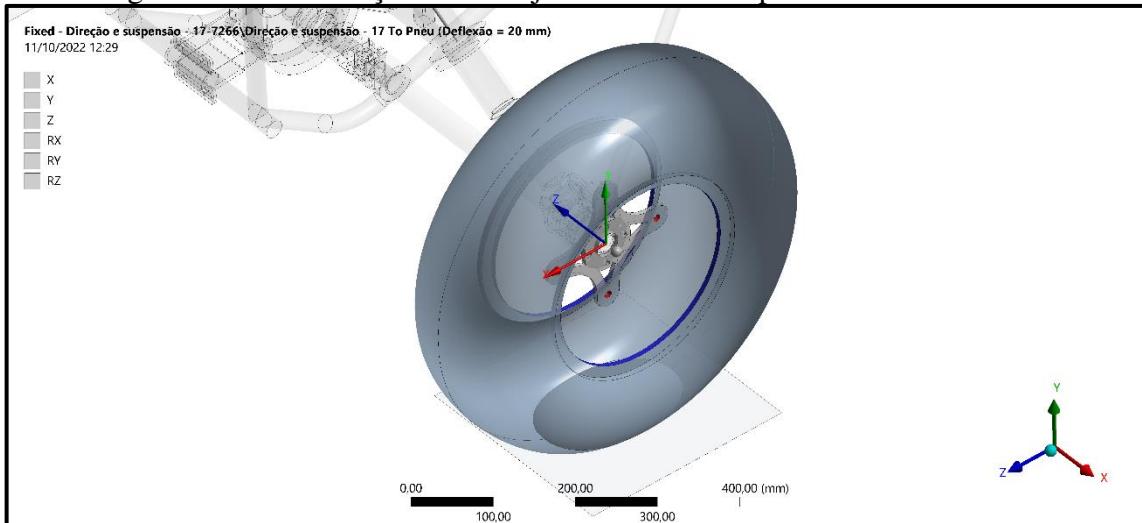
Figura 59 - Visualização local da junta de revolução associada ao rolamento da roda.



Fonte: Autor.

Adicionalmente, tem-se, para cada roda, uma junta fixa que estabelece a conexão entre o pneu e o cubo de roda, definida entre faces internas dos pneus associadas à montagem nas rodas e os furos dos cubos de roda, com sistema de coordenadas de referência no centro destas primeiras (figura 60).

Figura 60 - Visualização local da junta fixa entre o pneu e o cubo de roda.



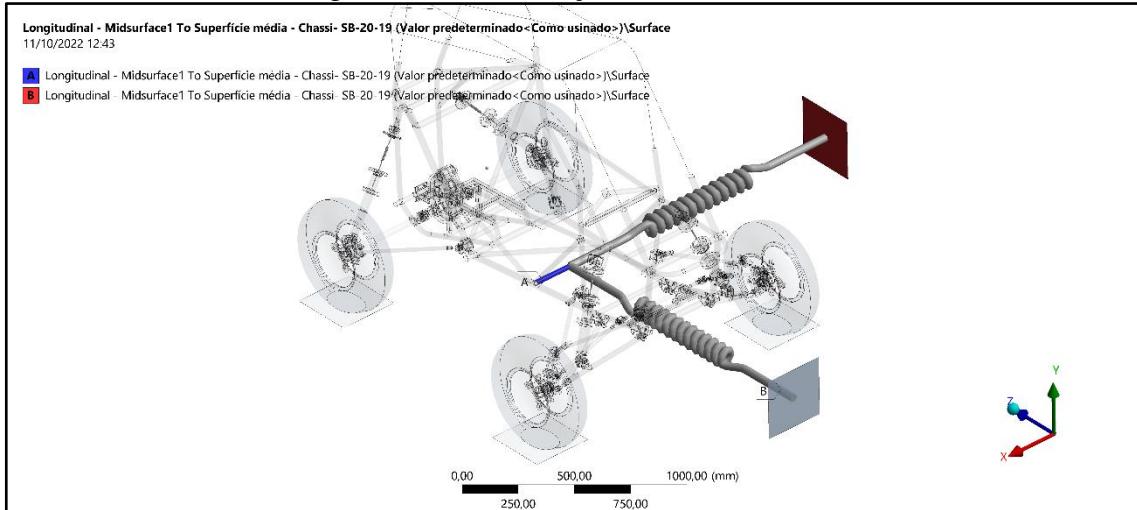
Fonte: Autor.

3.2.5.2.7. Molas fracas

As molas fracas, conforme posto nas hipóteses simplificadoras, foram definidas a partir de juntas do tipo mola-amortecedor entre o membro do chassi mais próximo do sistema de

coordenadas global e bases de suporte de mesma geometria das bases excitadoras, deslocadas em um raio de 1500 mm longitudinalmente e lateralmente, a partir da origem (figura 61). As bases de suporte, por sua vez, foram restringidas a partir de juntas cinemáticas fixas do tipo *body-ground*. Os parâmetros de entrada foram especificados a partir da tabela 22.

Figura 61 - Visualização das molas fracas.



Fonte: Autor.

Tabela 22 - Parâmetros de entrada para as juntas mola-amortecedor associadas às molas fracas.

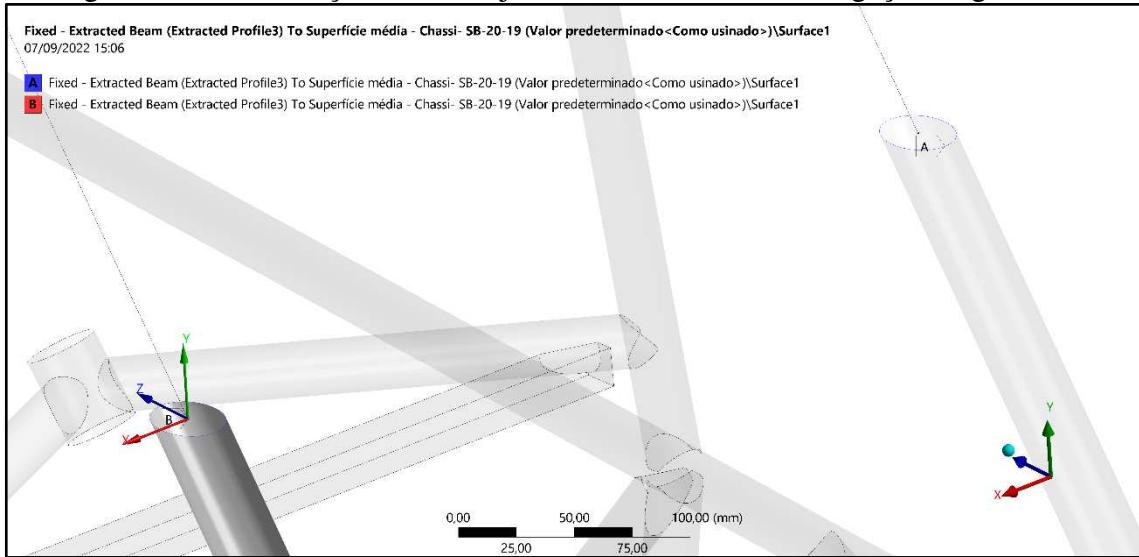
Junta A	Rigidez (N/mm)	1,00
	Coeficiente de amortecimento (N.s/mm)	0,00
Junta B	Rigidez (N/mm)	1,00
	Coeficiente de amortecimento (N.s/mm)	0,00

Fonte: Autor.

3.2.5.2.8. Ligações viga-casca

Finalmente, as últimas juntas cinemáticas do modelo foram utilizadas para a ligação entre os membros do chassi modelados por corpos de linha e por corpos de superfície. Estas ligações foram concebidas a partir de juntas fixas, definidas entre o vértice da extremidade do corpo em linha e a aresta circular do corpo em superfície, com sistema de coordenadas de referência no referido vértice, conforme exibe a figura 62.

Figura 62 - Visualização local das juntas fixas associadas às ligações viga-casca.



Fonte: Autor.

3.2.5.3. Malha

A malha do modelo mecânico foi gerada a partir da discretização da geometria em elementos finitos de viga, casca e sólidos. No ambiente *mechanical*, a geração de malha se dá a partir de dois itens fundamentais: a escolha dos tipos de elementos finitos e suas geometrias associadas, caracterizando o método de malha (*method*), e a especificação de dimensionamento destes elementos (*sizing*).

A partir da distribuição de tensão proveniente de análises estruturais estáticas (NETO *et al.*, 2022) realizadas em trabalhos anteriores, o chassi foi dividido em uma porção superior, destinada à representação de efeitos globais, a partir da correta descrição da rigidez, e outra, inferior, destinada à análise de efeitos locais, a partir da utilização de elementos com um maior número de GDL que possibilitam a captação destes efeitos.

Deste modo, conforme a geometria dos perfis estruturais tubulares do chassi e a distribuição de tensão a eles associada, a porção superior foi concebida em elementos finitos de viga de Timoshenko BEAM189 (figura 63), enquanto a inferior foi discretizada em elementos de triangulares de casca SHELL281 (figura 64). Os links de suspensão e direção, a partir da topologia compatível, também foram discretizados a partir de elementos SHELL281 (figura 64). Os demais componentes, a partir de uma geometria de maior complexidade, foram discretizados em elementos sólidos tetraédricos SOLID187 (figura 65). A justificativa da adoção de cada elemento finito às geometrias supracitadas se dá conforme especificado no subtópico de formulação dos EF utilizados no modelo.

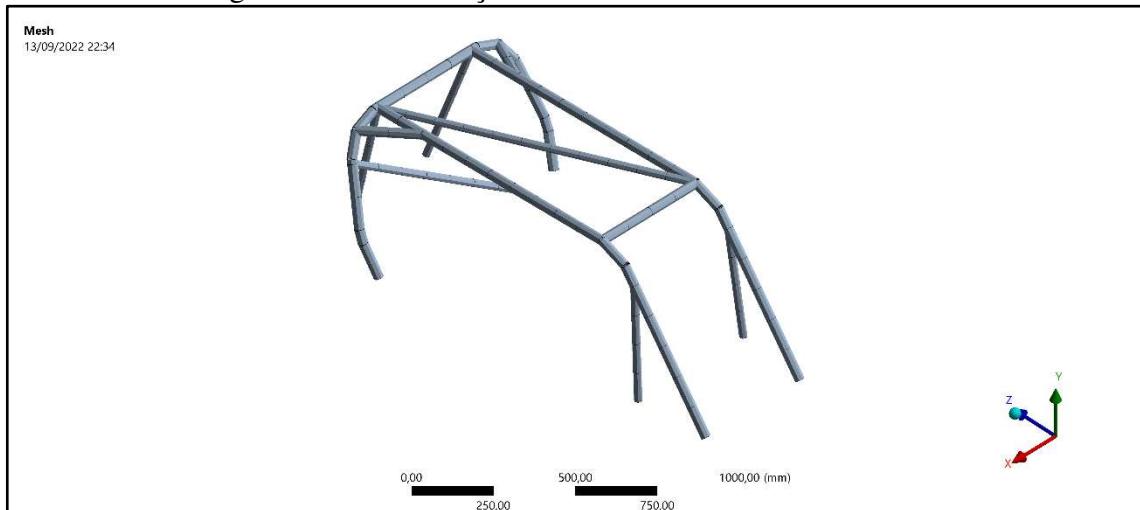
Com a definição dos métodos de malha, foi possível prosseguir para o dimensionamento dos elementos finitos. Foram utilizadas diferentes especificações de dimensionamento para os componentes associados a cada tipo de elemento finito, a partir dos itens presentes nas tabelas a seguir (23, 24 e 25).

Tabela 23 - *Body sizing* associado aos corpos de linha.

Tamanho do elemento (mm)	100
Captura de curvatura	Não
Captura de proximidade	Não

Fonte: Autor.

Figura 63 - Visualização da malha: elementos BEAM189.



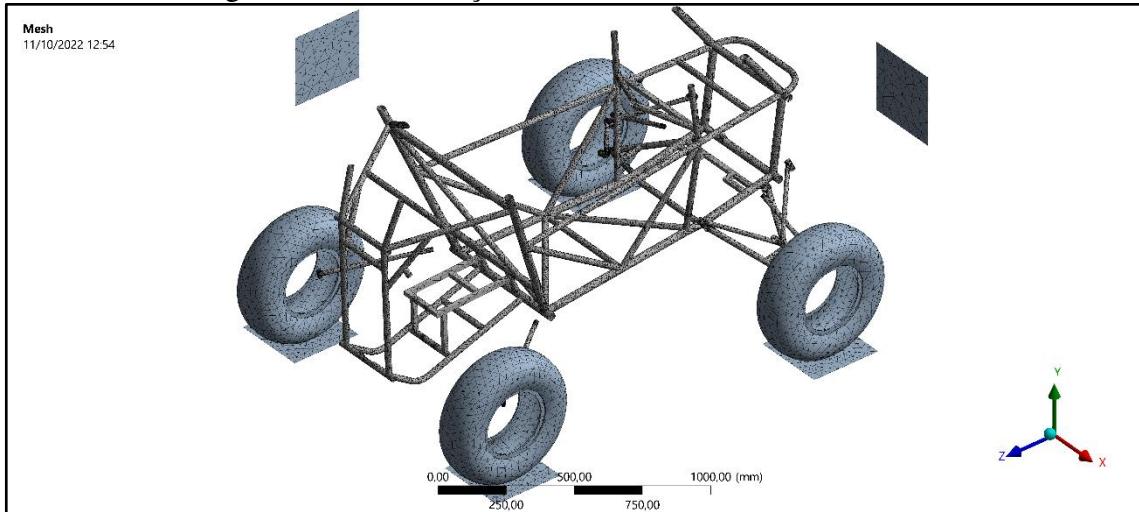
Fonte: Autor.

Tabela 24 - *Body sizing* associado aos corpos de superfície.

Tamanho do elemento (mm)	50
Captura de curvatura	Sim
Tamanho mínimo local (mm)	10
Razão de crescimento	1,20
Captura de proximidade	Não

Fonte: Autor.

Figura 64 - Visualização da malha: elementos SHELL281.



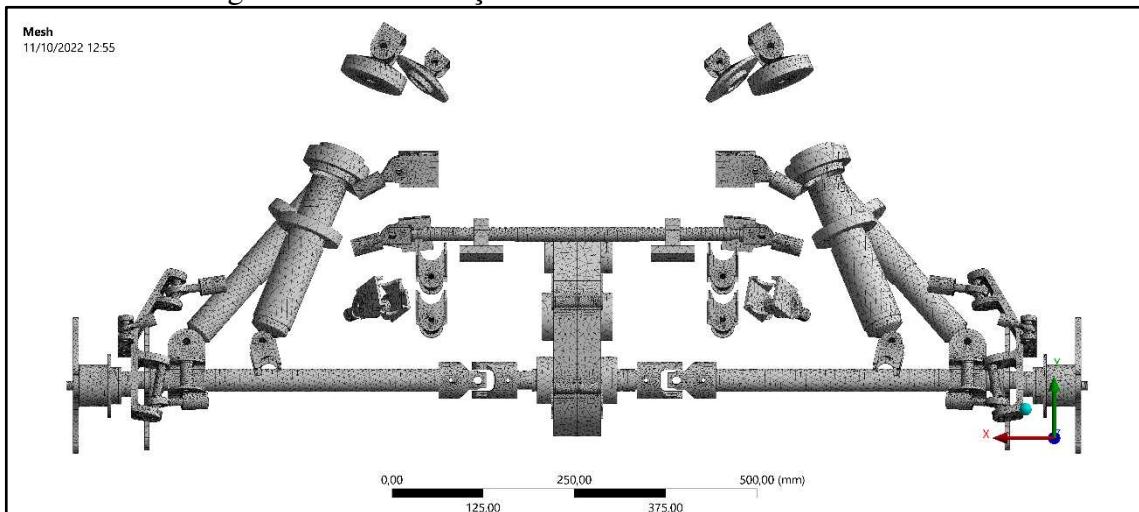
Fonte: Autor.

Tabela 25 - *Body sizing* associado aos corpos sólidos.

Tamanho do elemento (mm)	50
Captura de curvatura	Sim
Tamanho mínimo local (mm)	2,5
Razão de crescimento	1,20
Captura de proximidade	Não

Fonte: Autor.

Figura 65 - Visualização da malha: elementos SOLID187.



Fonte: Autor.

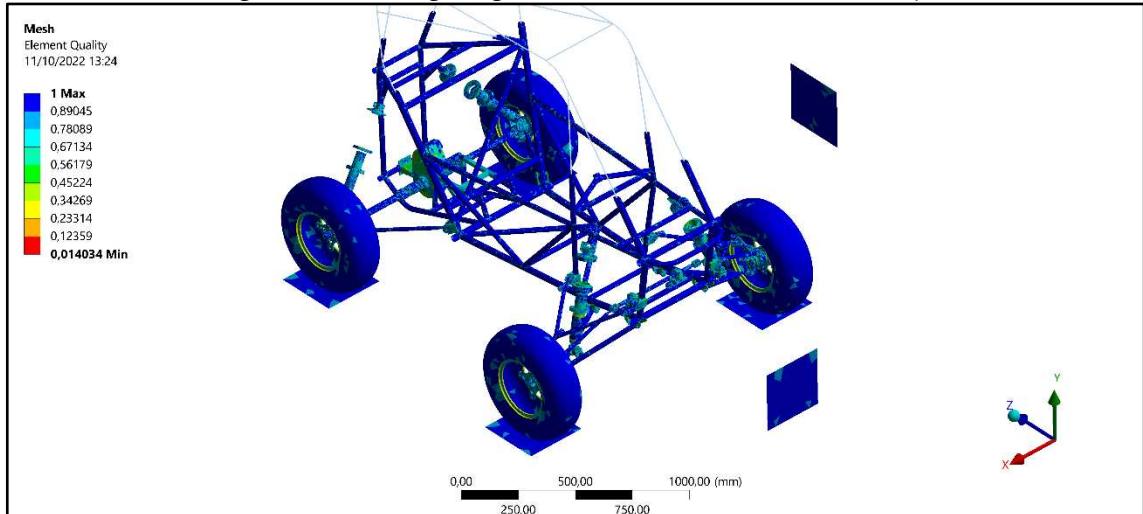
Para a verificação de adequação da malha, foram utilizadas as métricas *Element Quality*, *Skewness* e *Jacobian Ratio (corner nodes)*, conforme especificado no subtópico de distorção do elemento. Cada métrica foi avaliada a partir do valor médio e do desvio padrão em relação ao número total de elementos do modelo discretizado, sendo a verificação tomada a partir dos níveis de referência já especificados. Esta verificação pode ser visualizada a partir das figuras (66 a 68) e tabelas a seguir (26 a 28).

Tabela 26 - Verificação da métrica *Element Quality*.

Valor médio	0,82
Desvio padrão	0,13
Verificação	Aceitável

Fonte: Autor.

Figura 66 - Plotagem global da métrica *Element Quality*.



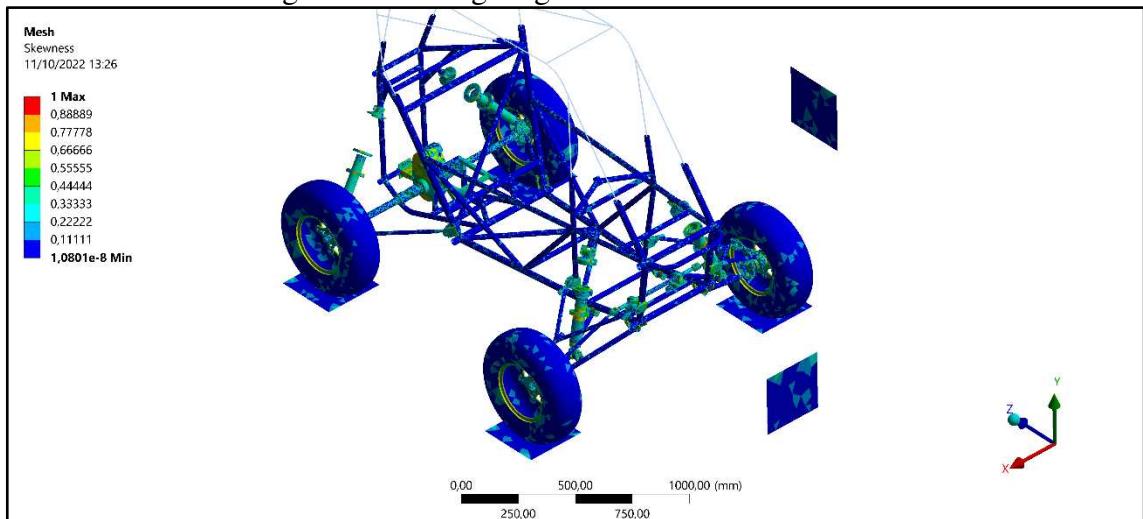
Fonte: Autor.

Tabela 27 - Verificação da métrica *Skewness*.

Valor médio	0,25
Desvio padrão	0,16
Verificação	Aceitável

Fonte: Autor.

Figura 67 - Plotagem global da métrica *Skewness*.



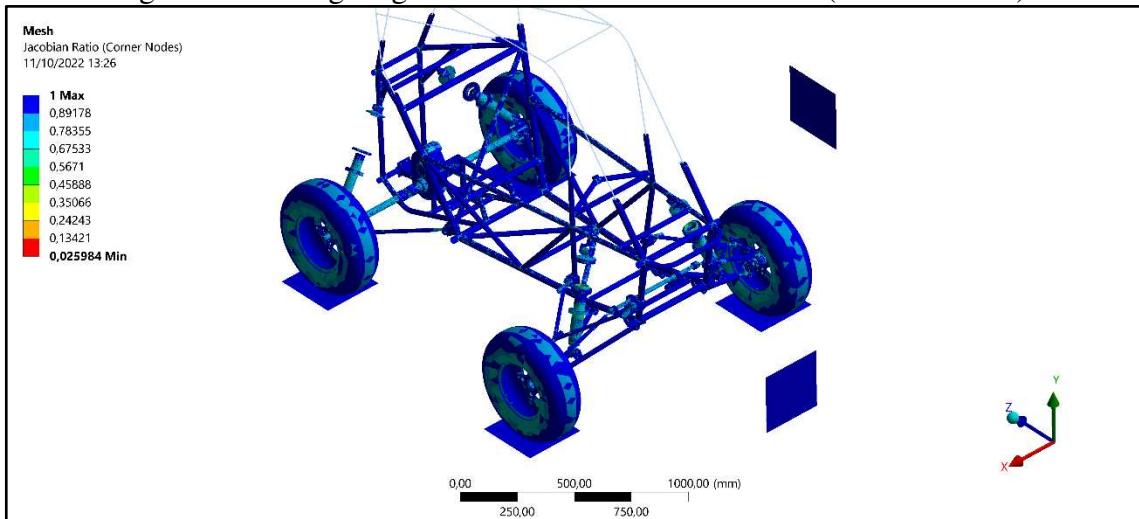
Fonte: Autor.

Tabela 28 - Verificação da métrica *Jacobian Ratio (Corner Nodes)*.

Valor médio	0,94
Desvio padrão	0,09
Verificação	Aceitável

Fonte: Autor.

Figura 68 - Plotagem global da métrica Jacobian Ratio (Corner Nodes).



Fonte: Autor.

Com a malha gerada verificada eposta como adequada a partir das métricas evidenciadas, foi possível prosseguir para a análise modal do sistema.

