



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOSÉ EUCLIDES GOMES DA SILVA

**SOBRE MODIFICAÇÕES NA
ESTRUTURA GEOMÉTRICA EM
CENÁRIOS DE BRANAS**

FORTALEZA

2013

JOSÉ EUCLIDES GOMES DA SILVA

**SOBRE MODIFICAÇÕES NA
ESTRUTURA GEOMÉTRICA EM
CENÁRIOS DE BRANAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA

2013

JOSÉ EUCLIDES GOMES DA SILVA

**SOBRE MODIFICAÇÕES NA
ESTRUTURA GEOMÉTRICA EM
CENÁRIOS DE BRANAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 16/10/2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Roldão da Rocha Júnior
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Setorial de Física

A000p Silva, José Euclides Gomes da Silva .
Sobre modificações na estrutura geométrica em cenários de
branas / José Euclides Gomes da Silva. – 2013.
130 p.;il.

Tese - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física,
Programa de Pós-Graduação em Física, Centro de Ciências, For-
taleza, 2013.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

1. Cenário de branas. 2. *Conifold* resolvido. 3. Fluxo de Ricci.
4. Violação da simetria de Lorentz. 5. Geometria de Finsler. I.

CDD:000.0

*Aos Meus Pais que
me ensinaram os
bons valores com
muito amor e com o
suor de seus
trabalhos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida. Aos meus queridos pais José Maria e Cristina por seus grandes esforços em me tornar um bom homem. A eles devo meus bens mais valiosos. Às minhas irmãs Elaine e Ruth pelo carinho e eterno apoio. Aos meus tios Lena e Alessandro que sempre me incentivaram e apoiaram. Aos meus avós Almiros e Otávio pelos exemplos e fortaleza. Ao meu tio Jarbas pelo exemplo de homem. À Renata pelo carinho e compreensão. E a todos os meus queridos familiares.

Um forte abraço aos meus queridos Evandro, Zanzinha, Camilla, Júnior, Josy, Eugênia, Maraysa, Jorge, Paula, Humberto e tantos outros que grandes amigos que sempre compartilharam desta longa jornada com muita paz, luz e felicidades. Obrigado amigos!

Aos meus colegas de estudos Jorge André, Nádia, Anderson, Philipe, Sílvia, Igor, entre tantos outros que tantos momentos bons e difíceis passamos juntos e que agora vencemos.

Aos meus grande colegas de LASSCO (Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes) Roberto, Samuel, Diego, Davi, Victor, Hudson, Luciana, Júlio Cesar, Wagner, Aristeu, Luís José, Carlos Alex, Ivan (brother) e o Adevaldo (Dedé) entre outros por muito ter aprendido com todos vocês.

Ao Prof. Carlos Alberto pela dedicação e orientação constantes durante esses oito anos, desde a iniciação científica até o doutorado.

Aos Professores Roldão da Rocha, José Hellayel, Jorge Herbert e Francisco Brito por participarem da banca e pois os admiro muito não apenas academicamente mas como grandes homens nos quais me espelho.

A todos os professores que sempre me estimularam, como o prof. Ramos, Afonso, Alexandre Fernandes, Alexandre Dielh, entre outros.

Ao big brother (Reginaldo), Dona Creusa, Dona Vera, Jailson, Josa, Michele, Ana Cleide, Rejane e Diniz pelo carinho.

RESUMO

A presente tese apresenta nossas propostas de extensões dos modelos de mundo branas. Alguns dos principais problemas em aberto em física de partículas, como o problema da hierarquia entre as escalas de Planck e da teoria eletrofraca, e da cosmologia, como a origem da matéria escura e o valor da constante cosmológica, encontram soluções nos cenários de branas. Uma vez que tais modelos são extremamente sensíveis à estrutura geométrica do espaço-tempo ambiente multidimensional no qual a brana está imersa, nossa idéia básica é analisar como as propriedades da brana e dos campos que vivem no seu entorno mudam quando alteramos a estrutura geométrica do espaço ambiente. Nosso primeiro passo foi uma extensão do cenário de brana tipo-corda em seis dimensões, onde a variedade transversa é uma seção de um cone resolvido. O parâmetro de resolução do cone, que controla a singularidade na origem, também altera a largura dos modos sem massa de um campo escalar e do potencial confinante dos modos Kaluza-Klein. Também analisamos as condições de energia da fonte, que passa por várias fases durante o fluxo de resolução. Estudamos ainda como este fluxo modifica as propriedades dos campos vetoriais e espinoriais neste cenário. Em seguida, propusemos um novo fluxo geométrico para a variedade transversa. O chamado fluxo de Ricci possui soluções invariantes por diffeomorfismos chamadas sólitons de Ricci. Tais soluções tem a propriedade de extremizar grandezas durante este fluxo, como o funcional energia e entropia do fluxo. Uma solução particularmente importante e estacionária do fluxo de Ricci é o chamado sólito de Hamilton que possui simetria axial. Definimos uma variedade produto não-fatorizável entre uma 3-brana e o sólito de Hamilton resultando em uma solução de brana tipo-corda regular que satisfaz a condição de energia dominante e tem um modo gravitacional não-massivo localizado. Outra modificação geométrica proposta foi a de uma violação da simetria de Lorentz através da introdução de uma estrutura métrica localmente anisotrópica, a chamada geometria de Finsler. Tal abordagem tem sido objeto recente de vários estudos. Escolhemos uma estrutura finsleriana recentemente proposta, chamada *bipartite*, onde o comprimento dos eventos é calculado não somente com a métrica lorentziana mas com outra forma bilinear simétrica. O cone de luz desta geometria é deformado para um cone elíptico cujas inclinações das geratrizes dependem dos autovalores do tensor *bipartite*. Outra propriedade deste espaço-tempo é a de modificar a relação entre o 4-momentum e a 4-velocidade gerando um tensor de inércia. Através de uma ação de Einstein-Hilbert finsleriana em um limite de baixa dependência direcional, encontramos uma analogia entre essa geometria e os modelos *Bumblebee* e de aether, que descrevem efetivamente a quebra de Lorentz em espaços-curvos.

Palavras-chave: Cenário de branas. *Conifold* resolvido. Fluxo de Ricci. Violação da simetria de Lorentz. Geometria de Finsler.

ABSTRACT

This thesis presents our proposals for new braneworlds models. Some of the main open issues in high energy physics have interesting solutions assuming the space-time has more than four dimensions. For instance, the hierarchy problem between the electroweak and the Planck scales, and the origin of the cosmological constant, find some solutions in the brane scenarios. Since these models are rather sensible on the geometrical structure of the multidimensional space time where the brane is embedded, our main goal is to analyze how the geometrical and physical properties of the braneworld and of fields living on it evolve under a geometrical flow in the transverse manifold. The first step was propose an smoothed string-like braneworld with a transverse resolved conifold. The resolution parameter changes the width of the well and the high of the barrier of the Kaluza-Klein modes. Further, the source of this warped solution has different phases depending on the resolution parameter. The massless modes for the scalar, gauge and spinor fields are only well-behaved on the brane for non singular configurations. Another smooth geometrical flow studied was the so-called Ricci flow. This flux posses diffeomorphic invariant solutions called *Ricci solitons* which are extremals of the energy and entropy functionals. An important two-dimensional *Ricci soliton* with axial symmetry is the *cigar soliton*. A warped product between a 3-brane and the *cigar soliton* turns to be an interior and exterior string-like solution satisfying the dominant energy condition and that supports a massless gravitational mode trapped to the brane. The last geometric modification proposed was the locally Lorentz symmetry violation through a Finsler geometry approach. This anisotropic differential geometry has been intensely studied in last years. We have chosen the so-called *bipartite space* where the length of the events is measure using the metric and another symmetric tensor called *bipartite tensor*. We have shown the bipartite space deforms the causal surface to an elliptic cone and provides an anisotropy into the inertia of a particle. By means of an extended Einstein-Hilbert action we have shown an analogy between the *bipartite space* and the *bumblebee* and *bipartite* models which are effective Lorentz violating models in curved space times.

Keywords: Braneworld scenario. Resolved Conifold. *Ricci* flow. Lorentz Symmetry Violation. Finsler Geometry.

LISTA DE FIGURAS

1	Esboço de uma brana imersa em um espaço-tempo com uma dimensão extra y	p. 23
2	Esboço do cenário de branas RS1. Duas branas planas e paralelas são imersas em um espaço-tempo Anti de Sitter de cinco dimensões com uma fator de <i>warp</i> do tipo exponencial.	p. 30
3	Escalar de Ricci para a variedade cônica resolvida e singular com origem em $r = 5$. Para $a = 1$ (linha cheia), a curvatura é suave na origem $r = 5$ enquanto que para $a = 0$ (linha fina) diverge na origem.	p. 56
4	Mudança da coordenada radial no 2–cone resolvido. A inclinação do gráfico para $a = 10$ (linha cheia) é menor do que para $a = 0$ (linha pontilhada).	p. 57
5	Mudança de variável radial inversa. $a = 10$ (linha cheia) e $a = 0$ (linha tracejada).	p. 57
6	Fator de warp não-linear. Sua forma de sino lhe dá uma simetria Z_2 como suaviza seu comportamento sobre a brana.	p. 62
7	Fator de <i>warp</i> suavizado para $c = 1$ (linha azul) e fator de warp linear (linha vermelha). Note que ambos tem o mesmo decaimento exponencial para longas distâncias mas o fator linear não satisfaz as condições de regularidade na origem.	p. 63
8	Escalar de curvatura do <i>bulk</i> para $\hat{R} = 0$ e $c = 1$. O espaço-tempo é suave em todos os pontos e assintoticamente ele converge para um espaço AdS_6	p. 63
9	Escalar de curvatura de \mathcal{M}_6 para o fator de <i>warp</i> não-linear. A geometria é suave na origem mas diverge assintoticamente.	p. 64
10	Componentes do tensor de tensão-energia para $a = 0$. T_{00} (linha cheia), $T_{\theta\theta}$ (linha pontilhada) e T_{rr} (linha tracejada) satisfazem a condição de energia dominante.	p. 64

11	Componentes do tensor de tensão-energia para $a = 10$. A condição fraca $T_{00} \geq 0$ é satisfeita mas como $T_{00} = T_{\theta\theta}$ as condições forte e dominante são violadas.	p. 64
12	Potencial para o fator de <i>warp</i> linear e $l = 0$. Para $a = 1$ (linha fina) o potencial decai exponencialmente. Para $0.1 \leq a < 0$ (linha tracejada) aparecem dois poços de potencial assimétricos próxima a brana mas sobre esta o potencial diverge. Para $a = 0$ um poço de potencial surge na vizinhança da brana (linha pontilhada).	p. 67
13	Potencial para o fator de warp não-linear. Para $a = 1$ (linha cheia) existe apenas um poço de potencial entorno da brana. Para $a = 0.15$, há um máximo sobre a brana e dois poços próximo à brana (linha fina). Para $a \rightarrow 0$ há um poço ao redor da brana (dashed line).	p. 68
14	Modo KK para o fator de warp não-linear próximo à brana.	p. 69
15	Auto-função para o fator de warp não-linear longe da brana ou para $a = 0$	p. 69
16	Modo zero para o fator de warp linear.	p. 70
17	Modo zero para o fator de warp não-linear. $a = 0$ (linha pontilhada).	p. 70
18	Fator de <i>warp</i> para um defeito tipo-corda fina (linha cheia) e para a solução tipo corda-charuto (linha tracejada).	p. 79
19	Componente angular da métrica para um defeito tipo-corda fina (linha tracejada) e para a solução tipo corda-charuto (linha cheia).	p. 79
20	Escalar de Ricci para o espaço ambiente \mathcal{M}_6 . A variedade é livre de singularidades e converge para um espaço AdS_6 assintoticamente.	p. 79
21	Componentes do tensor de tensão e energia. A densidade de energia (linha cheia) é positiva (condição fraca de energia), maior que as outras componentes (condição forte de energia) e maior que a somas das outras componentes (condição de energia dominante).	p. 81
22	Modo-zero gravitacional. Tal solução tem suporte compacto (localizada) em torno da origem (brana) para qualquer valor de k . Note que quanto maior o valor de k mais localizada é a solução. Além disso, o modo tem um comportamento crescente próximo a brana devido o fator do charuto ($\tanh k\rho$) e exponencialmente decrescente longe da brana, o que reflete a característica tipo-corda.	p. 84

23	Modos massivos para $m = 1$ proximo à brana para $l = 0, 1, 2$ (respectivamente, vermelho, verde e azul). Quanto maior l menor a amplitude do modo.	p. 85
24	Potencial de Schrödinger para $l = 0$. O gráfico tem a conhecida forma <i>vulcão</i> para qualquer k . Além disso, quanto maior o valor de k maior o valor da barreira.	p. 87
25	Relação entre as escalas de energia e as simetrias. Será que a simetria de Lorentz será preservada por mais 16 ordens de grandeza?	p. 91

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 16
1.1	O universo como uma brana	p. 17
1.2	Nosso intuito e contribuições	p. 17
1.3	Organização da obra	p. 19
2	OS MODELOS DE BRANAS	p. 20
2.1	O modelo de Kaluza-Klein	p. 20
2.2	Pioneiros dos modelos de branas	p. 21
2.2.1	O modelo de Rubakov-Shaposhnikov	p. 22
2.3	Teoria de corda-branas	p. 26
2.4	O modelo ADD	p. 27
2.5	O modelo RS	p. 29
2.5.1	RS1	p. 29
2.5.1.1	Aspectos geométricos do modelo RS	p. 30
2.5.1.2	Dinâmica do modelo RS	p. 32
2.5.1.3	O problema da hierarquia	p. 34
2.5.2	RS2	p. 34
2.6	Modificações do modelo RS	p. 35
2.7	Modelos de branas em seis dimensões	p. 36
2.7.0.1	Defeitos tipo-corda em $(3 + 1)$ dimensões	p. 36
2.7.0.2	Branas tipo-corda globais	p. 41
2.7.0.3	Modelo de Cohen-Kaplan	p. 43

2.7.0.4	O modelo de Gregory	p. 44
2.7.0.5	O modelo de Olasagasti-Vilenkin	p. 45
2.7.0.6	O modelo de Gherghetta-Shaposhnikov (GS)	p. 45
2.7.0.7	Modelo de RandjbarDaemi-Shaposhnikov	p. 47
2.7.0.8	Modelos de Oda	p. 48
2.7.0.9	O modelo Giovannini-Meyer-Shaposhnikov	p. 48
2.7.0.10	O universo tipo-charuto	p. 49
2.7.0.11	Modelos cosmológicos em $6 - D$	p. 50
2.7.0.12	Modelos com geometrias exóticas	p. 51
3	VARIEDADES CÔNICAS RESOLVIDAS	p. 53
3.1	Variedade cônica resolvida	p. 54
3.2	Cenário de brana com um cone resolvido transverso.	p. 57
3.2.1	Fator de <i>warp</i> linear.	p. 60
3.2.2	Fator de <i>warp</i> não-linear	p. 62
3.2.3	Fator de <i>warp</i> suavizado	p. 62
3.3	Localização do campo escalar	p. 65
3.3.1	Modos massivos	p. 66
3.3.1.1	Fator de <i>warp</i> linear	p. 66
3.3.1.2	Fator de <i>warp</i> não-linear	p. 68
3.3.2	Modos zero	p. 69
4	VARIAÇÕES GEOMETRICAS SOB UM FLUXO DE RICCI	p. 71
4.1	Fluxos de Ricci	p. 71
4.2	Aplicações físicas	p. 73
4.3	Sólitons de Ricci	p. 74
4.4	Sóliton charuto de Hamilton	p. 76

4.5	O cenário corda-charuto	p. 77
4.5.1	Construção do cenário	p. 78
4.5.2	Análise da fonte	p. 80
4.5.3	O problema da hierarquia	p. 82
4.5.4	Perturbações do campo gravitacional	p. 82
4.5.5	Modos não-massivos	p. 83
4.5.6	Modos massivos	p. 84
4.5.7	Potencial de Schrödinger	p. 85
5	VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ E GEOMETRIA DE FINSLER	p. 88
5.1	Violação de simetria de Lorentz em espaços planos	p. 91
5.2	Modelos com quebra de Lorentz em espaços curvos	p. 94
5.2.1	Modelos de Einstein-Cartan	p. 94
5.2.2	Modelo <i>bumblebee</i>	p. 96
5.3	Modelo de Kostelecky para uma geometria de Finsler	p. 97
5.3.1	1ª forma fundamental e métrica de Sasaki	p. 100
5.3.2	Conexões em geometria de Finsler	p. 102
5.3.3	Geodésicas	p. 105
5.3.4	Curvatura	p. 105
5.3.5	Espaço de Randers	p. 106
5.3.6	Métrica bipartite	p. 109
5.3.6.1	Aspectos cinemáticos da geometria Bipartite	p. 110
5.3.6.2	Aspectos dinâmicos do espaço bipartite	p. 112
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	p. 116
6.1	Sobre o cenário com um cone resolvido	p. 116
6.2	Sobre o cenário com um fluxo de Ricci	p. 117

6.3 Violação da simetria de Lorentz em uma geometria de Finsler p.118

6.3.0.3 Modelo RS com quebra de Lorentz p.119

REFERÊNCIAS p. 121

1 INTRODUÇÃO

Desde a teoria da relatividade geral, em 1915, vários cientistas propuseram modelos que explicassem os fenômenos naturais como emergentes de uma estrutura geométrica [1]. Assim como Einstein mostrou que a força gravitacional era na verdade uma força de inércia devido a curvatura do espaço-tempo, Weyl propôs que a força eletromagnética seria o resultado de uma simetria conforme do espaço-tempo [1]. Tal simetria tornaria a conexão não compatível com a métrica levando a problema com a medição do tempo próprio de observadores inerciais [1].

Em uma outra abordagem, Kaluza e Klein propuseram que o campo eletromagnético seria o resultado de uma dimensão extra compacta [2]. Tal dimensão extra não era observada em nossos experimentos devido a estes estarem ligados a uma escala muito baixa de energia, ou se preferir, muito grande de comprimento [3].

A unificação das forças elementares utilizando dimensões extras é uma das bases da teoria de supercordas a qual é nossa melhor candidata a teoria unificadora [6]. A partir da ideia de dimensões extras pode-se explicar, por exemplo, o espectro das partículas elementares e a entropia dos buracos negros [6].

Mais recentemente, alguns modelos de dimensão extra abordaram problemas como a grande diferença entre as escalas de energia gravitacional e eletrofraca (o problema da hierarquia) [33, 34], o pequeno mas não nulo valor da constante cosmológica (o problema da constante cosmológica)[93], o porque das três gerações de férmions e da existência de apenas férmions com uma quiralidade em nosso universo [95], entre outros.

Mais ainda há muito o que descobrir. De fato, outro problema essencial para a física de altas energias é o da natureza da chamada matéria escura. Alguns modelos propõem que a rotação anômala das galáxias seria um resultado não de um novo campo em nosso universo mas de campos vivendo no espaço multidimensional interagindo com a matéria em nosso universo [103, 104, 105].

1.1 O universo como uma brana

A teoria de supercordas, bem como o modelo Kaluza-Klein (KK), baseia-se na suposição de que as dimensões extras formam uma variedade riemanniana compacta [6]. Além disso, supõe-se também que a geometria de nosso universo é independente da geometria da variedade transversa, ou interna [6]. No entanto, a partir da década de 1980 alguns autores começaram a investigar a possibilidade de dimensões extras não-compactas e com uma geometria não-fatorizável [13, 15, 16, 17, 19]. O universo seria então uma hipersuperfície mergulhada em um espaço-tempo de dimensão maior que quatro, uma espécie de membrana [23, 25].

Com o surgimento do conceito de D-branas e M-branas, em meados dos anos 1990, a noção de objetos extensos com dimensões extras ganhou um maior embasamento [27, 28, 30, 31]. O desenvolvimento destas ideias gerou no final dos anos 1990 os modelos ADD [33] (geometria fatorizável) e RS [34, 35] (geometria não-fatorizável) que mudaram nossos conceitos de física multidimensional. De fato, esses modelos assumem que a geometria da variedade transversa pode, já na escala de energia disponíveis em nossos atuais aceleradores de partículas, influenciar em processos em nossa brana.

Rapidamente vários grupos ao redor do mundo ampliaram os modelos ADD e RS para incluir os efeitos de campos vivendo no espaço-tempo ambiente [36, 37, 39], efeitos cosmológicos [40], de dimensões maiores [64, 65, 68, 69], etc.

1.2 Nosso intuito e contribuições

Uma vez que a geometria do espaço-tempo ambiente multidimensional tem papel preponderante nos modelos de branas, nós nos propomos a estudar como as características físicas do modelo variam quando alteramos algumas características geométricas do modelo. Em particular, como os campos do modelo padrão, vivendo no *bulk*¹ são afetados por um fluxo geométrico? Como as características da brana, como suas tensões e curvatura são afetadas por esse fluxo?

O modelo escolhido foi o de branas tipo-corda em seis dimensões. Tais soluções estáticas e com simetria axial tem a característica peculiar de produzir um espaço transversal localmente plano e globalmente cônico [68]. Tal comportamento cônico, que no caso com constante cosmológica aparece apenas próxima à brana [70], leva a problemas

¹O espaço-tempo multidimensional.

relativos aos campos induzidos sobre a brana [84, 85].

Nesse sentido, nossa primeira contribuição foi propor uma variedade transversa cuja singularidade cônica é parametrizada, o chamado cone resolvido. Tal variedade riemanniana é um espaço de Calabi-Yau importante em extensões da correspondência AdS-CFT [6, 129, 130, 131, 132]. Dentre os resultados encontrados, destacamos que o parâmetro de resolução permite a existência de modos não massivos para os campos escalares [106], vectoriais [107] e fermiônicos [108]. A geometria não-fatorizável pode ser entendida como uma correção da geometria tipo-corda próxima à brana. Com efeito, a fonte desta geometria satisfaz as condições fraca e forte de energia [107].

Outra geometria que nós propomos é a que toma o produto não-fatorizável entre uma 3-brana e uma solução estacionária do chamado fluxo de Ricci, o chamado sóliton charuto de Hamilton [110, 111, 112, 114, 116]. O fluxo de Ricci representa fisicamente a equação do fluxo de renormalização para a ação da corda bosônica, ou seja, uma equação para as correções quânticas da geometria da folha mundo [121].

A geometria do *bulk* resultante satisfaz além da condição de energia dominante as condições de regularidade na origem [109]. Apesar de ainda apresentar um comportamento cônico próximo à origem, tal geometria permite um modo zero gravitacional e uma variação da relação entre as escalas de energia entre do *bulk* e da brana [109]. No entanto, o comportamento cônico também leva à existência de modos Kaluza-Klein taquiônicos. Esperamos que a inclusão de termos de mais alta ordem (Gauss-Bonnet) possa remediar o problema dos táquions.

Nossa última proposta, ainda em andamento, busca levarmos em conta efeitos de violação da simetria de Lorentz em cenários de mundo-brana. Tal violação é esperada no regime quântico da gravidade e por isso, é interessante investigarmos os novos efeitos nesta escala de energia [147, 172, 175, 176].

Nossa abordagem baseia-se em munir o espaço-tempo de uma estrutura geométrica anisotrópica, a chamada geometria de Finsler, onde o comprimento dos eventos não satisfaz uma relação quadrática como na geometria riemanniana [191, 201]. Tal mudança está intimamente relacionada com a relação de dispersão das partículas elementares [219].

Escolhemos a chamada geometria *bipartite*, proposta recentemente por Kostelecký [188, 190]. Nela, além do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, há um outro tensor simétrico, $s_{\mu\nu}$, utilizado para medir os intervalos no espaço-tempo. Até o momento, mostramos que tal espaço-tempo é análogo, no limite onde a geometria possui uma fraca dependência direcional,

ao modelo *bumblebee*, onde a quebra de simetria de Lorentz é induzida por um campo vetorial especial, o campo *bumblebee*, que se acopla com o tensor de Ricci [179]. Além disso, nossa proposta conduz a novos termos de interação, bem como a uma dependência direcional da constante gravitacional.

1.3 Organização da obra

A presente tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 faremos uma breve introdução histórica dos modelos de dimensão extras, desde o modelo primordial de Kaluza-Klein até os atuais modelos de branas. Dessa forma, introduziremos as definições e principais características desses modelos. Além disso, tal capítulo destina-se a mostrar como os diferentes modelos foram sendo gerados e ampliados. Daremos uma especial atenção aos modelos de branas em seis dimensões, objeto desta tese, em particular o modelo de Gherghetta-Shaposhnikov [70], o qual analisamos com maior atenção.

O capítulo 3 tem por objetivo introduzir um novo cenário onde o espaço transversal é uma seção de um cone resolvido. Os resultados sobre a estrutura geométrica (tensor de curvatura) e física (características da fonte e do campo escalar real neste cenário) também serão apresentados neste capítulo.

No capítulo 4 introduzimos o cenário chamado corda-charuto, onde a variedade transversal é uma solução do fluxo de Ricci chamado sôliton charuto de Hamilton. Suas principais características físicas e geométricas serão estudadas e os efeitos do fluxo de Ricci sobre os modos gravitacionais serão analisados.

O capítulo 5, apesar de não trazer resultados no cenário de branas, destina-se a analisar uma modificação na estrutura geométrica em relatividade geral, a de um espaço-tempo finsleriano. Faremos uma breve revisão da violação da simetria de Lorentz em espaço-tempo planos e em espaços curvos utilizando o chamado campo *bumblebee*. Em seguida, introduzimos os principais conceitos acerca da geometria de Finsler, seguido do estudo das características do chamado espaço de Randers [192]. Por fim, obtemos novos resultados sobre a estrutura causal e cinemática do chamado espaço *bipartite*. Mostramos também a analogia entre esta geometria anisotrópica e o modelo *bumblebee*.

Para o capítulo 6 deixamos um resumo dos resultados obtidos acrescidos de comentários. Apresentamos também algumas possíveis perspectivas de desenvolvimentos dos resultados obtidos.

2 OS MODELOS DE BRANAS

Neste capítulo faremos uma introdução histórica aos modelos de dimensão extra e branas. Partindo do modelo de Kaluza-Klein (KK) mostraremos em síntese como a ideia de introduzir-se dimensões extras evoluiu. Nosso foco será a definição e principais propriedades dos modelos.

2.1 O modelo de Kaluza-Klein

A ideia de introduzir-se dimensões extras em física não é nova. Os pioneiros foram Kaluza [2] e Klein [3] que, propondo um espaço-tempo de cinco dimensões M_5 no qual nosso espaço-tempo observado M_4 estaria mergulhado, conseguiram obter não somente as equações de Einstein como as equações de Maxwell, desde que a quinta dimensão fosse compacta.

De fato, tomando a parametrização para M_5 , $(x^A) = (x^\mu, x^4)$, onde (x^μ) é a parametrização de M_4 e definindo a métrica KK como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (dx^4 - A_\mu dx^\mu), \quad (2.1)$$

a equação de Einstein em M_5

$$R_{AB} - \frac{R_5}{2}g_{AB} = K_5 T_{AB} \quad (2.2)$$

leva ao par de equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{R_5}{2}g_{\mu\nu} = K_5 T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

Fazendo a transformação de coordenadas $x'^A = (x^\mu, x^4 + \lambda(x^\nu))$, a métrica (2.1) é invariante se

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (2.5)$$

que nada mais é do que a simetria de calibre $U(1)$.

Para que a inclusão desta dimensão extra seja coerente com as observações astronômicas, a dimensão adicional deve ser compacta, ou seja, $0 \leq x^4 \leq R$, onde o raio R deve ser da ordem do comprimento de Planck $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$, considerado o menor comprimento físico possível¹. Dada a impossibilidade atual de fazermos experimentos nesta escala, a teoria Kaluza-Klein tornou-se apenas foco de especulações como teoria de unificação [4, 5].

Durante a década de 1970 a teoria de Kaluza-Klein foi entrou novamente em cena com o surgimento da supergravidade e supercordas. Para uma excelente revisão da evolução do modelo Kaluza-Klein e sua aplicação em supergravidade e supercordas, recomendamos a citação [7].

2.2 Pioneiros dos modelos de branas

A noção de vivermos em uma hiperfície mergulhada em um espaço-tempo de dimensão maior foi abordada sob diferentes pontos de vistas em vários momentos. Um dos conceitos importantes destes cenários é de que tal hiperfície tem uma dinâmica. Dirac, em 1962, propôs um modelo extenso para o elétron onde este seria uma superfície carregada [8]. Ele deduziu uma equação para a evolução temporal desta superfície e encontrou a energia dos estados excitados utilizando o esquema de quantização de Bohr-Sommerfeld.

Em 1962, D. W. Joseph propôs mergulhar o espaço-tempo quadridimensional M_4 em uma variedade de dimensão maior M_n , de modo que M_4 seja uma hiperfície de M_n [9]. Ele estava interessado em encontrar as representações irredutíveis do grupo de difeomorfismo de M_4 - grupo geral de coordenadas - e com isso, encontrar o espectro de todas as partículas em um espaço-tempo curvo. Neste mergulho, Joseph supôs que $M_n = M_4 \times M_{n-4}$, onde M_{n-4} não é compacto. Esse é talvez, o primeiro exemplo de modelo de dimensões extras não-compactas [9]. Esse modelo também trouxe a idéia de que os campos do modelo padrão estariam *localizados* próximos à hiperfície M_4 devido um potencial de Schrödinger efetivo, oriundo da geometria e da interação entre as diferentes partículas. Tal mecanismo

¹ $l_P \approx 1,6 \times 10^{-35}$ m.

de localização será largamente utilizado em modelos de *mundo brana* [34, 35].

Estudando a dinâmica de uma membrana (a folha-mundo varrida por uma corda) imersa em um espaço-tempo multidimensional, Collins e Tucker deduziram a quantização deste objeto via esquema de Dirac [10].

A década de 1980 será marcada por vários modelos que introduzem, por motivos diversos, a noção de dimensões extras não-compactas e serviram de preparo para os cenários de brana.

Em 1982, buscando deduzir as equações de Einstein de uma teoria mais fundamental, a chamada *pregeometria*,² Akama propôs um espaço-tempo de seis dimensões, plano, com duas bimensões extras não compactas e que nosso universo quadridimensional seria um vórtice abeliano gerado por um modelo de Maxwell-Higgs [11]. Tal modelo dará origem ao modelo de branas tipo-corda de Cohen-Kaplan [64], Gherghetta-Shaposhnikov [69] e Gregory [65].

2.2.1 O modelo de Rubakov-Shaposhnikov

Rubakov e Shaposhnikov [12] em 1983 também propuseram que a dimensão extra não precisaria ser finita. Os campos físicos, devido sua própria não-linearidade, ficariam *localizados* em uma hipersuperfície de quatro dimensões, que seria nosso universo observado. A não-linearidade geraria um *potencial quântico efetivo* que *prenderia* os campos nesta hipersuperfície chamada de *parede de domínio*³. O esboço deste cenário com uma hipersuperfície imersa em um espaço-tempo ambiente está presente na figura (2.2.1).

Ainda em 1983, Rubakov e Shaposhnikov introduziram um outro importante conceito em dimensões extras, o produto não-fatorizável⁴ [13]. A fim de resolver o problema da constante cosmológica, eles assumiram o seguinte ansatz para o espaço-tempo M_d

$$ds^2 = \sigma(y)\hat{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{ab}(y)dy^a \otimes dy^b, \quad (2.6)$$

onde $X \in M_d \times M_n$, $X = (x, y)$, $x \in M_d$ e $y \in M_n$.

O sistema de coordenadas de todo o espaço-tempo M_D , $D = d + n$ será denotado por X^A . Note que em (2.6), as medidas sobre a hipersuperfície M_d são alteradas pela geometria da variedade extra M_n . A função σ é chamada de fator de *warp*. A métrica g_{ab} da

²*pregeometry* em inglês.

³*Domain wall* em inglês.

⁴*Warped product* em inglês.



Figura 1: Esboço de uma brana imersa em um espaço-tempo com uma dimensão extra y .

variedade transversa é por hipótese riemanniana, ou seja, todas as dimensões extras são do tipo espaciais.

