



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ALEXANDER ARLEY XAVIER SANTIAGO

**EQUAÇÕES POLINOMIAIS E APLICAÇÕES AOS MOVIMENTOS DE
PARTÍCULAS**

FORTALEZA

2024

ALEXANDER ARLEY XAVIER SANTIAGO

EQUAÇÕES POLINOMIAIS E APLICAÇÕES AOS MOVIMENTOS DE PARTÍCULAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santiago, Alexander Arley Xavier.

Equações polinomiais e aplicações aos movimentos de partículas / Alexander Arley Xavier Santiago. – 2024.
91 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Polinômios. 3. Dinâmica da partícula. 4. Equações polinomiais. 5.
Equações de movimento. I. Título.

CDD 510

ALEXANDER ARLEY XAVIER SANTIAGO

EQUAÇÕES POLINOMIAIS E APLICAÇÕES AOS MOVIMENTOS DE PARTÍCULAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24/05/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Aos meus pais, por todo apoio psicológico que se fez necessário em momentos bem difíceis por acreditarem sempre em mim e na minha força. Dedico também à minha filha Paulinha!

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador de todo Universo, pois sem ele nada teria sido feito, inclusive este trabalho científico. Agradeço por ter me ajudado a carregar os meus fardos mais pesados, nos momentos de grandes dificuldades.

Ao meu pai e minha mãe, José Anchieta Ferreira Santiago e Antônia Xavier de Santiago, um casal que com muita humildade e honestidade conseguiram criar e formar três filhos, dando tudo o que eles precisavam: amor, confiança e muito carinho, além do sustento, mesmo perante todas as dificuldades financeiras.

À minha companheira, minha filha, meus irmãos e amigos, pelo apoio científico e tecnológico, além do apoio moral, ambos obtidos por meio de diálogos, em que acima de tudo, se mostravam preocupados em apontar as perspectivas e possibilidades de um futuro propício.

A todos os colegas da turma de mestrado: Anthony, Antônio Zacarias, Alfredo, André, Edson, Jessyka, Mariana, Marcelo, Fábio, Elias, Pádua, Inácio, Annelise, Narcélio, Erineu, Tyara, Nilbio, Neto e Marcus Ítalo, pelas reflexões, críticas, ajudas e sugestões recebidas durante todo o curso.

Ao Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes, por sua primordial orientação na construção desse trabalho de dissertação de mestrado.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por dar essa grande oportunidade aos professores de Matemática espalhados pelo país de ter acesso a esse grau de ensino e dentro de sua própria área de formação

Também ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, pela infraestrutura necessária à realização desse mestrado.

“O corpo humano é sensível à aceleração, mas não é sensível à velocidade [...] como um acelerômetro, não como um velocímetro” (Halliday; Resnick; Walker, 2016).

RESUMO

Esse trabalho apresenta, de maneira interdisciplinar, como estudantes podem encarar problemas cotidianos que envolvem movimentos de partículas, com base em alguns conceitos matemáticos, especificamente dos polinômios, a serem desenvolvidos no contexto da educação básica, onde se tratou então de encontrar as equações polinomiais específicas, no intuito de fazer estudo de movimentos de partículas, desde os movimentos mais simples com aceleração nula, passando por aqueles com aceleração constante, e até se chegando nos mais complexos, com acelerações polinomiais variantes, com as devidas particularidades e restrições adotadas, não se detendo apenas de estudos dos movimentos mais conhecidos, como o Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado, mas de outros movimentos mais inusitados, cujas acelerações podem ser do tipo variáveis, mas com características polinomiais, onde esses polinômios variam em função do tempo, e por isso, denominadas de funções horárias ou Equações de Movimentos. De forma que se pôde perceber a possibilidade de tais estudos desses movimentos na educação básica, sem a necessidade de utilizar conceitos matemáticos mais avançados e fora da realidade estudantil, além do fato de se gerar uma espécie de produto educacional, com intuito de embasar os professores da educação básica de algumas peculiaridades dos movimentos apresentados em aulas de Física, Ciências ou Matemática.

Palavras-chave: polinômios; movimento de partículas; equações polinomiais; equações de movimentos.

ABSTRACT

This work presents, in an interdisciplinary way, how students can face everyday problems involving particle movements, based on some mathematical concepts, specifically polynomials, to be developed in the context of basic education, where it was then a matter of finding the polynomial equations specific, in order to study the movements of particles, from the simplest movements with zero acceleration, passing through those with constant acceleration, and even reaching the most complex ones, with varying polynomial accelerations, with the due particularities and restrictions adopted, not focusing only on studies of the most known movements, such as Uniform Motion and Uniformly Varied Motion, but other more unusual movements, whose accelerations can be of the variable type, but with polynomial characteristics, where these polynomials vary in function of time, and therefore called hourly functions or Motion's Equations. So that it was possible to perceive the possibility of such studies of these movements in basic education, without the need to use more advanced mathematical concepts and outside the student reality, in addition to the fact of generating a kind of educational product, with the intention of supporting teachers' basic education of some peculiarities of the movements presented in Physics, Science or Mathematics classes.

Keywords: polynomials; particle movement; polynomial equations; motion's equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Posição em uma Trajetória	52
Figura 2 – Função $s = f(t)$	53
Figura 3 – Trajetória Orientada e Marco Zero.....	55
Figura 4 – Zeros da Função $s = f(t)$	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	POLINÔMIOS	12
2.1	Polinômios de 1º grau	14
2.2	Polinômios de 2º grau	15
2.2.1	<i>Relações de Girard</i>	18
2.2.2	<i>Discriminante e estudo das raízes</i>	20
2.3	Polinômios de 3º grau	24
2.3.1	<i>Cálculo da equação reduzida</i>	24
2.3.2	<i>Cálculo das raízes</i>	26
2.3.3	<i>Solução alternativa</i>	30
2.3.4	<i>Discriminante e estudo das raízes</i>	33
2.4	Polinômios de 4º grau	34
2.4.1	<i>Cálculo da equação reduzida</i>	35
2.4.2	<i>Método de Ferrari</i>	37
2.4.3	<i>Solução alternativa</i>	43
2.5	Polinômios de graus superiores	45
3	MOVIMENTOS DE PARTÍCULAS	48
3.1	Movimentos em geral.....	49
3.1.1	<i>Proposta interdisciplinar</i>	49
3.1.2	<i>Condições e restrições</i>	51
3.1.3	<i>Equações dos movimentos</i>	55
3.2	Movimentos com aceleração nula.....	59
3.3	Movimentos com aceleração constante	63
3.3.1	<i>Equação de Torricelli</i>	70
3.4	Movimentos com aceleração variável.....	74
3.4.1	<i>Movimento com aceleração linear</i>	74
3.4.2	<i>Movimento com aceleração quadrática</i>	80
4	CONCLUSÃO	86
	REFERÊNCIAS.....	88

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho busca apresentar, de maneira interdisciplinar, como estudantes podem encarar problemas cotidianos, que envolvem movimentos de corpos, tendo como base conceitos matemáticos, mais especificamente no contexto polinomial, a serem desenvolvidos na educação básica. Justamente sobre isso, Symon (1996, p.15), adicionou a essa temática, dizendo que a maior parte dos estudantes

[...] já possui uma intuição bastante razoável dos aspectos qualitativos relacionados aos fenômenos mecânicos. Assim sendo, o professor deve objetivar desenvolver essa intuição no sentido de levá-los à formulação matemática precisa dos problemas de Física paralelamente à interpretação física das soluções matemáticas. [...]

Contudo, geralmente os estudantes já trazem tais percepções de enfrentamento perante os fenômenos físicos corriqueiros, através de conceitos naturais de sua própria vivência, bem como de interpretações próprias para tais fenômenos, mas quando em contato com explicações coerentes e demonstradas, isso pode apresentar certa dificuldade na aquisição desses novos conhecimentos e descobertas (Silva, 2015).

Dessa forma, se faz necessário cada vez mais aulas dinâmicas e comprovações teóricas das mais diversificadas possíveis, onde justamente sobre isso, Silva (2015, p. 28) contribuiu ainda, ao escrever que:

[...] Para que o aprendizado seja claro, é interessante o uso da modelagem matemática na física, para se entender as fórmulas, e não apenas decorá-las, e para não resolver mecanicamente listas de exercícios sem compreendê-los. É necessário trabalhar em conjunto a exposição de teoria e resolução de problemas, proporcionando uma metodologia diferente das convencionais.

Assim, o desafio desses professores, sempre é demasiadamente complexo, do ponto de vista cognitivo, mas também bastante instigantes, por se tratar de assuntos interessantes e do cotidiano de todos, já que é a tentativa de se explicar como a natureza funciona e que leis regem e governam o Universo de uma maneira geral ou no que é pelo menos palpável, do ponto de vista da população em geral.

Ainda nesse contexto e em corroboração nessa temática, sabe-se que o professor, ou em geral, o profissional da educação deve, além de uma boa formação curricular e acadêmica, ter também uma prática docente que seja capaz de resolver alguns problemas que surjam em sala de aula e possam atrapalhar o bom andamento de sua aula, ou seja, o professor precisa estar preparado para uma difícil missão (Santiago, 2016).

Assim, apresentar as equações de movimento de corpos sujeitos aos procedimentos e condições de restrições a serem posteriormente adotadas nesse trabalho, se torna um desafio aos profissionais da educação no ensino de ciências naturais, isso em uma tomada mais abstrata de suas demonstrações.

Dessa forma, o atual trabalho dissertativo ficou distribuído em quatro capítulos, em que estão organizados da seguinte forma:

O Capítulo 1 desse trabalho perpassa por uma introdução geral, com uma discussão resumida de alguns problemas relacionados ao ensino e aprendizagem em Física e Matemática na Educação Básica, com ênfase no tocante da interdisciplinaridade dessas duas componentes curriculares, mais especificamente no estudo dos movimentos de partículas com representação polinomial, e mostrando no final do capítulo, cada um dos temas que serão discutidos na dissertação como um todo.

Já no Capítulo 2, se faz uma interpretação generalizada de Polinômios e as equações polinomiais respectivas, além de suas soluções algébricas específicas para essas equações até o grau máximo onde se é possível solucioná-las por meio de radicais, com *algebrismos* coerentes com o currículo escolar.

No Capítulo 3 são apresentados então os Movimentos das Partículas e suas nuances, com foco em uma aprendizagem estudantil através da base de estudo polinomial, com base no que fora desenvolvido e discutido.

Enfim, no Capítulo 4, são apresentadas as considerações finais do trabalho, bem como as perspectivas futuras para uma continuação desse estudo pelos professores em diversas aulas de física, como uma espécie de produto educacional, que pode assim ser replicado por quaisquer desses professores caso o queiram.

2 POLINÔMIOS

Neste trabalho são considerados apenas polinômios com coeficientes reais. Um polinômio com coeficientes reais é representado na forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Os números reais a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, são chamados de coeficientes do polinômio $p(x)$. Se todos os coeficientes do polinômio são nulos, então este polinômio é chamado de polinômio *identicamente nulo*.

Sendo $a_n \neq 0$, então se diz que o *polinômio* tem grau n . De forma que, todos os polinômios de coeficientes reais e de grau qualquer n podem ser representados pela seguinte expressão:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad (2)$$

Um número α é chamado de *raiz* ou *zero* do polinômio $p(x)$, se $p(\alpha) = 0$ e assim, para se encontrar as *raízes* ou *zeros* de um polinômio qualquer, basta então fazer $p(x) = 0$ na expressão (2), e então as raízes serão as soluções de:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0 \quad (3)$$

Observa-se que todo número real é raiz do polinômio nulo. Por outro lado, se $p(x) = a_0$, onde $a_0 \neq 0$, um polinômio $p(x)$ não possui *nenhuma raiz*. Por isso, quando se está interessado em encontrar as raízes de polinômios são considerados somente os polinômios de grau $n > 0$.

Além disso, o *Teorema Fundamental da Álgebra* afirma que todo polinômio com coeficientes complexos e grau $n > 0$ tem pelo menos uma raiz complexa, e como o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra garante que todo polinômio com coeficientes reais de grau $n > 0$, como expresso em (2), tem pelo menos uma raiz complexa (Costa, 2020).

Por outro lado, pode-se verificar que a cada solução *complexa não real* (isto é, da forma $a + bi$, com $b \neq 0$), corresponde uma outra solução também complexa, que é o seu conjugado ($a - bi$), de modo as raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares. Assim, um polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real (Cortês, 2020).

De uma maneira geral, em se pensando nesses conceitos polinomiais para educação básica, o estudo se restringiria às formulações algébricas para polinômios até 2º grau, pois na grade curricular de toda a educação básica, apenas uma equação polinomial de grau superior a esse, é ainda estudada, mas como caso muito específico de uma equação de 4º grau, conhecida como *equação biquadrada*, e que no fim das contas, acaba-se por resolver, na prática, equação quadrática através de uma mudança de variável especificamente direcionada para esses tipos de resoluções.

Em se pensando então nessa temática no ambiente escolar da educação básica em si, em contribuição Carneiro (1999, p. 32) expôs, ao estudar tais polinômios de uma maneira bem generalizada, que

Num primeiro momento, poderíamos pensar em aplicar fórmulas que fornecem diretamente as raízes da equação através de um número finito de operações algébricas sobre os coeficientes, assim como se faz usualmente para a equação do 2º grau. É sabido, no entanto, que fórmulas desse tipo (as chamadas “fórmulas por meio de radicais”) não existem para equações de grau maior que quatro e, mesmo para graus 3 e 4, as fórmulas disponíveis são complicadas, exigindo transformações prévias das equações e uso de trigonometria e números complexos.

Cabe então ao professor da educação básica, tentar fazer tal relação entre o conteúdo a ser desenvolvido e a prática pedagógica, para que os conceitos a serem passados, não fiquem tão distantes da realidade dos estudantes. Corroborando nessa temática, Santiago (2016, p. 35) expôs que o professor deve ter “suas estratégias de ensino mais diversificadas possíveis e a sua maneira de fazer com que o estudante possa perceber em suas descobertas a relevância do que vem estudando”.

Ainda em contribuição no ponto que trata da relação didático-pedagógica, no que diz respeito aos conteúdos curriculares e a prática docente, que Santiago (2016, p. 37) ainda pôde descrever que

[...] além de ser um trabalho árduo para o profissional da educação, esse também deve se preocupar em como está sendo a percepção e a aceitação por parte dos alunos do que fora ministrado, já que se fica um eterno embate entre docentes e discentes, com uma perda educacional incomensurável.

Para isso se faz necessário aos professores da educação básica uma abordagem mais direcionada ao estudante, com um teor mais pedagógico e prático. Exatamente sobre isso, Távora Neto (2023, p. 44) trouxe como contribuição ao escrever, bem sucintamente, que essas

[...] abordagens didáticas são práticas pedagógicas necessárias no contexto escolar, pois com elas tornamos mais efetivo o processo de ensino-aprendizagem. O ensino da matemática, como também das outras áreas do conhecimento, necessita de transformações nos aspectos didático e metodológicos.

Mesmo diante de tudo isso e das dificuldades apresentadas no ensino, em particular, no estudo de polinômios para o ensino básico, esse trabalho tratará de mostrar a partir de então, as expressões mais conhecidas e mais disseminadas para tais formulações algébricas específicas para o cálculo dessas raízes de cada equação polinomial desde as de 1º grau, até as de 4º grau.

2.1 Polinômios de 1º grau

Um polinômio de 1º grau é da forma $p(x) = a_0 + a_1x$, com $a_1 \neq 0$, ou seja, da forma descrita em (2) para $n = 1$. Atualmente a forma de encontrar a raiz desses polinômios é a mais simples possível, mesmo sabendo que há muito tempo atrás não era tão simples assim, como relatou Hennemann (2021, p. 34)

Contudo, nem sempre foi trivial resolver uma equação do primeiro grau. Para entender um pouco melhor, voltamos a mais de três milênios no tempo. Mais precisamente para os documentos matemáticos encontrados com data de 1650 a.C., são eles: Papiro de Ahmes (ou Rhind) e Papiro de Moscou, ambos egípcios. [...] talvez a dificuldade em resolver algumas equações do primeiro grau, estava na limitação do simbolismo para a época e na ausência de uma fórmula, como conhecemos hoje.

De onde se pode explicar porque estudantes da educação básica, com pouca base algébrica, ainda encontram tanta dificuldade de resolução até mesmo em equações do 1º grau, mesmo que, com o conhecimento algébrico atual, facilmente se pode definir uma formulação algébrica para se encontrar a única raiz possível de sua equação polinomial correspondente e sempre com essa raiz sendo pertencente aos reais ($x \in \mathbb{R}$).

Dessa forma, partindo-se do conceito de polinômios de 1º grau, podemos inferir que as raízes de tais polinômios, são exatamente os zeros de funções afim. Na contribuição exposta por Távora Neto (2023, p. 20): “O zero de uma função afim ou raiz da função é um número real x tal que $f(x) = 0$ ”, e dessa forma, essas raízes podem ser encontradas pela seguinte equação polinomial:

$$a_0 + a_1x = 0 \quad (4)$$

Encontrando assim a equação polinomial de 1º grau e dessa forma, a solução de (4) pode ser encontrada facilmente através dos seguintes procedimentos algébricos:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x - a_0 &= 0 - a_0 \Leftrightarrow \\ a_1x &= -a_0 \Leftrightarrow \\ a_1x \cdot \frac{1}{a_1} &= -a_0 \cdot \frac{1}{a_1} \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{a_0}{a_1} \end{aligned} \quad (5)$$

De modo que (5) é justamente a formulação algébrica que se queria encontrar para se determinar a única raiz real dos polinômios de 1º grau, em função dos seus coeficientes, que nesse caso são apenas os dois coeficientes observados em (4) e que geralmente são identificados como *coeficiente linear* (a_0) e como *coeficiente angular* (a_1), pela geometria retilínea própria da função de 1º grau, como afirmado por Iezzi e Murakami (2013, p.100) que: “O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) é uma reta”, e cujos coeficientes e gráficos também foram descritos de maneira bem sucinta por Martins (2014, p. 34), e apresentados da seguinte forma:

Na maioria dos livros didáticos, os números reais a e b presentes na lei de formação da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, são apresentados, respectivamente, como coeficiente angular e coeficiente linear. Entretanto, tais denominações dadas aos números reais a e b são geométricas, pois, estão associadas ao gráfico da função polinomial do 1º grau, que [...] é uma reta não-vertical e não-horizontal.

Entretanto, esse trabalho não se atentará às representações geométricas das funções polinomiais em geral.

2.2 Polinômios de 2º grau

Um polinômio de 2º grau é da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, com $a_2 \neq 0$, ou seja, da forma descrita em (2) para $n = 2$. Em geral, no que diz respeito a esses polinômios de 2º grau, também se pode achar, mas de uma maneira um pouco mais complexa que em relação ao encontrado para os polinômios de 1º grau, uma formulação algébrica no intuito de se resolver sua equação característica.

Dessa forma, de acordo com o conceito de polinômios de 2º grau, pode-se inferir que as raízes são exatamente os zeros das funções quadráticas. Em corroboração exposta por Távora Neto (2023, p. 24): “Os zeros ou raízes da função quadrática [...] são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ ”, de onde se deduz a seguinte equação polinomial:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0 \quad (6)$$

Dessa equação polinomial de 2º grau, a solução de (6) pode ser desenvolvida com um pouco de *algebrismo* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot \frac{1}{a_2} &= 0 \cdot \frac{1}{a_2} \Leftrightarrow \\ \frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}x + x^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{a_0}{a_2} + \left(-\frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_1^2}{4a_2^2}\right) + \frac{a_1}{a_2}x + x^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{a_1^2}{4a_2^2} + 2\frac{a_1}{2a_2}x + x^2\right) &= \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{a_1}{2a_2} + x\right)^2 &= \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{a_1}{2a_2} + x\right)^2 &= \frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2} \Leftrightarrow \\ \frac{a_1}{2a_2} + x &= \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{4a_2^2}} \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad (7) \end{aligned}$$

Que é justamente a formulação algébrica mais conhecida para se encontrar os zeros das funções polinomiais quadráticas, que é conhecida de uma maneira muito difundida no Brasil como a *Fórmula de Bhaskara*, e assim:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \\ x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \end{cases} \quad (8)$$

Onde as raízes (8) foram obtidas justamente por se poder utilizar o resultado com a operação (+) e a outra com a operação (−) desmembradas do resultado obtido anteriormente em (7) em formulação algébrica.

Sobre o fato da formulação algébrica para equação do segundo grau ser chamada dessa forma no Brasil, Nascimento (2015) apresentou que não se usava nenhuma espécie de formulação para determinação das raízes de polinômios quadráticos até o fim do século XVI, pelo fato de que nem se existia a notação algébrica que se tem atualmente na época, onde essa notação, segundo ele, com esses coeficientes representados por letras, só se iniciou em outro momento por *François Viète*. Além do mais, Nascimento (2015, p. 22) corroborou com essas informações citadas, e de maneira significativa, ao indagar que:

O nome de Bhaskara relacionado a esta fórmula aparentemente só ocorre no Brasil. Não encontramos esta referência na literatura internacional. A nomenclatura "Fórmula de Bhaskara" não é adequada, pois problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam quase quatro mil anos antes, em textos escritos pelos babilônios, nas tábuas cuneiformes. Nesses textos o que se tinha era uma receita, escrita em prosa, sem uso de símbolos matemáticos, que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos, quase sempre ligados a relações geométricas.

O autor supracitado também expôs que nos escritos do próprio *Bhaskara*, se tornou perceptível seu trabalho com equações quadráticas, onde ele já tinha ciência das duas soluções e até tinha uma formulação algébrica para isso, mas não que seja a difundida expressão, na qual se apresenta e se rotula como que sua descoberta no processo de resolução dessas equações de 2º grau (Nascimento, 2015).