3.3.Análise modal

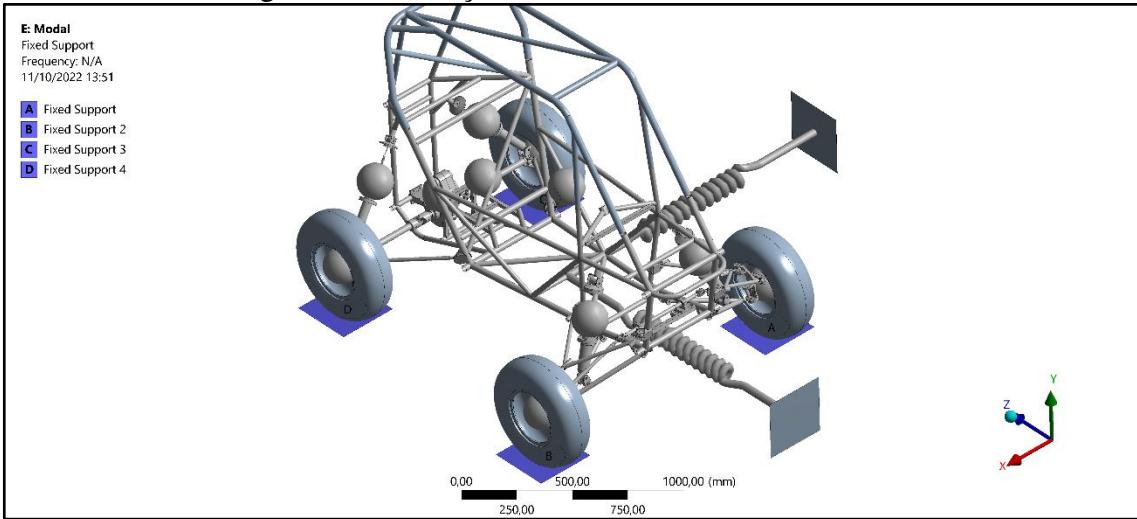
A partir da análise modal, foi possível inspecionar o comportamento do modelo mecânico em termos de rigidez e massa, a partir dos seus modos de vibração, associados diretamente aos seus GDL.

Uma correta descrição da rigidez associa-se diretamente ao atendimento da condição de compatibilidade entre os corpos conectados por compartilhamento de topologia e à correta definição das juntas cinemáticas entre os corpos associados, enquanto uma correta descrição da massa se associa à distribuição de massa do modelo, bem como à magnitude de massa total, translacional e rotacional.

De fato, desde a concepção inicial do modelo mecânico, as juntas cinemáticas foram verificadas continuamente a partir de diferentes análises modais, propiciando uma correta descrição dos GDL do protótipo a partir da correção de juntas incorretas ou pouco representativas.

Com o modelo mecânico totalmente construído, foi tomada a seguinte análise modal (figura 69) para verificação dos graus de liberdade, a partir da fixação das faces inferiores das bases de excitação, ou seja, uma análise modal em condição restrita.

Figura 69 - Condições de contorno da análise modal.



Fonte: Autor.

Foi selecionada a extração de 10 modos de vibração, ao passo que esta análise se destina, no presente trabalho, unicamente à verificação dos graus de liberdade do modelo. Foram obtidos os resultados exibidos na tabela 29.

Tabela 29 - Resultados obtidos da extração modal.

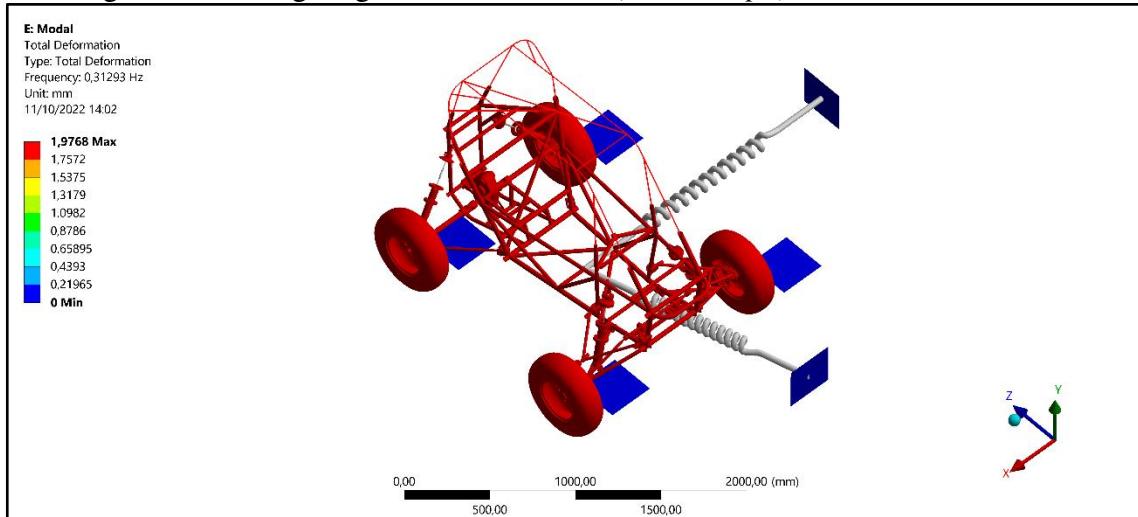
Modo	Frequência (hz)
1	0,31
2	1,42
3	3,52
4	5,18
5	10,36
6	11,44
7	15,03
8	15,16
9	15,36
10	15,62

Fonte: Autor.

A partir da inexistência de modos de corpo rígido, foi constatado o atendimento da condição de compatibilidade entre os corpos cuja topologia foi compartilhada. Em comparação às frequências de referência de *pitch*, *bounce* e *roll* calculadas analiticamente para o protótipo SB-20, foram obtidos modos de autovetores diferenciados, com autovalores de maior magnitude, em função de simplificações da própria formulação analítica.

O primeiro modo de vibração é referente ao deslocamento translacional do veículo no eixo X global (figura 70), associado unicamente às rigidezes das molas fracas. Um ponto de relevância é que, caso este modo obtenha grande participação na resposta dinâmica do modelo na análise estrutural transiente, isto é, caso seja observado intenso escorregamento lateral, cabe a revisão das rigidezes associadas às molas fracas.

Figura 70 - Plotagem global do autovetor (*mode-shape*) associado ao modo 1.

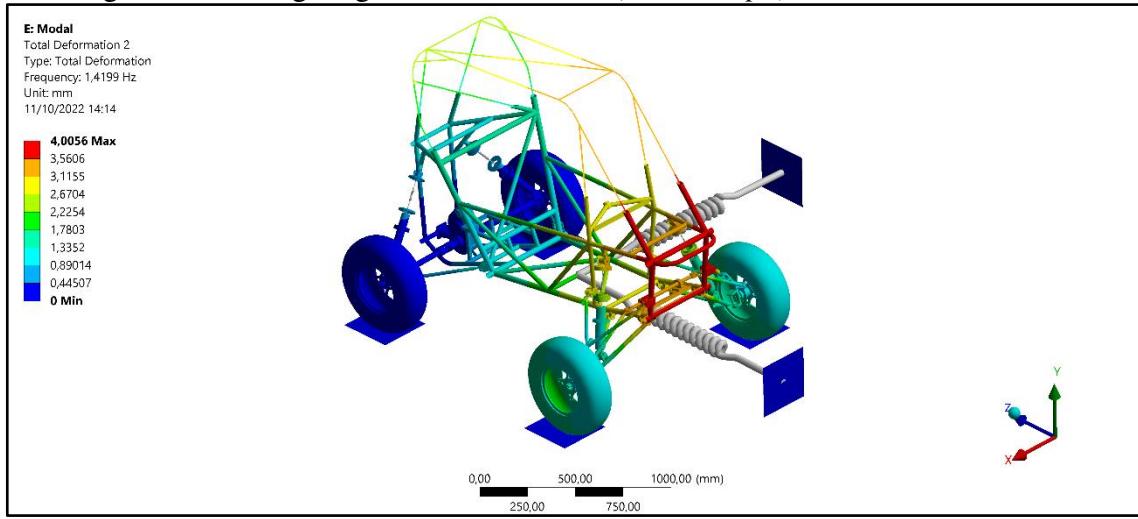


Fonte: Autor.

O segundo modo de vibração esperado seria o de deslocamento translacional do veículo no eixo Z global, em frequência semelhante à do primeiro modo, em função da participação das molas fracas. Este modo não foi observado, pois, por inspeção, a não variação de *Toe* acrescentou rigidez a este grau de liberdade. Todavia, com os demais modos em frequências compatíveis, este item não provocou necessidade de revisão do modelo.

Em substituição, o segundo modo combina os modos de *Pitch* e *Bounce*, sob frequência aproximada de 1,42 hz, conforme a figura 71.

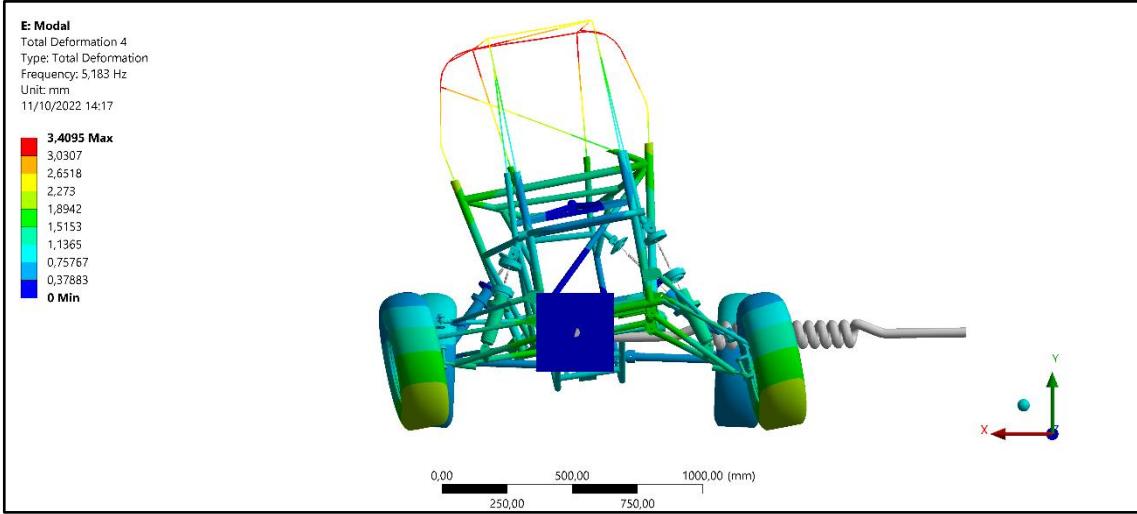
Figura 71 - Plotagem global do autovetor (*mode-shape*) associado ao modo 2.



Fonte: Autor.

Enquanto o terceiro modo é o de rotação do veículo no eixo Y, o quarto modo é o de *Roll*, com frequência aproximada de 5,18 hz (figura 72).

Figura 72 - Plotagem global do autovetor (*mode-shape*) associado ao modo 4.



Fonte: Autor.

A partir de frequências de maior magnitude, foi cogitada a necessidade de redução do *step size* das funções de excitação, previamente definido com base na frequência de 2,36 hz, associada ao movimento de *pitch* do segundo estágio da suspensão, conforme o cálculo analítico.

Todavia, com a presença do fator “20” associado ao cálculo do *step size*, conforme o referido subtópico, foi optado por manter o valor de incremento de 0,02 s, reservando a possibilidade de refinamento mediante a obtenção de dificuldades de convergência.

Com a verificação efetuada, foi possível prosseguir para a análise estrutural transiente, tratada a seguir.

3.4.Análise estrutural transiente

Em função da quantidade de incrementos de tempo e do tipo de solução mais robusta adotada, isto é, a partir das leis de variação do método de integração HHT- α , a análise estrutural transiente foi particionada em três, de forma compatível com a via de operação construída.

A partir da partição da solução, foi possível obter um melhor controle logístico dos recursos computacionais, tendo em vista que as soluções são obtidas em tempos menores, em adição a um menor tempo de retrabalho face a dificuldades de convergência ou outras inadequações no modelo.

Nesta partição, cada parte da via de operação consiste em um trecho inicial, um obstáculo e um trecho final. Os trechos inicial e final possuem deslocamento vertical nulo, conforme citado anteriormente, possibilitando a “independência dinâmica” que justifica a

possibilidade de partição da solução em análises diferentes. Convenciona-se a nomenclatura parte 1, 2 e 3.

Para a execução das análises estruturais transientes, foram estabelecidas as seguintes configurações de análise, no que diz respeito ao controle do incremento: foi inserido o instante de tempo final t_n , foi desativado o *auto time stepping*, ferramenta a partir da qual o software consegue alterar o tamanho do incremento de tempo no decorrer da solução, foi estabelecido o *time step* de 0,02 s, e a integração no tempo foi tomada com os parâmetros de integração pré-definidos pelo software para aplicações de velocidade moderada (tabela 30):

Tabela 30 - Parâmetros de integração do método HHT- α utilizados.

α	0,3025
δ	0,6000
α_m	0,0000
α_f	0,1000

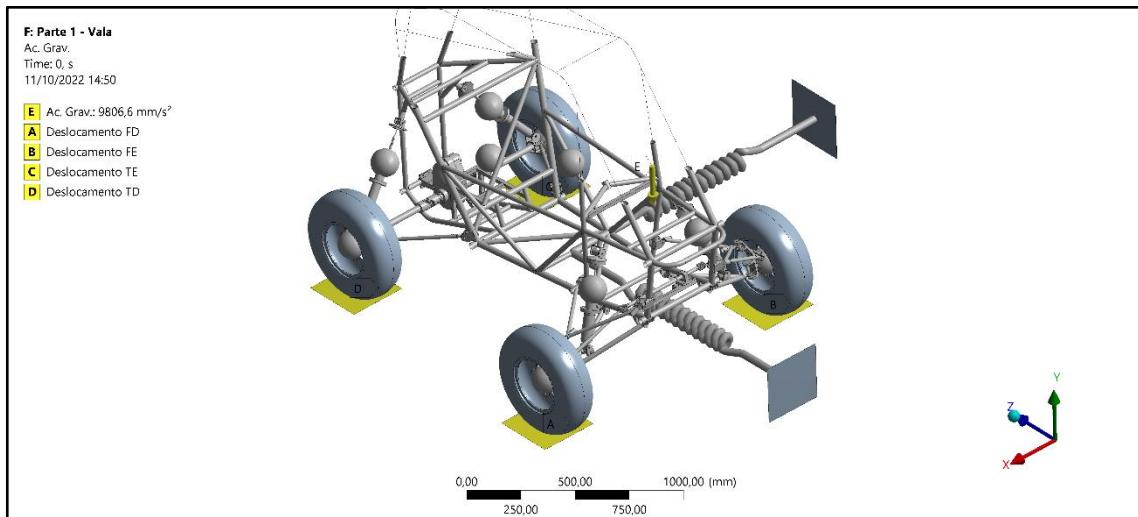
Fonte: Autor.

A partir dessas configurações, a convergência foi obtida nas três análises, de modo que não foi necessária a adoção de um incremento de tempo menor. As condições de contorno e os resultados gerais das análises estruturais foram exibidos a seguir.

3.4.1. Parte 1 – obstáculo “Vala”

Para esta análise, as condições de contorno foram as dispostas na imagem seguir (figura 73):

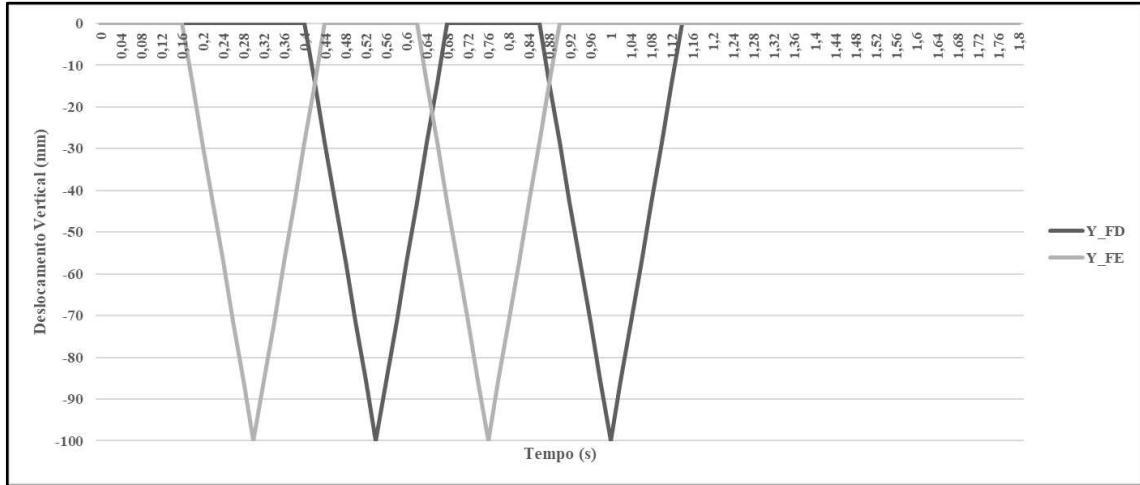
Figura 73 - Condições de contorno da análise estrutural transiente associada ao obstáculo “Vala”.



Fonte: Autor.

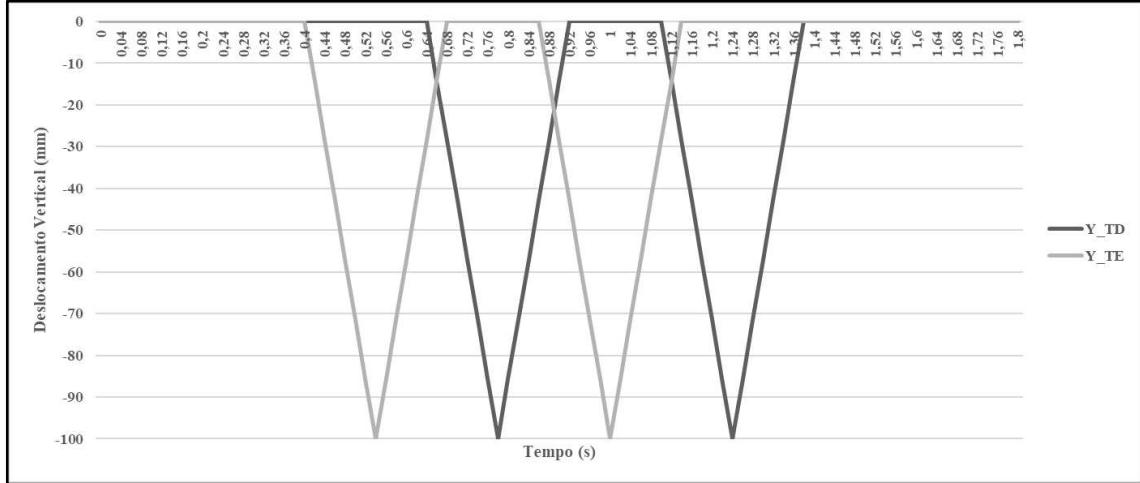
As funções de excitação foram inseridas em formato tabular. Uma visualização gráfica é disposta a partir das imagens seguir (figuras 74 e 75).

Figura 74 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Vala”: porção dianteira.



Fonte: Autor.

Figura 75 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Vala”: porção traseira.

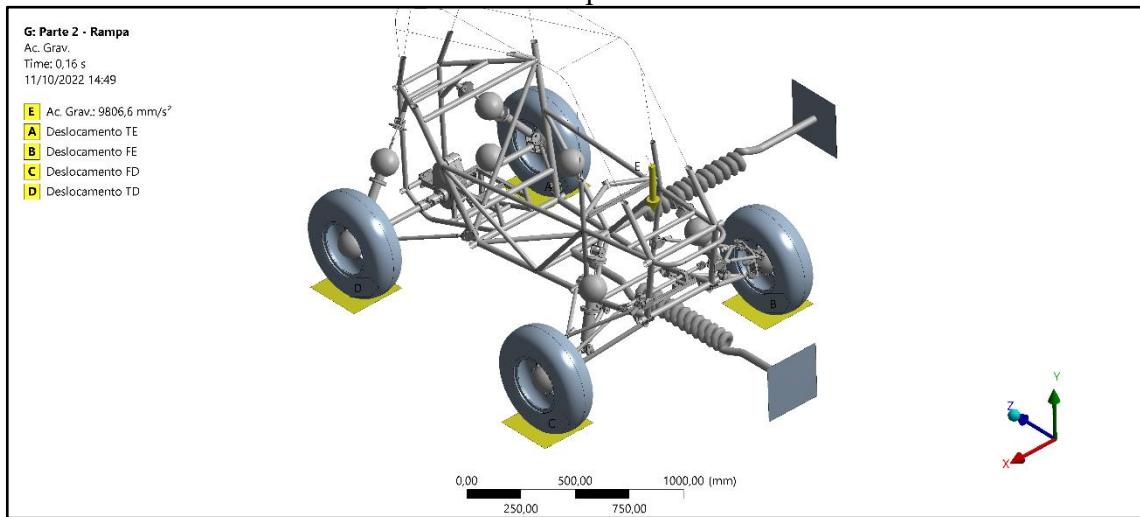


Fonte: Autor.

3.4.2. Parte 2 – obstáculo “Rampa”

De forma semelhante, as condições de contorno para a segunda análise, associada ao obstáculo “Rampa”, foram (figuras 76, 77 e 78):

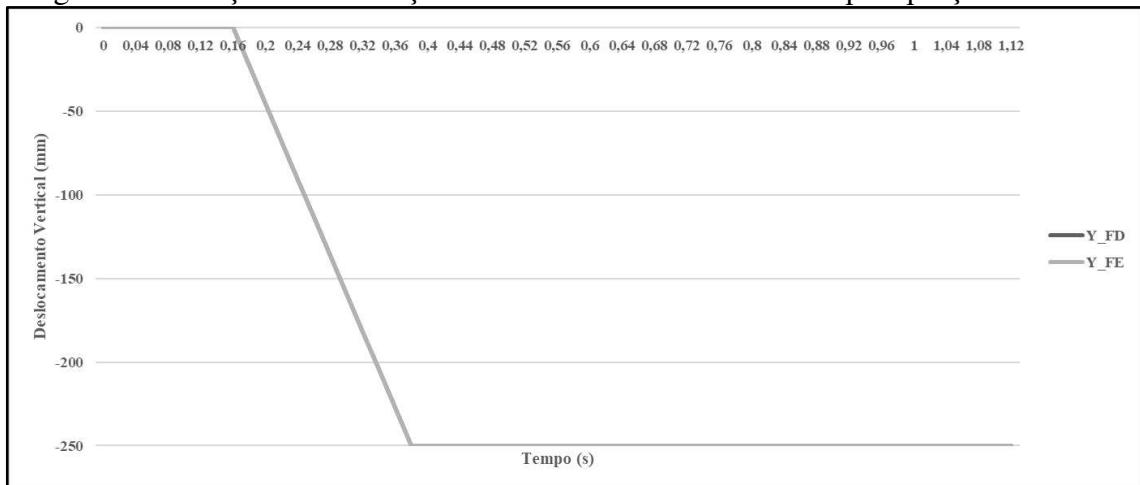
Figura 76 - Condições de contorno da análise estrutural transiente associada ao obstáculo “Rampa”.



Fonte: Autor.

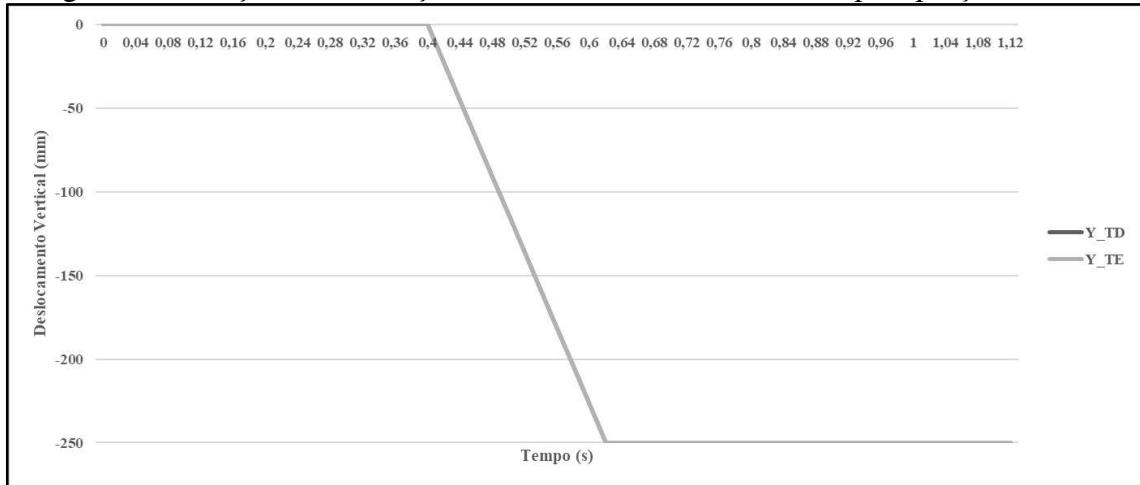
Sendo as funções de excitação dispostas nos gráficos a seguir:

Figura 77 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Rampa”: porção dianteira.