Com o *ansatz* (2.6) podemos definir o co-referencial móvel por

$$e^{\bar{\mu}} = E_{\nu}^{\bar{\mu}}(x, y) dx^{\nu} \quad , \quad E_{\nu}^{\bar{\mu}}(x, y) = \sigma^{\frac{1}{2}}(y) \hat{E}_{\nu}^{\bar{\mu}}(x) \quad (2.7)$$

$$e^{\bar{a}} = E_b^{\bar{a}}(y) dy^b. \quad (2.8)$$

Impondo a condição de torção nula

$$T^{\bar{A}} = de^{\bar{A}} + \omega_{\bar{B}}^{\bar{A}} \wedge e^{\bar{B}} = 0, \quad (2.9)$$

e compatibilidade métrica

$$\omega_{\bar{A}\bar{B}} + \omega_{\bar{B}\bar{A}} = 0 \quad (2.10)$$

encontramos as 1-formas de conexão

$$\omega_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} = \hat{\omega}_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} \quad (2.11)$$

$$\omega_{\bar{a}}^{\bar{\mu}} = \frac{1}{2} E_{\bar{a}}^a \frac{\partial_a \sigma}{\sigma} e^{\bar{\mu}} \quad (2.12)$$

$$\omega_{\bar{b}}^{\bar{a}} = E_{\bar{b}}^b E_{\bar{c}}^c \partial_b E_{\bar{a}}^{\bar{c}} e^{\bar{c}} \quad (2.13)$$

$$\omega_{\bar{\mu}}^{\bar{a}} = -\frac{1}{2} E_{\bar{b}}^b \frac{\partial_b \sigma}{\sigma} \delta^{\bar{b}\bar{a}} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} e^{\bar{\nu}}. \quad (2.14)$$

Vale a pena ressaltar que se o fator de *warp* é constante, as conexões da brana, que são responsáveis pelo transporte paralelo de vetores, não dependem das dimensões extras.

A 2-forma de curvatura

$$R_{\bar{B}}^{\bar{A}} = d\omega_{\bar{B}}^{\bar{A}} + \omega_{\bar{C}}^{\bar{A}} \omega_{\bar{B}}^{\bar{C}} \quad (2.15)$$

tem por componentes

$$R_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} = \left[\frac{1}{2\sigma} \hat{R}_{\bar{\nu}\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\mu}} - \frac{\delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}}}{4} g^{ab} \left(\frac{\partial_a \sigma}{\sigma} \right) \left(\frac{\partial_b \sigma}{\sigma} \right) \eta_{\bar{\nu}\bar{\beta}} \right] e^{\bar{\alpha}} \wedge e^{\bar{\beta}} \quad (2.16)$$

$$R_{\bar{a}}^{\bar{\mu}} = -\frac{1}{2} \left[E_{\bar{b}}^b \partial_b \left(E_{\bar{a}}^a \frac{\partial_a \sigma}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} E_{\bar{a}}^a E_{\bar{b}}^b \frac{\partial_a \sigma}{\sigma} \frac{\partial_b \sigma}{\sigma} + E_{\bar{d}}^d \frac{\partial_d \sigma}{\sigma} E_{\bar{a}}^c E_{\bar{b}}^a \partial_c E_{\bar{a}}^{\bar{d}} \right] \delta_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} e^{\bar{\nu}} \wedge e^{\bar{b}} \quad (2.17)$$

$$R_{\bar{b}}^{\bar{a}} = \hat{R}_{\bar{b}}^{\bar{a}} - \frac{1}{4} E_{\bar{d}}^d E_{\bar{e}}^e \frac{\partial_d \sigma}{\sigma} \frac{\partial_e \sigma}{\sigma} \delta^{\bar{d}\bar{b}} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} e^{\bar{\mu}} \wedge e^{\bar{\nu}}, \quad (2.18)$$

o qual produz os tensores de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[E_{\bar{a}}^a \partial_a \left(E_{\bar{c}}^c \frac{\partial_c \sigma}{\sigma} \right) \delta^{\bar{a}\bar{c}} + \frac{d}{2} \left(\frac{\partial_a \sigma}{\sigma} \right)^2 + g^{bc} \frac{\partial_c \sigma}{\sigma} \Gamma_{ba}^a \right] \quad (2.19)$$

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{d}{2} \left[E_{\bar{a}}^{\bar{a}} \partial_b \left(E_{\bar{a}}^c \frac{\partial_c \sigma}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial_a \sigma}{\sigma} \frac{\partial_b \sigma}{\sigma} + \frac{\partial_d \sigma}{\sigma} \Gamma_{ab}^d \right]. \quad (2.20)$$

Novamente, não fosse a presença do fator de *warp* σ , os tensores de curvatura de Ricci das duas variedades seriam completamente independentes.

Rubakov e Shaposhnikov admitiram que o espaço tempo satisfaz uma equação de Einstein com termo cosmológico Λ

$$R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = \Lambda g_{AB} \quad (2.21)$$

enquanto que a brana satisfaz a equação de Einstein com

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{\hat{R}}{2}\hat{g}_{\mu\nu} = \Lambda_{phys}\hat{g}_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Para o *ansatz* (2.6), as equações de Einstein ficam

$$\hat{R}_{ab} = -\frac{2}{d+n-2}\Lambda\tilde{g}_{ab} + d\left(\frac{\nabla_a\nabla_b\sigma}{2\sigma} - \frac{\nabla_a\nabla_b\sigma}{4\sigma}\right) \quad (2.23)$$

$$-\frac{2\Lambda_{phys}}{d-2} = \frac{1}{2}\Delta\sigma + \frac{d-2}{4}\left(\frac{\partial_a\sigma}{\sigma}\right)^2 - \frac{2\Lambda}{d+n-2}\sigma \quad (2.24)$$

Note que a constante cosmológica da brana fica em função do fator de *warp*. Dessa forma, os autores explicaram que o pequeno valor da constante cosmológica sobre M_4 era devido a geometria não trivial de M_{n+4} levar os efeitos de curvatura para as dimensões extras, curvando-as e tornando-as compactas. Métricas não-fatorizáveis, como as apresentadas por Rubakov-Shaposhnikov, (2.6), são essenciais nos modelos de branas do tipo Randall-Sundrum [34, 35].

Outro importante pioneiro foi Wetterich. Em 1984 ele propôs que a existência de dimensões extras não-compactas poderiam levar a férmions quirais [14], bem como explicar as diferentes gerações de férmions em nosso universo [15]. Em 1985, Wetterich ampliou a solução de Rubakov-Shaposhnikov para o problema da constante cosmológica permitindo a variedade transversa ser não-compacta [14, 17, 18].

Em 1985, Visser adaptou a ideia de Rubakov-Shaposhnikov de prender as partículas massivas em uma hipersuperfície devido a não-linearidade da equação de movimento dos seus campos. Para Visser, no entanto, o potencial confinante seria gerado pela curvatura do espaço-tempo multidimensional [19]. Tal proposta também é uma das idéias básicas dos modelos de branas. Contudo, O *ansatz* métrico de Visser

$$ds^2 = -e^{2\phi(\xi)}dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} + d\xi^2, \quad (2.25)$$

embora seja não fatorizável, não preserva a simetria de Lorentz sobre a brana o que não o torna um bom modelo de branas do tipo RS [35].

Em um contexto de supergravidade, GellMann e Zwiebach mostraram em 1985 que uma variedade transversa não-compacta pode surgir devido a dinâmica não-linear de campos escalares[20].

Em 1986, Laguna-Castillo e Matzer estudaram a imersão do modelo FRW em um espaço tempo do tipo Kaluza-Klein (fatorizável) com uma coordenada tipo-espaço extra não-compacta [21]. Os autores aplicaram a análise desenvolvida por Israel [22] para estudar-se o campo gravitacional gerado por uma hiperfície e mostraram que a brana gera uma discontinuidade sobre o tensor tensão-energia.

Gibbons e Wiltshire, em 1987, estenderam o modelo de Visser introduzindo soluções com branas curvas com e sem constante cosmológica em um espaço-tempo multidimensional que também poderia conter uma constante cosmológica [23]. Eles propuseram que a variedade transversa fosse não-compacta e tivesse volume infinito pois a finitude do volume levava a não-completude geodésica e conseqüentemente, a possíveis violações de leis de conservação [23]. Gibbons e Wiltshire propuseram o seguinte *ansatz* métrico

$$ds^2 = \beta^2(\rho)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \gamma^2(\rho)d\rho^2 - \frac{\rho^2}{\beta^{2(d-3)}}d\phi^2. \quad (2.26)$$

Note que a métrica (2.26) tem simetria axial. A ação para este modelo é dada por

$$S = \int \left[-\frac{1}{4\kappa^2}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab} \right] \sqrt{-g}d^Dx. \quad (2.27)$$

A métrica (2.26) e a ação (2.27) servirão de inspiração para os modelos de brana tipo-corda [64, 65, 69].

Uma modificação interessante do modelo de Rubakov-Shaposhnikov [12] foi proposta em 1993 por Maia e Silveira [29]. Eles obtiveram o potencial confinante a partir da própria geometria, como feito por Wetterich [14] e Visser [19] mas propuseram que a energia para vencer a barreira de potencial poderia vir da atração gravitacional de um buraco negro. Assim, o buraco negro serviria como uma *janela* para as dimensões extras.

2.3 Teoria de corda-branas

Durante a década de 1980, a idéia de objetos multidimensionais também foi abordada em teoria de supercordas. Extendendo o modelo supersimétrico de uma folha-mundo (membrana) de Green-Schwarz, vários autores estenderam o conceito de hiperfície para o de p -brana⁵, um objeto com dinâmica própria imerso em d dimensões, $p \leq d$ [25, 26, 27]. p denota a dimensão espacial do objeto; assim, uma 1-brana é uma corda, uma 2-brana é uma membrana (superfície), etc. Townsend mostrou que, a maneira dos sólitons em

⁵Do inglês *brane* oriundo de *membrane*.

teoria de campos, as p -branas também possuem carga topológica [28].

Em 1991, Horowitz e Strominger mostraram que o limite de baixas energias para uma teoria de supercordas admitia soluções extensas tipo buraco-negro, as chamadas branas-negras⁶ [30].

Em 1995, Polchinski [31, 6] mostrou que as p -branas eram necessárias como pontos finais de cordas abertas. Como as cordas estão presas à brana, sob uma condição de contorno de Dirichlet, tais branas são chamadas de D -branas. Eles contêm as cargas dos campos de Yang-Mills, que descrevem a força eletrofraca e forte. Neste quadro, os campos de calibre A_μ^a seriam resultado de vibrações de cordas presas à branas enquanto que o gráviton seria devido uma corda fechada propagando-se pelo espaço-tempo multidimensional. Os campos de calibre e espinoriais (do modelo padrão) estariam então *presos* à brana enquanto que o gráviton estaria livre. Isso explicaria o pequeno valor da constante gravitacional frente às outras forças.

Por outro lado, em 1996, Horava e Witten [32] propuseram o que pode ser interpretado como um dos primeiros modelos de *mundo brana*⁷, ou simplesmente, de branas. Eles mostraram que o limite de acoplamento forte para a teoria de supercordas heterótica $E_8 \times E_8$ é dual ao limite de baixas energias (supergravidade) da teoria M em um espaço tempo do tipo $\mathbb{R}^{10} \times S^1/Z_1$ [32]. Haveria então duas 3-branas, colocadas nos pontos fixos, $r = 0$ e $r = L$, por exemplo. Tal modelo serviu de motivação para uma posterior simplificação, o chamado modelo RS [34].

2.4 O modelo ADD

Em 1998, Arkani Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) propuseram um modelo de dimensões extras (branas) a fim de resolver o chamado problema da hierarquia de calibre [33]. De fato, a escala de energia das interações eletrofracas é da ordem de $1TeV$ enquanto a escala de Planck, onde os fenômenos gravitacionais e quânticos devem ser tratados, é da ordem de $10^{16}TeV$. Qual a causa de tamanha diferença?

Arkani Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) argumentaram que tal discrepância se dá devido estarmos sobre uma brana mergulhada em uma espaço-tempo M_{4+n} multidimensional com n dimensões extras compactas [33].

Uma métrica fatorizável para M_{4+n} é

⁶*Black brane* em inglês.

⁷*Brane worlds* em Inglês.

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu + g_{ab}(y^c)dy^a dy^b. \quad (2.28)$$

Tal métrica é um caso particular da métrica proposta por Rubakov-Shaposhnikov onde o fator de *warp* é constante. Como as geometrias da brana e da variedade extra são independentes, o escalar de Ricci é

$$R_{4+n} = R_4 + R_n, \quad (2.29)$$

e,

$$\sqrt{-g_{4+n}} = \sqrt{-g_4}\sqrt{g_n} \quad (2.30)$$

Assim, a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{4+n} = K_{4+n} \int R_{4+n} \sqrt{g_{4+n}} d^4x \quad (2.31)$$

fica

$$S_4 = K_{4+n} \text{Vol}(M_n) \int R_4 \sqrt{g_4} d^4x. \quad (2.32)$$

Assim, a relação entre as massas de Plack no espaço-tempo ambiente e na brana é dada por [33]

$$M_4^2 \propto M_{4+n}^{2+n} R^n \quad (2.33)$$

Assim, a massa de Planck no espaço-tempo ambiente M_{4+n} pode ser da ordem da escala eletrofraca enquanto que a escala de energia sobre a brana será bem maior pois estaremos levando em conta também a contribuição R^n devido o volume da variedade transversa M_n [33].

Para se adequar às medidas cosmológicas, a dimensão n deve ser $n = 2$ e o raio da dimensão extra R deve ser da ordem

$$R \approx 1mm. \quad (2.34)$$

O modelo ADD prevê então a existência de dimensões extras compactas mas grandes comparadas à escala de Planck, como proposto pelas teorias de Kaluza-Klein e supercordas.

A existência de dimensões extras na escala milimétrica possibilita a comprovação da hipótese de dimensões extras. De fato, aceleradores de partículas da ordem de TeV, como o LHC, poderiam encontrar o escape de partículas para a dimensão extra. Do ponto de vista astrofísico, a correção do potencial newtoniano fica [33]

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{M_{4+n}^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (2.35)$$

2.5 O modelo RS

2.5.1 RS1

De uma forma genial, Randall e Sundrum construíram um modelo que reunia o melhor dos modelos de Horava-Witten [32] e ADD [33]. A maneira de Horava-Witten, o cenário compunha-se de duas branas paralelas e planas [34]. No entanto, Randall e Sundrum desprezaram as seis dimensões extras compactas e propuseram um espaço-tempo ambiente de cinco dimensões [34].

A brana de acoplamento forte de Horava-Witten, Randall-Sundrum chamaram de brana escondida ⁸, onde a constante gravitacional seria bem mais intensa, enquanto que a brana visível, a que vivemos, teria uma constante gravitacional bem mais fraca [34]. Uma visão pictórica deste modelo está esboçada na figura (2.5.1).

Assim, tomando uma métrica para o espaço-tempo cinco dimensional G_{AB} , a métrica induzida na brana visível e na brana escondida é

$$g_{\mu\nu}^{vis} = G_{\mu\nu}(y = 0) \quad , \quad g_{\mu\nu}^{hid} = G_{\mu\nu}(y = L) \quad (2.36)$$

Para explicar este *enfraquecimento* da constante gravitacional por um mecanismo geométrico, Randall e Sundrum propuseram que o espaço-tempo ambiente seja um espaço de Anti de Sitter (AdS_5) com a seguinte métrica não-fatorizável [34]

$$ds^2 = e^{-2ky} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.37)$$

onde $y \in [0, L]$ ⁹.

⁸*Hidden brane* em inglês.

⁹Alguns artigos definem $y = L\theta$. Note que o comprimento L não precisa ser da escala do comprimento

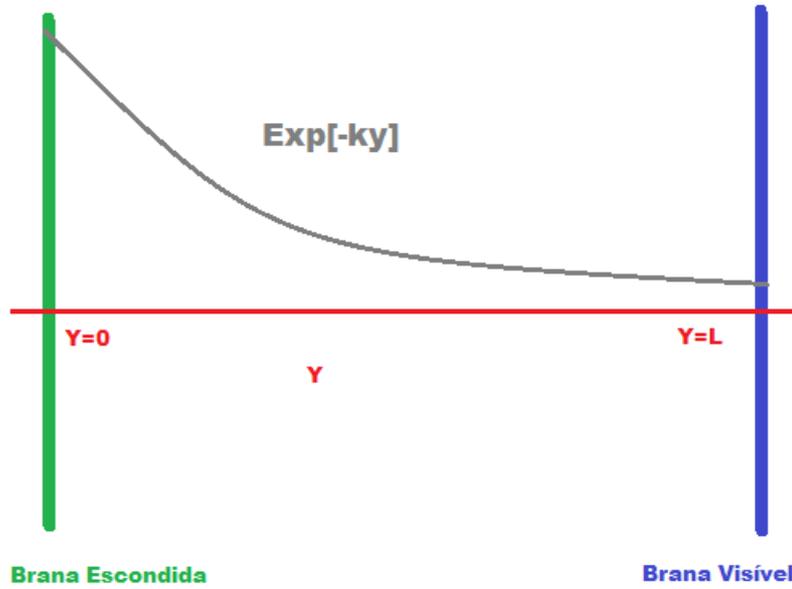


Figura 2: Esboço do cenário de branas RS1. Duas branas planas e paralelas são imersas em um espaço-tempo Anti de Sitter de cinco dimensões com uma fator de *warp* do tipo exponencial.

2.5.1.1 Aspectos geométricos do modelo RS

O espaço tempo de Anti de Sitter (AdS_n) é uma variedade Lorentziana, definida como uma hipersfície (imersão) em uma variedade Lorentziana \mathbb{L}_{n+1} de dimensão $n + 1$, pela quádrlica

$$\bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_{n-1}^2 - \bar{x}_0^2 - \bar{x}_{n+1}^2 = -R^2, \quad (2.38)$$

onde R é o chamado raio do espaço de Anti de Sitter.

Através da mudança de coordenadas $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \rightarrow (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ definida por

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{1}{2z}(z^2 + R^2 + x_i x^i - x_0^2) \\ \bar{x}_i &= \frac{R x_i}{z} \\ \bar{x}_{n-1} &= -\frac{1}{2z}(z^2 + R^2 + x_i x^i - x_0^2) \\ \bar{x}_n &= \frac{R x_0}{z}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

de Planck l_P .

onde $z \in (0, \infty)$, podemos escrever a métrica de AdS_n induzida de \mathbb{L}_{n+1}

$$ds^2 = d\bar{x}_1^2 + \dots + d\bar{x}_{n-1}^2 - d\bar{x}_0^2 - d\bar{x}_n^2 \quad (2.40)$$

na forma conformemente plana

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + dz^2) \quad (2.41)$$

A métrica (2.37) pode ser colocada na forma conforme (2.41) através da mudança de variável

$$z = \frac{e^{ky}}{k}, \quad (2.42)$$

onde $k = \frac{1}{R}$ é a curvatura escalar de AdS_5 .

Na verdade, como o espaço-tempo tem uma dimensão compacta, ele é na verdade o quociente¹⁰ $M_5 = AdS_5/Z_2$, onde $(z \sim -z)$ [34].

O espaço de Anti de Sitter com curvatura constante e que é solução da equação de Einstein com constante cosmológica negativa.

A métrica (2.37) é um caso particular da métrica anteriormente proposta por Rubakov-Shaposhnikov [13], onde $n = 1$ e

$$\sigma(y) = \sigma(y_1, \dots, y_n) = e^{-ky} \quad (2.43)$$

$$g_{ab} = g_{yy} = 1. \quad (2.44)$$

As 2-formas de curvatura tem a forma

$$R_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} = -\frac{\delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}}}{4} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 \eta_{\bar{\nu}\bar{\beta}} e^{\bar{\alpha}} \wedge e^{\bar{\beta}} \quad (2.45)$$

$$R_{\bar{y}}^{\bar{\mu}} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 \right] \delta_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} e^{\bar{\nu}} \wedge e^{\bar{b}}. \quad (2.46)$$

$$(2.47)$$

Tomando

$$\sigma(y) = e^{2A(y)}, \quad (2.48)$$

¹⁰ *Orbifold* em inglês.

os tensores de Ricci ficam

$$R_{\mu\nu} = -(A'' + 4A'^2)g_{\mu\nu} \quad (2.49)$$

$$R_{yy} = -4(A'' + A'^2). \quad (2.50)$$

O escalar de Ricci é então dado por

$$R = -2(4A'' + 10A'^2). \quad (2.51)$$

Assim, para $A = -ky$, $R = -20k^2$ e logo, o espaço tempo tem curvatura constante.

Por outro lado, o jacobiano é dado por

$$\sqrt{-g} = \sigma^2 \sqrt{-g_4} \quad (2.52)$$

$$\sqrt{-g} = e^{-4ky} \sqrt{-g_4} \quad (2.53)$$

2.5.1.2 Dinâmica do modelo RS

Vamos agora mostrar que o *ansatz* (2.37) pode ser obtido a partir das equações de Einstein com constante cosmológica e cuja fonte são as duas branas.

A ação de Einstein-Hilbert do modelo RS1 possui três termos

$$S = S_{grav} + S_{esc} + S_{vis}, \quad (2.54)$$

onde

$$S_{grav} = 2M^3 \int (R - \Lambda) \sqrt{-g} d^5 X \quad (2.55)$$

é a ação de Einstein-Hilbert em cinco dimensões com um termo cosmológico¹¹ e

$$S_{vis} = \int (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}) \sqrt{-g_{4vis}} d^4 x \quad (2.56)$$

¹¹A potência M^3 da constante gravitacional é necessária para manter a ação adimensional uma vez que a dimensão de massa do escalar de Ricci é $[R] = 2$ independente da dimensão.

$$S_{esc} = \int (\mathcal{L}_{esc} - V_{esc}) \sqrt{-g_{4esc}} d^4x \quad (2.57)$$

são, respectivamente, a ação da brana visível e da brana escondida. Importante notar que uma vez que ambas as branas tem espessura nula, a ação deve ser definida apenas em seu volume quadridimensional.

A equação de Einstein neste cenário é então

$$R_{AB} - \frac{R}{2} G_{AB} = -\frac{1}{4M^3} (\Lambda + T_{AB}), \quad (2.58)$$

onde

$$T_{AB} = \delta_A^\mu \delta_B^\nu (V_{vis} g_{\mu\nu}^{vis} \delta(y-L) + V_{esc} g_{\mu\nu}^{esc} \delta(y)). \quad (2.59)$$

Para a componente y , a equação de Einstein fica

$$G_{yy} = -\frac{1}{4M^3} (\Lambda) g_{yy} \quad (2.60)$$

$$6A'^2 = -\frac{1}{4M^3} \Lambda. \quad (2.61)$$

Logo, a constante cosmológica do *bulk* deve ser negativa, o que mostra sê-lo um espaço AdS_5 . Além disso,

$$A(y) = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}} y. \quad (2.62)$$

Assim, a constante k é dada por

$$k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}. \quad (2.63)$$

Como k mede a intensidade com que a dimensão extra age sobre a 3-brana, tal ação será tanto maior quanto maior for a razão entre a constante cosmológica e a escala de energia M do *bulk*.

Para que tenhamos a simetria Z_2 , tomamos

$$A(y) = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}} |y|. \quad (2.64)$$

A equação de Einstein sobre a brana fornece a equação

$$3A'' = \frac{1}{4M} (V_{esc}\delta(y) + V_{vis}\delta(y - L)). \quad (2.65)$$

Para que (2.64) satisfaça a equação (2.65), as tensões na brana devem satisfazer a condição

$$V_{esc} = -V_{vis} = 24M^3k. \quad (2.66)$$

Logo, o modelo Randall-Sundrum tipo I precisa de um ajuste fino entre as tensões na brana e o valor da constante cosmológica do *bulk*.

2.5.1.3 O problema da hierarquia

$$S = M^3 \int_0^{y_c} e^{2ky} dy \int R_4 \sqrt{-g_4} d^4x. \quad (2.67)$$

Assim, a relação entre as escalas de Planck na brana escondida situada em $y = 0$ e a escala de Planck sobre a brana visível em $y = y_c$ é dada por [34]

$$M_4^2 = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2ky_c}) \quad (2.68)$$

Note que a relação entre as massas no modelo RS1 (2.68) e a relação do modelo ADD (2.33) diferem pois a primeira é exponencial enquanto que a segunda é polinomial. Assim, a solução do modelo ADD depende crucialmente do raio da dimensão extra enquanto o modelo RS1 é depende de ky_c . A constante k representa o raio de curvatura de M_5 . Logo, a geometria não-fatorizável de M_5 , e não somente o tamanho da dimensão extra, influem no hierarquia entre as massas.

Importante notar também que no modelo RS1 os campos do modelo padrão estão *presos* à brana e somente a gravidade pode-se propagar na dimensão extra.

2.5.2 RS2

Em um outro pensamento singular, Randall e Sundrum perceberam que, pela fórmula (2.68), a dimensão extra y poderia não somente ser macroscópica mas infinita! Volta a tona o conceito de dimensões extras não-compactas com o assim chamado modelo RS2 [35].

Como somente a gravidade pode-se propagar-se na dimensão extra de Randall-Sundrum, os autores estudaram como os modos gravitacionais se comportam neste cenário [35]. Eles encontraram uma torre contínua de modos Kaluza-Klein (KK) e um modo sem massa. Este último é responsável pelo gráviton sobre a brana, enquanto os modos massivos são responsáveis por uma correção do potencial newtoniano do tipo

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \quad (2.69)$$

2.6 Modificações do modelo RS

Apesar dos extraordinários resultados obtidos pelos modelos RS1 e RS2, algumas questões necessitavam ser respondidas. Uma delas era fornecer um mecanismo físico que explicasse o valor da distância entre as branas, y_c . Para responder esta pergunta, Goldberger e Wise [36] propuseram que a distância seria estabilizada devido a dinâmica de um campo escalar (o radion) com um potencial de quebra de simetria.

Outra questão em aberto no modelo RS é qual a origem física da geometria deste cenário? Além disso, como a brana é infinitamente fina então a fonte desta geometria deve também estar distribuída somente sobre a brana. Para explicar a geometria RS e suavizar a brana, gerando uma brana espessa, vários modelos contendo campos escalares foram introduzidos [36, 37, 39, 38, 40, 41, 42, 43]. A ideia, uma reformulação da proposta de Rubakov-Shaposhnikov [12], é que a brana é uma parede de domínio formada devido a quebra espontânea de simetria. A interação dos campos escalares com a gravidade fornece, ao contrário do modelo de Rubakov-Shaposhnikov, soluções mais ricas.

O modelo RS2 também abriu espaço para a seguinte pergunta: por que somente a gravidade poderia se propagar pela dimensão extra enquanto os outros campos estariam *presos* à brana? Para responder esta questão, vários autores passaram a aceitar a existência de campos vivendo no espaço ambiente e localizados sobre a brana pelo efeito da geometria não-fatorizável. [44, 45, 46]. Kehagias e Tamvakis [46] propuseram ainda a interação do campo vetorial de calibre com o dilatón, um campo escalar descoberto em teoria de cordas, a fim de obter a localização do campo vetorial.

Outros autores assumiram que para localizar o campo vetorial seria necessário modificar a estrutura geométrica Lorentziana para uma geometria de Weyl, onde a conexão não é compatível com a métrica. A compatibilidade métrica é modificada na forma [47, 48, 49]

$$\nabla_{\alpha} g_{\beta\gamma} = W_{\alpha} g_{\beta\gamma}. \quad (2.70)$$

Supondo que $W_{\alpha} = \partial_{\alpha} \Phi$, o campo escalar Φ torna esta geometria integrável - preserva a métrica em uma curva fechada -. Tal campo também seria o responsável por suavizar a geometria e localizar o campo de calibre [47, 48, 49].

2.7 Modelos de branas em seis dimensões

Um outro questionamento justo é por que o espaço-tempo ambiente teria que ter somente cinco dimensões? O modelo ADD [33] encontra esta dimensão para se adequar às medidas astrofísicas. A teoria de supercordas afirma ter o espaço-tempo dez dimensões devido o cancelamento de anomalias [6]. Qual seria então o motivo de vivermos em um espaço-tempo de exatamente cinco dimensões? O mecanismo não funcionaria em mais de cinco?

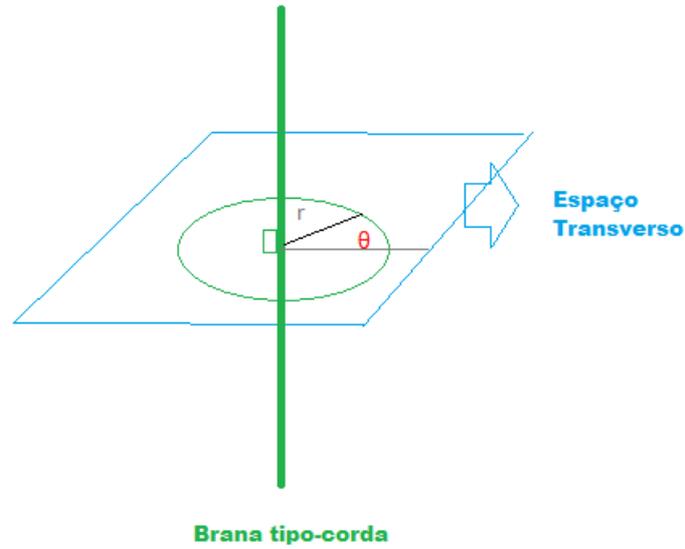
Para responder tais questões muitos autores propuseram diferentes cenários. Em seis dimensões, introduzimos duas dimensões extras que podem ou não ser compactas. Supondo que a brana tenha uma simetria azimutal (cilíndrica) em relação às dimensões extras, a brana pode ser visualizada, omitindo-se duas de suas dimensões (ρ e ϕ , por exemplo) e em um dado instante, como um objeto linear. Cenários de branas em seis dimensões, estáticos e com simetria axial são chamados cenários de brana tipo-corda ¹².

O nome *tipo-corda* é uma analogia com outros objetos topológicos que são soluções com simetria axial das equações de Einstein, as chamadas *cordas cósmicas* [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. Em $(3 + 1)$ dimensões, as cordas cósmicas (ou vórtices), são a extensão topológica de uma parede de domínio. Assim, uma brana tipo-corda em seis dimensões é uma solução topologicamente estável que estende a brana tipo parede de domínio em cinco dimensões. Um esboço de um objeto tipo-corda está presente na figura (2.7).

2.7.0.1 Defeitos tipo-corda em $(3 + 1)$ dimensões

A forma mais geral (padrão) de uma métrica para um espaço-tempo estacionário e com simetria axial em $(3 + 1)$ dimensões é dada por [91]

¹²*String-like braneworld* em inglês.



$$ds^2 = -V(r)(dt - wd\phi)^2 + \Omega^2(dr^2 + \Lambda dz^2) + V^{-1}r^2d\phi^2 \quad (2.71)$$

Para um espaço-tempo estático $w = 0$, Hiscock encontrou uma solução estática tipo-corda em $(3 + 1)$ dimensões a partir do *ansatz* [54]

$$ds_4^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}(dr^2 + dz^2) + e^{2\phi(r)}d\phi^2. \quad (2.72)$$

A fonte para esta geometria foi suposta ter o seguinte tensor de tensão-energia [54]

$$T_t^t = T_z^z = -\epsilon \quad , \quad r < r_0 \quad (2.73)$$

$$T_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad r > r_0, \quad (2.74)$$

onde r_0 é a espessura da corda. Tal fonte não possui pressões radiais e angulares pois a existência dessas levaria a corda a ter uma espessura variável e um momento angular, respectivamente.

A solução interior das equações de Einstein é [54]

$$ds_{int}^2 = -dt^2 + dz^2 + dr'^2 + r_*^2 \sin^2 \left(\frac{r'}{r_*} \right) d\phi^2. \quad (2.75)$$

A solução exterior (vácuo) por sua vez é dada por uma família de espaços tipo Kasner,

encontradas por Israel

$$ds_{ext}^2 = -(kr)^{2a} dT^2 + (kr)^{2c} dZ^2 + dr^2 + \beta^2 (kr)^{2(b-1)} d\Phi^2, \quad (2.76)$$

onde a variável que gera a anisotropia é radial ao invés de temporal, como no modelo cosmológico de Kasner. Note que usamos um sistema de coordenadas diferentes tanto para o espaço tempo interior como exterior ao defeito.