Enfim, todo um processo histórico fora desenvolvido na construção da formulação de uma expressão algébrica para equações quadráticas, onde aconteceu que em vários lugares do mundo e em várias épocas, matemáticos buscaram e conseguiram suas próprias soluções, e justamente sobre isso Fragoso (2000, p. 25) sintetizou esse processo histórico, apresentando de maneira bem sucinta, que

Ao estudarmos, hoje em dia, essa equação, usamos a representação herdada dos europeus e a solução fornecida pelos hindus. Sabe-se, contudo, que desde 1700 a.C. houve preocupação com o trato e o desenvolvimento desse tipo de equação, analisando as relações entre seus coeficientes e suas raízes, a fim de se determinar mais facilmente o seu sinal, módulos e valores.

De qualquer forma, o resultado obtido em (7) é utilizado em larga escala no ensino de Matemática na Educação Básica como método de resolução de toda e qualquer equação do 2º grau, tanto nas equações completas, como nas incompletas (quando se tem pelo menos um dos coeficientes de (6) iguais a zero).

2.2.1 Relações de Girard

Outro resultado importante e que será utilizado posteriormente nesse trabalho é o que se denomina como *Relações de Girard* de ordem 2 ou do 2º grau. De acordo com o exposto por Iezzi (2013, p. 116), elas são justamente “as **relações entre coeficientes e raízes** da equação $P(x) = 0$, apresentada em (6).

Em outras palavras, são simplesmente as relações para *soma* e *produto* das raízes das equações quadráticas e que são por muitas vezes utilizadas por diversos estudantes para se encontrarem as soluções sem utilização da formulação apresentada em (7), utilizando apenas cálculos mentais, por exemplo. Exatamente sobre isso, contribuiu Martins (2014, p. 29) na discussão sobre a importância de se

comentar com o aluno que como as equações da forma $x^2 - S.x + P = 0$, apresentam explicitamente, a soma e o produto de suas raízes, para algumas dessas equações é possível determinar, mentalmente, as raízes. Para isso, basta encontrar dois números reais que tenham soma S e produto P , se for determinado, tais números são as raízes.

Onde a equação quadrática apresentada pelo autor explicitou a soma como S e o produto como P na equação de uma forma mais suprimida, com $a_2 = 1$ (em que se denomina assim como *Polinômio Mônico*), mas que será agora mostrado para qualquer polinômio de 2º grau com coeficientes reais.

Partindo então dos resultados das raízes x_1 e x_2 , obtidos em (8), primeiramente a soma dessas raízes dará:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} + \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x_1 + x_2 &= \frac{-2a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \end{aligned} \quad (9)$$

Analogamente a esse processo, pode-se achar agora o produto das raízes x_1 e x_2 , encontradas em (8) e que será:

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \right) \left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \right) \Leftrightarrow \\
 x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{(-a_1)^2 - (\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0})^2}{4a_2^2} \right) \Leftrightarrow \\
 x_1 \cdot x_2 &= \frac{a_1^2 - (a_1^2 - 4a_2a_0)}{4a_2^2} \Leftrightarrow \\
 x_1 \cdot x_2 &= \frac{4a_2a_0}{4a_2^2} \Leftrightarrow \\
 x_1 \cdot x_2 &= \frac{a_0}{a_2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Dessa forma, compilando os dois resultados obtidos agora, pode-se concluir que as *Relações de Girard* de segunda ordem (e que por isso são aplicadas as equações quadráticas ou polinômios de 2º grau) são:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2} \tag{11}$$

Esse resultado é utilizado na resolução dessas equações em tentativa de se achar as duas raízes, já se sabendo a soma e o produto delas, sem a necessidade de se usar a expressão (7). Ademais, esse resultado pode ser generalizado a equações de grau qualquer, de modo que se tenha um total de n relações para polinômio de grau n , sendo popularmente chamadas de *Relações de Girard Estendidas* ou ainda conhecidas como as *Relações de Girard de ordem n* .

Sobre essa extensão das relações de Girard de 2º grau, com uma generalização delas para qualquer grau n , no intuito de se deduzirem expressões envolvendo os coeficientes de uma equação polinomial de *enésimo grau* (sendo $n \geq 1$) e suas próprias raízes. Iezzi (2013, p. 116) corroborou com isso, dizendo que de uma equação apresentada e dada por: “ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ temos a identidade: $P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$ [...]”, em que ao se desenvolver a última expressão, se pode comparar então essas duas expressões para $P(x)$, a fim de se encontrar as tais formulações desejadas para as relações.

Dessa forma, em primeiro caso, sendo esse discriminante positivo ($\delta > 0$), as duas raízes serão *reais e distintas* ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 \neq x_2$), pois o resultado da raiz quadrada será um número real e assim produzirá resultados diferentes para as raízes x_1 e x_2 em (8), em que na prática, isso acontecerá sempre que $a_1^2 > 4a_2a_0$, resultado que terá utilidade posteriormente nesse trabalho.

Já quando esse discriminante for nulo ($\delta = 0$), e dessa forma, $a_1^2 = 4a_2a_0$, como não há restrição novamente para o radical no corpo dos reais e além disso, como não se perfaz diferença o fato de somar ou subtrair zero nas raízes obtidas em (8), as duas raízes agora serão *reais e idênticas* ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 = x_2$), onde na prática, o que se tem é uma solução da equação polinomial apenas, mas que na verdade é tida como apenas uma raiz, mas sendo esta raiz de *multiplicidade 2*.

Conceito este de multiplicidade das raízes na qual contribuiu Iezzi (2013, p. 177) ao descrever em seu livro que: “ r é raiz da equação polinomial $f(x) = 0$, com multiplicidade m , se: $f(x) = (x - r)^m \cdot q(x)$ e $q(r) \neq 0$ ”, onde nesse caso do discriminante ser nulo, $\delta = 0$ (onde dessa forma, $a_1^2 = 4a_2a_0$), além do que, com a raiz r sendo x_1 ou x_2 , que possuem resultados apresentados em (8), e assim $r = x_1 = x_2 = -a_1/2a_2$, então a equação polinomial geral apresentada em (6), com esses resultados pode então ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0) \div a_2 &\Leftrightarrow \\
 x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} &= 0 \Leftrightarrow \\
 x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \left(\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2}\right) + \frac{a_0}{a_2} &= 0 \Leftrightarrow \\
 x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_1^2}{4a_2^2} &= \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} \Leftrightarrow \\
 \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 &= \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} \Leftrightarrow \\
 \left[x - \left(-\frac{a_1}{2a_2}\right)\right]^2 &= \frac{4a_2a_0}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} \Leftrightarrow \\
 (x - r)^2 &= \frac{a_0}{a_2} - \frac{a_0}{a_2} \Leftrightarrow \\
 (x - r)^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Que era justamente o resultado previsto no conceito de multiplicidade apresentado anteriormente, e que condiz com o fato discutido acerca do discriminante sendo nulo, apresentar raiz de multiplicidade 2.

Por fim, sendo o discriminante negativo ($\delta < 0$), quando $a_1^2 < 4a_2a_0$, as raízes de (8) serão então *raízes complexas*, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, por não possuir solução para a raiz quadrada de número negativo no corpo dos reais. Além disso, é fácil ver que o valor dessas raízes são números *complexos conjugados*, visto que a única diferença entre x_1 e x_2 mostradas em (8), será pela parte imaginária gerada pelo radical do discriminante, não diferenciando assim a parte real nos dois resultados.

Para demonstrar isso, como $\delta < 0$ e então $a_1^2 < 4a_2a_0$, dessa forma a expressão do radicando ($a_1^2 - 4a_2a_0$) será um número real negativo, onde se podem tomar os seguintes procedimentos algébricos (primeiramente para x_1):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} = \frac{-a_1 + \sqrt{-(4a_2a_0 - a_1^2)}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x_1 &= -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{-1}\sqrt{(4a_2a_0 - a_1^2)}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x_1 &= -\frac{a_1}{2a_2} + i\frac{\sqrt{(4a_2a_0 - a_1^2)}}{2a_2} \end{aligned} \quad (15)$$

Analogamente nos mesmos procedimentos algébricos, mas para a segunda raiz x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} = \frac{-a_1 - \sqrt{-(4a_2a_0 - a_1^2)}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= \frac{-a_1 - \sqrt{-1}\sqrt{(4a_2a_0 - a_1^2)}}{2a_2} \Leftrightarrow \\ x_2 &= -\frac{a_1}{2a_2} - i\frac{\sqrt{(4a_2a_0 - a_1^2)}}{2a_2} = \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Onde \bar{x}_1 representa justamente o complexo conjugado de x_1 , pois se pensando em x_1 como um número complexo na forma $a + ib$, seu complexo conjugado \bar{x}_1 será sempre da forma $a - ib$, resultado este que apareceu de uma forma literal em x_2 e assim: $x_2 = \bar{x}_1$. Onde, com esse mesmo raciocínio agora para x_2 e seu complexo conjugado \bar{x}_2 , mostrando-se assim que também $x_1 = \bar{x}_2$.

Sobre isso Iezzi (2013, p. 128) corroborou de maneira bem sucinta dizendo que se “uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = \alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$) com multiplicidade p , então essa equação admite a raiz $z = \alpha - \beta i$ com multiplicidade p ”, de onde tal teorema também será usado para o caso de raízes de equações polinomiais de graus maiores.

De modo que a recíproca também é válida, pois se uma raiz de um dado polinômio é complexa e seu conjugado também é raiz do mesmo polinômio, então obrigatoriamente esse polinômio terá os seus coeficientes reais. No caso específico de essa raiz complexa, ser apenas um número real, este será conjugado dele mesmo, por não possuir a parte imaginária, onde será assim também raiz, o que se confirmará que os coeficientes polinomiais também serão números reais (Estrada, 2012).

Essa demonstração pode ser feita a partir de um algebrismo simples com números complexos, onde se um dado $z = a + ib$, é raiz de um certo polinômio, e ainda o seu complexo conjugado, $\bar{z} = a - ib$ também é raiz desse polinômio, então de acordo com o que já se fora comentado na seção anterior, esse polinômio descrito em (2) pode ser reescrito em função de suas raízes: $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$, já que qualquer raiz r_k zera esse polinômio, como se vê facilmente.

De forma que em se tomando, por escolha, as duas raízes: $r_1 = z$ e $r_2 = \bar{z}$, onde o polinômio de 2º grau correspondente como apresentado em (2) para $n = 2$, e sem perda de generalidade, tomando esse polinômio quadrático como mônico ($a_2 = 1$), já que se pode dividir toda a equação pelo próprio coeficiente a_2 , de onde o polinômio pode então ser representado na forma: $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)$, em que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} \Leftrightarrow \\ p(x) &= x^2 - (a + ib + a - ib)x + (a + ib)(a - ib) \Leftrightarrow \\ p(x) &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \Leftrightarrow \\ p(x) &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Que é justamente um polinômio mônico de 2º grau cujos coeficientes são reais, já que a e b são reais, da forma em que se queria demonstrar algebricamente.

A partir de agora, se avançará no grau de estudo polinomial, passando então a ser trabalhados os polinômios de 3º grau e assim em sequência até aonde se possa avançar, sempre em coerência com a teoria polinomial.

2.3 Polinômios de 3º grau

Em continuidade ao estudo das equações polinomiais, se tem os polinômios de 3º grau e se precisará de mais artifícios algébricos complexos na tentativa de resolver sua equação característica e encontrar assim uma formulação que resolva todo e qualquer polinômio desse grau.

Assim, de acordo com o conceito de polinômio de 3º grau apresentado em (2) para $n = 3$, pode-se deduzir suas raízes, ao fazer $p(x) = 0$, e então esse tipo de polinômio exprime a seguinte equação polinomial:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 \quad (18)$$

Primeiramente trabalhando a equação (18) no intuito de facilitar o processo de resoluções algébricas, diminuindo a quantidade de coeficientes da equação como citado em Lima (2006) através de um procedimento que pode transformar toda equação polinomial de 3º grau, cujos coeficientes são reais, em uma representação da mesma de uma forma bem mais reduzida, a saber,

$$x^3 + px = q \quad (19)$$

De forma que os parâmetros p e q devem ser expressos em função dos coeficientes $(a_0, a_1, a_2 \text{ e } a_3)$ da equação polinomial, para quaisquer desses coeficientes pertencentes aos números reais.

2.3.1 Cálculo da equação reduzida

Para desenvolver esse procedimento, o primeiro passo é se fazer uma mudança de variáveis de forma que a variável x seja substituída por uma nova variável y adicionada de uma certa constante c , que será descoberta posteriormente. Em suma, a proposta para mudança de variável será:

$$x = y + c \quad (20)$$

De posse então desse valor de x apresentado em (20) e substituindo na equação (18):

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1(y + c) + a_2(y + c)^2 + a_3(y + c)^3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 a_0 + a_1(y + c) + a_2(y^2 + 2yc + c^2) + a_3(y^3 + 3y^2c + 3yc^2 + c^3) &= 0 \Leftrightarrow \\
 a_0 + a_1c + a_2c^2 + a_3c^3 + (a_1 + 2a_2c + 3a_3c^2)y + (a_2 + 3a_3c)y^2 + a_3y^3 &= 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

Como o objetivo se é de chegar numa *equação reduzida*, da mesma forma de (19), então deve escolher-se um valor de c em que possa anular na expressão o termo de 2º grau da variável y em questão, fazendo assim esse coeficiente de y^2 zerar:

$$\begin{aligned}
 a_2 + 3a_3c &= 0 \Leftrightarrow \\
 c &= -\frac{a_2}{3a_3} \quad (22)
 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor de c encontrado em (22) na equação apresentada em (21):

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) + a_2\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + a_3\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 \\
 + \left(a_1 + 2a_2\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) + 3a_3\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^2\right)y + a_3y^3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 a_0 - \frac{a_1a_2}{3a_3} + \frac{a_2^3}{9a_3^2} - \frac{a_2^3}{27a_3^2} + \left(a_1 - \frac{2a_2^2}{3a_3} + \frac{a_2^2}{3a_3}\right)y + a_3y^3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 3a_2^3 - a_2^3}{27a_3^2} + \left(\frac{3a_1a_3 - 2a_2^2 + a_2^2}{3a_3}\right)y + a_3y^3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \left(\frac{27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3}{27a_3^2} + \left(\frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3}\right)y + a_3y^3\right) \cdot \frac{1}{a_3} &= 0 \cdot \frac{1}{a_3} \Leftrightarrow \\
 y^3 + \left(\frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3^2}\right)y &= \frac{9a_1a_2a_3 - 27a_0a_3^2 - 2a_2^3}{27a_3^3} \quad (23)
 \end{aligned}$$

De forma que essa equação encontrada possui a mesma estrutura de (19), onde os parâmetros p e q são exatamente:

$$p = \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3^2}; \quad q = \frac{9a_1a_2a_3 - 27a_0a_3^2 - 2a_2^3}{27a_3^3} \quad (24)$$

A partir de agora, em se tratando de polinômios de 3º grau, não se trabalhará mais com a *equação completa* (18) e sim com a *equação reduzida* (19), onde os coeficientes originais (a_0 , a_1 , a_2 e a_3) da equação polinomial foram restabelecidos para os resultados encontrados em (24) para os parâmetros p e q .

2.3.2 Cálculo das raízes

O segundo passo para obtenção da expressão algébrica para raízes do polinômio de 3º grau, foi desenvolvida *Scipione Del Ferro*, porém muito difundida e publicada como *Método de Cardano*, por conta dos trabalhos publicados por *Girolamo Cardano* com esses polinômios (além de outros estudos, pois o mesmo acabou incentivando o discípulo *Ludovico Ferrari* a encontrar uma solução também para as equações do 4º grau), além do fato de se terem geradas diversas disputas matemáticas com outro estudioso *Niccolò Fontana*, mais conhecido como *Tartaglia* (Nascimento, 2015). Além disso, também corroborou com essa descoberta histórica e suas nuances, Hennemann (2021, p. 43), relatando que

Girolamo Cardano apresentou em 1545 em sua obra *Ars Magna*, fórmulas para solucionar as equações reduzidas, tratadas na seção anterior. Nesse mesmo livro, contemplou inclusive fórmulas para solucionar equações de quarto grau [...] Embora, apresentasse as fórmulas, Cardano reconheceu não ser sua a essência dos métodos. E menciona em seu livro, que as fórmulas já haviam sido descobertas por Ferro e posteriormente redescobertas por Tartaglia.

Assim, partindo da equação reduzida ($x^3 + px = q$) e fazendo agora uma devida mudança de variável em termos de dois novos parâmetros u e v , por exemplo, e fazendo assim $x = u + v$, se terá:

$$\begin{aligned}
 x^3 &= (u + v)^3 \Leftrightarrow \\
 x^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \Leftrightarrow \\
 x^3 &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v) \Leftrightarrow \\
 x^3 &= u^3 + v^3 + 3uv.x \Leftrightarrow \\
 x^3 - 3uv.x &= u^3 + v^3
 \end{aligned} \tag{25}$$

Esse resultado apresenta também a mesma estrutura da equação reduzida (19), de modo que os parâmetros iniciais p e q , nessa comparação, podem agora ser expressos em cargo de seus novos parâmetros de u e v , a saber,

$$p = -3uv; q = u^3 + v^3 \quad (26)$$

Como o valor de p encontrado em (26) foi $p = -3uv$, e então facilmente também se pode afirmar que $p^3 = -27u^3v^3$, de modo que dessa forma, agora se podem reescrever os resultados obtidos para p e q da seguinte forma:

$$u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}; u^3 + v^3 = q \quad (27)$$

Onde o que se apresenta em (27) é justamente a soma e o produto dos dois valores (u^3 e v^3) e que podem ser, sem perda de generalidade, as soluções de uma equação quadrática da forma

$$-\frac{p^3}{27} - qx + x^2 = 0 \quad (28)$$

Pois foi visto que a soma (S) e o produto (P) das raízes do *Polinômio Quadrático Mônico* ($x^2 + a_1x + a_0 = 0$) apresentado nas *Relações de Girard* do 2º grau e que neste caso, os valores correspondentes são respectivamente, $S = -a_1$ e $P = a_0$, já que $a_2 = 1$, e onde Martins (2014, p. 29) ainda reescreveu esse polinômio da forma: “ $x^2 - Sx + P = 0$ ”, assim confirmando os resultados obtidos em (27) na estrutura de equação apresentada em (28), com as raízes sendo u^3 e v^3 , em que já se tem as expressões algébricas demonstradas e apresentadas também em (8).

Dando continuidade ao processo, em se fazendo $x_1 = u^3$ e $x_2 = v^3$, por exemplo, onde dessa forma, a primeira raiz será:

$$u^3 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \Leftrightarrow$$

$$u^3 = \frac{S + \sqrt{(-S)^2 - 4P}}{2} \Leftrightarrow$$

$$u^3 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2 - 4P}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
u^3 &= \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \Leftrightarrow \\
u^3 &= \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Leftrightarrow \\
u^3 &= \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}
\end{aligned} \tag{29}$$

E analogamente, para a outra raiz:

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{30}$$

Dessa forma, se pode achar agora o valor de x escolhido ($x = u + v$), que é função somente de u e v , que são as raízes cúbicas de u^3 e v^3 , que apesar de aparentar, esse resultado não é tão simples assim, já que esses valores de u^3 e v^3 podem não ser números reais, visto que dependem dos valores dos parâmetros p e q para que o radical se torne um *imaginário* ou não nas expressões.

De qualquer forma, independente dos valores mesmos reais para p e q ($p, q \in \mathbb{R}$), u^3 e v^3 serão sempre números complexos ($u^3, v^3 \in \mathbb{C}$), de onde se conhece que existem três raízes cúbicas não-triviais (ou seja, excetuando-se o complexo identicamente nulo) para cada número complexo a ser estudado u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 e dessa forma se poderia pensar que se teriam *nove* combinações para $u + v$, porém, como cada valor v_i está vinculado a um valor específico de u_i , pois de (26) se tem: $p = -3u_i v_i$ e dessa forma, $v_i = -p/3u_i$, fazendo com que realmente se tenham apenas as *três* soluções buscadas desde o princípio desse estudo dos polinômios cúbicos (Lima, 2006).

Ainda nessa temática dos números complexos, Lima (2006, p. 21) contribui ainda mais, auxiliando os estudantes nesse processo de se encontrar as três raízes cúbicas complexas através de uma primeira raiz já descoberta, dizendo que “Dado qualquer número complexo z , se w é uma raiz cúbica de z , as outras duas são αw e $\alpha^2 w$, onde $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ”, de fato que isso ajuda demais nesse trabalho, pois uma raiz pode ser calculada até mentalmente em algumas vezes, principalmente em se falando de números reais.

Assim, exprimindo as raízes cúbicas de u^3 e v^3 (onde $u = \sqrt[3]{u^3}$ e $v = \sqrt[3]{v^3}$) as soluções para u e v ficam expressas da seguinte forma:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}; v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (31)$$

Explicitando então essas soluções para $x = u + v$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (32)$$

Que é justamente o resultado em formulação algébrica para se solucionar a equação polinomial cúbica. Todavia, caso o leitor não se dê por satisfeito ainda em pensar que essa única formulação (32) pode exprimir as três raízes da equação cúbica, já que em sua própria estrutura não aparece uma operação (\pm), por exemplo, com se apresentou na equação quadrática, de onde se abriu a possibilidade das duas soluções naquela situação.