Fonte: Autor.

Figura 78 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Rampa”: porção traseira.

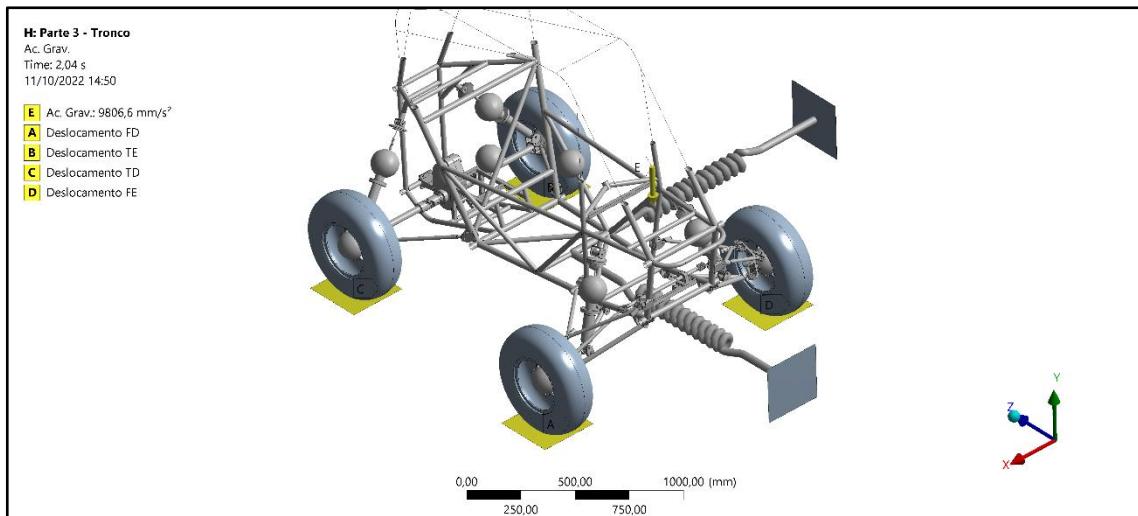


Fonte: Autor.

3.4.3. Parte 3 – obstáculo “Tronco”

A última análise, associada ao obstáculo “Tronco”, partiu das seguintes condições de contorno (figuras 79, 80 e 81):

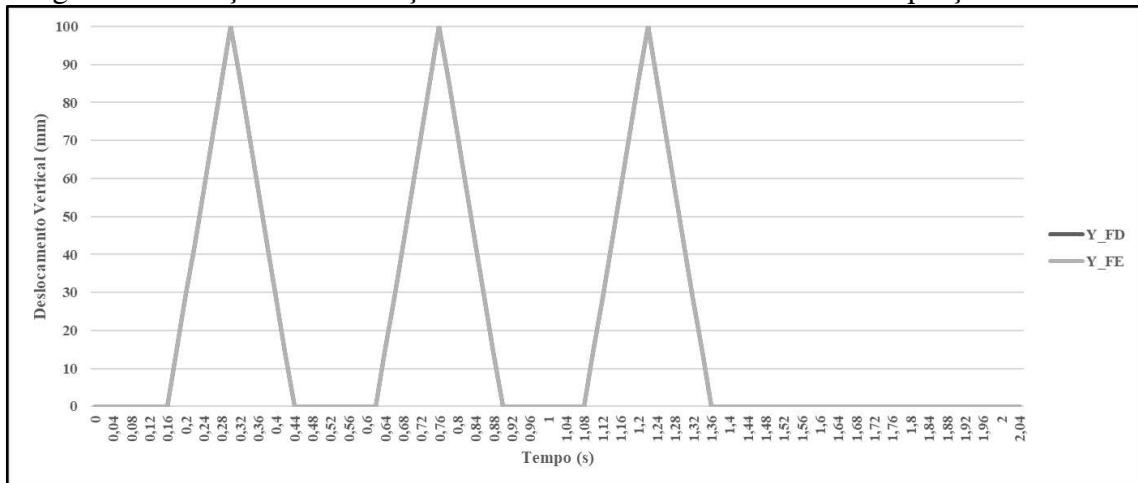
Figura 79 - Condições de contorno da análise estrutural transiente associada ao obstáculo “Tronco”.



Fonte: Autor.

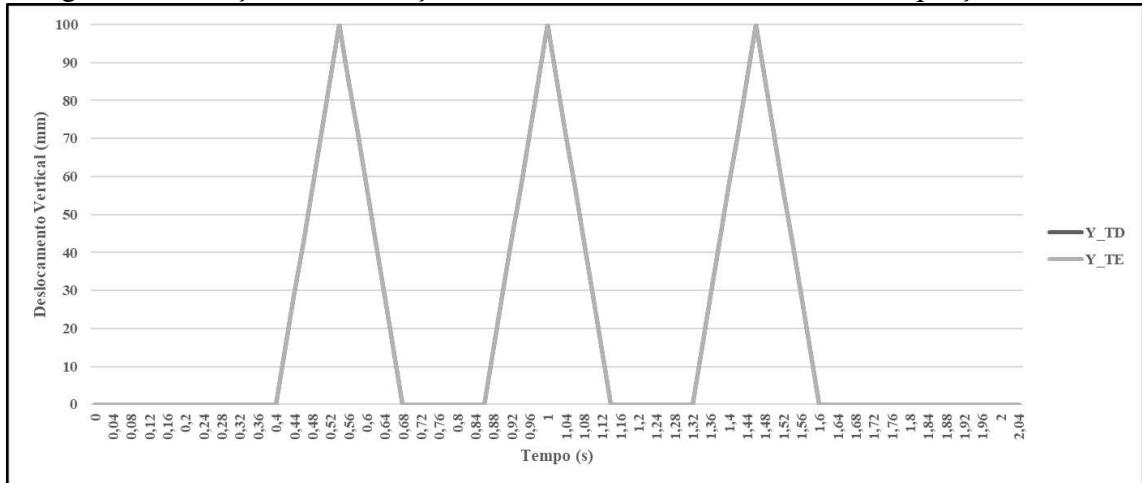
Sendo aplicadas as seguintes funções de excitação:

Figura 80 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Tronco”: porção dianteira.



Fonte: Autor.

Figura 81 - Funções de excitação associadas ao obstáculo “Tronco”: porção traseira.

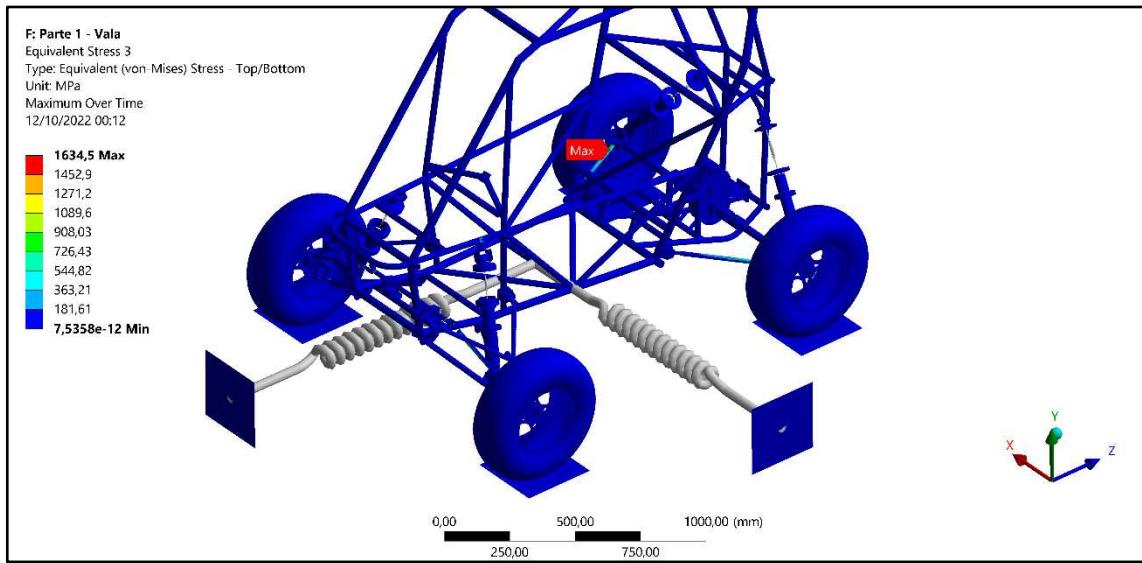


Fonte: Autor.

3.4.4. Resultados gerais e definição do ponto crítico

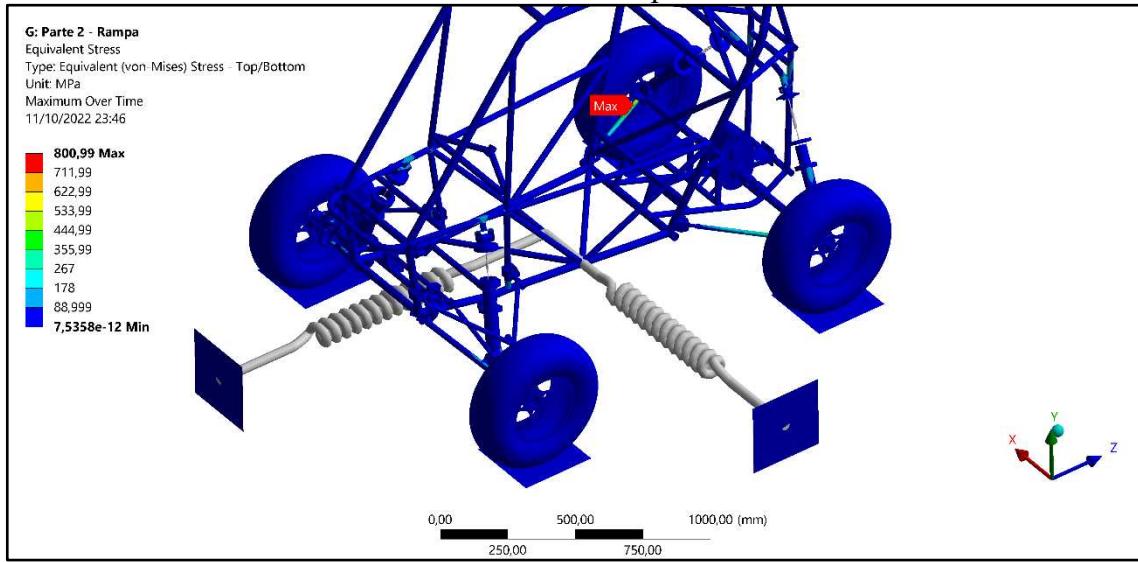
Sob atuação das funções de excitação, o modelo apresentou comportamento mecânico compatível. Nas três análises, os valores máximos de tensão equivalente de von Mises foram associados aos *links* traseiros de suspensão (figuras 82, 83 e 84), atingindo magnitudes incompatíveis com as estabelecidas em projeto, o que reforça a necessidade de revisão deste componente. Destaca-se ainda que, em função da elasticidade linear associada ao material de análise, o valor em tensão só é representativo até um valor típico para o limite de linearidade, embora este modelo de elasticidade permita que a tensão aumente indefinitivamente sob mesmo módulo de elasticidade. Foi possível ainda a avaliação, em caráter preliminar, do deslocamento resultante e do deslocamento direcional no eixo vertical.

Figura 82 - Plotagem global da tensão equivalente de von Mises: instante de valor máximo, obstáculo “Vala”.



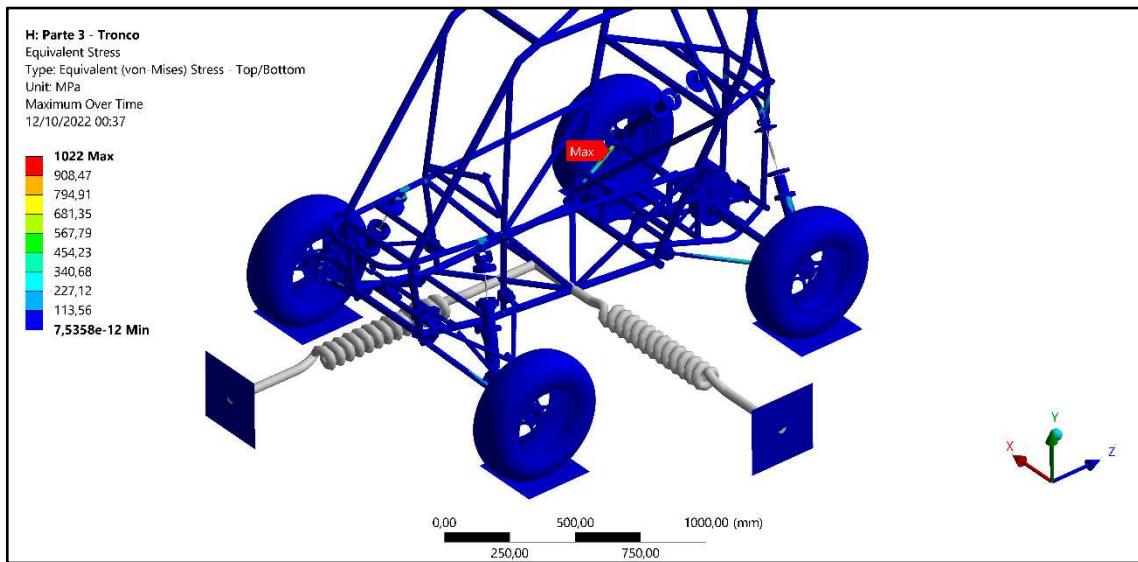
Fonte: Autor.

Figura 83 - Plotagem global da tensão equivalente de von Mises: instante de valor máximo, obstáculo “Rampa”.



Fonte: Autor.

Figura 84 - Plotagem global da tensão equivalente de von Mises: instante de valor máximo, obstáculo “Tronco”.



Fonte: Autor.

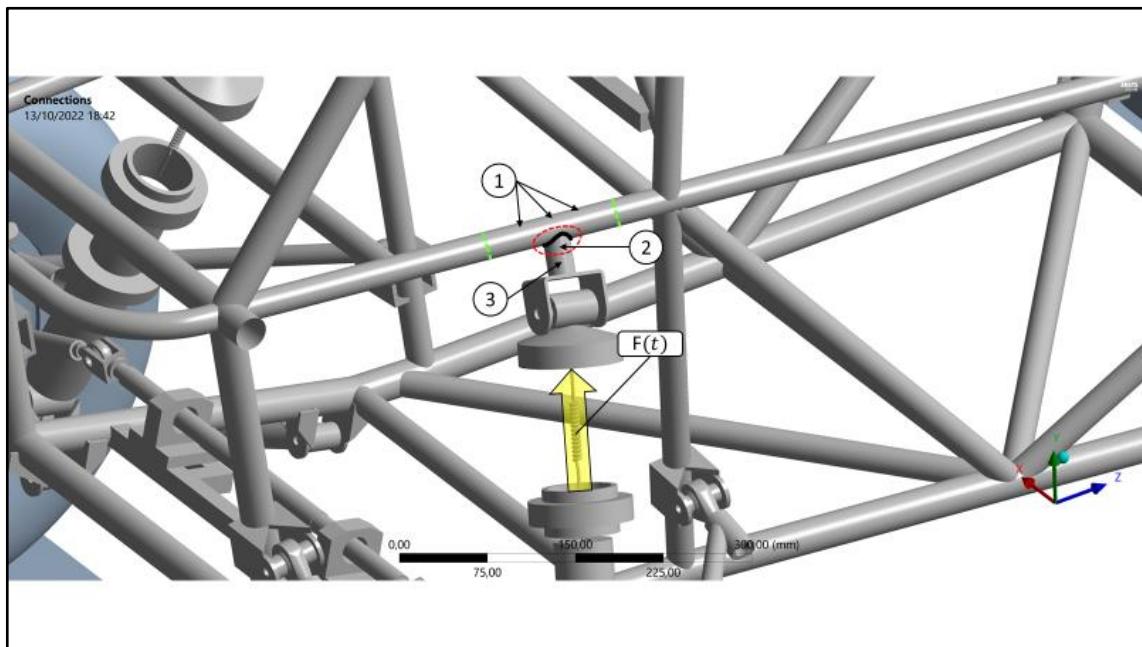
Por inspeção, credita-se estas magnitudes elevadas à variação da distância entre os *hardpoints* que definem o *link* durante o curso da suspensão, porém, faz-se necessária uma avaliação mais aprofundada. Todavia, conforme estabelecido nos objetivos do presente trabalho, a análise estrutural será centrada no chassi. Desta forma, foi estabelecido o ponto crítico para a análise deste componente, sendo direcionadas a esse ponto as análises de falha estática e por fadiga, trabalhadas posteriormente.

Em conformidade com análises estruturais estáticas realizadas anteriormente (NETO *et al.*, 2022), as análises transientes evidenciaram que os membros do chassi mais solicitados são

aqueles diretamente associados aos suportes dos amortecedores: “SIM” e treliça do “FAB_{mid}” – conforme a nomenclatura do RATS –, embora outros membros, associados aos suportes dos links de suspensão, também apresentem solicitações consideráveis, como no caso dos membros “FAB_{mid}”, “LFS”, “FAB_{low}” dianteiro e traseiro e “FBM_{low}”.

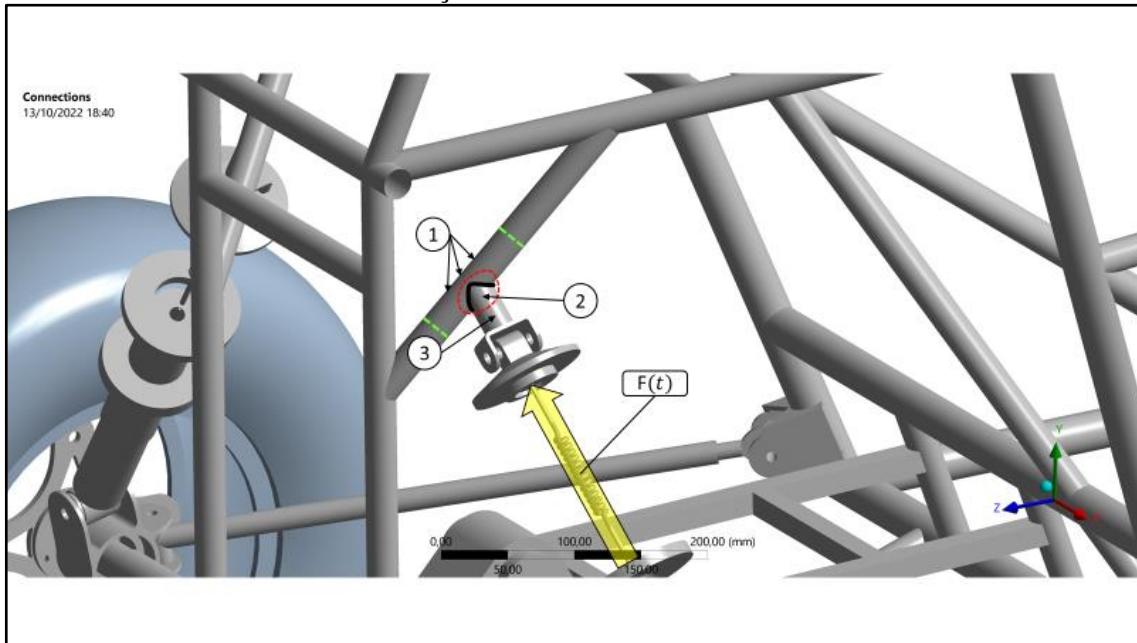
Por inspeção, dentre cada análise transiente e seus respectivos incrementos de tempo, o ponto crítico foi obtido dentre os membros “SIM” e treliça do “FAB_{mid}”, considerando ainda as porções esquerda e direita do chassi, tendo em vista a assimetria da estrutura em análise e do carregamento. Os pontos de análise para definição do ponto crítico, nestes membros, foram obtidos a partir da consideração acerca da representatividade do valor obtido, em função de efeitos locais e do comportamento mecânico resultante destes efeitos. Para a discussão dos pontos de análise, consideram-se as figuras a seguir (85 e 86).

Figura 85 - Subsistema considerado para a discussão acerca dos pontos de análise, associado ao membro “SIM”.



Fonte: Autor.

Figura 86 - Subsistema considerado para a discussão acerca dos pontos de análise, associado à treliça do membro “FAB_{mid}”.



Fonte: Autor.

Dentre os membros do chassi mais solicitados, as linhas tracejadas em verde delimitam a porção de tensão mais elevada, sob atuação da força uniaxial em amarelo, proveniente do amortecedor. Em preto, tem-se o cordão de solda que efetua a ligação soldada entre o membro do chassi e o suporte do amortecedor, enquanto a linha tracejada em vermelho delimita a região cujos valores de tensão não são representativos em sua porção interna. Esta não representatividade se dá a partir dos seguintes itens:

1. Esta região não possui representatividade em rigidez, pois o modelo computacional não considera a presença da geometria do corpo cordão de solda, que enrijece localmente a estrutura e altera a distribuição de tensão local. A rigidez ainda é afetada pela pré-carga induzida pelo processo de soldagem, em função das tensões residuais, provenientes da transmissão de calor (a partir do campo de deformações térmicas);
2. Esta região não possui representatividade em elasticidade, pois o modelo computacional não considera a presença de um segundo material, associado ao cordão de solda, e ainda não considera as alterações locais nas propriedades mecânicas do primeiro material, induzidas pelo processo de soldagem;
3. Com a definição da porção crítica associada à uma junta soldada, teria de se considerar as propriedades mecânicas do material de adição no cálculo das análises de falha estática e por fadiga. Ao passo que é uma prática comum a soldagem a partir de um material de adição mais resistente do que o material de base, ao se analisar a porção crítica associada

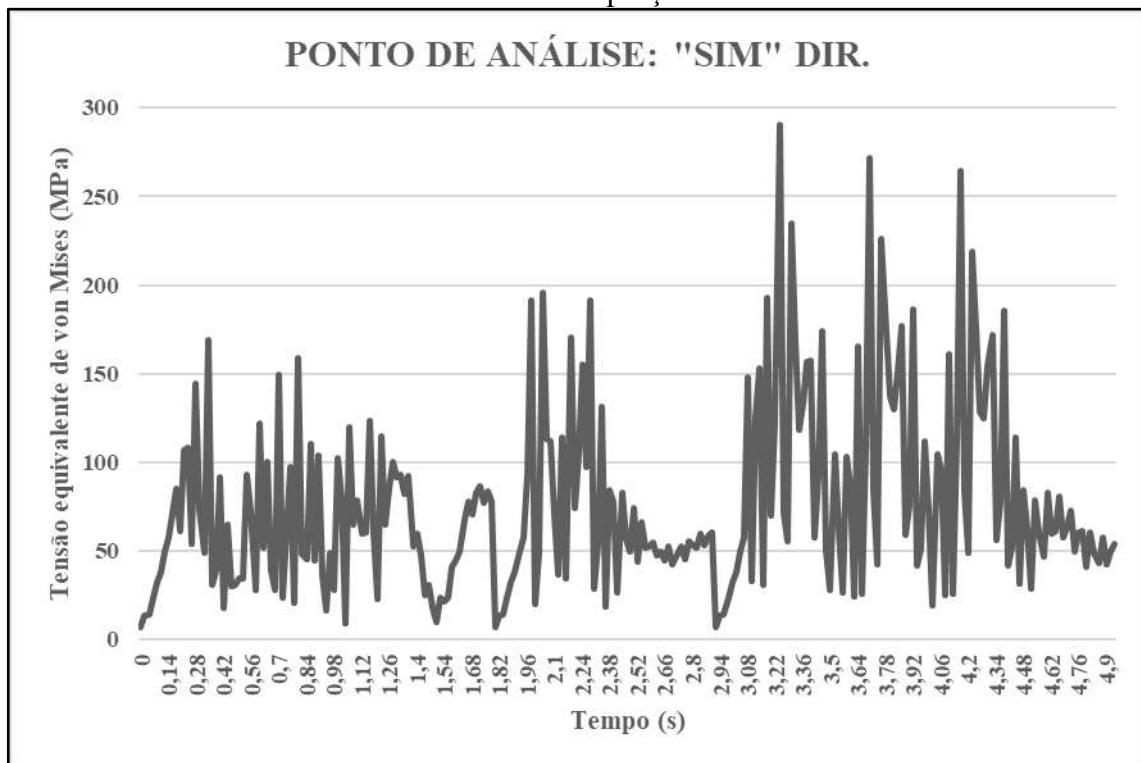
a uma junta soldada, seria provável a obtenção de um coeficiente de segurança maior para a falha estática. Todavia, a vida em fadiga seria duramente afetada, em função da alta concentração de tensão em fadiga, típica de juntas soldadas;

4. Por fim, destaca-se que existem variadas técnicas de modelagem empregadas à análise de juntas soldadas por elementos finitos, com variados níveis de representatividade e complexidade. Todavia, exclui-se do escopo do presente trabalho o emprego de uma destas técnicas, limitando-o à análise estrutural do chassi em porções de análise associadas a efeitos globais, condição suficiente ao cumprimento dos objetivos estabelecidos.