A solução exterior satisfaz ainda o vínculo de Kasner [51, 53, 54]

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1 \quad (2.77)$$

Para que o objeto linear (corda) tenha seja invariante por transformações de Lorentz tanto temporais como na direção z , devemos fazer $a = c$. Com isso, as únicas soluções possíveis são

$$a = c = 0, b = 1 \Rightarrow ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + \beta r^2 d\phi^2, \quad (2.78)$$

com $\beta = (\kappa\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$, ou

$$a = c = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow ds^2 = (kr)^{\frac{4}{3}}(-dt^2 + dz^2) + dr^2 + \beta(kr)^{-\frac{8}{3}} d\phi^2 \quad (2.79)$$

A solução em (2.78) é localmente plana (Minkowski) mas globalmente cônica. Com efeito, fixado um ponto a uma distância r da corda, traçamos uma curva tipo espaço cujo elemento de linha é dado por [54]

$$ds^2 = \beta r^2 d\phi^2 \quad (2.80)$$

Definindo a nova variável angular $d\theta = \beta d\phi$, o elemento de linha do espaço tempo fica

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.81)$$

Esta é a métrica de um espaço plano em coordenadas cilíndricas. No entanto, como $0 \leq \phi \leq 2\pi$, então $0 \leq \theta \leq \beta 2\pi$. Dessa forma, a constante β mede o quanto o ângulo central é maior ou menor que 2π . Dessa forma, definimos o chamado *déficit angular* por [54]

$$\Delta = 2\pi(1 - \beta) \quad (2.82)$$

Para encontrar o valor de β , Hiscock utilizou uma decomposição das equações de Einstein na direção radial e sobre as superfícies de raio constante ¹³, levando a [54, 60, 61]

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}K_b^a)}{\partial r} + \sqrt{-g}R_b^{3a} = \kappa T_b^a \quad (2.83)$$

$$K_{,a} - K_{a;b}^b = \kappa T_a^1 \quad (2.84)$$

$$K_{ab}K^{ab} - K^2 - R^3 = 2\kappa T_1^1. \quad (2.85)$$

Tais equações mostram que na presença de uma densidade do tensor de energia tensão sobre o superfície que separa a região interior da região exterior, a curvatura extrínseca desta superfície deve sofrer uma discontinuidade. Aplicando tal procedimento, Hiscock encontrou

$$\Delta = 2\pi \left(1 - \cos \frac{r_0}{r_*} \right) \quad (2.86)$$

A solução em (2.79) é chamada solução de *Melvin* [63]. Embora perfeitamente compatível, a componente angular da métrica anula-se no infinito. Tal solução é bastante estudada em cosmologia como uma solução para um corda supermassiva [61].

Podemos encontrar uma extensão do déficit angular escolhendo o seguinte *ansatz* métrico [61]

$$ds^2 = \sigma(r)(-dt^2 + dz^2) + dr^2 + C^2(r)d\phi^2. \quad (2.87)$$

Dessa forma, o déficit angular é medido pelo comportamento assintótico da função $C(r)$ através de

$$\Delta = 2\pi(1 - \lim_{r \rightarrow \infty} C'(r)). \quad (2.88)$$

As equações de Einstein para o *ansatz* (2.87) levam às equações [61]

¹³Tal decomposição é análoga ao formalismo ADM, com a diferença que o vetor normal à família de superfícies é do tipo espaço e representa um vetor radial.

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + \frac{\sigma' C'}{\sigma C} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = -\kappa \left(T_t^t - \frac{1}{2}T\right) \quad (2.89)$$

$$\left(\frac{C'}{C}\right)' + \left(\frac{C'}{C}\right)^2 + \frac{\sigma' C'}{\sigma C} = \kappa \left(T_\phi^\phi - \frac{1}{2}T\right) \quad (2.90)$$

$$2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + 2\left(\frac{C'}{C}\right)' + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{C'}{C}\right)^2 = -\kappa \left(T_r^r - \frac{1}{2}T\right). \quad (2.91)$$

Por uma redefinição $(t, z) \rightarrow (T, Z)$, podemos fazer $\sigma = 1$. Tomando o tensor de tensão energia como

$$T_t^t = T_z^z = -\epsilon(r), \quad (2.92)$$

as equações de Einstein se reduzem à

$$\left(\frac{C''}{C}\right) = -\frac{\kappa}{2}\epsilon. \quad (2.93)$$

Como a massa por unidade de comprimento da corda (tensão) é dada por

$$\mu = \int_S T_0^0 dS, \quad (2.94)$$

onde S é a superfície para (T, Z) constantes. Utilizando a equação (2.93) temos

$$\Delta = 8\pi G\mu \quad (2.95)$$

A equação (2.95) é bastante rica. Ela relaciona uma grandeza global da geometria do espaço transversal à corda, o déficit angular, com a tensão da corda. Como o espaço-tempo é localmente plano, um objeto tipo corda tem um efeito gravitacional não de deformar o espaço tempo localmente, tornando-o curvo, mas de alterar suas características globais [61].

Se a tensão da corda variar devido algum mecanismo físico, a geometria do espaço transversal irá refletir tal variação globalmente. Essa propriedade dos defeitos tipo corda foi um dos pontos de partida para o estudo de como as propriedades geométricas e físicas que os cenários de branas tipo corda evoluem sobre fluxos geométricos.

2.7.0.2 Branas tipo-corda globais

Várias métricas propostas na literatura como modelos de branas podem ser vistas como extensões da geometria tipo-corda em mais dimensões. A solução (2.26) do modelo de Gibbons e Wiltshire [23] pode ser vista como uma extensão da métrica (2.71) válida quando fazemos $z \rightarrow z_i$, ou seja, introduzimos mais três novas coordenada tipo-espaço, e $V = \Omega_i^2 \Lambda_i$.

Um ano antes de seus mais conhecidos trabalhos, Sundrum propôs uma extensão do modelo ADD [33] onde a compactificação era gerada pelo efeito coletivo de n branas tipo-corda paralelas em seis dimensões [50]. De fato, a solução não-singular de vácuo das equações de Einstein com simetria cilíndrica é localmente plana mas possui um déficit angular, o que torna a geometria assintoticamente cônica [51, 60]. O déficit angular é proporcional à massa por unidade de volume da corda (ou brana). Assim, Sundrum argumentou que um número suficiente de branas tipo-corda poderiam gerar uma compactificação natural [50].

Logo após a publicação dos artigos de Randall-Sundrum, vários autores propuseram cenários que estendem a geometria tipo-corda em $(3 + 1)$ dimensões.

Uma classe de métricas que possui simetria de Lorentz local sobre uma brana de d dimensões, com uma simetria axial com variável radial r e com uma variedade M_n compacta é dada por

$$ds_D^2 = \sigma(r) \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \alpha(r) dr \otimes dr + \gamma(r) \tilde{g}_{ab}(y) dy^a \otimes dy^b. \quad (2.96)$$

Note que tal métrica é um caso particular da métrica do modelo de Rubakov-Shaposhnikov onde se admite a existência de uma coordenada radial e um espaço compacto (simetria axial).

Os tensores de Ricci para esse espaço-tempo são

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sigma'}{\alpha} \right)' + \frac{\sigma'}{\alpha\sigma} \left(\frac{d\sigma'}{2\sigma} + \frac{\alpha'}{2\alpha} + \frac{n\gamma'}{2\gamma} \right) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2.97)$$

$$R_{rr} = -\frac{d}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)' - \frac{n}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)' + \frac{\alpha'}{4\alpha} \left(d \frac{\sigma'}{\sigma} + n \frac{\gamma'}{\gamma} \right) - \frac{d}{4} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - \frac{n}{4} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \quad (2.98)$$

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma'}{\alpha} \right)' + \frac{1}{2\alpha\gamma} \left(d \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\alpha'}{\alpha} + (n-2) \frac{\gamma'}{\gamma} \right) \right], \quad (2.99)$$

que geram o escalar de Ricci

$$R = \frac{\hat{R}}{\sigma} + \frac{\tilde{R}}{\gamma} - \frac{d}{2} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sigma'}{\alpha} \right)' + \frac{1}{2\alpha} \frac{\sigma'}{\sigma} \left((d-2) \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\alpha'}{\alpha} + n \frac{\gamma'}{\gamma} \right) \right] \quad (2.100)$$

$$- \frac{n}{2} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma'}{\alpha} \right)' + \frac{1}{2\alpha} \frac{\gamma'}{\gamma} \left(d \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\alpha'}{\alpha} + (n-2) \frac{\gamma'}{\gamma} \right) \right] - \frac{d}{2\alpha} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)' \quad (2.101)$$

$$- \frac{n}{2\alpha} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)' + \frac{1}{4\alpha} \frac{\alpha'}{\alpha} \left(d \frac{\sigma'}{\sigma} + n \frac{\gamma'}{\gamma} \right) - \frac{d}{4\alpha} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - \frac{n}{4\alpha} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2. \quad (2.102)$$

Dessa forma, a equação de Einstein

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = K_D (T_{AB} + \Lambda g_{AB}) \quad (2.103)$$

com uma fonte com simetria axial

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= t_0 \delta_\nu^\mu \\ T_r^r &= t_r \\ T_\theta^\theta &= t_\theta \end{aligned} \quad (2.104)$$

leva ao sistema de equações

para as coordenadas da brana

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{\alpha} \left[-\frac{d-1}{2} \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{((d-1)(4-d))}{8} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{n(3-n)}{8} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{n}{2} \frac{\gamma''}{\gamma} - \frac{(d-2)n}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} + \frac{\alpha'}{4\alpha} \left((d-2) \frac{\sigma'}{\sigma} + n \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + \frac{\alpha}{2\gamma} \tilde{R}_n \right] = K_6 (t_0 + \Lambda) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

para a coordenada radial

$$\frac{d(d-1)}{8} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{n(n-1)}{8} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{nd}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\hat{R}_d}{\sigma} + \frac{\tilde{R}_n}{\gamma} \right) = K_D (t_r + \Lambda) \alpha \quad (2.106)$$

para as coordenadas compactas

$$\tilde{G}_{ab} - \frac{g_{ab}}{2} \left[\frac{(1-n)}{\alpha} \frac{\gamma''}{\gamma} + \frac{(1-n)d}{2\alpha} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} + \frac{(n-1)(n-4)}{4\alpha} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 - \frac{d}{\alpha} \frac{\sigma''}{\sigma} \right] \quad (2.107)$$

$$+ \frac{(1-d)d}{4\alpha} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{d}{2\alpha} \frac{\sigma' \alpha'}{\sigma \alpha} + \frac{\hat{R}_d}{\sigma} \Big] = K_D (t_\theta + \Lambda) \gamma \tilde{g}_{ab}. \quad (2.108)$$

Geralmente, assume-se que a equação de Einstein sobre a brana possui um termo

cosmológico do tipo

$$\hat{G}_{\mu\nu} = K_d \Lambda_d \hat{g}_{\mu\nu} \quad (2.109)$$

Embora não tenhamos proposto uma fonte para o tensor de energia-tensão (2.104), a geometria está bem determinada pelo sistema de equações acima.

Vejamos agora como diferentes modelos abordaram tanto a origem da fonte para uma brana tipo-corda como suas implicações físicas e geométricas.

2.7.0.3 Modelo de Cohen-Kaplan

Em 1999, Cohen e Kaplan propuseram um cenário de brana tipo-corda global, ou seja, cuja lagrangiana não apresenta um campo de calibre A_M [64]

$$\mathcal{L} = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - V(\Phi). \quad (2.110)$$

O valor esperado de vácuo do campo Φ que minimiza o potencial $V(\Phi)$ tem a forma axial

$$\Phi = f^{\frac{d}{2}} e^{i\theta}. \quad (2.111)$$

A métrica deste cenário tem a forma [64]

$$ds^2 = A(u) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \gamma^2 B(u) (du^2 + d\theta^2), \quad (2.112)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$.

Tal solução é uma adequação ao cenário de branas de uma solução para cordas cósmicas que os autores haviam encontrado onze anos antes [58] Note que tal métrica se encaixa na métrica estacionária e axial dada por (2.71), onde $\Omega^2 = V^{-1} r^2$. A métrica (2.112) é um caso particular de (2.96) para $d = 4$, $n = 1$, $\alpha(u) = \gamma(u) = \gamma B(u)$.

O tensor de tensão-energia para essa configuração é dada por

$$t_0 = t_u = -t_\theta = \frac{f^d}{\gamma^2 B^2} \quad (2.113)$$

Os autores mostraram que a solução das equações de Einstein sem constante cosmológica $\Lambda = \Lambda_4 = 0$, apesar de apresentar uma singularidade em um ponto a uma distância finita da origem e não possuir constante cosmológica, tem um modo zero gravi-

tacional normalizado (gráviton efetivo sobre a brana) e uma torre bem definida de modos KK [64].

2.7.0.4 O modelo de Gregory

No mesmo ano, Gregory propôs uma modelo ainda gerado com uma corda global mas agora com constante cosmológica [65]. Gregory ainda analisou o caso sem constante cosmológica mas com uma dependência temporal sobre a brana [65], na forma

$$ds^2 = e^{2A(r)}(dt^2 - e^{2b(t)} dz_i^2) - dr^2 - C^2(r)d\theta^2. \quad (2.114)$$

Note que o fator de escala $e^{b(t)}$ pode levar a brana a ter constante cosmológica positiva ou negativa.

Gregory supôs a mesma lagrangiana de Cohen-Kaplan com $\Phi = \chi X e^{i\theta}$ e um potencial $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - \eta^2)^2$.

As componentes do tensor de tensão-energia são

$$t_0 = \left[X'^2 + \frac{X^2}{C^2} + \frac{1}{4}(X^2 - 1)^2 \right] \quad (2.115)$$

$$t_r = \left[-X'^2 + \frac{X^2}{C^2} + \frac{1}{4}(X^2 - 1)^2 \right] \quad (2.116)$$

$$t_\theta = \left[X'^2 - \frac{X^2}{C^2} + \frac{1}{4}(X^2 - 1)^2 \right] \quad (2.117)$$

Gregory obteve qualitativamente soluções que não singulares, ao contrário da solução de Cohen-Kaplan, não singular, como obtido anteriormente por Gregory em (3 + 1) dimensões [62].

Ainda em 1999, Chodos e Poppitz propuseram um cenário onde a brana não precisasse ter simetria cilíndrica. As duas dimensões extras formavam uma variedade de curvatura gaussiana positiva. O interessante é que, devido a geometria não-fatorizável, a brana também possuía uma constante cosmológica [66].

Em 2000, Chen, Luty e Ponton [67] analisaram como a constante cosmológica da brana se relaciona com a constante cosmológica em seis dimensões. A escolha da métrica foi tal que $\sigma(r) = r^2$, $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, $n = 1$. Eles também analisaram como diferentes configurações dadas pela fonte e pela constante cosmológica levariam a uma compactificação [67].

2.7.0.5 O modelo de Olasagasti-Vilenkin

No mesmo ano, Olasagasti e Vilenkin encontraram as soluções gravitacionais para uma p-brana imersa em um espaço-tempo de n dimensões, cuja fonte é um defeito topológico global [68], dado pela lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi - V(\phi), \quad (2.118)$$

onde $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^a \phi^2 - \eta^2)$. Assintoticamente, os campos ϕ^a devem assumir uma configuração esféricamente simétrica¹⁴ do tipo

$$\phi^a = n \frac{\zeta^a}{\zeta}, \quad (2.119)$$

onde $\zeta^2 = \zeta^a \zeta^a$. Os autores procuraram então soluções exteriores ao núcleo do defeito¹⁵ com o seguinte *ansatz* métrico

$$ds^2 = B^2 \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + A^2 dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2, \quad (2.120)$$

onde $d\Omega_{n-1}^2$ é o elemento de linha de uma $n - 1$ esfera.

A geometria é não-fatorizável e tanto a brana quanto a variedade transversa poderiam ter constantes cosmológicas positivas e negativas.

Como os campos ϕ^a se anulam na origem, os autores argumentaram que uma solução completa, ou seja, interior e exterior ao defeito, deveria ter uma característica de decaimento suave até a origem. A melhor imagem em três dimensões para visualizar este comportamento é a superfície de um charuto. Os raios começam cilíndricos a longa distância e vão se anulando suavemente a medida que se aproxima da origem, ou seja, da ponta do charuto. A busca por uma solução de brana axisimétrica com esta característica foi uma das inspirações para o cenário corda-charuto, a ser descrito no capítulo 3.

2.7.0.6 O modelo de Gherghetta-Shaposhnikov (GS)

Neste ano, Gherghetta e Shaposhnikov (GS) propuseram um modelo tipo-corda não singular (ao contrário do modelo de Cohen-Kaplan), estático e com constante cosmológica negativa (ao contrário do modelo de Gregory) [69].

¹⁴*Hedgehog* em inglês.

¹⁵*core* em inglês.

A métrica proposta do modelo GS é dada por [69]

$$ds^2 = \sigma(r)g_{\mu\nu}(x^\zeta)dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r)d\theta^2, \quad (2.121)$$

onde,

$$\sigma(r) = e^{-cr} \quad (2.122)$$

$$\gamma(r) = R_0^2 \sigma(r). \quad (2.123)$$

r é uma variável radial que mede a distância de um ponto perpendicular à brana. Note que o fator de warp (2.122) é uma extensão natural daquele utilizado no modelo RS [34, 35].

Para obtermos a métrica (2.121) do modelo GS [69] a partir da métrica geral (2.71), precisamos tomar os passos para a métrica de Gibbons e de Cohen-Kaplan e ainda mudar para uma coordenada radial gaussiana

$$\rho = \int \Omega dr. \quad (2.124)$$

Para que a geometria da brana seja induzida (recuperada) pela geometria do Bulk, o fator de warp deve satisfazer a condição

$$\sigma(0) = 1 \quad (2.125)$$

Para que a brana tenha de fato quatro dimensões, a componente angular deve satisfazer

$$\gamma(0) = 0 \quad (2.126)$$

O escalar de curvatura do espaço ambiente é

$$R(r) = \frac{\hat{R}}{\sigma} - \left[4 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + 2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + 2 \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} \right] \quad (2.127)$$

Para que $R(0) = \hat{R}$, toma-se

$$\sigma'(0) = 0 \quad (2.128)$$

$$(\sqrt{\gamma})' = 1 \quad (2.129)$$

As equações (2.125,2.126,2.128,2.129) são chamadas condições de regularidade da brana tipo-corda ¹⁶ [69].

As equações de Einstein ficam

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} = -K_6(\Lambda g_{ab} + T_{ab}), \quad (2.130)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{3}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma''}{\gamma} = -K_6(\Lambda + t_0(\rho)) + \frac{K_4 \Lambda_4}{\sigma} \quad (2.131)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} = -K_6(\Lambda + t_\rho(\rho)) + \frac{2K_4 \Lambda_4}{\sigma} \quad (2.132)$$

$$2 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 = -K_6(\Lambda + t_\theta(\rho)) + \frac{2K_4 \Lambda_4}{\sigma} \quad (2.133)$$

O modelo GS tinha ainda a virtude de possuir um modo zero gravitacional normalizado e um espectro KK que gerava uma correção do potencial newtoniano da forma

$$\Delta V \approx r^{-3}. \quad (2.134)$$

Note que a correção (2.134) é menor do que a encontrada no modelo RS [35].

O sucesso da solução GS levou a generalizações como uma brana tipo-monopólo em sete dimensões [70, 71], onde os modo zero gravitacional pode ser localizado para qualquer sinal da constante cosmológica.

Ponton e Poppitz estudaram a relação entre o cenário GS e a conjectura AdS/CFT [78]. Eles argumentaram que os métodos de resolução empregados em correspondências tipo gravidade-calibre ¹⁷, poderiam resolver certos problemas no horizonte do cenário, devido a ação de Z_2 , uma vez que a coordenada angular é compacta [78].

2.7.0.7 Modelo de RandjbarDaemi-Shaposhnikov

Outra generalização, proposta por RandjbarDaemi e Shaposhnikov foi a de tomar a variedade transversa M_n como o espaço-quociente G/H . Tal procedimento generaliza o

¹⁶Pode-se ver que a solução GS não satisfaz as condições 2.126, 2.128 e 2.129, como foi posteriormente estudado por Tinyakov e Zuleta [79].

¹⁷*Gauge-gravity duality* em inglês.

coset do modelo RS, onde tomasse a dimensão extra e compactifica-se através da ação do grupo $G = Z_2$. Dentre os casos estudados pelos autores, destacam-se o das variedades *Ricci planas*, ou seja, $R_{ab} = 0$. Dessa forma, esses autores generalizaram o modelo de Olasagasti-Vilenkin para uma variedade compacta não esférica [72].

2.7.0.8 Modelos de Oda

Oda estendeu a métrica utilizada do modelo GS (tomando a métrica de (2.120) Olasagasti-Vilenkin onde o raio da variedade esférica transversal é mantido constante) e mostrou que todos os campos, menos o espinorial, eram localizados sobre a brana de tensão positiva, sem a adição de nenhum outro mecanismo, ao contrário do caso em cinco dimensões, como anteriormente discutimos [73, 74]. Para localizar o campo espinorial era necessário inverter-se a tensão da brana.

Gogberashvili e Singleton [76] e Oda [77] mostraram que, modificando o *ansatz* métrico para

$$ds^2 = \phi(r)\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \lambda(r)(dr^2 + r^2d\theta^2), \quad (2.135)$$

era possível encontrar soluções sem constante cosmológica que localizam todos os campos do modelo padrão com a mesma tensão da brana. No entanto, como a tensão é positiva, o fator de warp é crescente

2.7.0.9 O modelo Giovannini-Meyer-Shaposhnikov

Tinyakov e Zuleta mostraram, no entanto, que o modelo GS não satisfaz nem as condições de regularidade na origem, nem a condição dominante de energia [79]. A origem de tais anomalias era a hipótese da brana ser infinitamente fina, localizada em $r = 0$.

A fim de superar tais problemas, Giovannini, Meyer e Shaposhnikov propuseram um modelo de brana tipo-corda espessa, gerada por um vórtice abeliano, descrito pela lagrangiana [80]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{AB}(\mathcal{D}_A\Phi)^*\mathcal{D}_B\Phi - \frac{1}{4}F^{AB}F_{AB} - \frac{\lambda}{4}(\Phi^*\Phi - v^2)^2 \quad (2.136)$$

onde, $\mathcal{D}_B = \nabla_B - ieA_B$. O *ansatz* métrico utilizado no modelo GMS é o mesmo do modelo GS.

As equações de campo para esse cenário são a equação para o campo escalar complexo

$$g^{MN}\nabla_M\nabla_N\phi - e^2 A_M A^M \phi - ieA_M\partial^M\phi - ie\nabla_M(A^M\phi) + \lambda(\phi^*\phi - v^2)\phi = 0, \quad (2.137)$$

a equação para o campo vetorial de calibre

$$\nabla_M F^{MN} = -e^2 A^N \phi^* \phi + \frac{ie}{2}(\phi\partial^N\phi^* - \phi^*\partial^N\phi), \quad (2.138)$$

e a equação de Einstein

$$R_{MN} - \frac{R}{2}g_{MN} = \kappa_6(-\mathcal{L}g_{MN} + \frac{1}{2}((\mathcal{D}_M\phi)^*\mathcal{D}_N\phi + (\mathcal{D}_N\phi)^*\mathcal{D}_M\phi) - F_{MC}F_N^C + \Lambda g_{AB}). \quad (2.139)$$

O sistema de equações (2.137,2.138,2.139) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares e acopladas de difícil solução. Mesmo no caso plano em (3 + 1) dimensões o sistema não possui solução analítica. Dessa forma, os autores utilizaram métodos computacionais para encontrar as soluções deste sistema, em particular os que permitam localizar o modo zero gravitacional. A solução encontrada satisfaz as condições de regularidade e a condição de energia dominante [80].

2.7.0.10 O universo tipo-charuto

Uma solução estática e com simetria axial foi encontrada analiticamente por Carlos e Moreno [81] no contexto de supergravidade. A ação proposta foi [81]

$$S = \int \left[\frac{R}{2} - K_{i\bar{j}}g^{ab}\partial_a\phi(\partial_b\phi)^* - V(\phi, \phi^*) \right] \sqrt{|g|}d^Dx \quad (2.140)$$

onde, $K_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial_i\phi\partial_{\bar{j}}\phi^*}$ é a chamada métrica do superpotencial de Kähler K . O *ansatz* métrico escolhido por Carlos e Moreno foi [81]

$$ds^2 = e^{2A(z,\bar{z})}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{2}e^{2B(z,\bar{z})}(dzd\bar{z} + d\bar{z}dz) \quad (2.141)$$

Os autores não consideraram uma constante cosmológica, o que fazia com que o raio da variedade transversa fosse constante assintoticamente. Assim, eles obtiveram uma solução suave que se aproxima de um cilindro a grandes distâncias. Carlos e Moreno chamaram este cenário *um universo tipo-charuto*¹⁸.

¹⁸*Cigar-like universe* em inglês.

2.7.0.11 Modelos cosmológicos em 6 – D

Outra interessante propriedade do modelo GS [69] é a independência entre a tensão da brana e a sua constante cosmológica. Navarro encontrou, em 2003, uma solução com esta característica, mas com uma variedade transversa compacta [82]. Cline *et al* analisaram as possíveis soluções de branas com constante cosmológica e concluíram que a dimensão radial deveria terminar em uma outra brana [83].

A fim de resolver o problema das singularidades de branas curvas, Bostok *et al*, Kano e Soda [85] e Kofinas [90] analisaram o comportamento de soluções cosmológicas para a métrica mais geral [84, 85, 90]

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(x, r)dx^\mu dx^\nu + dr^2 + L(x, r)d\theta^2. \quad (2.142)$$

Se $V \neq \Omega_i^2 \Lambda_i$ na forma geral da métrica 2.71, chegamos à métrica (2.142).

Bostok *et al*, Kano e Soda [85] e Kofinas [90] propuseram ainda a adição de um termo de Gauss-Bonnet,

$$S_{GB} = \alpha \int_{M_6} R_{GB}^2 dx^6, \quad (2.143)$$

onde,

$$R_{GB}^2 = R^2 + R_{abcd}R^{abcd} - 4R^{ab}R_{ab} \quad (2.144)$$

Relaxando as condições de regularidade na origem, os autores encontraram soluções cosmológicas na brana mesmo com a dimensão radial infinita [84, 85, 90].

Vinet e Cline argumentaram que, assumindo diferentes funções de *warp* para a coordenada temporal e espaciais na brana e uma brana espessa, é possível, no contexto de apenas do termo de Einstein-Hilbert, obter soluções cosmológicas bem comportadas sobre a brana [86]. Já Navarro e Santiago [88] e Papantonopoulos-Papazoglou [89] encontraram soluções regulares modificando-se as relações de regularidade. Kofinas [90] argumentou que, para ter-se uma fonte não-trivial para a expansão cosmológica era necessário introduzir-se o termo de Gauss-Bonnet (2.144). Papantonopoulos *et al* mostraram que pode-se ainda procurar-se soluções naturalmente compactificadas devido um fluxo de um campo vetorial [92].

Cenários de branas com outras geometrias também foram propostos. Utilizando a

singularidade cônica, Keragias [93] encontrou uma solução para o problema do pequeno valor da constante cosmológica: a singularidade cônica funcionaria como um dreno para a energia de vácuo. Para isso, a variedade transversa deve ser compacta e ter uma forma de lágrima¹⁹. Garriga e Porrati [94] propuseram uma variedade com duas singularidades cônicas, com a forma de uma bola de futebol americano, para encontrar uma brana sem auto-ajuste (tensão-constante cosmológica). Gogberashvili *et al* encontraram uma origem para as gerações de férmions propondo uma variedade com a forma de maçã [95].

Outra extensão geométrica interessante é a introdução de torção nos modelos de branas. Uma vez que a gravidade pode-se propagar pelas dimensões extras, a torção também se propagaria pelo *bulk*, deixando nossa brana livre de torção [97]. Uma possível fonte física para a torção seria o campo de Kalb-Ramond B_{ab} [98, 100]. A introdução de torção também levaria a uma gravidade massiva [99], a uma modificação da relação área-entropia de um buraco-negro [101] e à formação de uma estrutura interna 2–kink da brana [102].

Recentes propostas de cenários de branas também tem sido abordadas no intuito de fornecer uma origem à chamada *matéria escura*²⁰ [104],[105].

2.7.0.12 Modelos com geometrias exóticas

De modo a explicar o problema da divergência entre o valor calculado da constante cosmológica utilizando a energia do vácuo e o valor observado, Kehagias propôs um espaço-tempo de seis dimensões sem constante cosmológica com a métrica

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2A(z, \bar{z})} dz d\bar{z}. \quad (2.145)$$

Como mostrado anteriormente, a solução tipo corda gera um déficit angular. Kehagias propôs então que tal comportamento cônico próximo à brana faria com que a energia do vácuo fosse *drenada* para a variedade transversa, a qual tem a forma pictórica de uma gota de lágrima [93].

Outra solução importante por analisar a relação entre a tensão da brana e a constante cosmológica é a a proposta por Garriga e Porrati de uma variedade transversa do com a forma de uma bola de futebol [94].

Gogberashvili *et al* propuseram um cenário com duas dimensões extras compactas onde a métrica é dada por [76].

¹⁹*Tear drop* em inglês.

²⁰*Dark matter* em inglês.

$$ds^2 = \phi^2(\theta)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \epsilon^2(d\theta^2 + b^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.146)$$

Para um espaço-tempo com constante cosmológica com uma brana plana, os autores encontraram o fator de *warp*

$$\phi = \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.147)$$

Logo, a variedade transversa tem a forma de uma maçã.

3 VARIEDADES CÔNICAS RESOLVIDAS

Dentre os grandes resultados da teoria de cordas está a necessidade de dimensões adicionais às já conhecidas do espaço-tempo. Para que a adição de tais dimensões seja coerente com as observações quadridimensionais, as dimensões extras devem formar uma variedade de *Kähler* compacta chamada de *espaços de Calabi-Yau*, cujo diâmetro seja da ordem do comprimento de Planck l_p [6]. É possível transformar um espaço de Calabi-Yau em outro através das chamadas *transições cônicas*¹[6]. Nesse processo, são geradas variedades cônicas²[6]. Para se regularizar esta variedade próximo ao nodo do cone, foram propostas várias técnicas, dentre elas a *deformação* e a *resolução* [129]. Tais variedades são bastante úteis em extensões da correspondência AdS-CFT [130, 131].

Neste capítulo, iremos construir um cenário de branas em seis dimensões onde a variedade transversa é uma seção do cone resolvido \mathbb{C}_2 [106]. Assim como o modelo Randall-Sundrum 1 [34], baseado apenas em uma estrutura de campos definidos em um espaço-tempo de cinco dimensões, inspirou-se no modelo Horava-Witten [32] proveniente da teoria M, nós propusemos um cenário onde exploramos o fluxo de resolução, originalmente definido em teoria de cordas, parametrizando a variedade transversa do cenário de branas tipo-corda.

Mostraremos que o parâmetro de resolução, que controla a singularidade do cone, também altera sensivelmente as propriedades dos campos que vivem neste cenário bem como da própria brana [106].

¹ *Conifold transitions* em inglês.

² *Conifolds=conical+manifolds* em inglês.

3.1 Variedade cônica resolvida

Vamos introduzir o conceito de variedade cônica. Dada uma variedade M_n e uma parametrização $(x_i)_{i=1}^n$, se pudermos aplicar sobre M_n a relação de equivalência (simetria) $Z_2 (x^i \rightarrow -x^i)$, podemos definir uma variedade cônica como o quociente³ $C_n = M_n/Z_2$, isto é, como a identificação entre os pontos opostos de M_n . Como $0 = -0$, a origem é o único ponto (por isso singular) que é mantido fixo pela ação de Z_2 sobre M_n .

Como em teoria de cordas estamos geralmente interessados em variedades de seis dimensões, faremos $n = 6$. Podemos definir uma variedade cônica por meio de uma equação polinomial que possua a simetria Z_2 . Assim, tomemos $C_6 \subset \mathbb{C}^4$ como solução da quádrlica[129]:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0. \quad (3.1)$$

De fato, dado um $z \in \mathbb{C}^4$ que satisfaz a eq.(3.1) $\Rightarrow \lambda z \in \mathbb{C}^4, \lambda \in \mathbb{C}$ também satisfaz a eq.(3.1). Logo, o conjunto solução da eq.(3.1), $C_6 \subseteq \mathbf{CP}^3$. Pela simetria Z_2 , definimos a variedade cônica como $C_6 = \mathbf{CP}^3/Z_2$.