Dessa forma, o que se pode fazer para apresentar essa solução algébrica com as três raízes, é então se considerar que o resultado em (32) seja a primeira solução x_1 com as raízes cúbicas u_1 e v_1 vistas em (31) e assim $x_1 = u_1 + v_1$; daí então se partindo dela e utilizando a teoria dos complexos, como fora descrita por Lima (2006) e apresentada ainda na atual seção, dizendo que em se sabendo uma raiz cúbica complexa w , as outras duas são zw e z^2w , sendo z o fator complexo: $z = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

Assim, o problema agora é então de se saber quais das nove combinações possíveis entre u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 e v_3 formarão as três raízes x_1, x_2 e x_3 . Onde uma delas já foi desenvolvida nessa seção e compilada em (32) e por isso ter sido escolhida como a primeira solução x_1 . Já as outras duas escolhas dentre as oito restantes em contribuição de Hennemann (2021), pois elas foram demonstradas em seu trabalho dissertativo e foram apresentadas por ele como sendo as combinações para $x_2 = u_2 + v_2 = zu_1 + z^2v_1$ e para $x_3 = u_3 + v_3 = z^2u_1 + zv_1$, de onde foram conferidas pelo próprio autor no trabalho citado, inclusive nas Relações de Girard de 3ª ordem.

Desse modo, as três raízes da equação cúbica seriam as seguintes:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}; \\
 x_2 &= z \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right) + z^2 \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right); \\
 x_3 &= z^2 \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right) + z \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right)
 \end{aligned} \tag{33}$$

Sendo que, enfim o resultado obtido em (33) são as formulações algébricas para as três raízes da equação polinomial de 3º grau.

2.3.3 Solução alternativa

Uma maneira alternativa, e até mais prática, de se encontrar a solução para equações de 3º grau, é através das *Relações de Girard de 2ª ordem*, apresentadas em (11) para a equação quadrática (6), mas sendo tratada aqui como uma equação de *polinômio mônico* ($a_2 = 1$), em que seus outros coeficientes representem o oposto da soma S das raízes ($a_1 = -S$), e o produto P das raízes ($a_0 = P$), reformulando-se a expressão da equação polinomial (Moreira, 1994), de onde assim, a equação quadrática, com alterações então citadas, ficará representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= 0 \Leftrightarrow \\
 x^2 - S \cdot x + P &= 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

Sendo as duas raízes (x_1 e x_2) da equação (34), as tais Relações de Girard em (11), serão exatamente S e P , a saber:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = S; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = P \tag{35}$$

Fazendo-se então uma mudança de variáveis específica para essa demonstração, em que será trabalhada com a soma das raízes cúbicas de cada solução, sendo mais especificamente da forma assim apresentada:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \quad (36)$$

Sendo trabalhada então essa expressão através de procedimentos específicos, em se elevando ao cubo ambos os membros da equação (36), de modo que com alguns procedimentos, e em se substituindo as expressões encontradas em (35), a equação então desenvolvida, findará como se segue:

$$\begin{aligned} y^3 &= (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3 \Leftrightarrow \\ y^3 &= x_1 + 3\sqrt[3]{x_2}(\sqrt[3]{x_1})^2 + 3\sqrt[3]{x_1}(\sqrt[3]{x_2})^2 + x_2 \Leftrightarrow \\ y^3 &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \Leftrightarrow \\ y^3 &= x_1 + x_2 + 3(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2} \Leftrightarrow \\ y^3 &= S + 3y\sqrt[3]{P} \Leftrightarrow \\ y^3 - (3\sqrt[3]{P})y &= S \end{aligned} \quad (37)$$

Onde essa equação agora desenvolvida, é da mesma estrutura da equação de 3º grau *reduzida* ($y^3 + py = q$), como em (19), sendo então seus parâmetros comparados de modo que: $p = -3\sqrt[3]{P} \Rightarrow \sqrt[3]{P} = -p/3 \Rightarrow \mathbf{P} = -\mathbf{p}^3/27$ e $\mathbf{S} = \mathbf{q}$, de forma tal que a equação quadrática, expressa em (34) e cujas raízes são x_1 e x_2 , ficará expressa agora na forma que se segue, com as devidas substituições:

$$x^2 - q \cdot x - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (38)$$

A solução para essa equação já fora apresentada na seção de Polinômios de 2º grau, mais especificamente em (7), e com as devidas substituições desses coeficientes desenvolverá o que se segue:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-q) \pm \sqrt{(-q)^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2} \Leftrightarrow \\
x &= \frac{q \pm \sqrt{4\left(\frac{q^2}{4}\right) + 4\left(\frac{p^3}{27}\right)}}{2} \Leftrightarrow \\
x &= \frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\left(\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{3^3}\right)} \Leftrightarrow \\
x &= \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (39)
\end{aligned}$$

Assim, as duas soluções da equação (7), como foram concluídas em (8), serão:

$$x_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}; \quad x_2 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (40)$$

De modo que em se substituindo essas raízes x_1 e x_2 na expressão (36) se terá:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (41)$$

Sendo justamente uma solução da equação cúbica, que se confere com o resultado (32), como se queria encontrar dessa forma alternativa, por meio da solução desenvolvida para a equação de 3º grau, $y^3 - (3\sqrt[3]{P})y = S$, em termos dos parâmetros S e P , que são a soma e o produto, respectivamente, das raízes (x_1 e x_2) na equação quadrática, $x^2 - S.x + P = 0$, em cujas outras duas soluções, o processo já foi descrito nessa própria seção através de teoria dos números complexos.

Dessa forma, as três soluções geradas por esse resultado, do mesmo jeito em que se gerou em (33), são as soluções para a equação $y^3 + py = q$, que em se retornando da mudança de variável (20), poder-se-á ter também as soluções para a equação geral cúbica, anteriormente apresentada na expressão (18), com todos os seus coeficientes (a_0 , a_1 , a_2 e a_3) de 3º grau, e não somente de maneira reduzida (Moreira, 1994).

2.3.4 Discriminante e estudo das raízes

Para dar continuidade a esse trabalho, no que tange ao estudo das raízes obtidas em (33) considerando o polinômio cúbico, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, numa forma mais reduzida, pensando como função do tipo:

$$f(x) = x^3 + px - q \quad (42)$$

Os zeros de (42) podem ser calculados justamente pela equação reduzida que já foi apresentada em (19). Ademais, dessa função, primeiramente já se pode dizer que por ela ser uma função polinomial, então é *contínua*, como confirmado por Costa (2020, p. 16) em uma proposição apresentada em seu trabalho, explicitando que toda “função polinomial, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R} ”.

Em outra linha, como na função f em (42), o termo dominante x^3 irá extrapolar muito mais rapidamente que os outros termos para o limite de f no infinito, então dessa forma:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad (43)$$

Assim, como f vai de $-\infty$ a $+\infty$ (passando por valores positivos e negativos) e é contínua, então ela deverá zerar em pelo menos um ponto. Dessa forma, a equação polinomial cúbica (resultante da função polinomial cúbica) sempre terá *pelo menos uma raiz real e no máximo três*, pela definição inicial de zeros de um polinômio de 3º grau.

Agora olhando para a raiz quadrada em (33) e observando que ela se repete em cada um dos dois termos do que fora obtido em cada solução x_1 , x_2 e x_3 , onde seu radicando será agora chamado também de *discriminante* (representado por δ novamente) e sendo este agora da equação cúbica, a saber,

$$\delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (44)$$

Primeiramente, sendo esse discriminante positivo ($\delta > 0$), duas das tais raízes serão *complexas e conjugadas* entre si ($x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, tal que $x_2 = \bar{x}_1$) e será apenas uma *outra raiz real* ($x_3 \in \mathbb{R}$). Observe que o discriminante será positivo se $(p/3)^3 > -(q/2)^2$.

Quando esse discriminante for nulo ($\delta = 0$), as *três raízes serão reais*, podendo-se ter duas situações: (i) duas raízes iguais ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tal que $x_1 = x_2$), ou seja, uma *raiz real simples* e *outra dupla*, o que na prática é como se fossem apenas *duas raízes* para a equação cúbica; (ii) *três raízes iguais* (raiz tripla), sendo assim: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tal que $x_1 = x_2 = x_3$, como bem afirmou e até exemplificou Costa (2020) em seu trabalho.

Finalmente, quando o discriminante negativo ($\delta < 0$), as três raízes serão todas *reais e distintas* ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tal que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$). Isso tudo confirma o que foi dito anteriormente de um polinômio cúbico ter entre uma e três raízes reais, e que nesse caso foram: uma raiz; “uma” ou “duas” raízes; e três raízes, respectivamente para os discriminantes positivo, nulo e negativo. Esse resultado foi compilado em um teorema exposto por Costa (2020, p. 68) e descrito pela própria autora em sua dissertação da seguinte forma:

Seja a equação polinomial de grau 3, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; com $a \neq 0$, coeficientes $\in \mathbb{R}$, raízes x_1, x_2 e x_3 e considere Δ_3 seu discriminante. Podemos afirmar que: Se $\Delta_3 < 0$, $p(x)$ tem três raízes reais distintas. Se $\Delta_3 = 0$, então $p(x)$ tem raízes múltiplas. Se $\Delta_3 > 0$, $p(x)$ tem duas raízes complexas e uma raiz real.

Onde essa representação para o discriminante da equação, como sendo a letra grega Δ (delta maiúsculo) pode ser trocada pela correspondente δ (delta minúsculo), como já se vinha sendo utilizado aqui nesse trabalho, por uma simples diferenciação futura entre o que se nomeia aqui como *discriminante* e posteriormente como a *variação de uma grandeza física*, para que não se haja confusão nesse sentido de simbologia.

Assim se conclui o estudo geral das raízes na equação polinomial do 3º grau, agora partindo para equações de graus superiores.

2.4 Polinômios de 4º grau

Para o estudo dos polinômios de 4º grau como apresentado em (2) com $n = 4$, e em se fazendo $p(x) = 0$, com um processo algébrico bem mais trabalhoso agora, esses polinômios apresentam a equação polinomial

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0 \quad (45)$$

Onde se usará um processo análogo ao desenvolvido nas equações cúbicas, para as deixar em uma forma mais reduzida (agora sem o termo de x^3), e assim essa equação pode ser do tipo:

$$x^4 + px^2 + qx = r \quad (46)$$

De modo que os parâmetros p , q e r devem ser expressos em termos dos coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , a_3 e a_4 da equação polinomial de 4º grau, para todo coeficiente pertencente ao corpo dos reais.

O processo para se encontrar uma formulação algébrica para as *equações quárticas* foi desenvolvido em sequência e em consequência dos resultados encontrados para as *equações cúbicas*, e inclusive de suas publicações em concomitância, como assim descreveu Nascimento (2015, p. 33), ao dizer que

[...] Ferrari obteve uma fórmula geral para as soluções das equações do quarto grau. Contudo Ferrari não foi reconhecido pela resolução. O mérito foi dado somente a Cardano, pois foi que, com toda sua esperteza, assim como fez com as soluções da equação do 3º grau, acabou publicando também em seu nome as da equação do 4º grau. Desse modo, esses resultados vieram a público, em 1545, na obra de Cardano, *Ars Magna*.

De fato, mesmo *Cardano* tendo publicado (juntamente com os seus resultados para as equações cúbicas), o procedimento para o cálculo das raízes quárticas ainda assim é atribuído ao seu discípulo *Ludovico Ferrari* e por isso popularmente é chamado de *Método de Ferrari*, a que se deterá esse trabalho a partir de agora, começando pelo processo de se encontrar a equação reduzida da equação polinomial de grau 4, procedimento esse de redução que foi usado até pelo próprio Ferrari e que será discutido a partir de agora.

2.4.1 Cálculo da equação reduzida

A motivação geral para essas resoluções na época, eram as disputas algébricas em que se envolviam os matemáticos em questão e assim Santos (2018, p. 8), contribuiu com sua apresentação a seguir:

Como era de se esperar, os matemáticos seguiram incessantemente à procura da solução algébrica geral da equação do 4º grau. Um desafio lançado a Cardano pelo matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi, a saber, "*Dividir 10 em três partes numa proporção contínua de forma que o produto das duas primeiras seja 6*", foi a motivação para que *Ludovico Ferrari*, matemático nascido em Bolonha em 1522, discípulo de Cardano, encontrasse tal solução. [...]

Ainda segundo a autora, foram desenvolvidas uma série de manipulações algébricas na equação a ser resolvida no desafio, onde se chegou então em uma *equação reduzida* análoga à equação apresentada em (46), a saber, $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$, e como o próprio *Cardano* não conseguiu resolvê-la, ele transferiu o desafio para seu discípulo *Ferrari*, que o assumiu e acabou encontrando a formulação geral, depois de muito trabalho, mas se utilizando somente das quatro operações que fundamentam a Aritmética, bem como também de algumas operações envolvendo radicais. (Santos, 2018).

Assim como o desenvolvimento de *Ferrari*, bem como no procedimento feito para as equações cúbicas, inicialmente se deve tentar eliminar um termo em (45), para que a equação possa ficar da forma reduzida (46), sendo o termo a ser anulado nesse caso o de grau 3, onde o primeiro passo é se fazer uma mudança de variáveis de forma que a variável x seja substituída por uma nova variável y , mas adicionada de uma certa constante c , onde essa constante deverá ser descoberta posteriormente nos procedimentos algébricos.

Corroborando também com isso, Nascimento (2015, p. 33), expôs o procedimento a ser utilizado, comentando que: “Tal método requer, também, a forma reduzida para a equação quártica, de tal maneira que não apareça o x^3 ”. Em suma, essa proposta então para a mudança de variável é:

$$x = y + c \quad (47)$$

Assim, fazendo a substituição desse valor escolhido, na equação polinomial (45), a fim de se eliminar pelo menos um termo:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(y + c) + a_2(y + c)^2 + a_3(y + c)^3 + a_4(y + c)^4 &= 0 \Leftrightarrow \\ a_0 + a_1(y + c) + a_2(y^2 + 2yc + c^2) + a_3(y^3 + 3y^2c + 3yc^2 + c^3) + a_4(y^4 + 4y^3c \\ &\quad + 6y^2c^2 + 4yc^3 + c^4) = 0 \Leftrightarrow \\ a_0 + a_1c + a_2c^2 + a_3c^3 + a_4c^4 + (a_1 + 2a_2c + 3a_3c^2 + 4a_4c^3)y \\ &\quad + (a_2 + 3a_3c + 6a_4c^2)y^2 + (a_3 + 4a_4c)y^3 + a_4y^4 = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Como o objetivo se é de chegar numa *equação reduzida*, da mesma forma de (46), então se deve escolher um valor de c em que possa anular na expressão (48) o termo cúbico na variável em questão, e ao fazer zerar o coeficiente de y^3 , tem-se

$$\begin{aligned}
a_3 + 4a_4c &= 0 \Leftrightarrow \\
c &= \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)
\end{aligned} \tag{49}$$

Substituindo em (48) esse valor de c encontrado, a expressão ficará então:

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right) + a_2 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^2 + a_3 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^3 + a_4 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^4 \\
&\quad + \left(a_1 + 2a_2 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right) + 3a_3 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^2 + 4a_4 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^3\right)y \\
&\quad + \left(a_2 + 3a_3 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right) + 6a_4 \left(-\frac{a_3}{4a_4}\right)^2\right)y^2 + a_4 y^4 = 0 \Leftrightarrow \\
&\quad \left[a_0 - \frac{a_1 a_3}{4a_4} + \frac{a_2 a_3^2}{4^2 a_4^2} - \frac{a_3^4}{4^3 a_4^3} + \frac{a_3^4}{4^4 a_4^3} + \left(a_1 - \frac{2a_2 a_3}{4a_4} + \frac{3a_3^3}{16a_4^2} - \frac{a_3^3}{16a_4^2} \right) y \right. \\
&\quad \left. + \left(a_2 - \frac{3a_3^2}{4a_4} + \frac{3a_3}{8a_4} \right) y^2 + a_4 y^4 \right] \cdot \frac{1}{a_4} = 0 \cdot \frac{1}{a_4} \Leftrightarrow \\
&y^4 + \left(\frac{a_2}{a_4} - \frac{3a_3}{8a_4^2} \right) y^2 + \left(\frac{a_1}{a_4} - \frac{a_2 a_3}{2a_4^2} + \frac{a_3^3}{8a_4^3} \right) y = \frac{3a_3^4}{4^4 a_4^4} - \frac{a_2 a_3^2}{4^2 a_4^3} + \frac{a_1 a_3}{4a_4^2} - \frac{a_0}{a_4} \tag{50}
\end{aligned}$$

Essa equação tem a mesma estrutura de (46), de onde os parâmetros p , q e r serão:

$$p = \frac{a_2}{a_4} - \frac{3a_3}{8a_4^2}; \quad q = \frac{a_1}{a_4} - \frac{a_2 a_3}{2a_4^2} + \frac{a_3^3}{8a_4^3}; \quad r = \frac{3a_3^4}{4^4 a_4^4} - \frac{a_2 a_3^2}{4^2 a_4^3} + \frac{a_1 a_3}{4a_4^2} - \frac{a_0}{a_4} \tag{51}$$

A partir de agora, em se tratando de polinômios de 4º grau, não se trabalhará mais com a *equação completa* (45) e sim com a *equação reduzida* (46), onde os coeficientes originais a_0 , a_1 , a_2 , a_3 e a_4 da equação polinomial foram restabelecidos aos resultados encontrados em (51) para os parâmetros p , q e r .

2.4.2 Método de Ferrari

Dessa forma, o processo agora terá como segunda fase, uma série de procedimentos algébricos, semelhantes aos feitos por Ferrari, onde se conseguirá, através de nova mudança de variáveis, encontrar uma equação do 3º grau, em que já se é solucionável, graças a *Fórmula de Cardano*, apresentada na seção anterior. Nessa temática Iezzi (2013, p. 99) corroborou dizendo:

O *Ars magna* incluía outra notável descoberta, devida a Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano: um método para reduzir equações do quarto grau a equações cúbicas. Neste ponto, praticamente, a álgebra iria ficar por quase dois séculos e meio.

Os matemáticos continuaram por muito tempo em tentativas *em vão* de se encontrar formulações algébricas para polinômios de graus maiores que os de 4º grau, pois na verdade não tinha como se desenvolver solução algébrica com radicais, mas que na época ainda não se sabia disso. De qualquer forma, esses polinômios de graus superiores serão tratados na próxima seção desse trabalho.

Agora voltando à parte procedimental, partindo-se então da equação reduzida de 4º grau ($x^4 + px^2 + qx = r$) e fazendo agora uma devida mudança de variável em função de dois novos parâmetros u e v , onde ao se somar ($ux^2 + v$) em cada membro da equação, ela ficará:

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + (ux^2 + v) &= r + (ux^2 + v) \Leftrightarrow \\ x^4 + ux^2 + v - r &= ux^2 + v - px^2 - qx \Leftrightarrow \\ x^4 + ux^2 + v - r &= (u - p)x^2 - qx + v \end{aligned} \quad (52)$$

O que se mostram estruturas de uma equação *biquadrada* no primeiro membro e uma equação *quadrática* no segundo membro. Assim, a ideia agora é apresentar essa equação em função de quadrados perfeitos em ambos os membros da equação, chegando a uma equação do tipo: $(x^2 - a)^2 = ((u - p)x - b)^2$, onde dessa forma, as virtuais soluções (a e b) em cada membro, devem ter multiplicidade 2 (por característica das próprias expressões em ambos os membros) e para que isso aconteça, os *discriminantes de segunda ordem* (13) devem zerar nas funções de cada membro (Santos, 2019).

Então, o objetivo é se escolher os parâmetros u e v em (52) de modo que obedecem a condição citada de se zerar os discriminantes de segundo grau ($\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$) e assim ficando a seguinte expressão: $a_1^2 = 4a_2a_0$, onde aplicando inicialmente no primeiro membro ($x^4 + ux^2 + v - r$):

$$\begin{aligned} u^2 &= 4(v - r) \Leftrightarrow \\ u^2 &= 4v - 4r \Leftrightarrow \\ 4v &= u^2 + 4r \Leftrightarrow \\ v &= \frac{u^2}{4} + r \end{aligned} \quad (53)$$

Da mesma forma, aplicando $a_1^2 = 4a_2a_0$ novamente agora no segundo membro, $(u - p)x^2 - qx + v$, além de substituir também o valor de v já encontrado:

$$\begin{aligned}
 (-q)^2 &= 4v(u - p) \Leftrightarrow \\
 q^2 &= 4v(u - p) \Leftrightarrow \\
 q^2 &= (u^2 + 4r)(u - p) \Leftrightarrow \\
 q^2 &= u^3 - pu^2 + 4ru - 4rp \Leftrightarrow \\
 u^3 - pu^2 + 4ru - 4rp - q^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{54}$$

Se confirmando o que foi dito anteriormente, que se deveria aparecer um polinômio do 3º grau na nova variável u , onde $a_0 = -4rp - q^2$; $a_1 = 4r$; $a_2 = -p$; $a_3 = 1$, que são os seus coeficientes, e se utilizando o que já foi discutido na seção anterior, a equação (54) pode ser apresentada na sua forma reduzida ($x^3 + p'x = q'$), de modo que os valores dos parâmetros cúbicos aqui descritos como p' e q' , sendo calculados de acordo com (24), a saber,

$$\begin{aligned}
 p' &= \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3^2} \Leftrightarrow \\
 p' &= \frac{3(4r) - (-p)^2}{3} \Leftrightarrow \\
 p' &= \frac{12r - p^2}{3} \Leftrightarrow \\
 p' &= 4r - \frac{p^2}{3}
 \end{aligned} \tag{55}$$

Em continuidade, calculando agora o parâmetro q' e novamente de acordo com as relações apresentadas em (24):

$$\begin{aligned}
 q' &= \frac{9a_1a_2a_3 - 27a_0a_3^2 - 2a_2^3}{27a_3^3} \Leftrightarrow \\
 q' &= \frac{9(-p).4r - 27(-4rp - q^2) - 2(-p)^3}{27} \Leftrightarrow \\
 q' &= \frac{-36rp + 108rp + 27q^2 + 2p^3}{27} \Leftrightarrow \\
 q' &= \frac{72rp + 27q^2 + 2p^3}{27}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Compilando então os resultados para p' e q' :

$$p' = 4r - \frac{p^2}{3}; \quad q' = \frac{72rp + 27q^2 + 2p^3}{27} \quad (57)$$

E dessa forma, de acordo com o resultado para uma das raízes da equação cúbica já apresentada em (33), ficando da seguinte forma:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q'}{2} + \sqrt{\left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q'}{2} - \sqrt{\left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3}} \quad (58)$$

Onde a escolha pela raiz mais simples em (33) não foi só por facilidade, mas porque tanto faz se escolher qualquer uma das três raízes, que o resultado final pelo Método de Ferrari será sempre o mesmo, como mostrou Hennemann (2021, p. 53), em que não só contribuiu com essa discussão, mas também demonstrou em detalhes em um exemplo numérico, como as três raízes para α (variável utilizada por ele no método de Ferrari) geram as mesmas respostas para a variável x a ser descoberta:

Analizando agora, as quatro raízes encontradas para cada valor de α , percebemos que o grupo de raízes é o mesmo, apenas dispostas de um modo diferente. Portanto, basta tomar um valor apenas de α que encontraremos duas equações do segundo grau, a solução de cada uma delas gera duas raízes, logo teremos as quatro raízes da equação do quarto grau pelo método de Ferrari.