Com isso, das figuras 85 e 86, destacam-se as regiões 3, região do suporte do amortecedor livre de efeitos locais cuja distribuição de tensão é característica de uma casca, 2, cuja distribuição de tensão no modelo computacional não é representativa, e 1, região do membro do chassi mais solicitado, incluída na porção de maior valor de tensão e livre de efeitos locais, sob distribuição de tensão característica de uma casca, com os esforços de flexão e tração ou compressão combinados. Deste modo, a região 1 é considerada a porção de análise, dentro da qual o ponto de análise é definido como o nó de maior magnitude em tensão equivalente de von Mises.

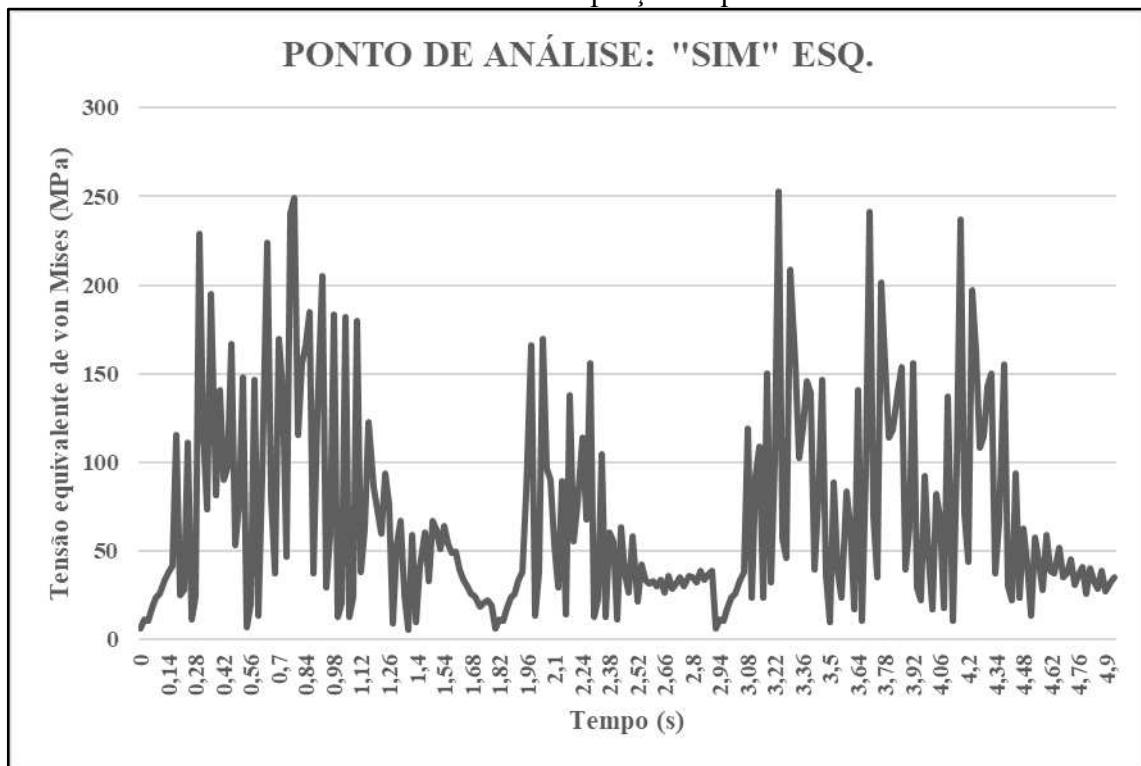
Os valores em tensão equivalente de von Mises obtidos para os pontos de análise dos membros “SIM” e treliça do “FAB_{mid}” foram os exibidos a partir das figuras a seguir (figuras 87 a 90).

Figura 87 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo.



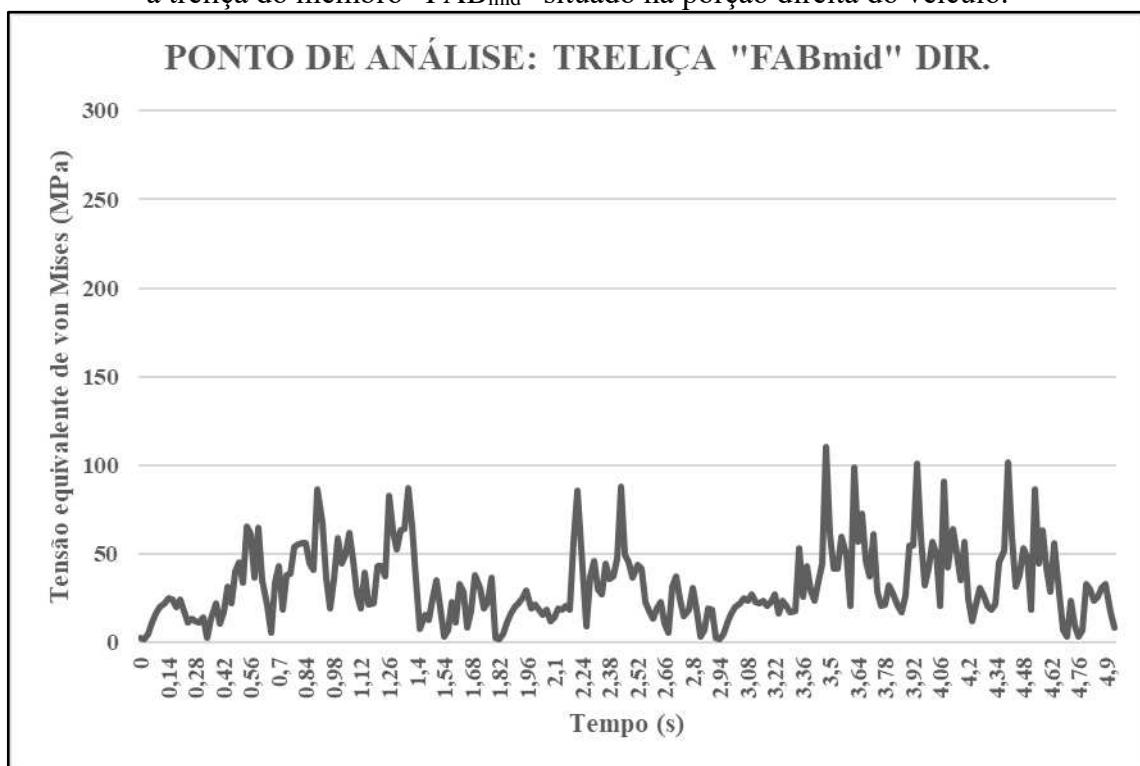
Fonte: Autor.

Figura 88 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo.



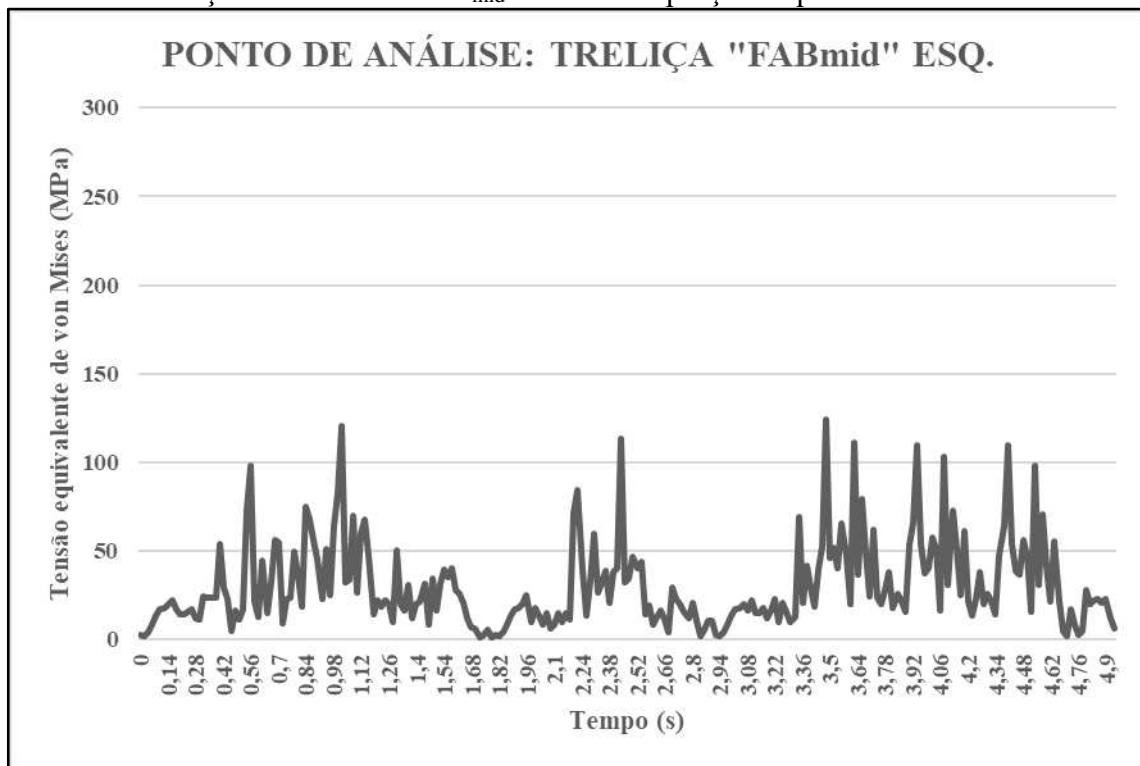
Fonte: Autor.

Figura 89 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado à treliça do membro “FAB_{mid}” situado na porção direita do veículo.



Fonte: Autor.

Figura 90 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado à treliça do membro “FAB_{mid}” situado na porção esquerda do veículo.



Fonte: Autor.

A partir destes resultados, foi possível descartar os pontos associados aos membros treliça do “FAB_{mid}” para a definição do ponto crítico, em função da considerável diferença de amplitude quando em comparação aos associados aos membros “SIM”.

Foi possível, ainda, verificar que o ponto de análise no “SIM” associado à porção direita apresentou maior valor de sobrecarga, sendo este o ponto crítico para a análise de falha estática. Todavia, para a análise de fadiga, faz-se necessário o cálculo para ambos os pontos, tendo em vista a diferença no histórico de tensões das porções esquerda e direita, ao passo que, para os três obstáculos, os valores das porções foram diferentes. Deste modo, o ponto crítico para a análise de falha por fadiga é aquele cuja vida for menor, dentre os dois pontos de análise no membro “SIM”.

3.5. Análise da resposta dinâmica do sistema

A análise da resposta dinâmica do sistema foi realizada, em caráter simplificado, a partir da análise de transmissibilidade de deslocamento e da análise da aceleração da massa suspensa, conforme os subtópicos a seguir.

3.5.1. Transmissibilidade de deslocamento

A definição da transmissibilidade de deslocamento TD em um sistema excitado pela base é dada por (RAO, 2009):

$$TD(t) = \frac{Y(t)}{Y_{base}(t)} \quad (197)$$

Em que Y é o deslocamento da massa oscilante e Y_{base} o deslocamento da base, sendo TD uma medida adimensional. Com isso, efetuando a divisão cada quarto de carro, tem-se, para a massa suspensa:

$$TD_{MSFD}(t) = \frac{Y_{MSFD}(t)}{Y_{baseFD}(t)} \quad (198)$$

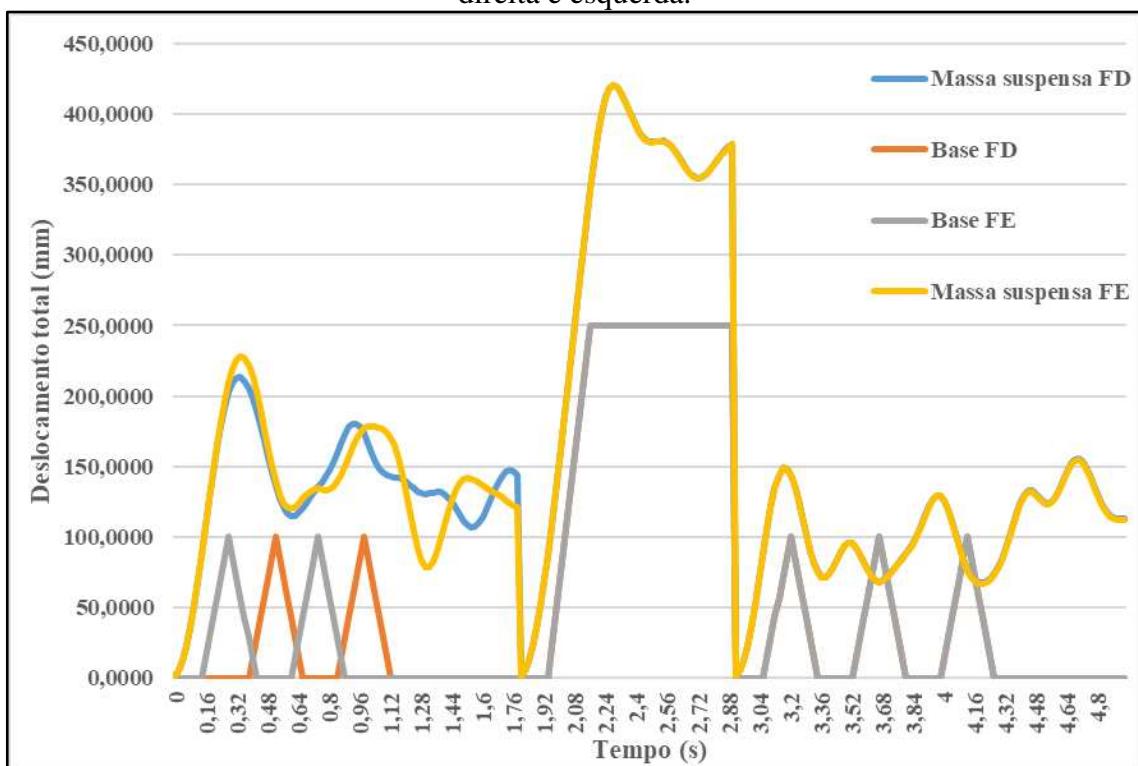
Calcula-se da mesma forma para os quartos de carro FE, TD e TE. A medida da transmissibilidade para a mesma não suspensa é desconsiderada, pois o deslocamento da massa não suspensa pode ser aproximado para o mesmo do da base, em função da baixa deflexão elástica do pneu, dentre outros fatores. Com isso, interessa determinar as transmissibilidades máximas:

1. $TD_{MSFD_{max}}$;

2. $TD_{MSFE_{max}}$;
3. $TD_{MSTD_{max}}$;
4. $TD_{MSTE_{max}}$.

Para a porção frontal, foram obtidos os seguintes resultados para os deslocamentos das massas suspensas e das bases (figura 91). Foi considerado o deslocamento total, soma vetorial dos deslocamentos translacionais cartesianos.

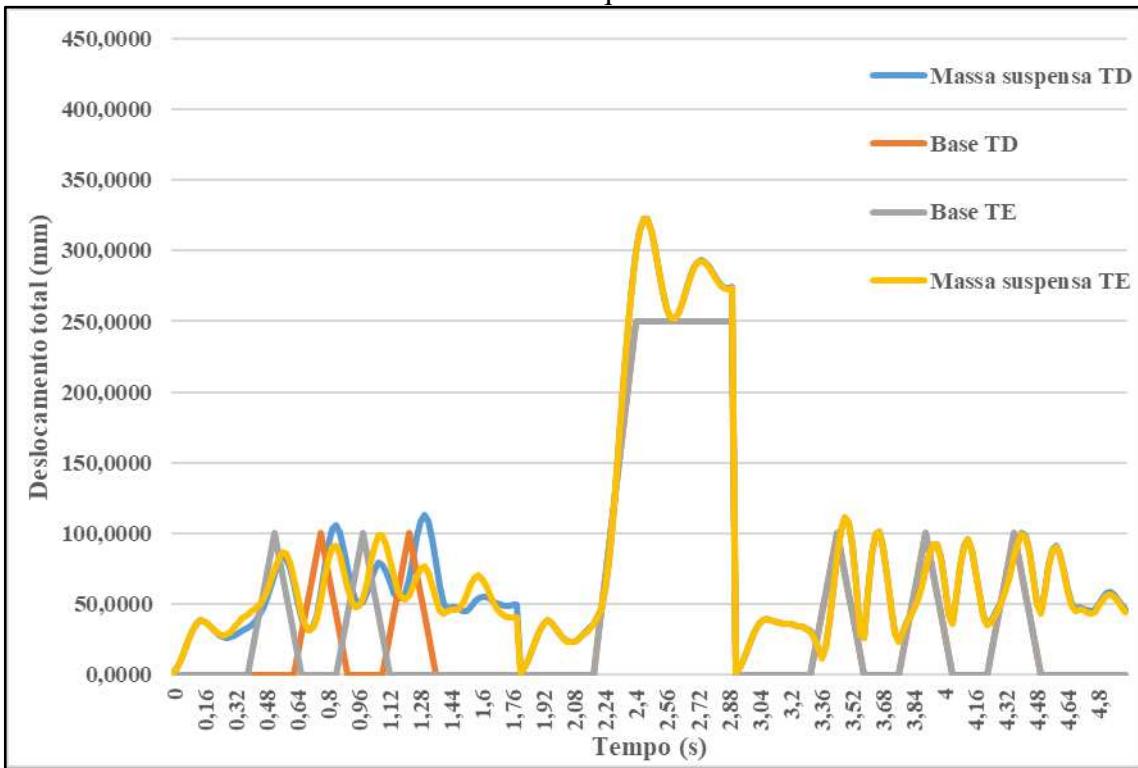
Figura 91 - Resultados em deslocamento total para as massas suspensas e bases frontais direita e esquerda.



Fonte: Autor.

De forma semelhante, para a porção traseira, obteve-se, conforme a figura 92:

Figura 92 - Resultados em deslocamento total para as massas suspensas e bases traseiras direita e esquerda.



Fonte: Autor.

Os resultados da análise da resposta dinâmica associados a transmissibilidade de deslocamento podem ser visualizados no tópico de resultados.

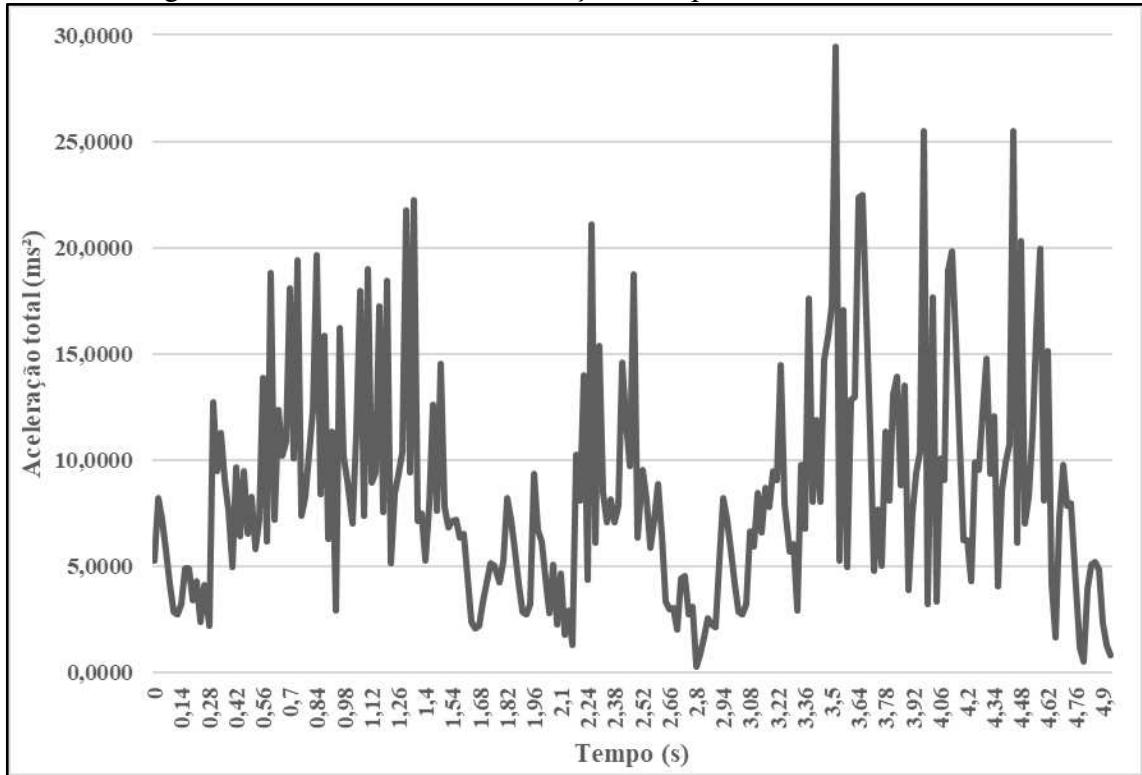
3.5.2. Aceleração da massa suspensa

A aceleração da massa suspensa foi analisada sob ótica da tolerância do piloto à vibração do assento do veículo, a partir da resposta em aceleração no membro do assoalho do chassis “LFDB”, ligado rigidamente ao assento.

Gillespie (1992) exibe linhas de conforto constante a partir de um diagrama de aceleração *root mean square* (RMS) versus frequência, isto é: a intensidade em aceleração da vibração vertical versus a frequência da vibração vertical, considerando várias normas e pesquisadores, além de diferentes tempos de exposição à vibração.

Os resultados para a aceleração total, soma vetorial das acelerações translacionais cartesianas, obtidos a partir do modelo computacional foram os exibidos a seguir (figura 93).

Figura 93 - Resultados em aceleração total para o membro “LFDB”.



Fonte: Autor.

