



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA MESTRADO EM REDE
NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ERIVALDO CORDEIRO

CÁLCULO VETORIAL APLICADO À BIOLOGIA

FORTALEZA

2025

FRANCISCO ERIVALDO CORDEIRO

CÁLCULO VETORIAL APLICADO À BIOLOGIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C819c Cordeiro, Francisco Erivaldo.
Cálculo vetorial aplicado à Biologia / Francisco Erivaldo Cordeiro. – 2025.
116 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Biologia - Matemática. 2. Vetores. 3. Cálculo vetorial. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO ERIVALDO CORDEIRO

CÁLCULO VETORIAL APLICADO À BIOLOGIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 30/05/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A minha esposa Grazielle, minha filha Sara
Eloah, aos meus pais, meus irmãos, sobrinhos e
amigos por sempre acreditarem em mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador de todo o Universo, pois sem Sua existência nada teria sido realizado, inclusive este trabalho científico. Sou profundamente grato por me fortalecer nos momentos de maiores adversidades, ajudando-me a suportar os desafios mais pesados.

A minha esposa, Grazielle Joyce dos Santos Marques Cordeiro, pelo inestimável suporte emocional nos momentos desafiadores e por confiar incondicionalmente em mim, e a nossa linda filha, Sara Eloah Marques Cordeiro, que começou essa jornada apenas em nossos pensamentos, logo após o primeiro ano de gestação no ventre de minha esposa e agora conosco.

Aos meus pais, Francisco das Chagas Cordeiro e Francisca das Chagas da Mota Cordeiro, que, com humildade e integridade, educaram seus filhos, proporcionando tudo o que necessitavam: amor, confiança e imenso carinho, além do sustento, mesmo diante das dificuldades financeiras enfrentadas e por sempre acreditarem em mim e falarem palavras positivas em relação aos meus estudos.

Aos meus irmãos, Erilauda, Erinalda, Edilauda e Wesley, aos meus sobrinhos, Roniele, Thaylan, Juliana, Maria, Luiz, Ana, Miguel, Pedrinho e Giana, e amigos, em especial, Vinícius e Claudemir e os que conquistei na escola, entre eles, Dr. Marciel, Luciana, Diretor Renato, Amaury, Vylhena, Dadson, pelo apoio, além do suporte moral.

Aos colegas do curso de mestrado: Airton, Antônio Wesley, Antônio Airton, Artêmio, Bartolomeu, Danrley, Demerval, Eduardo, Elizeu, De Assis, Ivanildo, Nairon, Hedilândio, Jhonatas, Marciano, Raphael, Thyago, Túlio e Vandenberg pela troca de ideias, reflexões, críticas construtivas, pelo apoio científico e tecnológico, que, por meio de diálogos enriquecedores, colaborações e sugestões recebidas ao longo de todo o programa que sempre buscaram explorar possibilidades e caminhos que vislumbrassem um futuro promissor.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela oportunidade excepcional oferecida aos professores de Matemática de todo o país, permitindo-lhes alcançar esse nível de formação acadêmica dentro de sua área de especialização.

Também ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, pela disponibilização da infraestrutura necessária para a realização deste curso de mestrado.

Aos professores, com especial menção aos Doutores Antônio Caminha, Marcos Melo, Jonatan Floriano, Frederico Girão, e Esdras de Medeiro, que estiveram presentes durante grande parte desta jornada, e ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, que aceitou o desafio de me orientar.

“Os passos de um homem bom são confirmados
pelo Senhor, e ele deleita-se no seu caminho”
(Bíblia, 2011, Salmos 37:23).

RESUMO

Este trabalho apresenta os fundamentos matemáticos essenciais para o estudo do cálculo vetorial e as principais aplicações ao estudo da biologia. Nos capítulos iniciais, abordam-se os conceitos básicos da teoria vetorial, incluindo a definição de vetores, operações com vetores, produto escalar, produto vetorial, bem como suas propriedades, interpretações geométricas e aplicação desses conceitos à biologia. Posteriormente, o estudo aprofunda-se no cálculo vetorial, com foco nas integrais de linha e de superfície, bem como nos operadores vetoriais, destacando as definições e aplicações de gradiente, divergente e rotacional. Os capítulos seguintes exploram os Teoremas de Green, Stokes e Divergente (Gauss), que são pilares fundamentais no estudo do cálculo vetorial. O trabalho é concluído com aplicações do cálculo vetorial à biologia, demonstrando como conceitos matemáticos podem ser utilizados para modelar e analisar fenômenos biológicos complexos, promovendo uma compreensão interdisciplinar.

Palavras-chave: vetor; cálculo vetorial; aplicações nos ramos da Biologia.

ABSTRACT

This work presents the essential mathematical foundations for the study of vector calculus and its main applications in biology. The initial chapters address the basic concepts of vector theory, including the definition of vectors, vector operations, dot product, cross product, as well as their properties, geometric interpretations, and the application of these concepts to biology. Subsequently, the study delves deeper into vector calculus, focusing on line and surface integrals, as well as vector operators, emphasizing the definitions and applications of gradient, divergence, and curl. The following chapters explore Green's Theorem, Stokes' Theorem, and the Divergence Theorem (Gauss' Theorem), which are fundamental pillars in the study of vector calculus. The work concludes with applications of vector calculus in biology, demonstrating how mathematical concepts can be used to model and analyze complex biological phenomena, fostering an interdisciplinary understanding.

Keywords: vector; vector calculus; applications in Biology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Sistema de coordenadas (\mathbb{R}^2)	19
Figura 2	- Sistema de coordenadas em (\mathbb{R}^3)	19
Figura 3	- Regra da mão direita	20
Figura 4	- Representação do ponto $P = (a, b, c)$	20
Figura 5	- Caixa retangular determinada por $P = (a, b, c)$	21
Figura 6	- Coordenada do ponto A	22
Figura 7	- Caso 1: $0 < a < b$	22
Figura 8	- Distância entre A e B	23
Figura 9	- Distância entre P1 e P2	24
Figura 10	- Vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$	27
Figura 11	- Multiplicação do vetor \vec{v} por um escalar	28
Figura 12	- Ângulo entre vetores	30
Figura 13	- Ângulo agudo entre vetores	32
Figura 14	- Ângulo reto entre vetores	32
Figura 15	- Ângulo obtuso entre vetores	32
Figura 16	- Paralelogramo OABC de altura h	34
Figura 17	- Antígeno bidimensional	35
Figura 18	- Agrupamentos do vírus da gripe	39
Figura 19	- Lei do paralelogramo	39
Figura 20	- Forças horizontais e verticais exercidas por um atleta no início de uma corrida	40
Figura 21	- C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\vec{r}(t)$	46
Figura 22	- Vetor secante \overrightarrow{PQ}	47
Figura 23	- O vetor tangente $\vec{r}'(t)$	47
Figura 24	- O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas	50
Figura 25	- O arco de hélice cujo comprimento que é calculado no exemplo 4.2.4.1	51
Figura 26	- Velocidade e aceleração	51
Figura 27	- As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_2	53

Figura 28	- Gráfico da função f	54
Figura 29	- Gráfico das derivadas parciais	54
Figura 30	- Gráfico das derivadas parciais de segunda ordem	54
Figura 31	- Representação do vetor U com ponto inicial em $P(x, y)$	55
Figura 32	- Derivada direcional	56
Figura 33	- A derivada direcional $D_u f(1, 2)$ do Exemplo 4.16	58
Figura 34	- O plano vertical que passa por P na direção de u intercepta S em uma curva C	59
Figura 35	- Ângulo do parâmetro t	61
Figura 36	- Hélice	62
Figura 37	- Uma hélice dupla	62
Figura 38	- Campos vetoriais de velocidade mostrando aspectos do vento na Baía de São Francisco	77
Figura 39	- Campos vetoriais de velocidade	78
Figura 40	- Campo vetorial em R^2	78
Figura 41	- Passo 1	79
Figura 42	- Passo 2	79
Figura 43	- Passo 3	79
Figura 44	- Campo vetorial em R^3	80
Figura 45	- $F(x, y, z) = zk$	81
Figura 46	- Campo de velocidade do escoamento de um fluido	81
Figura 47	- Caminho percorrido por uma curva	82
Figura 48	- C é uma curva plana com ponto final e inicial	86
Figura 49	- C é uma curva espacial com ponto final e inicial	87
Figura 50	- Curva fechada	89
Figura 51	- Orientação das curvas	89
Figura 52	- Regiões do tipo I	90
Figura 53	- Regiões do tipo II	90
Figura 54	- Curva que compõe C	91
Figura 55	- Curvas Triangular C	92
Figura 56	- Comprimento do vetor rotacional	96
Figura 57	- Uma faixa de Möbius	99
Figura 58	- Orientação positiva	100

Figura 59	- Orientação positiva	100
Figura 60	- Divisão de S	101
Figura 61	- Superfície orientada com vetor normal unitário n	103
Figura 62	- Teorema do Stokes	103
Figura 63	- Região sólida do tipo 1	107
Figura 64	- Teorema do divergente	108
Figura 65	- Região do tipo 2	109
Figura 66	- Região do tipo 3	109
Figura 67	- Grassmann	112
Figura 68	- Hamilton	113
Figura 69	- Gibbs	113
Figura 70	- Vector Analysis (a) rosto (b) pág 54	115
Figura 71	- Clairaut	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Capacidade de ligação	36
Tabela 2	- Medidas morfológicas	36
Tabela 3	- Dieta	37
Tabela 4	- Componentes da força	41

LISTA DE SÍMBOLOS

- R Conjunto dos números reais
- R^2 Conjuntos formado pelos pares ordenados que formam o plano
- R^3 Conjunto formado pelos ternos ordenados que forma o espaço

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO CÁLCULO VETORIAL	17
2.1	Vetor	18
2.1.1	<i>Sistema de coordenadas</i>	18
2.1.1.1	<i>No plano - R^2</i>	18
2.1.1.2	<i>No espaço - R^3</i>	19
2.1.2	<i>Distância entre pontos</i>	22
2.1.2.1	<i>Na reta - R</i>	22
2.1.2.2	<i>No plano - R^2</i>	23
2.1.2.3	<i>No espaço - R^3</i>	24
2.1.2.4	<i>No espaço n-dimensional - R^n</i>	24
2.1.3	<i>Conceito de vetor</i>	25
2.1.3.1	<i>No plano - R^2</i>	25
2.1.3.2	<i>No espaço - R^3</i>	26
2.1.3.3	<i>No espaço n-dimensional - R^n</i>	26
2.2	Operações com vetores	26
2.2.1	<i>Adição de vetores</i>	26
2.2.1.1	<i>No plano - R^2</i>	26
2.2.1.3	<i>No espaço - R^3</i>	27
2.2.1.4	<i>No espaço n-dimensional - R^n</i>	27
2.2.2	<i>Multiplicação de um vetor por um escalar real</i>	28
2.3	Produto interno	29
2.3.1	<i>Norma de um vetor</i>	29
2.3.1.1	<i>No plano - R^2</i>	29
2.3.1.2	<i>No espaço - R^3</i>	30
2.3.1.3	<i>No espaço n-dimensional - R^n</i>	30
2.3.2	<i>Ângulo entre vetores</i>	30
2.3.3	<i>Produto interno ou escalar</i>	31
2.3.4	<i>Retomando a ideia de ângulo entre vetores</i>	32
2.4	Produto vetorial	33
2.4.1	<i>Algumas propriedades do produto vetorial</i>	33

3	ALGUMAS APLICAÇÕES SOBRE VETOR À BIOLOGIA	35
3.1	Conceito de vetor e cálculo de distâncias	35
3.1.1	<i>Cartografia antigênica 1 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	35
3.1.2	<i>Cartografia antigênica 2 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	35
3.1.3	<i>Os tentilhões de Darwin – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	36
3.2	Adição de Vetores	38
3.2.1	<i>Cartografia antigênica 3 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	38
3.2.2	<i>Biomecânica 1 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	40
3.2.3	<i>Biomecânica 2 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	40
3.3	Produto escalar	41
3.3.1	<i>Usando o produto escalar para descoberta biológica - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	41
3.3.2	<i>Dinâmica populacional - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	42
4	CÁLCULO VETORIAL	44
4.1	Funções vetoriais	44
4.2	Derivadas e integrais de funções vetoriais	46
4.2.1	<i>Derivada de uma função vetorial</i>	46
4.2.2	<i>Regras de derivação</i>	48
4.2.3	<i>Integral de uma função vetorial</i>	48
4.2.4	<i>Aplicações das derivadas e integrais de função vetorial</i>	49
4.3	Derivadas direcionais e vetor gradiente	52
4.3.1	<i>Derivada parciais</i>	52
4.3.2	<i>Derivada parciais de ordem superior</i>	53
4.3.3	<i>Derivada direcionais</i>	55
4.3.4	<i>Vetor gradiente</i>	59
4.3.5	<i>Propriedades do vetor gradiente</i>	60
4.3.6	<i>Aplicações</i>	60
5	APLICAÇÃO DO CÁLCULO VETORIAL À BIOLOGIA	61
5.1	Função vetorial	61
5.1.1	<i>Curvas parametrizadas - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	61
5.1.2	<i>Curvas parametrizadas - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	61
5.2	Derivadas parciais	62
5.2.1	<i>Índice de massa corporal (IMC) - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	62

5.2.2	<i>Fluxo sanguíneo - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	63
5.2.3	<i>Concentração de antibióticos - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	64
5.2.4	<i>Gasto energético do lagarto - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	66
5.3	Derivadas direcionais e vetor gradiente	67
5.3.1	<i>Inversões e listras de cobras 1 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	67
5.3.2	<i>Inversões e listras de cobras 2 - Livro BioCalculus (Stewart, 2016)</i>	68
6	CONCLUSÃO	70
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL	73
	APÊNDICE B – CÁLCULO VETORIAL PARA ALÉM DA BIOLOGIA	77
	APÊNDICE C – DETALHES HISTÓRICOS DOS PERSONAGENS CITADOS NO TEXTO	110

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos fenômenos biológicos exige uma abordagem interdisciplinar, onde conceitos de diferentes áreas do conhecimento convergem para explicar a complexidade da vida. Nesse contexto, o cálculo vetorial surge como uma ferramenta indispensável, oferecendo uma linguagem matemática precisa para descrever e analisar processos biológicos que envolvem forças, movimentos e interações espaciais.

Desde o estudo da biomecânica do corpo humano até a modelagem de fluxos em sistemas circulatórios ou ecossistemas, o cálculo vetorial permite representar grandezas como força, velocidade e aceleração, fundamentais para entender a dinâmica dos sistemas vivos. Além disso, a aplicação do cálculo vetorial em áreas como biologia celular, neurociência e ecologia amplia a compreensão de fenômenos microscópicos e macroscópicos, como o transporte intracelular, a propagação de sinais neurais e o movimento de populações.

Esta dissertação tem como objetivo explorar os conceitos basilares de vetores bem como o cálculo alicerçado nesse e suas aplicações (cálculo vetorial) na biologia por meio da resolução de questões, com foco em situações corriqueiras do cotidiano de pessoas ditas normais, como por exemplo uma simples corrida com o intuito de um condicionamento físico ou melhoria na saúde, como também no fato de como se comporta alguns vírus e seus contato com soros, sua utilização para modelar fenômenos dinâmicos e compreender interações complexas nos sistemas vivos.

Ao integrar ferramentas matemáticas ao estudo biológico, busca-se não apenas descrever os processos naturais com maior precisão, mas também oferecer subsídios para avanços em áreas aplicadas, como a biotecnologia, a medicina e a conservação ambiental. Assim, esta investigação ressalta o potencial do cálculo vetorial como um elo entre a matemática e a biologia, promovendo a inovação e a compreensão integrada dos sistemas biológicos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO CÁLCULO VETORIAL

O cálculo vetorial é uma área da matemática que combina álgebra linear, cálculo diferencial e integral para estudar funções vetoriais, integrais de linha, campos vetoriais, suas propriedades e aplicações. Ele é fundamental em diversas áreas, como física, biologia, engenharia e computação, pois permite modelar fenômenos que envolvem grandezas vetoriais, como forças, velocidades e fluxos. James Clerk Maxwell (1831–1870), renomado físico e matemático escocês, reconheceu a importância fundamental do cálculo vetorial para a formulação de suas famosas equações do eletromagnetismo, que revolucionaram a física. Em seus estudos, ele enfatizou que a análise detalhada dos campos vetoriais desempenha um papel indispensável para a compreensão profunda da interação entre as forças naturais que atuam no espaço tridimensional. Esse conceito não apenas reflete a sofisticação matemática de sua abordagem, mas também evidencia como o cálculo vetorial se tornou uma ferramenta crucial para descrever os fenômenos físicos com precisão e clareza (Maxwell, 1865).

No contexto biológico, sua aplicação se revela essencial desde o mais básico, como a aplicação de vetores, ao estudo de fenômenos que envolvem movimento, interação de forças e dinâmicas espaciais em sistemas vivos. Esta dissertação de maneira teórica e com aplicações busca explorar as bases conceituais do cálculo vetorial e suas interfaces com a biologia, oferecendo uma visão ampla das suas contribuições na compreensão de processos naturais. Na biologia, o cálculo vetorial é amplamente empregado em áreas como a biomecânica, a biofísica, a fisiologia e a ecologia. Na biomecânica, por exemplo, o cálculo vetorial é usado para analisar as forças exercidas por músculos, a dinâmica das articulações e os movimentos complexos do corpo humano. Já na biofísica, ele é crucial para modelar fluxos de partículas em sistemas celulares, como o transporte de íons em canais iônicos e a difusão de moléculas. Na fisiologia cardiovascular, o estudo do fluxo sanguíneo em artérias e veias depende de conceitos como o gradiente vetorial e o fluxo volumétrico. Por outro lado, na ecologia, o cálculo vetorial auxilia na análise do deslocamento de populações, como o movimento de espécies migratórias ou a dispersão de sementes no ambiente.

O cálculo vetorial, uma ferramenta fundamental em diversas áreas da ciência, estabelece conexões intrigantes entre campos aparentemente distintos, como a fisiologia cardiovascular e a ecologia. Enquanto na fisiologia ele é essencial para entender o gradiente de pressão que impulsiona o fluxo sanguíneo em artérias e veias, na ecologia auxilia na modelagem dos deslocamentos populacionais e na dispersão de organismos no ambiente. Essa versatilidade reflete a profundidade do pensamento de Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903), que contribuiu

significativamente para a formalização desse ramo da matemática, permitindo que fosse aplicado para descrever fenômenos complexos em escalas tão distintas quanto a circulação sanguínea e o movimento das espécies na natureza.

Josiah Willard Gibbs (1839–1903), um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento formal do cálculo vetorial, destacou em seus trabalhos a relevância dessa abordagem matemática para a física. Em 1881, ele enfatizou que os métodos de análise vetorial não apenas simplificam os cálculos, mas também proporcionam uma clareza conceitual incomparável na formulação e no entendimento dos princípios fundamentais da física. Essa visão reflete a importância do cálculo vetorial como uma linguagem universal para descrever de forma precisa os fenômenos naturais (Gibbs, 1881).

Gibbs foi um dos responsáveis por popularizar o uso do cálculo vetorial no final do século XIX, especialmente em trabalhos relacionados à termodinâmica e eletromagnetismo. Ele desenvolveu uma notação formal que foi amplamente aceita por cientistas e matemáticos, facilitando o trabalho com vetores em múltiplas dimensões. Oliver Heaviside (1850–1925), conhecido por suas contribuições inovadoras à aplicação prática do cálculo vetorial, destacou em 1893 o papel essencial dessa ferramenta matemática na compreensão dos fenômenos naturais. Em uma de suas reflexões marcantes, ele apontou que a matemática vetorial vai além de facilitar os cálculos: ela revela de maneira clara e estruturada os fundamentos subjacentes que regem os fenômenos físicos. Essa perspectiva ilustra como o cálculo vetorial se tornou indispensável na análise e na interpretação dos princípios que governam o universo natural (Heaviside, 1893).

Heaviside (1893), assim como Gibbs (1881), utilizou o cálculo vetorial para simplificar e interpretar as equações de Maxwell mostrando sua aplicação prática na engenharia elétrica e em outras áreas da física.

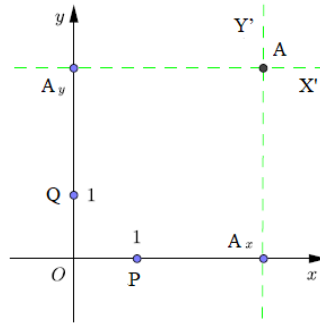
2.1 Vetor

2.1.1 Sistema de coordenadas

2.1.1.1 No plano - R^2

Consideremos o plano XOY definido, de acordo com Reis (2013), pelo par de retas orientadas X e Y, perpendiculares entre si, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Sistema de Coordenadas (R^2)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

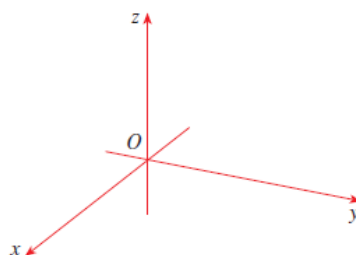
O eixo X é a direção horizontal, enquanto o eixo Y é a direção vertical. O ponto O , correspondente à interseção entre as retas, é a origem do sistema. Definimos OP e OQ como segmentos unitários, adotando uma unidade de medida arbitrária. Seja A um ponto qualquer neste plano; associamos a ele o par de coordenadas (x,y) , traçando uma reta X' paralela a x e uma reta Y' paralela a y . As interseções dessas retas com os eixos x e y , respectivamente, determinam os pontos A_x e A_y . A interseção dessas retas paralelas define o ponto A . Os números x e y são denominados, respectivamente, abscissa e ordenada do ponto A , sendo representados por $A = (x,y)$.

A construção que acabamos de fazer nos permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais (x, y) .

2.1.1.2 No espaço - R^3

De acordo com Santos (2006) e Stewart (2016), de maneira semelhante, introduzimos um sistema de coordenadas no espaço. Para localizar um ponto no espaço, são necessários três números. Representamos qualquer ponto no espaço por um triplo ordenado (a, b, c) de números reais. Para fazer isso, primeiro escolhemos um fixo ponto O (a origem) e três linhas direcionadas através de O que são perpendiculares a cada outro, chamado de eixos de coordenadas e rotulado como eixo x , eixo y e eixo z , esse é definido como vertical, enquanto os eixos x e y são horizontais, conforme ilustrado na Figura 2, onde é vista a orientação dos eixos

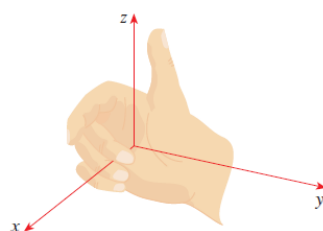
Figura 2 – Sistema de coordenadas em (R^3)



Fonte: Stewart (2016)

Os três eixos seguem a regra da mão direita, a qual serve para determinar a direção do eixo z , conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Regra da mão direita

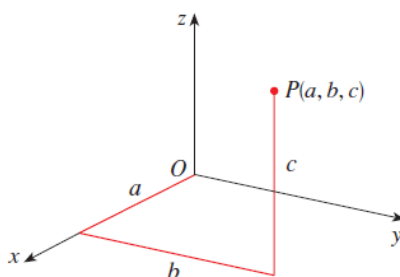


Fonte: Stewart (2016)

Nesta regra, os dedos indicam a direção do semieixo x positivo, o semieixo y positivo está na palma da mão, e o polegar aponta para cima no sentido do semieixo z positivo. Assim, temos três planos coordenados: xy , yz e xz .

A cada ponto P no espaço, associamos um conjunto ordenado de números reais (a, b, c) , em que z é chamado de cota, **a** é a distância (direcionada) do plano yz a P , **b** é a distância do plano xz a P , e **c** é a distância do plano xy a P . Chamamos **a**, **b** e **c** as coordenadas de P , **a** é a coordenada x , **b** é a coordenada y e **c** é a coordenada z . Assim, para localizar o ponto (a, b, c) , podemos começar na origem O e mover **a** ao longo do eixo x , depois **b** unidades paralelas ao eixo y e, em seguida, **c** unidades paralelas ao eixo conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Representação do ponto $P = (a, b, c)$

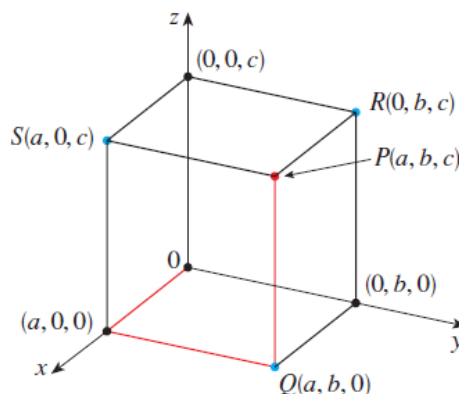


Fonte: Stewart (2016)

O ponto P determina uma caixa retangular, um paralelepípedo, conforme ilustrado na Figura 5. Se deixar cair uma perpendicular de P no plano xy , obtemos um ponto $Q = (a, b,$

0), chamando de projeção de P no plano xy. De maneira análoga $S = (a, 0, c)$ e $R = (0, b, c)$ são projeções de P no plano xz e no plano yz, respectivamente.