Dando continuidade ao desenvolvimento algébrico, com esse resultado encontrado para u , apresentado em (58) e sabendo que $v = (u^2/4) + r$, como mostrado em (53), podendo v também ser escrito como:

$$v = \frac{1}{4} \left[\sqrt[3]{\frac{q'}{2} + \sqrt{\left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q'}{2} - \sqrt{\left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3}} \right]^2 + r \quad (59)$$

Voltando-se então ao resultado mostrado em (53), onde $v = r + u^2/4$, ou melhor: $v - r = u^2/4$, e assim substituindo no primeiro membro de (52), bem como o outro resultado, $q^2 = 4v(u - p)$,

No desenvolvido em (54), sendo melhor analisado como $v = q^2/4(u - p)$, a ser substituído no segundo membro de (52), com o intuito de substituir os valores de v para que a equação não se ficasse mais em sua função, e dessa forma, tornar-se somente em termos da variável u , e da forma em que se queria, com *raízes duplas* em ambos os membros da equação quártica (52) a ser desenvolvida.

Dessa forma, após as substituições devidas dos valores das variáveis em que se foi descrito acima se terá:

$$\begin{aligned}
 x^4 + ux^2 + v - r &= (u - p)x^2 - qx + v \Leftrightarrow \\
 x^4 + ux^2 + \frac{u^2}{4} &= (u - p)x^2 - qx + \frac{q^2}{4(u - p)} \Leftrightarrow \\
 \left(x^2 + \frac{u}{2}\right)^2 &= \left(x\sqrt{u - p} - \frac{q}{2\sqrt{u - p}}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 x^2 + \frac{u}{2} &= \pm \left(x\sqrt{u - p} - \frac{q}{2\sqrt{u - p}}\right) \tag{60}
 \end{aligned}$$

Onde o valor de u que é resultado da equação de 3º grau (54) e já foi encontrado em (58), deve ser substituído em (60), de onde esse resultado produzirá duas equações de 2º grau, uma com a operação (+) e a outra com a operação (−), o que por consequência, se produzirão as quatro raízes tão almejadas da equação quártica trabalhada até aqui. Dessa forma, como bem explanou Santos (2019, p. 86), “encontrar as soluções de uma equação do quarto grau consiste em trabalhar com equações quadráticas e cúbicas” e que na verdade, é esse sim o procedimento, como vem sendo demonstrado.

Daí então, de (60) se terão as duas equações a seguir:

$$\begin{aligned}
 x^2 + x\sqrt{u - p} + \frac{1}{2}\left(u - \frac{q}{2\sqrt{u - p}}\right) &= 0; \\
 x^2 - x\sqrt{u - p} + \frac{1}{2}\left(u + \frac{q}{2\sqrt{u - p}}\right) &= 0 \tag{61}
 \end{aligned}$$

Onde as suas soluções para esse tipo de equação (quadráticas) já foram apresentadas aqui anteriormente em (7) e lembrando também que o valor de u já fora expresso em (58). Assim, resolvendo a primeira equação de (61), o seu par de soluções (x') correspondentes ficará:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{-\sqrt{u-p} \pm \sqrt{(u-p) - 2\left(u - \frac{q}{\sqrt{u-p}}\right)}}{2} \Leftrightarrow \\
 x' &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{u-p} \pm \sqrt{-u-p + \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \right)
 \end{aligned} \tag{62}$$

E da mesma forma, resolvendo-se a segunda equação de (61), o seu par de soluções (x'') correspondentes, ficará representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x'' &= \frac{-(-\sqrt{u-p}) \pm \sqrt{(u-p) - 2\left(u + \frac{q}{\sqrt{u-p}}\right)}}{2} \Leftrightarrow \\
 x'' &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{u-p} \pm \sqrt{-u-p - \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \right)
 \end{aligned} \tag{63}$$

Enfim, a solução final com as quatro raízes, onde x_1 e x_2 serão, por exemplo, as raízes correspondentes ao par de soluções (x'), enquanto que x_3 e x_4 serão, por conseguinte, as raízes correspondentes ao par de soluções (x''):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{u-p} + \sqrt{-u-p + \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \right); \\
 x_2 &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{u-p} - \sqrt{-u-p + \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \right); \\
 x_3 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{u-p} + \sqrt{-u-p - \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \right); \\
 x_4 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{u-p} - \sqrt{-u-p - \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \right)
 \end{aligned} \tag{64}$$

Essas expressões encontradas em (64) são resultantes de um árduo trabalho de bons matemáticos que buscaram por anos a fio estas soluções polinomiais de até 4º grau, bem como de tentativas para se chegar em soluções algébricas para graus superiores, discutido a posteriori.

2.4.3 Solução alternativa

Existe um processo alternativo ao Método de Ferrari para se encontrar também uma formulação para a *equação quártica*, análogo à solução alternativa para a *equação cúbica*, que foi demonstrada anteriormente na seção de Polinômios de 3º grau, se utilizando das *Relações de Girard* de ordem inferior ao que se procura a solução polinomial, onde agora se partirá então das relações de 3ª ordem, no intuito de se resolver então a equação de 4º grau, como apresentada em (45) nessa seção (Moreira, 1994).

Assim, em similaridade com o procedimento da seção anterior, e analogamente, se pensando agora em um polinômio cúbico do tipo mônico ($a_3 = 1$), e onde os outros coeficientes podem ser encontrados através das Relações de Girard generalizadas, que foram demonstradas em (12) para $n = 3$:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \Rightarrow S_1 = -a_2 \Rightarrow \mathbf{a_2 = -S_1} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} \Rightarrow S_2 = a_1 \Rightarrow \mathbf{a_1 = S_2} \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \Rightarrow S_3 = -a_0 \Rightarrow \mathbf{a_0 = -S_3} \end{cases} \quad (65)$$

Onde dessa forma, a equação cúbica da forma (18), com as alterações então citadas, ficará representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (66)$$

Sendo as três raízes x_1 , x_2 e x_3 da equação (66) e de acordo com as três Relações de Girard em (65), então fazendo uma mudança de variáveis específica para essa demonstração, trabalhada a partir da soma das raízes quadradas de cada raiz, sendo mais especificamente assim apresentada:

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \quad (67)$$

Elevando-se então ao quadrado ambos os membros da equação (67):

$$\begin{aligned}
y^2 &= (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})^2 \Leftrightarrow \\
y^2 &= x_1 + x_2 + x_3 + 2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_1x_3} + 2\sqrt{x_2x_3} \Leftrightarrow \\
y^2 &= S_1 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \Leftrightarrow \\
y^2 - S_1 &= 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \Leftrightarrow \\
(y^2 - S_1)^2 &= 4(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 \Leftrightarrow \\
(y^2 - S_1)^2 &= 4[(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})] \Leftrightarrow \\
(y^2 - S_1)^2 &= 4[S_2 + (2\sqrt{S_3})y] \Leftrightarrow \\
y^4 - 2S_1y^2 + S_1^2 &= 4S_2 + 8y\sqrt{S_3} \Leftrightarrow \\
y^4 - 2S_1y^2 - (8\sqrt{S_3})y &= 4S_2 - S_1^2
\end{aligned} \tag{68}$$

Em comparação com a equação polinomial quártica na forma reduzida, apresentada em (46), agora na forma: $y^4 + py^2 + qy = r$, onde seus parâmetros comparados da forma que se apresentam como:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2S_1 = p \Rightarrow S_1 = -\frac{p}{2} \\ 4S_2 - S_1^2 = r \Rightarrow 4S_2 - \left(-\frac{p}{2}\right)^2 = r \Rightarrow S_2 = \frac{p^2}{16} + \frac{r}{4} \\ -8\sqrt{S_3} = q \Rightarrow \sqrt{S_3} = -\frac{q}{8} \Rightarrow (\sqrt{S_3})^2 = \left(-\frac{q}{8}\right)^2 \Rightarrow S_3 = \left(\frac{q}{8}\right)^2 \end{array} \right. \tag{69}$$

Dessa forma, a equação cúbica, como em (66), de raízes x_1 , x_2 e x_3 , ficará assim expressa, através das devidas substituições de S_1 , S_2 e S_3 :

$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \left(\frac{p^2}{16} + \frac{r}{4}\right)x - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \tag{70}$$

A solução para essa equação já fora apresentada na seção de Polinômios de 3º grau, mais especificamente em (32), mas para a equação reduzida $x^3 + p'x = q'$, em que, com suas devidas substituições dos parâmetros cúbicos p' e q' , onde esse resultado para os coeficientes foi resolvido e apresentado em (24), de modo que com os procedimentos algébricos específicos, tais valores se tornarão:

$$\begin{cases} p' = \left(\frac{p^2}{16} + \frac{r}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ q' = \frac{p^3}{96} + \frac{rp}{24} - \left(\frac{q}{8}\right)^2 - \left(\frac{p}{6}\right)^3 \end{cases} \quad (71)$$

De modo que a solução (32), em termos dos parâmetros cúbicos, p' e q' , finda-se expressa da seguinte forma:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q'}{2} + \sqrt{\left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q'}{2} - \sqrt{\left(\frac{q'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p'}{3}\right)^3}} \quad (72)$$

Onde os resultados para as raízes x_1 , x_2 e x_3 já foram desenvolvidos em (33), assim podendo ser substituídos em (67), para assim se achar o valor de y (solução da equação quártica) de modo que, $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, formará o conjunto solução da equação de 4º grau, como se queria encontrar nas *quatro* raízes possíveis, visto da raiz quadrada poder admitir dois valores *complexos* (Moreira, 1994).

Com o sucesso desse procedimento feito para as equações de 3º e 4º graus, e sempre as reduzindo a uma equação de grau inferior, se poderia pensar em uma solução geral para todas equações polinomiais de qualquer grau, ou pelo menos, que o processo funcionasse para graus superiores, pois por exemplo, para o 5º grau, se resolveria, pois cairia numa equação de 4º grau, em que já se sabe solucionar, e assim por diante, sendo esse procedimento generalizado para o *enésimo* grau. Entretanto, como será mostrado na próxima seção, não é possível obter qualquer generalização.

2.5 Polinômios de graus superiores

Matemáticos brilhantes trabalharam de maneira intensa e numa busca incessante por até mais de um século, com inúmeras tentativas de se chegar em soluções algébricas para equações de graus maiores que quatro, mas sem obter sucesso. De forma que hoje se sabe muito bem que não existem expressões algébricas gerais para se resolverem equações polinomiais para graus superiores a $n = 4$, e o que se tenta fazer nesses casos, é se achar uma ou mais raiz por tentativa e assim simplificar o polinômio, reduzindo seu grau até se chegar num polinômio que se tenha algum tipo de formulação, facilitando assim sua resolução (Andrade, 1989).

Corroborando com a linha histórica a respeito dessas formulações para as equações polinomiais, Santos (2018, p. 9), afirmou em seu trabalho que, em meados de 1770, o grande “matemático francês Joseph Louis Lagrange conseguiu um resultado profundo, o qual unificava os argumentos nos casos das equações polinomiais 3º e 4º graus e que também deixava claro porque tal argumento falhava no caso da equação polinomial do 5º grau”.

Mas ainda assim não era muito claro o porquê de não conseguirem de forma alguma as tão almejadas formulações algébricas para polinômios de graus maiores que 4. Sobre isso, Iezzi (2013, p. 146) trouxe uma contribuição ímpar, expondo até em relação à demora nesse processo, dizendo que:

Durante dois séculos e meio, aproximadamente, foram infrutíferos os esforços dos especialistas em face dessa questão. Diante de tanto esforço inútil, a partir de um certo momento começou-se a duvidar de que, como se diz hoje, as equações de grau ≥ 5 fossem **resolúveis por radicais**, como o são as de grau dois, três e quatro.

Tudo indicava então que o matemático *Paolo Ruffini*, já no século XIX, teria a difícil missão de demonstrar que era impossível qualquer tipo de resolução por meio de radicais e de operações simples de equações polinomiais a partir da 5ª ordem, porém ainda existiam alguns problemas operacionais. Em uma cronologia dos fatos, *Niels Abel*, até provou que uma equação polinomial do 5º grau, não poderia ter uma formulação algébrica, mas ele não foi específico em relacionar isso a toda função polinomial de ordem superior a 5, ficando ainda uma lacuna nessa comprovação de um modo geral (Oliveira, 2017).

Ainda em contribuição nessa linha do tempo descrita, Oliveira (2017, p. 11) também escreveu sobre o próximo matemático importante, *Évariste Galois*, justamente quem conseguiu responder a esse questionamento que já vinha se estendendo sem respostas por mais de século:

Foi em 1843, através de uma carta direcionada à Academia de Ciências de Paris, que findou-se a procura por tal demonstração. Nela, Joseph Liouville informou que o trabalho deixado por Evariste Galois apresentava um método para decidir se um polinômio de grau maior do que 4 é ou não solúvel por meio de radicais.

Quando o autor disse que *Galois* tinha deixado o trabalho, é porque ele após várias tentativas de entregar esse trabalho à Academia, acabou deixando sua última versão do trabalho em posse de um amigo antes de morrer em um duelo aos 21 anos no ano de 1832. Ele que deu o pontapé inicial para a álgebra moderna, criando o conceito de *grupo*, onde dada uma coleção G de permutações do conjunto das raízes de uma equação, sempre que de duas funções f e g pertencentes a G , suas inversas (f^{-1} e g^{-1}) e a função composta, $g \circ f = g(f(x))$, também pertençam ambas a essa mesma coleção G , definindo assim um *Grupo de Galois* (Iezzi, 2013).

Ainda em contribuição, Iezzi (2013, p. 197) em texto sobre o matemático, expôs:

A teoria de Galois associa a cada equação algébrica um conveniente grupo de permutações de suas raízes. E estabelece que a equação é resolúvel por radicais se, e somente se, esse grupo é de um certo tipo (definido na teoria). Por fim conseguia-se uma caracterização da resolubilidade por radicais! E como, para $n \geq 5$, sempre há equações de grau n , cujo grupo não é do tipo definido por Galois, o próprio teorema de Ruffini-Abel [...] passava a ser uma consequência da teoria de Galois.

Sendo então S_n (*Grupo Simétrico* a um *Grupo de Galois*), conceito este que se torna primordial para esse resultado em relação a solubilidade de uma equação polinomial, já que pela teoria, um polinômio tem solução por meio de radicais, se somente se, seu *Grupo de Galois*, exprime também uma solubilidade (Lima, 2008).

Enfim, agora com o conceito de grupo bem definido, a generalização se dará a partir do fato de que, segundo Santos (2019, p. 88), se sabe

[...] que S_n é insolúvel para $n \geq 5$, mas nada impede que este tenha um subgrupo solúvel. Imaginemos então uma equação de grau 5, cujo grupo de Galois é isomorfo a um subgrupo solúvel de S_5 , assim sua solução seria sim expressa por meio de radicais. Porém, se o grupo de Galois for isomorfo ao próprio S_5 , que é insolúvel, então essa equação não tem suas soluções expressas por meio de radicais.

Assim, por conta da ausência de generalidade em equações do 5º grau, se pode dizer então, que nem toda equação polinomial desse grau tem solução algébrica por radicais, e que assim, não se pode formular algebricamente uma solução, visto que tais formulações algébricas realmente só poderiam ser expressas até equações polinomiais de 4º grau, como foi trabalhado até a seção anterior.

Dessa forma, não se quer dizer que uma equação de grau maior que 4, não permita se encontrar soluções para ela, mas que não há uma generalização que possa servir para toda e qualquer equação dessa ordem. Sobre isso também, que Iezzi (2013, p. 197) corroborou exemplificando:

A título de ilustração, registramos que se p é um número primo positivo, então a equação $x^5 + px + p = 0$ não é resolúvel por radicais, o que se demonstra nos cursos ou textos da teoria de Galois. Mas há polinômios de grau > 5 que o são, por exemplo, $x^{11} - 1 = 0$, cuja solução (sobre a qual se infere a afirmação feita) encontra-se num escrito do matemático francês A. T. Vandermonde (1735-1796), editado em 1771, ou seja, décadas antes do nascimento de Abel e Galois.

Diante disso, nesse trabalho não se tentará encontrar qualquer tipo de formulação algébrica para representar soluções de equações polinomiais de ordens superiores ao 4º grau, partindo-se então agora para o estudo dos movimentos de partículas, de modo que as equações da posição sejam representadas através dos polinômios de até o 4º grau.

3 MOVIMENTOS DE PARTÍCULAS

Como princípio básico e motivador para o desenvolvimento desse trabalho se dá no fato de apresentar conceitos básicos relacionados aos fenômenos físicos, por um embasamento matemático, fazendo assim uma ponte entre essas duas disciplinas (Física e Matemática), e foi justamente sobre isso que Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 12) corroboraram com a ideia dizendo que de uma maneira usual, “expressam-se as leis da Física por meio de equações matemáticas. Por isso, para compreender a Física é necessário empregar procedimentos matemáticos, que o leitor deve dominar como ferramenta imprescindível”.

Em continuidade, para que se entenda a Física não apenas como simplesmente uma das disciplinas que compõem o currículo básico do estudante, mas que representa um conceito bem maior, de onde ainda os autores Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 11), em resumo, definiram com maestria assim:

A Física é a ciência das coisas naturais. Ao mergulhar sua atenção na Física, você deve saber que está entrando em contato com a própria natureza que o cerca. Estudar Física é observar e entender melhor os fenômenos da natureza, que fazem parte do nosso dia-a-dia.

Assim, o estudo polinomial desenvolvido nesse trabalho até agora, se deu no intuito de poder resolver situações e problemáticas do cotidiano dos estudantes e que surgem em meio a observações na própria natureza que os cerca, e mais precisamente no estudo dos *movimentos*, que são citados por professores da educação básica em diversos ambientes escolares, bem como vistos em pesquisas científicas ou estudos desenvolvidos pelos próprios educandos, mesmo que por curiosidade.

Essa motivação advinda de exemplos cotidianos, levando o estudante a ver algumas situações-problema que recaem no estudo de polinômios, que podem ter graus maiores que dois, até onde comumente se estuda na educação básica, visto da problemática de natureza curricular nas escolas, pois atualmente se prega corriqueiramente como necessário uma grande motivação para o entendimento de conceitos matemáticos; além de por muitas vezes as situações-problema a serem enfrentadas bem na realidade do estudante, mas mesmo estes problemas sendo atraentes e intrigantes, ainda há uma perda notória de se ver também situações interessantes como essas, em que se podem gerar polinômios de graus maiores que dois, que comumente são estudados no currículo escolar (Carneiro, 1999).

Justamente nessa temática, que Carneiro (1999, p. 31-32) contribuiu ainda mais, ao mostrar que nessas situações advém que tal

equação é do 3º grau, o que, pelos hábitos dominantes, torna esse problema proibitivo para os alunos do ensino médio, pois trata-se de um assunto “fora do programa”. [...] Para aproveitar problemas desse tipo em nosso ensino médio, precisamos arranjar uma maneira de resolver equações polinomiais de grau maior que dois. Será possível fazer isso, sem nos afastarmos dos temas usuais do curso secundário?

É justamente sobre essa possibilidade, que o atual trabalho apresenta como proposta interdisciplinar: trabalhar-se equações polinomiais até de graus maiores que dois e suas aplicações nos movimentos de partículas, mas estando esses movimentos sujeitos a restrições específicas, no intuito de que esses conceitos possam ser estudados com efetividade no âmbito curricular da educação básica.

Em definição do que se pode tratar como *partícula*, que Symon (1996, p. 21) assim contribuiu dizendo que, a princípio,

[...] deve-se descrever movimentos, e o mais fácil para isso é o de uma partícula, isto é, um objeto cujo tamanho e estrutura interna sejam desprezíveis para o problema em que se está interessado. A Terra, por exemplo, pode ser olhada como uma partícula, na maioria dos problemas sobre movimento planetário, mas certamente não poderá sê-lo no caso de problemas terrestres.

Posteriormente se entrará mais nos detalhes, que dizem respeito a essas condições específicas para o estudo desses movimentos de tais partículas, bem como suas aproximações nas diversas situações cotidianas.

3.1 Movimentos em geral

3.1.1 Proposta interdisciplinar

Fazendo então agora uma ligação de tudo o que fora desenvolvido sobre polinômios para o estudo dos movimentos de partículas, onde seus conceitos são desenvolvidos, a nível de Ensino Médio, no ramo da *Mecânica*, estudado na disciplina de Física, e que segundo Symon (1996, p. 21) a “Mecânica é a ciência que estuda o movimento de corpos físicos”, e onde se tem mais precisamente na conhecida *Cinemática*, em que Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 19) assim colaboraram definindo que: “*cinemática* é a parte da Física que estuda os movimentos” desses tais corpos físicos, entretanto, isso em detrimento do que possa ter sido o causador desse movimento precisamente.