A eq.(3.1) pode ser reescrita matricialmente definindo

$$W = z_i \sigma^i + z_4 \mathbf{1}, \quad (3.2)$$

como

$$\det(W) = 0, \quad (3.3)$$

onde os σ^i são as matrizes de Pauli e $\mathbf{1}$ é a identidade. Podemos definir uma coordenada radial $r \in \mathbb{R}, 0 \leq r < \infty$ como

$$r^2 = \text{Tr}(WW^\dagger). \quad (3.4)$$

Assim, podemos tomar a variedade cônica como $C_6 = \mathbb{R}^+ \times X^5$, onde X^5 é uma variedade compacta de dimensão cinco chamada *espaço base do cone*.

A métrica canônica para a variedade cônica fica então

$$ds_6^2 = dr^2 + r^2 ds^2(X^5). \quad (3.5)$$

³Coset em inglês.

Como esperado, C_6 é singular em $r = 0$. Um espaço base comum em teoria de cordas é dado por $X^5 = T^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1)$ cuja métrica fica [6, 130]:

$$ds_6^2 = dr^2 + \frac{r^2}{9}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{r^2}{6}(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2 + d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2). \quad (3.6)$$

Uma versão suavizada dessa variedade cônica, chamada *variedade cônica resolvida*⁴, pode ser obtida buscando-se outras soluções da eq.(3.3). Tomando a mesma parametrização da *variedade cônica singular*, a métrica para a *variedade cônica resolvida* fica [132, 133]

$$ds_6^2 = \left(\frac{r^2 + 6a^2}{r^2 + 9a^2}\right) dr^2 + \frac{r^2}{9} \left(\frac{r^2 + 9a^2}{r^2 + 6a^2}\right) (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6}r^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6}(r^2 + 6a^2)(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2). \quad (3.7)$$

A constante $a \in \mathbb{R}^+$ que aparece na métrica (3.7) tem dimensão $[a] = L$ e é tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} ds_6^2 = a^2(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2). \quad (3.8)$$

Assim, a medida que nos aproximamos da origem, o cone resolvido converge para uma esfera de raio a . O parâmetro a mede então o quão singular é o cone e por isso ele é chamado de *parâmetro de resolução*.

Na figura (3) nós mostramos o comportamento do escalar de curvatura da *variedade cônica resolvida*, onde fizemos uma translação no eixo apenas para mostrar a simetria do gráfico. Note que a *variedade cônica resolvida* tem curvatura positiva e é assintoticamente plano. Essas propriedades nos levaram a propor uma seção da *variedade cônica resolvida* como extensão dos já existentes cenários com um espaço transversal com simetria esférica [64, 65, 69, 73].

Pela análise da equação de Einstein com simetria cilíndrica, sabe-se que o espaço-tempo exterior ao defeito tipo-corda é cônico com déficit angular proporcional à massa por unidade de volume do defeito [60, 55, 51, 63]. Uma vez que as variedades cônicas aparecem naturalmente em teoria de corda, que foi a fonte do modelo de branas, e uma vez que o cone resolvido permite não somente suavizar o cone próximo a origem como

⁴*resolved conifold* em inglês.

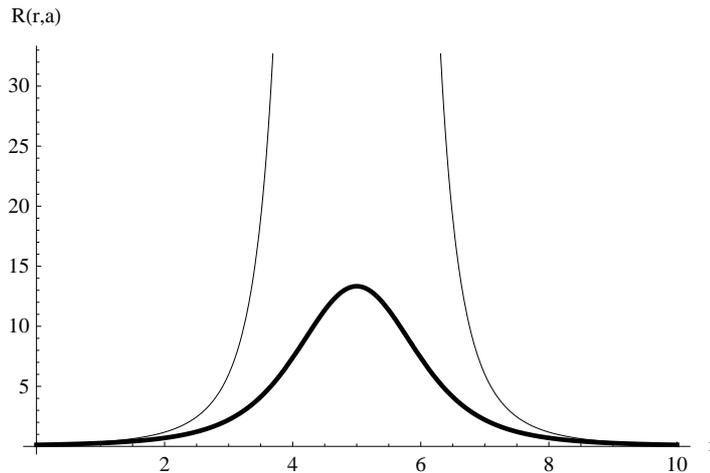


Figura 3: Escalar de Ricci para a variedade cônica resolvida e singular com origem em $r = 5$. Para $a = 1$ (linha cheia), a curvatura é suave na origem $r = 5$ enquanto que para $a = 0$ (linha fina) diverge na origem.

induz um fluxo geométrico que está intimamente ligado à massa da brana, nós propusemos o cone resolvido como uma solução estendida da variedade transversa a uma brana com simetria axial [106].

Como as outras seções da variedade cônica resolvida não dependem do parâmetro de resolução a , escolhemos como variedade transversa a seção M_2 cuja métrica é

$$ds_2^2 = \left(\frac{r^2 + 6a^2}{r^2 + 9a^2} \right) dr^2 + \frac{1}{6}(r^2 + 6a^2)d\theta^2. \quad (3.9)$$

Note que $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{rr} = 1$ e assim, este cone bidimensional converge assintoticamente para o plano \mathbb{R}^2 em coordenadas polares. Por conviniência futura, definiremos $\alpha(r, a) = g_{rr}$ e $\beta(r, a) = g_{\theta\theta}$

A componente angular da métrica deste 2–cone tem uma singularidade cônica parametrizada por a . De fato, o escalar de curvatura para o 2–cone é

$$R = R(r, a) = -\frac{6a^2(r^2 + 18a^2)}{(r^2 + 6a^2)^3}. \quad (3.10)$$

tal escalar de curvatura é bastante similar ao encontrado em outra variedade com simetria axial, o *sóliton charuto* de Hamilton[110, 111, 106, 109] que estudaremos em detalhes no próximo capítulo.

A fim de compararmos a fonte desta geometria com a geometria tipo-corda gerada por um vórtice abeliano como estudado em [80], nós fizemos a mudança de variável radial

[107, 108]

$$\rho_a = \int^r \sqrt{\frac{(u'^2 + 6a^2)}{u'^2 + 9a^2}} du'. \quad (3.11)$$

que levou a métrica 3.9 na forma gaussiana

$$ds_2^2 = d\rho^2 + \beta(\rho, a)d\theta^2. \quad (3.12)$$

Podemos escrever a mudança de variável 3.11 como

$$\rho_a(u) = \begin{cases} r & , a = 0 \\ -i\sqrt{6}aE\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{i}{3a}r\right), \frac{3}{2}\right) & , a \neq 0, \end{cases}$$

onde E representa a integral elíptica de segundo tipo. A transformação inversa é dada por

$$r_a(u) = \begin{cases} \rho & , a = 0 \\ -i\sqrt{6}aE\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{i}{\sqrt{6}a}\rho\right), \frac{2}{3}\right) & , a \neq 0, \end{cases}$$

O gráfico das mudanças estão mostrados nas figuras 18 e 19.

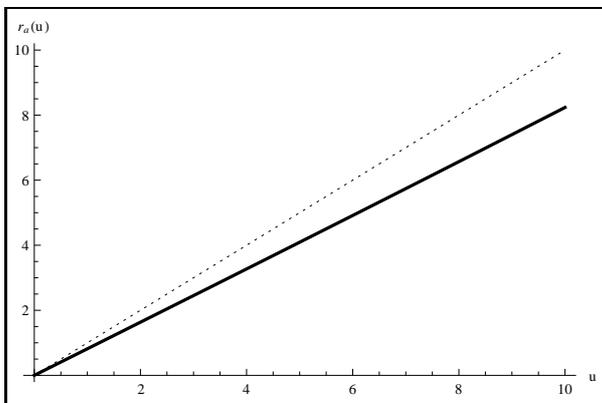


Figura 4: Mudança da coordenada radial no 2-cone resolvido. A inclinação do gráfico para $a = 10$ (linha cheia) é menor do que para $a = 0$ (linha pontilhada).

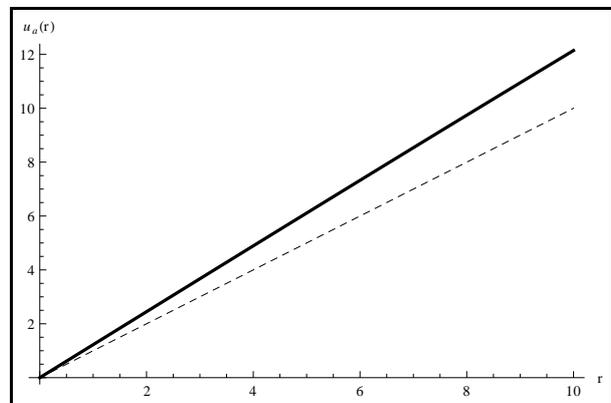


Figura 5: Mudança de variável radial inversa. $a = 10$ (linha cheia) e $a = 0$ (linha tracejada).

3.2 Cenário de brana com um cone resolvido transversal.

Vamos construir o modelo de brana com simetria axial cujo espaço trasverso seja a seção M_2 da *variedade cônica resolvida*.

Seja \mathcal{M}_6 um espaço-tempo⁵ estático e com simetria axial, que pode ser escrito com o produto não-fatorizável $\mathcal{M}_6 = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_2$, onde \mathcal{C}_2 é a seção do cone resolvido e \mathcal{M}_4 é a 3-brana.

A ação para o campo gravitacional e a fonte deste espaço-tempo seis-dimensional M_6 é dada por

$$S_g = \frac{1}{2K_6^2} \int_{\mathcal{M}_6} d^6x \sqrt{-g} ((R - 2\Lambda) + \int_{\mathcal{M}_6} dx^6 \sqrt{-g} \mathcal{L}_m), \quad (3.13)$$

onde $K_6^2 = \frac{8\pi}{M_6^4}$ e M_6^4 é a massa de Planck de M_6 .

Considere agora o *ansatz* para uma métrica estática com simetria axial

$$ds_6^2 = e^{-A(r)} \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \alpha(r, a) dr^2 + \beta(r, a) e^{-B(r)} d\theta^2. \quad (3.14)$$

Dessa forma, temos uma família de espaços-tempos $M_6^a = M_4 \times \mathcal{C}_2^a$, de tal forma que M_6^0 é singular.

Note que o *ansatz* 3.14 estende a solução usual tipo-corda através da inclusão dos termos do cone resolvido $\alpha(r, a), \beta(r, a)$. Como $r \rightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, a métrica 3.14 converge assintoticamente para a métrica tipo-corda [73]. Além disso, o parâmetro de resolução gera um fluxo geométrico no espaço exterior à brana o que reflete variações nas propriedades da própria brana, que é a fonte da geometria.

O escalar de Ricci para M_6 é dado por

$$R = e^A \hat{R} + \left(5A'' + A' \frac{\beta'}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 - \frac{5}{2} A'^2 - \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)' \right) \quad (3.15)$$

Supondo que a fonte tenha simetria axial,

$$T_\nu^\mu = t_0(r) \delta_\nu^\mu, \quad (3.16)$$

$$T_r^r = t_r(r), \quad (3.17)$$

$$T_\theta^\theta = t_\theta(r), \quad (3.18)$$

⁵Variedade lorentziana.

as equações de Einstein para o ansatz (3.14) ficam

$$3A'' + B'' - \frac{3}{2}A'B' - B'^2 - 3A'^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)A' + \left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)B' - \frac{\beta''}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta'}{\beta} + \alpha\left(\frac{1}{2}e^A\hat{R} - 2\Lambda + 2K_6^2t_0\right) = 0, \quad (3.19)$$

$$-3A'^2 - 2A'B' + 2\frac{\beta'}{\beta}A' + \alpha\left(e^A\hat{R} - 2\Lambda + 2K_6^2t_r\right) = 0, \quad (3.20)$$

$$4A'' - 5A'^2 - 2\frac{\alpha'}{\alpha}A' + \alpha\left(e^A\hat{R} - 2\Lambda + 2K_6^2t_\theta\right) = 0. \quad (3.21)$$

A equação da continuidade para o tensor de tensão-energia⁶ $\nabla^a T_{ab} = 0$ gera um vínculo entre as componentes deste tensor e da métrica

$$t'_r = 2A'(t_r - t_0) + \frac{B'}{2}(t_r - t_\theta) + \frac{\beta'}{2\beta}(t_\theta - t_r). \quad (3.22)$$

Somando as equações 3.20 e 3.21 e assumindo que $A(r) = B(r)$ leva à equação

$$2A''(r) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta}\right)A'(r) + K_6^2\alpha(t_\theta - t_r) = 0. \quad (3.23)$$

Definindo

$$\delta(r, a) = -\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta}\right), \quad (3.24)$$

$$\chi(r, a) = K_6^2\alpha(t_\theta - t_r), \quad (3.25)$$

a eq. (3.23) pode ser reescrita como

$$2A''(r) + \delta(r, a)A'(r) + \chi(r, a) = 0. \quad (3.26)$$

A solução da eq.(3.26) é

$$A(r) = A(0) - \int_0^r \left(\frac{\int_0^{r'} \eta(r'', a)\chi(r'', a)dr''}{\int_0^{r'} \eta(r'', a)dr''} \right) dr'. \quad (3.27)$$

Estamos interessados em soluções da equação 3.26 que divirjam assintoticamente, a fim de que o volume seja finito (como será explicado na relação entre as massas) e que se anule na origem, de tal forma que recuperemos a métrica da brana como uma métrica induzida de M_6 . Supondo as condições de contorno

$$A(0) = 0, \quad (3.28)$$

⁶ *stress-energy tensor* em inglês.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \infty, \quad (3.29)$$

A eq. (3.26) com condições de contorno (3.28,3.29) geram o fator de *warpd* desejado. No ponto $r = 0$, a métrica definida pela eq. (3.14) torna-se

$$ds_6^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{a^2}{6} d\theta^2. \quad (3.30)$$

Esta é uma métrica fatorizável entre M_4 e S^1 , onde S^1 tem raio $\frac{a}{\sqrt{6}}$. Assim, a redução dimensional $r = 0$ leva M_6 com geometria não-fatorizável em M_5 do tipo Kaluza-Klein.

Nesta geometria, a relação entre a escala de massa (massa de Planck) da brana (M_4) e do espaço-tempo ambiente (M_6) é dada por

$$M_4^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty e^{-A(r) - \frac{B(r)}{2}} \sqrt{\alpha(r, a)\beta(r, a)} dr. \quad (3.31)$$

Assim, transformações geométricas na variedade transversa devido a este fluxo geométrico de resolução altera a escala de energia efetiva da brana [106]. Este resultado estende a relação usual em branas tipo-corda [69] atribuindo-lhe uma *dinâmica*⁷.

3.2.1 Fator de *warp* linear.

Considere o seguinte fator de *warp* $A(r) = kr$, onde $k \in \mathbb{R}$. Essa função é amplamente usada tanto nos modelos RS [35, 34] quanto nos tipo-corda [65, 69, 73]. Com esta escolha, as equações de Einstein (3.19,3.20,3.21) tornam-se

$$B'' - \frac{3k}{2}B' - B'^2 - 3k^2 + \frac{3k}{2} \left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) B' - \frac{\beta''}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{\beta'}{\beta} + \alpha \left(\frac{1}{2} e^A \hat{R} - 2\Lambda + 2K_6^2 t_0 \right) = 0, \quad (3.32)$$

$$-3k^2 - 2kB' + 2\frac{\beta'}{\beta}k + \alpha \left(e^A \hat{R} - 2\Lambda + 2K_6^2 t_r \right) = 0, \quad (3.33)$$

$$-5k^2 - 2\frac{\alpha'}{\alpha}k + \alpha \left(e^A \hat{R} - 2\Lambda + 2K_6^2 t_\theta \right) = 0. \quad (3.34)$$

Somando as equações radiais e angulares acima nós obtemos a solução para o fator de *warpd* $B(r)$

$$B(r) = kr + \ln(\alpha(r, a)\beta(r, a)) + \frac{K_6^2}{k} \int_0^r \alpha(r', a)(t_r(r') - t_\theta(r')) dr'. \quad (3.35)$$

⁷O termo dinâmica utilizado aqui não deve ser entendido como uma evolução temporal. Com efeito, embora a tenha unidade de M^{-1} ainda não dispomos de um modelo físico (lagrangiana) que dê uma origem física para a .

Por outro lado, se impusermos que

$$\ln(\alpha(r, a)\beta(r, a)) + \frac{K_6^2}{k} \int_0^r \alpha(r', a)(t_r(r') - t_\theta(r'))dr' = 0, \quad (3.36)$$

então $B(r) = A(r)$. Interessante notar que podemos fazer $\beta(r, a) = 1$ e no entanto, o fator de *warp* continuará dependendo de a . Isso nos levou a propor, em nosso segundo trabalho [109], uma fator de warp que variasse com o fluxo geométrico.

Inspirados na fonte para defeitos tipo-corda [73], suuponhamos que a componente angular do tensor de tensão-energia seja da forma

$$t_\theta(r) = \zeta e^{kr} + \lambda(r) + \rho, \quad (3.37)$$

onde ζ, ρ são constantes e

$$\lambda(r) = \frac{1}{4K_6^2\alpha(r)} \left(5P^2 + 2P\frac{\alpha'}{\alpha} - 3\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \right), \quad (3.38)$$

pela equação (3.34) concluimos que

$$\zeta = \frac{\hat{R}}{2K_6^2}, \quad (3.39)$$

$$\rho = \frac{\Lambda}{K_6^2}, \quad (3.40)$$

$$k = P. \quad (3.41)$$

Assim, obtemos a fonte para o cenário tipo-corda como um caso particular do cenário com um cone-resolvido transverso.

Para $B(r) = A(r)$ as componentes na brana e radiais do tensor de tensão-energia são

$$t_r(r) = \frac{\Lambda}{K_6^2} - \frac{e^{kr}\hat{R}}{K_6^2} + \frac{1}{\alpha K_6^2} (5k^2 - 2\frac{\beta'}{\beta}k), \quad (3.42)$$

$$t_0(r) = \frac{\Lambda}{K_6^2} - \frac{e^{kr}\hat{R}}{2K_6^2} + \frac{1}{2\alpha K_6^2} \left(\frac{11}{2}k^2, +2\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)k - \frac{\beta''}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta'}{\beta} \right). \quad (3.43)$$

Como β' diverge, então para $\hat{R} \leq 0$ a componente t_0 satisfaz a condição de energia fraca, $t_0 \geq 0$.

O fator de *warp* linear satisfaz as condições de contorno (3.28) and (3.29). Impondo

$$A'(r) > 0. \quad (3.44)$$

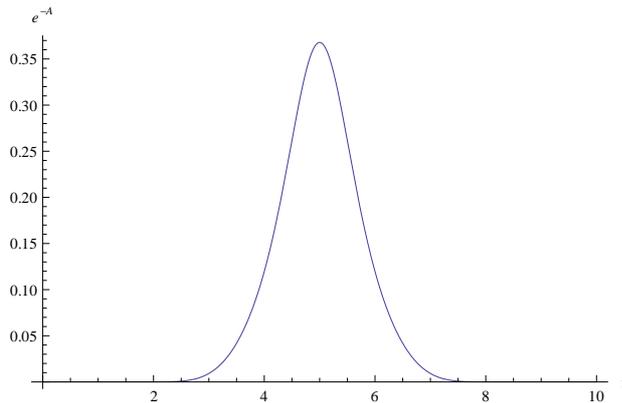


Figura 6: Fator de warp não-linear. Sua forma de sino lhe dá uma simetria Z_2 como suaviza seu comportamento sobre a brana.

que é uma escolha comum em defeitos tipo-corda [69, 80, 73, 68], assintoticamente a eq.(3.34) torna-se

$$5k^2 + 2\Lambda = 0 \Rightarrow \Lambda < 0. \quad (3.45)$$

Assim, assintoticamente $\mathcal{M}_6 = AdS_6$ para o fator de warp linear.

3.2.2 Fator de *warp* não-linear

O fator de warp linear, apesar de seus formidáveis resultados, não satisfaz a condição de energia dominante [79]. Baseados em uma proposta desenvolvida em cinco dimensões [139], nós propusemos o seguinte fator de warp [106]

$$A(r) = B(r) = \cosh(r) + \tanh(r)^2. \quad (3.46)$$

Como mostrado na fig. 6 o fator de warp em 3.46 possui simetria Z_2 como no modelo RS [34].

O escalar de Ricci diverge assintoticamente, como mostrado na fig.9. Como

$$R = K_6^2 T + 6\Lambda \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} T = -\infty, \quad (3.47)$$

então a fonte para esta geometria não é localizada.

3.2.3 Fator de *warp* suavizado

É importante ressaltar que fator de warp não-linear (3.46) regularizou a geometria próximo à brana mas levou a uma solução não interessante fisicamente no limite as-

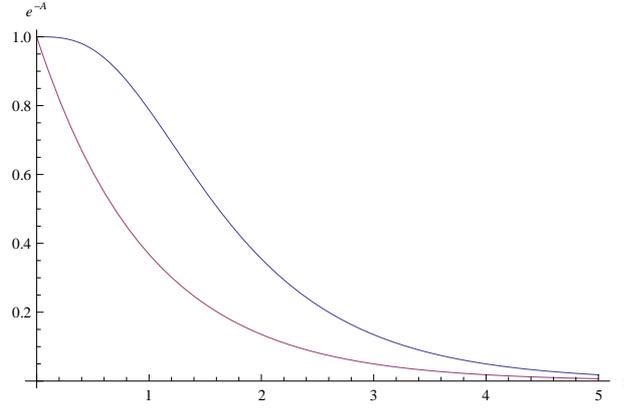


Figura 7: Fator de *warp* suavizado para $c = 1$ (linha azul) e fator de warp linear (linha vermelha). Note que ambos tem o mesmo decaimento exponencial para longas distâncias mas o fator linear não satisfaz as condições de regularidade na origem.

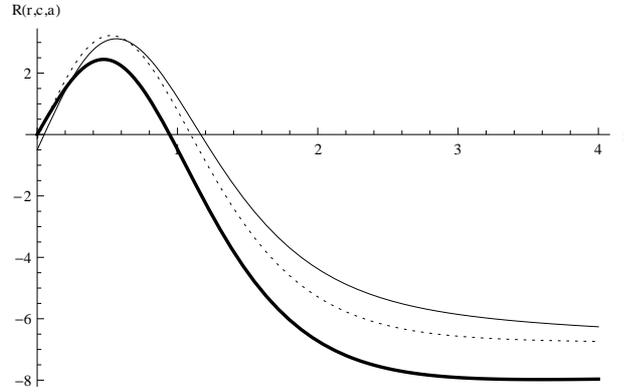


Figura 8: Escalar de curvatura do *bulk* para $\hat{R} = 0$ e $c = 1$. O espaço-tempo é suave em todos os pontos e assintoticamente ele converge para um espaço AdS_6 .

sintótico. Dessa forma, nós propusemos um fator de warp que tanto suaviza a geometria próximo como longe da brana, dado por [109, 107]

$$A(\rho, c) = c\rho - \tanh cr \quad (3.48)$$

A partir das equações de Einstein, as componentes do tensor de tensão-energia da fonte são

$$t_0(r, c, a) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_6} \left[c^2 (5\text{sech}^2 cr + 4\text{sech}^2 cr \tanh cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr) + \frac{5c}{2} \frac{\tanh cr^2}{r} \right] & , a = 0 \\ \frac{1}{\kappa_6} \left[c^2 (5\text{sech}^2 cr + 4\text{sech}^2 cr \tanh cr - \frac{5}{2}\text{sech}^4 cr) + \frac{5}{2} \frac{u}{u^2+6a^2} \tanh cr^2 \sqrt{\frac{r^2+9a^2}{r^2+6a^2}} + 3a^2 \frac{u}{u^2+6a^2} \frac{r}{(r^2+6a^2)^{\frac{3}{2}} (r^2+9a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] & , a \neq 0, \end{cases}$$

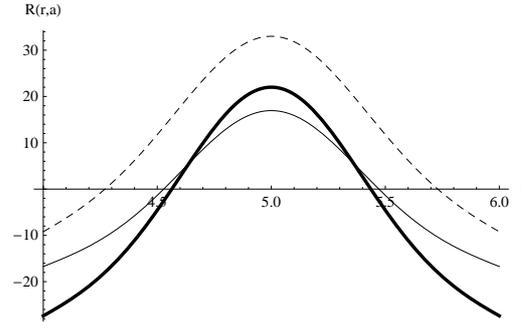


Figura 9: Escalar de curvatura de \mathcal{M}_6 para o fator de *warp* não-linear. A geometria é suave na origem mas diverge assintoticamente.

$$t_r(r, c, a) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_6} \left[c^2 \left(5 \operatorname{sech}^2 cr - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 cr \right) + c \left(\tanh^2 cr \frac{2}{r} \right) \right] & , a = 0 \\ \frac{1}{\kappa_6} \left[c^2 \left(5 \operatorname{sech}^2 cr - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 cr \right) + c \left(\tanh^2 cr \frac{2u}{u^2 + 6a^2} \sqrt{\frac{r^2 + 9a^2}{r^2 + 6a^2}} \right) \right] & , a \neq 0, \end{cases}$$

$$t_\theta(r, c) = \frac{c^2}{\kappa_6} \left(5 \operatorname{sech}^2 cr + 4 \operatorname{sech}^2 cr \tanh cr - \frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 cr \right). \quad (3.49)$$

A partir de seus gráficos podemos ver que para $a = 0$ a fonte satisfaz todas as condições de energia (fraca, forte e dominante). Como neste caso temos a redução $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_4$, esta configuração deve representar um cenário tipo-corda suavizado na origem (extensão do cenário GS). Já para $a = 10$, a fonte não satisfaz a condição forte nem a dominante, sendo então uma fonte exótica. Em um tal estado, em $r = 0$, temos a redução $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_5$ e logo, a pressão angular aproxima-se da componente da brana para estabilizar a dimensão extra com raio a .

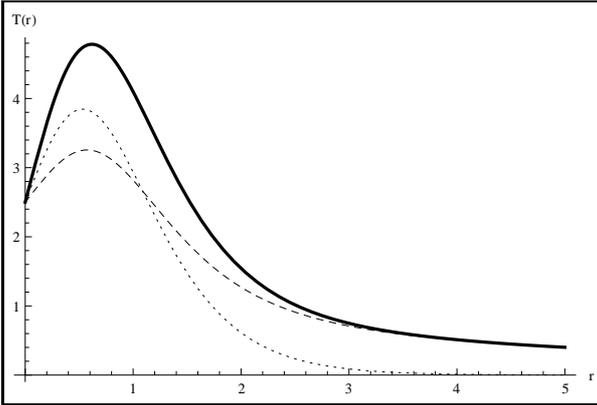


Figura 10: Componentes do tensor de tensão-energia para $a = 0$. T_{00} (linha cheia), $T_{\theta\theta}$ (linha pontilhada) e T_{rr} (linha tracejada) satisfazem a condição de energia dominante.

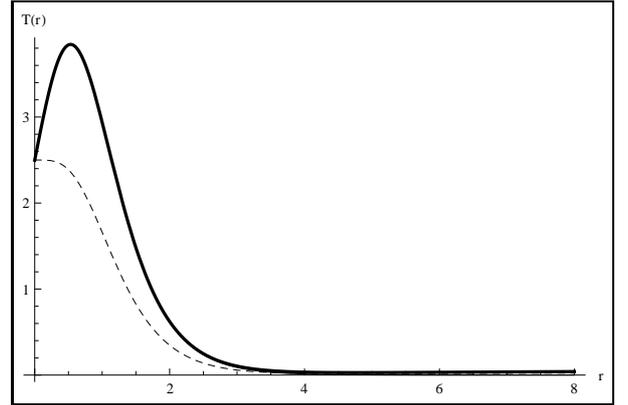


Figura 11: Componentes do tensor de tensão-energia para $a = 10$. A condição fraca $T_{00} \geq 0$ é satisfeita mas como $T_{00} = T_{\theta\theta}$ as condições forte e dominante são violadas.

3.3 Localização do campo escalar

Nessa seção estudaremos o comportamento de um campo escalar minimamente acoplado a este cenário. A equação de movimento para este campo será

$$\partial_A(\sqrt{-g}g^{AB}\partial_B\Phi) = 0. \quad (3.50)$$

Vamos agora aplicar o processo de decomposição Kaluza-Klein, que nada mais é do que uma separação de variáveis, onde

$$\Phi(x^\mu, r, \theta) = \hat{\phi}(x^\mu)\tilde{\phi}(r, \theta). \quad (3.51)$$

Devido a simetria de Poincaré na brana, o campo escalar deve satisfazer a condição de massa

$$\partial_\mu\partial^\mu(\hat{\phi}(x^\mu)) = m^2\hat{\phi}(x^\mu). \quad (3.52)$$

Como $0 \leq \theta \leq 2\pi$, vamos assumir que $\tilde{\phi}(r, \theta)$ pode ser escrita como uma série de Fourier

$$\tilde{\phi}(r, \theta) = \chi(r) \sum_{l=0}^{\infty} e^{il\theta}. \quad (3.53)$$

Desse modo, a equação radial para o campo escalar fica

$$\chi''(r) - \frac{1}{2} \left(4A' + B' + \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta'}{\beta} \right) \chi'(r) + \alpha e^A \left(m^2 - l^2 \frac{e^{B-A}}{\beta} \right) \chi(r) = 0. \quad (3.54)$$

Assumamos ainda que a função radial satisfaça as condições de contorno

$$\chi'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \chi'(r) = 0. \quad (3.55)$$

As condições (3.55) são importantes para que o campo escalar seja suave sobre a brana (não haja discontinuidades) e tenha uma simetria Z_2 em relação à esta.

A equação radial (3.54) juntamente com as condições de contorno (3.55) formam um problema de Sturm-Liouville. As auto-funções χ_m e os auto-valores m são chamados, respectivamente, de modos e espectro Kaluza-Klein.

Note que a equação (3.54) é uma extensão da equação para os modos KK em cenários tipo-corda [69, 73]

3.3.1 Modos massivos

Podemos transformar a eq.(3.54) em uma equação do tipo Schrödinger através das mudanças de variáveis

$$z = z(r) = \int_0^r \alpha(r')^{\frac{1}{2}} e^{\frac{A(r')}{2}} dr' \quad (3.56)$$

e

$$\chi(z) = e^{\frac{(3A+B-\ln(\beta))}{4}} \Psi(z), \quad (3.57)$$

donde $\Psi(z)$ deve obedecer a equação

$$-\ddot{\Psi}(z) + V(z)\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (3.58)$$

onde

$$V(z) = \left(\frac{3\dot{A} + \dot{B} - \beta^{-1}\dot{\beta}}{4} \right)^2 - \frac{(3\ddot{A} + \ddot{B} + \beta^{-2}(\dot{\beta})^2 - \beta^{-1}\ddot{\beta})}{4} + l^2\beta^{-1}e^{B-A} \quad (3.59)$$

ou, na variável r ,

$$V(r, a, l) = \frac{e^{-A}}{\alpha} \left\{ \frac{1}{16}(15A'^2 + B'^2 + 8A'B') - \frac{1}{4}(3A'' + B'') + (3A' + B') \left(\frac{\alpha'}{8\alpha} - \frac{\beta'}{8\beta} \right) - \frac{\alpha'\beta'}{8\alpha\beta} - \frac{\beta'}{8\beta}A' - \frac{3}{16} \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 + \frac{\beta''}{4\beta} \right\} + l^2\beta^{-1}e^{B-A} \quad (3.60)$$

O estudo deste potencial fornece informações, no mínimo qualitativas, sobre o comportamento das soluções.