Figura 5 – Caixa retangular determinado por $P = (a, b, c)$



Fonte: Stewart (2016)

Um sistema de coordenadas em um espaço n -dimensional, denotado por R^n , é uma generalização dos sistemas de coordenadas utilizados nos espaços bidimensionais (R^2) e tridimensionais (R^3). Sua definição é descrita como se segue:

(1) Espaço n -dimensional (R^n)

O espaço R^n consiste no conjunto de todas as n -uplas ordenadas de números reais, ou seja:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R \text{ para } i = \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

(2) Eixos de coordenadas

O espaço é dotado de n eixos de coordenadas mutuamente perpendiculares, denominados x_1, x_2, \dots, x_n . Cada eixo é associado a uma dimensão específica.

(3) Origem

A origem do sistema de coordenadas é o ponto $O = (0, 0, \dots, 0)$, onde todos os valores das n coordenadas são iguais a zero.

(4) Coordenadas de um ponto

Cada ponto $P \in R^n$ é identificado por n números reais (x_1, x_2, \dots, x_n) , chamados de coordenadas de P. Cada x_i representa a projeção do ponto no eixo x_i .

(5) Plano coordenado

Um plano coordenado em R^n é determinado por dois eixos, como o plano $x_i x_j$, formado pela combinação de dois eixos x_i e x_j , mantendo todas as outras coordenadas constantes.

(6) Sistema ortogonal

Em R^n , o sistema de coordenadas é considerado ortogonal se os vetores que definem os eixos são mutuamente perpendiculares, com norma unitária. Assim, os vetores base do sistema cartesiano padrão são:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

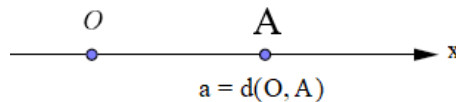
2.1.2 Distância entre pontos

2.1.2.1 Na reta - R

Conforme (Barbosa, 2012), antes de determinarmos essa distância, é necessário apresentar a seguinte definição e proposição:

Definição 2.1 Na reta ilustrada na Figura 6, associamos o número real 0 (zero) à origem O . Para cada ponto $A \neq O$, sobre o eixo x , corresponde um número real positivo $a = d(O, A)$, onde $d(O, A)$ representa a distância entre O e A . O número real a associado ao ponto A é denominado a coordenada do ponto A .

Figura 6 – Coordenada do ponto A



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Proposição 2.2 Sejam a e b as coordenadas dos pontos A e B no eixo x , respectivamente.

$$d(A, B) = |b - a|$$

Demonstração: Podemos verificar de forma simples os casos em que $A = B$, $A = O$ ou $B = O$.

Agora, suponha que A , B e O sejam três pontos distintos e que $a < b$. Dessa forma, devemos considerar três casos:

- Caso 1: $0 < a < b$
- Caso 2: $a < b < 0$
- Caso 3: $b < 0 < a$

Demonstração: Vamos considerar apenas o primeiro caso, uma vez que os demais seguem de maneira análoga.

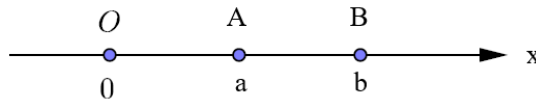
Neste caso, temos que o ponto A está situado entre O e B , conforme ilustrado na Figura 7. Assim, temos:

$$d(O, B) = d(O, A) + d(A, B) \Leftrightarrow$$

$$b = a + d(A, B) \Leftrightarrow$$

$$d(A, B) = b - a = |b - a|$$

Figura 7 – Caso 1: $0 < a < b$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

2.1.2.2 No plano - \mathbb{R}^2

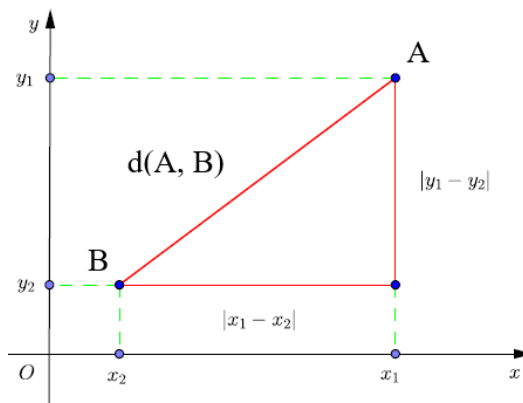
Agora, estamos em condições de determinar a distância entre dois pontos arbitrários no plano. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos no plano. Como ilustrado na Figura 8, a partir de A e B, podemos construir um triângulo retângulo ABC. Em termos das coordenadas de A e B, as medidas dos catetos desse triângulo são $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Assim, a medida de sua hipotenusa é:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Esse valor é denominado a distância entre A e B, e é denotado por $d(A, B)$, ou seja:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Figura 8 – Distância entre A e B.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Exemplo 2.3 Calcule a distância do ponto $A = (1, -2)$ ao ponto $B = (-2, 3)$.

Solução: Temos,

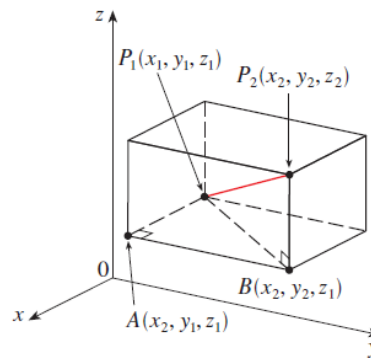
$$d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

2.1.2.3 No espaço - R^3

A fórmula bem conhecida para calcular a distância entre dois pontos em um plano pode ser naturalmente expandida para a seguinte fórmula no espaço tridimensional. Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_1)$ dois pontos no espaço e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ formando uma caixa, como vemos na Figura 9.

Figura 9 – Distância entre P_1 e P_2 .



Fonte: Stewart (2016)

Em termos das coordenadas temos que:

$$d(P_1, A) = |x_2 - x_1|, d(A, B) = |y_2 - y_1| \text{ e } d(P_2, B) = |z_2 - z_1|.$$

Como os triângulos P_1BP_2 e P_1AB são retângulos, temos que aplicando o teorema de Pitágoras duas vezes chegamos a.

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, B)^2 + d(B, P_2)^2$$

e

$$d(P_1, B)^2 = d(P_1, A)^2 + d(A, B)^2$$

Combinando as duas temos que

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, A)^2 + d(A, B)^2 + d(B, P_2)^2$$

$$d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

Portanto

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2.1.2.4 No espaço n -dimensional - R^n

Assim como ampliamos o espaço bidimensional para o tridimensional, também é possível generalizar para espaços n -dimensionais. Embora esses espaços não possam ser visualizados, podemos tratá-los matematicamente. Essa generalização é de grande relevância nas ciências da vida, pois os sistemas e objetos que buscamos descrever matematicamente

frequentemente envolvem múltiplas variáveis. O conceito de produto cartesiano $R \times R \times R \dots R$, onde o produto envolve n cópias de R , é denotado R^n e é definido como $R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$. Este é o conjunto de todas as n -uplas ordenadas de números reais.

A fórmula da distância $d(P, Q)$ entre os pontos $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

2.1.3 Conceito de vetor

Um vetor é formalmente definido como um elemento pertencente a um espaço vetorial, que possui comprimento e direção. Neste estudo, o enfoque será dado tanto aos vetores algébricos como geométricos, pois eles desempenham um papel essencial na ciência como um todo, em especial na física. A interpretação geométrica dos vetores corresponde a segmentos de reta orientados, caracterizados por módulo, direção e sentido. Quando se trata de vetores, eles apresentam as operações de adição, subtração, multiplicação por um escalar real. Outras operações e conceitos importantíssimos relacionados incluem:

- **Norma:** Representa o comprimento ou a magnitude de um vetor.
- **Ângulo:** é uma medida que descreve a relação de orientação entre dois vetores em um espaço vetorial.
- **Produto escalar:** Mede a projeção de um vetor em outro, resultando em um escalar.
- **Produto vetorial:** Gera um novo vetor perpendicular aos dois vetores iniciais, usado para calcular áreas e momentos.

Em um sistema de coordenadas, como o plano cartesiano (R^2) ou o espaço tridimensional (R^3), um vetor possui comprimento e direção e pode ser representado por um conjunto ordenado de números que indicam sua posição.

2.1.3.1 No plano - R^2

Um vetor é representado por $\vec{u} = (u_1, u_2)$, onde:

- u_1 : componente do vetor ao longo do eixo X,
- u_2 : componente do vetor ao longo do eixo Y.

Geometricamente, ele é visualizado como uma seta que parte da origem $O = (0, 0)$ até o ponto $u = (u_1, u_2)$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

Ou entre dois pontos qualquer, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

2.1.3.2 No espaço - R^3

Um vetor é representado por $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, onde:

- u_1 : componente do vetor ao longo do eixo x,
- u_2 : componente do vetor ao longo do eixo y,
- u_3 : componente do vetor ao longo do eixo z.

Ele é visualizado como uma seta no espaço que parte da origem $O = (0,0,0)$ até o ponto $u = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

Ou entre dois pontos qualquer, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

E de maneira geral podemos estender a ideia de vetores para o espaço n-dimensional.

2.1.3.3 No Espaço n-dimensional - R^n

Um vetor é representado por $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

2.2 Operações com vetores

2.2.1 Adição de vetores

2.2.1.1 No plano - R^2

Definição 2.4 Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, definimos a adição desses vetores dada por

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Essa operação satisfaz as seguintes propriedades onde, sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores

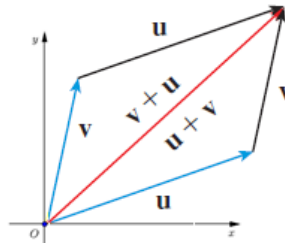
quaisquer, então:

- (1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, chamada de comutatividade;
- (2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, chamada de associatividade;
- (3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$, onde $\vec{0} = (0, 0)$, existência do elemento neutro da adição.
- (4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, existência do elemento simétrico da adição.

Aplicando as definições dadas, as demonstrações tornam-se triviais.

Geometricamente, podemos também definir a adição entre vetores, que nesse caso $\vec{u} + \vec{v}$ é a diagonal do paralelogramo demonstrado na Figura 10 onde \vec{u} e \vec{v} estão na origem do plano cartesiano:

Figura 10 – Vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

As ideias desenvolvidas no plano também são válidas para o espaço.

2.2.1.2 No espaço - R^3

Definição 2.5 Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, definimos a adição desses vetores dada por

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Nesse contexto a operação satisfaz as propriedades descritas acima também (comutatividade associatividade e possui o elemento neutro). De maneira geral podemos estender a ideia de adição entre vetores para o espaço n-dimensional

2.2.1.3 No espaço n-dimensional - R^n

Definição 2.6 Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, definimos a adição desses vetores dada por

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Aqui mais uma vez ressaltamos que as propriedades são satisfeitas pela operação

supracitada.

2.2.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Definição 2.7 Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$, em R^2 , e α em R . Definimos o produto por um escalar dado por

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

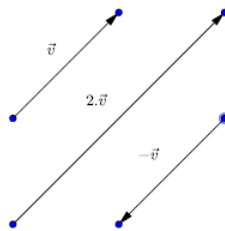
Essa operação satisfaz as seguintes propriedades onde, sejam \vec{u} e \vec{v} vetores quaisquer e α_1, α_2 em R , então:

- (1) $\alpha_1 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_1 \cdot \vec{v}$, chamada de distributividade;
- (2) $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{u}$, chamada de distributividade;
- (3) $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \vec{u}) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot \vec{u}$, chamada de associatividade
- (4) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ e $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$, multiplicação por 1 e 0.

Aplicando as definições dadas, as demonstrações tornam-se triviais.

Geometricamente, tomando \vec{u} não nulo, podemos também definir o produto de um vetor por um escalar, que nesse caso $\alpha \cdot \vec{u}$ é um vetor com mesma direção e sentido de \vec{u} se $\alpha > 0$ e com mesma direção e sentido contrário de \vec{u} se $\alpha < 0$, como ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Multiplicação do vetor \vec{v} por um escalar



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Exemplo 2.8 Sejam os vetores $\vec{u} = (9, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 3)$, determine:

$$\vec{w} = \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v}$$

Solução: Temos

$$\vec{w} = \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} = (9, -1) + (-1, 1) = (8, 0)$$

As ideias desenvolvidas no plano também valem para as demais dimensões. A saber, em R^3 – **Espaço** teríamos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e α em \mathbb{R} , onde o produto por um escalar é dado por

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$$

E de maneira geral em R^n – **Espaço n-dimensional** teríamos $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e α em R , onde o produto por um escalar é dado por

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$$

Aqui mais uma vez ressaltamos que as propriedades são satisfeitas para esses casos também.

2.3 Produto interno

2.3.1 Norma de um vetor

Começaremos apresentando uma definição geométrica para o produto interno entre dois vetores. Em seguida, deduziremos sua expressão em termos das coordenadas dos vetores em um sistema de eixos ortogonais.

Para a abordagem geométrica, é necessário introduzir dois conceitos preliminares: a norma de um vetor e o ângulo formado entre dois vetores.

A norma ou comprimento do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ é o número $\|\vec{u}\|$ dado pela distância $d(A, B)$. A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante. Com efeito, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $AB \equiv CD$ e, portanto, $d(A, B) = d(C, D) = \|\vec{u}\|$.

Segundo Delgado (2013), dois segmentos orientados, a saber AB e CD , no mesmo plano se dizem equipolentes e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as seguintes propriedades:

- (1) Têm o mesmo comprimento;
- (2) São paralelos ou colineares;
- (3) Têm o mesmo sentido.

Segundo Elon (2014), quando os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} no espaço E são equipolentes, escrevemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e dizemos que eles representam o mesmo vetor.

2.3.1.1 No plano - R^2

Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.3.1.2 No espaço - R^3

Se $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Se $P = (x, y, z)$ é o ponto tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.3.1.3 No espaço n -dimensional - R^n

Se $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

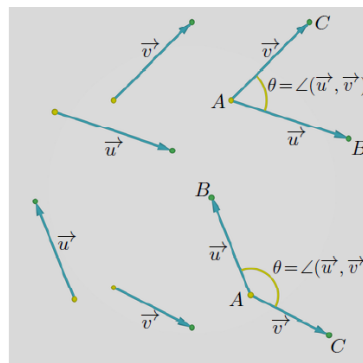
Se $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o ponto tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

2.3.2 Ângulos entre vetores

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos no plano. Definimos o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} como sendo o menor ângulo entre os segmentos AB e AC representantes de \vec{u} e \vec{v} , respectivamente. Denotamos $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ a medida do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , como ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Ângulo entre vetores



Fonte: Delgado (2013)

Vale destacar o seguinte fato relacionado à ângulo entre vetores: medimos os ângulos em radianos ou em graus. Posteriormente voltaremos a falar sobre ângulo quando estivermos de posse da ideia de produto escalar.

2.3.3 Produto interno ou escalar

Segundo Delgado (2013, p. 36), “o produto interno é uma operação que associa a cada par de vetores um escalar. Outro nome também utilizado para esta operação é produto escalar, dando ênfase à natureza escalar do resultado da operação”.

Definição 2.9 O produto escalar de dois vetores \vec{u} e \vec{v} é definido por:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = (0,0) \text{ ou } \vec{v} = (0,0) \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta & \text{se } \vec{u} \neq (0,0) \text{ e } \vec{v} \neq (0,0) \end{cases}$, onde θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Observação 2.10 Podemos também expressar o produto interno por meio de suas coordenadas, onde neste caso temos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$, onde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Exemplo 2.11. Determine o valor de a para que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -11$, sabendo que $\vec{u} = (-1, 4)$ e $\vec{v} = (3, a)$.

Solução: Temos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -1.3 + 4.a = -3 + 4a$$

Mas pelo enunciado $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -11$, daí

$$-3 + 4a = -11, \text{ ou seja, } a = -2$$

A saber, em R^3 teríamos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ e em R^n $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Proposição 2.12 Dois vetores são perpendiculares se, e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Demonstração:

Se $\vec{u} = (0, 0)$ ou $\vec{v} = (0, 0)$, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e temos que \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares.

Se $\vec{u} \neq (0, 0)$ e $\vec{v} \neq (0, 0)$ e θ o ângulo entre eles, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$.

(\Rightarrow) Suponha que \vec{u} e \vec{v} sejam perpendiculares, ou seja, $\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta = 0$.

Logo, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

(\Leftarrow) Suponha que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$. Logo, \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares.

Exemplo 2.13 Determine o valor de b para que \vec{u} e \vec{v} sejam perpendiculares, sabendo que $\vec{u} = (2, b)$ e $\vec{v} = (3, 6)$.

Solução: Temos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2.3 + b.6 = 6(1 + b)$$

Mas pelo enunciado $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, daí

$$6(1 + b) = 0, \text{ ou seja, } b = -1$$

2.3.4 Retomando a ideia de ângulo entre vetores

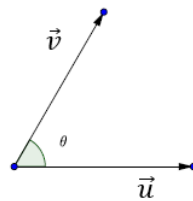
Definição 2.14 Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos no plano e θ o ângulo entre eles, então

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Onde há três possibilidades:

- (1) θ é agudo se, e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$, como ilustrado na Figura 13.

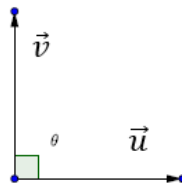
Figura 13 – Ângulo agudo entre vetores



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

- (2) θ é reto se, e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, como ilustrado na Figura 14.

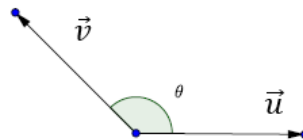
Figura 14 – Ângulo reto entre vetores



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

- (3) θ é obtuso se, e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0$, como ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Ângulo obtuso entre vetores



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Exemplo 2.15 Encontre o ângulo entre $\vec{u} = (2, 2, -1)$ e $\vec{v} = (5, -3, 2)$.

Solução:

O $\cos \theta$ é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Como $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$, então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2.5 + 2.(-3) + -1.2 = 2.$$

$$\text{Assim, } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$2 = 3.\sqrt{38}.\cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3.\sqrt{38}}$$

$$\theta = 1,46 \text{ ou } 84^\circ$$

Além de ser usado para medir ângulos o produto escalar está relacionado também com projeção.

2.4 Produto vetorial

O produto interno entre dois vetores, conforme estudado, é um número real que faz sentido tanto no plano quanto no espaço. Por outro lado, o produto vetorial entre dois vetores, cuja definição será apresentada a seguir, é significativo apenas no espaço e resulta em um novo vetor.

Assim como o produto interno, o produto vetorial também pode ser descrito de forma geométrica, especificando sua norma, direção e sentido. No entanto, para simplificar a dedução de suas propriedades principais, adotaremos uma definição algébrica. Posteriormente, exploraremos seu significado geométrico.

Definição 2.16 Sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} em R^3 , dados por $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, o produto vetorial, $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por: $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Um dispositivo prático para determinar o produto vetorial consiste em calcular o determinante simbólico da matriz 3x3 cujos elementos da primeira linha são os vetores $e_1 = (1; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0)$ e $e_3 = (0; 0; 1)$, os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor \vec{u} e os da terceira são as coordenadas do vetor \vec{v} :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 2.17 Determine o produto vetorial de $\vec{u} \times \vec{v}$, onde $\vec{u} = (1; 2; 3)$ e $\vec{v} = (2; -1; 1)$.

Solução: Por meio do dispositivo prático temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5, 5, -5).$$

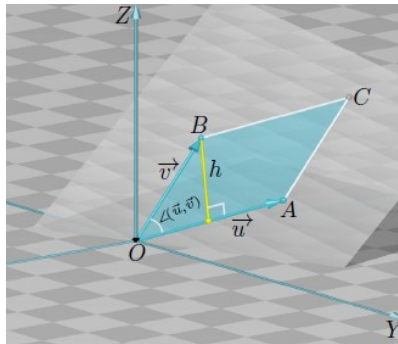
2.4.1 Algumas propriedades do produto vetorial

Para quaisquer vetores no espaço $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, e α em R , valem as seguintes propriedades:

- (1) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, isto é, $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a \vec{u} e a \vec{v} .
- (2) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

- (3) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \theta$, onde θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , ou seja, a norma do produto vetorial de $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ por $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ é a área do paralelogramo que tem os segmentos OA e OB como lados adjacentes, como ilustrado na Figura 16;
- (4) Se $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$, então \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} \times \vec{v}$ são Linearmente Independente;
- (5) $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$

Figura 16 – Paralelogramo OABC de altura h



Fonte: Delgado (2013)

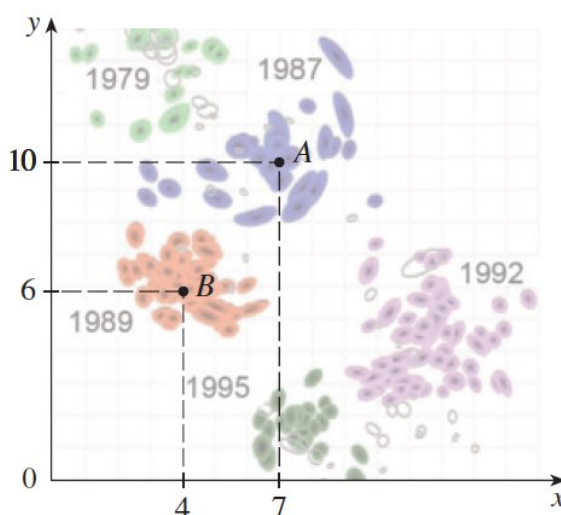
3 ALGUMAS APLICAÇÕES SOBRE VETOR À BIOLOGIA

3.1 Conceito de vetor e cálculo de distâncias

3.1.1 Cartografia antigênica 1 – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

Dado o sistema de coordenadas sobreposto ao espaço antigênico bidimensional na Figura 17, encontre os componentes do vetor representado pelo segmento de linha direcionado do cluster A em 1987 para o cluster B em 1989.

Figura 17 – Antigênico bidimensional



Fonte: Stewart (2016)

Solução:

Lembrando que dado os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, o vetor \vec{u} com representação \overrightarrow{AB} é

$$\vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Daí, o vetor correspondente a $\overrightarrow{AB} = (4 - 7, 6 - 10) = (-3, -4)$.

3.1.2 Cartografia antigênica 2 – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

A medida de como os vírus reagem com o sistema imunológico é, às vezes, avaliada testando sua capacidade de se ligar a um grande painel de diferentes moléculas imunológicas chamadas antissoras. Suponha que a capacidade de ligação de quatro cepas de influenza com três tipos diferentes de moléculas de antissoro seja dada pelos números adimensionais demonstrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Capacidade de ligação

Antissoro 1	Antissoro 2	Antissoro 3
Cepa 1: 2,06	Cepa 1: 1,92	Cepa 1: 2,96
Cepa 2: 1,79	Cepa 2: 1,91	Cepa 2: 2,44
Cepa 3: 2,68	Cepa 3: 3,53	Cepa 3: 3,31
Cepa 4: 2,39	Cepa 4: 4,05	Cepa 4: 4,46

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Podemos representar os dados das quatro cepas no espaço tridimensional, que é o espaço chamado de **espaço antigênico**, e a construção de tal gráfico de antigenicidade é denominada **cartografia antigênica**, onde serão utilizando as coordenadas x, y e z para as capacidades de ligação aos antissoros 1, 2 e 3. A capacidade de ligação para qualquer par de antissoros é dada pela projeção desses quatro pontos vermelhos nos vários planos coordenados.

Qual é a distância antigênica entre a cepa 2 e a cepa 4 da influenza?

Solução:

Lembrando que a distância entre pontos no R^3 é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

A distância entre a cepa 2 e a cepa 4 é a distância entre o ponto P(1,79, 1,91, 2,44) e o ponto Q(2,39; 4,05; 4,46). Isso é:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ d(P, Q) &= \sqrt{(2,39 - 1,79)^2 + (4,05 - 1,91)^2 + (4,46 - 2,44)^2} \\ d(P, Q) &= \sqrt{(1,6)^2 + (2,14)^2 + (2,02)^2} \approx 3 \end{aligned}$$

3.1.3 Os tentilhões de Darwin – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Os tentilhões de Darwin têm sido estudados para investigar como as diferenças na morfologia das aves estão relacionadas às diferenças na dieta. Medidas morfológicas (em mm) de três espécies são fornecidas na Tabela 2 para três características.

Tabela 2 – Medidas Morfológicas

Espécie	Comprimento da asa	Comprimento do tarso	Comprimento do bico
<i>G. difficilis</i>	64	18.1	9.6
<i>G. fuliginosa</i>	62.1	17.9	8.6
<i>G. scandens</i>	73.1	21.1	14.5

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A proporção de tempo gasto alimentando-se de diferentes tipos de alimentos para essas três espécies é apresentada na Tabela 3.