Contudo, isso se dará com toda base teórica necessária da Matemática, o que se faz necessário uma formação docente cada vez mais interdisciplinar, principalmente em se falando dessas duas componentes curriculares, de onde Silva (2020, p. 20) assim corroborou, mostrando que, nesse contexto interdisciplinar,

[...] é necessário que professores tenham uma formação que estabeleça essa interação, já que atualmente isso não ocorre. Então professores que tenham essa visão terão mais oportunidade e aproveitamento com seus alunos, visto que acontecerá contextualização das disciplinas. Igualmente, podemos observar que seria quase que impossível aprender Física sem ter conhecimento em Matemática.

Em outras palavras, a Matemática é primordial nesse processo de aprendizagem das ciências naturais em geral e não só da Física, pois ela é a linguagem utilizada para demonstrar e explicar os diversos fenômenos da natureza, pois o conceito teórico requer o embasamento e rigor matemático necessário, mesmo que às vezes se façam aproximações, restrições, ou mesmo tentativas no processo de resolução.

Além disso, cabe-se ressaltar quanto a essa base matemática dos próprios estudantes, em que se deve ter uma pré-existência mínima, senão acaba com uma quase impossibilidade ao professor, de desenvolver conceitos matemáticos que ficam cada vez mais abstratos, onde sobre isso, Santiago (2016, p. 38) contribuiu:

A principal função do sistema educacional se refere à difícil tarefa de reconhecer dentro de todo um vasto universo de ideias e conceitos adquiridos com o tempo pelo estudante, o que ele realmente precisa saber para continuar com seu processo de aprendizagem e fazer com que ele consiga encaixar tudo isso em sua vida de uma maneira totalmente significativa.

Daí que vem a necessidade de nivelamentos e revisão de conteúdos passados, no intuito de colocar os estudantes numa situação equiparada de base mínima para absorver essas novas teorias mais avançadas. Agora, ao se tratar de polinômios (alvo desse trabalho) e seguindo na temática da importância matemática para as ciências naturais, Andrade (2000, p. 40) disse:

Equações polinomiais surgem na resolução de diversos tipos de problemas, sejam eles problemas algébricos, geométricos ou em outras ciências. Muitas técnicas de resolução desse tipo de equação exigem que se dê inicialmente uma estimativa (um “chute”) para uma raiz, mesmo que seja uma estimativa grosseira.

Ainda em seu trabalho, Andrade (2000, p. 40) desenvolveu um estudo sobre as *cotas superiores* e *cotas inferiores* para as raízes de polinômios, criando-se assim um intervalo menor para se encontrar essas raízes por tentativa de estimação inicial, como fora comentado, mas que isso não se deterá como estudo nesse trabalho dissertativo.

Por outro lado, dos principais problemas enfrentados pelos professores de Física no Ensino Médio, um dos maiores é o que se chama de “*matematização*” do ensino, em que se tem uma linha muito tênue entre demonstrações apuradas de conceitos físicos complexos por meio de formulações algébricas coerentes, e a simples receita sistemática de uma aplicação de dados em uma “*fórmula matemática*”, por exemplo. De qualquer forma, isso não pode ser dissociado, mas se deve cuidar para que não se torne mecanizado ou sem qualquer rigor teórico no processo de ensino e aprendizagem (Silva, 2018).

Uma das maneiras de se resolver essa problemática é tentar trazer esses formalismos abstratos para exemplos concreto do cotidiano do estudante, mas como a natureza não é simples de ser explicada e demonstrada, visto que há uma abrangência muito grande de possibilidades a serem estudadas em geral, o que tornam essas formulações algébricas e as conceituações ainda mais complexas.

Para isso, o ideal é esse processo de ensino por meio da *Aprendizagem Significativa*, como descreveu Santiago (2016, p. 37):

[...] a aprendizagem significativa se mostra um conceito bastante relevante e estruturado para tentar solucionar alguns problemas de um sistema educacional defasado e por vezes, obsoleto no que diz respeito às suas técnicas. [...] Como consequência eles precisam aprender de uma maneira tal que seu aprendizado não seja desperdiçado ou perdido pelo caminho, mas que se constituam parte das suas vidas.

Fazendo o estudante perceber tudo isso em meio a uma aprendizagem cada vez mais significativa e menos superficial.

3.1.2 Condições e restrições

Em uma tentativa de simplificar o estudo geral dos movimentos, principalmente no momento inicial, se colocam *condições* ou *restrições*, para que as demonstrações se tornem mais palpáveis, e é justamente sobre isso, que Serpa (2018, p. 16) contribuiu significativamente nessa temática, dizendo que:

Para fazer uma descrição de um movimento de um móvel são realizadas algumas simplificações. Várias dessas podem ser consideradas quase insignificantes, tais como as mudanças ocorridas na cor céu e as posições do sol, até as ondas luminosas, toda essa beleza é desconsiderada, e inclusive mesmo os ventos que podem influenciar, dependendo da forma do corpo, o movimento. Será considerado, muitas vezes, um corpo de forma ideal, isto é, é desconsiderada até as dimensões dele, e considera-se apenas um ponto, que será chamado de partícula, ponto material. [...]

A motivação desse trabalho se dá nos movimentos e em suas nuances, mas como discutido anteriormente, tudo será tratado por meio de condições específicas e de algumas restrições, de forma a se trabalhar equações de movimento de partículas para um público-alvo de estudantes da educação básica.

Assim, para se fazer um estudo dos movimentos dessas partículas, esse trabalho se deterá apenas aos casos específicos de movimentos retilíneos, ou seja, se deslocando somente pelo *espaço unidimensional*; além de se deter apenas a *partículas adimensionais*, conhecidas comumente como *pontos materiais*, de uma tal maneira que Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 19) contribuíram ao definir esse termo dizendo o seguinte: “Um corpo é considerado *ponto material* quando suas dimensões físicas podem ser desprezadas para o estudo de seu *movimento* em uma determinada situação”.

Além disso, os mesmos autores ainda definiram que ao se escolher um *referencial* qualquer, seu próprio sistema de coordenadas define o que geralmente é denominada como a *posição* da partícula (ponto material) em seu movimento fisicamente estudado (Bosquilha; Pelegrini, 2003), como apresentado a seguir na Figura 1.

Figura 1 – Posição em uma Trajetória



Fonte: Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 20).

Falando *classicamente* neste trabalho, os referenciais adotados devem ser *inerciais* (onde a mecânica newtoniana é válida), para que assim não haja nenhuma perda de generalidade, e que tais movimentos fossem tratados em termos *relativísticos* ou em orientação de referenciais *não-inerciais*, onde a mecânica newtoniana não é válida (Halliday; Resnick; Walker, 2016).

Corroborando nessa temática, e também para explicar essa nomenclatura utilizada como *Física Newtoniana* que os autores Halliday, Resnick e Walker (2012, p. 91) descreveram e exemplificaram no que se segue:

A mecânica newtoniana não pode ser aplicada a todas as situações. Se as velocidades dos corpos envolvidos são muito elevadas, comparáveis à velocidade da luz, a mecânica newtoniana deve ser substituída pela teoria da relatividade restrita de Einstein, que é válida para qualquer velocidade. Se os corpos envolvidos são muito pequenos, de dimensões atômicas ou subatômicas (como, por exemplo, os elétrons de um átomo), a mecânica newtoniana deve ser substituída pela mecânica quântica.

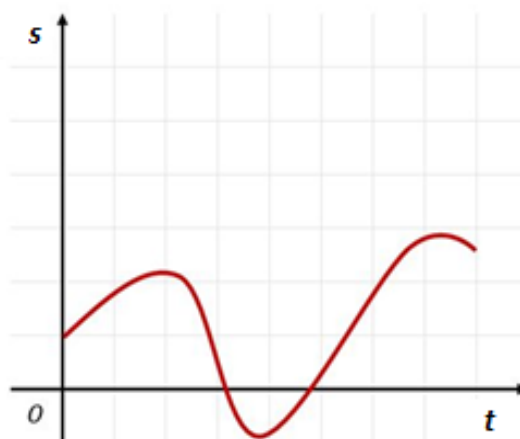
Dessa maneira, a *Mecânica Clássica* (Newtoniana) trata de um modelo específico, com restrições de duas grandes teorias generalizadas (*Relatividade* e *Mecânica Quântica*), mas que em se tratando de situações cotidianas, servem como aplicações em movimentos dos mais variados possíveis (Halliday; Resnick; Walker, 2012), e que serão desenvolvidos em sequência.

Em geral, o sistema de coordenadas utilizado para o referencial adotado é o Sistema de Coordenadas Cartesianas, onde é mais fácil sua aplicação, principalmente para movimentos retilíneos, e nessa temática Nussenzveig (2002, p. 12) contribuiu descrevendo que esse sistema,

[...] definido por uma origem O e dois eixos ortogonais, em relação ao qual a posição de um ponto P é definida por suas coordenadas x (abscissa) e y (ordenada): $V(x,y)$. Um sistema deste tipo é empregado correntemente para localizar uma rua na planta de uma cidade, ou uma cidade num atlas geográfico.

Contudo, como os movimentos são unidimensionais (retilíneos), como já discutido anteriormente, pode-se usar somente um desses eixos coordenados (adotando-se o eixo- y) para corresponder à trajetória orientada da partícula (até mesmo por facilidade de demonstrações), e a partir de então, descrever o seu movimento em relação a cada instante de tempo (adotados no eixo- x), como será desenvolvido posteriormente. Dessa forma, as posições apresentadas numa trajetória qualquer, como na Figura 1 serão a partir de então apresentadas como as imagens da função de acordo como se apresenta na Figura 2 a seguir:

Figura 2 – Função $s = f(t)$



Fonte: Neta, Miguel (2017, com adaptações).

Diante disso tudo, a medida da posição (que será representada aqui pela variável s) da partícula, que pode ser determinada com precisão a qualquer momento em função do *tempo* (representado aqui pela variável t), no contexto que se pode ser aqui definido (Figura 2) como uma *função* f dada por $s = f(t)$. Isso numa definição usual de função, como sendo $f: A \rightarrow B$, onde A representa o seu *domínio* e B o seu *contradomínio*, e que, para um melhor sentido físico desses movimentos, serão tratados nesse trabalho só em termos de subconjuntos dos Números Reais, assim sendo: funções com *valores reais* de *variáveis reais* (Guidorizzi, 2013).

Em se pensando no tempo *classicamente*, por ser esse o escopo desse trabalho, onde se pode inferir assim que pela mecânica de Newton, essa grandeza física do *tempo*, é tida como um ser absoluto e que naturalmente progride de maneira uniforme, sem retroagir de maneira alguma e sem sofrer influência de nada, mas isso se tratava de um certo preconceito do próprio Newton, que pensava classicamente, do tempo não sofrer influência externa, mas isso caiu por terra, pois como os aparelhos que medem o tempo (os conhecidos *relógios*), sendo objetos reais, estão sujeitos a processos físicos diversos, podendo alterar suas medições (Nussenzveig, 2002).

O que Newton não sabia na época era que a Relatividade mudaria essa conceituação do tempo, onde Nussenzveig (2002, p. 21) ajudou dizendo que a priori não se sabia, mas que o

[...] andamento de um relógio é afetado por condições físicas extremas, muito remotas de nossa experiência cotidiana, por exemplo, pelo transporte do relógio a velocidades extremamente elevadas (comparáveis à velocidade da luz), ou pela presença de campos gravitacionais extremamente intensos. A experiência mostra que tais condições de fato afetam a marcha do relógio (efeitos da relatividade restrita e da relatividade geral, respectivamente), de forma que hipóteses não-físicas sobre o tempo, como a de Newton, têm de ser revistas nessas condições.

Contudo, para os movimentos de partículas a serem estudados aqui, não se fará uso de conceitos relativísticos, onde assim, foi do fato de esse tempo fisicamente não fazer sentido em sê-lo negativo na natureza cotidiana, que Martins (2014, p. 70) contribuiu em seu trabalho, (na qual será desenvolvida para a grandeza do tempo), ao especificar como as funções deveriam ser: “ $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, uma vez que, a variável independente de tais funções será o tempo t ”, assim restringindo seu domínio para os *reais não-negativos*, como visto na Figura 2, e de como serão tratadas as noções de tempo daqui por diante.

Dessa forma, todas as funções $f(t)$ a serem estudadas a partir de então, devem ser tais que suas *imagens* (no eixo das ordenadas) representarão cada grandeza física estudada em questão (posição, velocidade, aceleração,...) e os seus *domínios* (no eixo das abscissas) serão restritos aos reais não-negativos, por este se tratar do *tempo*, como dito anteriormente, sendo o zero seu menor valor possível para que se possa fisicamente significá-lo, como na Figura 2.

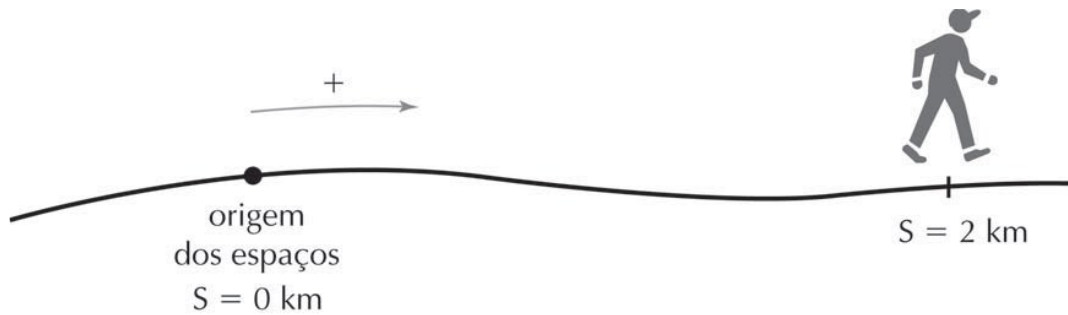
3.1.3 Equações dos movimentos

Esse estudo será restrito somente aos movimentos representados por polinômios, onde as variáveis envolvidas serão s e t , com $s = f(t)$, em que $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja:

$$s = f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n \quad (73)$$

A coleção de valores da posição da partícula, numa espécie de “rastro” deixado por ela, ou na prática, o caminho desenvolvido pela partícula é denominado *trajetória*, onde Xavier e Barreto (2016, p. 33) corroboraram na definição desse conceito, dizendo: “Esse percurso é chamado de **trajetória**, que representa a linha do percurso descrito por um móvel quando consideramos todas as posições sucessivas ocupadas por ele, em determinado intervalo de tempo” e como apresentado no exemplo da Figura 3 a seguir:

Figura 3 – Trajetória Orientada e Marco Zero



Fonte: Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 21).

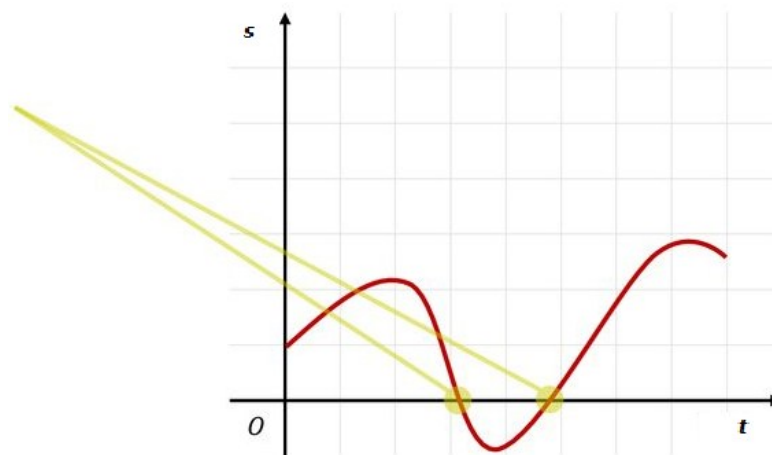
Essa marcação de valores referentes à posição sobre a trajetória possuem ordenação, por se tratar dos valores de posições, em relação ao sistema de referência, no corpo dos Números Reais que se trata de um *corpo ordenado completo*, como definido por Lima *et al* (2005, p. 58), onde denotou o conjunto dos reais (\mathbb{R}) como um *corpo*, por estar definido em suas operações básicas, bem como de suas outras duas características citadas, por mostrar que \mathbb{R} é “um corpo *ordenado* porque existe a relação $x < y$, que está interligada com a adição e a multiplicação pelas leis conhecidas de monotonicidade. E, finalmente, a *completeza* de \mathbb{R} equivale à continuidade da reta” (Lima *et al*, 2005).

Dessa maneira, em consequência dessa ordenação, essa *Trajétoria Real* deve ter obrigatoriamente um ponto de *Marco Zero*, também denominado como *Origem dos Espaços ou Origem das Posições* (Figura 3), como descreveu Calçada e Sampaio (1998, p. 8):

Para que a cada medida corresponda um único ponto sobre a trajetória, convencionase que de um lado do ponto O as medidas são positivas e do outro lado, negativas. Isso significa que a trajetória deve ser *orientada*. [...] O ponto O é, então, denominado *origem dos espaços*.

Dessa escolha do ponto O como o *marco zero* da trajetória definida (Figura 3), e adotando-se verticalmente (eixo das ordenadas) como medidas positivas, os valores medidos acima de O , e os valores abaixo dele sendo negativos, nas mesmas condições, definindo assim o que se conhece como *Reta Real* ou também *Eixo Real*, com tais características lineares (Lima *et al*, 2005), como visto nos valores das *imagens* (eixo- y) da função apresentada anteriormente como exemplo na Figura 2. Assim, ter-se imagens nulas da função, significa fazer $y = 0$, o que na prática se configura, cortar o eixo- x , ou em outras palavras, o móvel sempre passa pela origem das posições, nos zeros da função ($s = 0$), como se pode ver na Figura 4 a seguir:

Figura 4 – Zeros da Função $s = f(t)$



Fonte: Neta, Miguel (2017, com adaptações).

Essa definição para a reta real das posições ser na vertical (no eixo- y), por se tratar das *imagens* das funções em termos do *domínio temporal* (no eixo- x), por ser referente ao *tempo*, e dessa forma, escolhendo o *marco zero* O da trajetória retilínea, o que está acima, será adotado como positivo, e os valores que estão abaixo, negativos, tal como o próprio eixo das ordenadas com as imagens dessas funções, onde será essa a notação e definição para a *origem dos espaços* a serem usadas em discussões futuras, e que pode diferir da *posição inicial* no movimento.

Em continuidade, considerando uma *taxa de variação* da posição s em função do tempo t como sendo $v(t)$ a medida da *velocidade* de uma partícula qualquer em termos do tempo, onde essa taxa de variação é justamente a *derivada* da tal função, bem definida por Cruz (2013, p. 34) ao entender a “derivada ainda como taxa de variação, que indica a maneira como uma função varia: aumentando, diminuindo ou permanecendo constante”.

A rigor, em termos de cálculo diferencial e nesse contexto de dar um significado da velocidade como sendo a derivada da posição em relação ao tempo, onde por definição, essa derivada é um limite de uma certa variação da posição, $\Delta s = s_2 - s_1$, de um móvel em razão de sua variação do tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$ correspondente, quando o intervalo de tempo tende a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), a saber, $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, que é justamente a velocidade a cada instante do movimento ou simplesmente *Velocidade Instantânea*, e ela é justamente a *Velocidade Média* no limiar de sua variação temporal tendendo a zero, consequentemente quando $t_2 \rightarrow t_1$, ou seja, num intervalo de tempo tão pequeno quanto se queira medir, onde certos tempos iniciais e finais se aproximam entre si. (Calçada; Sampaio, 1998).

Abrindo um parêntese: toda *variação* de qualquer grandeza física, é comumente denotada por esse *Delta Maiúsculo* (Δ), que é a letra grega usada para representar tais variações, como na variação do tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, da posição $\Delta s = s_2 - s_1$, e assim no geral para as diversas grandezas (Tipler; Mosca, 2009), como será usado nesse trabalho a partir de então. Dessa forma, aplicando-se a derivada em relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = s'(t) \quad (74)$$

Além disso, ainda se tem a acrescentar que, como a posição é representada por um polinômio, da mesma forma também a velocidade terá de ser polinomial, por ser uma função derivada da posição em termos da variável do tempo (Iezzi, 2013), como já discutido.

Assim, como esse trabalho se restringe ao estudo polinomial e suas nuances, então se deve compreender que a derivada das funções polinomiais possui um procedimento algébrico característico, onde pode ser mostrado através da definição exposta por Iezzi (2013, p. 171) em que exprime sucintamente que para uma dada função polinomial,

[...] $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, em que $a_n \neq 0$ e $n > 0$, chama-se função polinomial derivada de $f(x)$ a função $f': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por: $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + \dots + a_1 + 0$.

Desse modo, a função polinomial que representa a velocidade de uma partícula em termos do tempo (também denominada como *função horária*, em referência ao tempo, que pode ser medido em *horas*), e nesse caso, a *Função Horária da Velocidade*, que por derivação, é

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} s(t) = \frac{d}{dt} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n) \Rightarrow \\ v(t) &= \frac{d}{dt} s(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + n \cdot a_n t^{n-1} \end{aligned} \quad (75)$$

Assim, a velocidade da partícula é representada por um polinômio de grau $(n-1)$, justamente por ter sido derivada uma vez sua função da posição, que é representada por um polinômio de grau n .