3.3.1.1 Fator de *warp* linear

Para $A(r, k) = B(r, k) = kr$, o potencial é dado por

$$V(u, a, l, k) = \frac{e^{-ku}}{\alpha} \left\{ \frac{3}{2}k^2 + \left(\frac{\beta'}{2\beta} \right)^2 - 2k\frac{\beta'}{\beta} + \frac{1}{4}\frac{\alpha'}{\alpha} \left((4k + \frac{\beta'}{\beta}) \right) + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 - \frac{\beta''}{\beta} \right) \right\} + l^2\beta^{-1} \quad (3.61)$$

Nós esboçamos o gráfico para $l = 0, k = 1$ na figura (12). Devido o poço em torno da origem, é possível termos modos *presos* à brana. De fato, a eq.(3.54) próxima a brana

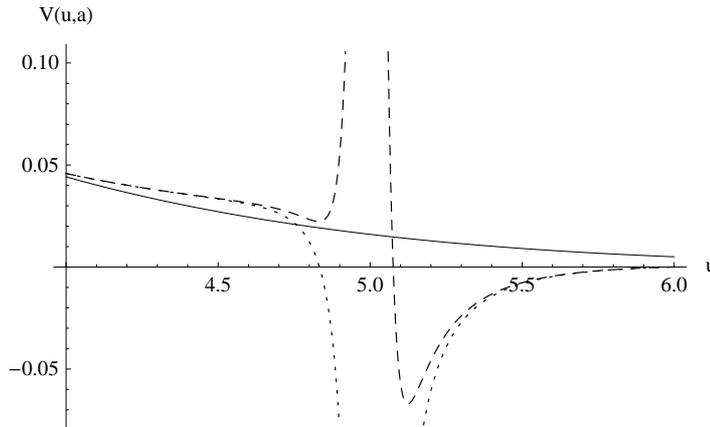


Figura 12: Potencial para o fator de *warp* linear e $l = 0$. Para $a = 1$ (linha fina) o potencial decai exponencialmente. Para $0.1 \leq a < 0$ (linha tracejada) aparecem dois poços de potencial assimétricos próxima a brana mas sobre esta o potencial diverge. Para $a = 0$ um poço de potencial surge na vizinhança da brana (linha pontilhada).

fica

$$\chi''(r) + \left(\frac{(r-5)}{(r-5)^2 + 9a^2} - \frac{5}{2}k \right) \chi'(r) + \left(\frac{(r-5)^2 + 6a^2}{(r-5)^2 + 9a^2} \right) e^{k(r-5)} m^2 \chi(r) = 0. \quad (3.62)$$

A eq. (3.62) depende de três parâmetros (a, k, m), para $l = 0$. No limite $\left(\frac{a}{r-5}\right) \rightarrow 0$, que é válido para o cone singular ($a = 0$) como para pontos distantes ($(r-5) \rightarrow \infty$), a eq. (3.62) fica

$$\chi''(r) + \left(\frac{1}{(r-5)} - \frac{5}{2}k \right) \chi'(r) + e^{k(r-5)} m^2 \chi(r) = 0. \quad (3.63)$$

Note que para o cone singular ($a = 0$), a eq.(3.63) produz uma correção $1/(r-5)$ em relação ao modelo GS [69]. Próximo a brana, temos

$$\chi''(r) + \left(\frac{1}{(r-5)} \right) \chi'(r) + m^2 \chi(r) = 0, \quad (3.64)$$

cujas soluções são

$$\chi(r) = c_1 J_0(m(5-r)) + c_2 N_0(m(5-r)), \quad (3.65)$$

onde $J_0(r), N_0(r)$ são as funções de Bessel de ordem zero de primeiro e segundo tipo. Para $(r-5) \rightarrow \infty$, a eq.(3.63) converge para a equação dos modos massivos do modelo GS [69]. Assim, para $a = 0$, o efeito do cone é alterar a ordem da função de Bessel próximo a origem.

Para $a \neq 0$, a eq.(3.62) longe da brana é nada mais do que a própria equação do modelo GS [69]. Próximo à brana, o fator exponencial pode ser desprezado em primeira ordem levando à equação (3.63).

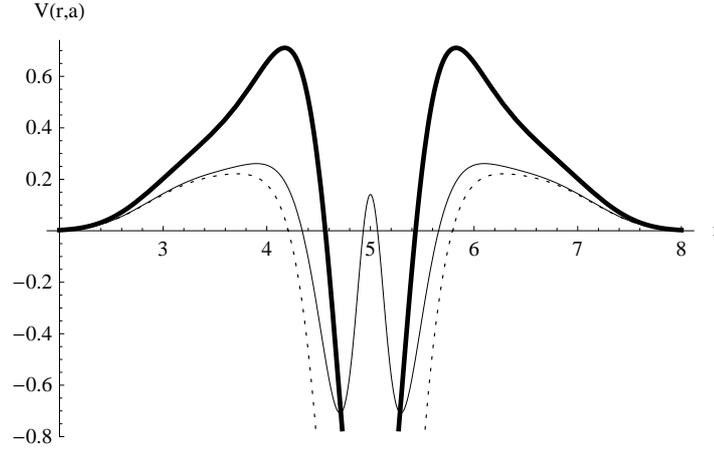


Figura 13: Potencial para o fator de warp não-linear. Para $a = 1$ (linha cheia) existe apenas um poço de potencial entorno da brana. Para $a = 0.15$, há um máximo sobre a brana e dois poços próximo à brana (linha fina). Para $a \rightarrow 0$ há um poço ao redor da brana (dashed line).

3.3.1.2 Fator de *warp* não-linear

O potencial de Schrödinger para o fator de *warp* não-linear está esboçado na fig.(13). A medida que $a \rightarrow 0$, o potencial exibe um poço ($a \geq 0.5, a = 0$) e em outros estados, há um pico $0 < a < 0.5$.

A eq.(3.54) para o fator de warp não-linear torna-se

$$\chi''(r) + \left(\frac{(r-5)}{(r-5)^2 + 9a^2} - \frac{5}{2}A'(r) \right) \chi'(r) + \left(\frac{(r-5)^2 + 6a^2}{(r-5)^2 + 9a^2} \right) e^{A(r)} m^2 \chi(r) = 0. \quad (3.66)$$

Para $\left(\frac{(r-5)}{a} \right) \rightarrow 0$ a equação acima até primeira ordem fica

$$\chi''(r) + \left(\frac{(r-5)}{9a^2} - \frac{5}{2}(r-5) \right) \chi'(r) + \frac{2}{3}(r-5)^2 m^2 \chi(r) = 0. \quad (3.67)$$

A solução desta equação é novamente o produto entre uma exponencial e uma função hipergeométrica confluyente cujo gráfico está esboçado na fig.(14). Para $\left(\frac{a}{r-5} \right) \rightarrow 0$ (caso assintótico ou $a = 0$) a auto-função obedece

$$\chi''(r) + \left(\frac{5(r-5)}{2} \right) \chi'(r) + (r-5)^2 \chi(r) = 0 \quad (3.68)$$

cuja solução é

$$\chi(r) = e^{10r-r^2} \left(H \left(-\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}(r-5) \right) + M \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}(r-5) \right) \right) \quad (3.69)$$

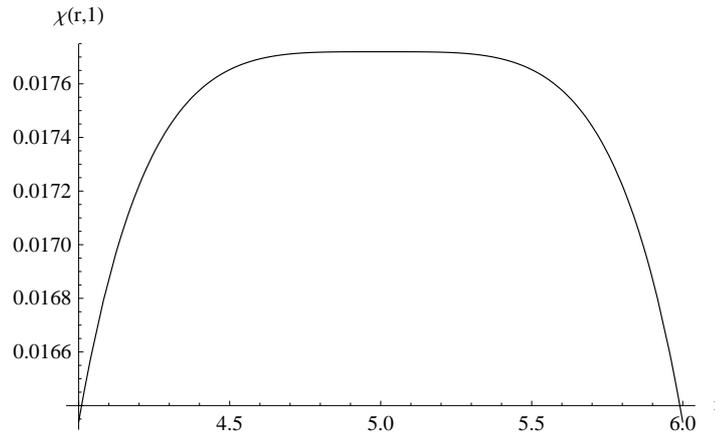


Figura 14: Modo KK para o fator de warp não-linear próximo à brana.

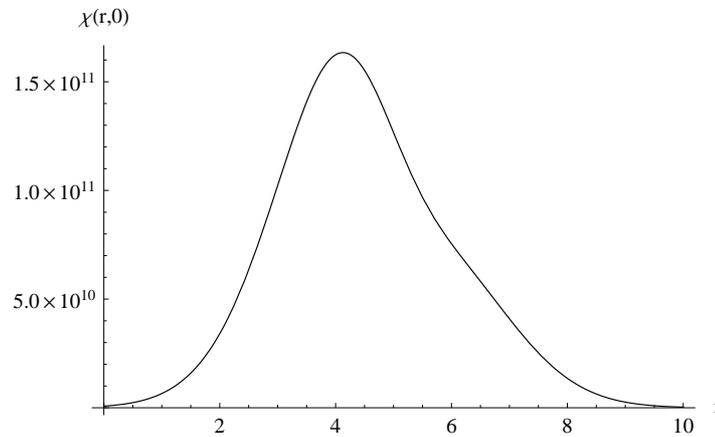


Figura 15: Auto-função para o fator de warp não-linear longe da brana ou para $a = 0$.

Pela fig. (14) é possível ver que o modo é bem definido sobre a brana e assintoticamente.

3.3.2 Modos zero

Vamos agora estudar os modos não-massivos (ou modos zero). Para $m = 0$ and $l = 0$ ⁸ [73], uma constante é solução de (3.54). Como a eq.(3.54) com as condições de contorno (3.55) formam um problema de Sturm-Liouville cuja relação de ortogonalidade é dada por

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3A(r)}{2}} \sqrt{\alpha\beta} * \phi_n(r)\phi_m(r)dr = \delta_{nm}. \quad (3.70)$$

Assim, podemos definir um modo zero normalizado como

$$\chi_0(r, a) = Ae^{-\frac{3A(r)}{2}} \sqrt{\alpha(r, a)\beta(r, a)}, \quad (3.71)$$

⁸chamada *s-wave*

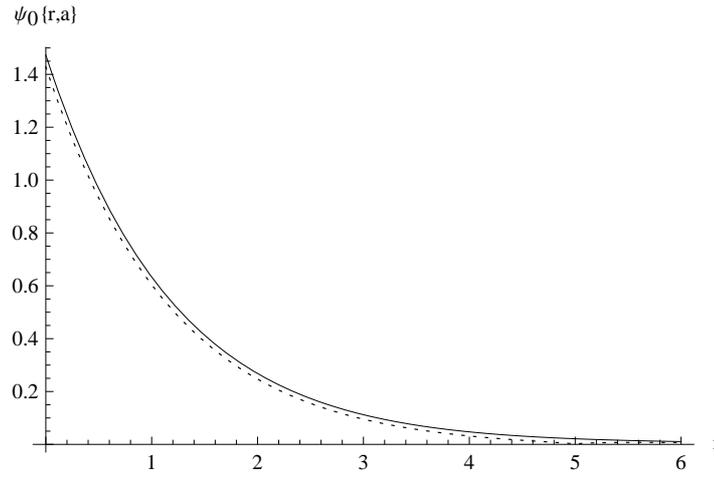


Figura 16: Modo zero para o fator de warp linear.

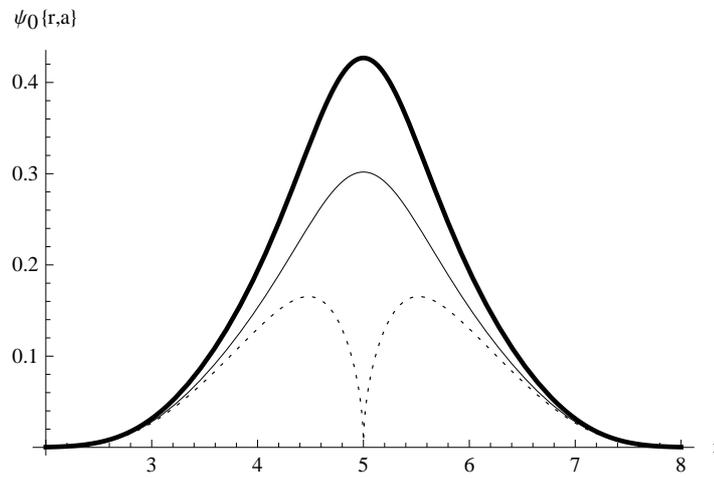


Figura 17: Modo zero para o fator de warp não-linear. $a = 0$ (linha pontilhada).

onde

$$A = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{3A(r)}{2}} \sqrt{\alpha\beta} dr}. \quad (3.72)$$

Através das fig. (16) e (17) podemos ver que a o modo zero é localizado para ambos os fatores de warp. No entanto, note que para o fator de warp não-linear e $a = 0$ o modo zero não possui simetria Z_2 .

4 VARIAÇÕES GEOMETRICAS SOB UM FLUXO DE RICCI

No capítulo anterior, vimos como uma 3-brana com um espaço cônico resolvido transversal tem as suas propriedades e do campo escalar modificadas. O fluxo de resolução não apenas permite definir-se o campo sobre a brana, suaviza a geometria, como também modifica a estrutura do potencial de Schrödinger para os modos massivos.

No entanto, por que escolher este fluxo em particular e não outro? Poderíamos obter uma família de espaços transversos \mathcal{M}_2^a satisfazendo as condições de regularidade na origem e as condições de energia? Haveria um fluxo geométrico que geraria as soluções (modelos) apresentados no capítulo 1?

Neste capítulo, iremos estudar os efeitos no cenário de brans tipo corda sobre a ação de um fluxo de Ricci. Tal fluxo geométrico possui soluções que preservam certas grandezas como energia e entropia do fluxo, chamadas sólitons de Ricci. Esse fluxo foi criado para estudar-se a evolução de uma variedade de modo a evitar-se singularidades. Mostraremos que de fato, para a solução sólito de Hamilton, o cenário satisfaz todas as condições de suavidade necessárias.

4.1 Fluxos de Ricci

Iniciamos introduzindo os principais e básicos conceitos a cerca do fluxo de Ricci.

Seja (M_D, g_λ) uma variedade riemanniana D -dimensional munida da métrica g_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, temos uma família de variedades riemannianas. Para cada λ , a variedade M_D tem uma geometria local distinta. Suponha agora que nós possamos passar continuamente de uma configuração (M, g_λ) para outra (M, g'_λ) através da seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial g_{ab}(\lambda)}{\partial \lambda} = -2R_{ab}(\lambda). \quad (4.1)$$

Este fluxo geométrico é o chamado *fluxo de Ricci* devido ser o tensor de Ricci o responsável pela geração do fluxo. O fluxo de Ricci foi primeiramente proposto por Richard Hamilton a fim de provar a conjectura de Poincaré [114, 110, 115, 117]. O fluxo de Ricci é um fluxo intrínseco da variedade em contraste com um fluxo extrínseco que é gerado pela curvatura extrínseca.

A eq.(4.1) é uma equação do tipo difusão. Com efeito, utilizando coordenadas harmônicas, $\Delta x^i = 0$, nós podemos reescrever a eq.(4.1) como [111]

$$\frac{\partial g_{ab}(\lambda)}{\partial \lambda} \approx \Delta g_{ab}. \quad (4.2)$$

Hamilton propôs tal equação pois sabe-se da teoria da equação do calor, que tal equação tende a remover eventuais singularidades iniciais. Dessa forma, o fluxo de Ricci pode ser entendido como um fluxo análogo do calor sobre a variedade, onde a métrica toma o papel de temperatura e o tensor de Ricci como o de fonte quente. Assim, o fluxo fornece informações sobre a estabilidade das soluções e a formação de singularidades [110, 118, 111].

Além da métrica, o escalar de Ricci também evolui segundo uma equação de difusão

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \Delta R + 2|Rc|^2, \quad (4.3)$$

onde $|Rc|^2 = g^{ac}g^{bd}R_{ab}R_{cd}$.

Note que quanto maior o valor da curvatura e de suas derivadas em um dado ponto da variedade, maior será a taxa do fluxo geométrico.

Uma outra propriedade muito importante do fluxo de Ricci é a sua auto-similaridade. Com efeito, considere a seguinte transformação de escala

$$\tilde{g}(x, \lambda) = \xi g \left(x, \frac{\lambda}{\xi} \right) \quad (4.4)$$

Como tanto $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \lambda} = \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ e $\tilde{R}_{ij} = R_{ij}$ então a equação do fluxo de Ricci fica inalterada através de uma transformação de escala. Contudo, o escalar de Ricci altera-se para $\tilde{R} = \frac{R}{\xi}$. Esse resultado é bastante útil pois permite reescalonar a curvatura em alguns pontos preservando o fluxo de Ricci [111].

4.2 Aplicações físicas

Uma extensão da eq.(4.1), anterior a proposta de Hamilton, também aparece no estudo do grupo de renormalização de modelos sigma bidimensionais em teoria de cordas bosônicas [121]. O espaço interno do modelo sigma é uma variedade riemaninana M munida da métrica g e ação

$$S = -\alpha' \int_M g_{ab} \partial_i X^a \partial_b X^b h^{ij} \sqrt{h} d^2 \sigma \quad (4.5)$$

onde h_{ij} é a métrica da folha-mundo varrida pela corda. Como os campos X^a devem ser quantizados com a métrica g como constante de acoplamento, a equação do grupo de renormalização leva a

$$\frac{\partial g_{ab}(\lambda)}{\partial \lambda} = -\alpha' R_{ab}(\lambda) - \frac{\alpha'^2}{2} R_{acde}(\lambda) R_b^{cde}(\lambda) + \dots, \quad (4.6)$$

onde α' é a escala da corda. Assim, o fluxo de Ricci pode ser visto como um fluxo de renormalização até primeira ordem (loop). T. Oliynyk, V. Suneeta e E. Woolgar estudaram as equações do grupo de renormalização para uma ação contendo também o dílaton ϕ e o campos de Kalb-Ramond B_{ab} [122, 124]

Utilizando o fluxo de Ricci sobre a folha mundo, Tseytlin mostrou uma conexão entre a carga central e a entropia de Perelman [123]. Como veremos adiante, a entropia de Perelman é a própria ação de gravidade com um acoplamento com um campo escalar chamado dílaton [118]. Tseytlin estendeu a técnica desenvolvida por Perelman a fim de mostrar a monotonicidade do fluxo do grupo de renormalização em todas as ordens.

Em relatividade geral, Xianzhe e Ma mostraram que a massa de um corpo isolado (massa ADM) é invariante por um fluxo de Ricci no infinito tipo espaço [126]. Headrick e Wiseman utilizaram o fluxo de Ricci em gravidade euclideana para estudar a estabilidade de um buraco negro [125].

Uma outra generalização do fluxo de Ricci, chamado fluxo de Ricci-Cotton, foi utilizada em gravidade massiva em $(2+1)$ para estudar o decaimento de modos gravitacionais massivos [127]. O fluxo de Ricci-Cotton é descrito pela equação

$$\frac{\partial g_{ab}(\lambda)}{\partial \lambda} = -2 \left(R_{ab}(\lambda) + 2g_{ab} + \frac{1}{\mu} C_{ab} \right), \quad (4.7)$$

onde, C_{ab} é o chamado tensor de Cotton, definido por

$$C_{ab} = \varepsilon_a^{cd} \nabla_c \left(R_{bd} - \frac{1}{4} R g_{bd} \right) \quad (4.8)$$

Recentemente, o fluxo de Ricci também foi aplicado em matéria condensada, no estudo de propriedades críticas do modelo de spin de Heisenberg. Neste modelo, a magnetização de um material ferromagnético é descrito como um campo vetorial no espaço tridimensional. As simetrias deste campo vetorial podem ser codificadas em um espaço interno chamado espaço alvo (*target*) Σ . Esse mecanismo é usualmente chamado de modelo sigma não-linear. Definindo um fluxo de Ricci no espaço interno, Orth *et al* estudaram propriedades de frustração deste modelo [128].

4.3 Sólitos de Ricci

O fluxo de Ricci tem uma propriedade fundamental: ele tende a expandir variedades de curvatura negativa e contrair variedades de curvatura positiva [111].

Com efeito, considere a esfera em n dimensões S^n cuja métrica riemanniana é dada por

$$g_0(S^n) = ds_{S^n}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \prod_{i=1}^{n-1} \sin^2 \theta_i d\theta_n^2 \quad (4.9)$$

Esta métrica leva ao tensor de Ricci

$$R_{ij} = (n-1)g_{ij} \quad (4.10)$$

Assim, S^n é um espaço de Einstein com curvatura escalar positiva dada por $R = n(n-1)$. Supondo que a esfera sofra um fluxo de Ricci, a métrica em cada instante será dada por

$$g(\lambda) = (1 - 2(n-1)\lambda)g_0(S^n) \quad (4.11)$$

Para $\lambda_f = \frac{1}{2(n-1)} \Rightarrow g(\lambda_f) = 0$. Assim, a esfera evolui para uma configuração singular no "tempo" $\lambda_f = \frac{1}{2(n-1)}$. Como o fluxo pode ser definido no intervalo $\lambda \in (\infty, \lambda_f)$, a solução (4.11) é chamada uma solução *anterior* (*ancient*) [111].

Para o espaço hiperbólico \mathcal{H}^n cuja métrica é dada por

$$g_0(H^n) = ds_{H^n}^2 = dr^2 + \sinh^2 r (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \prod_{i=1}^{n-2} \sin^2 \theta_i d\theta_{n-1}^2). \quad (4.12)$$

o tensor de Ricci é dado por

$$R_{ij} = -(n-1)g_{ij} \quad (4.13)$$

Logo, \mathcal{H}^n tem curvatura escalar constante e negativa $R = -n(n-1)$. A evolução segundo um fluxo de Ricci leva a seguinte família de métricas

$$g(\lambda) = (1 + 2(n-1)\lambda)g_0(\mathcal{H}^n) \quad (4.14)$$

Assim, \mathcal{H}^n expande-se indefinidamente. Como o fluxo é definido para $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$, \mathcal{H}^n é chamado de uma solução *imortal* [111].

S^n e \mathcal{H}^n são espaços de Einstein onde,

$$R_{ab} = \zeta g_{ab}, \quad (4.15)$$

$\zeta \in \mathcal{R}$ é uma constante real. Note que o fluxo de Ricci levou esferas em esferas e o espaço hiperbólico em outro espaço hiperbólico. Uma questão relevante seria: Existe alguma solução do fluxo de Ricci que se mantenha invariante através do fluxo e que não sejam nem a esfera nem o espaço hiperbólico?

Sim, e estas soluções são os chamados *sólitons de Ricci*, definidos pela equação

$$R_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g_{ij} = \zeta g_{ij} \quad (4.16)$$

onde Y é um campo vetorial em TM . Note que os sólitons de Ricci estendem as variedades de Einstein pela introdução do segundo termo que controla a expansão ou contração da variedade. Vale ressaltar também que a inclusão do termo a partir de uma derivada de Lie fornece uma invariância por difeomorfismos da solução.

Se $Y = \text{grad}(f)$, então

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \zeta g_{ij}. \quad (4.17)$$

A função f é chamada o potencial do fluxo de Ricci e a solução da eq.(4.17) é chamada um sóliton de Ricci gradiente.

Existem três classes de sóliton gradientes de Ricci. Para $\zeta = 0$ as soluções são ditas estacionárias; para $\zeta < 0$ o sóliton de Ricci é dito expansivo enquanto que para $\zeta > 0$ a solução é dita contraída.

As soluções estacionária e contraída tem a importante propriedade de serem extremos

dos respectivos funcionais energia e entropia de Perelman [110]. O funcional energia de Perelman é definido como [110, 111, 118, 119]

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} \sqrt{g} d^n x \quad (4.18)$$

É importante salientar que o funcional energia de Perelman é a versão euclideana da ação de supergravity para o campo gravitacional e o campo escalar chamado dÍlaton, no limite de baixas energias.

A variação de \mathcal{F} leva a

$$\delta\mathcal{F} = 2 \int_M |Ric(g) + Hess(f)|^2 e^{-f} \sqrt{g} d^n x \geq 0, \quad (4.19)$$

que é obtida pelo sÓlitoN estacionário.

A entropia de Perelman é definida como [110, 111, 118, 119]

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_M (\tau(R + |\nabla f|^2) + f - n) \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} d^n x \quad (4.20)$$

A variação de \mathcal{W} leva a

$$\delta\mathcal{W} = 2 \int_M |Ric(g) + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}|^2 e^{-f} \sqrt{g} d^n x \geq 0, \quad (4.21)$$

e logo, os sÓlitoNs contraÍdoS são extremos da entropia de Perelman.

4.4 SÓlitoN charuto de Hamilton

A solução chamada *sÓlitoN charuto* \mathcal{C}_2 é uma solução estacionária e bidimensional do fluxo de Ricci eq.(4.1), primeiramente proposta por Hamilton [112]. É uma variedade com simetria axial cuja métrica pode ser escrita como

$$ds_\lambda^2 = \frac{1}{(e^{4\lambda} + r^2)} (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (4.22)$$

onde $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ (solução eterna) [110],[112],[117],[111].

Fazendo a mudança de coordenada $r = e^{2\lambda} \sinh \rho$, a métrica (4.22) fica [110],[117]

$$ds_\lambda^2 = d\rho^2 + \tanh^2 \rho d\theta^2. \quad (4.23)$$

A métrica (4.23) foi também estudada por Witten como espaço alvo em modelos sigma da teoria M [113]. Uma vez que $\lim_{r \rightarrow \infty} = 1$, o sóliton charuto (4.23) converge assintoticamente para um cilindro unitário.

Definindo o referencial móvel

$$\hat{\theta}^1 = d\rho, \quad \hat{\theta}^2 = \tanh \rho d\theta, \quad (4.24)$$

as componentes do tensor de Ricci são

$$R_{11} = R_{22} = 2(\operatorname{sech} \rho)^2. \quad (4.25)$$

cujo escalar de curvatura é dado por

$$R = 4\operatorname{sech}^2 \rho = 4 \frac{e^{4\lambda}}{r^2 + e^{4\lambda}} \quad (4.26)$$

Uma vez que as componentes da hessiana de $f(\rho) = -\log \cosh \rho$ são

$$\nabla_1 \nabla_1 f = \nabla_2 \nabla_2 f = -2(\operatorname{sech} \rho)^2, \quad (4.27)$$

então podemos escolher $f(\rho)$ como o potencial do fluxo e é por isso que o sóliton charuto é uma solução estacionária.

Note que o elemento de arco (4.23) é adimensional. Para deixá-lo com unidades de L^2 , vamos redefini-lo como

$$ds_k^2 = d\rho^2 + \frac{1}{k^2} \tanh^2 k\rho d\theta^2 \quad (4.28)$$

onde $[k] = L^{-1}$. Assim, o fluxo geométrico, varia tanto o raio do cilindro no infinito como a taxa com que a curvatura se anula (quanto maior k menor a curvatura).

4.5 O cenário corda-charuto

Uma vez estudada a geometria do sóliton charuto, vamos agora utilizá-la como espaço transversal à uma brana tipo-corda. Nós mostraremos que essa construção levará a um cenário de branas que satisfaz a condição de energia dominante e que é regularizado na origem (sem singularidade). Além disso, o fluxo geométrico reflete a variação de quan-

tidades da brana como suas tensões e altera o comportamento dos modos gravitacionais em torno da brana.

4.5.1 Construção do cenário

Inicialmente, considere um espaço-tempo ambiente ¹ de seis dimensões, \mathcal{M}_6 . Vamos escrevê-lo como o produto não-fatorizável ² (*warped*) entre a brana \mathcal{M}_4 e o espaço transverso à brana, tomado como o sóliton charuto \mathcal{C}_2 , ou seja, $\mathcal{M}_6 = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{C}_2$.

A ação para o campo gravitacional é a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica Λ e fonte:

$$S_g = \int_{\mathcal{M}_6} \left(\frac{1}{2K_6} R - \Lambda + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^6x \quad (4.29)$$

onde, $K_6 = \frac{8\pi}{M_6^4}$ e M_6^4 é a escala de energia do espaço-tempo ambiente. Note que nesta convenção Λ tem dimensão $[\Lambda] = L^{-6} = M^6$. Para as coordenadas do espaço ambiente iremos usar índices latinos iniciais x^a , enquanto que para a brana, utilizaremos os já consagrados índices gregos x^μ .

Vamos supor que a brana tenha uma simetria axial em relação às dimensões extras. Assim, propomos o seguinte *ansatz* para a métrica

$$ds_6^2 = \sigma(\rho, k) \hat{g}_{\mu\nu}(x^\zeta) dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho, k) d\theta^2, \quad (4.30)$$

onde a função de warp é dada por

$$\sigma(\rho, k) = e^{-(k\rho - \tanh k\rho)} \quad (4.31)$$

e a componente angular da métrica é dada por,

$$\gamma(\rho, k) = \frac{1}{k^2} (\tanh k\rho)^2 \sigma(\rho) \quad (4.32)$$

Este *ansatz* satisfaz as condições de regularidade (não divergência do escalar de cur-

¹*Bulk* em inglês

²*warp geometry* em inglês

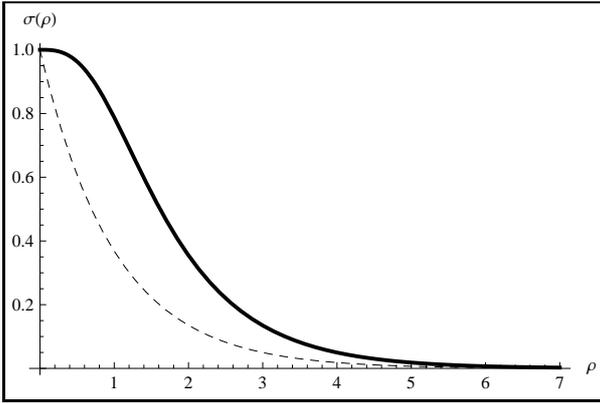


Figura 18: Fator de *warp* para um defeito tipo-corda fina (linha cheia) e para a solução tipo corda-charuto (linha tracejada).

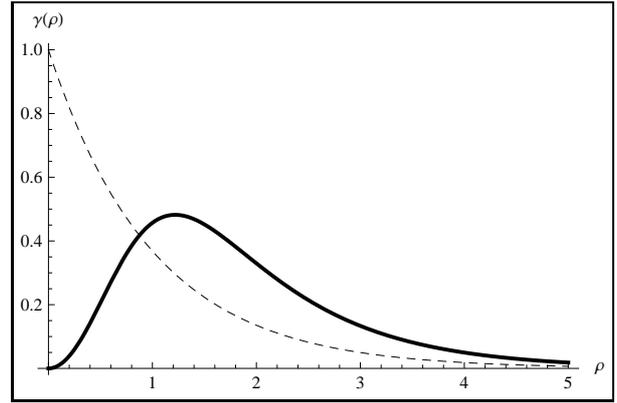


Figura 19: Componente angular da métrica para um defeito tipo-corda fina (linha tracejada) e para a solução tipo corda-charuto (linha cheia).

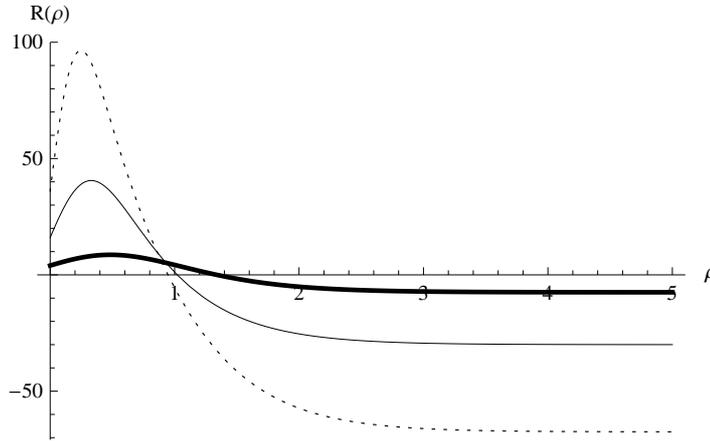


Figura 20: Escalar de Ricci para o espaço ambiente \mathcal{M}_6 . A variedade é livre de singularidades e converge para um espaço AdS_6 assintoticamente.

vatura) na origem [69],[80]:

$$\sigma(0) = 1 \quad , \quad \sigma_{,\rho}(0) = 0 \quad (4.33)$$

$$\gamma(0) = 0 \quad , \quad (\sqrt{\gamma})_{,\rho}(0) = 1 \quad (4.34)$$

De fato, o escalar de curvatura é dado por

$$\begin{aligned} R &= \frac{\hat{R}}{\sigma} - \left[4 \frac{\sigma_{,\rho\rho}}{\sigma} + \left(\frac{\sigma_{,\rho}}{\sigma} \right)^2 + \frac{\gamma_{,\rho\rho}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{,\rho}}{\gamma} \right)^2 + 2 \frac{\sigma_{,\rho}}{\sigma} \frac{\gamma_{,\rho}}{\gamma} \right] \\ &= \frac{\hat{R}}{\sigma} - k^2 \left[\frac{15}{2} \tanh^4 k\rho - 16 \tanh k\rho \operatorname{sech}^2(k\rho) - 4 \operatorname{sech}^2(k\rho) \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por outro lado, como $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \tanh \rho = 1$, este ansatz converge assintoticamente para

a solução tipo-corda exterior [69, 80, 73].