Tabela 3 – Dieta

Espécie	Sementes	Pólen	Outros
<i>G. difficilis</i>	0.67	0.23	0.1
<i>G. fuliginosa</i>	0.7	0.28	0.02
<i>G. scandens</i>	0.14	0.0	0.86

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

(a) Considerando a morfologia de cada espécie como um ponto em R^3 , calcule a distância morfológica entre cada par de espécies.

(b) Considerando a dieta de cada espécie como um ponto em R^3 , calcule a distância de dieta entre cada par de espécies.

Solução:

Para resolver o problema, utilizamos a fórmula da distância euclidiana para calcular as distâncias entre dois pontos em um espaço tridimensional (R^3). A fórmula é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Aqui, (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) representam os pontos no espaço tridimensional.

a) Os pontos em R^3 abaixo representam as características morfológicas e as denotaremos respectivamente de A, B e C:

G.difficilis: A = (64; 18,1; 9,6)

G.fuliginosa: B = (62,1; 17,9; 8,6)

G.scandens: C = (73,1; 21,1; 14,5)

1) Entre **G.difficilis** e **G.fuliginosa**.

$$d(A, B) = \sqrt{(62,1 - 64)^2 + (17,9 - 18,1)^2 + (8,6 - 9,6)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-1,9)^2 + (-0,2)^2 + (-1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{3,61 + 0,04 + 1}$$

$$d(A, B) = \sqrt{4,65} \approx 2,16$$

2) Entre **G.difficilis** e **scandens**.

$$d(A, C) = \sqrt{(73,1 - 64)^2 + (21,1 - 18,1)^2 + (14,5 - 9,6)^2}.$$

$$d(A, B) = \sqrt{(9,1)^2 + (3)^2 + (4,9)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{82,81 + 9 + 24,01}$$

$$d(A, B) = \sqrt{115,82} \approx 10,76$$

3) Entre **G.difficilis** e **G.fuliginosa**.

$$d(B, C) = \sqrt{(73,1 - 62,1)^2 + (21,1 - 17,9)^2 + (14,5 - 8,6)^2}.$$

$$d(A, B) = \sqrt{(11)^2 + (3,2)^2 + (5,9)^2}.$$

$$d(A, B) = \sqrt{121 + 10,24 + 34,81}$$

$$d(A, B) = \sqrt{166,05} \approx 12,89$$

b) Os pontos em R^3 abaixo representam as proporções da dieta e as denotaremos respectivamente de A, B e C:

$$\textbf{G.difficilis: } A = (0,67; 0,23; 0,1)$$

$$\textbf{G.fuliginosa: } B = (0,7; 0,28; 0,02)$$

$$\textbf{G.scandens: } C = (0,14; 0,0; 0,86)$$

1) Entre **G.difficilis** e **G.fuliginosa**.

$$d(A, B) = \sqrt{(0,7 - 0,67)^2 + (0,28 - 0,23)^2 + (0,02 - 0,1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-0,03)^2 + (0,05)^2 + (-0,08)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{0,0009 + 0,0025 + 0,0064}$$

$$d(A, B) = \sqrt{0,0098} \approx 0,099$$

2) Entre **G.difficilis** e **G.scandens**.

$$d(A, C) = \sqrt{(0,14 - 0,67)^2 + (0 - 0,23)^2 + (0,86 - 0,1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-0,53)^2 + (-0,23)^2 + (0,76)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{0,2809 + 0,0529 + 0,5776}$$

$$d(A, B) = \sqrt{0,9114} \approx 0,95$$

3) Entre **G.difficilis** e **G.fuliginosa**.

$$d(B, C) = \sqrt{(0,14 - 0,7)^2 + (0 - 0,28)^2 + (0,86 - 0,02)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-0,56)^2 + (-0,28)^2 + (0,84)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{0,3136 + 0,0784 + 0,7056}$$

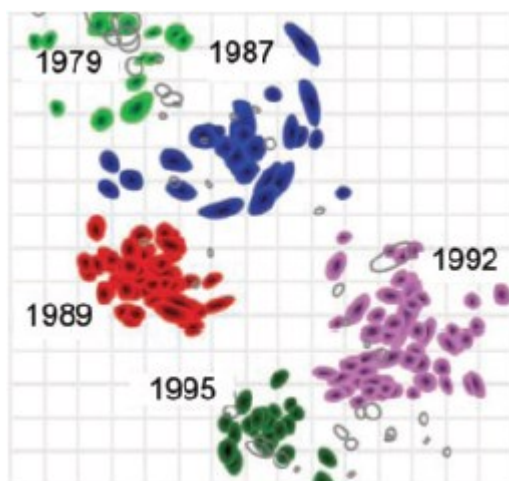
$$d(A, B) = \sqrt{1,0976} \approx 1,05$$

3.2 Adição de vetores

3.2.1 Cartografia antigênica 3 – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

A evolução da gripe no espaço antigênico ao longo dos anos pode ser vista como um vetor, uma vez que é caracterizada tanto pela sua magnitude quanto pela direção da mudança. A Figura 18 mostra agrupamentos do vírus da gripe no espaço antigênico bidimensional em vários anos. Ilustre como o vetor de mudança antigênica entre os centros dos agrupamentos virais em 1989 e 1995 é a soma dos vetores correspondentes de 1989–1992 e 1992–1995. Use tanto a Lei do Triângulo quanto a Lei do Paralelogramo.

Figura 18 – Agrupamentos do vírus da gripe

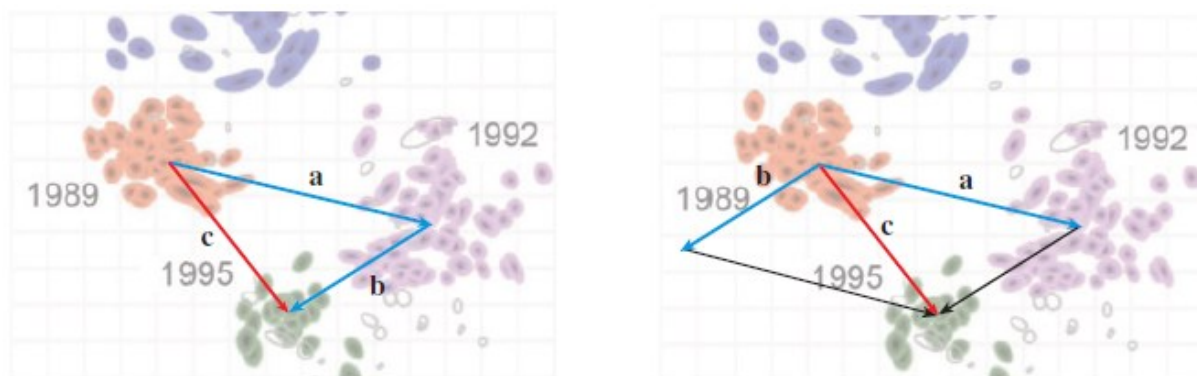


Fonte: Stewart (2016)

Solução:

O vetor correspondente à mudança antigênica de 1989 a 1995 é rotulado como **c** na Figura 19. Para a Lei do Triângulo, primeiro desenhamos um vetor do agrupamento de 1989 para o agrupamento de 1992 (rotulado como **a**). Em seguida, desenhamos um vetor do agrupamento de 1992 para o agrupamento de 1995 (rotulado como **b**). Vemos que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. A primeira parte da Figura 19 ilustra a Lei do Triângulo.

Figura 19 – Lei do paralelogramo



Fonte: Stewart (2016)

Para a Lei do Paralelogramo, novamente desenhemos um vetor do agrupamento de 1989 para o agrupamento de 1992. Depois, desenhemos um vetor do agrupamento de 1992 para o agrupamento de 1995 e o traduzimos para que ele comece onde **a** começa. O vetor **c**, então, fica localizado na diagonal do paralelogramo correspondente, como mostrado na segunda parte da Figura 19.

3.2.2 Biomecânica 1 – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

Uma força é representada por um vetor porque possui uma magnitude (em newtons) e uma direção. Se mais de uma força atua sobre um objeto, a força resultante é a soma vetorial dessas forças. Considere as forças horizontais e verticais exercidas por um atleta no início de uma corrida de 100 metros, conforme mostrado na Figura 20.

- (a) Qual é o vetor força resultante exercido pelo atleta?
- (b) Qual é a magnitude total da força exercida pelo atleta?

Figura 20 – Forças horizontais e verticais exercidas por um atleta no início de uma corrida



Fonte: Stewart (2016)

Solução:

(a) O vetor força na direção horizontal é $(180, 0)$ e na direção vertical é $(0, 490)$. Assim, o vetor força resultante é $(180, 0) + (0, 490) = (180, 490)$.

(b) A magnitude total da força é o comprimento do vetor força resultante. Isso é: $\sqrt{180^2 + 490^2} = \sqrt{32400 + 240100} = \sqrt{272500} \approx 522$ newtons.

3.2.3 Biomecânica 2 – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

Dois velocistas de massa igual saem dos blocos de partida com os seguintes vetores de força horizontal e vertical cujos valores são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Componentes da Força

Velocista	Horizontal	Vertical
Velocista 1	150 N	300 N
Velocista 2	200 N	250 N

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A Segunda Lei de Newton afirma que a força é igual à massa vezes a aceleração ($F = m \cdot a$). Qual velocista tem maior aceleração ao sair dos blocos?

Solução:

Para determinar a aceleração, precisamos calcular a força resultante ($F_{\text{resultante}}$) para cada velocista e usar a fórmula da Segunda Lei de Newton:

$$F_{\text{resultante}} = \sqrt{F_{\text{horizontal}}^2 + F_{\text{vertical}}^2}$$

Como os dois velocistas têm massas iguais, o velocista com maior força resultante terá maior aceleração.

- Velocista 1:

$$F_{\text{resultante}} = \sqrt{(150)^2 + (300)^2} = \sqrt{112500} = 335,41\text{N}$$

- Velocista 2:

$$F_{\text{resultante}} = \sqrt{(200)^2 + (250)^2} = \sqrt{102500} = 320,16$$

O velocista 1 tem maior força resultante e, portanto, maior aceleração ao sair dos blocos.

3.3 Produto escalar

3.3.1 Usando o produto escalar para descoberta biológica – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

O perfil de expressão de um genoma fornece o nível de expressão de cada conjunto de genes. Assim, pode ser representado como um vetor de dimensão n , onde n é o número de genes analisados. Para algumas células, um grande número de tais perfis de expressão foi caracterizado em resposta a diferentes compostos bioquímicos conhecidos. Esses dados podem ser usados para descobrir o modo de ação de novos compostos químicos, quantificando o perfil de expressão gênica induzido pelo novo composto e determinando qual perfil conhecido mais

se assemelha a ele. Presume-se que o novo composto provavelmente afete a função celular através de um mecanismo semelhante ao do composto bioquímico mais semelhante.

Considere os perfis de expressão a e b, que são induzidos por dois compostos bioquímicos conhecidos. Suponha que quatro genes foram analisados e os perfis de expressão são dados pelos vetores $a = (2, 5, 0, 1)$ e $b = (1, 2, 4, 3)$, onde os níveis de expressão são números sem dimensão. Suponha ainda que um novo composto bioquímico induza um perfil de expressão dado pelo vetor $n = (1, 0, 5, 2)$.

(a) Qual vetor de perfil de expressão aponta em uma direção mais semelhante a n: o perfil a ou o perfil b?

(b) Qual é o ângulo entre o perfil n e o perfil identificado na parte (a)?

Solução:

(a) As magnitudes dos perfis são dadas por:

$$|a| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 25 + 0 + 1} = \sqrt{30}$$

$$|b| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 16 + 9} = \sqrt{30}$$

$$|n| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 0 + 25 + 4} = \sqrt{30}$$

Como todos os vetores têm o mesmo comprimento, $\sqrt{30}$, o produto escalar de n com a ou b terá um valor máximo de 30 se apontarem na mesma direção e um valor mínimo de -30 se apontarem em direções opostas.

$$\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 1.2 + 0.5 + 5.0 + 2.1 = 4$$

$$\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = 1.1 + 0.2 + 5.4 + 2.3 = 27$$

Portanto, n aponta em uma direção mais semelhante a b. Concluimos que o novo composto provavelmente afeta a célula por meio de um mecanismo semelhante ao do composto bioquímico conhecido cujo perfil é b.

(b) O ângulo entre n e b é dado por:

$$\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta$$

$$27 = \sqrt{30} \cdot \sqrt{30} \cdot \cos \theta$$

$$27 = 30 \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = 9/10$$

$$\theta = 0,45\text{rad ou } 25,8^\circ$$

3.3.2 Dinâmica populacional – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Suponha que uma população de peixes contém **a** fêmeas com 1 ano de idade, **b** fêmeas entre 2 e 4 anos de idade, e **c** fêmeas com mais de 4 anos de idade. Durante o período de verão cada fêmea de um ano produz 15 filhotes, cada fêmea entre 2 e 4 anos produz 35 filhotes, e cada fêmea com mais de 4 anos produz 20 filhotes. Se $A = (a, b, c)$ e $p = (15, 35, 20)$, qual é o significado do produto escalar $A \cdot p$?

Solução:

O produto escalar de dois vetores, $A \cdot p$, é calculado como a soma do produto dos elementos correspondentes dos dois vetores. Neste caso, o vetor $A = (a, b, c)$ representa o número de fêmeas em três faixas etárias:

- a: fêmeas com 1 ano de idade,
- b: fêmeas entre 2 e 4 anos,
- c: fêmeas com mais de 4 anos.

O vetor $p = (15, 35, 20)$ representa a prole média produzida por cada fêmea nas respectivas faixas etárias.

O produto escalar $A \cdot p$ é dado por:

$$A \cdot p = a \cdot 15 + b \cdot 35 + c \cdot 20 = 15a + 35b + 20c$$

O produto $A \cdot p$ representa o número total de filhotes produzidos pela população durante o verão. É obtido ao somar o número de filhotes produzidos em cada faixa etária:

- $15a$: filhotes produzidos por fêmeas com 1 ano,
- $35b$: filhotes produzidos por fêmeas entre 2 e 4 anos,
- $20c$: filhotes produzidos por fêmeas com mais de 4 anos.

4 CÁLCULO VETORIAL

4.1 Funções vetoriais

As funções vetoriais desempenham um papel fundamental no cálculo vetorial e têm aplicações em diversas áreas, como física, engenharia e biologia.

De modo geral, uma função pode ser entendida como uma correspondência que associa a cada elemento de seu domínio um único elemento de seu contradomínio. Uma função vetorial, ou função com valores em um espaço vetorial, é uma função cujo domínio é um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio é um conjunto de vetores. Nosso interesse está voltado especialmente para funções vetoriais r , cujos valores pertencem ao espaço tridimensional. Isso significa que, para cada valor real t pertencente ao domínio de r , existe um único vetor $r(t) \in V^3$. Se as funções reais $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ representam as componentes do vetor $r(t)$, então essas funções são denominadas funções componentes de r , e podemos expressar:

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t) \cdot i + g(t) \cdot j + h(t) \cdot k$$

Utiliza-se com frequência a letra t para representar a variável independente, pois, na maioria das aplicações envolvendo funções vetoriais, essa variável está associada à noção de tempo.

Exemplo 4.1 Se

$$r(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

então, as funções componentes são $f(t) = t^3$, $g(t) = \ln(3 - t)$ e $h(t) = \sqrt{t}$.

De acordo com a convenção usual, o domínio da função r é o conjunto de todos os valores de t para os quais a expressão $r(t)$ está bem definida. Considere, por exemplo, as expressões t^3 , $\ln(3 - t)$ e \sqrt{t} . Para que essas expressões estejam definidas, é necessário que $3 - t > 0$ e $t \geq 0$ simultaneamente. Dessa forma, o domínio de r é o intervalo $[0, 3)$.

O limite de uma função vetorial r é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

Definição 4.2 Se $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então $\lim_{t \rightarrow a} r(t) = \langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \rangle$, desde que os limites das funções componentes existam.

Observações 4.3

- (1) Se $r(t) = L$, essa definição equivale a dizer que o comprimento, a direção e o sentido do vetor $r(t)$ se aproximam do comprimento, da direção e do sentido do vetor L .

- (2) Da mesma forma, poderíamos ter usado uma definição usando o ε - δ . Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções Reais.

Exemplo 4.4 Determine $r(t)$, onde $r(t) = (1+t^3) \cdot i + te^{-1} \cdot j + \frac{\sin t}{t} \cdot k$

Solução:

De acordo com a Definição 4.2, o limite de r é o vetor cujas componentes são os limites das funções componentes de r :

$$r(t) = [(1+t^3)] \cdot i + [te^{-1}] \cdot j + [\frac{\sin t}{t}] \cdot k$$

$$r(t) = i + k$$

Uma função vetorial r é contínua em a se

$$r(t) = r(a)$$

Em vista da definição 4.1, vemos que r é contínua em a se e somente se suas funções componentes f , g e h forem contínuas em a .

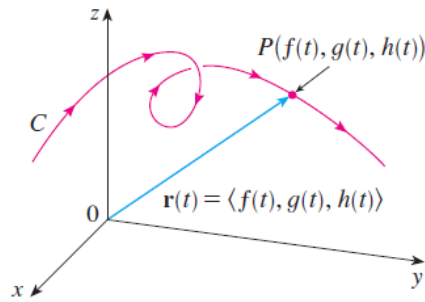
As funções vetoriais são ferramentas essenciais na matemática aplicada e têm uma ampla gama de aplicações. O estudo de suas propriedades, como derivadas e integrais, permite a modelagem e análise de fenômenos físicos e geométricos de forma precisa e eficaz.

As curvas espaciais possuem uma relação intrínseca com as funções vetoriais contínuas. Considere que f , g e h sejam funções reais contínuas definidas em um intervalo I . O conjunto C , composto por todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$ e t varia no intervalo I , é denominado curva espacial.

As equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$ são conhecidas como equações paramétricas de C , sendo t conhecido como parâmetro da curva. Podemos interpretar C como a trajetória descrita pelo movimento de uma partícula cuja posição, no instante t , é dada pelas coordenadas $(f(t), g(t), h(t))$.

Definindo a função vetorial $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, temos que $r(t)$ representa o vetor posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ sobre a curva C . Assim, qualquer função vetorial contínua $r(t)$ gera uma curva espacial C , que é traçada pela extremidade do vetor $r(t)$ em movimento, conforme ilustrado na Figura 21.

Figura 21 – C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\mathbf{r}(t)$.



Fonte: Stewart (2013)

4.2 Derivadas e integrais de funções vetoriais

Como visto uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é uma função que associa a cada valor de um parâmetro escalar t um vetor no espaço. Em geral, no espaço tridimensional, podemos expressá-la como:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

onde são funções escalares que representam as componentes da função vetorial nos eixos x , y e z , respectivamente.

4.2.1 Derivada de uma função vetorial

A derivada $\mathbf{r}'(t)$ de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é definida de forma análoga à derivada de uma função real:

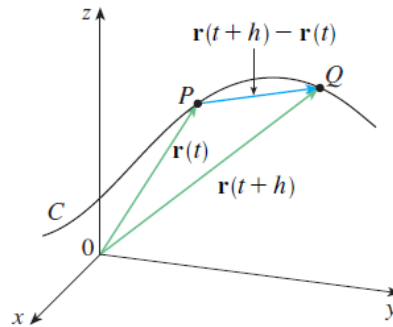
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

desde que exista e representa a taxa de variação da função vetorial em relação ao parâmetro t .

A interpretação geométrica dessa definição está ilustrada nas Figuras 22 e 23. Se os pontos P e Q possuem vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t+h)$, então o vetor \overrightarrow{PQ} é dado por $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$, o qual pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o vetor escalar $\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$. Quando $h \rightarrow 0$, esse vetor tende a se aproximar de um vetor que pertence à reta tangente. Por essa razão, o vetor $\mathbf{r}'(t)$ é denominado o vetor tangente à curva descrita por \mathbf{r} no ponto P , desde que a derivada, $\mathbf{r}'(t)$, exista e $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. A reta tangente à curva C no ponto P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\mathbf{r}'(t)$. Em algumas situações, é útil considerar o vetor tangente unitário, definido por

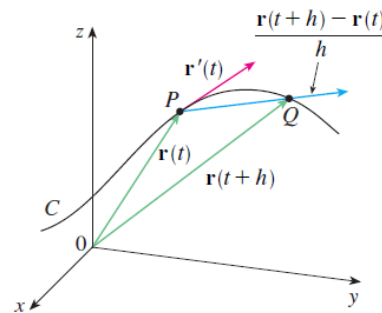
$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Figura 22 – Vetor Secante \overrightarrow{PQ}



Fonte: Stewart (2013)

Figura 23 – O vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$



Fonte: Stewart (2013)

Se a função vetorial $\mathbf{r}(t)$ for expressa em termos de suas componentes escalares, o teorema a seguir nos dá um método prático para determinar a sua derivada $\mathbf{r}'(t)$.

Teorema 4.5 Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\cdot\mathbf{i} + g(t)\cdot\mathbf{j} + h(t)\cdot\mathbf{k}$, onde f , g e h são funções deriváveis, então $\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\cdot\mathbf{i} + g'(t)\cdot\mathbf{j} + h'(t)\cdot\mathbf{k}$

Ou seja, a derivada de uma função vetorial é obtida derivando-se separadamente cada uma de suas componentes.

A derivada de uma função vetorial tem interpretações geométricas importantes. No caso de funções que descrevem curvas no espaço, a derivada representa o vetor tangente à curva no ponto correspondente a t .

Observação 4.6 Do mesmo modo que para as funções reais, a segunda derivada da função vetorial \mathbf{r} é a derivada de \mathbf{r}' , ou seja, $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$.

4.2.2 Regras de derivação

As regras usuais de derivação para funções escalares se aplicam às funções vetoriais, o próximo teorema as traz as principais.

Teorema 4.6 Suponha que r e s sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então:

(1) **Derivada da soma:**

$$\frac{d[r(t) + s(t)]}{dt} = r'(t) + s'(t)$$

(2) **Derivada do produto por escalar:**

$$\frac{d[cr(t)]}{dt} = cr'(t)$$

(3) **Derivada do produto escalar:**

$$\frac{d[r(t) \cdot s(t)]}{dt} = r'(t) \cdot s(t) + r(t) \cdot s'(t)$$

(4) **Derivada do produto vetorial:**

$$\frac{d[r(t) \times s(t)]}{dt} = r'(t) \times s(t) + r(t) \times s'(t)$$

(5) **Regra da Cadeia:**

$$\frac{d[r(f(t))]}{dt} = r'(f(t)) \cdot f'(t)$$

Exemplo 4.7 Mostre que, se $|r(t)| = c$ (uma constante), então $r'(t)$ é ortogonal a $r(t)$ para todo t .

Solução:

Uma vez que $r(t) \cdot r(t) = |r(t)|^2 = c^2$ e c^2 é uma constante. Daí,

$$0 = \frac{d[c^2]}{dt} = \frac{d[r(t) \cdot r(t)]}{dt} = r'(t) \cdot r(t) + r(t) \cdot r'(t) = 2r(t) \cdot r'(t)$$

Ou seja,

$$r(t) \cdot r'(t) = 0$$

Logo $r'(t)$ é ortogonal a $r(t)$.

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente é sempre perpendicular ao vetor posição $r(t)$.

4.2.3 Integral de uma função vetorial

A integral de uma função vetorial contínua $r(t)$ é definida de maneira semelhante à integral de uma função real, com a diferença de que o resultado é um vetor. Adotaremos a notação usual abaixo para representar integrais indefinidas (ou primitivas).

$$\int r(t)dt$$

Se r é uma função vetorial cujas componentes escalares são integráveis, sua integral indefinida é dada por:

$$\int r(t)dt = \left[\int r(t)dt \right] \cdot i + \left[\int r(t)dt \right] \cdot j + \left[\int r(t)dt \right] \cdot k + C,$$

onde C é um vetor constante de integração.

Exemplo 4.8 Se $r(t) = 2\cos t \cdot i + \sin t \cdot j + 2t \cdot k$, então

Solução:

$$\int r(t)dt = \left[\int 2\cos t dt \right] \cdot i + \left[\int \sin t dt \right] \cdot j + \left[\int 2t dt \right] \cdot k + C$$

$$\int r(t)dt = 2\sin t \cdot i - \cos t \cdot j + t^2 \cdot k + C$$

onde C é um vetor constante de integração.

A integral definida de $r(t)$ no intervalo $[a, b]$ é calculada como:

$$\int_a^b r(t)dt = \left[\int_a^b r(t)dt \right] \cdot i + \left[\int_a^b r(t)dt \right] \cdot j + \left[\int_a^b r(t)dt \right] \cdot k.$$

Esse resultado demonstra que a integral de uma função vetorial pode ser obtida pela integração separada de cada uma de suas componentes.