A partir destes resultados, foi possível calcular a aceleração RMS, definida da seguinte forma:

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n a_i^2}{n}} \quad (199)$$

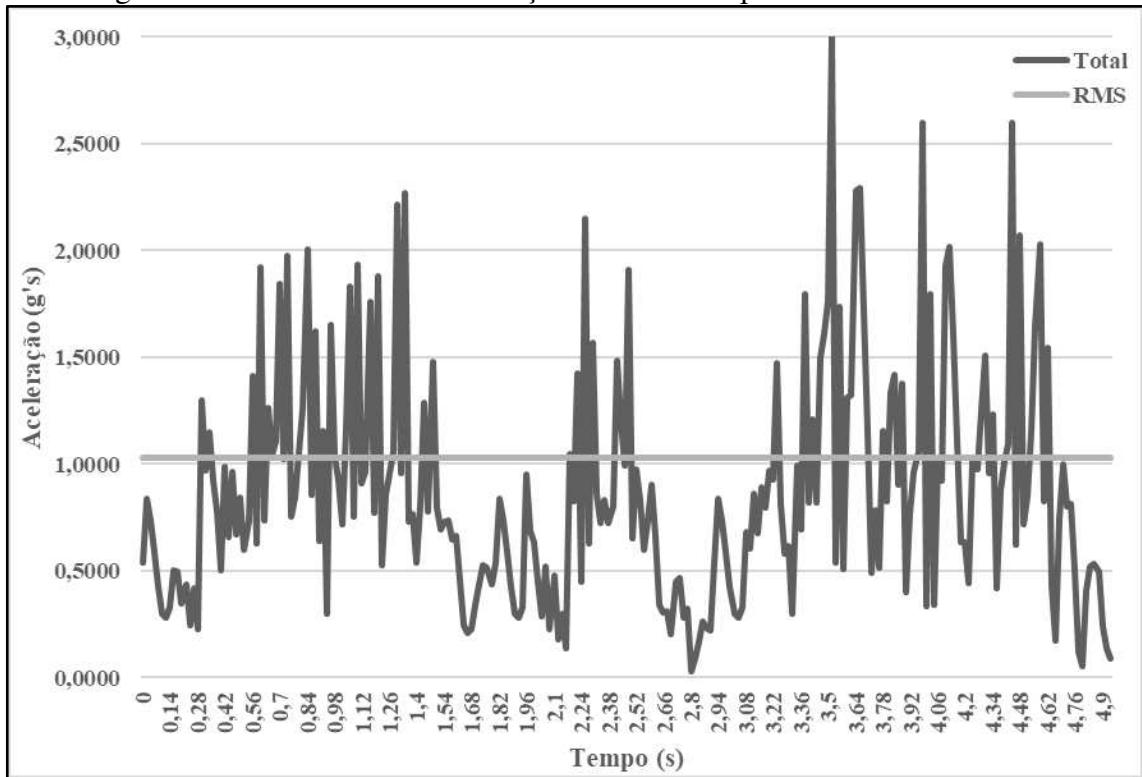
Foi obtido o valor disposto na tabela 31. Foi feita ainda a transformação de unidades de aceleração em m/s^2 para g's (em função da aceleração da gravidade), para compatibilidade com o diagrama supracitado. Foi obtido (figura 94):

Tabela 31 - Resultado obtido para a_{RMS} .

Aceleração RMS - a_{RMS} (g's)	1,03
----------------------------------	------

Fonte: Autor.

Figura 94 - Resultados em aceleração total e RMS para o membro “LFDB”.



Fonte: Autor.

Os resultados para a análise de conforto a partir do diagrama de Gillespie (1992) foram dispostos no tópico de resultados.

3.6. Análise de falha estática

Conforme tratado anteriormente, a análise de falha estática foi pautada no ponto crítico associado ao membro “SIM” da porção direita do veículo, que exibiu pico de tensão equivalente de von Mises com o valor de 290,09 MPa, no instante de tempo 3,24 s, com componentes de tensão principal exibidos a partir da tabela 32, obtidos a partir do software de análise.

Tabela 32 - Tensões principais associadas ao pico de tensão equivalente de von Mises no ponto crítico associado ao membro “SIM” direito.

Tensão principal 1 - σ_1 (MPa)	122,52
Tensão principal 2 - σ_2 (MPa)	71,29
Tensão principal 3 - σ_3 (MPa)	-189,77

Fonte: Autor.

Foram utilizadas as teorias de falha estática de von Mises-Hencky e de Tresca-Guest, trabalhadas no tópico de fundamentação teórica, a partir de um *script* previamente desenvolvido no software Octave, com auxílio da ferramenta GuiEditor.

Os dados de resistência do aço SAE 1020 utilizados para as análises de falha foram obtidos como a média dentre os resultados de quatro estudos exibidos por Albuquerque (2021), os quais foram dispostos na tabela 33:

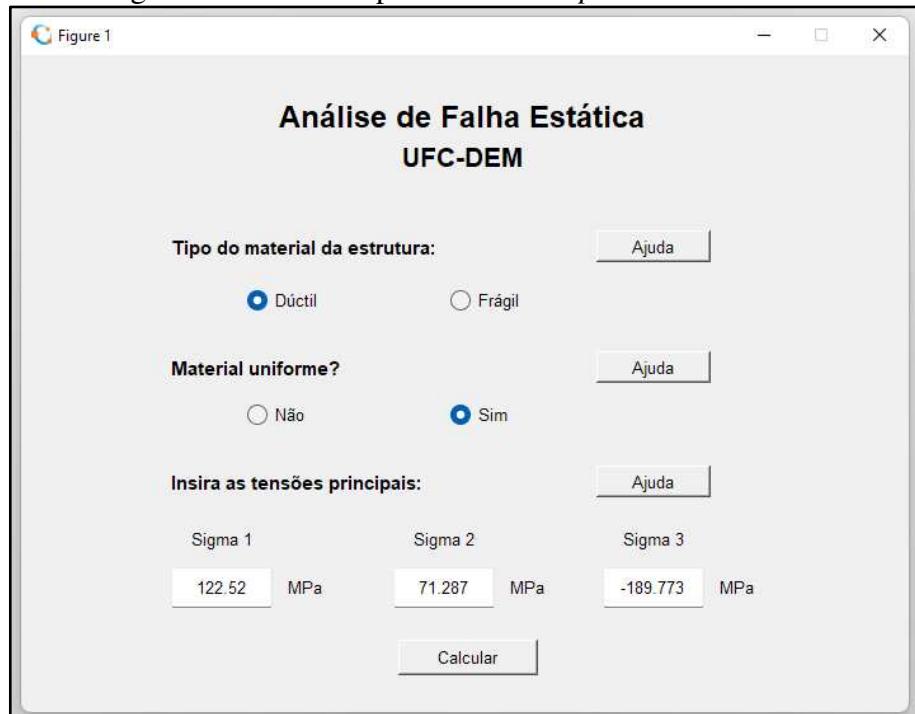
Tabela 33 - Propriedades mecânicas de resistência (valores médios) do aço AISI/SAE 1020 utilizados para as análises de falha estática e por fadiga.

Limite de resistência à tração - S_{ut} (MPa)	480,72
Limite de escoamento - S_y (MPa)	383,09

Fonte: (ALBUQUERQUE, 2021).

No *script* de falha estática, tem-se as seguintes janelas iniciais (figuras 95 e 96), para configuração do sistema de análise. Informa-se a ductilidade e uniformidade do material da estrutura e as tensões principais, para que o *script* selecione as teorias de falha aplicáveis dentre as teorias da energia de distorção de von Mises-Hencky, cisalhamento máximo de Tresca-Guest, Coulomb-Mohr dúctil, Coulomb-Mohr frágil e Coulomb-Mohr modificada.

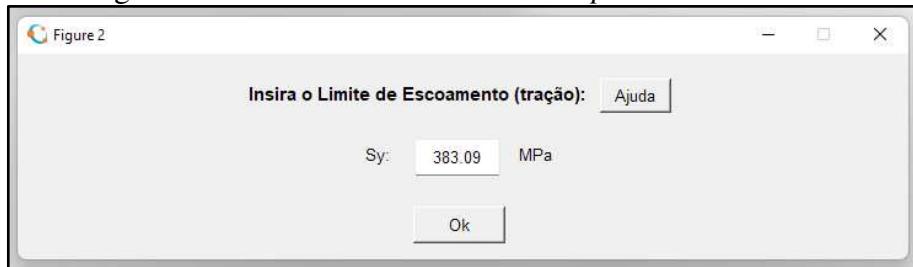
Figura 95 - Interface primária do *script* de falha estática.



Fonte: Autor.

Selecionadas as teorias aplicáveis, o *script* requisita as propriedades mecânicas do material necessárias para a aplicação da teoria.

Figura 96 - Interface secundária do *script* de falha estática.



Fonte: Autor.

Os resultados para a análise de falha estática foram dispostos no tópico de resultados.

3.7.Análise de falha por fadiga

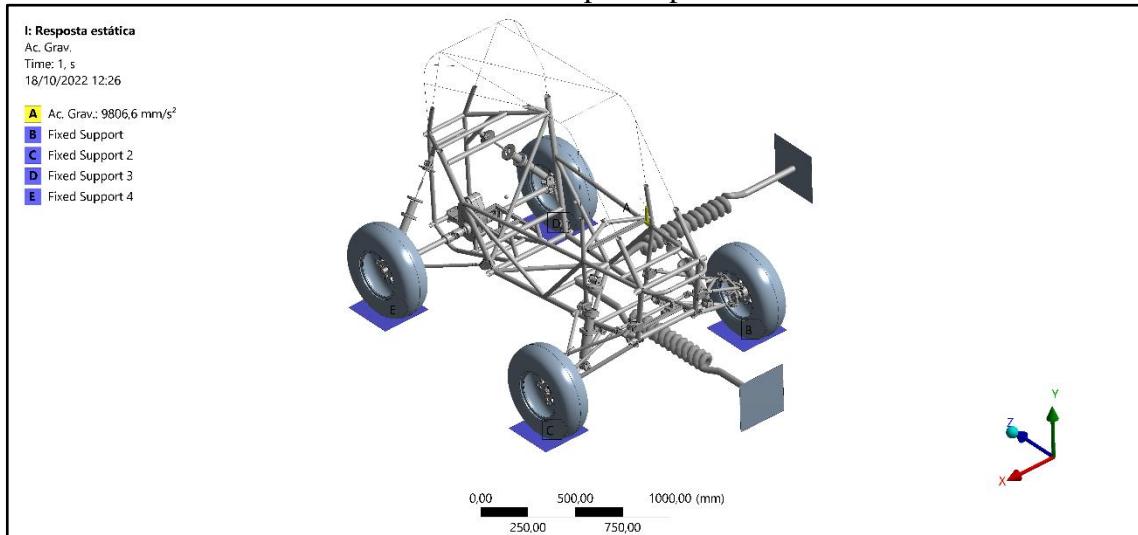
Para a análise de falha por fadiga, inicialmente os dados de tensão associados aos pontos de análise para a falha por fadiga foram tratados a partir do valor de tensão equivalente de von Mises associado à resposta estática do veículo para o membro “SIM”: σ_{est} .

Este tratamento consiste na substituição dos valores de tensão inferiores a σ_{est} pelo próprio valor de σ_{est} nos trechos de início do obstáculo, tendo em vista que, no modelo computacional, cada análise transiente é efetuada a partir de condições iniciais que antecedem a resposta estática do veículo, de modo que, para cada obstáculo a tensão se inicia, no primeiro incremento de tempo, com o valor $\sigma_{0,02}$, chegando ao valor σ_{est} e ultrapassando-o em função das excitações aplicadas.

Estas porções de início do obstáculo gerariam variações de tensão indevidas, ao passo que, com o veículo em operação, cada obstáculo se inicia com o veículo em condição próxima à resposta estática. Estas variações indevidas afetariam a análise de falha por fadiga em função da captação de ciclos de maior amplitude do que a real. Deste modo, todos os valores de tensão, desde $\sigma_{0,02}$ até σ_{est} são substituídos por σ_{est} .

O valor de tensão σ_{est} foi obtido a partir da seguinte análise estrutural estática para as porções direita e esquerda do veículo, em função da assimetria da geometria e da discretização, conforme a figura 97:

Figura 97 - Condições de contorno da análise estrutural estática para obtenção da resposta estática do protótipo.



Fonte: Autor.

Foram obtidos os valores presentes na tabela 34:

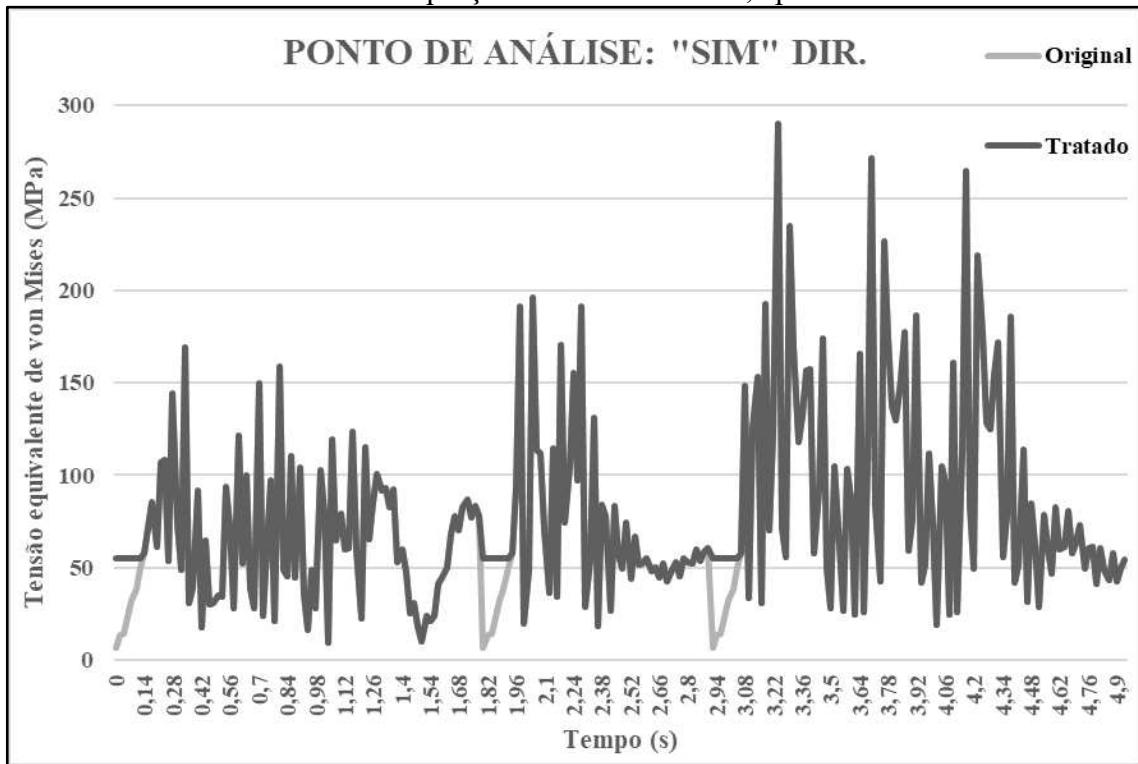
Tabela 34 - Resultados obtidos para as respostas estáticas no membro “SIM”, associados às porções direita a esquerda do veículo.

Tensão equivalente de von Mises – Resposta estática no membro “SIM” direito - σ_{est_D} (MPa)	55,02
Tensão equivalente de von Mises – Resposta estática no membro “SIM” esquerdo - σ_{est_E} (MPa)	35,47

Fonte: Autor.

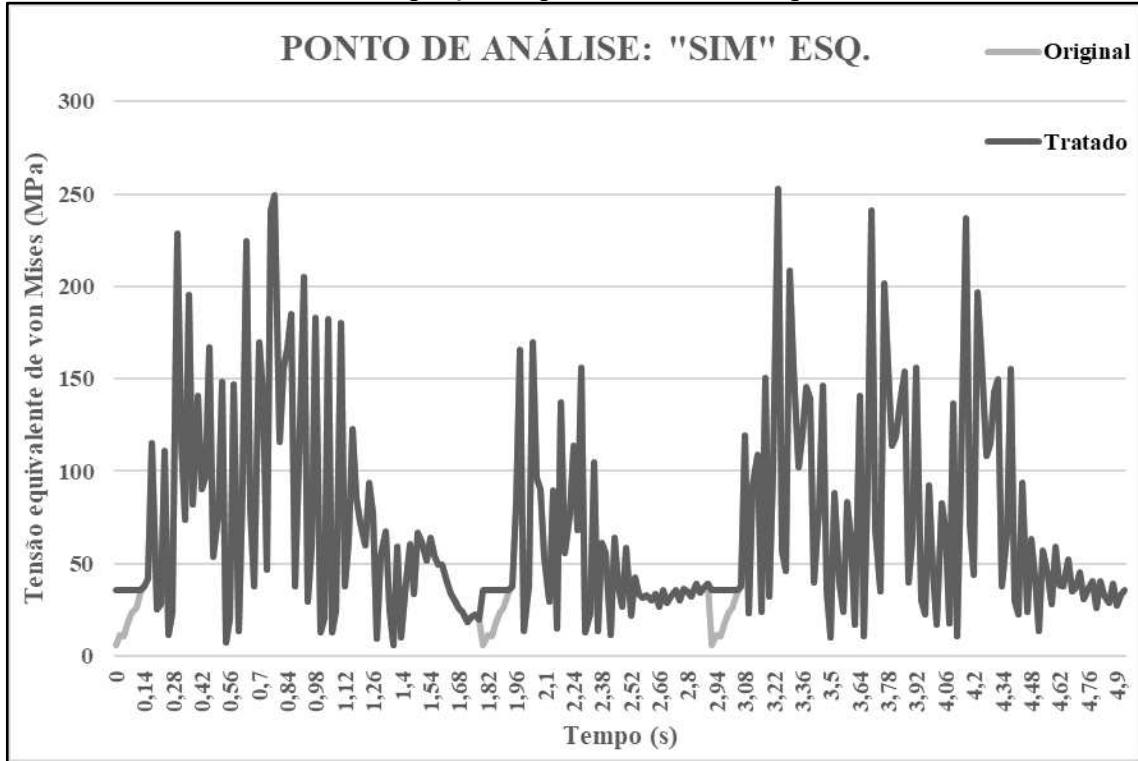
Após o tratamento, foram obtidos os seguintes diagramas de tensão equivalente de von Mises versus tempo, em comparação aos dispostos anteriormente (figuras 98 e 99):

Figura 98 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo, após tratamento dos dados.



Fonte: Autor.

Figura 99 - Resultados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo, após tratamento dos dados.

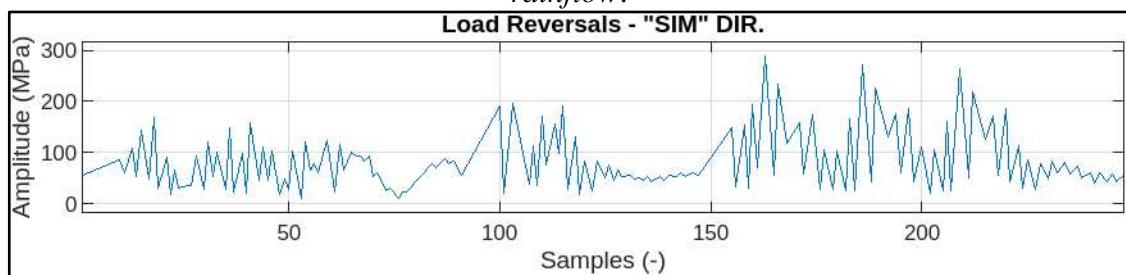


Fonte: Autor.

Após o tratamento dos dados de tensão, foi possível realizar a ciclagem, com base no método *rainflow*. Para isto, foi utilizada uma função disponível no pacote comercial MATLAB, que realiza a contagem a partir do método *rainflow* em conformidade com a ASTM E 1049, a partir do algoritmo exibido no referencial teórico.

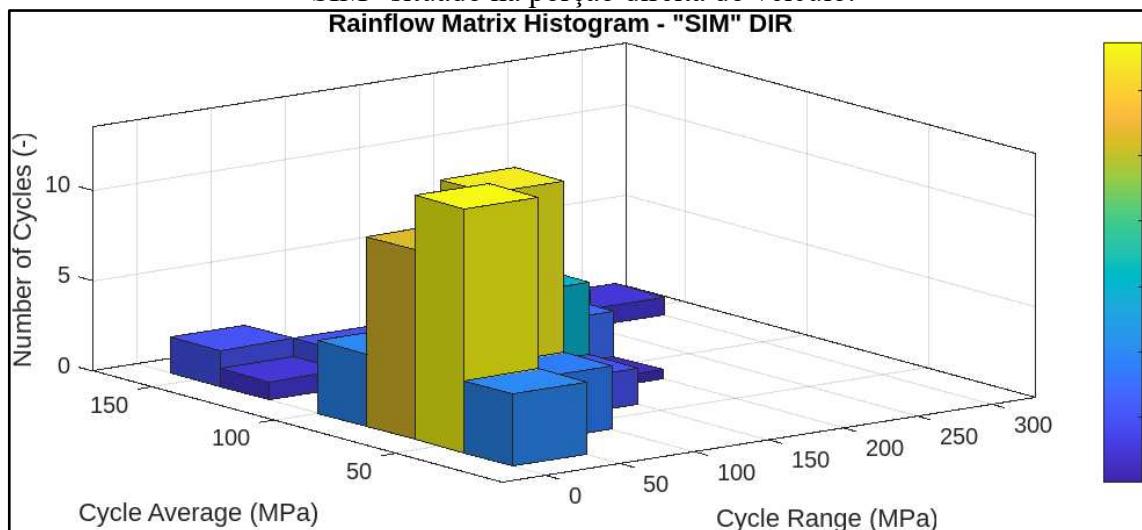
Para o ponto de análise associado ao membro “SIM” direito, a ciclagem gerou os seguintes resultados, dispostos nas figuras 100 e 101:

Figura 100 - Dados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo, adicionados para contagem a partir do *rainflow*.



Fonte: Autor.

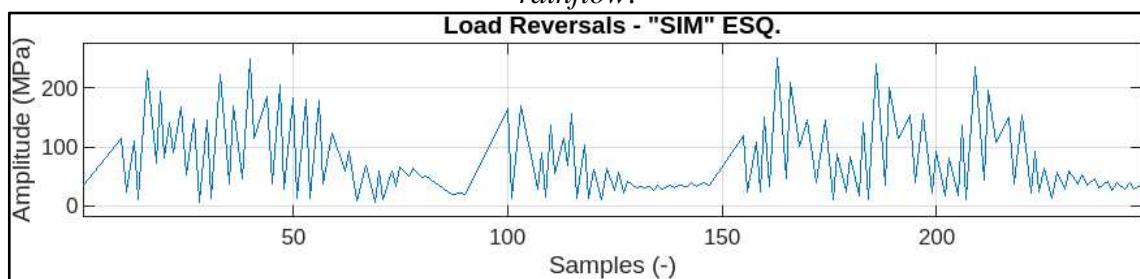
Figura 101 - Resultados da ciclagem a partir do *rainflow*: histograma de número de ciclos versus amplitude do ciclo e média do ciclo para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo.



Fonte: Autor.

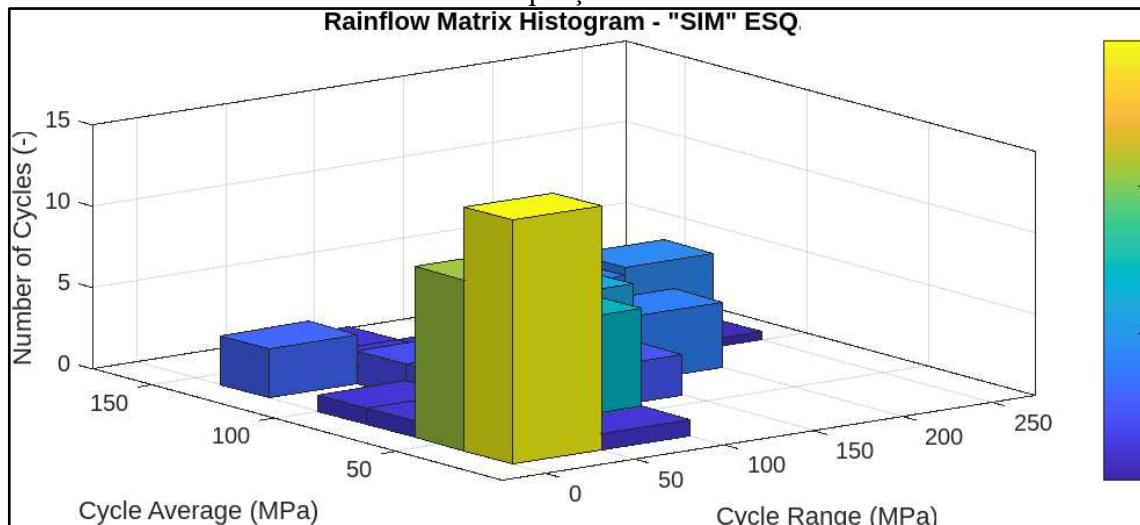
Já para o ponto de análise associado ao membro “SIM” esquerdo, foi obtido o exibido a partir das figuras 103 e 103:

Figura 102 - Dados em tensão equivalente de von Mises para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo, adicionados para contagem a partir do *rainflow*.



Fonte: Autor.

Figura 103 - Resultados da ciclagem a partir do *rainflow*: histograma de número de ciclos versus amplitude do ciclo e média do ciclo para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo.