Fazendo a taxa de variação dessa velocidade em termos de t novamente, o que se obtém é conhecida *aceleração* da partícula, $\alpha(t)$, que nada mais é que

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} v(t) = v'(t) \quad (76)$$

Essa aceleração pode ser descrita também em função de derivações da posição, pois como ela é a derivada da velocidade em relação ao tempo, que por sua vez é a derivada da posição em relação ao tempo, e dessa forma, a aceleração passa a ser a derivada segunda da posição em função do tempo, ou seja, aplicando (74) em (76):

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} s(t) \right] = \frac{d^2}{dt^2} s(t) = s''(t) \quad (77)$$

Onde dessa forma, o polinômio correspondente a essa aceleração da partícula pode ser obtido tanto por derivação simples de (75), quanto por derivação dupla de (73), ambas em função do tempo:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} [a_1 + 2a_2 t + \dots + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + n \cdot a_n t^{n-1}] \Rightarrow \\ \alpha(t) &= 2a_2 + \dots + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} t^{n-3} + n \cdot (n-1) \cdot a_n t^{n-2} \end{aligned} \quad (78)$$

E assim, o polinômio encontrado em (78) e que representa a aceleração da partícula em questão, possui grau $(n - 2)$, devido justamente por ter sido derivada por duas vezes sua função da posição tipo polinomial de grau n , como previsto por Iezzi (2013, p. 175) ao observar que “a cada derivação o grau da função polinomial diminui em uma unidade. Assim, se $f(x)$ tem grau n , então todas as derivadas de ordem superior a n são identicamente nulas”.

Em contribuição a esses conceitos de posição, velocidade e aceleração, assim como no estudo dos movimentos, mesmo para a educação básica, Cruz (2013, p. 40) mostrou que:

Essas derivadas são particularmente interessantes para o Ensino Médio como uma aplicação na Física uma vez que se $x = f(t)$ for a função horária de uma partícula então sua velocidade instantânea $v = v(t)$ é a primeira derivada de x e a aceleração instantânea $a = a(t)$ é a segunda derivada: $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Como dito anteriormente, ao se continuar derivando um polinômio que possui grau n , ele terá um total de n derivadas não nulas, onde se poderia ter até, por exemplo, uma taxa de variação da aceleração como a derivada terceira da posição, que em termos de nomenclatura, nem há definição nominal para essas derivadas seguintes da posição, a não ser as já citadas, velocidade e aceleração, que são as duas primeiras derivadas da posição.

A partir de agora, serão estudados os casos específicos do movimento de partículas para alguns polinômios, desde os mais simples de 1º grau, até uns mais complexos, como os de 4º grau e suas formulações. No caso da função posição ser um *polinômio constante*, ou seja, um polinômio de grau $n = 0$, onde na prática, isso nem mesmo se trataria de um *movimento*, pelo menos em relação ao referencial adotado, pois como a posição é invariante no sistema de referências adotado, o caso seria de partícula estar em *repouso*, como foi definido por Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 20) que “um corpo está em movimento quando sua posição em relação a um referencial muda ao longo do tempo. Se a posição não muda, [...] o corpo está em repouso”.

3.2 Movimentos com aceleração nula

Primeiramente e de maneira mais simplória, em se estudando movimentos em cuja aceleração é nula, percebe-se que o polinômio, expressa em (73), e que representa a *Função Horária da Posição*, terá de ser apenas de grau $n = 1$, para que assim se tenha apenas uma derivada não nula, a velocidade, e então se zerar na segunda derivada, no caso, a aceleração da partícula. Nesse sentido, a função em questão será do tipo:

$$s(t) = a_0 + a_1 t \quad (79)$$

Resultado coerente com o que fora apresentado na seção de Polinômios de 1º grau, sendo esses polinômios muito importantes no estudo dos movimentos, mesmo estes com pouco grau de complexidade, e sendo representados de maneira interdisciplinar, pelas funções do tipo *afim*, ou simplesmente *lineares*, como destacou Silva (2015, p. 28) ao dizer:

Nesse sentido a interdisciplinaridade tem um papel de motivação para o ensino da física e da matemática. A Física e a Matemática são disciplinas que estão intimamente ligadas e que permitem relacionar conteúdos do cotidiano do aluno, mostrando-o que a função afim modela muitos fenômenos físicos.

Como foi discutido na seção anterior, esse polinômio (79), por ser de 1º grau, possui apenas uma derivada não-nula e com um grau a menos, nesse caso, grau $n = 0$, que se confirma essa derivada como polinômio constante para a velocidade constante da partícula, a saber:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = a_1 \quad (80)$$

Mostrando assim que a velocidade nesse tipo de movimento, é realmente constante em relação ao tempo e que com isso, resulta como *nula* a derivada segunda da posição, ou seja, $\alpha(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = 0$, que já foi definida como a aceleração, e que é justamente a função derivada da velocidade também, nos moldes na qual foram apresentados em (78).

Esse movimento com velocidade invariante no tempo, $v(t) = a_1$, ou simplesmente *velocidade constante*, é comumente conhecido na educação básica como *Movimento Uniforme*, por ter sempre a mesma velocidade e apenas alterar sua posição, mas uniformemente, ou seja, sem acelerar ou frear, que é justamente ter *aceleração nula*. Também podendo ser apresentado como *Movimento Retilíneo Uniforme* (MRU), por tratar apenas dos movimentos em linha reta.

Em conformidade com isso, Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 27) contribuíram nessa conceituação dizendo que:

O *movimento uniforme* pode ser definido como aquele em que um móvel tem velocidade instantânea constante e igual à velocidade média para qualquer intervalo de tempo. No MU, o móvel percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. Se a trajetória for retilínea, o movimento é chamado *movimento retilíneo e uniforme* (MRU). Por exemplo: se um corpo for impulsionado no espaço e nada existir que se oponha ao seu movimento, ele entrará em MRU.

Esse exemplo supracitado se coaduna com a famosa *Lei da Inércia* de Newton, onde se sabe que certo corpo tende a permanecer em seu estado de *Equilíbrio*, podendo ser este dito *Equilíbrio Estático* (Repouso) ou tido como *Equilíbrio Dinâmico* (MRU), onde nesse caso, por estar em movimento o corpo utilizado como exemplo, tal equilíbrio se trata então de movimento com velocidade constante, descrito em trajetória do tipo *retilínea* (Xavier; Barreto, 2016).

Ainda em confirmação com a nulidade da aceleração nesse caso, decorrente de uma escolha de ser um polinômio de 1º grau para a função posição (79), e com a velocidade constante em (80), assim a aceleração, como é a derivada da velocidade (76), deverá ser obrigatoriamente nula, pois como foi definido para a derivada de um polinômio constante, como no exposto por Iezzi (2013, p. 171), dizendo que dada “função polinomial $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, [...] Se $f(x) = k, \forall x \in \mathbb{C}$, então a função polinomial derivada é definida por $f'(x) = 0$ ”, resultado este que já era esperado.

Estudando-se então esses movimentos uniformes, através de sua função horária da posição representada em (79), que já foi estudada na seção de Polinômios de 1º grau, onde sua equação polinomial apresentada em (4), possui única raiz que foi desenvolvida em (5), e define o instante de tempo real que a partícula passa pelo *marco zero* da trajetória adotada:

$$t = -\frac{a_0}{a_1} \quad (81)$$

O que se confirma do fato de esse tal instante de tempo ser dependente somente do *coeficiente linear* (a_0) e do *coeficiente angular* (a_1) da função, denotados assim anteriormente nesse trabalho. Onde o coeficiente linear fisicamente representa a *posição inicial* no movimento da partícula, $s(0) = a_0$, que é tomada como inicial pelo fato de que a grandeza física do tempo, não pode ser negativa, como fora discutido anteriormente, e assim devendo começar a medi-la a partir do zero. Já o coeficiente angular, se trata justamente da velocidade que é constante no movimento uniforme, $v(t) = a_1$, como já fora anteriormente demonstrado em (80) no estudo da velocidade.

Em suma, os coeficientes a_0 e a_1 da equação polinomial da posição da partícula, apresentada em (79) representam respectivamente a posição inicial e a velocidade constante do movimento, em síntese:

$$a_0 = s(0) = s_0; a_1 = v(t) \quad (82)$$

Podendo assim a função horária da posição do MRU que fora apresentada em (79), ser escrita em função desses valores encontrados para os coeficientes, ficando expressa como:

$$s(t) = s_0 + a_1 t \quad (83)$$

Essa é a forma, em que geralmente se apresentam na educação básica, a dita *Função Horária da Posição* (ou espaços, ou deslocamentos), como bem apresentou Silva (2015, p. 30):

[...] A função horária do deslocamento, $S = S_0 + V \cdot t$, é um exemplo de função afim, essa equação também é denominada equação horária das abscissas, ela nos fornece o espaço S num instante qualquer t . Onde S é a posição final do corpo, S_0 é a posição inicial, V é a velocidade do corpo e t o instante. Essa equação é usada em Movimentos Uniformes, no qual um móvel se desloca com uma velocidade constante, particularmente, no caso em que ele se desloca com uma velocidade constante em trajetória reta, tem-se um movimento retilíneo uniforme.

Confirmando assim também a nomenclatura utilizada para esse tipo de movimento, como já fora discutido e mencionado anteriormente nessa própria seção, nomenclatura esta que se vem utilizando desde então. Novamente do fato supracitado de o tempo no sentido físico não ser negativo, com $t \geq 0$, de modo que a única forma da partícula passar pelo *marco zero* das posições na trajetória adotada, se dará justamente quando os coeficientes a_0 e a_1 , tiverem obrigatoriamente seus valores com *sinais opostos*, senão isso traria uma inconsistência para a equação (81), pois dessa equação na forma: $a_1 t = -a_0$, e tendo: $t > 0$, produziram-se as duas possibilidades como podem ser apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} a_1 > 0 &\Rightarrow a_1 t > 0 \Rightarrow a_1 t = -a_0 > 0 \Rightarrow a_0 < 0; \\ a_1 < 0 &\Rightarrow a_1 t < 0 \Rightarrow a_1 t = -a_0 < 0 \Rightarrow a_0 > 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Em que se confirma o fato de que na equação do movimento uniforme, se a posição inicial for negativa no sistema de referências adotado, então a partícula só passará pela *origem dos espaços*, se seu movimento progredir no sentido do *marco zero* na reta real, aumentando a sua posição a cada instante, ou seja, sua velocidade terá de ser positiva, onde se é denotado comumente como *Movimento Progressivo*.

Analogamente, sendo positiva a posição inicial nesse sistema de referências, então a partícula só passará pela *origem das posições*, se seu movimento regredir no sentido do *marco zero* sobre a reta real, diminuindo assim a sua posição a cada instante, ou seja, quando a sua velocidade for negativa (*Movimento Retrógrado*).

Em suma, em se pensando no movimento das partículas sobre a reta real, como por exemplo o *eixo-y*, com suas devidas orientações vetoriais positiva e negativa, se pode contribuir com essa temática de maneira resumida, como exposto por Assis (2013, p. 26), da importância de se saber que a velocidade é

[...] uma grandeza vetorial, portanto o sinal da velocidade indica o sentido ao qual o corpo se desloca. Ao saber a posição de um móvel sobre uma trajetória, vemos que um corpo pode movimentar tanto no sentido positivo (progressivo) quanto no sentido negativo (retrógrado). Dizemos que um determinado móvel possui **velocidade positiva** quando sua posição varia no sentido positivo em relação à origem (movimento progressivo), e dizemos que um móvel possui **velocidade negativa** quando sua posição varia no sentido contrario ao da origem (movimento retrógrado).

A partir de agora então se avançará no sentido da complexidade dos movimentos e consequentemente no grau do polinômio correspondente pelo movimento apresentado. Sendo assim, partir-se-á então para movimentos cuja posição será representada agora por polinômios quadráticos, cúbicos e assim por diante, até o escopo máximo na qual se compreendem como o estudo desse trabalho.

3.3 Movimentos com aceleração constante

Em tese, muito dificilmente se pode encontrar na Natureza um movimento em cuja aceleração seja perfeitamente constante, mas com as devidas condições adotadas, tais situações passam a ser bem corriqueiras, e foi justamente nessa temática dos *Movimentos com Aceleração Constante*, que Tipler e Mosca (2009, p. 37) contribuíram e também exemplificaram dizendo de maneira sucinta que:

O movimento de uma partícula com aceleração praticamente constante é algo encontrável na natureza. Por exemplo, todos os objetos largados próximo à superfície da Terra caem verticalmente com aceleração quase constante (desde que se possa desprezar a resistência do ar). Outros exemplos de aceleração quase constante incluem um avião em sua arremetida para decolar e o movimento de um carro freando ao se aproximar de um sinal vermelho ou arrancando quando o sinal abre.

Outro exemplo bem conhecido dos próprios estudantes no cotidiano atual, se tratam dos aceleradores de partículas, principalmente os lineares (por ter movimentos retilíneos), como simples tubos de raios catódicos, mas que não fazem parte do escopo de exemplificações nesse trabalho, por não se poderem tratá-los *classicamente*, pois devem ser regidos por conceitos *quânticos* e também *relativísticos*, já que possuem, respectivamente, as dimensões atômicas e velocidades altíssimas (Tipler; Mosca, 2009).

Sobre a escolha do polinômio que represente a posição da partícula, em acordo com o que fora discutido na seção anterior, e agora se querendo que sua derivada segunda, no caso a aceleração da partícula, seja constante (polinômio de grau 0), uma opção coerente a ser feita para tal função horária da posição será um polinômio de 2º grau, pois esse polinômio tem exatamente duas derivadas não nulas (velocidade e aceleração), sendo a segunda derivada de grau zero (constante).

Assim, a *função horária da posição* dessa situação, onde se expressa o movimento de uma partícula com aceleração constante, e de acordo com a equação geral para polinômios expressa em (73), mas com o polinômio agora sendo de 2º grau, terá representação algébrica expressa da seguinte forma:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (85)$$

Além disso, já que a velocidade da partícula agora não é mais constante, como foi na seção anterior, e podendo assim ser chamada agora de *função horária da velocidade*, que de acordo com o polinômio para velocidade apresentado em (75), deverá ser representada assim:

$$v(t) = a_1 + 2a_2 t \quad (86)$$

Que é justamente a derivada primeira de (85), como já fora discutido anteriormente, e além disso, derivando novamente a expressão (86), ou pela derivada segunda da função posição (85), será encontrado justamente a aceleração da partícula em tal movimento, sendo do tipo

$$\alpha(t) = 2a_2 \quad (87)$$

Confirmando então assim, sua invariância temporal (aceleração constante) e sendo ela exatamente igual ao dobro do coeficiente a_2 , resultado este que será discutido em sequência, no intuito de se obter o significado físico para cada coeficiente a_0 , a_1 e a_2 da equação da posição (85).

Esse movimento em particular, possui apenas *duas funções horárias*, visto que sua aceleração não depende do tempo e assim se compilando essas equações horárias da *posição* e da *velocidade*, apresentadas respectivamente nas expressões (85) e (86), pode ser sintetizado da seguinte forma:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2; v(t) = a_1 + 2a_2 t \quad (88)$$

Como fora dito no início dessa seção, existem vários exemplos do dia-a-dia, em que podem de alguma forma ser denotados como esses movimentos de aceleração nula, e que assim podem ser representados pelas equações até então demonstradas. Foi justamente sobre isso que, Halliday, Resnick e Walker (2012, p. 22) corroboraram e complementaram o raciocínio, quando especificarem que:

Esses casos são tão frequentes que foi formulado um conjunto especial de equações para lidar com eles [...] quando você trabalhar na solução dos problemas, lembre-se de que *essas soluções são válidas apenas quando a aceleração é constante (ou em situações nas quais a aceleração pode ser considerada aproximadamente constante)*.

Esse conjunto de equações citadas, que representa essa especialidade de movimento, será então trabalhado em sequência (com sua nomenclatura usual), rotulando tais movimentos em que a aceleração é constante.

Esse movimento da partícula com aceleração invariante no tempo, ou simplesmente *aceleração constante*, é frequentemente denotado na educação básica com nomenclatura usual de *Movimento Uniformemente Variado* (MUV), pois sua velocidade agora varia, porém de uma maneira uniforme, ou seja, sob uma taxa constante de aumento ou redução, e onde essa taxa de variação é justamente a aceleração. Ademais, como é escopo desse trabalho apenas movimentos retilíneos, esse tipo de movimento da partícula pode ser dito também como *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (MRUV).

Em conformidade com isso, Bosquilha e Pelegrini (2003, p. 37) corroboraram nessa conceituação chamando também de

Movimento Uniformemente Variado (MUV) o movimento em que a velocidade varia de modo uniforme ao longo do tempo, isto é, aquele em que ocorrem variações de velocidade iguais em intervalos de tempo iguais. A aceleração instantânea, neste movimento, é sempre a mesma e igual à aceleração média. Se a trajetória é retilínea, o movimento é denominado Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV).

Dessa forma, nesse tipo de movimento, podem-se obter então os significados físicos dos coeficientes a_0 , a_1 e a_2 através das expressões encontradas para a posição, velocidade e aceleração.

Primeiramente em termos da aceleração apresentada em (87), com o coeficiente a_2 , por ser constante a aceleração e em se tomando $a(t)$ apenas como a , onde se tem: $a_2 = \frac{a}{2}$.

Já o coeficiente a_1 , pode ser representado ao se substituir em (86) o tempo inicial ($t = 0$), encontrando assim a *velocidade inicial* do movimento, $v(0) = v_0 = a_1$, e $a_1 = v_0$.

Por fim, de maneira análoga, o coeficiente a_0 pode ser encontrando substituindo o tempo inicial ($t = 0$) na expressão (85), onde se tem aqui, justamente a *posição inicial* no movimento da partícula, $s(0) = s_0 = a_0$, onde assim: $a_0 = s_0$.

Compilando-se então esses resultados encontrados para os coeficientes polinomiais a_0 , a_1 e a_2 da equação da posição da partícula, apresentada em (85), pode-se concluir que, esses coeficientes significam respectivamente a posição inicial da partícula, sua velocidade inicial e a metade da aceleração, a saber:

$$a_0 = s(0) = s_0; a_1 = \frac{d}{dt}s(0) = v_0; a_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \frac{a}{2} \quad (89)$$

Podendo assim a função horária da posição do MRUV, mostrada em (85), ser escrita em termos desses valores (constantes) encontrados para seus coeficientes, assim ficando então representada da seguinte forma:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \quad (90)$$

Onde em contribuição, Assis (2013, p. 26) assim descreveu:

Como a aceleração é constante em qualquer instante t do movimento, temos que: No instante t segundos [...] A posição de um móvel no movimento retilíneo uniformemente variado pode ser calculada por meio da função horária, uma função do 2º grau $s(t)$: $s(t) = s_i + v_i t + \frac{a}{2} t^2$ onde, s_i é a *posição inicial* [...] onde, v_i é a *velocidade inicial*, a é a *aceleração*.

Em se estudando a função horária da posição da forma apresentada em (85), quando a partícula passar pelo *marco zero* da trajetória adotada, $s(t) = 0$, pode-se perceber que será determinada uma equação polinomial de 2º grau da mesma forma em que fora apresentada anteriormente em (6):

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 0 \Rightarrow s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = 0 \quad (91)$$

Cuja solução já foi discutida na seção de Polinômios de 2º grau, e exibida em (7):

$$t = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_0}}{a} \quad (92)$$

De modo que, para que haja pelo menos um instante real em que a partícula passe pelo *marco zero* na trajetória adotada, o discriminante da equação quadrática, discutido na seção 2.2.2, cujo resultado já fora apresentado na expressão (13), deve ser não negativo, de forma que assim se desenvolve a expressão:

$$\begin{aligned} \delta &= a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \Rightarrow \\ a_1^2 &\geq 4a_2a_0 \Rightarrow \\ v_0^2 &\geq 2as_0 \end{aligned} \quad (93)$$

Resultado este que pode ser expresso de uma outra forma, ao se isolar a aceleração na inequação, sendo então:

$$a \leq \frac{v_0^2}{2s_0} \quad (94)$$

Que representa a *cota superior* (valor máximo possível) para a aceleração constante, para que se tenha a existência de um tempo real em que a partícula passe na *origem dos espaços*, isso somente para s_0 sendo positivo.

Em continuidade ao estudo do MRUV, com a função horária da velocidade, que foi apresentada em (86), podendo ser reescrita em se substituindo os coeficientes encontrados em (89), ficando assim representada da seguinte forma:

$$v(t) = v_0 + at \quad (95)$$

Forma esta que é comumente apresentada em aulas na educação básica, e onde pôde ser também confirmada por Martins (2014, p. 77) através de sua explanação em seu trabalho ao dizer que:

- [...] obtém-se a função horária da velocidade, dada por: $v(t) = v_0 + at$ em que:
- ✓ $v(t)$ é a velocidade do móvel no instante t ;
 - ✓ v_0 é a velocidade inicial (instante $t = 0$)
 - ✓ a é a aceleração

Onde dessa velocidade se determina quando o movimento é do tipo progressivo ou do tipo retrógrado, como discutido na seção anterior, porem agora podendo variar, visto da não mais constância dessa velocidade no MRUV, podendo então durante um mesmo movimento da partícula, se alternar de progressivo (velocidade positiva) a retrógrado (velocidade negativa) ou vice-versa, o que obrigatoriamente se faz preciso zerar a velocidade em algum instante para que assim se possa então alternar de sinal, ou em outras palavras, haver uma *inversão de sentido* no movimento estudado.