Além disso, o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser estendido ao caso de funções vetoriais contínuas da seguinte forma:

$$\int_a^b r(t)dt = R(t) \Big|_a^b = R(b) - R(a),$$

em que R é uma primitiva de r , ou seja, $R'(t) = r(t)$.

4.2.4 Aplicações das derivadas e integrais de funções vetoriais

Os conceitos de derivadas e integrais de funções vetoriais têm diversas aplicações práticas. Algumas das mais importantes incluem:

- (1) **Cálculo de Comprimento de Arco:** O comprimento de uma curva parametrizada por $r(t)$ no intervalo $[a, b]$ é dado por sua forma compacta:

$$L = \int_a^b |r'(t)|dt$$

Explorando de maneira mais específica o caso de curvas planas, o comprimento de uma curva pode ser definido a partir das equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $a \leq t \leq b$.

b. Esse comprimento é obtido considerando o limite dos comprimentos das poligonais inscritas na curva e assumindo que as funções $f'(t)$ e $g'(t)$ sejam contínuas. Sob essas condições, a fórmula que descreve o comprimento da curva é dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

pois se $r(t) = f(t)\cdot i + g(t)\cdot j$, então $|r'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$

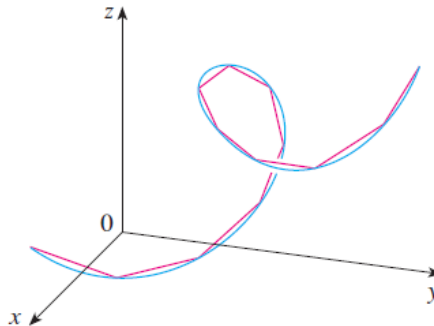
O comprimento de uma curva no espaço tridimensional é definido de forma análoga. Suponha que a curva seja representada pela equação vetorial $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, com $a \leq t \leq b$. Isso é equivalente às equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde $f'(t)$, $g'(t)$ e $h'(t)$ são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez no intervalo $[a, b]$, como ilustrado na Figura 24, é possível demonstrar que:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

de maneira análoga pois se $r(t) = f(t)\cdot i + g(t)\cdot j + h(t)\cdot k$, então

$$|r'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

Figura 24 – O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas.



Fonte: Stewart (2013)

Exemplo 4.9 Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $r(t) = \cos t \cdot i + \sin t \cdot j + t \cdot k$ do ponto $(1, 0, 0)$ até o ponto $(1, 0, 2\pi)$.

Solução:

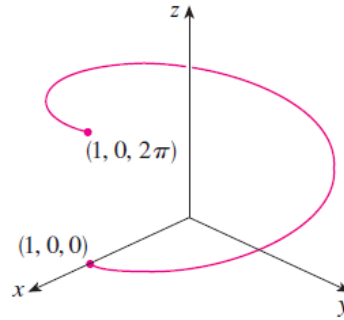
Uma vez que $r'(t) = -\sin t \cdot i + \cos t \cdot j + k$, temos

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

O arco de $(1, 0, 0)$ até $(1, 0, 2\pi)$, como ilustrado na Figura 25, é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ e, assim pela forma compacta, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2} \pi.$$

Figura 25 – O arco de hélice cujo comprimento que é calculado no Exemplo 4.9



Fonte: Stewart (2013)

(2) **Cinemática:** Em física, a posição de uma partícula em movimento pode ser descrita por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$. O vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t)$ são obtidas derivando a posição em relação ao tempo.

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ representa a taxa de variação da distância em relação ao tempo.

A velocidade escalar de uma partícula no instante t é definida como a magnitude do vetor velocidade, ou seja, $|\mathbf{v}(t)|$.

De forma análoga ao caso de movimento unidimensional, a aceleração da partícula é definida como a derivada do vetor velocidade, dada por:

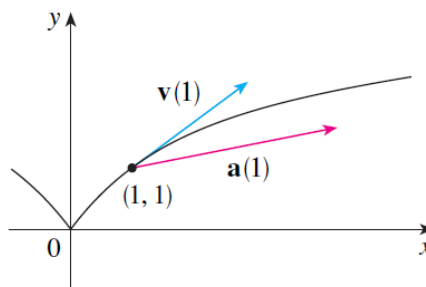
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t).$$

Exemplo 4.10 O vetor posição de um objeto em movimento em um plano é dado por $\mathbf{r}(t) = t^3 \cdot \mathbf{i} + t^2 \cdot \mathbf{j}$. Determine a sua velocidade, a velocidade escalar aceleração quando $t = 1$ e ilustre geometricamente.

Solução:

O vetor velocidade e a aceleração, como ilustrado na Figura 26, no instante t são $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2 \cdot \mathbf{i} + 2t \cdot \mathbf{j}$ e $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = 6t \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$. A velocidade escalar é $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{((3t)^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$. Quando $t = 1$, temos $\mathbf{v}(1) = 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{a}(1) = 6 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$ e $|\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$.

Figura 26 – velocidade e aceleração



Fonte: Stewart (2013)

- (3) **Trabalho de uma força:** Se uma força $F(t)$ age sobre uma partícula ao longo de uma trajetória $r(t)$, o trabalho realizado pela força ao longo do caminho pode ser calculado por:

$$W = \int_a^b F(t) \cdot r(t) dt$$

O estudo das derivadas e integrais de funções vetoriais é essencial para a compreensão de fenômenos físicos e matemáticos que envolvem movimento, forças e trajetórias no espaço. Através das ferramentas apresentadas, podemos modelar e analisar uma ampla gama de problemas em diversas disciplinas, tornando esse conhecimento indispensável para estudantes e profissionais das áreas de exatas.

4.3 Derivadas direcionais e vetor gradiente

A análise de funções de várias variáveis exige ferramentas que permitam entender como essas funções variam em diferentes direções. Dois conceitos fundamentais para essa análise são a derivada direcional e o vetor gradiente, que desempenham papéis centrais em áreas como otimização, física e engenharia.

4.3.1 Derivadas parciais

No estudo de funções de várias variáveis, o conceito de derivadas parciais é essencial para entender como uma função varia em relação a cada uma de suas variáveis independentes. Um dos resultados mais importantes nesse contexto é o Teorema de Clairaut, que estabelece condições sob as quais as derivadas parciais mistas de uma função são iguais.

Dada uma função de duas variáveis $f(x, y)$, a derivada parcial em relação a x é obtida mantendo y constante e diferenciando apenas em relação a x :

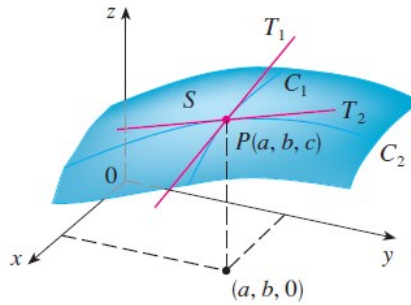
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Analogamente, a derivada parcial em relação a y é calculada mantendo constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Essas derivadas indicam as taxas de variação da função em cada uma das direções coordenadas, como ilustrado na Figura 27.

Figura 27 – As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_2 .



Fonte: Stewart (2013)

As derivadas parciais podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis x , y e z , a derivada parcial de f em relação a x é dada por:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

onde y e z são mantidos constantes enquanto derivamos $f(x, y, z)$ em relação a x .

4.3.2 Derivadas parciais de ordem superior

Assim como ocorre com funções de uma variável, podemos calcular derivadas parciais de ordem superior. A segunda derivada parcial de f em relação a x é:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Também podemos calcular derivadas mistas, como:

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

ou invertendo a ordem da diferenciação:

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Exemplo 4.11 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Solução:

Temos que $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$ e $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

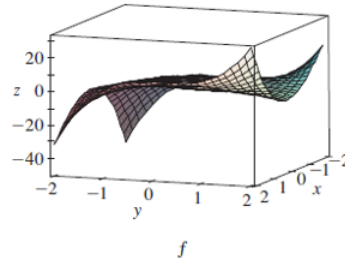
$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

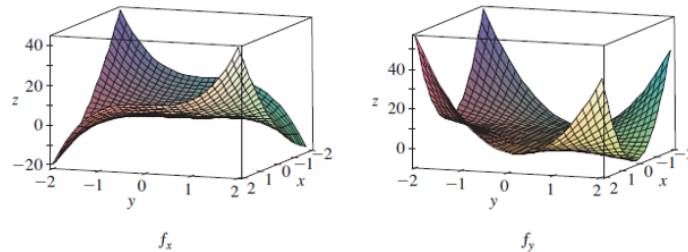
O gráfico de f encontra-se ilustrado na Figuras 28, das derivadas parciais na Figura 29 e das derivadas parciais de segunda ordem na Figura 30.

Figura 28 – Gráfico da função f



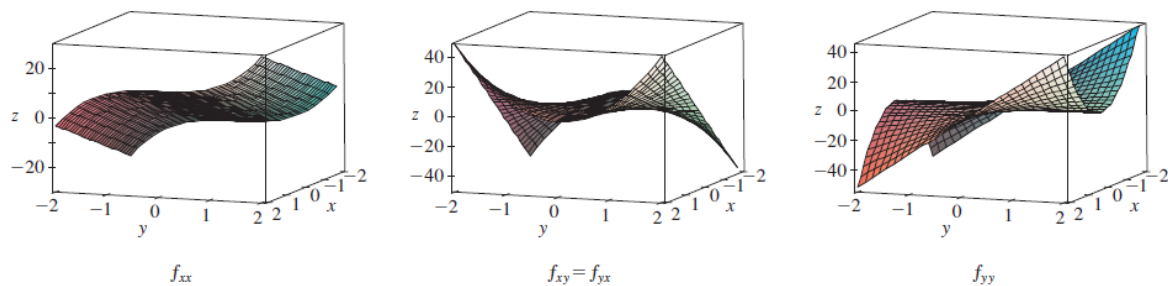
Fonte: Stewart (2013)

Figura 29 – Gráfico das derivadas parciais



Fonte: Stewart (2013)

Figura 30 – Gráfico das derivadas parciais de segunda ordem



Fonte: Stewart (2013)

Observe que, no Exemplo 4.11, as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais. Essa igualdade não é uma coincidência: para a maioria das funções encontradas na prática, essas derivadas são equivalentes.

O Teorema a seguir, atribuído ao matemático francês Clairaut, estabelece condições sob as quais podemos garantir que $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema 4.12 Seja f uma função definida em uma bola aberta D que contém o ponto (a, b) . O Teorema de Clairaut, também conhecido como teorema da igualdade das derivadas mistas, afirma que se as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em D , então a ordem de diferenciação não altera o resultado, ou seja,

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

$$\text{ou ainda, } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Além disso, derivadas parciais de terceira ordem ou superiores também podem ser definidas.

4.3.3. Derivadas direcionais

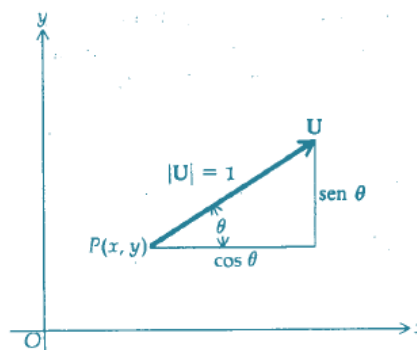
Segundo Leithold (1994), as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ indicam as taxas de variação dos valores funcionais $f(x, y)$ nas direções dos eixos x e y respectivamente. As derivadas direcionais, que serão introduzidas nesse tópico, representam as taxas de variação dessas funções em qualquer direção arbitrária.

Neste tópico, apresentamos a derivada direcional, uma extensão do conceito de derivada parcial, que permite determinar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção e sentido. Essa generalização busca ampliar a ideia de derivada parcial, possibilitando o cálculo da variação de uma função em relação a qualquer direção específica, atendendo à necessidade de compreender como uma função se comporta em diferentes orientações no espaço.

Considere f uma função de duas variáveis x e y , e seja $P(x, y)$ um ponto no plano xy . Suponha que \vec{U} seja um vetor unitário que forma, com a parte positiva do eixo x , um ângulo θ , medido em radianos, , como ilustrado na Figura 31. Nesse caso, temos:

$$\vec{U} = \cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}.$$

Figura 31 – Representação do vetor \vec{U} com ponto inicial em $P(x, y)$



Fonte: Leithold (1994)

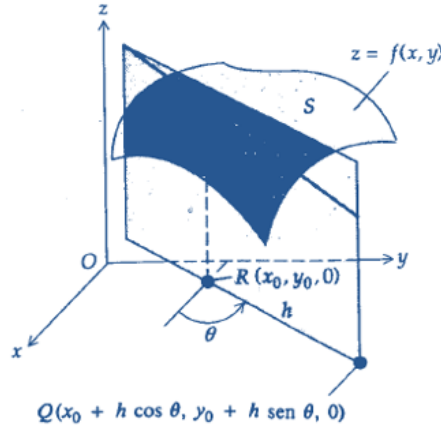
Seja f uma função de duas variáveis x e y . Se \vec{U} for o vetor unitário $(\cos\theta, \sin\theta)$, a derivada direcional de f na direção de \vec{U} , denotada por $D_{\vec{U}}f$, é definida como:

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \frac{f(x + h \cdot \cos\theta, y + h \cdot \sin\theta) - f(x, y)}{h}$$

desde que o limite exista. A derivada direcional representa a taxa de variação dos valores da função $f(x, y)$ na direção e sentido do vetor unitário U . Esse conceito é ilustrado na Figura 32.

Considere uma superfície S , descrita pela equação $z = f(x, y)$, e um ponto $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a S . Os pontos $R(x_0, y_0, 0)$ e $Q(x_0 + h \cdot \cos \theta, y_0 + h \cdot \sin \theta, 0)$ situam-se no plano xy . O plano que passa por R e Q , paralelo ao eixo z , forma um ângulo θ com a direção positiva do eixo x . A interseção entre esse plano e a superfície S é uma curva C .

Figura 32 – Derivada direcional



Fonte: Leithold (1994)

A derivada direcional $D_{\vec{U}}f$, calculada no ponto P_0 , corresponde à inclinação da reta tangente à curva C em P_0 . Nesse caso, a inclinação é determinada pelo limite:

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \frac{f(x + h \cdot \cos \theta, y_0 + h \cdot \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

Se $\vec{U} = \vec{i}$, então $\cos \theta = 1$ e $\sin \theta = 0$. Daí,

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \frac{f(x + h, y_0) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada de f em relação a x .

Se $\vec{U} = \vec{j}$, então $\cos \theta = 0$ e $\sin \theta = 1$. Daí,

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada de f em relação a y .

Dessa forma, f_x e f_y podem ser interpretados como casos particulares da derivada direcional, correspondendo às direções dos vetores unitários \vec{i} e \vec{j} , respectivamente.

Exemplo 4.13 Determine $D_{\vec{U}}f(x, y)$, se $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ e \vec{U} é o vetor unitário na direção $\frac{\pi}{6}$, ou seja, $\vec{U} = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \vec{i} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \vec{j}$.

Solução:

$$\vec{U} = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \vec{i} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \vec{j}.$$

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \frac{f(x + h \cdot \cos \frac{\pi}{6}, y + h \cdot \sin \frac{\pi}{6}) - f(x, y)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h, y + \frac{1}{2}h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h} \\
&= \frac{3(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h)^2 - (y + \frac{1}{2}h)^2 + 4(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h} \\
&= \frac{3(x^2 + xh\sqrt{3} + \frac{3}{4}h^2) - (y^2 + hy + \frac{1}{4}h^2) + 4(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h} \\
&= \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h} \\
&= \frac{3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h} \\
&= 3\sqrt{3}x + \frac{9}{4}h - y - \frac{1}{4}h + 2\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Avançaremos agora para desenvolver uma fórmula que facilite o cálculo da derivada direcional, tornando-o mais eficiente em comparação ao método apresentado na definição inicial.

Teorema 4.14 Se f for uma função diferenciável de x e y e $\vec{U} = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}$, então $D_{\vec{U}}f(x, y) = f_x(x, y) \cdot \cos\theta + f_y(x, y) \cdot \sin\theta$.

Exemplo 4.15 Determine $D_{\vec{U}}f(x, y)$, se $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ e \vec{U} é o vetor unitário na direção $\frac{\pi}{6}$, ou seja, $\vec{U} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \vec{i} + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \vec{j}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
D_{\vec{U}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cdot \cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \cdot \sin\frac{\pi}{6} \\
&= (6x + 4) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-2y) \cdot \frac{1}{2} \\
&= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} \text{ o que está de acordo com a resposta do exemplo anterior.}
\end{aligned}$$

Exemplo 4.16 Encontre a derivada direcional $D_{\vec{U}}f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e \vec{U} é o vetor unitário na direção $\frac{\pi}{6}$, ou seja, $\vec{U} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \vec{i} + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \vec{j}$. Qual será $D_{\vec{U}}f(1, 2)$?

Solução:

$$\begin{aligned}
D_{\vec{U}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cdot \cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \cdot \sin\frac{\pi}{6} \\
&= (3x^2 - 3y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y]
\end{aligned}$$

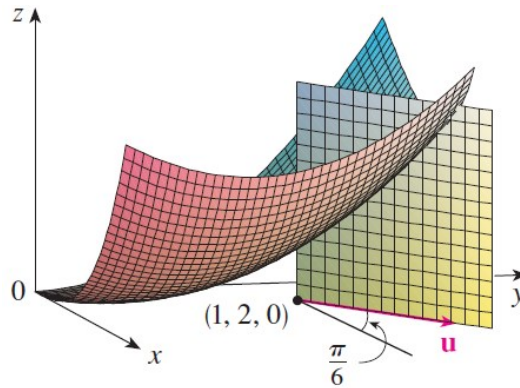
Logo,

$$D_{\vec{U}}f(1, 2) = \frac{1}{2}[3\sqrt{3} - 3 + (8 - 3\sqrt{3}) \cdot 2]$$

$$= \frac{1}{2}[13 - 3\sqrt{3}]$$

A derivada direcional $D_{\vec{u}}f(1, 2)$ no Exemplo 4.16 representa a taxa de variação de z na direção de u . Isso é a inclinação da reta da tangente para a curva de intersecção da superfície $z = x^3 - 3xy - 4y^2$ e o plano vertical por $(1, 2, 0)$ na direção de u mostrado na Figura 33.

Figura 33 – A derivada direcional $D_{\vec{u}}f(1, 2)$ do Exemplo 4.16



Fonte: Stewart (2013)

Observação 4.17 A derivada direcional pode ser expressa como o produto escalar de dois vetores. Considerando que:

$$f_x(x, y) \cdot \cos\theta + f_y(x, y) \cdot \sin\theta = (\cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y) \cdot \mathbf{i} + f_y(x, y) \cdot \mathbf{j}],$$

segue, pelo Teorema 4.14, que:

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = (\cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y) \cdot \mathbf{i} + f_y(x, y) \cdot \mathbf{j}].$$

O vetor presente no segundo membro da equação acima é denominado gradiente da função f . O símbolo que o representa é ∇f , conhecido como "del", sendo frequentemente utilizado na forma reduzida $\text{grad } f$.

Definição 4.18 Para uma função de duas variáveis x e y , cujas derivadas parciais f_x e f_y existam, o gradiente de f , denotado por ∇f , é dado por:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \cdot \mathbf{i} + f_y(x, y) \cdot \mathbf{j}$$

Com base na Observação 4.17, a equação $(D_{\vec{u}}f(x, y) = (\cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y) \cdot \mathbf{i} + f_y(x, y) \cdot \mathbf{j}])$ pode ser reescrita como:

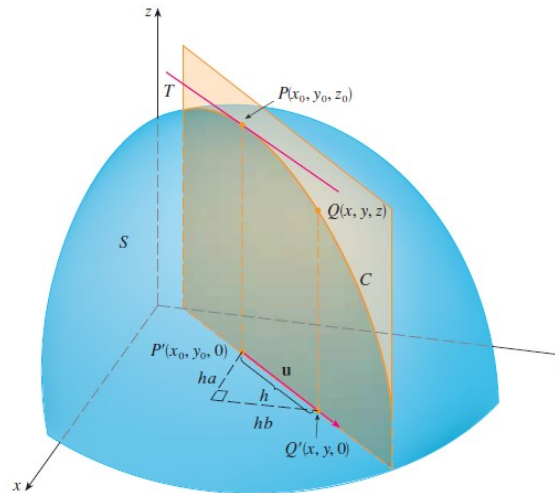
$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \vec{U} \cdot \nabla f(x, y).$$

Dessa forma, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida ao multiplicar escalarmente o gradiente pelo vetor unitário que indica a direção e o sentido desejados.

Dada uma função escalar de várias variáveis $f(x, y, z)$, a derivada parcial mede a taxa de variação de f ao longo de um dos eixos coordenados, mantendo as outras variáveis

constantes, como ilustrado na Figura 34. No entanto, em muitos problemas práticos, é necessário medir a variação de f ao longo de uma direção arbitrária, não restrita aos eixos cartesianos. Essa variação é dada pela derivada direcional.

Figura 34 – O plano vertical que passa por P na direção de u intercepta S em uma curva C .



Fonte: Stewart (2013)

A derivada direcional de f em um ponto na direção de um vetor unitário é definida como:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2, z_0 + hu_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Se for diferenciável, a derivada direcional pode ser expressa em termos do vetor gradiente da função, como visto na Definição 4.18.

4.3.4 Vetor gradiente

O gradiente, também apresentado no tópico anterior, especifica a direção e o sentido em que a função apresenta sua maior taxa de variação. O vetor gradiente de uma função f é um vetor que contém todas as derivadas parciais de f e aponta na direção de máxima variação da função. Ele é definido como:

$$\nabla f = i \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + j \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + k \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

A relação entre o gradiente e a derivada direcional é dada pela expressão:

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x, y).$$

onde “ \cdot ” representa o produto escalar entre os vetores ∇f e \vec{u} . Isso mostra que a derivada direcional é a projeção do vetor gradiente na direção de \vec{u} , ou seja, a taxa de variação da função na direção de \vec{u} .

4.3.5 Propriedades do vetor gradiente

- **Direção de máxima variação:** O vetor gradiente aponta na direção em que a função cresce mais rapidamente.
- **Valor máximo da derivada direcional:** O valor máximo da derivada direcional ocorre quando U tem a mesma direção do gradiente, sendo igual ao módulo de ∇f .

$$\max D_{\vec{U}} f = \|\nabla f\|$$

- **Superfícies de nível:** O vetor gradiente é sempre perpendicular às superfícies de nível da função, ou seja, às curvas (ou superfícies) onde a função assume um valor constante.

4.3.6 Aplicações

Os conceitos de derivada direcional e vetor gradiente têm diversas aplicações práticas, incluindo:

- **Otimização:** O gradiente é usado em métodos numéricos como o **Gradiente Descendente**, fundamental para encontrar mínimos de funções.
- **Física:** No estudo de campos escalares, como temperatura e potencial elétrico, o gradiente indica a direção de maior variação.
- **Engenharia:** Em análise de tensões e deformações, a derivada direcional ajuda a determinar esforços em diferentes direções.

O estudo da derivada direcional e do vetor gradiente é essencial para compreender a variação de funções em várias direções. O gradiente fornece uma forma compacta de expressar essa variação e tem aplicações em diversas áreas da ciência e tecnologia. Ao dominar esses conceitos, podemos resolver problemas complexos de otimização, modelagem matemática e análise de fenômenos naturais.

5 APLICAÇÃO DO CÁLCULO VETORIAL À BIOLOGIA

5.1 Função vetorial

5.1.1 Curvas parametrizadas 1 – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \cos t, y = \sin t \text{ e } z = t \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

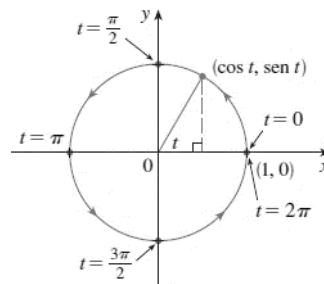
Solução:

Se marcarmos os pontos, parece que a curva é um círculo. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação de t . Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Então, o ponto (x, y) se move no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Observe que, neste exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura 35.

Figura 35 – Ângulo do parâmetro t



Fonte: Stewart (2013)

Quando t aumenta de 0 até 2π , o ponto $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ se move uma vez em torno do círculo, no sentido anti-horário, partindo do ponto $(1, 0)$.

5.1.2 Curvas parametrizadas 2 – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k}$$

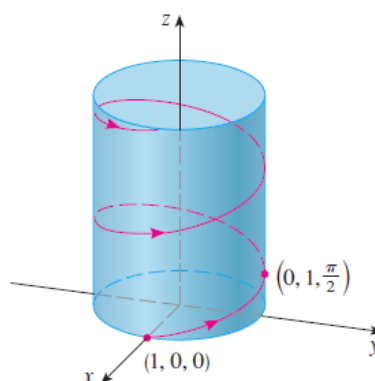
Solução:

As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t, y = \sin t \text{ e } z = t$$

Uma vez que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move para a esquerda em torno do círculo no plano xy . (A projeção da curva para o plano xy tem equação vetorial. Veja a seção 5.1.1) Como $z = t$ a curva gira para cima ao redor do cilindro quando t aumenta. A curva, mostrada na Figura 36, é chamada **hélice**.