Fonte: Autor.

Com a transferência dos resultados para o formato tabular, foi possível prosseguir para o cálculo da vida em fadiga. Um item de relevância é que a função utilizada a partir do software MATLAB retorna, para cada bloco contado, o valor de amplitude de tensão (*cycle range*) ao invés da tensão alternada, que é obtida a partir da metade da amplitude de tensão.

A partir da aplicação do método S-N, foram obtidos os seguintes valores (tabela 35), a partir dos equacionamentos e considerações abordadas anteriormente.

Tabela 35 - Resultados obtidos para os parâmetros associados ao método S-N.

Limite de resistência à fadiga - S_e (MPa)	240,36
Fator tensão-deformação real - σ'_F (MPa)	825,72
Fração de resistência à tração - f (-)	0,90
Fator b para equação S-N (-)	-0,08
Fator a para equação S-N (MPa)	778,44

Fonte: Autor.

A partir destes valores e dos dados de tensão obtidos, foi possível realizar a análise de falha por fadiga, combinando o método S-N à teoria de falha de Goodman modificada e considerando a teoria de acúmulo de dano de Palmgren-Miner. Em conformidade com as análises anteriores, os resultados foram dispostos no tópico de resultados.

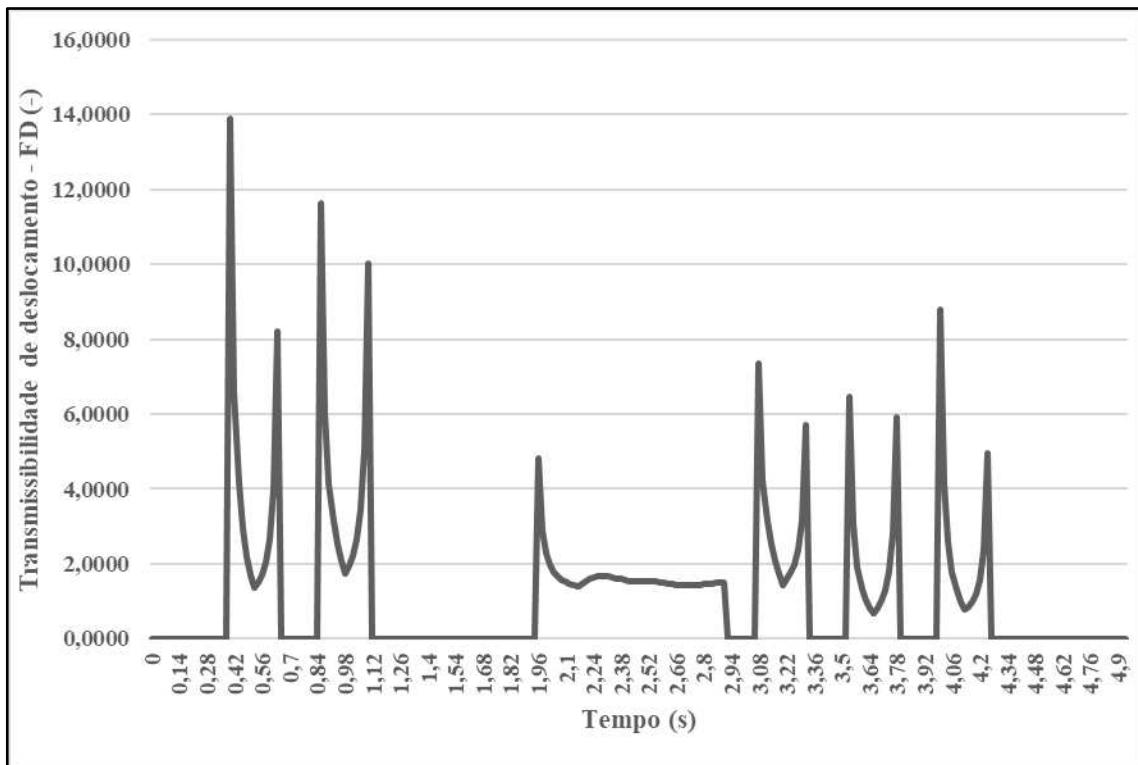
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Resultados da análise de resposta dinâmica

4.1.1. Transmissibilidade de deslocamento

Para a porção frontal direita do veículo, o maior valor de transmissibilidade de deslocamento ocorreu no obstáculo “Vala”, com o valor de aproximadamente 14,00 (figura 104).

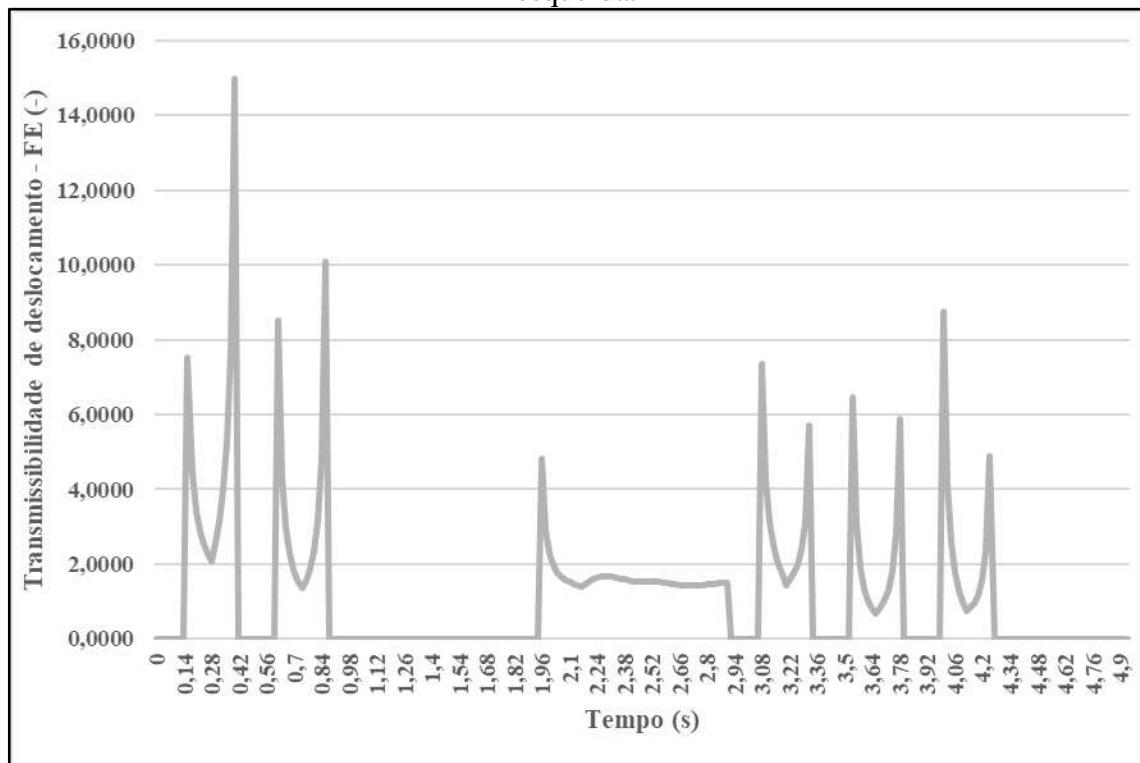
Figura 104 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção frontal direita.



Fonte: Autor.

Para a porção frontal esquerda, de forma semelhante, o maior valor de transmissibilidade de deslocamento também ocorreu no obstáculo “Vala”, com valor aproximado de 15,00 (figura 105).

Figura 105 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção frontal esquerda.



Fonte: Autor.

Tabela 36 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento máxima das porções frontal direita e esquerda.

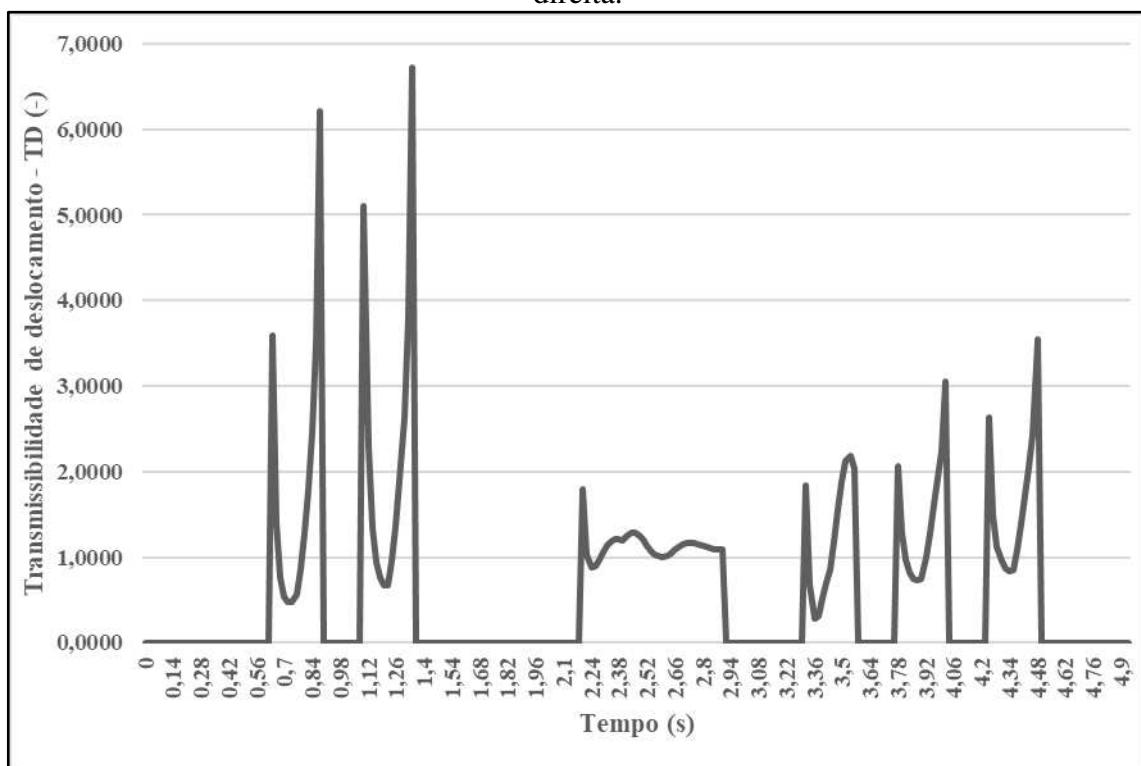
$TD_{MSFDmax}$ (-)	14,00
$TD_{MSFEmax}$ (-)	15,00

Fonte: Autor.

Para a porção traseira, foi observado uma menor assimetria na transmissibilidade de deslocamento dentre as porções direita e esquerda, ao passo que os valores obtidos apresentaram maior proximidade: aproximadamente 6,70 e 6,40, respectivamente (figuras 106 e 107).

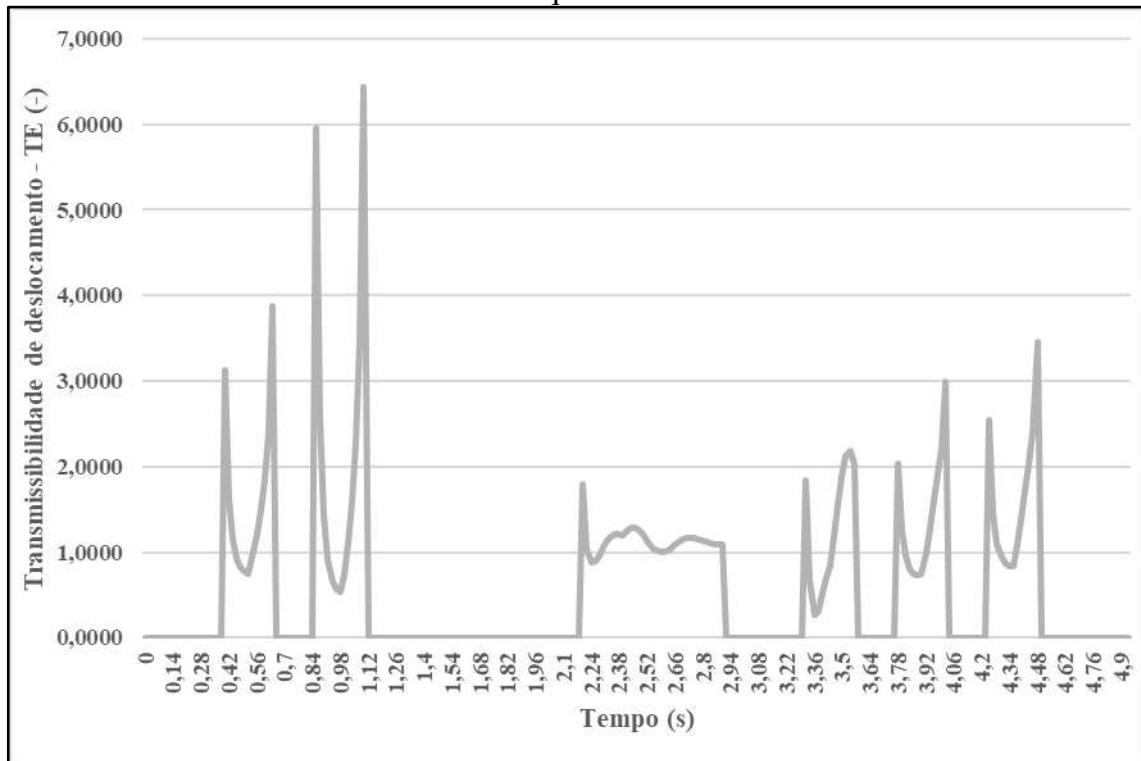
A menor transmissibilidade de deslocamento da porção traseira se dá em função da maior rigidez das molas, o que faz, todavia, que as transmissibilidades de aceleração e de força sejam maiores que na porção dianteira.

Figura 106 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção traseira direita.



Fonte: Autor.

Figura 107 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento da porção traseira esquerda.



Fonte: Autor.

Tabela 37 - Resultados obtidos para a transmissibilidade de deslocamento máxima das porções traseira direita e esquerda.

$TD_{MS TD_{max}} (-)$	6,70
$TD_{MS TE_{max}} (-)$	6,40

Fonte: Autor.

4.1.2. Aceleração da massa suspensa

Para a análise associada a aceleração da massa suspensa, conforme tratado anteriormente, foi utilizado o diagrama presente em Gillespie (1992), a partir da aceleração RMS já obtida. Para a frequência de vibração, foi utilizada a segunda frequência obtida da análise modal (tabela 38), que combina os modos de *Pitch* e *Bounce*, em razão da sua grande participação nas respostas dinâmicas, como pôde ser constatado, por inspeção, a partir das frequências de resposta dos incrementos, no processo de solução.

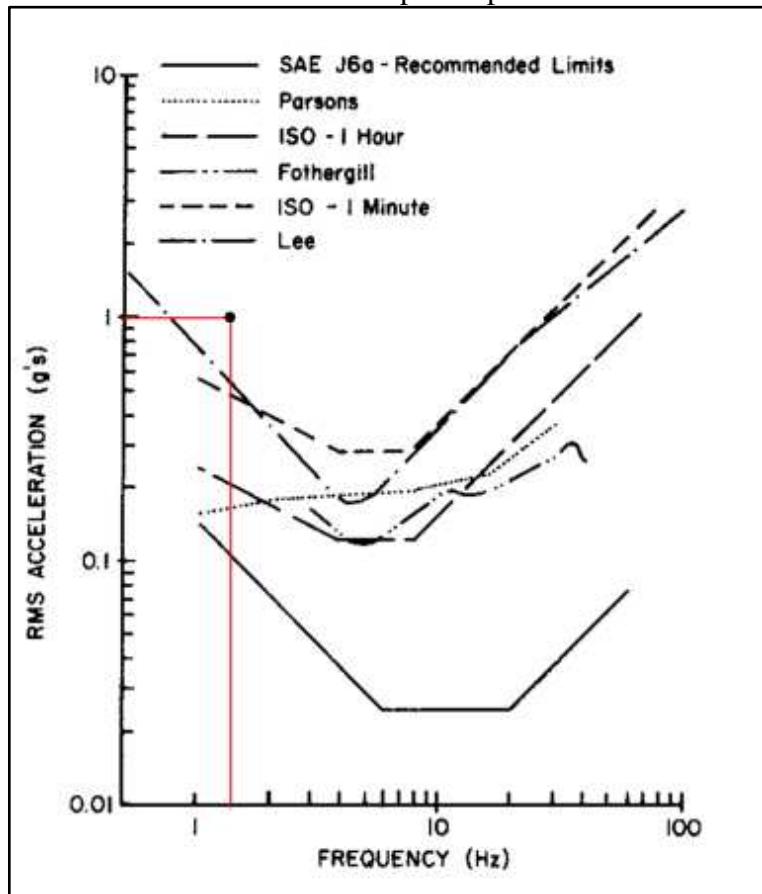
Tabela 38 - Parâmetros associados à análise da aceleração da massa suspensa.

Aceleração RMS - a_{RMS} (g's)	1,03
Frequência de vibração (hz)	1,42

Fonte: Autor.

Estes valores, no diagrama, podem ser evidenciados a partir da figura 108, exibida a seguir.

Figura 108 - Análise gráfica da aceleração da massa suspensa: limites de aceleração recomendados para o piloto.



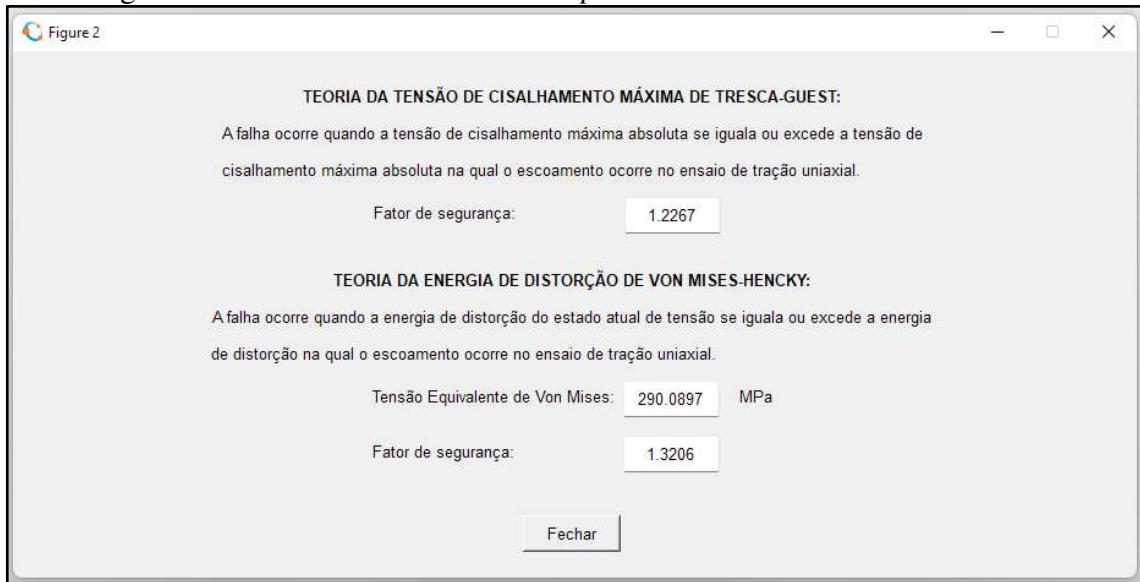
Fonte: Adaptado de (GILLESPIE, 1992).

A partir da análise gráfica, vê-se que o veículo opera fora dos limites de conforto das normas e pesquisadores em evidência, exibindo a necessidade de possíveis alterações no projeto da suspensão. A partir do aumento da frequência de vibração, que, factualmente, ocorreu em alguns incrementos de tempo, o diagrama evidencia uma sensibilidade ainda maior à aceleração, causada por ressonância na cavidade abdominal, pronunciada entre frequências de aproximadamente 4 e 8 hz.

4.2.Resultados da análise de falha estática

A partir dos dados inseridos conforme requisitado pelo *script* de falha estática, obtém-se de forma direta os coeficientes de segurança para as teorias de von Mises-Hencky e de Tresca-Guest (figura 109). Também é calculada a tensão equivalente de von Mises, permitindo verificação do cálculo a partir das tensões principais.

Figura 109 - Interface terciária do *script* de falha estática: resultados finais.



Fonte: Autor.

Desta forma, foi obtido aproximadamente:

Tabela 39 - Resultados obtidos para a análise de falha estática no ponto crítico a partir das teorias da energia de distorção e da tensão de cisalhamento máxima, respectivamente.

n_{dis} (-)	1,32
n_{cis} (-)	1,23

Fonte: Autor.

4.3.Resultados da análise de falha por fadiga

Para o ponto de análise associado ao membro “SIM” direito, foram obtidos os seguintes resultados para a análise de falha por fadiga:

Tabela 40 - Resultados obtidos para a análise de falha por fadiga para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção direita do veículo.

D_{evento} (-)	N_{evento} (-)	t_{evento} (s)	t_{falha} (h)
1,80E-07	5,55E+06	4,94	7616,25

Fonte: Autor.

Já para o ponto de análise associado ao membro “SIM” esquerdo, tem-se:

Tabela 41 - Resultados obtidos para a análise de falha por fadiga para o ponto de análise associado ao membro “SIM” situado na porção esquerda do veículo.

D_{evento} (-)	N_{evento} (-)	t_{evento} (s)	t_{falha} (h)
4,17E-08	2,40E+07	4,94	32931,98

Fonte: Autor.

Em que, conforme o equacionamento apresentado anteriormente:

1. Evento: volta na via de operação, compreendendo a passagem pelos três obstáculos;
2. D_{evento} : dano de fadiga total associado ao evento, com $D_{evento} = \sum D_i$;
3. N_{evento} : número de repetições do evento até a falha por fadiga, com $N_{evento} = (\sum D_i)^{-1}$;
4. t_{evento} : tempo associado a uma repetição do evento;
5. t_{falha} : tempo associado a N_{evento} repetições do evento, ou seja, tempo até a falha por fadiga, com $t_{falha} = \frac{N_{evento} \cdot t_{evento}}{3600}$.

A partir dos resultados, vê-se que o ponto crítico para a falha por fadiga é aquele associado ao membro “SIM” direito, e que o chassi do veículo opera por aproximadamente 7616 horas até a falha por fadiga. Os dados tabulares associados ao cálculo da vida em fadiga podem ser visualizados no anexo B.

4.4.Resumo dos resultados

Os resultados associados as análises da resposta dinâmica, de falha estática e de falha por fadiga podem ser sintetizados a partir da tabela 42, exibida a seguir.

Tabela 42 - Resumo dos resultados obtidos para as análises realizadas.

Análise	Valor obtido	
Transmissibilidade de deslocamento	$TD_{MSFDmax}$ (-)	14,00
	$TD_{MSFEmax}$ (-)	15,00
	$TD_{MSTDmax}$ (-)	6,70
	$TD_{MSTEmax}$ (-)	6,40
Aceleração da massa suspensa	a_{RMS} (g's)	1,03
Falha estática	n_{dis} (-)	1,32
	n_{cis} (-)	1,23
Falha por fadiga	t_{falha} (h)	7616,25

Fonte: Autor.

4.5.Discussão dos resultados

No que diz respeito a transmissibilidade de deslocamento, os valores obtidos foram o esperado em relação à diferença entre as porções dianteira e traseira, em função das rigidezes das molas, porém, o oposto foi observado em relação às magnitudes. Em decorrência da falta

atual de *targets* de transmissibilidade de deslocamento para o projeto de suspensão, os valores obtidos pela análise realizada poderão servir como referência inicial.

Em relação à aceleração da massa suspensa, foi possível verificar que o protótipo SB-20 operou, a partir das condições consideradas, fora do limite de aceleração recomendado para o piloto, conforme disposto anteriormente. Além de possíveis alterações no projeto de suspensão, também se faz necessária a verificação da adequação das normas presentes no diagrama utilizado ao contexto de operação do veículo em análise, ao passo que este é um protótipo de competição, no qual os limites de conforto diferem em relação aos de um veículo de passeio, enfoque principal das normas SAE J6a e ISO.

A partir da análise de falha estática com as teorias de falha de energia de distorção de von Mises-Hencky e do cisalhamento máximo de Tresca-Guest, foi possível obter os coeficientes de segurança associados, para o ponto crítico selecionado e considerando o pico de tensão, sob condição de sobrecarga.