4.5.2 Análise da fonte

Assumindo uma forma axial para o tensor tensão-energia ³, temos

$$T_{\nu}^{\mu} = t_0(r)\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (4.36)$$

$$T_r^r = t_r(r), \quad (4.37)$$

$$T_{\theta}^{\theta} = t_{\theta}(r). \quad (4.38)$$

onde,

$$T_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{ab}} \quad (4.39)$$

As equações de Einstein ficam

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} = -K_6(\Lambda g_{ab} + T_{ab}), \quad (4.40)$$

Substituindo o ansatz eq. (4.30) temos [69]

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma_{,\rho\rho}}{\sigma} + \frac{3}{4} \frac{\sigma_{,\rho}}{\sigma} \frac{\gamma_{,\rho}}{\gamma} - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_{,\rho}}{\gamma} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma_{,\rho\rho}}{\gamma} = -K_6(\Lambda + t_0(\rho)) + \frac{K_4\Lambda_4}{\sigma} \quad (4.41)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{,\rho}}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma_{,\rho}}{\sigma} \frac{\gamma_{,\rho}}{\gamma} = -K_6(\Lambda + t_r(\rho)) + \frac{2K_4\Lambda_4}{\sigma} \quad (4.42)$$

$$2 \frac{\sigma_{,\rho\rho}}{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{,\rho}}{\sigma} \right)^2 = -K_6(\Lambda + t_{\theta}(\rho)) + \frac{2K_4\Lambda_4}{\sigma} \quad (4.43)$$

onde $(, \rho)$ representa a derivada $\frac{d}{d\rho}$ e a equação de Einstein na brana é dada por

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{\hat{R}\hat{g}_{\mu\nu}}{2} = -K_4\Lambda_4\hat{g}_{\mu\nu}, \quad (4.44)$$

com, $K_4 = \frac{8\pi}{M_4^2}$. Contudo, uma vez que $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(\rho) = 0$, vamos nos restringir ao caso onde $\Lambda_4 = 0$.

³ *stress-energy tensor* em inglês.

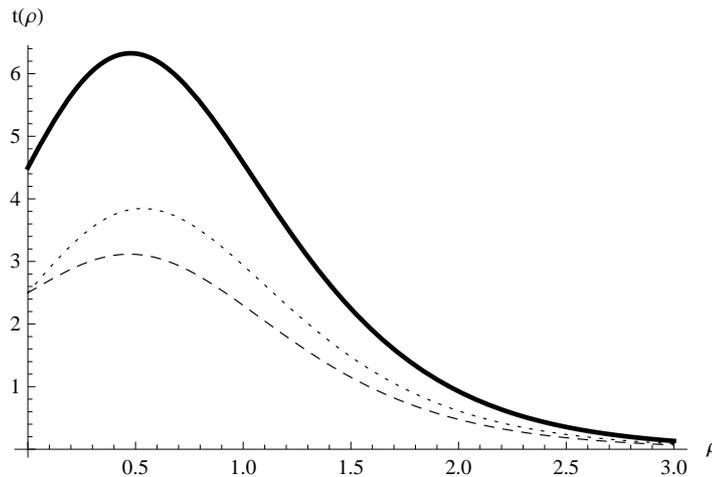


Figura 21: Componentes do tensor de tensão e energia. A densidade de energia (linha cheia) é positiva (condição fraca de energia), maior que as outras componentes (condição forte de energia) e maior que a somas das outras componentes (condição de energia dominante).

A partir das equações de Einstein nós encontramos as componentes do tensor de tensão-energia

$$t_0(\rho, k) = -\frac{k^2}{K_6} \left(\frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 k\rho - 7 \operatorname{sech}^2 k\rho - \frac{13}{2} \operatorname{sech}^2 k\rho \tanh k\rho \right) \quad (4.45)$$

$$t_\rho(\rho, k) = -\frac{k^2}{K_6} \left(\frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 k\rho - 5 \operatorname{sech}^2 k\rho - 2 \operatorname{sech}^2 k\rho \tanh k\rho \right) \quad (4.46)$$

$$t_\theta(\rho, k) = -\frac{k^2}{K_6} \left(\frac{5}{2} \operatorname{sech}^4 k\rho - 5 \operatorname{sech}^2 k\rho - 4 \operatorname{sech}^2 k\rho \tanh k\rho \right). \quad (4.47)$$

Vale a pena dizer que todas as componentes tem suporte compacto em torno da origem onde se situa a brana, o que indica que a brana é gerada por uma fonte localizada. Além disso, as componentes também satisfazem a condição de energia dominante que não é satisfeita nos modelos de brana tipo-corda fina [69]. Essas duas condições nos sugerem que, embora não tenhamos proposto nenhuma lagrangeana como fonte, trate-se de um defeito tipo-corda local como estudado por [80]

Outra propriedade deste cenário é que a constante cosmológica, além de ser negativa com nos modelos tipo-corda, varia com o fluxo do sóliton charuto. De fato, a relação entre Λ e k é dada por [69],[73]:

$$k^2 = -\frac{2K_6}{5} \Lambda \Rightarrow \Lambda = \Lambda(k). \quad (4.48)$$

4.5.3 O problema da hierarquia

A relação entre as escalas de energia do espaço-tempo ambiente (M_6) e da brana (M_4) também se altera com o fluxo. Com efeito,

$$\begin{aligned} M_4^2 &= 2\pi M_6^4 \int_0^\infty \sigma(\rho, k) \sqrt{\gamma(\rho, k)} d\rho \\ &= \frac{2\pi M_6^4}{k} \int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}(k\rho - \tanh k\rho)} \tanh k\rho d\rho. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Como as componentes métricas são funções limitadas,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}(k\rho - \tanh k\rho)} \tanh k\rho d\rho \approx \frac{1}{k}. \quad (4.50)$$

Assim, $M_4^2 \approx 2\pi M_6^4 \frac{1}{k^2}$. Logo, o grande valor da escala de Planck na brana pode ser devido o pequeno valor de k .

4.5.4 Perturbações do campo gravitacional

Vamos agora analisar os efeitos de pequenas perturbações na métrica de fundo deste cenário

$$ds_6^2 = (\sigma(\rho, k)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\rho, k))dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho, k)d\theta^2. \quad (4.51)$$

Para uma perturbação até primeira order com uma fonte dada pelo ansatz (4.36), a perturbação deve satisfazer a equação [69, 80]

$$\square_6 h_{\mu\nu} = \partial_a(\sqrt{-g_6}\eta^{ab}\partial_b h_{\mu\nu}) = 0. \quad (4.52)$$

Vamos agora empregar a chamada decomposição de Kaluza-Klein que nada mais é do que uma separação de variáveis para resolver a eq.(4.52). Assumindo que $h_{\mu\nu}$ é o produto de um tensor invariante de Poincaré, $\hat{h}_{\mu\nu}(x^\zeta)$, que depended apenas das coordenadas da brana, com um campo escalar $\chi(\rho)$ [69, 64, 65, 73, 80]

$$h_{\mu\nu}(x^\zeta, \rho, \theta) = \hat{h}_{\mu\nu}(x^\zeta)\chi(\rho) \sum_{l=0} e^{il\theta}. \quad (4.53)$$

a função χ deve satisfazer a equação

$$\left(\sigma^{\frac{5}{2}}\sqrt{\beta}\chi'(r)\right)' + \sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\beta}\left(m^2 - \frac{l^2}{\beta}\right)\chi(\rho) = 0, \quad (4.54)$$

onde $\beta(\rho, k) = \frac{\tanh^2 k\rho}{k^2}$. Como o sistema tem simetria axial, vamos adotar as seguintes condições de contorno [69]

$$\chi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \chi'(\rho) = 0. \quad (4.55)$$

A eq.(4.54) juntamente com a condição de contorno (4.55) forma um problema de Sturm-Liouville. Assim, dada duas soluções deste problema, $\chi_i(\rho)$ and $\chi_j(\rho)$ a relação de ortogonalidade entre elas é dada por

$$\int_0^\infty \sigma(\rho, a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\beta(\rho, k)}\chi_i^*\chi_j d\rho = \delta_{ij}. \quad (4.56)$$

Podemos reescrever a eq.(4.54) como

$$\chi''(\rho) + \left(\frac{5\sigma'}{2\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right)\chi'(\rho) + \frac{1}{\sigma}\left(m^2 - \frac{l^2}{\beta}\right)\chi(\rho) = 0. \quad (4.57)$$

Note que a equação (4.57) é similar à equação encontrada nos cenários tipo-corda [69, 73].

4.5.5 Modos não-massivos

Para $m = 0$, uma constante é solução da eq. (4.57). Logo, pela condição de ortogonalidade (4.56), podemos definir um modo-zero normalizado como

$$\chi_0(\rho, k) = N\sigma(\rho, k)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\tanh k\rho}{k}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.58)$$

onde

$$N^2 = \int_0^\infty \sigma(\rho, k)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\tanh k\rho}{k}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho. \quad (4.59)$$

Uma vez que tal solução tem um suporte compacto em torno da origem, como pode-se ver a partir do gráfico (22), podemos afirmar que o modo sem massa gravitacional está localizado sobre a brana.

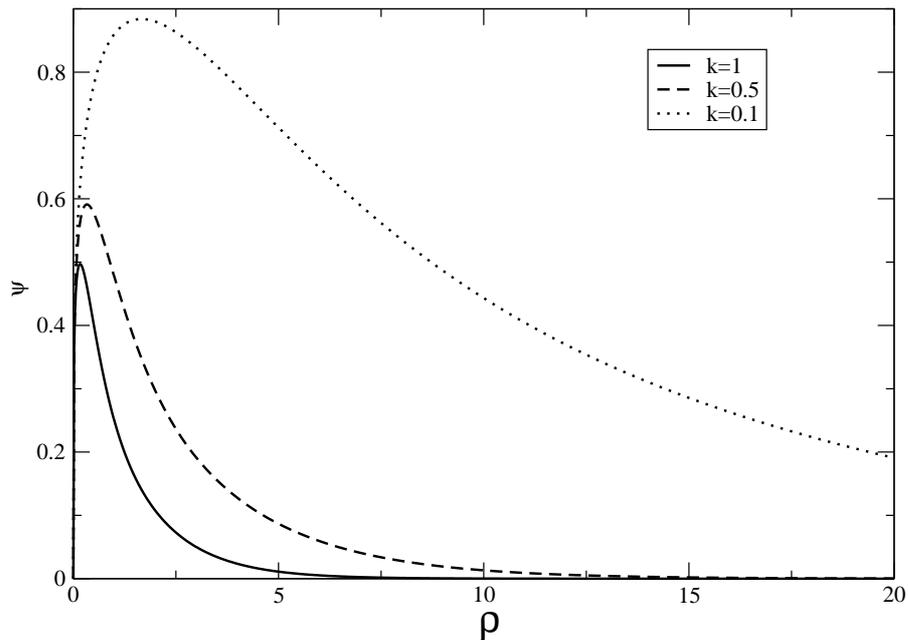


Figura 22: Modo-zero gravitacional. Tal solução tem suporte compacto (localizada) em torno da origem (brana) para qualquer valor de k . Note que quanto maior o valor de k mais localizada é a solução. Além disso, o modo tem um comportamento crescente próximo a brana devido o fator do charuto ($\tanh k\rho$) e exponencialmente decrescente longe da brana, o que reflete a característica tipo-corda.

4.5.6 Modos massivos

Vamos agora estudar os modos massivos da eq. (4.57). Substituindo as expressões das componentes métricas, temos

$$\chi'' + \left[-\frac{5k}{2} + k \operatorname{sech}^2(k\rho) \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{\tanh k\rho} \right) \right] \chi' + e^{(k\rho - \tanh k\rho)} \left(m^2 - \frac{l^2 k^2}{\tanh^2 k\rho} \right) \chi = 0. \quad (4.60)$$

Eq.(4.60) com as condições de contorno (4.55) é um problema complexo para se estudar analiticamente. Assim, vamos nos restringir a estudar apenas propriedades qualitativas nos regimes próximo e longe da brana.

No limite $\rho \rightarrow \infty$ (longe da brana), eq. (4.60) torna-se

$$\chi'' - \frac{5k}{2} \chi' + e^{(k\rho)-1} (m^2 - l^2) \chi = 0. \quad (4.61)$$

A equação (4.61) é similar à equação para os modos massivos encontrada em [69], com a diferença de uma massa reescalada na forma $m \rightarrow e^{\frac{-1}{2}} m$. A solução da eq. (4.61) pode ser escrita em termos da equação de Bessel

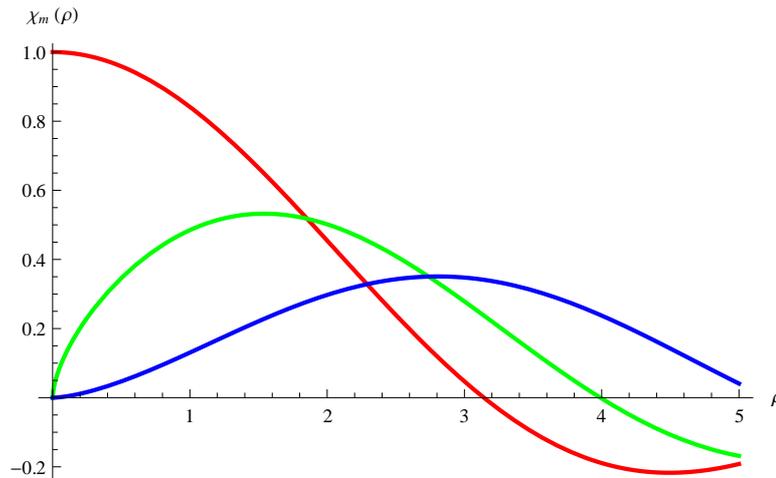


Figura 23: Modos massivos para $m = 1$ próximo à brana para $l = 0, 1, 2$ (respectivamente, vermelho, verde e azul). Quanto maior l menor a amplitude do modo.

$$\chi(\rho) = e^{\frac{5k\rho}{4}} \left[C_1 J_{\frac{5}{2}} \left(\frac{2m'}{k} e^{\frac{k\rho}{2}} \right) + C_2 Y_{\frac{5}{2}} \left(\frac{2m'}{k} e^{\frac{k\rho}{2}} \right) \right]. \quad (4.62)$$

onde $m' = \frac{m}{\sqrt{e}}$. Desse modo, o espectro de Kaluza-Klein é similar ao encontrado no modelo GS [69]

No limite $\rho \rightarrow 0$ (próximo à brana), a menos de termos de segunda ordem em ρ , a eq.(4.60) torna-se

$$\chi'' + \frac{2}{\rho}\chi' + \left(m^2 - \frac{l^2}{\rho^2}\right)\chi = 0. \quad (4.63)$$

cuja solução pode ser escrita em termos das funções esféricas de Bessel,

$$\chi(\rho) = C_1 j_n(m\rho) + C_2 y_n(m\rho) \quad (4.64)$$

onde, $n = \frac{\sqrt{4l^2+1}-1}{2}$. Como y_2 diverge na origem, fazemos $C_2 = 0$. O gráfico do modo massivo próximo a brana está mostrado na fig.(23). Note que para $l = 1$ (gráfico verde) a função está localizada ao redor da brana mas ela não satisfaz a condição de contorno na origem.

4.5.7 Potencial de Schrödinger

Outra forma de analisar os modos massivos, inicialmente introduzida em [12], é transformar a eq.(4.60) numa equação do tipo-Schrödinger.

Iniciamos com uma transformação de variável independente

$$z = z(\rho) = \int^{\rho} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\rho'. \quad (4.65)$$

Agora fazemos a mudança de variável dependente

$$\chi(z) = u(z)\Psi(z). \quad (4.66)$$

tal que

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\frac{1}{2} \left(2\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right). \quad (4.67)$$

Assim, a função Ψ deve satisfazer a equação

$$-\ddot{\Psi}(z) + U(z)\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (4.68)$$

onde

$$U(z) = \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\frac{\dot{\beta}}{\beta} - \frac{3}{16}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{l^2}{\beta}. \quad (4.69)$$

A equação (4.68) é uma equação de Schrödinger independente do tempo. Nós podemos analisar o comportamento dos modos gravitacionais através do potencial de Schrödinger que pode ser escrito como

$$U(\rho, k, l) = \sigma \left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma'}{\sigma} \left(\frac{5\beta'}{8\beta} \right) - \frac{3}{16} \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\beta''}{\beta} \right) + \frac{l^2}{\beta} \quad (4.70)$$

$$= k^2 e^{-(k\rho - \tanh k\rho)} \left(\frac{3}{2} \tanh^2 k\rho - \frac{9}{4} \operatorname{sech}^2 k\rho \tanh k\rho - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sech}^4 k\rho}{\tanh k\rho} - \operatorname{sech}^2 k\rho \right) + (kl)^2 \frac{1}{\tanh^2 k\rho}. \quad (4.71)$$

O gráfico do potencial foi plotado na fig.(24) onde pode-se ver a forma usual tipo *vulcão*, ou seja, com um poço de potencial em torno da origem seguido de uma barreira de potencial que pode ser interpretado como uma barreira que *aprisiona* o modo [12, 64]. Uma vez que o potencial se anula no infinito, a solução da eq.(4.68) é uma onda plana. Assim, os efeitos de massa são sentidos apenas próximo à brana. Os modos gravitacionais *sentem* a presença da curvatura da brana gerando-lhes massa mas como a curvatura se estabiliza assintoticamente, os modos passam a se propagar no espaço-tempo multidimensional como modos livres.

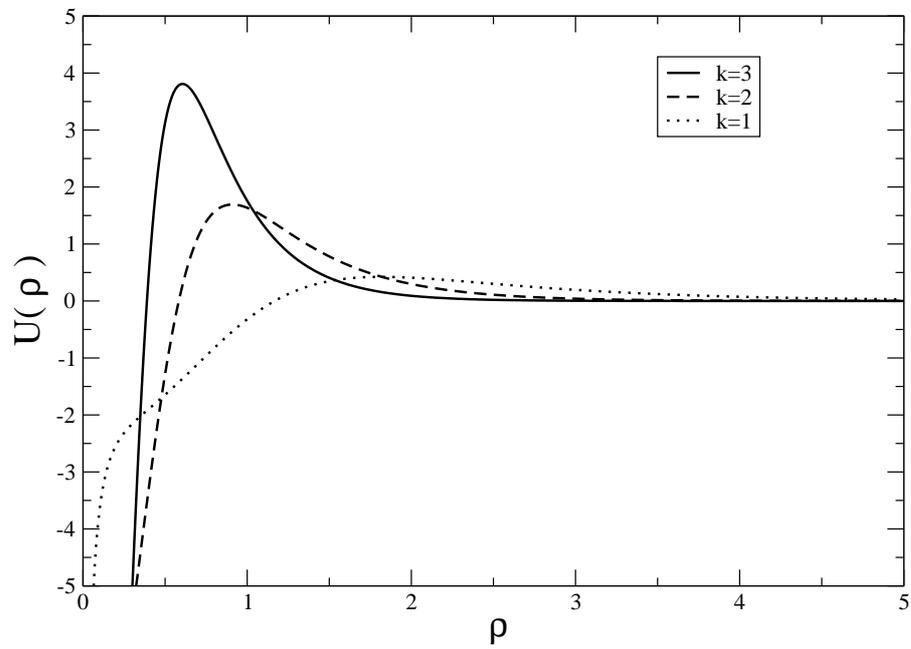


Figura 24: Potencial de Schrödinger para $l = 0$. O gráfico tem a conhecida forma *vulcão* para qualquer k . Além disso, quanto maior o valor de k maior o valor da barreira.

5 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ E GEOMETRIA DE FINSLER

Um dos princípios básicos da física moderna é o conceito de simetria de Lorentz. Ele afirma que não existem observadores absolutos (princípio da relatividade) e que a velocidade da luz é uma constante universal. Tal princípio originou-se da análise das equações de Maxwell e da não-observação de um movimento relativo dos corpos em relação ao éter, um suposto fluido responsável pela propagação das ondas eletromagnéticas.

A hipótese da não-existência do éter, ou equivalentemente, da simetria de Lorentz, levou às duas grandes teorias de altas energias do século XX, a teoria quântica de campos e a relatividade geral. A primeira nos forneceu o chamado modelo padrão de partículas e campos¹ que nos deu uma descrição do universo em uma escala microscópica em termos de partículas elementares. A relatividade geral, por sua vez, torna possível uma descrição cosmológica do universo.

Contudo, nos últimos vinte anos, tal descrição não tem sido suficiente para explicar novas descobertas. A pequena mas não nula massa dos neutrinos e a oscilação entre os diferentes tipos de neutrinos, que não eram previstos pelo modelo padrão de partículas, fez a comunidade científica repensar sobre possíveis extensões do modelo padrão [140, 141, 142]. No âmbito astrofísico, a descoberta da chamada matéria escura², responsável pela velocidade orbital das galáxias [143] e que interage fracamente com a matéria bariônica também estimulou modificações no modelo padrão [144, 145]. No cenário cosmológico, a descoberta da expansão acelerada do universo também trouxe a tona a origem física desta chamada energia escura³[146].

No final da década de 1980 e início da década de 1990, Kostelecky e Samuel mostraram

¹*Standard model* em inglês.

²*Dark matter* em inglês.

³*Dark energy* em inglês.

que a teoria de cordas permite a quebra espontânea da simetria de Lorentz, cujos efeitos são, por exemplo, a existência de termos massivos para o fóton e para o gráviton [147, 148, 149]. Em 1991, Carroll, Field e Jackiew propuseram uma modificação na eletrodinâmica de Maxwell em $(3 + 1)$ com um termo tipo Chern-Simons. O resultado é um vetor constante no espaço-tempo plano [150]. Em 1995, Kostelecky e Potting mostraram que a teoria de supercordas poderia levar à violação da simetria CPT ⁴[151, 152]. Em 1997, Colladay e Kostelecky construíram uma extensão do modelo padrão contendo quebra de simetria CPT [153]. Um ano depois, estes autores propuseram uma extensão com quebra de simetria de Lorentz [154, 155]. Tal modelo é hoje conhecido como *extensão do modelo padrão*(SME)⁵. Greenberg, em 2002, mostrou que a violação da simetria CPT leva a uma violação da simetria de Lorentz [156].

O modelo SME é de fato, uma teoria de campos efetiva com coeficientes que violam a simetria de Lorentz. Embora tal quebra de simetria possa vir de várias teorias como a gravitação quântica em laços ou de teoria de supercordas, Kostelecky *et al* argumentaram que efeitos de tal quebra de simetria poderiam estar presentes em escalas de energia mais baixas e serem descritas por teorias efetivas.

Kostelecky e colaboradores aplicaram o SME a diversos problemas físicos, como na diferença entre os espectros do átomo de hidrogênio e anti-hidrogênio [157], na oscilação entre mésons neutros [158], em correções radiativas em eletrodinâmica [159], numa quebra de Lorentz devido a uma estrutura não-comutativa do espaço-tempo [160], etc.

Em 2002, Kostelecky e Mewes mostraram que um dos fenômenos possíveis para uma eletrodinâmica com violação de Lorentz é birefringência do vácuo, ou seja, dois raios de luz com diferentes frequências vão se dispersar mesmo no vácuo [161]. Kostelecky *et al* também mostram que esta teoria é renormalizável a um laço [162]. Tal propriedade de finitude da quebra de Lorentz também é compartilhada por outros campos, como mostrado por Visser [163]. Outro aspecto desta eletrodinâmica é que, como mostrado por Bailey e Kostelecky, uma carga pontual em repouso terá um potencial vetor não-nulo [164]. Kostelecky e Mewes analisaram ainda o efeito da quebra de Lorentz sobre pequenas flutuações da radiação cósmica de fundo [165]. Tal análise foi posteriormente estendida para n dimensões [166]

Kostelecky e Mewes também aplicaram o SME para explicar e prever novos fenômenos acerca dos neutrinos [167, 168]. Eles mostraram, por exemplo, não ser necessário introduzir-

⁴*Charge-Parity-Time reversal* em inglês. É uma simetria discreta que troca a carga e o sinal das posições e do tempo das partículas.

⁵*Standard-Model Extension* em inglês.

se o chamado *neutrino estéril*⁶ [169, 170].

De forma independente, Amelino-Camelia [171] em 2001 e Magueijo-Smolín [172] em 2002, criaram a chamada *relatividade duplamente especial (ou deformada)* (DSR)⁷. Nesta nova relatividade, dados dois observadores, não somente a velocidade da luz é a mesma para os dois como também a energia. Os autores buscaram essa modificação da simetria de Lorentz a fim de manter a escala de Planck de energia (ou comprimento) invariante. Tal invariância é importante na quantização de gravidade.

Em uma outra abordagem, Cohen e Glashow procuraram que subgrupo G do grupo de Lorentz teria as mínimas simetrias para representar a natureza. Baseados nos trabalhos de Coleman e Glashow [174, 173], supondo que haja conservação de energia e momentum, Cohen e Glashow chegaram a o subgrupo $SIM(2)$. A esta teoria os autores deram o nome de *relatividade muito especial* (VSR)⁸[175].

Há ainda um outro argumento heurístico que impulsiona o estudo de teorias com violação da simetria de Lorentz. Como mostrado na figura (5), o grupo de Galileu, que diferencia espaço e tempo, descreve muito bem o átomo de hidrogênio $\approx 10eV$. Já para a descrição de fenômenos eletrofracos, na escala de energia de $\approx 1TeV$, necessita-se utilizar-se do grupo de Lorentz (covariância espaço-temporal). Dessa forma, o grupo de Galileu não sobreviveu à uma escala de energia 10^{15} vezes maior. A escala de Planck, onde os efeitos de uma gravitação quântica são esperados, é de aproximadamente $M_p \approx 10^{16}TeV$. A simetria de Lorentz sobreviveria em níveis de energia tão altos? Como vimos, muitos pesquisadores acreditam que não.

De uma forma geral, essas são as três principais abordagens em quebra de Lorentz: a SME (e suas extensões supersimétricas, não-comutativas), com origem em teoria quântica de campos, e a DSR e VSR com origem em relatividade restrita. As três foram construídas sobre espaço-tempos planos. O próximo passo do desenvolvimento destas teorias é óbvio: incorporar a gravidade em uma grande teoria com quebra de Lorentz em espaços-curvedos. O interessante é que, apesar destas teorias partirem de pontos diferentes, elas concordarão que será preciso estender a estrutura Lorentziana (métrica Lorentziana com conexão simétrica e compatível com a métrica) para uma estrutura localmente anisotrópica, a chamada geometria de Finsler.

⁶*Sterile neutrino* em inglês. Trata-se de um hipotético tipo de neutrino que não interage via interação fraca devido sua quiralidade direita.

⁷*Doubly Special Relativity* em inglês.

⁸*Very Special Relativity* em inglês.

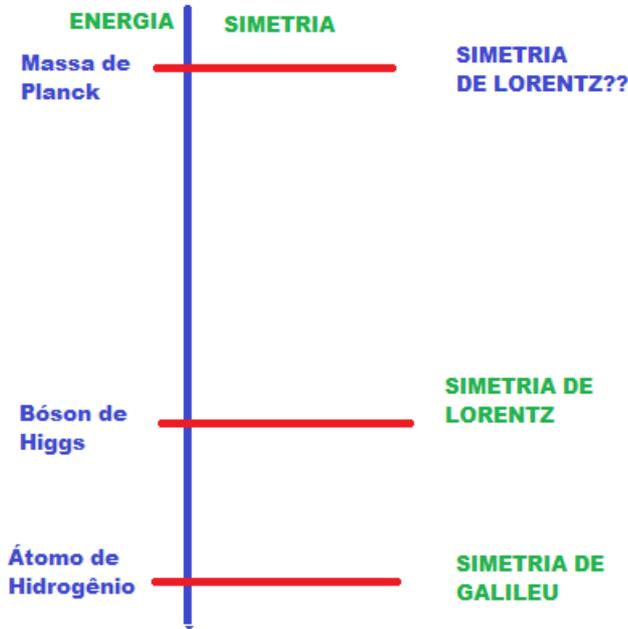


Figura 25: Relação entre as escalas de energia e as simetrias. Será que a simetria de Lorentz será preservada por mais 16 ordens de grandeza?

5.1 Violação de simetria de Lorentz em espaços planos

No modelo SMS, a quebra da simetria de Lorentz é implementada introduzindo-se tensores constantes que não obedecem a simetria de Lorentz na lagrangiana do sistema. Por exemplo, introduzindo-se um tensor $a \in M_4^* \otimes M_4^*$ tal que

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

onde $a_{\mu\nu}$ são as componentes de a no sistema $\{x^\alpha\}$ e $a'_{\mu\nu}$ são as componentes no sistema $\{x'^\beta\}$, uma lagrangiana para um campo escalar real $\Phi : M_4 \rightarrow \mathbb{R}$ com violação de Lorentz (VL) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_\Phi = a^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi. \quad (5.2)$$

Para um espinor de Dirac, tomando outro tensor de VL, $c_{\alpha\beta}$ satisfazendo a eq.(5.1), temos

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{i}{2} c_{\alpha\beta} \bar{\psi} \gamma^\alpha \partial^\beta \psi \quad (5.3)$$

Para o campo vetorial de calibre A_μ , temos

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}k_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} \quad (5.4)$$

Como o termo acima é quadrático ele é considerado como um termo de quebra do setor de calibre CPT-par [154]. Para o setor CPT-ímpar, os autores introduziram o seguinte termo anti-simétrico [154]

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\alpha A^\beta F^{\gamma\delta}. \quad (5.5)$$

Note que a lagrangiana (5.5) é uma espécie de extensão da lagrangiana de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_A = K_1 \wedge A_1 \wedge F_2 \quad (5.6)$$

para quatro dimensões. Há muitos outros tipos de acoplamentos possíveis entre os campos do modelo padrão (Φ, ϕ, A, \dots) com tensores de VL como apresentado em [154]. Nos limitaremos somente a estes de modo a somente esboçar o modelo.

A origem de tais tensores que violam Lorentz pode estar em uma quebra espontânea de simetria [154]. De fato, supondo a existência de um campo sofrendo uma quebra espontânea de simetria, o campo escolherá um estado de vácuo gerando espontaneamente a quebra de Lorentz [154]. Tal é o que acontece, por exemplo, com o fóton quando este gera um termo de massa através de uma quebra de simetria. Como tal fenômeno ocorre próximo ao valor de vácuo, espera-se que os fenômenos de quebra de Lorentz aconteçam em uma teoria de gravidade quântica.

A quebra da simetria de Lorentz no regime de gravidade quântica também motivou a relatividade especial Dupla (ou deformada). De fato, os fenômenos quânticos e gravitacionais são ambos relevantes na escala de Planck E_P . Mas essa escala é medida em relação a qual observador? Haveria então um observador absoluto?

Magueijo e Smolin [172] encontraram uma relatividade especial que preserva a escala de Planck E_P . Eles modificaram os operadores tipo *Boost*, introduzindo uma espécie de dilatação, na forma

$$K^i = L_0^i + l_P P^i D, \quad (5.7)$$

onde,

$$D = P^a \frac{\partial}{\partial p^a} \quad (5.8)$$

é o operador de Dilatação. Note que o novo operador de *Boost* contém um termo de correção não-linear.

Tal operador satisfaz a mesma álgebra de Lorentz

$$[J^i, K^j] = \epsilon^{ijl} K_l, \quad (5.9)$$

$$[K^i, K^j] = \epsilon^{ijl} J_l, \quad (5.10)$$

$$[J^i, J^j] = \epsilon^{ijl} J_l, \quad (5.11)$$

O invariante sobre esta transformação é

$$m_0^2 c^4 = \frac{1}{(1 - l_P P_0)^2} \eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu. \quad (5.12)$$

Assim, a relatividade especial deformada leva a uma relação de dispersão não-linear [172].

Cohen e Kaplan, por sua vez, encontraram um subgrupo $G' = Sim(2) \supseteq SO(3, 1)$ do grupo de Lorentz que preserva tanto o momentum como a energia [175]. Os geradores deste subgrupo são T_1, T_2, J_z, K_z , onde

$$T_1 = K_x + J_y \quad (5.13)$$

e

$$T_2 = K_y - J_x. \quad (5.14)$$

$G' = Sim(2)$ preserva um vetor tipo-nulo n_μ que pode ser identificado como a velocidade de um éter [210].

5.2 Modelos com quebra de Lorentz em espaços curvos

Em 2001, Jacobson e Mattingly propuseram um modelo de relatividade geral contendo um campo vetorial tipo-tempo $u \in TM$ que se transforma numa representação não-linear do grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ [176]. Esse vetor representa um referencial privilegiado, uma espécie de vetor velocidade do éter [176]. Os autores mostraram que tal vetor dinâmico seria uma fonte para a energia escura e levaria a teorias de velocidade da luz variável [176].