Figura 36 – Hélice



Fonte: Stewart (2013)

A forma de saca-rolha da hélice circular utilizada é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953, James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices circulares paralelas interligadas, como na Figura 37.

Figura 37 – Uma hélice dupla



Fonte: Stewart (2013)

5.2 Derivadas parciais

5.2.1 Índice de Massa Corporal (IMC) – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Definimos o índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa como a função de duas variáveis definida por

$$B(m, h) = \frac{m}{h^2}$$

Calcule as derivadas parciais de B para um homem com $m = 64$ kg e $h = 1,68$ m e interprete os resultados.

Solução:

Considerando h como uma constante, observamos que a derivada parcial em relação a m é:

$$\frac{\partial B}{\partial m}(m, h) = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m}{h^2} \right) = \frac{1}{h^2}$$

Portanto,

$$\frac{\partial B}{\partial m}(64; 1,68) = \frac{1}{(1,68)^2} \approx 0,35(\text{kg/m}^2)/\text{kg}$$

Este é o valor da taxa em que o IMC aumenta em relação ao peso, considerando que a pessoa pesa 64 kg e sua altura é 1.68 m. Assim, se o peso aumentar por uma pequena quantidade, como 1 kg, e a altura permanecer inalterada, o IMC aumentará aproximadamente 0.35 kg/m².

Agora, considerando m como uma constante, a derivada parcial em relação a h é:

$$\frac{\partial B}{\partial h}(m, h) = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{m}{h^2} \right) = \frac{-2m}{h^3}$$

Portanto,

$$\frac{\partial B}{\partial h}(64; 1,68) = \frac{-2 \cdot 64}{(1,68)^3} \approx -27(\text{kg/m}^2)/\text{m}$$

Isso é a taxa pela qual o IMC diminui em relação à altura, quando o peso do indivíduo é 64 kg e sua altura é 1,68 m. Portanto, se o peso permanecer inalterado, mas a altura aumentar em uma pequena quantidade, por exemplo, 1 cm, o IMC diminuirá cerca de 0,27 kg/m².

5.2.2 Fluxo sanguíneo – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Uma das leis de Poiseuille afirma que a resistência ao fluxo de sangue por uma artéria é dada por:

$$R = \frac{CL}{r^4},$$

onde L é o comprimento, r é o raio da artéria, C é uma constante positiva dependente da viscosidade do sangue. Pede-se calcular:

a) $\frac{\partial R}{\partial L}$

b) $\frac{\partial R}{\partial r}$

c) interpretar ambos os resultados.

Solução:

a) Como C e r são constantes em relação a L, temos:

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{CL}{r^4} \right) = \frac{C}{r^4}$$

b) Derivamos $R = \frac{CL}{r^4}$ em relação a r:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{CL}{r^4} \right) = CL \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^4} \right),$$

pois C e L são constantes em relação a r, daí temos:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-4CL}{r^5},$$

pois,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^4} \right) = \frac{-4}{r^5}.$$

c) interpretação dos resultados.

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{C}{r^4}$$

Essa derivada mostra que a resistência R aumenta proporcionalmente ao comprimento da artéria (L). Quanto maior o comprimento, maior será a resistência ao fluxo sanguíneo.

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-4CL}{r^5}.$$

Essa derivada indica que a resistência R diminui à medida que o raio da artéria (r) aumenta. Como a dependência é inversamente proporcional a r^5 , mesmo pequenos aumentos no raio resultam em uma redução significativa na resistência, evidenciando a sensibilidade do fluxo sanguíneo ao raio da artéria.

5.2.3 Concentração de antibióticos – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

Se um antibiótico é administrado a um paciente a uma taxa constante através de infusão intravenosa e é metabolizado, então a concentração do antibiótico após uma unidade de

tempo é modelada por:

$$c(\theta, V) = c_0 e^{-1/V} + \theta V(1 - e^{-1/V}),$$

onde c_0 é a concentração inicial, θ é a taxa de administração, V é o volume do sangue do paciente. Pede-se calcular:

a) $\frac{\partial c}{\partial \theta}$

b) $\frac{\partial c}{\partial V}$

c) interpretar ambos os resultados.

Solução:

a) Para calcular a derivada parcial de c em relação a θ , tratamos V e c_0 como constantes.

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(c_0 e^{-1/V} + \theta V(1 - e^{-1/V}))$$

Mas como o primeiro termo $c_0 e^{-1/V}$ não depende de θ , então sua derivada parcial em relação a θ é zero. Para o segundo termo, $V(1 - e^{-1/V})$ é constante em relação a θ , assim

$$\frac{\partial c}{\partial \theta}(\theta V(1 - e^{-1/V})) = V(1 - e^{-1/V}) \frac{\partial c}{\partial \theta}(\theta) = V(1 - e^{-1/V}) \cdot 1 = V(1 - e^{-1/V}).$$

Portanto, a derivada parcial de c em relação a θ é:

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = V(1 - e^{-1/V}).$$

Interpretação de $\frac{\partial c}{\partial \theta}$:

A derivada parcial $\frac{\partial c}{\partial \theta}$ representa a taxa de variação da concentração do antibiótico após uma unidade de tempo em relação à taxa de administração (θ), mantendo o volume sanguíneo (V) constante. Como V é sempre positivo e $0 < e^{-1/V} < 1$ para $V > 0$, temos que $1 - e^{-1/V} > 0$. Portanto, $\frac{\partial c}{\partial \theta} = V(1 - e^{-1/V})$ é sempre positivo.

Isso significa que aumentar a taxa de administração do antibiótico (θ) resultará em um aumento na concentração do antibiótico no sangue do paciente após uma unidade de tempo, mantendo o volume sanguíneo constante. A magnitude desse aumento é influenciada pelo volume sanguíneo (V). Quanto maior o volume sanguíneo, maior será o impacto da taxa de administração na concentração (dentro de certos limites, pois $1 - e^{-1/V}$ se aproxima de 1 para grandes V).

b) Para calcular a derivada parcial de c em relação a V , tratamos θ e c_0 como constantes.

$$\frac{\partial c}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}(c_0 e^{-1/V} + \theta V(1 - e^{-1/V})).$$

Para o primeiro termo:

$$\frac{\partial c}{\partial V}(c_0 e^{-1/V}) = c_0 \frac{\partial c}{\partial V}(e^{-1/V}) = c_0(e^{-1/V}) \cdot (-(-1)V^{-2}) = c_0(e^{-1/V}) \cdot \left(\frac{1}{V^2}\right) = \frac{c_0 e^{-1/V}}{V^2}.$$

Para o segundo termo, usamos a regra do produto:

$$\frac{\partial c}{\partial V}(\theta V(1 - e^{-1/V})) = \theta \frac{\partial c}{\partial V}(V(1 - e^{-1/V})) = \theta \left(\frac{\partial c}{\partial V}(V)(1 - e^{-1/V}) + V \frac{\partial c}{\partial V}(1 - e^{-1/V}) \right).$$

Como $\frac{\partial c}{\partial V}(V) = 1$ e $\frac{\partial c}{\partial V}(1 - e^{-1/V}) = 0 - \frac{e^{-1/V}}{V^2} = -\frac{e^{-1/V}}{V^2}$, então

$$\frac{\partial c}{\partial V} = \frac{c_0 e^{-1/V}}{V^2} + \theta \left[(1 - e^{-1/V}) - \frac{e^{-1/V}}{V} \right].$$

A derivada parcial $\frac{\partial c}{\partial V}$ representa a taxa de variação da concentração do antibiótico após uma unidade de tempo em relação ao volume sanguíneo do paciente (V), mantendo a taxa de administração (θ) constante.

O sinal de $\frac{\partial c}{\partial V}$ não é imediatamente óbvio e depende dos valores de c_0 , θ e V . Vamos analisar os termos:

- $\frac{c_0 e^{-1/V}}{V^2}$ é sempre positivo para $c_0 > 0$ e $V > 0$.
- $\theta(1 - e^{-1/V})$ é sempre positivo para $\theta > 0$ e $V > 0$.
- $-\frac{\theta e^{-1/V}}{V}$ é sempre negativo para $\theta > 0$ e $V > 0$.

Agora, o sinal de $\frac{\partial c}{\partial V}$ depende da magnitude relativa desses termos. Considerando o comportamento para diferentes valores de V :

- Para V pequeno, $1/V$ é grande, $e^{-1/V}$ é pequeno (próximo de 0). Nesse caso, $\frac{\partial c}{\partial V}$ pode ser dominado pelo termo positivo $\frac{c_0 e^{-1/V}}{V^2}$ e pelo termo $\theta(1 - e^{-1/V}) \approx \theta$.
- Para V grande, $1/V$ é pequeno, $e^{-1/V}$ é próximo de 1. Nesse caso, $\frac{\partial c}{\partial V}$ pode ser pequeno, pois $1 - e^{-1/V}$ é pequeno e os termos com V^2 e V no denominador também diminuem.

A taxa de variação da concentração em relação ao volume sanguíneo não é monotonicamente crescente. Para volumes pequenos, aumentar o volume pode levar a um aumento na concentração devido à maior capacidade de acumular o antibiótico administrado. No entanto, para volumes maiores, o efeito da diluição da concentração inicial e o termo negativo $-\frac{\theta e^{-1/V}}{V}$ podem se tornar mais significativos, possivelmente diminuindo a taxa de aumento da concentração com o aumento do volume, ou até mesmo levando a uma diminuição em certos cenários (dependendo dos valores específicos de c_0 e θ).

5.2.4 Gasto energético do lagarto – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

A energia média E (em kcal) necessária para um lagarto caminhar ou correr uma

distância de 1 km foi modelada pela equação:

$$E(m, v) = 2.65m^{0.66} + \frac{3.5m^{0.75}}{v},$$

onde m é a massa corporal do lagarto (em gramas) e v é sua velocidade (em km/h).

Calcule $E_m(400, 8)$ e $E_v(400, 8)$, e interprete suas respostas.

Solução:

A equação dada é:

$$E(m, v) = 2,65m^{0,66} + \frac{3,5m^{0,75}}{v}$$

- Cálculo da derivada parcial em relação a m :

A derivada parcial de E em relação a m é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial m} &= \frac{\partial}{\partial m} (2,65m^{0,66}) + \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{3,5m^{0,75}}{v} \right) \\ &= 1,749m^{-0,34} + \frac{2,625m^{-0,25}}{v}\end{aligned}$$

Substituindo $m = 400$ g e $v = 8$ km/h, temos:

$$E(400, 8) = 1,749 \cdot 400^{-0,34} + \frac{2,625 \cdot 400^{-0,25}}{8}$$

$$E(400, 8) \approx 0,3014 \text{ kcal/g,}$$

Isto é, um aumento de 1 g na massa requer aproximadamente 0,3 kcal de energia adicional quando $m = 400$ e $v = 8$.

- Cálculo da derivada parcial em relação a v :

A derivada parcial de E em relação a v é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} (2,65m^{0,66}) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{3,5m^{0,75}}{v} \right) \\ &= 0 - \frac{3,5m^{0,75}}{v^2} \\ &= - \frac{3,5m^{0,75}}{v^2}\end{aligned}$$

Substituindo $m = 400$ g e $v = 8$ km/h, temos:

$$E(400, 8) = - \frac{3,5 \cdot 400^{0,75}}{8^2}$$

$$E(400, 8) \approx - 4,89 \text{ kcal/(km/h),}$$

Isto é, um aumento na velocidade de 1 km/h resulta em aproximadamente 4,9 kcal de energia economizada quando $m = 400$ e $v = 8$.

5.3 Derivadas direcionais e vetor gradiente

5.3.1 Inversões e listras de cobras 1 – Livro *BioCalculus* (Stewart, 2016)

Em um estudo sobre a sobrevivência de cobras jovens (garter snakes), um pesquisador chegou ao modelo:

$$F = 4,2 + 0,008R + 0,102S + 0,017R^2 - 0,034S^2 - 0,268RS$$

onde:

- F é uma medida de aptidão da cobra,
- R mede o número de reversões de direção durante a fuga de um predador,
- S mede o grau de listras no padrão de cor da cobra.

Eles já consideraram como F muda conforme R ou S variam, calculando as derivadas parciais com relação a R e S.

O problema adicional é: "Como F muda quando $R = 3$ e $S = 2$ se o fenótipo muda de forma que R e S aumentem por quantidades iguais?"

Solução:

O vetor gradiente de F é

$$\nabla F(R, S) = [F_R, F_S] = [0,008 + 0,034R - 0,268S, 0,012 - 0,68S - 0,268R]$$

E quando $R = 3$ e $S = 2$ isso se torna

$$\nabla F(3, 2) = [-0,426, -0,838]$$

Queremos a derivada direcional na direção que está exatamente entre **i** e **j**, ou seja, na direção $v = (1,1)$. O vetor unitário nessa direção é $u = \frac{1}{2}(1, 1)$, portanto a derivada direcional é

$$\begin{aligned} D_u F(3, 2) &= \nabla F(3, 2) \cdot u = [-0,426, -0,838] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ &= -\frac{1,264}{\sqrt{2}} \approx -0,894 \end{aligned}$$

Isso significa que a função de aptidão em $(3, 2)$ diminui a uma taxa de 0,894 unidades quando R e S aumentam em quantidades iguais.

5.3.2 Inversões e listras de cobras 2 – Livro BioCalculus (Stewart, 2016)

Na seção 5.3.1, foi calculado $\nabla F(3,2)$, ou seja, o vetor gradiente da função de fitness da cobra F, quando $R = 3$ e $S = 2$. Em qual direção u a derivada direcional de F em $(3,2)$ é máxima? Calcule e interprete o valor máximo.

Solução:

- Definição do vetor gradiente e derivada direcional:

O vetor gradiente $\nabla F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ aponta na direção de crescimento mais rápido da Função

F, como visto no tópico 4.3.5.

A derivada direcional de F em uma direção unitária u é dada por:

$$D_{\vec{U}}f(x, y) = \vec{U} \cdot \nabla f(x, y).$$

O valor de $D_{\vec{U}}f(x, y)$ é máximo quando u está na mesma direção de $\nabla F(x, y)$.

- Cálculo da direção de \vec{U} :

Seja $\nabla F(3, 2) = (F_x(3, 2), F_y(3, 2)) = (-0,426, -0,838)$. A direção unitária u que maximiza a derivada direcional é:

$$\vec{U} = \frac{\nabla F(3,2)}{\|\nabla F(3,2)\|}$$

$$\vec{U} = \frac{(-0,426, -0,838)}{0,94} \approx (-0,453, -0,892),$$

Onde:

$$\|\nabla F(3,2)\| = \sqrt{(-0,426)^2 + (-0,838)^2} \approx 0,94$$

- Valor máximo da derivada direcional:

O valor máximo de $D_{\vec{U}}f$ ocorre quando u está na direção de $\nabla F(3,2)$:

$$\max D_{\vec{U}}f(3, 2) = \|\nabla F(3,2)\| \approx 0,94.$$

- Interpretação:

A taxa máxima de aumento (ou, neste caso, a taxa máxima de redução, já que o gradiente aponta na direção negativa) da função F no ponto (3,2) ocorre na direção $(-0,453, -0,892)$, e o valor dessa taxa é aproximadamente 0,940 unidades.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho foi motivado pela elaboração de uma fonte de consulta acessível sobre cálculo vetorial e suas aplicações à biologia, direcionada aos estudantes iniciantes das ciências biológicas. Reconhecendo que uma das principais dificuldades enfrentadas por esses estudantes é o domínio das ferramentas matemáticas vetoriais, o estudo propôs não apenas uma abordagem matemática rigorosa, com demonstrações formais detalhadas, mas também priorizou o enriquecimento dos conceitos com interpretações geométricas e sua aplicação em problemáticas da biologia. O objetivo foi oferecer uma visão mais intuitiva e aplicada, complementando as literaturas existentes sobre o tema e facilitando a compreensão dos fundamentos matemáticos necessários para a análise de fenômenos biológicos.

Nesse contexto, a dissertação abordou de forma abrangente a teoria vetorial, iniciando pelas definições fundamentais de vetores e espaços vetoriais, passando por campos vetoriais e pelos produtos escalar e vetorial, e culminando no estudo das integrais de grandezas vetoriais, como as integrais de linha e de superfície. Além disso, foram apresentados os operadores diferenciais vetoriais — gradiente, divergente e rotacional —, explorando sua relevância no entendimento e aplicação de conceitos matemáticos na biologia.

O ponto alto do trabalho foi o desenvolvimento progressivo desde os conceitos mais básicos de vetores, que podem ser trabalhados no ensino médio, até tópicos avançados no ensino superior, como a exposição de funções vetoriais, derivadas parciais, direcionais e vetor gradiente, bem como suas propriedades. Além do exposto acima com aplicações, temos um apêndice onde tratamos dos Teoremas de Green, Gauss e Stokes para o leitor que retende aprofundar seus estudos.

O embasamento histórico e os fatos apresentados ao longo do texto tiveram como propósito não apenas situar o leitor na linha do tempo do desenvolvimento dessa ciência e apresentar os autores dos teoremas, mas também despertar a curiosidade e o interesse sobre como, e principalmente por que, certas ferramentas matemáticas foram criadas. Essa abordagem buscou evidenciar que o avanço da matemática está intrinsicamente ligado à solução de problemas concretos e ao desejo de compreender fenômenos naturais, proporcionando uma perspectiva mais rica e envolvente para o estudo do cálculo vetorial.

Concluimos, portanto, que o estudo dos vetores se revela uma ferramenta indispensável no cotidiano acadêmico, permitindo um aprofundamento significativo por meio do cálculo vetorial. Esta abordagem mais refinada demonstra sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como a biologia, explorada neste trabalho. Tal estudo não apenas

enriquece a teoria matemática, mas também fornece ferramentas práticas para a análise e modelagem de fenômenos complexos. Essa interligação entre o rigor matemático e sua utilidade prática destaca a relevância do estudo desenvolvido, evidenciando como a matemática pode atuar como ponte para o avanço em áreas interdisciplinares.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A history of Mathematics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Karina; CRISSAFF, Lucas. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. 1. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

FERNÁNDEZ, Tomás; TAMARO, Elena. Biografia de Josiah Willard Gibbs. *In*: **BIOGRAFÍAS y vidas**. Barcelona, Espanha: Editorial Biografías y Vidas, 2004. Disponível em: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/g/gibbs.htm>. Acesso em: 21 mar. 2025.

FERNÁNDEZ, Tomás; TAMARO, Elena. Biografia de William Rowan Hamilton. *In*: **BIOGRAFÍAS y vidas**. Barcelona, Espanha: Editorial Biografías y Vidas, 2004. Disponível em: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hamilton_william.htm. Acesso em: 21 mar. 2025.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, Louis. **Cálculo avançado**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

SANTOS, Reginaldo J. **Matrizes, vetores e geometria analítica**. 1. ed. Imprensa universitária, UFMG: Belo Horizonte, MG, 2006.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, James; DAY, Troy. **Biocalculus: Calculus, Probability, and Statistics for the Life Sciences**. United States of America: Kathi Townes, TECHarts, 2016.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

1 Introdução

O estudo de vetores e cálculo vetorial é essencial, pois fornece uma base sólida para compreender e resolver problemas em diversas áreas do conhecimento, especialmente nas ciências exatas e tecnológicas. Aumentado assim a capacidade de resolução de problemas, habilidades essenciais tanto no ambiente acadêmico quanto em situações práticas do cotidiano. Esses conceitos permitem ao aluno compreender como diferentes grandezas vetoriais se relacionam e interagem, proporcionando uma visão mais ampla dos fundamentos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas, como biologia, física, engenharia e computação.

Na área de Ciências da Natureza, a BNCC propõe o desenvolvimento de habilidades que envolvem a análise e representação de transformações e conservações em sistemas físicos. Isso inclui o uso de vetores para descrever grandezas como força, velocidade e aceleração. Por exemplo, a habilidade EM13CNT101 incentiva os estudantes a analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos digitais, transformações em sistemas que envolvem movimento, utilizando representações vetoriais

Embora a BNCC de Matemática para o Ensino Médio não mencione explicitamente "vetores" como um conteúdo isolado, ela enfatiza o desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico. Isso inclui a interpretação de grandezas e suas relações, o que pode abranger o estudo de vetores em contextos como geometria analítica e álgebra linear

Portanto, a BNCC contempla o estudo de vetores no Ensino Médio, principalmente na disciplina de Física, onde são fundamentais para a compreensão de diversos fenômenos. Na Matemática, embora não sejam destacados como um tópico separado, os vetores podem ser abordados dentro de conteúdos que envolvem representações geométricas e análise de grandezas.

As atividades aqui propostas apresentam diversas metodologias de resolução, incentivando os educandos à investigação e à pesquisa por meio de situações-problema contextualizadas. Esse enfoque estimula os alunos a serem investigativos e curiosos, levando-os a desenvolver, além do raciocínio lógico, uma interpretação aprofundada e uma análise crítica das aplicações vetoriais, que vão além do âmbito puramente teórico. Assim, eles descobrem o prazer em estudar matemática e suas aplicações práticas de maneira integrada.

2 Objetivo

2.1 Geral

Apresentar o estudo de vetores com um olhar matemático para os alunos de Ensino Médio e a ideia, pois é um assunto muito refinado, de cálculo vetorial, bem como sua importância em outras áreas, que no caso aqui apresentado especificamente temos a biologia, bem como usá-los como ferramenta alternativa e prática para sua resolução.

2.2 Específicos

- Compreender que os vetores formam uma classe específica de entidades matemáticas, caracterizadas por possuírem magnitude e direção, sendo amplamente utilizados para representar grandezas físicas e resolver problemas em múltiplas dimensões.
- Aplicar os conceitos de vetores e operações vetoriais (como adição, subtração, produto escalar e vetorial) na resolução de problemas geométricos e físicos, visando desenvolver a habilidade de modelar e analisar situações que envolvem grandezas vetoriais.
- Incentivar os educandos a explorar métodos algébricos e geométricos, compreendendo a natureza dos vetores, suas propriedades e como utilizá-los para descrever e solucionar problemas práticos e teóricos, como cálculo de trajetórias, forças resultantes e análise de campos vetoriais.
- Apresentar conceitos fundamentais de vetores e cálculo vetorial de maneira acessível, demonstrando suas aplicações na biologia. A palestra busca estimular o interesse dos alunos do ensino médio e capacitar professores para utilizarem essas ferramentas em sala de aula.

2 Público-alvo

A palestra bem como as atividades foram pensadas para serem aplicadas aos alunos que estão cursando o 2º e 3º Anos do Ensino Médio, por já possuírem uma bagagem de conhecimentos ou pré-requisitos necessários para a compreensão do conteúdo que será desenvolvido e professores de matemática, física e biologia.

3 Estrutura da palestra (Duração: 2h20min)

3.1 Introdução (15 min) – A Motivação

- **Boas-vindas e apresentação do tema**
- **Por que estudar vetores e cálculo vetorial?**
 - Importância na ciência e tecnologia
 - Aplicações em diversas áreas, incluindo a biologia
- **Desafios na interseção entre matemática e biologia**
 - Modelagem de fenômenos naturais
 - Biomecânica e movimentos celulares

3.2 Conceitos Fundamentais de Vetores (25 min)

- **Definição de vetor**
 - Grandezas escalares vs. grandezas vetoriais
- **Componentes de um vetor e representação geométrica**
 - Módulo, direção e sentido
- **Operações básicas com vetores**
 - Adição e subtração de vetores
 - Multiplicação por escalar
 - Produto escalar e produto vetorial

3.3 Atividade interativa (15 min)

- Exercício prático: representar vetores no quadro ou em folha de papel
- Aplicação simples: deslocamento de um inseto na natureza

3.4 Aplicação de Vetores na Biologia (25 min)

- **Movimentos de organismos vivos**
 - Direção e deslocamento de células (exemplo: quimiotaxia de bactérias)
 - Análise do voo de pássaros e deslocamento de cardumes de peixes
- **Biomecânica**
 - Forças musculares como vetores
 - Movimento de articulações e locomoção humana
- **Fluxo sanguíneo e dinâmica de fluidos no corpo humano**
 - Aplicação da matemática para entender a circulação do sangue
- **Ecologia e modelagem de populações**
 - Modelos matemáticos vetoriais para estudar interações entre espécies

3.5 Cálculo vetorial e aplicações à Biologia (25 min)

Conhecendo alguns conceitos com uma linguagem mais acessível

- **Campo vetorial**
- **Gradiente e sua aplicação**
 - Transporte de substâncias no corpo humano (difusão e osmose)
 - Como células reagem a variações químicas no ambiente
- **Teorema de Green e fluxo de substâncias em organismos**
 - Aplicação no estudo de transporte celular

3.6 Atividade interativa (15 min)

- Pequeno problema sobre deslocamento celular baseado em gradientes químicos

3.7 Encerramento e discussão (20 min)

- **Resumo dos principais pontos abordados**

- **Sessão de perguntas e respostas**
- **Sugestões de materiais e referências para estudo adicional**
 - Indicação de livros e sites interativos
 - Recursos digitais para explorar vetores e cálculo vetorial na biologia

4 Recursos necessários

- **Material visual** (slides ou quadro branco para representações gráficas)
- **Materiais impressos** (resumo teórico e lista de exercícios para os alunos)

5 Avaliação e feedback

- **Questionário pós-palestra** (5 perguntas para avaliar o entendimento dos alunos)
- **Comentários dos professores sobre a aplicabilidade do conteúdo**
- **Sugestões de melhoria para futuras palestras**

6 Conclusão

Este produto educacional busca integrar matemática e biologia, mostrando que conceitos abstratos como vetores e cálculo vetorial têm aplicações diretas no estudo dos seres vivos. A palestra é uma oportunidade para ampliar a visão dos alunos sobre a interdisciplinaridade da ciência e fornecer aos professores ferramentas para enriquecer o ensino em sala de aula.