Contudo, como a função da velocidade (95) aqui é representada por um polinômio de 1º grau, e que já foi estudado anteriormente, então sua equação polinomial para o cálculo do instante de tempo em que a partícula inverte de sentido no movimento, se faz representada por:

$$a_1 + 2a_2t = 0 \rightarrow v_0 + at = 0 \quad (96)$$

Cuja solução já foi discutida e apresentada na seção de Polinômios de 1º grau, mais especificamente na expressão (5), mas com seus coeficientes aqui atualizados de acordo com o polinômio velocidade (95):

$$t = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{v_0}{a} \quad (97)$$

Onde, como fora discutido anteriormente, mais uma vez se pode perceber que, para que se haja sentido físico nesse valor de tempo, este não pode ser negativo, e em se descartando a solução trivial, onde assim: $t > 0$, de onde conclui que a única forma de a partícula conseguir inverter seu sentido de movimento, será justamente quando os coeficientes v_0 e a , detiverem obrigatoriamente seus valores com *sinais opostos*, senão isso traria uma inconsistência para a equação (97), pois dessa equação na forma: $at = -v_0$, tendo as duas possibilidades a seguir:

$$\begin{aligned} t > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow at > 0 \Rightarrow at = -v_0 > 0 \Rightarrow v_0 < 0; \\ t > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow at < 0 \Rightarrow at = -v_0 < 0 \Rightarrow v_0 > 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Se confirmando que, nesse tipo de movimento, sendo a velocidade inicial negativa (movimento retrógrado), então a partícula só poderá inverter o seu sentido de movimento para progressivo se acelerar para frente (sentido do referencial), aumentando a sua velocidade desde o valor inicial negativo, passando pelo zero, até se tornar positiva em algum instante.

De maneira análoga, sendo positiva a velocidade inicial (movimento progressivo), então a partícula só inverterá seu sentido de movimento para retrógrado se ela acelerar para trás (em sentido oposto ao adotado como referência), diminuindo assim a sua velocidade desde seu valor inicial positivo, passando pelo valor nulo e até que ela se torne então negativa em algum instante do movimento.

Ao se estudar a equação (87), não se faz sentido denotá-la como uma função horária da aceleração, visto que ela não depende de fato do tempo, já que é constante, sendo apenas seu valor sempre positivo ou sempre negativo durante todo o movimento, se podendo então inferir suas nuances apenas em comparação com outras grandezas, como a posição ou a velocidade da partícula, por exemplo.

Como discutido anteriormente, em se entendendo que o sinal da velocidade indica apenas o sentido do movimento, e então se pensando agora no módulo dessa velocidade (já que se trata de uma grandeza vetorial): quando este módulo aumenta, geralmente se é denotado que o deslocamento da partícula como *Movimento Acelerado*; de uma maneira análoga, quando esse módulo da velocidade vetorial diminui, então se é denominado esse deslocamento da partícula como *Movimento Retardado* (Calçada; Sampaio, 1998).

Nesse estudo não será focada a natureza vetorial das grandezas físicas, e então como simplificação desses conceitos descritos, pode-se então substituir o termo *módulo da velocidade* simplesmente por *rapidez* da partícula, onde essa nomenclatura representa apenas o quão rápido está a partícula (módulo do vetor velocidade), sem se descrever assim, além da sua intensidade, também em qual direção e sentido ela se desloca (Tipler; Mosca, 2009), e se representando, dessa forma, uma tríade com características de um *vetor* (módulo, direção e sentido), nesse caso citado, o vetor velocidade, onde por definição, Lima *et al* (2005, p. 72) expôs que, o “*valor absoluto* (ou *módulo*) de um número real x , indicado pela notação $|x|$ ”, é na prática, um *escalar*.

Em síntese, como o tempo sempre progride ($\Delta t > 0$) e em se pensando inicialmente quando a rapidez ($|v|$) da partícula aumenta, e conseqüentemente, o movimento é acelerado, se tendo então as duas possibilidades a seguir:

$$\begin{aligned} |v| \text{ aumenta} &\Rightarrow \mathbf{v} > \mathbf{0} \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow \Delta v > 0 \Rightarrow a = \Delta v / \Delta t > 0 \Rightarrow \mathbf{a} > \mathbf{0}; \\ |v| \text{ aumenta} &\Rightarrow \mathbf{v} < \mathbf{0} \Rightarrow v_2 < v_1 \Rightarrow \Delta v < 0 \Rightarrow a = \Delta v / \Delta t < 0 \Rightarrow \mathbf{a} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (99)$$

Na prática então, um movimento da partícula é considerado como sendo acelerado, quando os sinais de sua aceleração e da velocidade são iguais; e analogamente, esse movimento é dito como retardado, quando os sinais dessas duas grandezas são agora opostos. Isso pode ser

desenvolvido para quando a rapidez ($|v|$) da partícula diminui, onde em consequência disso que o movimento seja retardado; além disso, como do fato do tempo sempre progredir ($\Delta t > 0$):

$$\begin{aligned} |v| \text{ diminui} &\Rightarrow v > 0 \Rightarrow v_2 < v_1 \Rightarrow \Delta v < 0 \Rightarrow a = \Delta v / \Delta t < 0 \Rightarrow a < 0; \\ |v| \text{ diminui} &\Rightarrow v < 0 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow \Delta v > 0 \Rightarrow a = \Delta v / \Delta t > 0 \Rightarrow a > 0 \end{aligned} \quad (100)$$

Dessa forma, o movimento *acelerado* pode ser do tipo: *progressivo* ($v > 0$) quando a sua aceleração é positiva ($a > 0$), e *retrógrado* ($v < 0$) se sua aceleração é negativa ($a < 0$), e também com duas situações distintas.

Assim como o movimento *retardado* pode ser também: *progressivo* ($v > 0$) quando a sua aceleração é negativa ($a < 0$), e *retrógrado* ($v < 0$) se sua aceleração é positiva ($a > 0$), sendo assim as duas situações distintas.

Esse resultado se coaduna com o que fora discutido em relação à inversão no sentido de movimento das partículas, onde foi dito que essa mudança de sentido, só seria possível se os sinais da velocidade e da aceleração fossem opostos, ou seja, quando esse movimento é do tipo *retardado* e nunca acelerado, resultado este que será utilizado posteriormente em discussões de movimentos desse tipo.

3.3.1 Equação de Torricelli

Outra situação em que se pode desenvolver nessa seção, é sobre poder se analisar a função da posição agora em termos da velocidade em vez do tempo, onde isso pode ser feito ao se comparar as duas funções horárias, da posição e da velocidade, em se isolando a variável de tempo na função velocidade, por exemplo, através da forma em que fora apresentada em (95), com uma simplificação de $v(t) = v$, por efeito de simplificação nos procedimentos algébricos:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \Leftrightarrow \\ v - v_0 &= at \Leftrightarrow \\ t &= \frac{v - v_0}{a} \end{aligned} \quad (101)$$

Confirmando o que fora dito por Tipler e Mosca (2009, p. 37): “Para uma partícula em movimento, a velocidade final v , é igual à velocidade inicial mais a variação da velocidade, e a variação da velocidade é igual à aceleração média multiplicada pelo tempo”, que em termos

algébricos, disso que foi descrito pelos autores na primeira parte, pode-se descrever a variação da velocidade (Δv), pois: $v = v_0 + \Delta v \Leftrightarrow \Delta v = v - v_0$; já em relação à segunda parte textual, ela se coaduna com o resultado que foi desenvolvido em (101), pois da aceleração média sendo somente a , por sê-la constante nesse tipo de movimento em que se está estudando e dessa forma:

$$\Delta v = at \Leftrightarrow t = \frac{\Delta v}{a} \Leftrightarrow t = \frac{(v-v_0)}{a}.$$

De forma que do valor de tempo generalizado, que fora desenvolvido em (101), pode agora ser substituído na equação da posição, através da forma em que fora apresentada em (90), com uma simplificação de $s(t) = s$, também para uma facilitação de procedimentos algébricos, de modo que o resultado será o que se segue:

$$\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{a}{2} \left(\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2} \right) \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= \frac{2vv_0 - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= \frac{v^2 + (2vv_0 - 2vv_0) + (v_0^2 - 2v_0^2)}{2a} \Leftrightarrow \\ s - s_0 &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Leftrightarrow \\ v^2 - v_0^2 &= 2a(s - s_0) \Leftrightarrow \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(s - s_0) \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \end{aligned} \quad (102)$$

Encontrando-se assim uma expressão entre duas posições quaisquer e as respectivas velocidades, envolvendo também a aceleração constante desse tipo de movimento, contudo sem qualquer dependência temporal, exatamente da forma em que se queria encontrar tal expressão, que é conhecida popularmente como a *Equação de Torricelli*, em homenagem ao físico e também matemático italiano, *Evangelista Torricelli* (um dos discípulos de *Galileu*), que trouxe inúmeras contribuições nessas duas vertentes acadêmicas, visto que além de suas formulações e teoremas matemáticos, também foi notório para a Física, como por exemplo, a construção do *barômetro*, um equipamento que é imprescindível para se medir as pressões atmosféricas até os dias atuais (Bosquilha; Pelegrini, 2003).

Em contribuição com essa temática, que Xavier e Barreto (2016, p. 60), explanaram sobre essa famosa equação de Torricelli, bem como sua utilidade no estudo desses movimentos, ao dizer que:

Até agora, estudamos equações que nos permitem saber a posição ou a velocidade de um móvel em função do tempo. Podemos também obter uma equação que forneça a velocidade em função da posição do móvel, no MUV, sem considerar o tempo decorrido. Partindo das equações da velocidade e da posição [...] e com um simples procedimento algébrico, [...] conseguiu eliminar a variável tempo.

Assim, da equação de Torricelli desenvolvida em (102), pode render um resultado para a velocidade em termos da posição s ou do *deslocamento* $\Delta s = s - s_0$, já que s_0 , v_0 e α são os tais parâmetros invariantes no MUV, onde dessa forma a velocidade será dada em termos do deslocamento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta s \Leftrightarrow \\ v &= \pm \sqrt{v_0^2 + 2a\Delta s} \end{aligned} \quad (103)$$

Em se falando desse *deslocamento* (Δs), que é uma função somente dependente dos valores das respectivas posições da partícula no início e no fim do percurso, independentemente de qual caminho se seguiu na trajetória (Xavier; Barreto, 2016), onde a expressão (103) entrega dois resultados para velocidade da partícula (v), em função da variável de deslocamento (Δs), representados a seguir:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a\Delta s}; \quad v = -\sqrt{v_0^2 + 2a\Delta s} \quad (104)$$

Dessa forma, para um mesmo valor de deslocamento, podem existir dois valores de velocidade correspondentes, e para que isso aconteça a partícula tem que passar duas vezes na mesma posição, tendo assim a obrigatoriedade da *inversão no sentido de movimento*, senão ela nunca retornaria a uma mesma posição, além do fato de que esses dois resultados de velocidade, possuem sinais opostos, como pode ser observado em (104), e assim apresentam sentidos opostos na trajetória (progressivo e retrógrado), não necessariamente nessa ordem, visto que não se tem definição alguma de qual dessas velocidades acontecerá primeiro e qual virá depois da mudança de sentido no movimento.

Diante disso, como discutido anteriormente nessa própria seção, essas alterações de sentido, só poderão ocorrer quando os movimentos forem *retardados*, em ambos os casos cujos sinais da velocidade e da aceleração se opõem e que foram apresentados em (100). E assim, uma partícula em movimento acelerado somente poderá ter uma das duas velocidades demonstradas em (104), sendo o resultado positivo da velocidade, quando esse movimento do tipo acelerado, for progressivo; e sendo o resultado negativo se o movimento acelerado for do tipo retrógrado, onde ambos os casos, foram apresentados em (99) na descrição dos movimentos acelerados (Calçada; Sampaio, 1998).

A motivação inicial dessa seção, entretanto, era a de se poder analisar a função da posição em termos da velocidade e não do tempo, onde para o tal, de acordo com a Equação de Torricelli apresentada em (102):

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta s \\
 s - s_0 &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Leftrightarrow \\
 v^2 &= v_0^2 + 2a(s - s_0) \Leftrightarrow \\
 v^2 - v_0^2 &= 2a(s - s_0) \Leftrightarrow \\
 s - s_0 &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Leftrightarrow \\
 s &= s_0 + \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} \Leftrightarrow \\
 s &= \left(s_0 - \frac{v_0^2}{2a}\right) + \frac{1}{2a}v^2 \Leftrightarrow \\
 s &= k + \frac{1}{2a}v^2
 \end{aligned} \tag{105}$$

Que é uma equação do tipo quadrática de s em função de v , onde essa constante k , $k = s_0 - \frac{v_0^2}{2a}$, que só depende dos valores dos parâmetros constantes do MUV (s_0 , v_0 e a) que foram isolados na equação, de modo que esse valor de k corresponda ao termo independente no análogo polinômio de 2º grau, mas sem possuir o termo de 1º grau, onde assim um *polinômio incompleto* de 2º grau da posição, em função da variável v .

Em sequência, serão tratados movimentos de partículas cujas acelerações não sejam mais constantes, passando agora a polinômios de graus maiores que dois para a equação horária da posição.

3.4 Movimentos com aceleração variável

Mais uma vez, de acordo com o que fora discutido na seção anterior, sobre a escolha do polinômio para representar a posição da partícula, e como agora se quer uma função derivada segunda (no caso a aceleração da partícula) com variância temporal, ou seja, polinômio de grau maior que zero ($n > 0$), e assim a escolha coerente a ser feita para tal função horária da posição, será através dos polinômios de grau maior que 2.

Dessa forma, como já se foi estudado até aqui os movimentos com acelerações nulas ou constantes, agora então para que se tenha uma melhor noção desses movimentos agora com acelerações variantes no tempo, em se contribuindo com essa temática, de maneira bem sucinta, compilando da seguinte forma:

Quando a equação da posição no tempo é linear, o movimento apresenta velocidade constante. Quando a equação da posição no tempo é do segundo grau, trata-se de um movimento com aceleração constante. Isto é, a velocidade varia uniformemente no tempo. Quando a equação da posição no tempo é do terceiro grau, trata-se de um movimento com **arrancada** ou **arranque** (em inglês **jerk**) constante. Isto é, a aceleração varia uniformemente no tempo. (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2020).

De forma que esse novo conceito surge nesse momento, afim de se representar tais movimentos, cuja a aceleração varia no tempo, ou seja, quando a força resultante atuando sobre a partícula não é mais constante, já que o MUV é um caso especial de quando o arranque é nulo, e por isso como não há variação, a aceleração é constante, assim como no MU, de aceleração nula, e consequentemente de arranque nulo, pois não varia a aceleração (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019).

A princípio, serão estudados a partir de agora, movimentos cujas acelerações serão representadas por funções polinomiais *lineares* em relação ao tempo, com *arrancada constante*, e posteriormente, funções polinomiais *quadráticas* para representar essa aceleração da partícula, ou seja, quando a aceleração não varia uniformemente no tempo (*arranque variável*), e mesmo esses dois movimentos então citados, não possuindo quaisquer nomenclaturas ou denominações usuais específicas nas literaturas em geral.

3.4.1 Movimento com aceleração linear

Inicialmente, para movimentos com uma aceleração do tipo função polinomial, mas que não seja mais constante, sendo por exemplo, representada por um polinômio de 1º grau,

tem-se que a função horária da posição, deve ser agora representada por uma função do 3º grau, já que a assim, sua velocidade (derivada primeira da posição) será de 2º grau, e a sua aceleração será então uma função *linear*, por ser a derivada segunda da posição em relação ao tempo, além do que ainda se poderá ter mais uma derivada, a *variação da aceleração*, agora citada como *arranque* ou *arrancada*.

Em relação a esse conceito apresentado, uma variação da aceleração da partícula em movimento: “**Arrancada**, ou **arranco**, ou **arranque** (em inglês **jerk**) é a taxa de variação da aceleração, e seu valor em um dado momento informa qual é naquele instante a variação da aceleração na unidade de tempo” (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019).

De forma que esses movimentos geralmente não são estudados e nem comentados na educação básica, por se tratar de resoluções (na posição da partícula) de *polinômios cúbicos*, com resoluções bem mais complicadas que os *quadráticos*, já estudados em larga escala.

Isso se dá pelo fato de que uma equação de 2º grau já possui formulação algébrica, demonstrada em (7), na qual se podem encontrar as suas soluções desenvolvidas em (8), isso em se analisando a própria equação geral, como apresentada em (6). Já para as equações de 3º grau, como a apresentada em (18), o procedimento aparece com uma maior complexidade, visto que primeiramente se deve simplificar a equação, deixando-a da forma reduzida, como em (19), e somente a partir daí então se encontrar suas raízes, que foram desenvolvidas em (33), através de sua formulação algébrica demonstrada em (32), mas que além disso, por se tratar das raízes cúbicas, acaba-se por ter que se utilizar da *Fórmula de Moivre* (Hennemann, 2021).

Ainda em contribuição com essa temática, Hennemann (2021, p. 47) continuou seu desenvolvimento ao expor que:

De posse dessas raízes, podemos buscar as combinações perfeitas que expressam a solução da equação reduzida, para depois, considerando a mudança de variável feita, exibir a solução da equação geral do terceiro grau. Utilizar o método de Cardano, pode ser sinônimo de trabalho, como já mencionamos, mas também, de dificuldade para muitos. Pois enquanto, para utilizar a Fórmula Resolutiva de Uma Equação do Segundo Grau, basta praticamente, considerarmos a definição $\sqrt{-1} = i$, quando necessário, o método de Cardano exige conhecer mais a fundo os números complexos e como trabalhá-los para chegarmos nas soluções desejadas.

Dessa forma, de acordo com o que fora apresentado anteriormente em (2), e sendo assim expressa da forma como se apresentou de uma forma geral em (73), a saber:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (106)$$

Onde esse resultado representa justamente a *Função Horária da Posição*, para esses movimentos com acelerações do tipo lineares, de forma que, sua *Função Horária da Velocidade*, que pode ser representada de uma maneira geral pelo polinômio expresso em (75), sendo agora apresentado como:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \quad (107)$$

E conseqüentemente, sua *Aceleração Linear*, que será representada de modo como foi expresso em (78) e agora podendo então ser referenciada como sendo a *Função Horária da Aceleração*, visto da sua agora dependência temporal, mesmo que ainda de maneira linear, onde se é desenvolvida assim:

$$\alpha(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = 2a_2 + 6a_3t \quad (108)$$

Chegando-se ao polinômio de 1º grau para a aceleração da partícula, como se queria inicialmente, e ainda permitindo assim mais uma derivada não-nula, que no caso, a derivada da aceleração, sendo denominada simploriamente como a *Variação da Aceleração* ou *Arrancada* β , de onde poderá também ser dada pela derivada segunda da velocidade ou até pela derivada terceira da posição:

$$\beta(t) = \frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d^2}{dt^2}v(t) = \frac{d^3}{dt^3}s(t) \quad (109)$$

Em que para esse tipo de movimento tem seu resultado *constante*, pois como já foi amplamente discutido anteriormente no capítulo anterior, seu resultado se torna um polinômio de *grau zero*, visto da sua terceira derivada sucessiva em relação à posição, que é um polinômio de 3º grau, onde assim:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{d}{dt}(2a_2 + 6a_3t) \\ \beta(t) &= 6a_3 \end{aligned} \quad (110)$$

Como esse último resultado é invariante no tempo, não se pode denominá-lo como função horária, e portanto, esse tipo de movimento cuja aceleração é linear, possui *três equações horárias*, respectivamente da posição (106), velocidade (107) e aceleração (108), onde podem elas serem compiladas como as equações do movimento para deslocamentos com aceleração do tipo linear, da forma em que se segue:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3; \\ v(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2; \\ \alpha(t) &= 2a_2 + 6a_3 t \end{aligned} \quad (111)$$

Analisando agora então cada uma dessas funções horárias, pode-se perceber que de acordo com (106), tal movimento passará pelo *marco zero* da trajetória, $s(t) = 0$, representado pela seguinte equação polinomial:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = 0 \quad (112)$$

Que é da mesma forma em que fora apresentada na seção de Polinômios de 3º grau, mais especificamente na equação (18), e que possui suas raízes já apresentadas em (33), todavia, para a equação reduzida ($t^3 + pt = q$), que foi apresentada em (19), onde os parâmetros p e q já possuem resultados expressos em termos dos coeficientes (a_0 , a_1 , a_2 e a_3) e apresentados em (24), agora descritos assim:

$$p = \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}; \quad q = -\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1 a_2}{3a_3^2} - \frac{2a_2^3}{27a_3^3} \quad (113)$$

De modo que a solução da equação reduzida ($t^3 + pt = q$), que foi apresentada em (32) fica da seguinte forma:

$$t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (114)$$

Assim, os *três* resultados demonstrados em (33), significam os instantes de tempo em que a partícula poderá passar pela *origem das posições* na trajetória, entretanto, esses valores

somente terão algum significado físico se forem resultados *reais e positivos*, por se tratar de um valor para a grandeza *tempo*, onde como foi discutido anteriormente como sendo não-negativo, além de possuir uma ordenação, não podendo ser representado então por números *complexos*.

De forma que, em se analisando os resultados discutidos na seção de Polinômios de 3º grau, no que diz respeito ao discriminante (δ), cujo resultado fora apresentado em (44), como sendo $\delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, se poderão ter desde nenhum, até três resultados pertinentes para o tempo, sendo incluso também a opção de não se ter nenhum resultado aceitável do tempo, em que o móvel passa pelo *marco zero*.

Resumidamente, como foi dito anteriormente de um polinômio cúbico ter entre uma e três raízes reais, mais precisamente: apenas *uma raiz real* para discriminante positivo ($\delta > 0$), onde se esta raiz for negativa, na prática, não se terá nenhum valor de tempo procurado coerente; já quando o discriminante for nulo ($\delta = 0$), se terão *raízes reais múltiplas*, de modo que se terão uma ou duas raízes reais, sendo assim, de zero a duas soluções para o tempo em questão; e por fim, quando do discriminante negativo ($\delta < 0$), serão *três raízes reais* e distintas, onde assim, de zero a três soluções pertinentes para o tempo, confirmando o que foi dito anteriormente nesse estudo acadêmico.