Esta sobrecarga, considerando a elasticidade do material associado ao chassi e à distribuição de tensão da porção da análise, poderia ocasionar falha do tipo característico de distorção excessiva com mecanismo indutor principal de escoamento, conforme categorização dos autores Castro e Meggiolaro (2009). Este pode ser nomeado como modo de falha 1 do chassi do veículo, sendo resguardado pelos coeficientes de segurança associados à análise de falha estática. Estes coeficientes de segurança exibem que a falha estática é evitada sob ótica de ambas as teorias, embora que por uma margem pequena.

O modo de falha 2, por sua vez, possui falha do tipo característico de fratura, com principais mecanismos indutores de escoamento e de fadiga. Associando-se a este modo de falha, a vida em fadiga foi calculada a partir da teoria de falha por fadiga de Goodman modificado, em conjunto à teoria de acúmulo de dano de Palmgren-Miner.

Dentre os pontos de análise selecionados para a análise de falha por fadiga, aquele associado ao membro “SIM” esquerdo apresentou maiores amplitudes de tensão no obstáculo “Vala”, enquanto aquele associado ao membro “SIM” direito apresentou maiores amplitudes no obstáculo “Tronco” e no obstáculo “Rampa”. Todavia, este último ponto de análise apresentou vida em fadiga aproximadamente 4 vezes menor que o primeiro, sendo o ponto crítico para a respectiva análise. Por inspeção, credita-se esta menor vida às maiores amplitudes de tensão no obstáculo “Tronco”, chegando a níveis próximos de 300 MPa.

A partir do tempo até a falha por fadiga obtido, vê-se que o chassi pode manter sua operação, sob as condições analisadas, por tempo superior ao permitido pelo RATSB (aproximadamente 2 anos), pautando seu tempo de operação anual em testes e competições regionais e nacionais.

Com base na diferença de resultados para as análises de falha estática e por fadiga, vê-se que o modo de falha crítico, isto é, de maior relevância, é o de falha estática, em função do menor coeficiente de segurança, sendo o fator estrutural limitante para as alterações de projeto associadas ao chassi.

5. CONCLUSÃO

5.1.Cumprimento dos objetivos

Inicialmente, pode-se verificar o cumprimento dos objetivos geral e específicos estabelecidos para o presente trabalho.

1. Foi construído um modelo dinâmico multicorpo do protótipo SB-20 a partir do pacote comercial ANSYS, sendo esta construção detalhada a partir do subtópico 4.2 - Construção do modelo mecânico de elementos finitos;
2. Foram construídas as funções de excitação com base em um perfil de operação simplificado, vide subtópico 4.1 - Construção das funções de excitação do sistema;
3. A resposta dinâmica do modelo construído foi analisada a partir da transmissibilidade de deslocamento e da aceleração da massa suspensa, conforme o subtópico 4.5 - Análise da resposta dinâmica do sistema;
4. O chassi do protótipo SB-20 foi analisado estruturalmente a partir da análise dinâmica sob atuação das funções de excitação, conforme o subtópico 4.4 - Análise estrutural transiente, e ainda a partir das posteriores análise de falha estática e por fadiga, vide os subtópicos 4.6 e 4.7, respectivamente;
5. Por fim, o objetivo geral de análise estrutural do chassi do SB-20 pautado na interação veículo-via foi cumprido em consonância com o cumprimento de todos os objetivos específicos.

5.2.Conclusões gerais

Foi possível, ainda, estabelecer as seguintes conclusões gerais:

1. A metodologia de criação das funções de excitação a partir do perfil da via de operação produz melhores resultados a partir de obstáculos de geometria simplificada, tendo em

vista que, a partir de obstáculos de maior complexidade, efeitos adversos atuam no desvio das funções de deslocamento vertical dos pneus versus tempo em relação ao deslocamento vertical do perfil da via versus tempo, como o descolamento dos pneus, trechos de colisão entre os pneus e os obstáculos, limitações geométricas associadas a cinemática das geometrias de suspensão, dentre outros;

2. A utilização de juntas cinemáticas e do compartilhamento de topologia em detrimento de contatos atuou de forma decisiva para a simplificação da configuração do modelo no ambiente *ANSYS Mechanical* e para a redução do custo computacional;
3. A utilização de pontos de massa facilitou o controle da massa total, translacional e rotacional, e de sua distribuição no modelo. Todavia, aumentou consideravelmente o custo computacional. Adicionalmente, a obtenção de concentrações de tensão a partir dos pontos de massa especificados é comum, sendo evitada, caso não representativa, a partir da associação do ponto a uma maior quantidade de elementos, o que, por sua vez, aumenta ainda mais o custo computacional;
4. O mantimento dos graus de liberdade que permitem os deslocamentos translacionais e rotacionais dos pneus - conforme o projeto das geometrias de suspensão e direção - é vital para maior representatividade em rigidez. Do contrário, tem-se esforços indevidos de alta magnitude, além de uma distribuição de tensão equivocada;
5. A preparação de geometria, conforme os passos especificados, atuou de forma incisiva para correta discretização do modelo, sendo a etapa mais longa do processo de modelagem computacional realizado;
6. A discretização do chassi em sua porção superior a partir de elementos de viga atuou na redução do custo computacional, em função do menor número de elementos e nós do modelo. Todavia, esta estratégia de modelagem não apresenta vantagem caso seja necessário um grande número de juntas cinemáticas “viga-casca” para compatibilizar os deslocamentos;
7. A análise modal utilizada para verificação dos graus de liberdade foi decisiva para a correta configuração das diversas juntas cinemáticas utilizadas no modelo, permitindo maior aproximação à cinemática de suspensão especificada em projeto, menor assimetria e maior representatividade em rigidez e massa;
8. A criação das molas fracas permitiu a exclusão de modos de corpo rígidos induzidos pelos graus de liberdade das juntas cinemáticas entre os pneus e as bases excitadoras, que atuam de forma semelhante a contatos sem atrito, permitindo o deslizamento lateral e longitudinal dos pneus relação às bases. A partir desta exclusão, foi possível executar

- verificações estáticas no modelo, como a utilizada para obtenção dos valores de tensão de resposta estática. Mesmo a partir da presença de um modo de baixa frequência associado ao deslizamento do veículo, conforme posto na análise modal, as frequências de resposta das análises transientes evidenciaram baixa participação deste modo;
9. No modelo mecânico, não foi especificado o contato entre os pratos das molas de duplo estágio de suspensão. Isto foi feito pois, conforme a geometria dos obstáculos e a resposta dinâmica do veículo, não é previsto o fechamento das primeiras molas, de modo que o veículo opera unicamente no primeiro estágio de suspensão. A partir de obstáculos de maior perfil, faz-se necessária a definição destes contatos, para que não haja penetração do prato inferior no prato intermediário;
 10. Embora não seja o componente alvo do presente trabalho, foi observado um nível de tensão elevado associado aos links de suspensão traseiros, o que evidencia a necessidade de verificação da geometria de suspensão traseira;
 11. O chassi pode ser reforçado localmente nas porções de análise identificadas a partir do presente trabalho, propiciando um maior coeficiente de segurança para a falha estática por sobrecarga, modo de falha crítico, conforme estabelecido anteriormente;
 12. O particionamento da análise estrutural transiente em três, conforme cada obstáculo, foi benéfica em função da melhor logística dos recursos computacionais e do menor tempo de retrabalho a partir de erros no modelo. O tempo de solução médio para cada análise foi de aproximadamente 2 horas. Todavia, este particionamento só foi possível em função da “independência dinâmica” provida pela própria via de operação, sendo ainda necessário o tratamento dos dados de tensão para exclusão de níveis inferiores à resposta estática nas porções de início da análise, conforme especificado no trabalho;
 13. A linearidade geométrica do modelo limita as funções de excitação a obstáculos de baixo perfil. Embora inicialmente planejado, o modelo não pôde ser solucionado com as não linearidades do material e geométrica, em função do elevado custo computacional, associado às diversas “sub-soluções” a partir do método de Newton-Raphson, para convergência de cada incremento de tempo;
 14. Embora tenham sido utilizadas diversas estratégias para redução do custo computacional, o modelo elaborado ainda é proibitivo, primordialmente em função da memória RAM requisitada: aproximados 30 gb. Adicionalmente, o armazenamento também pode se configurar como fator limitante, ao passo que, com as soluções, o modelo tem um arquivo de tamanho total de aproximadamente 100 gb.

5.3.Trabalhos futuros

São sugeridos os seguintes trabalhos futuros, em continuidade ao trabalho elaborado:

1. Validação experimental do modelo computacional elaborado a partir da aquisição de dados no protótipo SB-22, a partir de análise comparativa em deslocamento (transdutores lineares), aceleração (acelerômetros) e tensão (extensômetros) nos pontos de análise, com base em um obstáculo padrão.
2. Redução do custo computacional do modelo construído a partir de uma estratégia diferenciada para a consideração da massa e de sua distribuição. Pode ser avaliada a possibilidade de adoção da estratégia *Mass Scaling* no modelo;
3. Revisão do perfil de operação do veículo, com alteração na via de operação (obstáculos de maior perfil) e na velocidade de operação (menor velocidade), e posterior análise transiente não linear, considerando as não linearidades geométrica e do material. Consideração da possibilidade de descolamento do pneu, a partir da utilização de contatos;
4. Construção de modelo dinâmico multicorpo de quarto de carro, para as porções dianteira ou traseira. Isto poderia reduzir o custo computacional e ainda possibilitar diversas análises posteriores, embora a representatividade em rigidez e massa fosse afetada;
5. Modelagem computacional do pneu considerando sua rigidez e curso de deflexão, para correta representação do *ride rate*. Posterior acoplamento no modelo de veículo completo ou de quarto de carro;
6. Análise estrutural das porções de análise do chassi acoplando uma metodologia de modelagem computacional de juntas soldadas.

REFERÊNCIAS

4/7 Post Shaker Testing & Vehicle Dynamics Development - ZETA PVT. [S. l.], 2022. Disponível em: <<https://zetapvt.com/>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

A SPRING-MASS system, k and m, has a natural frequency of... - TRANSTUTORS. [S. l.], 2022. Disponível em: <<https://www.transtutors.com/questions/a-spring-mass-system-k-1-and-m-has-a-natural-frequency-of-a-if-a-second-spring-k-2-i-2447991.htm>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

ALBUQUERQUE, Juliana Joyce Barbosa de. Estudo teórico de viabilidade técnica da substituição do aço ASTM A36 pelo aço SAE 1020. 2021. 55 f. Monografia (Graduação em Engenharia Metalúrgica) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

ALVES FILHO, A. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE. São Paulo: Érica, 2000.

ALVES FILHO, A. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE/Análise Dinâmica. São Paulo: Érica, 2005.

ALVES FILHO, A. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE/Análise Não Linear. São Paulo: Érica, 2012.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM). Standard practices for cycle counting in fatigue analysis: ASTM E1049-85. 2017.

AMERICAN WELDING SOCIETY (AWS). Structural Welding Code - Steel. AWS D1.1/D1.1M:2006.

ANAND, Lallit; GOVINDJEE, Sanjay. Continuum mechanics of solids. Oxford University Press, 2020.

ANETA, Bulíčková. Quality Evaluation of Finite Element Models with Applications on Concrete Structures. 2020. Dissertaçao de Mestrado. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum.

ANSYS, Inc. Ansys Innovation Space. In: Time Integration. [S. l.], 2022. Disponível em: https://courses.ansys.com/index.php/courses/time_integration/. Acesso em: 28 out. 2022.

ANSYS, Inc. ANSYS Meshing User's Guide. 520 p. 2020.

ANSYS, Inc. Contact Technology Guide. 294 p. 2020.

ANSYS, Inc. Introduction to ANSYS meshing - lecture 7: mesh quality & advanced topics. 37 p. 2015.

ANSYS, Inc. Material Reference. 330 p. 2020.

ANSYS, Inc. Multibody Analysis Guide. 72 p. 2020.

ANSYS, Inc. Structural Analysis Guide. 484 p. 2020.

ANSYS, Inc. Theory Reference. 1226 p. 2009.

ANSYS, Inc. Theory Reference. 950 p. 2020.

ARGENTA, M. A. **Continuum Mechanics Lecture**. 2020.

AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos elementos finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, v. 1, n. 7, 2003.

BASTOS, Flávia. **Nota de aula 13 - estudo da energia de deformação: Resistência dos materiais II**. jun. 2010, dec. 2010. 35 p. Notas de Aula.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. Klaus-Jurgen Bathe, 2014.

BROWN, Jason C.; ROBERTSON, A. John; SERPENTO, Stan T. **Motor vehicle structures**. Elsevier Science & Technology, 2001.

BUDYNAS, Richard G.; NISBETT, J. Keith. **Shigley's mechanical engineering design**. New York: McGraw-hill, 2011.

CAE ASSOCIATES INC. **Modeling Welded Connections - ANSYS e-Learning**. Youtube, 20/01/2021. Disponível em: <https://youtu.be/ns2-kf_3UN8>. Acesso em: 28/10/2022.

CANUT, Felipe Azevedo. **Análise estrutural do chassi de um veículo fórmula SAE pelo método de elementos finitos**. 2014. 76 f., il. Monografia (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

CASTRO, JAIME TP; MEGGIOLARO, Marco Antonio. **Fadiga: técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviço**. Volumes I e II, 2009.

CHATTOPADHYAY, A. *et al.* **Stress analysis and fatigue of welded structures**. Welding in the World, v. 55, n. 7, p. 2-21, 2011.

CHINDAMO, Daniel; GADOLA, Marco; MARCHESEN, Felipe P. **Reproduction of real-world road profiles on a four-poster rig for indoor vehicle chassis and suspension durability testing**. Advances in Mechanical Engineering, v. 9, n. 8, 2017.

COELHO, F. DAL CERO *et al.* **Fatigue design methodology for automotive welded structures under complex loading**. Spectrum, v. 500.

COMPUTATIONAL DYNAMICS. **Lecture 2: Stability of Time Integration Schemes**. Youtube, 20/01/2021. Disponível em: <<https://youtu.be/ENgLbbedT9w>>. Acesso em: 28/10/2022.

COMPUTATIONAL DYNAMICS. **Lecture 4: Generalized-Alpha Method / Newmark Method**. Youtube, 03/02/2021. Disponível em: <<https://youtu.be/wUsTSm-DY1g>>. Acesso em: 28/10/2022.

DET NORSKE VERITAS (DNV). **Fatigue design of offshore steel structures**. 2008.

DIAS, Luís Fernando de Souza. **ESTUDO NUMÉRICO DO FENÔMENO DO AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS SÓLIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS IMPULSIVOS**. 2015. Dissertação – Departamento de Construção e Estruturas. Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

ELMEKAWY, Ahmed Nagib. **Computational Fluid Mechanics Lecture**. 2018.

- FURTADO, Daniel Canongia. **Análise estrutural de chassi de veículos automotivos**. 2013. xi, 77 f., il. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Automotiva). Universidade de Brasília, Brasília, 2013.
- GILLESPIE, Thomas D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. SAE Technical Paper, 1992.
- HUGHES, Thomas JR. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Courier Corporation, 2012.
- JANNUZZI, André Perez. **Um estudo sobre modelos de acúmulo de dano em fadiga uniaxial**. 2011. x, 57 f., il. Monografia (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Universidade de Brasília, Brasília, 2011.
- JAZAR, Reza N. **Vehicle dynamics**. New York: Springer, 2008.
- JUNIOR, Evandro Parente; MELO, Antônio Macário C.; JUNIOR, Marcelo S. Medeiros. **Análise de estruturas I: introdução à teoria da elasticidade**. jan. 2022, jun. 2022. 49 p. Notas de Aula.
- LEITE, Sueli Souza *et al.* **ENSAIO DE TRAÇÃO E METALOGRAFIA DO AÇO SAE 1020**. Revista Engenharia em Ação UniToledo, v. 2, n. 1, 2017.
- LEVEQUE, Randall J. **Finite difference methods for differential equations**. Draft version for use in AMath, 2006.
- LIGAÇÕES Parafusadas no ANSYS Mechanical**. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.esss.co/biblioteca-tecnica/ligacoes-parafusadas-no-ansys-mechanical/>. Acesso em: 28 out. 2022.
- LOTSBERG, Inge. **Fatigue design of plated structures using finite element analysis**. Ships and Offshore Structures, v. 1, n. 1, p. 45-54, 2006.
- LUCHETTI, Alessandro; BASILICI, Marco. **Structural dynamic analysis of a formula SAE vehicle**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica). University of Trento - Departement of Industrial Engineering, 2017.
- MADENCI, Erdogan; GUVEN, Ibrahim. **The finite element method and applications in engineering using ANSYS**. Springer, 2015.
- MAIA, Samuel Victor Soares *et al.* **Análise estrutural de uma fuselagem para o aerodesign**. 2019.
- MASCIA, Nilson Tadeu. **Energia de deformação e teoremas de energia**. Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2017.
- MASCIA, Nilson Tadeu. **Teoria das Tensões**. Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2006.
- MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. **Race Car Vehicle Dynamics**. Pennsylvania: SAE International, 1994.
- Modelagem estrutural de juntas soldadas no ANSYS**. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.esss.co/biblioteca-tecnica/artigo-modelagem-estrutural-de-juntas-soldadas-no-ansys/>. Acesso em: 28 out. 2022.

MTS Automotive Full-Vehicle Test Systems. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.mts.com/en/products/automotive/full-vehicle-test-systems>. Acesso em: 3 nov. 2022.

NETO, Álvaro Costa. **Dinâmica veicular**. Universidade de São Paulo, São Carlos. 2005.

NETO, João Gonçalves Lima *et al.* **ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR ESTÁTICA DE UM PROTÓTIPO BAJA SAE PELO MEF**. REVISTA DE ENGENHARIA E TECNOLOGIA, v. 14, n. 3, 2022.

Norton, R. L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

RAINFLOW counts for fatigue analysis - MATLAB rainflow. [S. l.], 2022. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/signal/ref/rainflow.html>>. Acesso em: 28 out. 2022.

RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo: Pearson, 424 p., 2009.

REGULAMENTO ADMINISTRATIVO E TÉCNICO BAJA SAE BRASIL. SAE Brasil. Disponível em: <http://saебrasil.org.br/wp-content/uploads/2020/03/RATBSB_emenda_03.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2021.

SAINI, Dikshant Singh; KARMAKAR, Debasis; RAY-CHAUDHURI, Samit. **A review of stress concentration factors in tubular and non-tubular joints for design of offshore installations**. Journal of Ocean Engineering and Science, v. 1, n. 3, p. 186-202, 2016.

SCIAMMARELLA, Cesar A.; SCIAMMARELLA, Federico M. **Experimental mechanics of solids**. John Wiley & Sons, 2012.

SEE Jeep Abuse A Gladiator To Prove The Truck's Durability - MOTOR 1. [S. l.], 2022. Disponível em: <<https://www.motor1.com/news/373662/jeep-gladiator-dirability-test-video/>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos, Vol. I e II**. Livros Técnicos e Científicos Ed. SA, 1983.

TIMOSHENKO, Stephen; GOODIER, James Norman. **Theory of Elasticity**. McGraw-Hill, 1951.

WANG, Yixun; LUO, Yuxiao; TSUTSUMI, Seiichiro. **Parametric formula for stress concentration factor of fillet weld joints with spline bead profile**. Materials, v. 13, n. 20, p. 4639, 2020.

ZERWER, A.; CASCANTE, Giovanni; HUTCHINSON, J. **Parameter estimation in finite element simulations of Rayleigh waves**. Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, v. 128, n. 3, p. 250-261, 2002.

ANEXO A - FUNÇÕES DE EXCITAÇÃO

X_P (mm)	Y_{PD} (mm)	Y_{PE} (mm)	Y_{FD} (mm)	Y_{FE} (mm)	Y_{TD} (mm)	Y_{TE} (mm)	t (s)
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000 0
112,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,020 0
224,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,040 0
336,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,060 0
448,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,080 0
560,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,100 0
672,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,120 0
784,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,140 0
896,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,160 0
1008,0000	0,0000	-14,2857	0,0000	-14,2857	0,0000	0,0000	0,180 0
1120,0000	0,0000	-28,5714	0,0000	-28,5714	0,0000	0,0000	0,200 0
1232,0000	0,0000	-42,8571	0,0000	-42,8571	0,0000	0,0000	0,220 0
1344,0000	0,0000	-57,1429	0,0000	-57,1429	0,0000	0,0000	0,240 0
1456,0000	0,0000	-71,4286	0,0000	-71,4286	0,0000	0,0000	0,260 0
1568,0000	0,0000	-85,7143	0,0000	-85,7143	0,0000	0,0000	0,280 0
1680,0000	0,0000	-	100,0000	-	100,0000	0,0000	0,300 0
1792,0000	0,0000	-85,7143	0,0000	-85,7143	0,0000	0,0000	0,320 0
1904,0000	0,0000	-71,4286	0,0000	-71,4286	0,0000	0,0000	0,340 0
2016,0000	0,0000	-57,1429	0,0000	-57,1429	0,0000	0,0000	0,360 0
2128,0000	0,0000	-42,8571	0,0000	-42,8571	0,0000	0,0000	0,380 0
2240,0000	0,0000	-28,5714	0,0000	-28,5714	0,0000	0,0000	0,400 0
2352,0000	-14,2857	-14,2857	-14,2857	-14,2857	0,0000	-14,2857	0,420 0

2464,0000	-28,5714	0,0000	-28,5714	0,0000	0,0000	-28,5714	0,440 0
2576,0000	-42,8571	0,0000	-42,8571	0,0000	0,0000	-42,8571	0,460 0
2688,0000	-57,1429	0,0000	-57,1429	0,0000	0,0000	-57,1429	0,480 0
2800,0000	-71,4286	0,0000	-71,4286	0,0000	0,0000	-71,4286	0,500 0
2912,0000	-85,7143	0,0000	-85,7143	0,0000	0,0000	-85,7143	0,520 0
3024,0000	- 100,0000	0,0000	- 100,0000	0,0000	0,0000	- 100,0000	0,540 0
3136,0000	-85,7143	0,0000	-85,7143	0,0000	0,0000	-85,7143	0,560 0
3248,0000	-71,4286	0,0000	-71,4286	0,0000	0,0000	-71,4286	0,580 0
3360,0000	-57,1429	0,0000	-57,1429	0,0000	0,0000	-57,1429	0,600 0
3472,0000	-42,8571	0,0000	-42,8571	0,0000	0,0000	-42,8571	0,620 0
3584,0000	-28,5714	-14,2857	-28,5714	-14,2857	0,0000	-28,5714	0,640 0
3696,0000	-14,2857	-28,5714	-14,2857	-28,5714	-14,2857	-14,2857	0,660 0
3808,0000	0,0000	-42,8571	0,0000	-42,8571	-28,5714	0,0000	0,680 0
3920,0000	0,0000	-57,1429	0,0000	-57,1429	-42,8571	0,0000	0,700 0
4032,0000	0,0000	-71,4286	0,0000	-71,4286	-57,1429	0,0000	0,720 0
4144,0000	0,0000	-85,7143	0,0000	-85,7143	-71,4286	0,0000	0,740 0
4256,0000	0,0000	- 100,0000	0,0000	- 100,0000	-85,7143	0,0000	0,760 0
4368,0000	0,0000	-85,7143	0,0000	-85,7143	- 100,0000	0,0000	0,780 0
4480,0000	0,0000	-71,4286	0,0000	-71,4286	-85,7143	0,0000	0,800 0
4592,0000	0,0000	-57,1429	0,0000	-57,1429	-71,4286	0,0000	0,820 0
4704,0000	0,0000	-42,8571	0,0000	-42,8571	-57,1429	0,0000	0,840 0
4816,0000	0,0000	-28,5714	0,0000	-28,5714	-42,8571	0,0000	0,860 0
4928,0000	-14,2857	-14,2857	-14,2857	-14,2857	-28,5714	-14,2857	0,880 0
5040,0000	-28,5714	0,0000	-28,5714	0,0000	-14,2857	-28,5714	0,900 0