APÊNDICE B – CÁLCULO VETORIAL PARA ALÉM DA BIOLOGIA

1 Campos vetoriais

Os campos vetoriais são um conceito fundamental no cálculo vetorial e têm ampla aplicação em diversas áreas da matemática, física e engenharia.

1.1 Definição

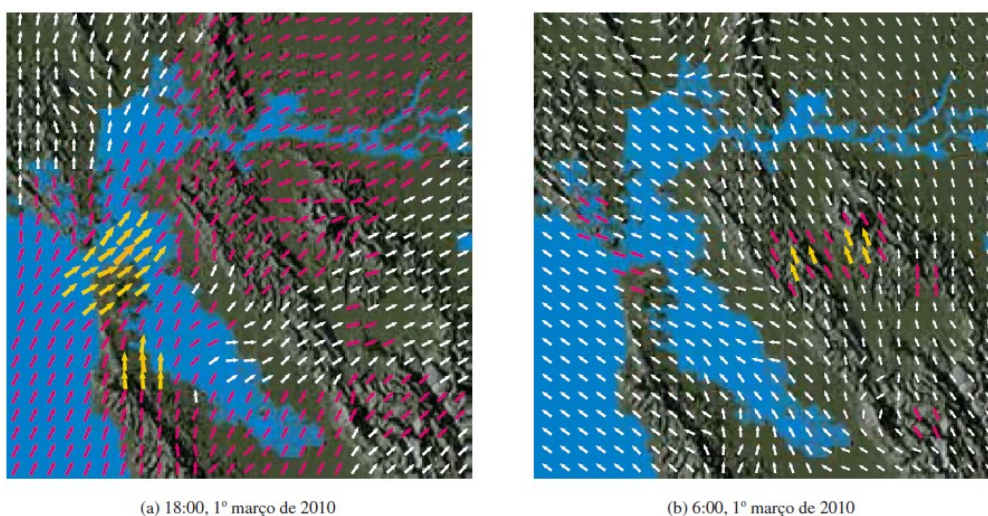
Um campo vetorial em uma região do espaço associa a cada ponto dessa região um vetor. Em geral, um campo vetorial em duas ou três dimensões pode ser expresso como uma função vetorial.

Cada vetor no campo representa uma magnitude e uma direção, permitindo visualizar fenômenos como fluxos de fluido, campos elétricos e campos gravitacionais.

Segundo Stewart (2013), os vetores apresentados na Figura 38 representam os vetores velocidade do ar, indicando a velocidade escalar, a direção e o sentido do vento em diferentes pontos situados a 10 metros acima da superfície na região da Baía de São Francisco. Observa-se, na parte (a), que as maiores velocidades do vento, representadas pelas setas mais longas, ocorreram ao entrarem na baía pelo lado oposto à Ponte Golden Gate. Em contraste, a parte (b) revela um padrão de vento significativamente diferente ocorrido 12 horas antes.

A cada ponto do ar, é possível associar um vetor que descreve a velocidade do vento. Este é um exemplo de um campo vetorial de velocidade.

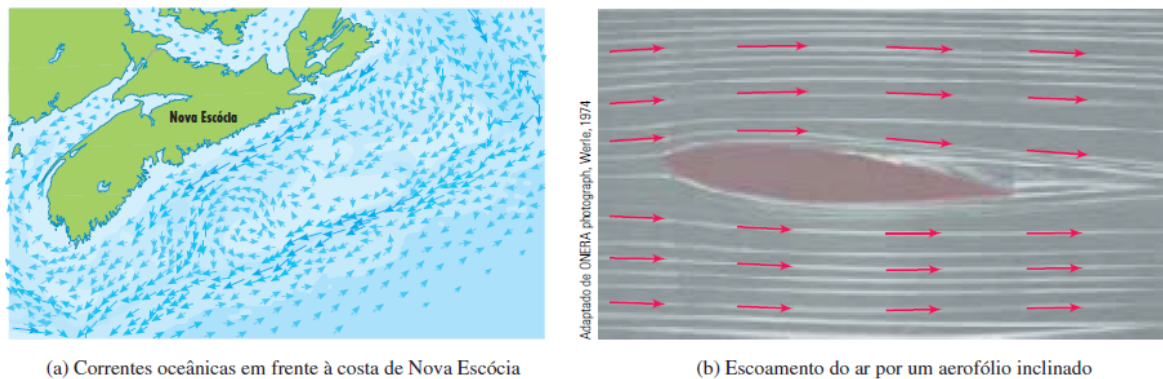
Figura 38 – Campos vetoriais de velocidade mostrando aspectos do vento na Baía de São Francisco



Fonte: Stewart (2013)

Outros exemplos de campos vetoriais de velocidade estão ilustrados na Figura 39: correntes oceânicas e do fluxo passando por um aerofólio.

Figura 39 – Campos vetoriais de velocidade



Fonte: Stewart (2013)

Outro tipo de campo vetorial, conhecido como campo de força, associa um vetor força a cada ponto de uma determinada região. Um exemplo clássico é o campo de força gravitacional. De forma geral, um campo vetorial pode ser definido como uma função cujo domínio é um conjunto de pontos em R^2 (ou R^3) e cuja imagem corresponde a um conjunto de vetores em V^2 (ou V^3) que são espaços vetoriais.

1.2 Definição

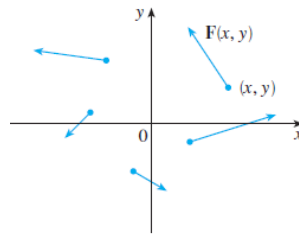
Seja D um subconjunto em R^2 (uma região plana). Um campo vetorial em R^2 é uma função vetorial F que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $F(x, y)$. Em um campo vetorial, cada ponto do espaço está relacionado a uma grandeza que possui não apenas magnitude, mas também direção e sentido.

A maneira mais eficaz de visualizar um campo vetorial é representar graficamente os vetores $F(x, y)$ como setas iniciando nos respectivos pontos (x, y) no plano. Naturalmente, não é viável fazer isso para todos os pontos (x, y) , mas podemos obter uma representação clara de F ao desenhar os vetores em pontos representativos de uma região D , como mostrado na Figura 40. Uma vez que $F(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes P e Q da seguinte forma:

$$F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções escalares que representam as componentes do vetor nas direções x e y , respectivamente. Algumas vezes, campos escalares, para distingui-los dos campos vetoriais.

Figura 40 – Campo vetorial em R^2



Fonte: Stewart (2013)

1.3 Definição

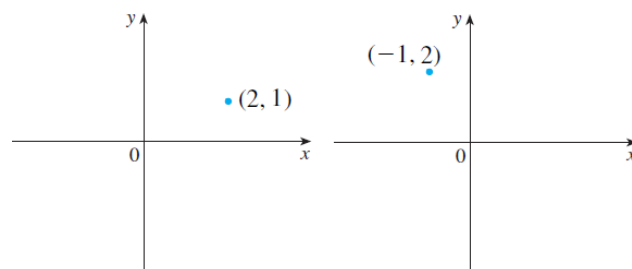
A ideia de campo vetorial pode ser entendida como uma aplicação que leva R^2 em R^2 , e sua representação se dá da seguinte maneira:

Exemplo: Um campo vetorial em R^2 é definido por $F(x, y) = (-y, x)$.

Podemos interpretar essa definição em três passos:

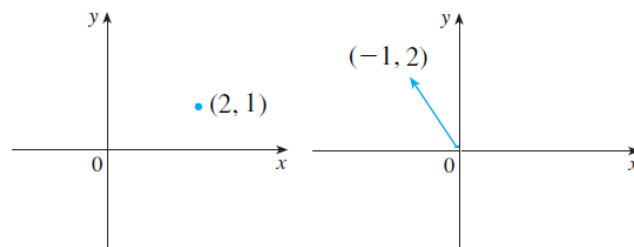
1. Inicialmente, associamos o ponto $(2, 1)$ ao ponto $(-1, 2)$, no plano, com base na aplicação dada, como ilustrado na Figura 41.
2. Refinando o raciocínio, percebemos que o ponto $(2, 1)$ é associado ao vetor $u = (-1, 2)$, que tem magnitude, direção e sentido, como ilustrado na Figura 42.
3. Por fim, ao representar graficamente o vetor u “saindo” do ponto $(2, 1)$, no plano, obtemos a visualização desejada do campo vetorial, como ilustrado na Figura 43.

Figura 41 – Passo 1



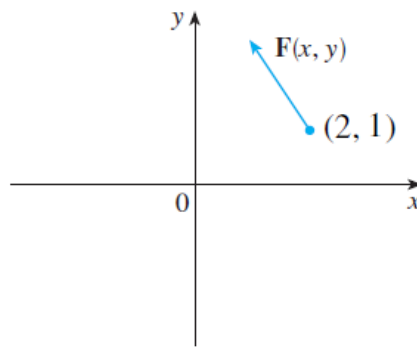
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 42 – Passo 2



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 43 – Passo 3



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

1.4 Definição

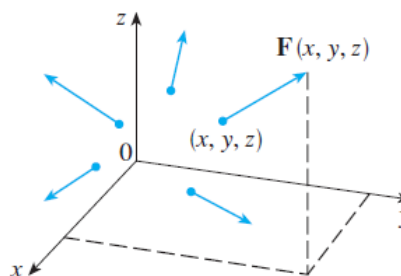
Seja E um subconjunto de R^3 . Um campo vetorial em R^3 é uma função vetorial F que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $F(x, y, z)$.

Em um campo vetorial, cada ponto do espaço está associado a uma grandeza vetorial que apresenta magnitude, direção e sentido.

Um campo vetorial F em R^3 está representado na Figura 44. Ele pode ser descrito em termos de suas funções componentes P , Q e R da seguinte forma:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Figura 44 – Campo vetorial em R^3



Fonte: Stewart (2013)

Como nas funções vetoriais apresentadas, podemos definir a continuidade de um campo vetorial. O campo F será contínuo se, e somente se, suas funções componentes P , Q e R forem contínuas.

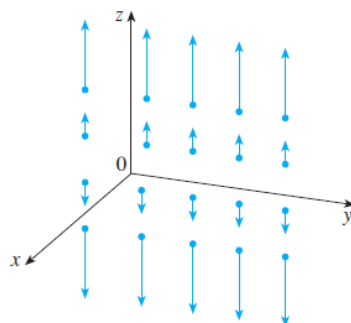
Por vezes, associamos um ponto (x, y, z) ao vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, o que nos permite escrever $F(\mathbf{r})$ em vez de $F(x, y, z)$. Assim, torna-se uma função que mapeia o vetor posição \mathbf{r} ao vetor correspondente $F(\mathbf{r})$.

Exemplo 1.5 Esboce o campo vetorial em R^3 dado por $F(x, y, z) = zk$.

Solução:

O desenho está mostrado na Figura 45. Observe que todos os vetores são verticais, apontando para cima, quando acima do plano xy ou para baixo, quando abaixo do plano xy . O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy .

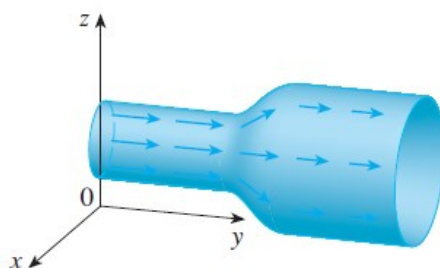
Figura 45 – $F(x, y, z) = zk$



Fonte: Stewart (2013)

No caso de um campo vetorial de velocidade, como ilustrado na Figura 46 a seguir, cada ponto no espaço dentro de um cano é associado a um vetor que representa a velocidade do escoamento naquele ponto. Esse vetor velocidade descreve tanto a intensidade do escoamento (magnitude) quanto sua orientação (direção e sentido) na região interna do cano.

Figura 46 – Campo de velocidade do escoamento de um fluido



Fonte: Stewart (2013)

1.1 Tipos de campos vetoriais

Os campos vetoriais podem ser classificados em diferentes categorias, dependendo de suas propriedades:

- **Campos gradientes:** São campos vetoriais que podem ser expressos como o gradiente de uma função escalar $f(x, y, z)$, ou seja, $\mathbf{f} = \nabla f$. Esses campos são conservativos e possuem propriedades importantes na física e na matemática.
- **Campos solenoidais:** São aqueles cujo divergente é nulo, ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Esses campos são associados à conservação de fluxo, como ocorre no campo magnético.
- **Campos rotacionais:** São campos cuja circulação ao redor de um ponto não é necessariamente nula, sendo descritos pelo rotacional $\nabla \times \mathbf{f}$.

1.2 Operadores diferenciais em campos vetoriais

Vários operadores diferenciais são utilizados para analisar propriedades de campos vetoriais:

- **Divergente:** Mede a tendência de um campo vetorial divergir de um ponto:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- **Rotacional:** Mede a tendência de um campo vetorial girar em torno de um ponto:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

- **Laplaciano vetorial:** Aplicado a campos vetoriais para analisar a difusão e propagação de sinais em meios físicos. Ele aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f . Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\text{div}(\nabla \cdot f) = \nabla \cdot (\nabla \cdot f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2 Integrais de linha

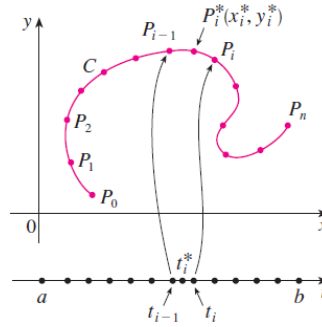
De modo análogo a integral de uma dimensão, na qual podemos integrar uma função $f(x)$ ao longo de um intervalo $[a; b]$ no domínio de $f(x)$, a integral de linha é calculada ao longo de uma curva, pertencente ao domínio da função a ser integrada.

Segundo Stewart (2013), tais integrais são chamadas *integrais de linha*, embora "integrais de curva" seria melhor terminologia. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo. Essa generalização amplia o conceito de integral para contextos mais abrangentes e complexos.

2.1 No plano - R^2

Considere uma curva plana C definida pela equação vetorial $r(t) = x(t)i + y(t)j$. Suponhamos que C seja uma curva suave, o que implica que $r(t)$ é contínuo e $r(t) \neq 0$. Tomando a ideia de Riemann, ou seja, dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de tamanhos iguais e marcando os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ na curva C , temos que esses pontos dividem C em n pequenos arcos de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. (Consulte a Figura 47).

Figura 47 – Caminho percorrido por uma curva



Fonte: Stewart (2013)

Escolhemos, então, um ponto arbitrário $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ em cada subarco. Esse ponto corresponde a um valor t_i^* pertencente ao subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Agora, seja f uma função de duas variáveis definida ao longo da curva C . Calculamos $f(x_i^*, y_i^*)$, multiplicamos esse valor pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

Essa soma é análoga à soma de Riemann. Ao tomarmos o limite dessa soma, à medida que $n \rightarrow \infty$ e $\Delta s_i \rightarrow 0$, definimos a integral de linha por analogia com a integral unidimensional:

Definição 2.2 Se f é definida sobre uma curva suave C dada pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, então a integral de linha de f sobre C é

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

Se o limite existir.

Sabemos dos cálculos iniciais, revisitado no tópico 4.2.4, que o comprimento de uma curva C é L , onde

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

de forma análoga, é possível usar um raciocínio semelhante dessa prova para provar que, se f é uma função contínua, então o limite definido pela Definição 4.5.2. sempre existe. Assim, podemos empregar a fórmula a seguir para calcular uma integral de linha, denominada equação 1:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Esse resultado indica que o valor da integral de linha é independente da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida apenas uma vez, no sentido em que t varia de a até b . Se $s(t)$ representa o comprimento da curva C entre os pontos correspondentes às parametrizações $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Para facilitar a memorização da fórmula, recomenda-se trabalhar tudo em função do parâmetro t . Ao parametrizar x e y em termos de t , pode-se escrever ds como:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

De maneira análoga com três variáveis temos, denominada equação 2,

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

As integrais apresentadas nas Equações 1 e 2 podem ser reescritas de forma mais concisa utilizando a notação vetorial.

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = L$$

onde L é o comprimento da curva C .

Observação 2.3 Caso do campo vetorial

Recorde-se que o trabalho realizado por uma força variável $f(x)$ ao deslocar uma partícula de a até b ao longo do eixo x é dado por:

$$W = \int_a^b f(x) dx.$$

Sabe-se também que o trabalho realizado por uma força constante F para mover um objeto de um ponto P a outro ponto Q no espaço é:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

onde $\mathbf{D} = \mathbf{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Agora, considere um campo de força contínuo em R^3 , definido por:

$$\mathbf{F} = P_i + Q_j + R_k,$$

como no caso do campo gravitacional ou no exemplo de um campo de força elétrica em R^2 (um caso especial onde $R = 0$, e P e Q dependem de x e y).

Nosso objetivo é calcular o trabalho realizado por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C . Dividimos a curva C em pequenos trechos $P_{i-1}P_i$, com comprimentos Δs_i , utilizando uma partição do intervalo de parâmetros $[a, b]$ em subintervalos

de igual tamanho. Escolhemos um ponto $P_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ em cada subintervalo, correspondente ao parâmetro t_i^* .

Se Δs_i for suficientemente pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i ocorre aproximadamente na direção do vetor unitário tangente $T(t_i^*)$. Assim, o trabalho realizado pela força F ao deslocar a partícula nesse trecho é dado aproximadamente por:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

Portanto, o trabalho total ao longo de C é a soma das contribuições em cada subintervalo, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) em C .

Intuitivamente, à medida que aumentamos o número de divisões da curva, as aproximações se tornam mais precisas. Assim, definimos o trabalho W realizado por um campo de força F como o limite de uma soma de Riemann, representado pela seguinte integral:

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

A equação acima indica que o trabalho W é uma integral calculada em relação ao comprimento do arco, utilizando apenas a componente tangencial da força.

Agora, suponha que a curva C seja descrita por uma equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, com t variando no intervalo $[a, b]$. Neste caso, o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) / |\mathbf{r}'(t)|$$

Substituindo na integral, podemos expressar W como:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Essa forma integral simplificada é frequentemente abreviada como:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e é amplamente utilizada em diversas áreas da física, como no cálculo de trabalho e fluxo.

Finalmente, definimos a **integral de linha de um campo vetorial contínuo** ao longo de uma curva C de maneira formal:

Definição 2.4 Seja F um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave C , parametrizada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, com $t \in [a, b]$. Então, a integral de linha de F ao longo de C é dada por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

3 O teorema fundamental das integrais de linha

3.1 Teorema fundamental do cálculo

No cálculo inicial da graduação aprendemos o Teorema Fundamental do Cálculo, que nos diz que se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Exemplo 3.1.1 Calcule a integral $\int_1^3 e^x dx$.

Solução: A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte e sabemos que uma primitiva é $F(x) = e^x$, logo, pelo Teorema Fundamental, temos

$$\int_a^b e^x dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

O Teorema Fundamental das Integrais de Linha é um dos principais resultados do cálculo vetorial e estabelece uma relação entre integrais de linha e campos conservativos. Ele afirma que, para um campo vetorial gradiente de uma função escalar, a integral de linha ao longo de um caminho depende apenas dos pontos inicial e final, independentemente da trajetória percorrida.

3.2 Enunciado do teorema

Se considerarmos o vetor gradiente ∇f de uma função f , definida em duas ou três variáveis, como uma generalização da derivada de f , o teorema a seguir pode ser interpretado como uma extensão do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha.

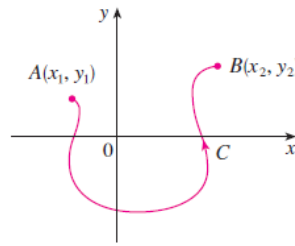
Teorema 3.2.1 Considere C uma curva suave parametrizada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$. Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis, cujo vetor gradiente ∇f seja contínuo ao longo de C . Então:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

O Teorema acima estabelece que é possível calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo (isto é, o campo vetorial gradiente de uma função potencial f) apenas conhecendo os valores de f nos pontos extremos da curva C . Mais precisamente, ele afirma que a integral de linha de ∇f corresponde à variação total de f . Quando f é uma função de duas variáveis e C é uma curva plana com ponto inicial $A(x_1, y_1)$ e ponto final $B(x_2, y_2)$, como ilustrado na Figura 48, o Teorema se expressa da seguinte maneira:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Figura 48 - C é uma curva plana com ponto final e inicial

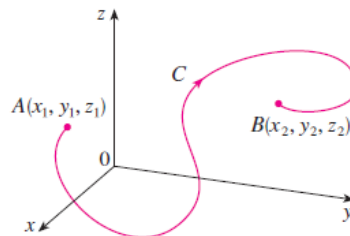


Fonte: Stewart (2013)

Se f for uma função de três variáveis e C uma curva espacial conectando o ponto inicial $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto final $B(x_2, y_2, z_2)$, como ilustrado na Figura 49, então o resultado é dado por:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Figura 49 - C é uma curva espacial com ponto final e inicial



Fonte: Stewart (2013)

Em outras palavras, seja C uma curva suave e orientada positivamente que conecta dois pontos A e B no espaço, mas podemos pensar também no plano. Se um campo vetorial F for conservativo, então a integral de linha de F ao longo de C é dada por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Isso significa que a integral de linha não depende do caminho seguido entre os pontos A e B , mas apenas dos valores da função potencial f nos extremos da curva.

3.3 Consequências

- Se um campo vetorial F for conservativo, então a integral de linha em qualquer curva fechada será sempre zero:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

- Esse resultado permite simplificar o cálculo de integrais de linha em problemas físicos, como em mecânica e eletromagnetismo.

3.4 Aplicações

O Teorema Fundamental das Integrais de Linha tem diversas aplicações:

- **Trabalho realizado por um campo de forças conservativo:** Se F representa uma força conservativa, o trabalho realizado ao mover um objeto de A para B depende apenas da energia potencial nos pontos iniciais e finais.
- **Eletrostática:** O campo elétrico de cargas puntuais é conservativo, permitindo calcular a diferença de potencial elétrico sem depender do caminho.
- **Testes de conservatividade:** Se a integral de linha ao longo de uma curva fechada não for zero, o campo não é conservativo.

Observação 3.4.1

Se o campo é conservativo, então

a) Existe uma função escalar em R^2 , $f(x, y)$ tal que:

$$F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

e em R^3 , $f(x, y, z)$ tal que:

$$F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

b) A integral de linha não depende do caminho seguido entre os pontos A e B , mas apenas dos valores da função potencial f nos extremos da curva, ou seja, só depende o ponto final e inicial.

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

c) A integral de linha em qualquer curva fechada será sempre zero:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Qualquer dos casos acima implicam que $\text{rot}F = 0$, lê-se o rotacional de F , conceito que será abordado no tópico 4.8.1, mas a recíproca não é verdadeira.

3.5 Condição para um campo ser conservativo

Um campo vetorial $F = (P, Q, R)$ é conservativo se existir uma função f tal que $F = \nabla f$. Uma condição necessária (e suficiente, se o domínio for simplesmente conexo) para a conservatividade é que as derivadas parciais cruzadas sejam iguais:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

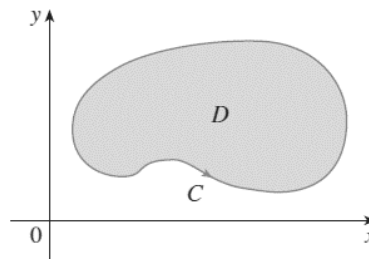
Se essas condições forem atendidas, então o campo é conservativo e pode ser expressado como o gradiente de uma função potencial.

O Teorema Fundamental das Integrais de Linha simplifica o cálculo de integrais de linha para campos conservativos, mostrando que elas dependem apenas dos valores nos pontos extremos. Ele tem aplicações importantes na física e na engenharia, especialmente no estudo de forças conservativas e potenciais escalares.