Em 2002, Kostelecky *et al* encontraram uma interessante relação entre teorias com acoplamento variando com o ponto do espaço-tempo e violação de Lorentz [177].

Em 2003, Arkani-Hamed *et al* propuseram uma quebra de Lorentz oriunda de uma condensação (quebra espontânea de simetria) de um campo escalar com mesma equação de estado de uma constante cosmológica [178]. Tal modificação leva então a uma modificação da relatividade geral em larga escala (infravermelho) [178].

5.2.1 Modelos de Einstein-Cartan

Em 2004, Kostelecky propôs uma extensão do modelo SMS para incluir a gravitação, ou seja, uma quebra de Lorentz em espaços curvos [179].

A relatividade geral assume que o espaço-tempo (M, g) tem torção nula, pois dados $X, Y \in TM$, o transporte paralelo de X em relação a Y , denotado por $\nabla_Y X$, é o mesmo que transportar Y em relação a X , $\nabla_X Y$. Assim, o tensor definido por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (5.15)$$

é nulo.

O anulamento da torção está de acordo com o princípio da equivalência pois localmente não existe uma direção privilegiada. Kostelecky propôs então que, uma gravitação com torção, nos moldes de uma geometria de Riemann-Cartan, levaria à uma gravitação com quebra de Lorentz [179].

Utilizando o formalismo de primeira ordem (referencial móvel ou tetradas)⁹, tomanos uma base ortonormal $\{e_b\} \subset TM$ e sua base dual de 1-formas $\{\theta^a\} \subset (TM)^*$. Podemos

⁹Também chamado *vielbein*.

escrever $e_b = e_b^\mu e_\mu$ e $\theta^a = e_\mu^a dx^\mu$. Fixado o ponto $p \in M$ e tomando outra base $\{f_c\} \subset TM$, podemos passar de $\{e_b\}$ para $\{f_c\}$ através de uma transformação de Lorentz $f_c = \Lambda_c^b e_b$. Assim, as componentes do referencial móvel e_μ^a tem além do grupo geral de coordenadas, o grupo "interno" de Lorentz. É importante ressaltar a analogia entre a *vielbein* e_μ^a com o potencial vetor A_μ^a de Yang-Mills.

Podemos ainda definir uma 1-forma de conexão $\omega_b^a \in (TM)^*$, onde $\omega_b^a = \Gamma_{bc}^a \theta^c$. A métrica g pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (5.16)$$

O referencial móvel θ^a e a conexão ω_b^a dão origem à 2-forma de torção

$$T^a = D_\omega \theta^a \quad (5.17)$$

e à 2-forma de curvatura

$$R_b^a = D_\omega \omega_b^a, \quad (5.18)$$

onde $D_\omega \theta^a = d\theta^a + \omega_c^a \wedge \theta^c$ e $D_\omega \omega_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c$ são as derivadas exteriores covariantes com conexão ω . As equações (5.17,5.18) são conhecidas como *equações de Cartan*.

Kostelecky propôs alguns termos de quebra de Lorentz a serem introduzidos em uma lagrangiana de matéria e gravidade, construídos a partir da torção e curvatura, como [179]

$$\mathcal{L}_{LV} = e \left(k_T^{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta\gamma} + k_R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \right). \quad (5.19)$$

Ele propôs ainda que efeitos de torção poderiam ser observados em experimentos com espinores, uma vez que é possível o acoplamento [179, 180]

$$\mathcal{L} = \xi T^\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (5.20)$$

Em resumo, para esta proposta, a inclusão da quebra de simetria de Lorentz no setor gravitacional se dá permitindo que a conexão ω_b^a , e não somente a métrica g_{ab} , seja um grau de liberdade do sistema, uma variável que juntamente com a métrica, irá determinar a dinâmica do campo gravitacional.

5.2.2 Modelo *bumblebee*

Neste mesmo artigo [179], Kostelecky forneceu uma forma de implementar a quebra de Lorentz mantendo a invariância por difeomorfismos e uma conexão com torção nula, através do chamado modelo de *bumblebee*.

Partindo da analogia entre a *vielbein* e o potencial vetor de Yang-Mills, podemos dizer que a 2-forma de torção é um análogo do tensor intensidade de campo para a tetrada. Já a 2-forma de curvatura é o análogo do tensor intensidade de campo para a conexão.

Esta conexão foi utilizada por Kostelecky para introduzir-se a quebra de Lorentz em espaços-curvedos. Ele tomou um vetor tipo-tempo $b \in TM, b = b^\mu e_\mu$, donde $b_\mu = e_\mu^a b_a$. Assim, b é constante em relação a transformações de Lorentz em $T_P M$, mas muda covariantemente com relação a mudanças de coordenadas [179]. Dessa forma, a quebra de Lorentz pode ser vista como uma espécie de "quebra de simetria de calibre (interna)" do referencial móvel [179].

A quebra de simetria no modelo *bumblebee* é realizada através do acoplamento dos tensores geométricos invariantes de Lorentz com campos que violam Lorentz. A lagrangiana padrão é dada por

$$S_{LV} = K \int_M (uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}) \sqrt{-g} d^4x \quad (5.21)$$

Introduzindo o chamado *campo de bumblebee* B^μ , cujo tensor intensidade de campo é dado por $B_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} B_{\nu]}$ a ação do modelo *bumblebee* é dada por [179]

$$S_B = \int \left(\xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (B^\mu B_\mu - b^2)^2 \right) ed^4x. \quad (5.22)$$

Supondo que o espaço-tempo M seja assintoticamente plano, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0, \quad (5.23)$$

e que o campo de *bumblebee* tenda a um valor de vácuo que minimiza o potencial, temos $\lim_{r \rightarrow \infty} B^\alpha = b^\alpha$, onde $b^\alpha b_\alpha = b^2$. Logo, é possível recuperar o mecanismo SME de quebra de Lorentz em espaços-planos a partir de uma quebra espontânea da simetria de Lorentz [179].

O campo *bumblebee* é uma espécie de campo de "Higgs vetorial". Assim como o

campo de Higgs quebra a simetria do vácuo gerando massa, o campo bumblebee quebra a simetria de Lorentz gerando uma direção privilegiada, como um éter.

Fazendo $t^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, para se compatibilizar as ações (5.21) e (5.22) devemos fazer

$$s^{\mu\nu} = \xi \left(B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} B^2 g^{\mu\nu} \right) \quad (5.24)$$

$$u = \xi B^\mu B_\mu. \quad (5.25)$$

Em um outro trabalho, Kostelecky ainda propôs uma outra modificação da relatividade geral, para se estudar ondas gravitacionais [181]. Nesta formulação, a massa nula dos grávitons seria o resultado de uma quebra espontânea de simetria de Lorentz [181]. Bluhm *et al* também mostraram que este modelo surge naturalmente de modos Nambu-Goldstone [182].

Outras modificações do modelo bumblebee foram a modificação da interação matéria-gravidade [183, 184], a quebra da invariância por difeomorfismos com a consequente geração de grávitons massivos [185], a extensão completa de uma gravidade surgindo de uma quebra espontânea da simetria de Lorentz [186] para gravidade no limite não perturbativo, a geração da quebra a partir de um campo tensorial anti-simétrico [187].

5.3 Modelo de Kostelecky para uma geometria de Finsler

Apesar do sucesso do modelo bumblebee, Kostelecky notou que o campo bumblebee não é gerado pela própria geometria [179]. Além disso, a métrica e as outras grandezas geométricas, como o tensor de curvatura e de Ricci, continuam sendo localmente invariantes de Lorentz. De fato, a quebra não se dá na definição destas quantidades mas sim, no acoplamento destas com o campo de fundo (bumblebee).

Uma vez que a quebra de Lorentz leva a uma relação de dispersão não-quadrática, que nada mais é do que o quadrado da norma do 4-momentum (p^μ),

$$p_\mu p^\mu = -E^2 + ||\vec{p}\|^2 = -m^2, \quad (5.26)$$

Kostelecky propôs que uma geometria que representasse uma completa quebra de Lorentz deveria ser tal que, o comprimento de um vetor do espaço-tempo não dependesse somente

de uma forma quadrática simétrica g [188, 189]. Dito de outra forma, o comprimento de um vetor, não dependeria somente do quadrado de suas componentes. Essa é a essência da chamada *geometria de Finsler* [191].

Considere uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ do espaço-tempo cujo comprimento desta curva (intervalo) seja dado por [191]

$$s = \int_0^1 F(x, \dot{x}) dt, \quad (5.27)$$

onde, $x \in M, \dot{x} \in T_x M$. Podemos pensar este comprimento s como o tempo próprio de um observador com velocidade \dot{x} . A expressão (5.27) nos diz então que o tempo próprio dependerá da direção do observador no espaço-tempo M .

A partir de (5.27) o intervalo infinitesimal é dado por

$$ds = F(x, \dot{x}) dt. \quad (5.28)$$

Para manter a invariância do comprimento de curva por reparametrizações, devemos tomar

$$F(x, \lambda \dot{x}) = \lambda F(x, \dot{x}) \quad (5.29)$$

Uma função satisfazendo estas condições é chamada *função de Finsler*.

No caso riemanniano,

$$F(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (5.30)$$

logo, a relação entre a função de Finsler e a métrica riemanniana é dada por

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}. \quad (5.31)$$

Assim como no caso riemanniano, podemos definir uma métrica (forma bilinear simétrica) sem a restrição quadrática riemanniana por

$$g_{\mu\nu}^F = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^\mu \partial y^\nu}, \quad (5.32)$$

chamada métrica de Finsler, onde $y \in T_x M$ [191]. Como a função de Finsler $F(x, y)$ depende tanto da posição x quanto da direção y no espaço-tempo, a métrica de Finsler

(5.32) também irá variar com a direção. Assim, a quebra de Lorentz é implementada no tensor mais básico da geometria levando a violação de simetria a ser um efeito puramente geométrico.

Logo, Kostelecky reconheceu a geometria de Finsler como a melhor formulação para uma gravitação com quebra de Lorentz. O problema seguinte é: qual deve ser então a função de Finsler que descreva a nova geometria do espaço-tempo?

Como mostrado por Kostelecky e Russel, uma lagrangiana de uma partícula (férmion quiral) com relação de dispersão não-quadrática e com quebra de simetria de Lorentz e do setor CPT-ímpar é dada por [189]

$$L_{ab} = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu} - a_\mu(x)y^\mu \pm \sqrt{(b_\mu(x)y^\mu)^2 - b_\mu b^\nu y_\mu y^\nu}, \quad (5.33)$$

onde y é a quadri-velocidade da partícula de massa m . Como a ação desta partícula é

$$S = \int L_{ab} dt, \quad (5.34)$$

Kostelecky propôs identificar a lagrangiana (5.33) com a função de Finsler, ou seja,

$$F(x, y) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu} + a_\mu(x)y^\mu + \sqrt{(b_\mu(x)y^\mu)^2 - b_\mu b^\nu y_\mu y^\nu}. \quad (5.35)$$

Dessa forma, assim como o campo gravitacional é um efeito da curvatura riemaniana do espaço-tempo, a quebra de Lorentz é o resultado da estrutura anisotrópica do próprio espaço-tempo.

Podemos reescrever a função de Finsler acima como

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) + \sigma(x, y), \quad (5.36)$$

onde,

$$\alpha(x, y) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu}, \quad (5.37)$$

enquanto

$$\beta(x, y) = a_\mu(x)y^\mu, \quad (5.38)$$

e

$$\sigma(x, y) = \sqrt{s_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu}, \quad (5.39)$$

onde,

$$s_{\mu\nu} = b^2(x)g_{\mu\nu}(x) - b_\mu(x)b_\nu(x) \quad (5.40)$$

O primeiro termo é a parcela riemanniana, α , enquanto β, γ são responsáveis pela anisotropia do espaço-tempo [191, 190]. Para $s_{\mu\nu} = 0$, temos a conhecida geometria de Randers [192, 191], enquanto para $a = 0$, temos uma geometria introduzida por Kostelecky e denominada *bipartite* [190].

O termo β é tal que $\beta(x, -y) = -\beta(x, y)$ e logo é um termo de quebra CPT-ímpar. Já o termo σ pertence ao setor CPT-par uma vez que $\sigma(x, -y) = \sigma(x, y)$ [190].

Vale a pena também comentar que o tensor $s_{\mu\nu}$ é bastante semelhante ao tensor de quebra de Lorentz do modelo bumblebee mostrado na equação (5.24).

Importante também salientar que a função de Finsler (5.35) deve ter dimensão nula. Como estamos introduzindo dois novos vetores, a_μ, b_μ , vamos supor que, assim como o potencial vetor A_μ , esse dois vetores de quebra devem ter dimensão

$$[a_\mu] = [b_\mu] = M. \quad (5.41)$$

Assim, para mantermos F adimensional, devemos introduzir uma constante em (5.35). Em ([195]), no estudo de relações de dispersão para um partícula pontual, os autores introduziram o inverso da própria massa da partícula como tal constante. Uma vez que estamos tratando o surgimento da anisotropia como uma característica peculiar da geometria do espaço-tempo para curtíssimas distâncias, tomaremos como tal constante fundamental o comprimento de Planck, ou seja,

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + l_P(\beta(x, y) + \sigma(x, y)). \quad (5.42)$$

5.3.1 1ª forma fundamental e métrica de Sasaki

Uma questão fundamental nesta nova geometria é a de sabermos como medir distâncias no espaço tangente à M , $T_x M$? Equivalentemente, como medir a norma de um vetor em $T_x M$?

Como agora a geometria depende tanto da posição $x \in M$ quanto da direção $y \in T_x M$, a geometria é naturalmente descrita no fibrado tangente $TM = \cup_x T_x M = (x, y)$. Em verdade, devemos tomar a variedade $TM \setminus 0$, a fim de evitarmos o caso $y = 0$. Podemos então visualizar TM como uma variedade parametrizada, visto que $\forall y \in TM \exists T_x M$, dada pela projeção $\pi : TM \rightarrow M$. Assim, podemos definir a 1ª forma fundamental em $\pi^* T^* M \otimes \pi^* T^* M$ como [191]

$$g = g_{\alpha\beta}^F(x, y) dx^\alpha \otimes dx^\beta. \quad (5.43)$$

No entanto, uma vez que a descrição geométrica (e logo física) local desta geometria é feita em $TM \setminus 0$, devemos estudar o fibrado $T(TM \setminus 0)$, ou seja, levar em conta tanto variações nas coordenadas como nas direções.

Uma primeira análise nos levaria a tomar a base $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial y^\mu})\}$ para $T(TM \setminus 0)$. No entanto, essa base não é covariante. De fato, tomemos duas parametrizações para M , (x) e (\bar{x}) . Como $y \in T_x \Rightarrow y = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \bar{y}^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}$, onde, $\bar{y}^\beta = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha} y^\alpha$. Para a seção $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}$, temos [191]

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\delta} y^\delta \frac{\partial}{\partial y^\beta}. \quad (5.44)$$

A fim de corrigir isso, podemos tomar a base

$$\frac{\delta}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - N_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} \quad (5.45)$$

e $F \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, cuja base dual é dx^α e

$$\frac{\delta y^\alpha}{F} = \frac{1}{F} (dy^\alpha + N_\beta^\alpha dx^\beta), \quad (5.46)$$

onde N_α^β é a chamada conexão não-linear, cuja expressão nós postegaremos para a próxima seção.

Além da covariância, a base $\{(\frac{\delta}{\delta x^\alpha}, F \frac{\partial}{\partial y^\alpha})\}$ ainda divide TTM em dois subespaços ortogonais, um horizontal $hTTM$ gerado por $\frac{\delta}{\delta x^\alpha}$ e outro vertical $vTTM$ gerado por $F \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, tal que [201]

$$TTM = hTTM \oplus vTTM. \quad (5.47)$$

Utilizando esta decomposição, podemos definir uma métrica para TTM , a chamada métrica de Sasaki, dada por [191, 201]

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}^F(x, y)dx^\alpha \otimes dx^\beta + l_P^2 \frac{g_{\alpha\beta}^F(x, y)}{F^2} \delta y^\alpha \otimes \delta y^\beta. \quad (5.48)$$

Na métrica de Sasaki (5.48), utilizamos a mesma estratégia utilizada por Vacaru para deixar o quadrado do elemento infinitesimal com dimensão de L^2 , introduzindo uma unidade de comprimento na métrica do subespaço vertical [201]. A escolha do comprimento de Planck se justifica pelos efeitos quânticos que levam à quebra da simetria de Lorentz serem relevantes apenas nesta escala de comprimento [201].

5.3.2 Conexões em geometria de Finsler

Outro aspecto importante é que, para uma geometria de Finsler, não apenas a métrica $g_{\alpha\beta}^F$, como também a conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}$ depende da direção. Tudo se passa como se a geometria descrevesse o movimento de uma partícula em um espaço contendo um fluido em movimento (como nos modelos de éter) com velocidade a . O comprimento (tempo-próprio) de uma curva neste espaço depende então da projeção da velocidade da partícula y em relação à velocidade do fluido a . Contudo, o transporte paralelo de um vetor $v \in M$ também dependerá do movimento do fluido. Assim, além da métrica, a conexão também depende da direção.

Podemos definir um símbolo de Christoffel finsleriano, $\gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}$, que também depende tanto da posição quanto da velocidade, dado por

$$\gamma_{\alpha\beta}^{F\delta} = \frac{g^{F\delta\epsilon}}{2} (\partial_\alpha g_{\epsilon\beta}^F + \partial_\beta g_{\epsilon\alpha}^F - \partial_\epsilon g_{\alpha\beta}^F), \quad (5.49)$$

onde $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

No entanto, diferentemente do símbolo de Christoffel riemaniano, $\gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}$ não representa os coeficientes da conexão. Isso porque em (5.49) levamos em conta apenas variações em relação à posição e não em relação à direção.

Ao tomar variações da métrica em relação à direção, é útil definir o chamado tensor de Cartan, dado por [191]

$$A_{\alpha\beta\delta} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}^F}{\partial y^\delta}, \quad (5.50)$$

que assim como a métrica g^F é definido em $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$. Algumas vezes, o tensor de Cartan é tomado sem a função de Finsler, ou seja

$$C_{\alpha\beta\delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}^F}{\partial y^\delta}, \quad (5.51)$$

A partir do tensor de cartan é possível definir a conexão não-linear

$$N_\delta^\alpha = \gamma_{\alpha\beta}^\delta y^\beta - \frac{A_{\alpha\beta}^\delta}{F} \gamma_{\epsilon\xi}^\beta y^\epsilon y^\xi, \quad (5.52)$$

que como vimos, devemos introduzir para manter a covariância.

Utilizando o símbolo de Christoffel, o tensor de Cartan e a conexão não linear, é possível construir muitas diferentes noções de conexão [191]. Duas são, no entanto, mais conhecidas; a chamada conexão de Chern-Rund e a conexão de Cartan. Tomando a base $(dx^\alpha, \frac{\delta y^\alpha}{F})$, a conexão de Chern-Rund não depende de dy^α , ou seja, [191]

$$\omega_{\alpha\beta}^{CR\delta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{CR\delta} dx^\beta. \quad (5.53)$$

Isso leva à torção nula para TTM e conseqüentemente à simetria $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \Gamma_{\beta\alpha}^\delta$ [191]. Além disso, a conexão de Chern-Rund é quase-compatível com a métrica, no sentido de que [191]

$$dg_{\alpha\beta}^F - g_{\delta\alpha} \omega_\beta^{CR\delta} - g_{\delta\beta} \omega_\alpha^{CR\delta} = 2A_{\alpha\beta\epsilon} \frac{\delta y^\epsilon}{F}. \quad (5.54)$$

A torção nula e a quase-compatibilidade levam à expressão para a conexão de Chern-Rund [191, 198]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{CR\delta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^{F\delta\epsilon} (\delta_\alpha g_{\epsilon\beta} + \delta_\beta g_{\epsilon\alpha} - \delta_\epsilon g_{\alpha\beta}). \quad (5.55)$$

A não compatibilidade métrica, como argumentado por Vacaru, torna difícil uma descrição física nesta geometria, uma vez que agora não podemos mais falar em tensores transportados paralelamente, o que se traduz fisicamente como leis de conservação do movimento [201].

A conexão de Cartan, por sua vez, é compatível com a métrica e possui torção não-nula. Isso permite que tenhamos termos com dy^α . De fato, a conexão de Cartan, se escreve como [191, 201]

$$\omega_\alpha^{C\delta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{CR\delta} dx^\beta + \frac{A_{\alpha\beta}^\delta}{F} \delta y^\beta. \quad (5.56)$$

Tomando a base dy^a , a conexão de Cartan fica

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^C &= \gamma_{\alpha\beta}^{F\delta} - \frac{g^{F\delta\epsilon}}{F} (A_{\beta\epsilon\xi} N_\alpha^\xi - A_{\alpha\beta\xi} N_\epsilon^\xi) \\ &= \gamma_{\alpha\beta}^{F\delta} + \hat{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Como $\nabla_{e_a} e_b = \omega_b^c(e_a) e_c$, a conexão de Cartan é tal que [198]

$$\nabla_{\partial_a} \partial_b = \Gamma_{ab}^{CRc} \partial_c \quad , \quad \nabla_{\partial_a} \bar{\partial}_b = \Gamma_{ab}^{CRc} \bar{\partial}_c \quad (5.58)$$

$$\nabla_{\bar{\partial}_a} \partial_b = C_{ab}^c \partial_c \quad , \quad \nabla_{\bar{\partial}_a} \bar{\partial}_b = C_{ab}^c \bar{\partial}_c \quad (5.59)$$

ou seja, transportes através de vetores horizontais são realizados pela componente horizontal Γ enquanto que transportes verticais são feitos utilizando a conexão vertical C .

A compatibilidade métrica e a presença de torção tornam a conexão de Cartan ideal para estudarmos uma gravitação com violação de Lorentz numa extensão da proposta de Kostelecky [179]. De agora em diante, utilizaremos esta conexão e não colocaremos o índice "C".

Utilizando a conexão de Cartan podemos derivar covariantemente campos tensoriais. Considere $T \in \pi TM \otimes \pi^* T^* M$, $T = T_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i$. A derivada covariante horizontal, é dada por [191]

$$T_{\alpha|\delta}^\beta = \frac{\delta T_\alpha^\beta}{\delta x^\delta} + \Gamma_{\delta\epsilon}^\beta T_\alpha^\epsilon - \Gamma_{\delta\alpha}^\epsilon T_\epsilon^\beta, \quad (5.60)$$

enquanto que a derivada covariante vertical é dada por

$$T_{\alpha;\delta}^\beta = F \frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial y^\delta} + \frac{1}{F} (A_{\delta\epsilon}^\beta T_\alpha^\epsilon - A_{\delta\alpha}^\epsilon T_\epsilon^\beta). \quad (5.61)$$

Interessante notar que a derivada covariante horizontal também depende da direção y .

5.3.3 Geodésicas

Uma vez definidas a métrica e a conexão finslerianas, podemos descrever o movimento de uma partícula como descrevendo uma geodésica finsleriana. Para isso, a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ deve extremizar a ação - comprimento de arco -

$$S = \int F(x, \dot{x}) dt, \quad (5.62)$$

levando à equação diferencial

$$\frac{d^2 x^\delta}{dt^2} + \gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}(x, y) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (5.63)$$

Embora formalmente igual à equação de geodésicas riemanianas, a eq.(5.63) possui uma "aceleração de inércia", dada pelo símbolo de Christoffel, que depende mais que quadraticamente da velocidade. Além disso, sua dependência na direção nos diz que o movimento da partícula não é mais localmente isotrópico.

5.3.4 Curvatura

A 2-forma de curvatura finsleriana fica [191, 201]

$$\begin{aligned} R_\alpha^\delta &= d\omega_\alpha^\delta + \omega_\epsilon^\delta \wedge \omega_\alpha^\epsilon \\ &= R_{\alpha\beta\gamma}^\delta dx^\beta \wedge dx^\gamma + P_{\alpha\beta\gamma}^\delta dx^\beta \wedge \delta y^\gamma + Q_{\alpha\beta\gamma}^\delta \delta y^\beta \wedge \delta y^\gamma. \end{aligned} \quad (5.64)$$

A componente $R_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ é a chamada componente horizontal (h-h) da curvatura, enquanto $Q_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ é a componente vertical (v-v) e $P_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ é a componente mixta (h-v).

As expressões para cada uma das componentes do tensor de curvatura é bem familiar [191, 201]

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = \delta_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \delta_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta + \Gamma_{\epsilon\beta}^\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon - \Gamma_{\epsilon\gamma}^\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon \quad (5.65)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma}^\delta = F \bar{\partial}_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \nabla_{\partial_\beta} C_{\alpha\gamma}^\delta \quad (5.66)$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^\delta = \bar{\delta}_\gamma C_{\alpha\beta}^\delta - \bar{\delta}_\beta C_{\alpha\gamma}^\delta + C_{\epsilon\beta}^\delta C_{\alpha\gamma}^\epsilon - C_{\epsilon\gamma}^\delta C_{\alpha\beta}^\epsilon \quad (5.67)$$

Assim, o tensor de curvatura horizontal também pode ser escrito como [198]

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}^{F\delta} &= dx^\delta (\nabla_{\delta_\alpha} \nabla_{\delta_\beta} \delta_\gamma - \nabla_{\delta_\beta} \nabla_{\delta_\alpha} \delta_\gamma) \\ &= dx^\delta [\nabla_{\delta_\alpha}, \nabla_{\delta_\beta}] \delta_\gamma \end{aligned} \quad (5.68)$$

Para o tensor de Ricci finsleriano há diferentes definições [191, 201]. Vamos ficar com a definição mais usual, ou seja, [201]

$$R_{\alpha\beta}^F = R_{\alpha\beta\gamma}^{F\gamma}. \quad (5.69)$$

A partir do tensor de Ricci, construímos o escalar de Ricci como

$$R^F = g^{F\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^F \quad (5.70)$$

e o tensor de Einstein finsleriano como

$$E_{\alpha\beta}^F = R_{\alpha\beta}^F - \frac{R^F}{2} g_{\alpha\beta}^F \quad (5.71)$$

Para descrevermos a dinâmica do espaço-tempo, propomos a extensão finsleriana da equação de Einstein

$$R_{\alpha\beta}^F - \frac{R^F}{2} g_{\alpha\beta}^F = KT_{\alpha\beta}^F \quad (5.72)$$

5.3.5 Espaço de Randers

Vamos agora discutir um caso particular de geometria de Finsler proposto por Kostelecky.

Para $b = 0$, a função de Finsler descreve uma geometria já bem conhecida, a chamada geometria de Randers [192, 191]

$$F(x, y)_R = \sqrt{\tilde{g}_{\mu\nu}(x) y^\mu y^\nu} + l_P a_\mu(x) y^\mu \quad (5.73)$$

$$= \alpha(x, y) + \beta(x, y). \quad (5.74)$$

A geometria de Randers é a forma mais simples de se violar a restrição quadrática sobre o comprimento das curvas, introduzindo-se além da métrica riemaniana um vetor a [191]. Esta geometria foi proposta por Randers em 1941 como uma explicação para a anisotropia entre tempo e espaço no tocante a causalidade (a seta do tempo) [192].

Imperioso notar que a função de Finsler para a geometria de Randers viola a simetria CPT-ímpar uma vez que $F(x, -y) = -F(x, y)$ e se fizermos $a \rightarrow -a \Rightarrow F \rightarrow -F$. Isso significa que medidas de comprimento e tempo neste espaço-tempo dependem da direção do movimento e do vetor de quebra de Lorentz a .

A métrica de Finsler para a geometria de Randers é dada por [191]

$$g_{\mu\nu}^F(x, y) = \frac{F(x, y)}{\alpha(x, y)} g_{\mu\nu}(x) + l_P \tilde{l}_{(\mu} a_{\nu)}(x) + l_P^2 \left(a_{\mu}(x) a_{\nu}(x) - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_{\mu} \tilde{l}_{\nu} \right), \quad (5.75)$$

onde, $\tilde{l}_{\mu} = \frac{g_{\mu\nu} y^{\nu}}{\alpha}$.

Se nos limitarmos a regimes onde a norma de a , $\|a\|$ é pequena, bem como para pequenas velocidades, $\|y\| \rightarrow 0$, podemos desprezar os termos quadráticos da métrica finsleriana, ficando com

$$g_{\mu\nu}^F(x, y) = \frac{F(x, y)}{\alpha(x, y)} g_{\mu\nu}(x) + \tilde{l}_{(\mu} a_{\nu)}(x), \quad (5.76)$$

A métrica finsleriana inversa é dada por [191]

$$g^{F\mu\nu} = \frac{\alpha}{F} g^{\mu\nu} + \left(\frac{\alpha}{F} \right)^2 \left[\frac{(\beta + \alpha \|a\|^2)}{F} \tilde{l}^{\mu} \tilde{l}^{\nu} - \tilde{l}^{(\mu} a^{\nu)} \right]. \quad (5.77)$$

No regime de baixas velocidades, $a, y \rightarrow 0$, temos

$$g^{F\mu\nu} = \frac{\alpha}{F} g^{\mu\nu} - \left(\frac{\alpha}{F} \right)^2 \tilde{l}^{(\mu} a^{\nu)}. \quad (5.78)$$

Para o tensor de Cartan, vamos definir o tensor conhecido como *métrica angular* [191]

$$h_{\alpha\beta} = \frac{F}{\alpha} (g_{\alpha\beta} - \tilde{l}_{\alpha} \tilde{l}_{\beta}). \quad (5.79)$$

A partir da métrica angular (5.79), o tensor de Cartan se escreve como [191]

$$A_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu\nu} \left(a_\gamma - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_\gamma \right) + h_{\gamma\nu} \left(a_\mu - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_\mu \right) + h_{\mu\gamma} \left(a_\nu - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_\nu \right) \right] \quad (5.80)$$

Até primeira ordem em a, y , o tensor de Cartan fica

$$A_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{\alpha} \right)^2 \left[g_{\mu\nu} \left(a_\gamma - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_\gamma \right) + g_{\gamma\nu} \left(a_\mu - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_\mu \right) + g_{\mu\gamma} \left(a_\nu - \frac{\beta}{\alpha} \tilde{l}_\nu \right) \right] \quad (5.81)$$

A geometria de Randers também foi proposta por Chang e Li como uma modificação da relatividade geral [196]. No regime astrofísico, a geometria de Randers oferece uma explicação para o chamado problema da matéria escura, ou seja, a de que a RG não descreve bem o movimento da galáxias. De fato, a trajetória de uma partícula com velocidade v^μ em uma geometria de Randers é dada por uma geodésica finsleriana [191, 192]

$$\frac{dv^\mu}{dt} + \gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\alpha v^\beta + g^{\mu\nu} A_{\nu\alpha} v^\alpha = 0, \quad (5.82)$$

onde,

$$A_{\alpha\beta} = a_{\alpha|\beta} - a_{\beta|\alpha}. \quad (5.83)$$

Interessante notar que a eq.(5.82) é análoga à uma partícula em um espaço-tempo riemaniano na presença de um campo eletromagnético A_μ cujo tensor intensidade de campo análogo é dado por (5.83).

Assim, Chang e Li propuseram que, para uma geometria de Randers, o vetor de quebra a alteraria a equação das geodésicas levando a correções na lei de Newton da gravitação [196].

Vale a pena salientar que a métrica inversa de Randers em (5.77) é de primeira ordem no vetor de quebra a_μ . Isso era esperado uma vez que o termo de Randers é CPT-ÍMPAR (5.73). A partir de agora vamos nos concentrar no setor CPT-PAR, visto que esse setor tem estreitas relações com o modelo bumblebee (5.21).