Em relação à *inversão de sentido* no movimento, observado quando a *velocidade* da partícula zera, $v(t) = 0$, onde da expressão (107), tal mudança de sentido se dará quando:

$$a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 = 0 \quad (115)$$

E como solução dessa equação (115), com raízes expressas em (8), como sendo:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2a_2 \pm \sqrt{4a_2^2 - 12a_1a_3}}{6a_3} \Leftrightarrow \\ t &= \frac{-2a_2 \pm 2\sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}}{2(3a_3)} \Leftrightarrow \\ t &= \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}}{3a_3} \end{aligned} \quad (116)$$

De maneira que se podem ter até *dois* instantes de tempo na qual a partícula inverte seu sentido, em consequência da resolução de equações de 2º grau, de modo que o discriminante, demonstrado em (13) e sendo aqui, $\delta = a_2^2 - 3a_1a_3$, não poderá ser negativo de forma alguma,

para que a solução não seja do tipo *complexa*, por garantia de coerência na variável do tempo em questão, onde assim: $\delta \geq 0$, e consequentemente, $a_2^2 \geq 3a_1a_3$, que poderá gerar *um valor ou nenhum* valor de tempo coerente quando $\delta = 0$, e *de nenhum a dois* valores de tempos reais e pertinentes, se $\delta > 0$.

Como inovação agora nesse tipo de movimento, a aceleração também poderá passar de um lado a outro, vetorialmente falando, pois, sendo do tipo linear, como foi demonstrada em (108), poderá ter apenas um instante de tempo em que, a grosso modo, ela muda de sinal, como resultado de uma equação polinomial, em que se diz respeito ao instante em que a *aceleração* da partícula zera, $\alpha(t) = 0$, a saber:

$$2a_2 + 6a_3t = 0 \quad (117)$$

Essa equação fora solucionada em (5), de onde o instante de tempo buscado será:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{2a_2}{6a_3} \Leftrightarrow \\ t &= -\frac{a_2}{3a_3} \end{aligned} \quad (118)$$

Onde, mais uma vez nessa discussão, para um significado físico conciso, só poderá existir inversão no sentido da aceleração da partícula, se os coeficientes a_2 e a_3 , apresentarem sinais contrários, resultado este da oposição de sinais, em que se foi amplamente discutido aqui anteriormente, em seções precedentes.

Em exemplos práticos de como seriam movimentos nesses moldes, com aceleração do tipo linear, como fora dito no começo da seção, seriam movimentos sob a ação de forças não constantes, como por ação de *Forças Dissipativas*, exemplificado em *queda livre* sob influência não somente das *forças gravitacionais*, mas também da *resistência do ar*, sendo a aceleração inicial a própria gravidade, e no decorrer do movimento essa aceleração se torna cada vez menor, podendo até mesmo zerar, fazendo com que o móvel até desça em certo instante com velocidade constante. Dessa redução na função aceleração, pode-se dizer que se trata de um arranque em sentido (sinal) contrário ao da aceleração, que a faz reduzir em seu módulo (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019).

Mesmo a dinâmica dos movimentos (causadores do movimento) não sendo escopos desse trabalho, mas se vale a pena ressaltar suas consequências, já que podem gerar movimentos

estudados aqui, como nesse exemplo citado, onde a tal redução da velocidade, faz com que a aceleração praticamente ou completamente se anule, caindo em um movimento com velocidade constante, onde essa velocidade é chamada de *velocidade* ou *rapidez terminal*, de maneira que, Tipler e Mosca (2009, p. 137), expuseram sobre o que acontece com a velocidade da partícula e como ela causa uma influência nos resultados das equações nesses movimentos com arraste:

A rapidez é zero em $t = 0$ (o instante em que o objeto é largado), de forma que em $t = 0$ a força de arraste é zero e a aceleração é g para baixo. À medida que a rapidez do objeto aumenta, a força de arraste aumenta e a aceleração diminui. Ao final, a rapidez será grande o suficiente para que a magnitude da força de arraste bv^n se aproxime à da força da gravidade mg . Neste limite, a aceleração se aproxima de zero e a rapidez se aproxima da **rapidez terminal** v_T . Quando a rapidez terminal é atingida, a força de arraste contrabalança a força peso e a aceleração é zero.

Se então esses movimentos fossem do tipo em que além de se existir essa arrancada, ela seja ainda variável, sob forma de uma função linear, em que dessa forma a aceleração teria sua forma polinomial quadrática nessa situação, de modo que esse movimento será analisado a seguir, de forma específica.

3.4.2 Movimento com aceleração quadrática

Por fim, em se falando de movimentos cuja a aceleração possui agora características de polinômios de 2º grau, representados por funções polinomiais quadráticas, assim sendo aqui denominada então como *Aceleração Quadrática*, de um possível movimento da partícula, cuja posição deverá ser representada por uma equação polinomial de 4º grau, para que sua derivada segunda (aceleração) seja dessa forma um polinômio com dois graus a menos que o polinômio da posição, em que tal procedimento já foi amplamente discutido aqui anteriormente, nas seções anteriores desse trabalho.

Da mesma forma, por isso que esse tipo de movimento geralmente não se é estudado e nem comentado na educação básica, por se tratar de resoluções tanto de *polinômios quárticos* (posição da partícula) como de *polinômios cúbicos* (em sua velocidade), com formulações bem mais complicadas que as dos polinômios quadráticos, sendo estes estudados em larga escala na educação básica.

Como comentado na seção anterior, as equações de 2º grau já possuem formulações algébricas bem disseminadas, como foi demonstrado em (7), com os desenvolvimentos de suas soluções respectivas em (8), e isso podendo se analisar a própria equação geral, como em (6). Já para as equações de 3º e 4º graus, como as apresentadas em (18) e (45), respectivamente, os

procedimentos são bem mais complicados, pois primeiramente se é preciso simplificá-las, para as deixar em suas respectivas formas reduzidas (19) e (46), para a partir de então se encontrarem suas raízes, que já foram apresentadas em (33) e (64), respectivamente, pelas suas formulações algébricas respectivas e demonstradas em (32) e (60), onde além disso, por se tratarem de raízes cúbicas, acaba-se por ter que utilizar amplamente a *Fórmula de Moivre* nos procedimentos.

Diante disso tudo que foi comentado, a função da posição s , em termos do tempo t , e de acordo com o que fora desenvolvido anteriormente em (2), sendo assim expressa da forma como se apresentou pela equação geral em (73), sendo dessa forma então aqui representada pela seguinte equação:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \quad (119)$$

Onde esse resultado representa justamente a *Função Horária da Posição*, para esses movimentos cujas acelerações são agora do tipo quadráticas, de forma que, sua *Função Horária da Velocidade*, que pode ser representada de maneira geral pelo polinômio expresso em (75), e sendo agora aqui apresentada da seguinte forma:

$$v(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 \quad (120)$$

Que é representado por um polinômio cúbico, como já se esperava, e que assim, em consequência, sua *Aceleração Quadrática*, que será então representada nos moldes de como foi visto em (78), e assim podendo então ser chamada também de *Função Horária da Aceleração*, visto da sua dependência temporal, agora de uma forma quadrática, de onde se pode demonstrá-la assim:

$$\alpha(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 \quad (121)$$

Chegando-se ao polinômio de 2º grau como se queria inicialmente para a aceleração da partícula, e dessa forma, ainda sendo permitida ter mais uma equação horária, a variação da aceleração, que de acordo com o que foi desenvolvido em (109) agora para tais movimentos com acelerações do tipo quadráticas será:

$$\beta(t) = 6a_3 + 24a_4 t \quad (122)$$

De forma que esses movimentos podem apresentar agora *quatro* equações horárias, sendo representadas por: $s(t)$ em (119), $v(t)$ em (120), $\alpha(t)$ em (121) e $\beta(t)$ em (122), e podem ser compiladas como as equações do movimento para esses tipos de movimentos cujas acelerações são dos tipos polinomiais quadráticas, sendo então sintetizadas como apresentadas em sequência:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4; \\ v(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3; \\ \alpha(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2; \\ \beta(t) &= 6a_3 + 24a_4 t \end{aligned} \quad (123)$$

Analisando agora então cada uma dessas funções horárias, pode-se dizer de acordo com (119), que o móvel passará pela *origem dos espaços*, ou seja, $s(t) = 0$, quando se tiver a seguinte equação polinomial:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 = 0 \quad (124)$$

Que é da mesma forma em que fora apresentada na seção de Polinômios de 4º grau, mais especificamente na equação (45), e que possui suas raízes já apresentadas em (64), todavia, para a equação reduzida ($t^4 + pt^2 + qt = r$), que foi apresentada em (46), onde os parâmetros (p , q e r) já têm seus resultados expressos em termos dos coeficientes (a_0 , a_1 , a_2 , a_3 e a_4) e apresentados em (51), agora descritos assim:

$$p = \frac{a_2}{a_4} - \frac{3a_3}{8a_4^2}; q = \frac{a_1}{a_4} - \frac{a_2 a_3}{2a_4^2} + \frac{a_3^3}{8a_4^3}; r = -\frac{a_0}{a_4} + \frac{a_1 a_3}{4a_4^2} - \frac{a_2 a_3^2}{16a_4^3} + \frac{3a_3^4}{256a_4^4} \quad (125)$$

Onde, a solução da equação reduzida ($t^4 + pt^2 + qt = r$), que foi apresentada em (60) fica da seguinte forma:

$$t^2 + \frac{u}{2} = \pm \left(t\sqrt{u-p} - \frac{q}{2\sqrt{u-p}} \right) \quad (126)$$

Em se recordando que esse valor de u é um resultado da equação de 3º grau (54), já encontrado em (58), a ser substituído em (60), na simplificação na equação de 4º grau (124) em

uma de 3º grau, vista na seção do Método de Ferrari, de forma que o resultado apresentado aqui em (126), provocando-se então duas equações de 2º grau, com a operação (+) e a operação (–), e consequentemente, as quatro tão almejadas raízes da equação *quártica* que fora trabalhada até então nessa produção acadêmica.

Onde, os *quatro* resultados desenvolvidos em (33), significam então os instantes de tempo em que a partícula poderá passar pelo *marco zero* da trajetória adotada, mas lembrando que esses valores somente terão algum significado físico se forem resultados *reais e positivos*, por se tratar de valores para a grandeza do *tempo*, onde como discutido anteriormente não se há sentido de serem negativo, além do fato de terem de ser ordenados, e dessa forma não poderem ser representados por números *complexos*.

Novamente em relação à *inversão de sentido* no movimento, quando a *velocidade* da partícula zera, $v(t) = 0$, onde da expressão (120) se tem que tal mudança de sentido se dará então pela equação:

$$a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 = 0 \quad (127)$$

Que tem como solução que já fora calculada, tendo suas raízes expressas em (33), desenvolvidas da expressão (32), como sendo:

$$t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (128)$$

De maneira que se podem ter até *três* instantes de tempo na qual a partícula inverte seu sentido, em consequência da resolução das equações agora de 3º grau, podendo ter de *zero* a *três* soluções desse tempo t .

Como a aceleração também poderá passar de um lado a outro, vetorialmente falando, pois, sendo do tipo quadrática, como foi demonstrada em (121), poderão se ter até *dois* instantes de tempo em que, a grosso modo, ela muda de sinal, onde, novamente se pensando quando essa *aceleração* zera, $\alpha(t) = 0$, sendo:

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ a_2 + 3a_3t + 6a_4t^2 &= 0 \end{aligned} \quad (129)$$

Em que se já fora solucionado em (7), e de onde assim se tem os instantes de tempo, representados por:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{-3a_3 \pm \sqrt{9a_3^2 - 24a_2a_4}}{12a_4} \Leftrightarrow \\
 t &= \frac{-3a_3 \pm \sqrt{9a_3^2 - 9 \cdot \frac{8}{3}a_2a_4}}{12a_4} \Leftrightarrow \\
 t &= \frac{-3a_3 \pm 3\sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3}a_2a_4}}{3(4a_4)} \Leftrightarrow \\
 t &= \frac{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3}a_2a_4}}{4a_4} \tag{130}
 \end{aligned}$$

Podendo-se ter até *dois* instantes de tempo na qual a aceleração inverte seu sentido, e onde, mais uma vez, para se ter um significado físico de forma consistente, só se poderá existir inversão nesse sentido da aceleração da partícula, se o discriminante, mostrado em (13) e sendo aqui, $\delta = a_3^2 - \frac{8}{3}a_2a_4$, não o seja negativo de forma alguma, para que a solução não seja do tipo *complexa*, por garantia de coerência na variável do tempo em questão, onde assim: $\delta \geq 0$, e conseqüentemente, $a_3^2 \geq \frac{8}{3}a_2a_4$, que poderá gerar *um ou nenhum* valor de tempo coerente, isso quando $\delta = 0$, e *de nenhum a dois* valores de tempos reais e pertinentes, quando se tiver o discriminante, $\delta > 0$.

Finalmente, como a *variação da aceleração* da partícula, apresentada em (122), não é constante, ela também poderá ter inversão de sinal, no momento em que zera, $\beta(t) = 0$, onde se terá que buscar solução para a equação polinomial do tipo linear, em que a expressão gerada será a seguinte:

$$\begin{aligned}
 6a_3 + 24a_4t &= 0 \Leftrightarrow \\
 a_3 + 4a_4t &= 0 \tag{131}
 \end{aligned}$$

Em que sua solução já foi apresentada diversas vezes aqui nesse trabalho, mas que se tem como base a formulação expressa em (5), para polinômios de 1º grau, cuja raiz pode se apresentar agora como:

$$t = -\frac{a_3}{4a_4} \quad (132)$$

De modo que, em mais uma vez se discutindo sobre isso, para que a grandeza *tempo* tenha um significado físico coerente, só se será possível existir inversão no sentido da variação da aceleração da partícula, quando os coeficientes a_4 e a_3 , detiverem seus *sinais opostos*, que já se foi amplamente discutido aqui anteriormente, nas seções precedentes, como resultado das equações polinomiais de 1º grau.

4 CONCLUSÃO

Em suma, ao se falar de Educação em si, que por sinal é um assunto bem complexo, esta demanda uma enorme quantidade de métodos e investidas, sempre com intuito de se aplicar suas considerações em qualquer âmbito educacional (Santiago, 2016), fazendo assim com que os profissionais da educação saibam que essas

[...] metodologias têm o objetivo geral de fazer com que a aprendizagem seja a mais rica possível, fazendo com que os educandos, além de adquirirem conhecimento técnico sobre diversos temas do conhecimento humano, se tornem cidadãos críticos e conscientes de seus papéis na sociedade. Atingir estes objetivos plenamente é tarefa das mais difíceis (Santiago, 2016).

Assim, para que o professor consiga alcançar seu objetivo educacional, ele necessita usar de tais metodologias bem mais ativas, principalmente as tecnologias digitais da informação e da comunicação, com o mais moderno possível, para que o estudante se sinta mais estimulado a participar desse processo educacional, entendendo como tais conteúdos apresentados, podem fazer parte de sua vida, através de modelagens matemáticas e em representação aos diversos conceitos apresentados (Távora Neto, 2023).

Para que tudo isso aconteça, um bom planejamento e uma diversificação das aulas é essencial, e por isso que ainda nessa temática dos professores, que Távora Neto (2023, p. 44) também adicionou que estes devem

[...] estar preparados para saber escolher e usar softwares com reflexão, sabendo que o seu papel é de mediador entre tecnologia e aprendizagem. É importante ressaltar que sem o professor, o software sozinho não ensina ninguém, o professor sempre será o mediador na criação de situações de utilização desses softwares que levem os alunos à aprendizagem.

Como motivação, tudo partiu de uma necessidade humana de se explicar a natureza que ronda todas as pessoas, e assim, torna-se necessário apresentar demonstrações e conceitos, onde por muitas vezes, são bem abstratos e necessitam de uma linguagem ou ferramentas, no intuito de tornar tudo isso mais concreto ao entendimento humano do Universo, onde foi justamente sobre isso, que Silva (2015, p. 21) contribuiu dizendo que:

Através da necessidade do homem de compreender os fenômenos que o cercam, surge a Modelagem Matemática. [...] é através da modelagem matemática que, podemos compreender e interpretar fenômenos e criar um modelo matemático para inferir em seus processos de construções.

Enfim, esse trabalho tratou então de se encontrar as equações polinomiais específicas, no intuito de se fazer estudo de movimentos de partículas com tais características polinomiais, desde os movimentos mais simples com *aceleração nula*, passando por aqueles com *aceleração constante*, e até se chegando nos mais complexos, com *acelerações variáveis*, tudo com suas devidas restrições e particularidades adotadas.

Assim, não se tratou apenas de um estudo dos movimentos mais conhecidos, como o *Movimento Uniforme* e *Movimento Uniformemente Variado*, mas de outros movimentos mais inusitados, cujas acelerações podem ser do tipo variáveis, contudo, sem sair da linha *polinomial*, desenvolvida desde o início do trabalho.

Dessa forma, foi-se perceptível que se pode ser altamente aceitável tal estudo desses movimentos na educação básica, sem a necessidade de conceitos matemáticos mais avançados, ou fora da realidade estudantil, além do mais, embasar os professores de algumas peculiaridades dos movimentos apresentados.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Lenimar Nunes de. Cotas das raízes de um polinômio. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 42, p. 40-43, 2000.
- ANDRADE, Lenimar Nunes de. Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 14, p. 39-41, 1989.
- ASSIS, Emílio Silva de. **A matemática como ferramenta para o ensino de física: funções polinomiais do 1º e do 2º grau e a cinemática**. 2013. 93 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.
- BOSQUILHA, Alessandra; PELEGRINI, Márcio. **Minimanual compacto de física: teoria e prática**. 2. ed. rev. São Paulo: Rideel, 2003.
- CALÇADA, Caio Sérgio; SAMPAIO, José Luiz. **Física clássica: cinemática**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1998. v. 1.
- CARNEIRO, José Paulo Q. Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 40, p. 31-40, 1999.
- CORTÊS, George Luiz Coelho. **Polinômios e equações polinomiais: propriedades e aplicações**. 2020. 98 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande Do Norte, Natal, 2020.
- COSTA, Debora Naiure Araujo. **Análise do discriminante em equações polinomiais de terceiro grau a partir de funções simétricas**. 2020. 75 f. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020.
- CRUZ, Lucas Cavalcanti. **Algumas aplicações de física do ensino médio a partir do cálculo diferencial e integral**. 2013. 85 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- ESTRADA, E. L. Polinômios e raízes conjugadas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 77, 2012. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/77/12.html>.
- FRAGOSO, Wagner da Cunha. Uma abordagem histórica da equação do 2.º grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 43, p. 20-25, 2000.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física: mecânica**. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 1.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física: mecânica**. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1.

HENNEMANN, Vilson. **Equações polinomiais de até quarto grau: o limite das soluções gerais por radicais**. 2021. 67 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2021.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar**. 9. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013. v. 1.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013. v. 6.

LIMA, Elon Lages. *et al.* **A matemática no ensino médio**. 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Marcos Goulart. **O grupo de Galois de $x^n - x^{n-1} - \dots - x - 1$** . 2008. 33 f. Dissertação (Mestrado em Ciências-Matemática) – Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

MARTINS, Jerfson Maciel Araujo. **Funções polinomiais do 1º e 2º graus: uma abordagem na física**. 2014. 93 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2014.

MOREIRA, Carlos Gustavo Tamn de Araújo. Uma solução das equações de 3º e 4º graus. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 25, p. 23-28, 1994.

NASCIMENTO, Demilson Antonio do. **Métodos para encontrar raízes exatas e aproximadas de funções polinomiais até o 4º grau**. 2015. 81 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

NETA, Miguel. **Gráficos posição-tempo e velocidade-tempo**. [S. l], 2017. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/14100170/>. Acesso em: 13 maio 2024.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica: mecânica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. v. 1.

OLIVEIRA, Daniell Ferreira de. **Equações polinomiais: da equação de 1º grau à teoria de Galois**. 2017. 105 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

SANTIAGO, Alexander Arley Xavier. **Um experimento científico como motivador no processo de ensino aprendizagem em física**. 2016. 72 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional Nacional em Ensino de Física – MNPEF) – Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

SANTOS, Ana Nery Jesus. **Solução de equações polinomiais por meio de radicais**. 2019. 96 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Pró-Reitora de Pós-Graduação e Pesquisa, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.

SANTOS, Marcia Walkiria da Silva. **Resolução numérica de equações polinomiais de grau $n > 2$ no ensino médio, por que não?** 2018. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional – PROFMAT/CCT/UFCG) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2018.

SERPA, P. O. **A Matemática como motivação no ensino de Física**. 2018. 105 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

SILVA, Eric Novais. **Análise da matematização da física na concepção dos professores de física do IFBaiano - Guanambi**. 2018. 123 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2018.

SILVA, Francinéia Alves de Souza. **Aprendendo funções com experimentos de física e atividades interdisciplinares**. 2015. 63 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2015.

SILVA, Walmor Pereira. **Uma abordagem dos conteúdos de matemática aplicados à física na 1ª série do ensino médio**. 2020. 92 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Fundação Universidade Federal de Rondônia, Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2020.

SYMON, K. R. **Mecânica**. Tradução de Gilson Brand Batista. Rio de Janeiro: Campus, 1996.

TÁVORA NETO, Luiz Edson Pinheiro. **Funções afim e quadrática: uma análise de avaliações externas para uma abordagem didática no ensino dessas funções**. 2023. 80 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2023.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 1.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. Centro de Referência para o Ensino de Física. **O que é arrancada ou arranque?** Porto Alegre: CREF, 2019. Disponível em: <https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=o-que-e-arrancada-ouarranque>. Acesso em: 21 jun. 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. Centro de Referência para o Ensino de Física. **Cinemática: significado da equação do terceiro grau da posição no tempo**. Porto Alegre: CREF, 2020. Disponível em: <https://cref.if.ufrgs.br/?contactpergunta=cinematica-significado-da-equacao-do-terceiro-grau-da-posicao-no-tempo>. Acesso em: 21 jun. 2023.

XAVIER, Claudio; BARRETO, Benigno. **Física aula por aula: mecânica**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016. v. 1.