4 Teorema de Green

O Teorema de Green é um dos resultados fundamentais do cálculo vetorial, estabelecendo uma relação entre a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada, como ilustrado na Figura 50, e a integral de superfície da divergência desse campo sobre a região delimitada pela curva. Ele pode ser visto como um caso bidimensional do Teorema de Stokes e tem aplicações em áreas como a mecânica dos fluidos e o eletromagnetismo.

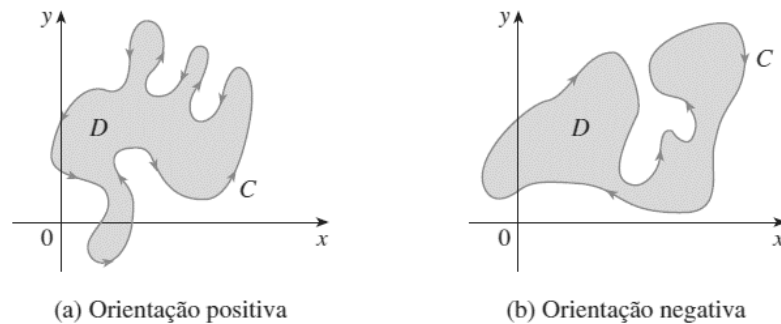
Figura 50 – Curva fechada



Fonte: Stewart (2013)

Segundo Stewart (2013), ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a orientação positiva de uma curva fechada simples C refere-se ao *sentido anti-horário* de C , percorrido uma só vez. Assim, se C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando $\mathbf{r}(t)$ percorre C . (Veja a Figura 51.)

Figura 51 – Orientação das curvas



Fonte: Stewart (2013)

4.1 Enunciado do teorema

Teorema 4.1.1 Seja C uma curva plana fechada, simples, contínua por partes e orientada positivamente (contrária ao sentido horário), delimitando uma região plana D . Seja $F = (P, Q)$ um campo vetorial de classe C^1 definido em uma região que contém D . O Teorema de Green afirma que:

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

onde:

- $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções continuamente diferenciáveis,
- dA representa um elemento de área da região R ,

A notação

$$\oint_C P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \oint_C P dx + Q dy.$$

Onde \oint_C representa uma integral de linha ao longo da curva C , percorrida no sentido anti-horário.

Outra notação para a curva na fronteira de D , positivamente orientada e ∂D , daí a equação do Teorema de Green pode ser escrita como (*denotaremos equação 1*)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

O Teorema de Green, em sua formulação geral apresentada no Teorema 4.7.1.1, possui uma demonstração tecnicamente desafiadora. No entanto, iniciaremos com uma demonstração para um caso particular, onde a região considerada é tanto do tipo I quanto do tipo II. Essas regiões, denominadas regiões simples, permitem um tratamento mais acessível e didático.

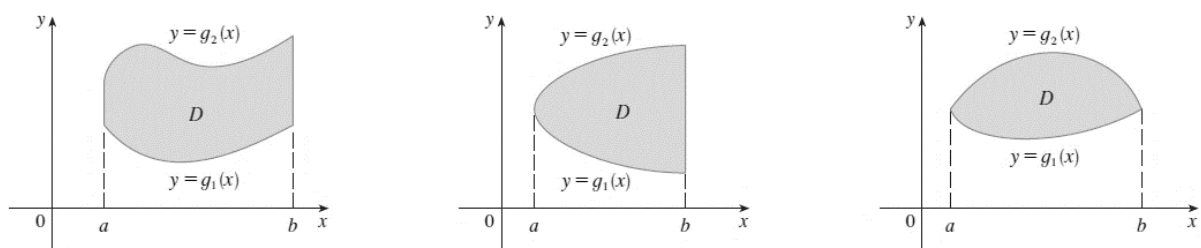
Observação 4.1.2

Uma região plana D é dita do tipo I se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x , ou seja,

$$D = \{(x, y)/a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 52.

Figura 52 - Regiões do tipo I



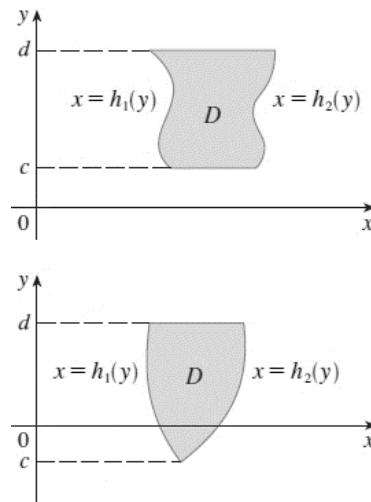
Fonte: Stewart (2013)

Consideraremos também regiões planas do tipo II, que podem ser expressas como

$$D = \{(x, y)/c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$$

onde h_1 e h_2 são contínuas. Essas duas regiões estão ilustradas na Figura 53.

Figura 53 - Regiões do tipo II



Fonte: Stewart (2013)

Demonstração do Teorema de Green nos casos onde d é uma região simples

Observe que o teorema de Green estará demonstrado se mostrarmos que

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

e

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

(denotaremos por equação 2 e 3, respectivamente)

Vamos demonstrar a Equação 1 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y)/a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

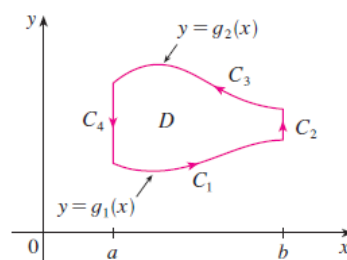
onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue (denotaremos equação 4):

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, onde C como a união das quatro curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 mostradas na Figura 54.

Figura 54 – Curvas que compõem C



Fonte: Stewart (2013)

Sobre C_1 tomamos x como parâmetro e escrevemos as equações paramétricas como $x = x, y = g_1(x), a \leq x \leq b$. Logo,

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita, então

podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x, y = g_2(x), a \leq x \leq b$. Portanto,

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = -\int_{-C_3} P(x, y) dx = -\int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante e,

assim, $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) dx$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y) dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

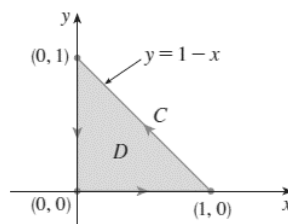
a Equação 3 pode ser demonstrada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II. Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green.

Exemplo 4.1.3 Calcule

$$\int_C x^4 dx + xy dy,$$

onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

Figura 55 – Curva Triangular C



Fonte: Stewart (2013)

Apesar desta integral poder ser calculada pelos métodos usuais, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (como visto na Figura 55). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\begin{aligned}\int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

4.2 Interpretação e aplicações

O teorema pode ser interpretado da seguinte maneira:

- A integral de linha do campo vetorial F ao longo da fronteira C mede a circulação do campo ao redor de C .
- A integral dupla da expressão $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sobre a região D mede a tendência do campo de girar dentro da região.
- Assim, o teorema afirma que a circulação total ao longo da fronteira é igual à soma das rotações internas do campo dentro da região D .

O Teorema de Green tem diversas aplicações em matemática e física, tais como:

Cálculo de áreas: Como a área de uma região D é

$$\iint_D 1 dA$$

desejamos que escolher P e Q de tal modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Existem várias possibilidades:

$$P = 0 \quad P = -y \quad P = -\frac{1}{2}y$$

$$Q = x \quad Q = 0 \quad Q = \frac{1}{2}x$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

$$A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

Exemplo: Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução: A elipse tem equações paramétricas $x = acost$ e $y = bsent$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) \, dt - (b \sin t)(-a \sin t) \, dt \\
&= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab
\end{aligned}$$

4.3 Extensões do teorema

O Teorema de Green pode ser considerado um caso particular do Teorema de Stokes, que generaliza essa relação para superfícies em três dimensões. Além disso, pode ser modificado para tratar regiões com buracos internos ou curvas orientadas no sentido horário.

O Teorema de Green é uma poderosa ferramenta matemática que conecta integrais de linha e integrais de área. Ele facilita cálculos que seriam difíceis de realizar diretamente e possui aplicações fundamentais na física e na engenharia.

5 Rotacional e divergente

Definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais e que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

5.1 Rotacional

Seja $F(x, y) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ um campo vetorial em R^3 , onde as funções P, Q, R possuem derivadas parciais. O rotacional de F é um novo campo de R^3 dado por

$$\text{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Para facilitar a memorização, essa expressão pode ser escrita com a notação do operador diferencial ∇ também conhecido como “del”, definido

$$\nabla = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Quando aplicado a uma função escalar f , resulta no gradiente de f :

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se considerarmos ∇ como um vetor cujas componentes são os operadores diferenciais parciais,

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$, o rotacional de F pode ser expresso formalmente pelo determinante:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

que resulta exatamente na definição anterior:

$$\text{rot } F = \nabla \times F.$$

Exemplo 5.1.1 Se $F(x, y, z) = xzi + xyzj - y^2k$, determine $\text{rot}F$.

Solução:

Usando a equação

$$\begin{aligned}\text{rot } F &= \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \text{ temos} \\ \text{rot } F &= \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial(-y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \right] i + \left[\frac{\partial(-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right] j + \left[\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} \right] k \\ &= (-2y - xy)i - (0 - x)j + (yz - 0)k \\ &= -y(2 + x)i + xj + yzk.\end{aligned}$$

Lembre-se de que o gradiente de uma função f de três variáveis é um campo vetorial sobre R^3 , de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é 0.

Teorema 5.1.2 Se f é uma função escalar de três variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então $\text{rot}(\nabla f) = 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\text{rot}(\nabla f) &= \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) k \\ &= 0i + 0j + 0k = 0.\end{aligned}$$

Isso decorre do Teorema de Clairaut, que garante a igualdade das derivadas parciais mistas sob essa hipótese. Como um campo vetorial conservativo é da forma $F = \nabla f$, o Teorema 4.8.1.2 pode ser reescrito como segue:

Se F é conservativo, então $\text{rot } F = 0$.

E assim obtemos um modo de verificar que um campo vetorial não é conservativo.

Exemplo 5.1.3 Mostre que o campo vetorial $F(x, y, z) = xzi + xyzj - y^2k$ não é conservativo.

Solução:

No exemplo anterior, mostramos que $\text{rot}F = -y(2 + x)i + xj + yzk$. Isso mostra que $\text{rot}F \neq 0$ e portanto, pelo Teorema 4.8.1.1, F não é conservativo. Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se F for definido em todo o espaço, a recíproca vale. (Mais especificamente, a recíproca vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, “não apresenta furos”.)

Teorema 5.1.4 Se F for um campo vetorial definido sobre todo R^3 cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot}F \neq 0$, F será um campo vetorial

conservativo.

Exemplo 5.1.5 Mostre que $F(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$ é um campo conservativo.

Solução:

Usando a equação

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \text{ temos}$$

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

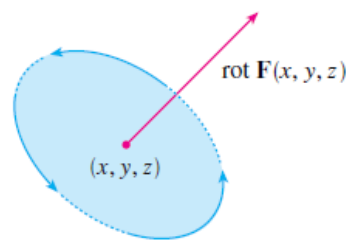
$$\nabla \times F = (6xyz^2 - 6xyz^2)\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k}$$

$$\nabla \times F = 0.$$

Como $\text{rot } F \neq 0$ e o domínio de F é R^3 , F é um campo vetorial conservativo pelo Teorema 5.1.4

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão ocorre quando F representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos. Partículas perto de (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de $\text{rot } F(x, y, z)$, e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 56). Se $\text{rot } F = 0$ no ponto P , então o fluido é isento de rotações em P e F é chamado irrotacional em P . Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou redemoinho em P . Se $\text{rot } F = 0$, uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se $\text{rot } F \neq 0$, a roda com pás giraria em torno de seu eixo.

Figura 56 – Comprimento do vetor rotacional



Fonte: Stewart (2013)

5.2 Divergente

Seja F um campo vetorial em R^3 da forma:

$F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, onde P, Q, R possuem derivadas parciais $(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z})$. O divergente de F é uma função escalar de três variáveis definida por, denotado de equação

9

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que $\text{rot } F$ é um campo vetorial, mas $\text{div } F$ é um campo escalar. Usando a notação do operador diferencial $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ o divergente pode ser expresso como o produto escalar entre ∇ e F , denotado de equação 10:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F$$

Exemplo 5.2.1 Se $F(x, y, z) = xzi + xyzj - y^2k$, determine $\text{div } F$.

Solução: Pela definição de divergente (Equação 9 ou 10), temos

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} = z + xz$$

Se F é um campo vetorial sobre R^3 , então $\text{rot } F$ também é um campo vetorial sobre R^3 . Como tal, podemos calcular seu divergente. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

Teorema 5.2.2 Se $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ é um campo vetorial em R^3 e as derivadas de segunda ordem de P, Q, R existem e são contínuas, então

$$\text{div } (\text{rot } F) = 0$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \text{div } \text{rot } F &= \nabla \cdot (\nabla \times F) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso decorre do Teorema de Clairaut, pois as derivadas parciais mistas se cancelam. Fisicamente, o divergente de um campo vetorial pode ser interpretado como a taxa líquida de fluxo que sai de um ponto.

Se $F(x, y, z)$ é a velocidade de um fluido (ou gás), então $\text{div } F(x, y, z)$ representa a taxa de variação total (com relação ao tempo) da massa do fluido (ou gás) escoando do ponto (x, y, z) por unidade de volume. Em outras palavras, $\text{div } F(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z) . Se $F = 0$, então F é dito incompressível.

5.3 Formas vetoriais do Teorema de Green

Segundo Stewart (2013), o operador divergente e rotacional nos permite formular o Teorema de Green em uma versão que será útil em aplicações futuras. Seja D uma região plana, C sua curva fronteira, P e Q funções que atendem às condições do Teorema de Green. Consideremos o campo vetorial $F = P i + Q j$. A integral de linha de F ao longo de C é dada por:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

Adicionalmente, ao tratar F como um campo vetorial no espaço tridimensional (R^3)

com terceira componente nula, isto é, $F = (P, Q, 0)$, podemos reinterpretar o cálculo considerando operações como o rotacional no espaço tridimensional.

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

Portanto, $(\text{rot } F) \cdot k = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \cdot k = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Uma segunda maneira é usando o $\text{div } F$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de F ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de F na região D delimitada por C .

6 Integrais de superfície

A relação entre a integral de superfície e a área de superfície é análoga à relação entre a integral de linha e o comprimento de arco. Enquanto a integral de linha pode medir o comprimento de uma curva (quando a função integrada é constante e igual a 1), a integral de superfície pode ser utilizada para medir a área de uma superfície em um caso similar.

Seja f uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S . A integral de superfície de f sobre S é definida de forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície coincida com a área da superfície S .

Para superfícies parametrizadas, onde S é descrita por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ dada por:

$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com (u, v) pertencendo a um domínio D no plano, a integral de superfície de f sobre S é definida como:

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

Neste caso, o termo $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|$ representa o fator de escala associado à parametrização, que corresponde à magnitude do vetor normal ao elemento infinitesimal da superfície.

Se $f(x, y, z) = 1$, então:

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv,$$

o que dá exatamente a área da superfície S .

No caso especial em que S é o gráfico de uma função de duas variáveis $z = g(x, y)$, a superfície pode ser parametrizada como:

$r(x, y) = (x, y, g(x, y))$, onde (x, y) pertencem a um domínio D no plano xy . A integral de superfície de f sobre S neste caso se torna:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

e, para $f(x, y, z)=1$, resulta na fórmula para a área da superfície:

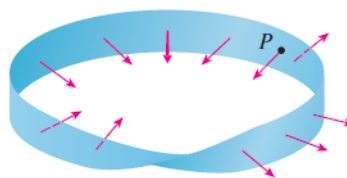
$$\text{Área de } S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Essas definições permitem generalizar o cálculo da área e da integral de superfície para diferentes contextos geométricos e aplicações físicas.

6.1 Orientação de superfícies

Para definir a integral de superfície de campos vetoriais, é fundamental introduzir o conceito de superfície orientada, a fim de excluir superfícies não orientáveis, como a faixa de Möbius mostrado na Figura 57. [Nomeado assim por causa do geômetra alemão August Möbius (1790–1868)].

Figura 57 - Uma faixa de Möbius



Fonte: Stewart (2013)

Uma superfície é dita orientável se é possível escolher um vetor normal em cada um de seus pontos, de forma que:

1. A superfície seja dividida em dois lados distintos (como "dentro e fora" ou "acima e abaixo").
2. O vetor normal varie continuamente ao longo de toda a superfície.

Essa continuidade na variação do vetor normal garante que a orientação da superfície seja bem definida, permitindo que cálculos como integrais de fluxo ou de superfície sejam realizados sem ambiguidades.

Exemplo de superfícies não orientáveis

Superfícies como a faixa de Möbius não podem ser orientadas, pois não é possível definir um vetor normal que seja contínuo em todos os seus pontos. O conceito de "lado" ou orientação simplesmente não se aplica de maneira consistente a essa superfície.

Importância na definição de integrais

A orientação é essencial porque a integral de superfície de um campo vetorial depende da direção do vetor normal escolhido. Em superfícies orientáveis, a integral considera o fluxo do campo vetorial \mathbf{F} através da superfície S , com a orientação do vetor normal \mathbf{n} . Para uma superfície orientável S , a integral é definida como:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

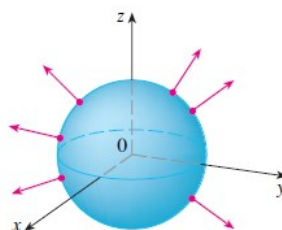
onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário orientado de maneira consistente em toda a superfície.

Essa definição torna o cálculo fisicamente interpretável, como o fluxo de um fluido atravessando uma superfície em uma direção bem definida.

Para uma superfície fechada, ou seja, uma superfície que delimita completamente uma região sólida E , a convenção de orientação é definida da seguinte forma:

- A **orientação positiva** corresponde aos vetores normais que apontam para fora da região E , como ilustrado na Figura 58.

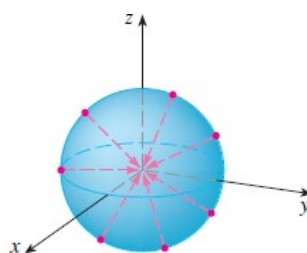
Figura 58 - Orientação positiva



Fonte: Stewart (2013)

- A **orientação negativa** é atribuída aos vetores normais que apontam para dentro da região E , como ilustrado na Figura 59.

Figura 59 - Orientação negativa



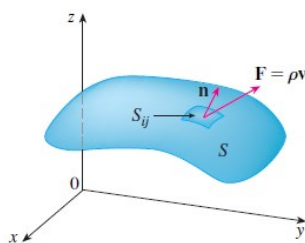
Fonte: Stewart (2013)

6.2 Integrais de superfície de campos vetoriais

Considere S como uma superfície orientada com vetor unitário normal \mathbf{n} , e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ fluindo através de S . Aqui, S é interpretada como uma superfície imaginária que não impede o fluxo do fluido, semelhante a uma rede de pesca atravessada por uma corrente. A taxa de fluxo de massa por unidade de área é dada por $\rho\mathbf{v}$.

Se dividirmos S em pequenos elementos S_{ij} , como na Figura 60, cada um aproximadamente plano, a massa do fluido que atravessa S_{ij} na direção normal \mathbf{n} por unidade de tempo pode ser aproximada por $(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$, onde ρ , \mathbf{v} e \mathbf{n} são avaliados em algum ponto de S_{ij} , e $A(S_{ij})$ é a área do elemento S_{ij} . Aqui, $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ representa o componente do vetor $\rho\mathbf{v}$ na direção de \mathbf{n} .

Figura 60 – Divisão de S



Fonte: Stewart (2013)

Somando essas quantidades para todos os elementos e tomando o limite conforme o tamanho dos elementos tende a zero, obtemos, de acordo com a definição de integral de superfície, a expressão:

$$\iint_S (\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Esse tipo de integral de superfície é amplamente utilizado em física, mesmo quando \mathbf{F} não é diretamente relacionado a $\rho\mathbf{v}$. Ela é conhecida como a integral de fluxo de \mathbf{F} através de S , representando o fluxo total de \mathbf{F} atravessando a superfície orientada S .

Definição 6.2.1 *Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S , com vetor normal unitário \mathbf{n} . A integral de superfície de \mathbf{F} sobre S é dada por:*

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Essa integral é interpretada como o fluxo de \mathbf{F} através da superfície S . O fluxo mede a quantidade do campo \mathbf{F} que atravessa S na direção de \mathbf{n} , considerando tanto a magnitude de \mathbf{F} quanto sua orientação relativa à normal da superfície.

A definição acima, em palavras, afirma que a integral de superfície de um campo vetorial \mathbf{F} sobre uma superfície S é equivalente à integral de superfície da componente normal

de \mathbf{F} em relação a S . Isso significa que, ao calcular a integral de superfície, consideramos apenas a parte do campo \mathbf{F} que atravessa S na direção perpendicular à sua superfície.

Matematicamente, isso é expresso como:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário à superfície S e dS representa o elemento infinitesimal de área da superfície. Se a superfície S é parametrizada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, dada por:

por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, então o vetor normal \mathbf{n} pode ser obtido utilizando o produto vetorial dos vetores tangentes $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Substituindo isso na integral, a equação é reformulada como:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

onde D é o domínio dos parâmetros u e v . Isso conecta a geometria da superfície parametrizada ao cálculo do fluxo do campo vetorial \mathbf{F} através de S .

6.3. Aplicações

As integrais de superfície têm diversas aplicações importantes:

- **Fluxo de um fluido:** mede a quantidade de fluido passando através de uma superfície.
- **Lei de Gauss (Eletrostática e Gravitação):** calcula o fluxo de um campo elétrico ou gravitacional através de uma superfície fechada.
- **Teorema do divergente (Teorema de Gauss):** estabelece a relação entre a integral de superfície de um campo vetorial e a integral de volume de sua divergência.

6.4. Exemplos clássicos

- **Fluxo de um campo radial através de uma esfera:** Se $\mathbf{F} = (x, y, z)$, a integral de superfície sobre uma esfera centrada na origem mostra que o fluxo depende apenas do raio da esfera.
- **Área de uma superfície parametrizada:** A integral da função constante $f(x, y, z) = 1$ sobre S fornece a área total da superfície.

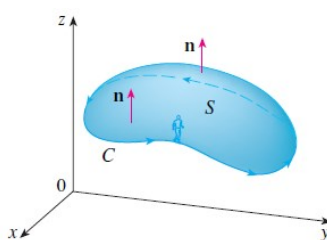
As integrais de superfície são uma ferramenta essencial do cálculo vetorial, permitindo a análise de fluxos e áreas em superfícies tridimensionais.

7 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma

região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 61 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário \mathbf{n} . A orientação de S induz a orientação positiva da curva fronteira C mostrada na Figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de \mathbf{n} , então a superfície estará sempre à sua esquerda.

Figura 61 - Superfície orientada com vetor normal unitário \mathbf{n}



Fonte: Stewart (2013)

Teorema 7.1 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é uma curva C , fechada, simples e também suave por partes, com orientação positiva. Suponha que S está imersa em um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

onde P, Q, R possuem derivadas parciais contínuas em uma região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Nessas condições, o Teorema de Stokes assegura que:

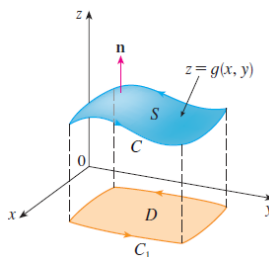
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

onde $\nabla \times \mathbf{F}$ é o rotacional do campo \mathbf{F} , \mathbf{n} é o vetor normal unitário à superfície S , orientado de forma consistente com a orientação positiva da curva C , e dS é o elemento de área da superfície. Esse teorema mostra que a circulação de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada está relacionada com a integral de superfície do rotacional desse campo sobre uma superfície que tem essa curva como fronteira. Assim, o Teorema de Stokes pode ser visto como uma generalização do Teorema de Green para superfícies tridimensionais.

Demonstração:

Considere a superfície S como ilustrada na Figura 62 abaixo, descrita por $z = g(x, y)$, onde $(x, y) \in D$, sendo D a projeção de S no plano xy .

Figura 62 - Teorema do Stokes



Fonte: Stewart (2013)

A fronteira C_1 corresponde à projeção de C no plano xy . Suponha que g seja uma função contínua com derivadas parciais de segunda ordem também contínuas. Para demonstrar o Teorema de Stokes neste caso, é suficiente provar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\oint_C P \, dx &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \, dx - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy, \\ \oint_C Q \, dy &= \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy - \frac{\partial Q}{\partial z} \, dy \, dz, \\ \oint_C R \, dz &= \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} \, dy \, dz - \frac{\partial R}{\partial x} \, dz \, dx.\end{aligned}$$

Prova da primeira igualdade

Começando pelo lado esquerdo da igualdade, aplicamos o Teorema de Green à projeção no plano xy . Temos:

$$\oint_C P(x, y, z) \, dx = \oint_{C_1} P(x, y, g(x, y)) \, dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

No lado direito da igualdade, como mostrado no capítulo 5, segue que:

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \, dx - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

As expressões obtidas para os dois lados são idênticas, o que prova a primeira igualdade.