10528,000 0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,880 0
10640,000 0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,900 0
10752,000 0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,920 0
10864,000 0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,940 0
10976,000 0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,960 0
11088,000 0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,980 0
11200,000 0	- 250,0000	- 250,0000	-22,7273	-22,7273	0,0000	0,0000	2,000 0
11312,000 0	- 250,0000	- 250,0000	-45,4545	-45,4545	0,0000	0,0000	2,020 0
11424,000 0	- 250,0000	- 250,0000	-68,1818	-68,1818	0,0000	0,0000	2,040 0
11536,000 0	- 250,0000	- 250,0000	-90,9091	-90,9091	0,0000	0,0000	2,060 0
11648,000 0	- 250,0000	- 250,0000	113,6364	113,6364	0,0000	0,0000	2,080 0
11760,000 0	- 250,0000	- 250,0000	136,3636	136,3636	0,0000	0,0000	2,100 0
11872,000 0	- 250,0000	- 250,0000	159,0909	159,0909	0,0000	0,0000	2,120 0
11984,000 0	- 250,0000	- 250,0000	181,8182	181,8182	0,0000	0,0000	2,140 0
12096,000 0	- 250,0000	- 250,0000	204,5455	204,5455	0,0000	0,0000	2,160 0
12208,000 0	- 250,0000	- 250,0000	227,2727	227,2727	0,0000	0,0000	2,180 0
12320,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	0,0000	0,0000	2,200 0
12432,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	0,0000	0,0000	2,220 0
12544,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	-22,7273	-22,7273	2,240 0
12656,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	-45,4545	-45,4545	2,260 0
12768,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	-68,1818	-68,1818	2,280 0
12880,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	-90,9091	-90,9091	2,300 0
12992,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	113,6364	113,6364	2,320 0
13104,000 0	- 250,0000	- 250,0000	250,0000	250,0000	136,3636	136,3636	2,340 0

15904,000 0	- 250,0000	2,840 0						
16016,000 0	- 250,0000	2,860 0						
16128,000 0	- 250,0000	2,880 0						
16240,000 0	- 250,0000	2,900 0						
16352,000 0	- 250,0000	2,920 0						
16464,000 0	- 250,0000	2,940 0						
16576,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,960 0
16688,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,980 0
16800,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,000 0
16912,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,020 0
17024,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,040 0
17136,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,060 0
17248,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,080 0
17360,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,100 0
17472,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,120 0
17584,000 0	- 235,7143	- 235,7143	14,2857	14,2857	0,0000	0,0000	0,0000	3,140 0
17696,000 0	- 221,4286	- 221,4286	28,5714	28,5714	0,0000	0,0000	0,0000	3,160 0
17808,000 0	- 207,1429	- 207,1429	42,8571	42,8571	0,0000	0,0000	0,0000	3,180 0
17920,000 0	- 192,8571	- 192,8571	57,1429	57,1429	0,0000	0,0000	0,0000	3,200 0
18032,000 0	- 178,5714	- 178,5714	71,4286	71,4286	0,0000	0,0000	0,0000	3,220 0
18144,000 0	- 164,2857	- 164,2857	85,7143	85,7143	0,0000	0,0000	0,0000	3,240 0
18256,000 0	- 150,0000	- 150,0000	100,0000	100,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3,260 0
18368,000 0	- 164,2857	- 164,2857	85,7143	85,7143	0,0000	0,0000	0,0000	3,280 0
18480,000 0	- 178,5714	- 178,5714	71,4286	71,4286	0,0000	0,0000	0,0000	3,300 0

18592,000 0	- 192,8571	- 192,8571	57,1429	57,1429	0,0000	0,0000	3,320 0
18704,000 0	- 207,1429	- 207,1429	42,8571	42,8571	0,0000	0,0000	3,340 0
18816,000 0	- 221,4286	- 221,4286	28,5714	28,5714	0,0000	0,0000	3,360 0
18928,000 0	- 235,7143	- 235,7143	14,2857	14,2857	14,2857	14,2857	3,380 0
19040,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	28,5714	28,5714	3,400 0
19152,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	42,8571	42,8571	3,420 0
19264,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	57,1429	57,1429	3,440 0
19376,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	71,4286	71,4286	3,460 0
19488,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	85,7143	85,7143	3,480 0
19600,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	100,0000	100,0000	3,500 0
19712,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	85,7143	85,7143	3,520 0
19824,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	71,4286	71,4286	3,540 0
19936,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	57,1429	57,1429	3,560 0
20048,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	42,8571	42,8571	3,580 0
20160,000 0	- 235,7143	- 235,7143	14,2857	14,2857	28,5714	28,5714	3,600 0
20272,000 0	- 221,4286	- 221,4286	28,5714	28,5714	14,2857	14,2857	3,620 0
20384,000 0	- 207,1429	- 207,1429	42,8571	42,8571	0,0000	0,0000	3,640 0
20496,000 0	- 192,8571	- 192,8571	57,1429	57,1429	0,0000	0,0000	3,660 0
20608,000 0	- 178,5714	- 178,5714	71,4286	71,4286	0,0000	0,0000	3,680 0
20720,000 0	- 164,2857	- 164,2857	85,7143	85,7143	0,0000	0,0000	3,700 0
20832,000 0	- 150,0000	- 150,0000	100,0000	100,0000	0,0000	0,0000	3,720 0
20944,000 0	- 164,2857	- 164,2857	85,7143	85,7143	0,0000	0,0000	3,740 0
21056,000 0	- 178,5714	- 178,5714	71,4286	71,4286	0,0000	0,0000	3,760 0
21168,000 0	- 192,8571	- 192,8571	57,1429	57,1429	0,0000	0,0000	3,780 0

21280,000 0	- 207,1429	- 207,1429	42,8571	42,8571	0,0000	0,0000	3,800 0
21392,000 0	- 221,4286	- 221,4286	28,5714	28,5714	0,0000	0,0000	3,820 0
21504,000 0	- 235,7143	- 235,7143	14,2857	14,2857	14,2857	14,2857	3,840 0
21616,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	28,5714	28,5714	3,860 0
21728,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	42,8571	42,8571	3,880 0
21840,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	57,1429	57,1429	3,900 0
21952,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	71,4286	71,4286	3,920 0
22064,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	85,7143	85,7143	3,940 0
22176,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	100,0000	100,0000	3,960 0
22288,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	85,7143	85,7143	3,980 0
22400,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	71,4286	71,4286	4,000 0
22512,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	57,1429	57,1429	4,020 0
22624,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	42,8571	42,8571	4,040 0
22736,000 0	- 235,7143	- 235,7143	14,2857	14,2857	28,5714	28,5714	4,060 0
22848,000 0	- 221,4286	- 221,4286	28,5714	28,5714	14,2857	14,2857	4,080 0
22960,000 0	- 207,1429	- 207,1429	42,8571	42,8571	0,0000	0,0000	4,100 0
23072,000 0	- 192,8571	- 192,8571	57,1429	57,1429	0,0000	0,0000	4,120 0
23184,000 0	- 178,5714	- 178,5714	71,4286	71,4286	0,0000	0,0000	4,140 0
23296,000 0	- 164,2857	- 164,2857	85,7143	85,7143	0,0000	0,0000	4,160 0
23408,000 0	- 150,0000	- 150,0000	100,0000	100,0000	0,0000	0,0000	4,180 0
23520,000 0	- 164,2857	- 164,2857	85,7143	85,7143	0,0000	0,0000	4,200 0
23632,000 0	- 178,5714	- 178,5714	71,4286	71,4286	0,0000	0,0000	4,220 0
23744,000 0	- 192,8571	- 192,8571	57,1429	57,1429	0,0000	0,0000	4,240 0
23856,000 0	- 207,1429	- 207,1429	42,8571	42,8571	0,0000	0,0000	4,260 0

23968,000 0	- 221,4286	- 221,4286	28,5714	28,5714	0,0000	0,0000	4,280 0
24080,000 0	- 235,7143	- 235,7143	14,2857	14,2857	14,2857	14,2857	4,300 0
24192,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	28,5714	28,5714	4,320 0
24304,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	42,8571	42,8571	4,340 0
24416,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	57,1429	57,1429	4,360 0
24528,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	71,4286	71,4286	4,380 0
24640,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	85,7143	85,7143	4,400 0
24752,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	100,0000	100,0000	4,420 0
24864,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	85,7143	85,7143	4,440 0
24976,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	71,4286	71,4286	4,460 0
25088,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	57,1429	57,1429	4,480 0
25200,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	42,8571	42,8571	4,500 0
25312,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	28,5714	28,5714	4,520 0
25424,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	14,2857	14,2857	4,540 0
25536,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,560 0
25648,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,580 0
25760,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,600 0
25872,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,620 0
25984,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,640 0
26096,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,660 0
26208,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,680 0
26320,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,700 0
26432,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,720 0
26544,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,740 0

26656,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,760 0
26768,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,780 0
26880,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,800 0
26992,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,820 0
27104,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,840 0
27216,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,860 0
27328,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,880 0
27440,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,900 0
27552,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,920 0
27664,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,940 0
27776,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,960 0
27888,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,980 0
28000,000 0	- 250,0000	- 250,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	5,000 0

ANEXO B - ANÁLISE DE FALHA POR FADIGA
PONTO DE ANÁLISE ASSOCIADO AO MEMBRO “SIM” DIREITO

i (-)	n_i (-)	σ_{misesa_i} (MPa)	σ_{misesm_i} (MPa)	σ_{equiv_i} (MPa)	N_i (-)	D_i (-)
1	1	12,2290	73,2410	14,4271	2,3040E+20	4,3403E-21
2	0,5	26,5265	81,5435	31,9453	2,0131E+16	2,4837E-17
3	0,5	27,1155	80,9545	32,6065	1,5822E+16	3,1601E-17
4	0,5	45,2005	99,0395	56,9292	2,2588E+13	2,2136E-14
5	0,5	47,7070	96,5330	59,6941	1,2934E+13	3,8657E-14
6	0,5	60,2270	109,0530	77,8986	5,6590E+11	8,8354E-13
7	1	30,3940	61,1570	34,8243	7,2995E+15	1,3700E-16
8	1	0,1375	34,6885	0,1482	5,4714E+43	1,8277E-44
9	1	17,3600	47,4280	19,2602	7,7137E+18	1,2964E-19
10	1	32,7015	60,7675	37,4334	3,1219E+15	3,2032E-16
11	1	24,1020	76,0480	28,6314	7,2955E+16	1,3707E-17
12	1	46,7575	74,9825	55,3985	3,1120E+13	3,2134E-14
13	1	36,9410	60,6160	42,2711	7,4794E+14	1,3370E-15
14	1	64,1840	85,2860	78,0270	5,5505E+11	1,8016E-12
15	1	32,5430	78,0170	38,8477	2,0187E+15	4,9536E-16
16	1	29,8575	74,2425	35,3109	6,2008E+15	1,6127E-16
17	1	70,5575	88,2125	86,4147	1,6712E+11	5,9838E-12
18	1	10,5515	38,2955	11,4648	3,4347E+21	2,9115E-22
19	1	43,1570	59,7030	49,2769	1,2328E+14	8,1115E-15
20	1	7,0820	71,8890	8,3273	1,4737E+23	6,7858E-24
21	1	29,9245	89,6255	36,7822	3,8373E+15	2,6060E-16
22	1	0,6240	92,4610	0,7726	2,0293E+35	4,9277E-36
23	1	5,0075	87,5815	6,1230	5,4739E+24	1,8268E-25
24	1	17,7195	82,9005	21,4120	2,2208E+18	4,5028E-19
25	1	3,4380	56,3570	3,8946	1,1181E+27	8,9435E-28
26	1	2,7260	28,2240	2,8960	3,6394E+28	2,7477E-29
27	1	46,1460	68,8440	53,8592	4,3343E+13	2,3072E-14
28	1	1,1170	22,5800	1,1721	1,5120E+33	6,6136E-34
29	1	3,5065	74,0855	4,1454	5,3689E+26	1,8626E-27
30	1	3,4275	80,3025	4,1149	5,8555E+26	1,7078E-27
31	1	15,9425	70,9595	18,7033	1,0891E+19	9,1818E-20
32	1	56,8300	66,9600	66,0270	3,9531E+12	2,5297E-13
33	0,5	80,0244	89,2556	98,2703	3,6865E+10	1,3563E-11
34	1	85,5905	105,6795	109,7083	1,0103E+10	9,8978E-11
35	1	38,8190	75,3410	46,0336	2,7448E+14	3,6432E-15
36	1	28,8415	126,1185	39,0993	1,8711E+15	5,3443E-16
37	1	48,2005	122,4095	64,6672	5,0487E+12	1,9807E-13
38	1	78,3010	112,8990	102,3347	2,2893E+10	4,3682E-11
39	1	51,2145	79,9855	61,4368	9,2221E+12	1,0844E-13
40	1	12,4180	62,0830	14,2596	2,6431E+20	3,7835E-21
41	1	1,5900	53,2460	1,7880	1,0546E+31	9,4826E-32
42	1	0,9755	48,9205	1,0860	3,7052E+33	2,6989E-34
43	1	3,8920	48,4860	4,3286	3,2289E+26	3,0971E-27

44	1	11,2725	55,3325	12,7388	9,9521E+20	1,0048E-21
45	1	3,7400	49,0310	4,1648	5,0817E+26	1,9679E-27
46	1	1,6015	53,5935	1,8024	9,5968E+30	1,0420E-31
47	1	3,2075	56,7325	3,6367	2,5021E+27	3,9967E-28
48	1	2,8725	57,8895	3,2658	8,8624E+27	1,1284E-28
49	1	20,2375	63,0565	23,2928	8,2537E+17	1,2116E-18
50	1	28,9305	55,2855	32,6900	1,5353E+16	6,5132E-17
51	1	57,4830	90,8770	70,8830	1,7163E+12	5,8263E-13
52	1	60,9235	92,0465	75,3515	8,3651E+11	1,1954E-12
53	1	61,2180	131,4920	84,2679	2,2463E+11	4,4518E-12
54	1	88,8550	107,2250	114,3640	6,1982E+09	1,6134E-10
55	1	19,6550	137,7750	27,5512	1,1466E+17	8,7217E-18
56	1	58,0615	115,6285	76,4502	7,0561E+11	1,4172E-12
57	1	89,6765	145,2435	128,5017	1,5746E+09	6,3509E-10
58	1	38,6325	66,3975	44,8236	3,7542E+14	2,6637E-15
59	1	38,2695	65,0005	44,2532	4,3643E+14	2,2913E-15
60	1	69,6660	95,7740	86,9988	1,5439E+11	6,4769E-12
61	1	23,6450	153,6150	34,7492	7,4873E+15	1,3356E-16
62	1	63,5750	122,9650	85,4265	1,9131E+11	5,2270E-12
63	1	91,9085	134,3615	127,5622	1,7164E+09	5,8260E-10
64	1	34,8585	76,8315	41,4896	9,3142E+14	1,0736E-15
65	1	123,4660	147,9140	178,3399	3,3402E+07	2,9938E-08
66	1	39,8715	64,7985	46,0833	2,7103E+14	3,6897E-15
67	1	67,4895	93,3205	83,7470	2,4162E+11	4,1388E-12
68	1	23,5900	148,1800	34,1017	9,3401E+15	1,0707E-16
69	1	64,7815	120,7285	86,5069	1,6504E+11	6,0593E-12
70	1	84,7525	134,0275	117,5169	4,5020E+09	2,2212E-10
71	1	36,0740	77,9960	43,0605	6,0174E+14	1,6619E-15
72	1	26,6105	58,0325	30,2640	3,8012E+16	2,6308E-17
73	1	15,8580	62,8870	18,2447	1,4582E+19	6,8578E-20
74	1	10,1745	70,3945	11,9200	2,1732E+21	4,6016E-22
75	1	7,6640	65,3270	8,8693	7,0221E+22	1,4241E-23
76	1	5,7615	55,5995	6,5150	2,6393E+24	3,7889E-25
77	1	7,2325	50,8055	8,0872	2,0786E+23	4,8109E-24
78	0,5	140,4294	149,6606	203,9127	6,9121E+06	7,2337E-08
79	0,5	135,4740	154,6160	199,7064	8,8314E+06	5,6616E-08
80	0,5	122,6640	141,8060	173,9882	4,4659E+07	1,1196E-08
81	0,5	117,8755	146,5945	169,5923	6,0334E+07	8,2872E-09
82	0,5	26,9885	55,7075	30,5260	3,4349E+16	1,4557E-17
83	0,5	20,8465	61,8495	23,9246	6,0257E+17	8,2978E-19
84	0,5	9,6340	50,6370	10,7683	7,1763E+21	6,9673E-23
85	0,5	8,7465	51,5245	9,7965	2,1817E+22	2,2918E-23
86	0,5	5,7240	48,5020	6,3663	3,4623E+24	1,4441E-25

PONTO DE ANÁLISE ASSOCIADO AO MEMBRO “SIM” DIREITO

i (-)	n_i (-)	$\sigma_{mises_{a_i}}$ (MPa)	$\sigma_{mises_{m_i}}$ (MPa)	σ_{equiv_i} (MPa)	N_i (-)	D_i (-)
1	0,5	40,0060	75,4740	47,4568	1,9189E+14	2,6056E-15
2	1	43,0620	68,0380	50,1615	1,0001E+14	9,9986E-15
3	0,5	51,9705	63,5095	59,8817	1,2466E+13	4,0109E-14
4	1	25,2790	115,5710	33,2799	1,2442E+16	8,0371E-17
5	1	42,6175	124,4925	57,5112	2,0042E+13	4,9894E-14
6	1	60,6205	134,4595	84,1606	2,2802E+11	4,3856E-12
7	1	47,3810	100,9090	59,9693	1,2254E+13	8,1609E-14
8	0,5	108,5955	120,1345	144,7757	3,8756E+08	1,2901E-09
9	1	66,4840	80,2960	79,8159	4,2520E+11	2,3518E-12
10	1	61,3345	108,2155	79,1527	4,6903E+11	2,1321E-12
11	1	93,2610	130,8490	128,1399	1,6276E+09	6,1438E-10
12	0,5	110,7353	117,9947	146,7575	3,3031E+08	1,5137E-09
13	1	34,5350	150,2650	50,2388	9,8220E+13	1,0181E-14
14	1	83,6820	121,3580	111,9417	7,9719E+09	1,2544E-10
15	1	76,8230	106,3670	98,6511	3,5226E+10	2,8388E-11
16	1	84,4125	97,5875	105,9132	1,5283E+10	6,5432E-11
17	1	16,9400	76,6530	20,1536	4,5266E+18	2,2092E-19
18	1	42,5555	80,4045	51,1029	8,0377E+13	1,2441E-14
19	1	83,5770	96,3830	104,5362	1,7825E+10	5,6102E-11
20	1	28,9748	38,2842	31,4820	2,3903E+16	4,1835E-17
21	0,5	120,9903	128,2497	165,0138	8,3233E+07	6,0072E-09
22	1	24,6120	34,7830	26,5317	1,7861E+17	5,5987E-18
23	1	13,4760	46,7870	14,9290	1,5412E+20	6,4882E-21
24	1	6,2975	57,8255	7,1586	8,7198E+23	1,1468E-24
25	1	0,2265	49,5065	0,2525	1,0405E+41	9,6108E-42
26	1	1,3565	21,0835	1,4187	1,6009E+32	6,2464E-33
27	1	24,1055	42,7375	26,4577	1,8458E+17	5,4177E-18
28	1	76,2695	89,5505	93,7299	6,4289E+10	1,5555E-11
29	1	30,0145	59,5535	34,2586	8,8495E+15	1,1300E-16
30	1	22,8795	90,8905	28,2140	8,6704E+16	1,1534E-17
31	1	40,9260	96,7140	51,2334	7,8002E+13	1,2820E-14
32	1	70,5505	85,2395	85,7565	1,8284E+11	5,4694E-12
33	1	23,8625	37,0745	25,8566	2,4183E+17	4,1352E-18
34	1	45,9420	58,8480	52,3506	6,0530E+13	1,6521E-14
35	1	15,8485	42,4135	17,3821	2,5770E+19	3,8805E-20
36	1	0,6400	32,4050	0,6863	8,1735E+35	1,2235E-36
37	1	1,6720	31,9860	1,7912	1,0331E+31	9,6796E-32
38	1	2,8245	32,7775	3,0312	2,1289E+28	4,6972E-29
39	1	3,4850	32,3790	3,7367	1,8189E+27	5,4979E-28
40	1	1,7905	34,3095	1,9281	4,3454E+30	2,3013E-31
41	1	1,7145	37,1825	1,8582	6,7068E+30	1,4910E-31
42	1	2,4180	36,4990	2,6167	1,1993E+29	8,3380E-30
43	1	8,0230	34,7180	8,6475	9,4567E+22	1,0574E-23

44	1	21,0305	42,7305	23,0822	9,1838E+17	1,0889E-18
45	1	42,6280	66,4020	49,4599	1,1803E+14	8,4727E-15
46	1	47,8735	71,3065	56,2115	2,6222E+13	3,8137E-14
47	1	59,0645	91,3755	72,9264	1,2288E+12	8,1377E-13
48	1	79,0350	90,7250	97,4210	4,0826E+10	2,4494E-11
49	0,5	121,7509	127,4892	165,6936	7,9306E+07	6,3047E-09
50	1	21,7500	123,9700	29,3081	5,5435E+16	1,8039E-17
51	1	81,3795	127,3705	110,7140	9,0755E+09	1,1019E-10
52	1	53,4275	93,1925	66,2757	3,7822E+12	2,6440E-13
53	1	29,8615	53,5945	33,6084	1,1085E+16	9,0210E-17
54	1	35,7125	52,8015	40,1191	1,3824E+15	7,2335E-16
55	1	65,0705	75,8995	77,2705	6,2240E+11	1,6067E-12
56	1	19,8600	133,9200	27,5291	1,1574E+17	8,6398E-18
57	1	58,2425	97,9975	73,1557	1,1843E+12	8,4437E-13
58	1	83,3425	118,4675	110,5980	9,1880E+09	1,0884E-10
59	1	34,9415	57,2135	39,6619	1,5819E+15	6,3217E-16
60	1	32,1945	50,1895	35,9476	5,0258E+15	1,9897E-16
61	1	59,8190	77,1110	71,2476	1,6159E+12	6,1887E-13
62	1	20,9850	128,9950	28,6812	7,1478E+16	1,3990E-17
63	1	76,6210	120,4090	102,2263	2,3180E+10	4,3141E-11
64	1	59,0195	96,5605	73,8544	1,0591E+12	9,4419E-13
65	1	19,6315	43,3985	21,5797	2,0263E+18	4,9352E-19
66	1	35,6250	58,1010	40,5227	1,2290E+15	8,1368E-16
67	1	14,7240	42,6510	16,1575	6,0828E+19	1,6440E-20
68	1	7,1480	44,7780	7,8822	2,8110E+23	3,5574E-24
69	1	5,2990	40,2860	5,7837	1,0701E+25	9,3452E-26
70	1	4,8925	35,8945	5,2873	3,0731E+25	3,2540E-26
71	1	5,0090	34,0890	5,3913	2,4440E+25	4,0916E-26
72	0,5	123,4059	129,1441	168,7364	6,4032E+07	7,8086E-09
73	0,5	121,2475	131,3025	166,8093	7,3289E+07	6,8223E-09
74	0,5	115,5675	125,6225	156,4517	1,5572E+08	3,2109E-09
75	0,5	115,2155	125,9745	156,1299	1,5953E+08	3,1342E-09
76	0,5	112,9405	123,6995	152,0718	2,1743E+08	2,2996E-09
77	0,5	111,4435	125,1965	150,6880	2,4209E+08	2,0653E-09
78	0,5	22,6935	36,4465	24,5552	4,4380E+17	1,1266E-18
79	0,5	16,6490	42,4910	18,2633	1,4409E+19	3,4701E-20
80	0,5	7,2595	33,1015	7,7963	3,1973E+23	1,5638E-24
81	0,5	6,3385	34,0225	6,8213	1,5380E+24	3,2510E-25
82	0,5	3,9005	31,5845	4,1748	4,9403E+26	1,0121E-27