Prova das demais igualdades

Os mesmos raciocínios podem ser estendidos às outras duas igualdades. Para

$$\oint_C Q \, dy \text{ e } \oint_C R \, dz,$$

as derivadas parciais e os elementos diferenciais envolvidos conduzem às expressões correspondentes, usando projeções no plano apropriado e aplicando o Teorema de Green de forma análoga.

7.1 Ideia geométrica do Teorema de Stokes

É evidente que o Teorema de Stokes pode ser interpretado como uma extensão do Teorema de Green para três dimensões. Em essência, o que o Teorema de Stokes nos permite concluir é que calcular o fluxo do rotacional de um campo vetorial através de uma superfície orientada é equivalente a calcular a integral de linha desse campo ao longo da curva que forma a fronteira dessa superfície. Essa correspondência revela uma profunda conexão entre integrais

de superfície e integrais de linha, evidenciando a relação entre o comportamento local do campo (através do rotacional) e sua manifestação global ao longo da curva de contorno. O raciocínio subjacente ao Teorema de Stokes é análogo ao do Teorema de Green. Nele, as integrais de linha calculadas ao redor das fronteiras de todas as áreas elementares que compõem a superfície S acabam se anulando mutuamente nas bordas compartilhadas. Isso ocorre porque cada borda interna contribui com integrais em sentidos opostos para as duas superfícies adjacentes. Dessa forma, resta apenas a contribuição da circulação ao longo da curva fechada C , que é a fronteira da superfície S . Assim, o Teorema de Stokes pode ser sintetizado na expressão:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Essa formulação ressalta a conexão entre a circulação de \mathbf{F} ao longo da curva C e o comportamento local do campo vetorial sobre S .

8 Teorema do divergente

No tópico 5.3, reescrevemos o Teorema de Green na sua forma vetorial:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA$$

onde C é a fronteira positivamente orientada da região plana D . Este teorema pode ser estendido para campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , desde que sejam feitas suposições adequadas, levando ao Teorema do Divergente, denotada por equação 1.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV$$

onde S é a superfície de fronteira da região sólida E .

Maiores detalhes:

- E é uma região sólida no espaço tridimensional;
- S é a superfície fechada que delimita E , orientada positivamente (com vetor normal \mathbf{n} apontando para fora de E);
- \mathbf{F} é um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas;
- $\nabla \cdot \mathbf{F}$ é a divergência de \mathbf{F} .

Semelhança com os Teoremas de Green e Stokes

O Teorema do Divergente compartilha uma estrutura comum com os Teoremas de Green e Stokes, pois também estabelece uma relação entre a integral de uma derivada de uma função (neste caso, a divergência de \mathbf{F}) sobre uma região e a integral da função original \mathbf{F} sobre a fronteira dessa região. Essa conexão é uma manifestação do princípio fundamental de que as

propriedades locais de um campo vetorial (como sua divergência ou rotacional) determinam seu comportamento global em uma região e na sua fronteira.

Aplicação a regiões sólidas simples

O teorema é particularmente simples de aplicar a regiões sólidas que são simultaneamente dos tipos 1, 2 e 3 (veja as Figuras 67, 69 e 70)— ou seja, aquelas que podem ser descritas por limites bem definidos para x , y e z . Exemplos incluem elipsóides, caixas retangulares e outras regiões sólidas simples. Nessas situações, a integral de superfície sobre S pode ser substituída por uma integral tripla sobre E , facilitando os cálculos.

Orientação positiva

A orientação positiva, como discutido no tópico 4.9.1, segue a convenção de que os vetores normais unitários n apontam para fora da região sólida E . Essa escolha é fundamental para garantir a consistência nos cálculos e na interpretação do fluxo através de S .

Teorema 8.1 Seja E uma região sólida simples, e S a superfície que constitui a fronteira de E , orientada positivamente (ou seja, com os vetores normais apontando para fora da região sólida). Seja F um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contém E . Então, o Teorema do Divergente (ou Teorema de Gauss) afirma que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de F pela fronteira de E é igual à integral tripla da divergência de F em E .

Em palavras, o Teorema do Divergente, também conhecido como Teorema de Gauss ou Teorema de Green-Gauss, é um dos resultados fundamentais do cálculo vetorial. Ele estabelece uma relação entre o fluxo de um campo vetorial através da superfície fechada que delimita um volume e a divergência desse campo dentro do volume.

Demonstração:

Seja $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Então $\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, assim

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} \, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Se n é o vetor normal unitário para fora de S , então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema do Divergente é

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_S P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_S Q \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS\end{aligned}$$

Portanto, para demonstrar o Teorema do Divergente, é suficiente demonstrar as três seguintes equações, denotadas por 2, 3 e 4 respectivamente:

$$\iint_S P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} \, dV$$

$$\iint_S Q \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} \, dV$$

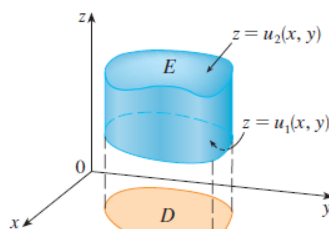
$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV$$

Para demonstrarmos a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1 (veja Figura 63):

$$D = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy .

Figura 63 – Região sólida do tipo 1



Fonte: Stewart (2013)

Pela Equação

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA$$

temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right] dA$$

e, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, denotada por equação 5,

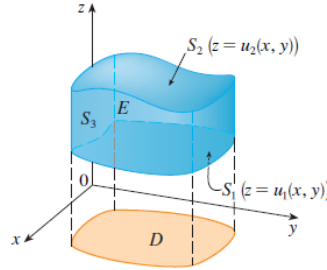
$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] \, dA.$$

A fronteira S é constituída por três partes: a superfície inferior S_1 , a superfície superior S_2 , e, possivelmente, uma superfície vertical S_3 , que se situa acima da curva fronteira

de D . (Veja a Figura 64. S_3 pode não aparecer, tal como no caso de uma esfera.) Observe que em S_3 temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, porque \mathbf{k} é vertical e \mathbf{n} é horizontal, e assim

$$\iint_{S_3} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_3} 0 dS = 0$$

Figura 64 – Teorema do Divergente



Fonte: Stewart (2013)

Logo, independentemente da existência de uma superfície vertical, podemos escrever a equação 6

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS$$

A equação de S_2 é $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e o vetor normal que sai de \mathbf{n} aponta para cima.

Da Equação

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

(com \mathbf{F} substituído por $R \mathbf{k}$), temos

$$\iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y)) dA$$

Sobre S_1 temos $z = u_1(x, y)$, mas aqui a normal \mathbf{n} aponta para baixo, então multiplicamos por -1 :

$$\iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_D R(x, y, u_1(x, y)) dA$$

Portanto, a Equação 6 fornece

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

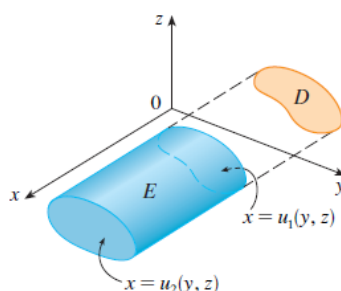
$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

As Equações 2 e 3 são demonstradas de modo análogo, usando as expressões para E como uma região do tipo 2 ou do tipo 3. A título de curiosidade, uma região sólida do tipo 2 é da forma:

$$D = \{(x, y, z)/(y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\},$$

onde, desta vez, D é a projeção de E sobre o plano yz (veja a Figura 65). A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$ e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$.

Figura 65 – Região sólida do tipo 2



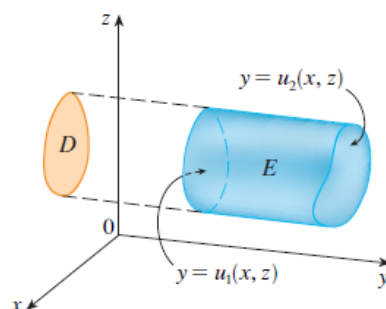
Fonte: Stewart (2013)

e uma região sólida do tipo 3 é da forma:

$$D = \{(x, y, z)/(x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\},$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xz , $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 66).

Figura 66 – Região sólida do tipo 3



Fonte: Stewart (2013)

Esse teorema pode ser interpretado como uma generalização da ideia de conservação de fluxo. Ele afirma que o fluxo total de F para fora da superfície S é igual à soma das taxas de variação (ou fontes e sumidouros) do campo dentro do volume V . Isso tem aplicações importantes em diversas áreas da física e da engenharia, como na eletrostática (Lei de Gauss), na dinâmica de fluidos e na termodinâmica. Em resumo, o Teorema do Divergente é uma ferramenta poderosa para converter integrais de superfície em integrais de volume, simplificando cálculos em diversas áreas da matemática e da física.

APÊNDICE C – DETALHES HISTÓRICOS DOS PERSONAGENS CITADOS NO TEXTO

O conceito de vetores e o desenvolvimento do cálculo vetorial têm suas origens enraizadas em uma longa trajetória histórica, marcada por avanços graduais em geometria, álgebra e análise. Segundo Boyer (2011), em *A History of Mathematics*, a evolução dessa área reflete a busca contínua por ferramentas matemáticas capazes de descrever fenômenos espaciais e físicos de maneira mais precisa e abrangente.

A noção de vetores começou a surgir no contexto da geometria clássica, com os gregos antigos estudando segmentos de reta orientados para descrever magnitudes direcionais, como forças e deslocamentos. Embora não possuíssem uma formalização algébrica, conceitos como soma de segmentos usando a lei do paralelogramo já eram conhecidos e aplicados. Sua representação como conjuntos ordenados de números reais só foi possível após a ampliação dos sistemas numéricos além dos números complexos.

Durante o Renascimento, o avanço na álgebra e na geometria analítica, introduzida por René Descartes no século XVII, pavimentou o caminho para uma representação mais precisa de objetos geométricos no espaço tridimensional. As coordenadas cartesianas possibilitaram associar pontos e segmentos a números e operações matemáticas, estabelecendo a base para um formalismo mais robusto.

Hermann Grassmann, em sua obra monumental *Ausdehnungslehre*, publicada em 1844, ultrapassou as ideias do espaço tridimensional euclidiano. Ele explorou espaços de dimensões superiores e desenvolveu álgebras específicas para esses sistemas. Seu trabalho permitiu considerar uma extensão dos números complexos para os números hipercomplexos. Grassmann deu um passo crucial ao questionar a necessidade de abandonar a propriedade comutativa da multiplicação, que era o principal obstáculo à generalização. Além disso, sua obra incluiu a teoria do cálculo tensorial, que desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria da relatividade. Infelizmente, as ideias de Grassmann não foram compreendidas ou apreciadas adequadamente por seus contemporâneos, mas com o tempo sua importância foi reconhecida. Em 1862, ele publicou uma segunda edição de sua obra, revisada e ampliada, embora, mais uma vez, tenha recebido pouco reconhecimento imediato.

Um ano antes da publicação da primeira edição do *Ausdehnungslehre*, William Rowan Hamilton desenvolveu a ideia fundamental dos quaternions, um sistema que ampliava os números complexos para descrever rotações no espaço tridimensional. Ao abandonar a comutatividade da multiplicação, Hamilton introduziu uma ferramenta poderosa para a

mecânica e a física matemática. Ele também demonstrou coragem ao abrir mão da propriedade comutativa da multiplicação para dar forma à sua teoria. Em 1853, publicou *Lectures on Quaternions*, um trabalho que foi mais bem compreendido e aceito do que o de Grassmann, talvez por sua abordagem menos abstrata. Hamilton dedicou o restante de sua vida ao avanço e à consolidação da teoria dos quaternions, acreditando firmemente que essa teoria continha a chave para a solução de muitas questões matemáticas.

No entanto, as ideias de Hamilton enfrentaram resistência, possivelmente devido à complexidade inerente à álgebra envolvida. Como consequência, outros matemáticos buscaram desenvolver alternativas próprias para abordar os mesmos problemas.

Peter Guthrie Tait, discípulo de Hamilton, dedicou sua vida ao estudo dos quaternions. Ele gerou um intenso debate entre matemáticos que se prolongou por cinquenta anos. Seu maior opositor foi Josiah Willard Gibbs, que no final do século XIX desenvolveu o cálculo vetorial como uma simplificação e generalização dos quaternions para o espaço tridimensional. Ele introduziu operações fundamentais, como o produto escalar e o produto vetorial, que se tornaram ferramentas indispensáveis na física e na engenharia. Gibbs buscou uma abordagem prática e acessível, facilitando a adoção do cálculo vetorial na análise de problemas científicos. Um dos alunos de Gibbs, Edwin Bidwell Wilson, consolidou essas ideias em um livro de 1901, estabelecendo o cálculo vetorial como uma disciplina independente. Essa consolidação marcou o início do uso generalizado dos vetores na física, especialmente na teoria do eletromagnetismo de Maxwell.

É interessante notar que a ideia central desse debate tinha raízes no *Ausdehnungslehre* de Grassmann. Na prática, o problema foi solucionado pelo cálculo tensorial, que é fundamental para descrever as interações gravitacionais em um espaço-tempo curvo, de Grassmann, mais tarde aprimorado por C. G. Ricci, que publicou um livro sobre o tema em 1888. Inicialmente, esse trabalho recebeu pouca atenção, sendo incorporado por Einstein apenas em sua teoria da relatividade, onde obteve ampla aceitação. No início do século XX, a teoria da relatividade resgatou as contribuições de Grassmann, quando a formulação da relatividade geral de Einstein evidenciou a necessidade de uma linguagem matemática mais sofisticada. Isso demonstrou que as ideias de Grassmann estavam pelo menos cinquenta anos à frente de seu tempo.

Esse rico panorama histórico evidencia como os conceitos de álgebra vetorial, inicialmente fundamentados em ideias geométricas e depois ampliados em abstrações algébricas, foram moldados por diferentes pensadores que, mesmo enfrentando resistência, pavimentaram o caminho para as aplicações modernas. Atualmente, os vetores são estudados

tanto em sua interpretação geométrica, como segmentos orientados no espaço tridimensional, resultado do trabalho de Gibbs, quanto sob a perspectiva algébrica, como elementos de espaços n -dimensionais, amplamente fundamentados no trabalho de Grassmann. A confluência dessas abordagens mostra que as contribuições de Grassmann, Hamilton, Gibbs e outros foram interdependentes e cruciais para o desenvolvimento das ciências matemáticas e físicas modernas.

O trabalho desses matemáticos ilustra como a evolução de conceitos abstratos, muitas vezes à frente de seu tempo, pode ser impulsionada pela busca por aplicações concretas, unindo a elegância da teoria à utilidade prática.

- Hermann Grassmann

Figura 67 – Grassmann



Fonte: ime.unicamp.br/~vaz/grassmann.htm

(Stettin, 1809 – 1705) Ele nasceu em uma época em que pertencia à Prússia, e faleceu na mesma cidade em 1877, mas já como Alemanha. Nos dias atuais essa cidade se chama Szczecin e pertence à Polônia.

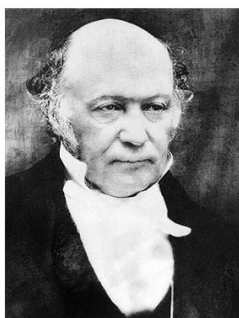
A sua história é um dos melhores exemplos de "Tragédia Matemática": um obscuro professor de escola secundária em uma cidadezinha qualquer que fez uma das maiores contribuições matemáticas da história, mas que de tão avançada para sua época foi praticamente ignorada pelos seus contemporâneos sendo apercebida apenas muito anos depois. Elas se encontram na sua obra-prima *Die Lineale Ausdehnungslehre*, que paradoxalmente constitui-se num exemplo de uma das obras mais importantes e menos lidas da humanidade. Na verdade, existem dois "*Die Ausdehnungslehre*". O primeiro é de 1844 e pouquíssimas edições foram vendidas - lidas menos ainda.

O segundo, de 1873, não se trata de uma segunda edição, mas sim de um texto totalmente reescrito na tentativa de torná-lo mais claro. Em resumo, o que Grassmann nos ensina é como multiplicar vetores. Qualquer estudante de Ciências sabe a importância do conceito de vetor mas na época dele poucos tinham noção da sua importância e para piorar mais ainda a situação de Grassmann, no sentido de tornar a sua obra acessível, a sua visão do conceito

de vetor era tão abstrata, embora nos moldes da nossa visão atual, que poucos foram capazes à época de apreciá-la, quanto mais de compreendê-la. Grassmann definiu o produto exterior de vetores e a álgebra que hoje leva o seu nome e que é hoje de importância fundamental em muitas áreas da Matemática e da Física. Essa estrutura, diga-se de passagem, é muito mais geral que a chamada álgebra vetorial devida a Gibbs e ensinada aos estudantes de Ciências em seu primeiro ano na universidade - o custo pela generalidade é a abstração! A "Tragédia Grassmaniana" se completa com o seu desânimo devido ao desinteresse de seus contemporâneos pelo seu trabalho e ele passou a estudar mais profundamente Sânscrito, outro de seus interesses. Já seu dicionário de Sânscrito teve uma repercussão espetacular e continua até hoje uma referência fundamental para aqueles que ainda estudam essa língua.

- William Rowan Hamilton

Figura 68 – Hamilton



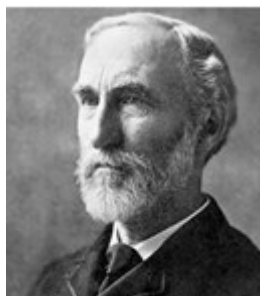
Fonte: Tomás Fernández (2025)

(Dublin, 1805 – 1865) Matemático irlandês. Um talento precoce, ele treinou no Trinity College Dublin, onde mais tarde ensinaria astronomia, e publicou aos 22 anos a Teoria dos Sistemas de Raios (1827), um trabalho focado na refração da luz que seria a primeira de suas muitas contribuições para a óptica e a ciência em geral.

Físico, astrônomo e filósofo, além de matemático, William Rowan Hamilton concebeu a álgebra como uma ciência do tempo puro e orientou sua pesquisa para uma matematização sistemática do mundo físico. Ele estruturou a teoria dos números complexos, que ele definiu como pares de números reais, na qual ele definiu uma lei da composição comutativa. De particular importância é sua contribuição sobre a teoria dos quaternions e hipernúmeros. Ele também elaborou uma teoria matemática da óptica e um formalismo abstrato da mecânica clássica. Destacam-se suas obras Métodos Gerais de Dinâmica e Elementos de Quatérnios.

- Josian Willard Gibbs

Figura 69 – Gibbs



Fonte: Tomás Fernández (2025)

(New Haven, EUA, 1839 – 1903) foi um cientista americano que realizou contribuições teóricas fundamentais na física, química e matemática. Seu trabalho sobre as aplicações da termodinâmica contribuiu para transformar a química física em uma ciência dedutiva rigorosa. Junto com James Clerk Maxwell e Ludwig Boltzmann, criou a mecânica estatística (um termo que ele cunhou), explicando as leis da termodinâmica como consequências das propriedades estatísticas de grandes *agregados* de partículas. Gibbs também trabalhou nas aplicações das equações de Maxwell a problemas em óptica física.

Como matemático, ele inventou o moderno cálculo vetorial (independentemente do cientista britânico Oliver Heaviside, que realizou um trabalho similar durante o mesmo período). Aos quinze anos ingressou na Universidade de Yale, onde obteve o primeiro doutorado em engenharia concedido pela referida instituição. Durante uma viagem à Europa, ele entrou em contato com os mais prestigiados físicos e matemáticos da época, cujas contribuições inovadoras ele estudou com interesse.

Por um tempo, ele concentrou sua atenção no estudo da máquina a vapor, que desde o século anterior, graças às melhorias introduzidas por James Watt, se tornou uma das principais invenções da revolução industrial. Engajado na análise do equilíbrio da máquina, Gibbs começou a desenvolver um método pelo qual as variáveis envolvidas nos processos de equilíbrio químico poderiam ser calculadas.

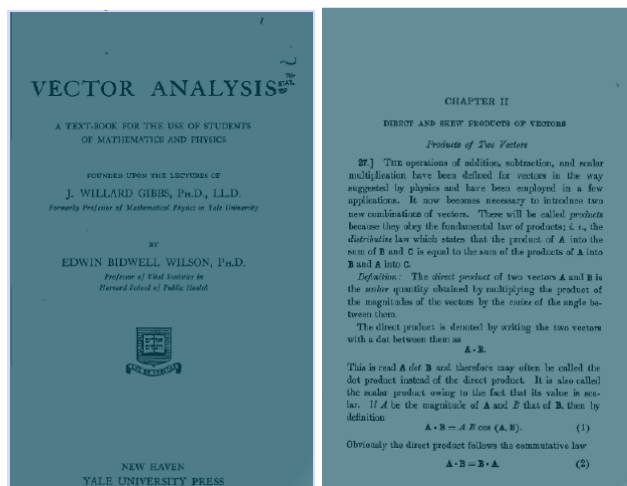
Em 1871 foi nomeado professor de física matemática em Yale, após a publicação de seu trabalho seminal, que incluía os títulos Métodos Gráficos em Termodinâmica de Fluidos e Sobre o Equilíbrio de Substâncias Heterogêneas, este último de importância transcendental para a evolução subsequente da física e química modernas. A descrição adequada dos processos termodinâmicos do ponto de vista da física levou Gibbs a desenvolver uma ferramenta científica inovadora, a mecânica estatística, que mais tarde se mostrou útil para a mecânica quântica moderna. O químico alemão Wilhelm Ostwald divulgou suas descobertas na Europa.

Os métodos algébricos da Geometria cartesiana de Fermat e Descartes influenciaram enormemente a matemática ao longo de quase 200 anos até que foram necessários métodos mais diretos e livres de coordenadas na geometria.

Em 1832 Giusto Bellavitis publica um trabalho onde é apresentado o conceito de equipolência entre segmentos que é, basicamente, a noção de vetor que conhecemos e que foi formalizada em 1844 por Hermann Grassmann no seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoria de Extensão Linear, um novo ramo da Matemática).

Embora esse conceito tenha sido considerado de forma implícita por Joseph Louis Lagrange (1736–1813) e William R. Hamilton (1805–1865), sua formalização na literatura ocorreu no livro *Vector Analysis* (1901), de Edwin B. Wilson, baseado nos seminários de Josiah Willard Gibbs (1839–1903), onde foi denominado produto direto.

Figura 70 – *Vector Analysis* (a) rosto (b) pág 54



(a)

(b)

Fonte: Delgado (2013)

- Alexis Claude Clairaut

Figura 71 - Clairaut



Fonte: Tomás Fernández (2025)

(Paris, 1713–1765) Ele foi um matemático francês de destaque no século XVIII, conhecido por suas contribuições à geometria, cálculo diferencial e à mecânica celeste. Segundo

Boyer (2011), no livro de história da matemática, Clairaut foi um dos matemáticos mais precoces, superando até Blaise Pascal nesse ponto. Aos dez anos, ele lia os textos de L'Hospital sobre cônicas e cálculo; aos treze, ele leu à *Académie des Sciences* um artigo sobre geometria; e quando tinha apenas dezoito anos, foi aceito com dispensa especial em relação às exigências de idade, como membro da Académie.

No ano em que foi eleito, Clairaut publicou um tratado célebre, *Recherches sur les courbes à double courbure*, cuja substância ele tinha apresentado à Academia dois anos antes. Como a *Géométrie* de Descartes, as *Recherches* de Clairaut apareceram sem nome de autor na página de título, embora também nesse caso a autoria fosse bem conhecida. O tratado de Clairaut realizava para as curvas no espaço o programa que Descartes tinha sugerido quase um século antes – seu estudo por meio de projeções em dois planos coordenados.

Na verdade, foi esse método que sugeriu o nome dado por Clairaut a curvas *gauches* ou reversas, pois sua curvatura é determinada pelas curvaturas das duas projeções. Em *Recherches*, numerosas curvas no espaço são determinadas como intersecções de várias superfícies, são dadas explicitamente fórmulas para distância em duas e três dimensões, uma forma da equação do plano por intersecções com os eixos incluída, e são determinadas tangentes a curvas no espaço. Esse livro do jovem Clairaut é o primeiro tratado sobre a geometria analítica no espaço. Observou que as derivadas parciais mistas de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} de uma função $f(x, y)$ são em geral iguais (sabemos agora que isso vale se as derivadas forem contínuas no ponto em questão) e usou esse fato no critério $My \equiv Nx$, familiar em equações diferenciais, para que a expressão diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ seja exata.

Em obras célebres sobre matemática aplicada, tais como *Théorie de la figure de la terre* (1743) e *Théorie de la lune* (1752), ele usou a teoria do potencial. Seus livros didáticos, *Eléments de géométrie* (1741) e *Eléments d'algèbre* (1746), eram parte de um plano, que lembra os de hoje, para aperfeiçoar o ensino da matemática.