5.3.6 Métrica bipartite

Vamos agora considerar a função de Finsler (5.35) onde levemos em consideração o termo CPT-par,

$$F(x, y) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu} + l_P \sqrt{s_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu}, \quad (5.84)$$

onde o tensor simétrico $s_{\mu\nu}$ é definido por (5.40),

$$s_{\mu\nu} = b^2 g_{\mu\nu} - b_\mu b_\nu. \quad (5.85)$$

A função de Finsler bipartite estende a função de Randers uma vez que

$$s_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = (b_\mu \dot{x}^\mu)^2 - b^2. \quad (5.86)$$

A métrica finsleriana para esta geometria fica [190]

$$g_{\mu\nu}^F = \frac{F}{\alpha} g_{\mu\nu} + l_P^2 \left(\frac{F}{\sigma} s_{\mu\nu} - \alpha \sigma k_\mu k_\nu \right), \quad (5.87)$$

onde,

$$\begin{aligned} k_\mu &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y^\mu} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y^\mu} \\ &= \tilde{l}_\mu - \hat{l}_\mu. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Importante notar que a correção devido a anisotropia na métrica finsleriana (5.87) é de segunda ordem em l_P . Logo, a componente vertical da métrica de Sasaki será de terceira ordem (5.48). Dessa forma, daqui em diante iremos nos concentrar apenas nos efeitos gerados pela componente horizontal do levantamento de Sasaki, ou seja,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^F(x, y) dx^\mu dx^\nu \quad (5.89)$$

A métrica finsleriana inversa de (5.87) é dada por [190]

$$g^{F\mu\nu} = \frac{\alpha}{F}g^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{S}s^{\mu\nu} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2 S}\lambda^\mu\lambda^\nu, \quad (5.90)$$

onde,

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\sigma'} \left(s_{\mu\nu}y^\nu - \frac{\sigma S}{F} \frac{\partial \alpha}{\partial y^\mu} \right), \quad (5.91)$$

$$S = b^2\alpha + \sigma.$$

5.3.6.1 Aspectos cinemáticos da geometria Bipartite

Vamos agora analisar o movimento de partículas nesta geometria anisotrópica.

Tomando a estrutura Lorentziana como o espaço plano de Minkowsky $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, o cone de luz, que é invariante por um determinado grupo de transformações de coordenadas, é dado pela equação

$$ds = F(x, \dot{x})dt = 0 \quad (5.92)$$

Assim, a superfície tipo-luz satisfaz a equação

$$\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} + \zeta\sqrt{s_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = 0 \quad (5.93)$$

Supondo que a matriz de $s_{\mu\nu}$ tenha os auto valores $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, todos constantes, a superfície causal da geometria bipartite é então o cone elíptico

$$(1 - \lambda_1)x_1^2 + (1 - \lambda_2)x_2^2 + (1 - \lambda_3)x_3^2 - (1 - \lambda_0)x_0^2 = 0. \quad (5.94)$$

Interessante notar que como o cone tem diferentes inclinações das geratrizes, a luz se propaga com diferentes velocidades dependendo da direção. Como todos os coeficientes são menores que um, a superfície causal bipartite está contida no cone de luz Minkowskyano, o que evita problemas relativos a causalidade.

A lagrangiana finsleriana de uma partícula pontual é igualmente definida como

$$L_F = -m \int_\gamma F(x, \dot{x})dt \quad (5.95)$$

O 4-vetor mometum de uma partícula pontual de massa inercial m é definido da forma

usual

$$P_\mu^F = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad (5.96)$$

o que leva à expressão

$$P_\mu^F = M_{\mu\nu}^F(x) \dot{x}^\nu, \quad (5.97)$$

onde

$$M_{\mu\nu}^F(x) = m \left(g_{\mu\nu}(x) + \frac{\zeta}{\sigma} s_{\mu\nu}(x) \right). \quad (5.98)$$

O tensor $M_{\mu\nu}^F$ pode ser entendido como um tensor de inercia que surge devido a estrutura anisotrópica do espaço-tempo.

Outra interpretação possível é a de que o 4-momentum finsleriano é a soma de um 4-momentum Lorentziano P_μ com um outro 4-momentum \hat{P}_μ , onde $\hat{P}_\mu = \frac{\zeta}{\sigma} s_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$. Dessa forma, o novo mometum \hat{P}_μ é análogo a um momentum adquirido através do acoplamento da partícula com um campo que gera a anisotropia, como na geometria de Randers.

Note que a expressão (5.97) mostra que o 4-momentum finsleriano não é mais paralelo à 4-velocidade. Um fenômeno análogo ocorre em cristais anisotrópicos quando um raio de luz incidente no cristais se divide em dois feixes devido o campo deslocamento elétrico \vec{D} não é paralelo ao campo elétrico incidente \vec{E} , pois ambos se relacionam através da equação

$$D_i = \epsilon_{ij} E^j. \quad (5.99)$$

O movimento da partícula, cuja curva deve extremizar a ação finsleriana, é descrito pela equação da geodésica finsleriana

$$\frac{d\dot{x}^\rho}{dt} + \gamma_{\mu\nu}^{F\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (5.100)$$

Nesta geometria, o símbolo de Christoffel formal é dado por

$$\gamma_{\alpha\beta}^{F\delta} = \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{S} s^{\delta\epsilon} \tilde{\gamma}_{\epsilon\alpha\beta} + \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta, \quad (5.101)$$

onde $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta$ são os símbolos de Christoffel riemanianos e $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta$ são correções que dependem da

derivada do tensor $s_{\mu\nu}$.

Assim, o símbolo de Christoffel finsleriano pode ser separado em uma parte lorentziana e outra com uma correção anisotrópica

$$\frac{d\dot{x}^\rho}{dt} + \gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + F^\rho = 0, \quad (5.102)$$

onde

$$\begin{aligned} F^\rho &= \frac{\zeta}{2} \left[\frac{\alpha}{F} \left(\partial^\rho \left(\frac{\sigma}{\alpha} \right) + \dot{x}^\mu \partial_\mu \left(\frac{\sigma}{\alpha} \right) \dot{x}^\rho \right) \right. \\ &+ \frac{\alpha}{\sigma} \left(\nabla_\mu s_\nu^\rho + \nabla_\nu s_\mu^\rho - \nabla^\rho s_{\mu\nu} + s_\epsilon^\rho \gamma_{\mu\nu}^\epsilon \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &\left. + 2 \frac{\alpha}{F} \left(\dot{x}^\mu \partial_\mu \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) s_\nu^\rho \dot{x}^\nu - \frac{\alpha}{4F} (\partial^\rho s_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \right] \end{aligned} \quad (5.103)$$

Assim, a partícula está submetida à uma força análoga do tipo

$$\vec{F} = \frac{\zeta}{2(1 + \zeta\sigma)} \left(\vec{\nabla}\sigma + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\sigma) \vec{v} \right) \quad (5.104)$$

Logo, o movimento de uma partícula pontual de massa m na geometria bipartite é análogo ao movimento desta mesma partícula em um espaço Lorentziano com um fluido.

5.3.6.2 Aspectos dinâmicos do espaço bipartite

Na seção anterior vimos que a dinâmica de uma partícula se movimentando livremente na geometria bipartite é análoga à desta partícula em um espaço com um fluido. Vamos analisar um pouco mais esta analogia e buscar os efeitos da anisotropia sobre a dinâmica do espaço-tempo.

Inicialmente, vamos encontrar o escalar de curvatura (Ricci). A conexão horizontal $\Gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}$ é dada por [191]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{F\delta} &= \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{S} s^{\delta\epsilon} \tilde{\gamma}_{\epsilon\alpha\beta} + \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta \\ &= \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{S} s^{\delta\epsilon} \tilde{\gamma}_{\epsilon\alpha\beta} + \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta + \hat{\gamma}_{\alpha\beta}^\delta. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Vamos de agora em diante assumir que a conexão horizontal $\Gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}$ é independente da direção, ou seja, ¹⁰

¹⁰Esta condição inclui um vínculo sobre o tensor $s_{\mu\nu}$ que deve ser posteriormente analisado.

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{F\delta}}{\partial y^\mu} = 0. \quad (5.106)$$

Com isso, o tensor de Ricci fica na forma [202]

$$R_{\alpha\beta}^F = \tilde{R}_{\alpha\beta} + \mathcal{R}_{\alpha\beta} + \bar{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{\alpha\beta}, \quad (5.107)$$

onde $\tilde{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci riemanniano.

O escalar de Ricci, por sua vez, fica [202]

$$\begin{aligned} R^F &= \frac{\alpha}{F} \tilde{R} - \frac{\alpha^2}{SF} s^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{\sigma^{2\perp}}{\sigma^2 S} \lambda^\mu \lambda^\nu \tilde{R}_{\mu\nu} + \mathcal{R} + \bar{R} + \hat{R} \\ &+ \left(\frac{\sigma^{2\perp}}{\sigma^2 S} \lambda^\mu \lambda^\nu - \frac{\alpha^2}{SF} s^{\mu\nu} \right) (\mathcal{R}_{\alpha\beta} + \bar{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (5.108)$$

Para a expressão do elemento de volume, devemos calcular o determinante da métrica, que para $D = 4$ é dado por

$$\sqrt{-g^F} = \left(\frac{F}{\alpha} \right)^5 \left(\frac{S}{\sigma} \right)^2 \sqrt{-g} \quad (5.109)$$

Assim, a ação de Einstein-Hilbert finsleriana [193, 194, 198] fica [202]

$$\begin{aligned} S_F &= \kappa_F \int R^F \sqrt{-g^F} d^4x d^4y \\ &= \kappa_F \int \left(\frac{F}{\alpha} \right)^4 \left(\frac{S}{\sigma} \right)^2 \tilde{R} \sqrt{-g} d^4y d^4x \\ &+ \kappa_F \int \frac{F^4}{\alpha^3} \frac{S}{\sigma^2} s^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4y d^4x + \dots \end{aligned} \quad (5.110)$$

Como

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F}{\alpha}\right)^4 \left(\frac{S}{\sigma}\right)^2 &= (1 + 8b^2 + 6b^4) + (4 + 12b^2 + 4b^4)\frac{\sigma}{\alpha} \\
&+ (6 + 8b^2 + b^4)\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2 + (4 + b^2)\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^3 \\
&+ \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^4 + 2b^2\frac{\alpha}{\sigma} + b^4\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2,
\end{aligned} \tag{5.111}$$

o primeiro termo de (5.110) gera os termos [202]

$$\begin{aligned}
S_F &= \kappa_F \int R\sqrt{-g}d^4x d^4y + \kappa_F \int (8b^2 + 6b^4)R\sqrt{-g}d^4x d^4y \\
&+ \kappa_F \int (4 + 12b^2 + 4b^4)\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)R\sqrt{-g}d^4x d^4y + \dots
\end{aligned} \tag{5.112}$$

O primeiro termo de (5.112) é uma ação de Einstein-Hilbert em TTM . O segundo termo já contém uma correção não-riemanniana do primeiro; obtemos assim uma correção do primeiro termo que aparece no modelo bumblebee (5.22). O terceiro termo introduz o acoplamento da quadrivelocidade y^μ com o quadrivetor b^μ que não aparece no modelo Bumblebee.

Como os integrandos em (5.112) são dependentes apenas de x , a integração em relação a y leva a

$$\int d^4y = Vol(vTTM). \tag{5.113}$$

Logo, a ação de Einstein-Hilbert finsleriana leva a uma correção na constante gravitacional

$$S = Vol(vTM)\kappa_F \int \tilde{R}\sqrt{-g}d^4x \Rightarrow \kappa'_F = \kappa_F Vol(vTTM) \tag{5.114}$$

Fica evidente em (5.114) que o fibrado vertical $vTTM$ deve ter volume finito. Ora, como $g_{\mu\nu}^F(x, \lambda y) = g_{\mu\nu}^F(x, y)$, podemos definir os tensores no fibrado tangente projetivizado¹¹ PTM que sendo compacto tem volume finito.

O segundo termo de (5.110) leva à [202]

¹¹*Projectivized Tangent bundle.*

$$S = \kappa'_F \int (4 + b^2) s^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} d^4x, \quad (5.115)$$

que é uma modificação do segundo termo do modelo bumblebee (5.22).

Concluimos que, assumindo uma geometria finsleriana para o espaço-tempo, é possível encontrarmos a estrutura riemanniana usual da relatividade geral acrescida de termos de interação entre gravidade e campos vetoriais de quebra de Lorentz (éter, por exemplo). Tal abordagem leva a uma dedução geométrica do modelo bumblebee bem como à uma correção da constante gravitacional.

Os outros termos da ação de Einstein-Hilbert finsleriana (5.110) devem, possivelmente, levar a termos que geram a dinâmica do tensor $s_{\mu\nu}$, ou de forma semelhante, do vetor bumblebee b_μ [202].

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese analisamos como os cenários de branas em seis dimensões com simetria axial e estática (brana tipo-corda) tem suas propriedades alteradas quando modifica-se a estrutura geométrica do cenário através da ação de um fluxo geométrico na variedade transversa. Propomos duas novas modificações. Na primeira, a variedade transversa, ao invés de um cone singular, é um cone resolvido cujo parâmetro de resolução modifica a geometria do cenário. A segunda modificação proposta foi a de tomar como variedade transversa uma solução solitônica do fluxo de Ricci, o chamado charuto de Hamilton.

Destacaremos aqui os principais resultados obtidos bem como possíveis perspectivas, divididos pelo tema. Esses resultados demonstram a robustez do cenários de branas, visto que suas propriedades mantêm-se sobre esses fluxos.

6.1 Sobre o cenário com um cone resolvido

A geometria proposta fornece uma solução completa (interiores e exteriores) bem comportada e que satisfaz todas as condições de energia, para pequenos valores do parâmetro de resolução. O fluxo de resolução também parametriza a relação entre as escalas de energia do *bulk* e da brana e as tensões da brana. Apesar de não termos deduzido a métrica desta geometria a partir de uma lagrangeana de campos que dão origem ao tensor de tensão-energia, as características de suavidade e as condições de energia torna este cenários fisicamente viável. Tais resultados estão reportados nos periódicos *Physical Review D* **84**, página 085027 de 2011 [106] e *Physical Review D* **87**, página 25010 de 2013[107].

Além disso o fluxo de resolução manteve a localização de modos sem massa para os campos escalares [106], vetoriais [107] e espinoriais [108] sobre a brana. Para os modos massivos do campo escalar, por exemplo, o fluxo de resolução altera a largura e a altura

do potencial tipo-vulcão [106]. Para o cone singular ($a = 0$), o potencial tem um poço infinito sobre a brana o que pode levar à uma torre taquiônica KK [106].

Uma perspectiva para o desenvolvimento dos estudos nesse cenário é a dedução da solução métrica proposta a partir de um modelo físico (lagrangeana). Devido a simetria axial e estabilidade, nosso principal candidato é que seja um vórtice como o proposto por Gionvannini *et al*[80]. Esperamos mostrar que o fluxo geométrico reflete variações na estrutura física da fonte geradora da brana, como de suas contantes de acoplamento.

Outra análise possível tem estreitas relações com o cenário do universo tipo-charuto. Com efeito, o conifold possui um potencial de Kähler associado à sua geometria. O estudo estão, a partir de uma lagrangeana com um superpotencial, poderia dar uma origem ao mesmo tempo física e geométrica para esse cenário.

Ambas essas perspectivas são possíveis extensões do método de branas deformadas (suavizadas com espessura) em cinco dimensões, a partir da inclusão de potenciais deformados para os campos escalares que geram a brana [39, 41]. Em seis dimensões, contudo, o problema se torna bastante mais complexo, devido a brana ser gerada por um sistema acoplado de campos escalares complexos e vetorial [80].

6.2 Sobre o cenário com um fluxo de Ricci

Mostramos que o cenário corda-charuto é uma solução completa (interior e exterior) suave em todos os pontos, o que estende a solução tipo-corda fina do modelo GS. A geometria proposta (fator de *warp* e componente angular da métrica) satisfazem todas as condições de regularidade sobre a brana, o que também é uma vantagem sobre o modelo GS. O parâmetro de evolução do charuto parametriza a constante cosmológica do *bulk*, além da relação entre as escalas de energia e as tensões da brana. Tais resultados estão reportados no periódico *Classical and Quantum Gravity*, **30**, página 025005 de 2013 [109].

A fonte desta geometria satisfaz todas as condições de energia (fraca, forte e dominante). Analisamos também os modo KK gravitacionais. Para o modo-zero, o fluxo controla o valor do modo sobre a brana, bem como sua altura e largura. Para os modos massivos, o potencial tipo-vulcão tem uma barreira cuja altura é dependente do fluxo e um poço sobre a brana para qualquer valor do parâmetro de evolução [109].

Uma extensão natural é a análise do efeito de tal fluxo geométrico sobre outros campos, como o campo escalar, vetorial e espinorial. Como cada campo reaje diferentemente à

modificações da geometria, devido o acoplamento e as simetrias serem diferentes, podemos encontrar diferentes modificações das propriedades desses campos.

Outra ideia futura é a de estendermos o fluxo geométrico em mais dimensões. A partir de sete dimensões, podemos supor uma brana com simetria esférica em relação à variedade transversa (agora com três dimensões). Em sete dimensões, a brana, vista como um defeito topológico, é chamada de *brana tipo-monopolo* [71, 68]. Uma solução estacionária do fluxo de Ricci com simetria esférica foi estudada por *Bryant* e é conhecida como *sóliton de Bryant* [110]. Como um sóliton de Ricci é uma generalização de uma variedade de Einstein, o sóliton de Bryant seria uma generalização do cenário proposto por Randjbar-Daemi e Shaposhnikov onde a variedade transversa é *Ricci-plana*¹[72].

E ainda persiste o problema geral: poderíamos classificar as soluções com dimensões extras utilizando o fluxo de Ricci? Poderíamos encontrar algumas dessas soluções como extremos de funcionais, como a entropia de Perelman? Acreditamos que este é uma questão de relevância a ser analisada.

6.3 Violação da simetria de Lorentz em uma geometria de Finsler

A violação local da simetria de Lorentz em espaços-tempo curvos a partir de uma relatividade geral finsleriana mostrou-se promissora pelos resultados e relações.

A geometria bipartite modifica a estrutura causal do cone de luz tornando-o elíptico, além de introduzir uma inércia anisotrópica, o que leva o 4-momento não ser paralelo à 4-velocidade.

Assim como a geometria de Randers é análoga à uma geometria lorentziana com um campo vetorial eletromagnético de fundo, mostramos que a geometria bipartite é análoga à uma geometria lorentziana com um campo tensorial de fundo, que pode ser relacionada com o campo *bumblebee*.

Mostramos também que a partir de uma ação de Einstein-Hilbert finsleriana podemos encontrar a ação de Einstein-Hilbert lorentziana com alguns termos de violação da simetria de Lorentz presentes no modelo *bumblebee*. Tal resultado foi apresentado no *Sixth Meeting on CPT and Lorentz Symmetry, Bloomington, Indiana, June 17-21, 2013* e encontra-se reportado no portal arXiv:1309.4671 [202].

¹*Ricci-flat* em inglês.

Vamos agora esboçar algumas perspectivas da análise da violação da simetria de Lorentz em cenários de branas utilizando um relatividade geral finsleriana.

6.3.0.3 Modelo RS com quebra de Lorentz

Até agora, nos limitamos apenas a estudar de forma genérica os efeitos da estrutura finsleriana como uma correção sobre a estrutura riemanniana da relatividade geral. O próximo passo seria escolher um espaço-tempo específico para analisar os efeitos sobre fenômenos já estudados.

Um bom e atual exemplo é o modelo de branas tipo Randall-Sundrum em $(1 + 4)$ dimensões, descrito pela métrica riemanniana

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^{\mu\nu} dx^{\mu\nu} = e^{-kr} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 \quad (6.1)$$

O efeito da violação da simetria de Lorentz em cenários de branas já fora abordada na literatura [203]. Nossa contribuição consiste em fornecer um modelo cuja origem da anisotropia é totalmente geométrica.

Para isso, propomos utilizar duas estruturas finslerianas bem estudadas na literatura:

- Kostelecky (Bipartite metric)

Como descrito na seção (5.3.6), a métrica *bipartite* fornece uma violação de Lorentz no setor CPT-par, ou seja, $F(x, y)$, dada por (5.84)

$$ds = F(x, y)_K = \sqrt{\tilde{g}_{\mu\nu} y^\mu y^\nu} + l_P \sqrt{s_{\mu\nu} y^\mu y^\nu}. \quad (6.2)$$

A função de Finsler (5.84) gera um termo de acoplamento do tipo $s^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, como encontrado em [203]. Dessa forma, a geometria de Finsler bipartite não apenas recobre os resultados do modelo bumblebee aplicados no cenário de branas como também conduz a correções dos mesmos.

- Bogoslovsky

A análise feita até aqui para a estrutura de Finsler seguiu a linha do modelo padrão estendido. Uma outra estrutura finsleriana que surge naturalmente da chamada *relatividade muito especial* é dada pela função de Finsler

$$ds = F(x, y)_B = (\eta_\rho y^\rho)^b (\tilde{g}_{\mu\nu} y^\mu y^\nu)^{\frac{1-b}{2}} \quad (6.3)$$

Tal função de Finsler (6.3) foi inicialmente obtida por Bogoslovsky [204, 205, 206, 207, 208, 209]. Como mostrado por Gibbons *et al*, a função de Finsler (6.3) é invariante por sobre o grupo de transformações da relatividade muito especial [210]. A geometria de Finsler estende ainda a chamada relatividade especial dupla [211]. A geometria de Finsler-Bogoslovsky também está relacionada com outras propostas de uma *relatividade muito especial* em espaços curvos [212, 213, 214]. A função de Finsler-Bogoslovsky também foi aplicada no estudo da violação de Lorentz em cosmologia por Kouretsis *et al* [215, 216].

A geometria de finsler também foi explorada em outros cenários como no estudo das condições de energia [217], na birefringência do vácuo, [218] entre outros [219, 220, 221, 222, 223].

Em ambas abordagens a estrutura finsleriana traz efeitos de Violação de Lorentz através de um vetor de quebra (b_μ no caso bipartite e n_μ no caso Bogoslovsky).

Outra modificação deve aparecer na relação entre as escalas de energias do Bulk e da brana, bem como a relação entre as constantes cosmológicas do Bulk e da brana. A primeira está relacionada ao problema da hierarquia de calibre enquanto a segunda busca explicar o valor observado da constante cosmológica.

REFERÊNCIAS

- [1] The principle of relativity: a collection of original memoir on the special and general theory of relativity. Dover publication, 1952.
- [2] Th. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, K1 966 (1921).
- [3] O. Klein, Z. Phys. 37 (1926) 895; Arkiv. Mat. Astron. Fys. B 34A (1946).
- [4] A. Einstein and W. Mayer, Preuss. Akad. (1931) p. 541, (1932).
- [5] A. Einstein and P. Bergmann, Ann. Math. 39 (1938) 683;
- [6] J. Polchinski, String theory and beyond, vol.2, Cambridge University press.
- [7] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, Phys. Rept. **130**, 1 (1986).
- [8] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A 268, (1962).
- [9] D. W. Joseph, Phys. Rev. D **126**, 319 (1962).
- [10] P.A. Collins, R.W. Tucker, Nuclear Physics B, 112 (1976).
- [11] K. Akama, Lect. Notes Phys. **176**, 267 (1982) [hep-th/0001113].
- [12] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 136 (1983).
- [13] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 139 (1983).
- [14] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **242**, 473 (1984).
- [15] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **244**, 359 (1984).
- [16] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **255**, 480 (1985).
- [17] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **253**, 366 (1985).
- [18] S. Randjbar-Daemi and C. Wetterich, Phys. Lett. B **166**, 65 (1986).
- [19] M. Visser, Phys. Lett. B **159**, 22 (1985) [hep-th/9910093].
- [20] M. Gell-Mann and B. Zwiebach, Nucl. Phys. B **260**, 569 (1985).
- [21] P. Laguna-Castillo, R. A. Matzner, Nucl. Phys. B, **282**, 542 (1987).
- [22] W. Israel, Nuovo Cim. B **44S10**, 1 (1966) [Erratum-ibid. B **48**, 463 (1967)] [Nuovo Cim. B **44**, 1 (1966)].
- [23] G. W. Gibbons and D. L. Wiltshire, Nucl. Phys. B **287**, 717 (1987) [hep-th/0109093].

- [24] M. Green, J. Schwarz, Nucl. Phys. B, 243, 1984.
- [25] James Hughes, Jun Liu, Joseph Polchinski, Phys. Lett. B, 180, 1986.
- [26] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P.K. Townsend, Phys. Lett. B, 189, 1987.
- [27] A. Achúcarro, J.M. Evans, P.K. Townsend, D.L. Wiltshire, Phys. Lett. B, 198, 1987.
- [28] P.K. Townsend, Phys. Lett. B, 202, 1988.
- [29] M. D. Maia and V. Silveira, Phys. Rev. D **48**, 954 (1993).
- [30] G. Horowitz, A. Strominger, Nucl. Phys. B, Volume 360 197 (1991).
- [31] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995) [hep-th/9510017].
- [32] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. B **475**, 94 (1996) [hep-th/9603142].
- [33] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315].
- [34] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].
- [35] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].
- [36] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922 (1999) [hep-ph/9907447].
- [37] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. D **62**, 046008 (2000) [hep-th/9909134].
- [38] M. Cvetič, H. Lu and C. N. Pope, hep-th/0002054.
- [39] M. Gremm, Phys. Lett. B **478**, 434 (2000) [hep-th/9912060].
- [40] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000) [hep-th/0001033].
- [41] D. Bazeia and A. R. Gomes, JHEP **0405**, 012 (2004) [hep-th/0403141].
- [42] D. Bazeia and L. Losano, Phys. Rev. D **73**, 025016 (2006) [hep-th/0511193].
- [43] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes and R. Casana, Phys. Rev. D **79**, 125022 (2009) [arXiv:0901.3543 [hep-th]].
- [44] T. Gherghetta and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **586**, 141 (2000) [hep-ph/0003129].
- [45] B. Bajc and G. Gabadadze, Phys. Lett. B **474**, 282 (2000) [hep-th/9912232].
- [46] A. Kehagias and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **504**, 38 (2001) [hep-th/0010112].
- [47] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, Phys. Rev. D **73**, 084022 (2006) [Erratum-ibid. D **77**, 049901 (2008)] [hep-th/0603184].

- [48] O. Arias, R. Cardenas and I. Quiros, Nucl. Phys. B **643**, 187 (2002) [hep-th/0202130].
- [49] Y. -X. Liu, X. -H. Zhang, L. -D. Zhang and Y. -S. Duan, JHEP **0802**, 067 (2008) [arXiv:0708.0065 [hep-th]].
- [50] R. Sundrum, Phys. Rev. D **59**, 085010 (1999) [hep-ph/9807348].
- [51] W. Israel, Phys.Rev.D, 15 (1974).
- [52] A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 46 , 17 1169 (1981).
- [53] J . Gott III, Astrophys. J., 288 422 (1985).
- [54] W. A. Hiscock, Phys. Rev. D **31**, 3288 (1985).
- [55] R. Geroch, J.Traschen, Phys.Rev.D, 36 (1987).
- [56] R. Gregory, Phys. Rev. Lett. 59, 740 (1987).
- [57] R. Gregory, Phys. Lett. B **215**, 663 (1988).
- [58] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **215**, 67 (1988).
- [59] G .Gibbons, M. Ortiz e F. Ruiz Phys. Rev. D 39 ,6 1546 (1989).
- [60] V. P. Frolov, W.Israel, W.G.Unruh, Phys.Rev.D, 39 (1989).
- [61] A. Vilenkin, E. Shellard, Cosmic string and other topological defects, Cambridge University Press, 1994.
- [62] R. Gregory, Phys. Rev. D **54**, 4955 (1996) [gr-qc/9606002].
- [63] M. Christensen, A. L. Larsen, Y. Verbin, Phys.Rev.D, 60 (1999).
- [64] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **470**, 52 (1999) [arXiv:hep-th/9910132].
- [65] R. Gregory, Phys. Rev. Lett. **84**, 2564 (2000) [arXiv:hep-th/9911015].
- [66] A. Chodos and E. Poppitz, Phys. Lett. B **471**, 119 (1999) [hep-th/9909199].
- [67] J. -W. Chen, M. A. Luty and E. Ponton, JHEP **0009**, 012 (2000) [hep-th/0003067].
- [68] I. OLasagasti and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **62**, 044014 (2000) [hep-th/0003300].
- [69] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **85**, 240 (2000) [arXiv:hep-th/0004014].
- [70] T. Gherghetta, E. Roessl and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **491**, 353 (2000) [hep-th/0006251].
- [71] E. Roessl and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. D **66**, 084008 (2002) [hep-th/0205320].
- [72] S. Randjbar-Daemi and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **491**, 329 (2000) [hep-th/0008087].
- [73] I. Oda, Phys. Lett. B **496**, 113 (2000) [arXiv:hep-th/0006203].

- [74] I. Oda, Phys. Rev. D **62**, 126009 (2000) [hep-th/0008012].
- [75] I. Oda, Phys. Rev. D **64**, 026002 (2001) [hep-th/0102147].
- [76] M. Gogberashvili and D. Singleton, Phys. Rev. D **69**, 026004 (2004) [hep-th/0305241].
- [77] I. Oda, Phys. Lett. B **571**, 235 (2003) [hep-th/0307119].
- [78] E. Ponton and E. Poppitz, JHEP **0102**, 042 (2001) [hep-th/0012033].
- [79] P. Tinyakov and K. Zuleta, Phys. Rev. D **64**, 025022 (2001) [hep-th/0103062].
- [80] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **619**, 615 (2001) [hep-th/0104118].
- [81] B. de Carlos and J. M. Moreno, JHEP **0311**, 040 (2003) [arXiv:hep-th/0309259].
- [82] I. Navarro, JCAP **0309**, 004 (2003) [hep-th/0302129].
- [83] J. M. Cline, J. Descheneau, M. Giovannini and J. Vinet, JHEP **0306**, 048 (2003) [hep-th/0304147].
- [84] P. Bostock, R. Gregory, I. Navarro and J. Santiago, Phys. Rev. Lett. **92**, 221601 (2004) [hep-th/0311074].
- [85] S. Kanno and J. Soda, JCAP **0407**, 002 (2004) [hep-th/0404207].
- [86] J. Vinet and J. M. Cline, Phys. Rev. D **70**, 083514 (2004) [hep-th/0406141].
- [87] G. Kofinas, Class. Quant. Grav. **22**, L47 (2005) [hep-th/0412299].
- [88] I. Navarro and J. Santiago, JHEP **0502**, 007 (2005) [hep-th/0411250].
- [89] E. Papantonopoulos and A. Papazoglou, JCAP **0507**, 004 (2005) [hep-th/0501112].
- [90] G. Kofinas, Phys. Lett. B **633**, 141 (2006) [hep-th/0506035].
- [91] R. M. Wald, Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p
- [92] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and V. Zamarias, Nucl. Phys. B **797**, 520 (2008) [arXiv:0707.1396 [hep-th]].
- [93] A. Kehagias, Phys. Lett. B **600**, 133 (2004) [arXiv:hep-th/0406025].
- [94] J. Garriga and M. Porrati, JHEP **0408**, 028 (2004) [hep-th/0406158].
- [95] M. Gogberashvili, P. Midodashvili and D. Singleton, JHEP **0708**, 033 (2007) [arXiv:0706.0676 [hep-th]].
- [96] Y. -S. Duan, Y. -X. Liu and Y. -Q. Wang, Mod. Phys. Lett. A **21**, 2019 (2006) [hep-th/0602157].
- [97] B. Mukhopadhyaya, S. Sen and S. SenGupta, Phys. Rev. Lett. **89**, 121101 (2002) [Erratum-ibid. **89**, 259902 (2002)] [hep-th/0204242].

- [98] B. Mukhopadhyaya, S. Sen, S. Sen and S. SenGupta, Phys. Rev. D **70**, 066009 (2004) [hep-th/0403098].
- [99] N. R. F. Braga and C. N. Ferreira, JHEP **0503**, 039 (2005) [hep-th/0410186].
- [100] B. Mukhopadhyaya, S. Sen and S. SenGupta, Phys. Rev. D **79**, 124029 (2009) [arXiv:0903.0722 [hep-th]].
- [101] J. M. Hoff da Silva and R. da Rocha, Phys. Rev. D **81**, 024021 (2010) [arXiv:0912.5186 [hep-th]].
- [102] J. Yang, Y. -L. Li, Y. Zhong and Y. Li, Phys. Rev. D **85**, 084033 (2012) [arXiv:1202.0129 [hep-th]].
- [103] G. Panico, E. Ponton, J. Santiago and M. Serone, Phys. Rev. D **77**, 115012 (2008) [arXiv:0801.1645 [hep-ph]].
- [104] T. Gherghetta and B. von Harling, JHEP **1004**, 039 (2010) [arXiv:1002.2967 [hep-ph]].
- [105] A. D. Medina and E. Ponton, JHEP **1109**, 016 (2011) [arXiv:1104.4124 [hep-ph]].
- [106] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **84**, 085027 (2011) [arXiv:1110.1597 [hep-th]].
- [107] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **87**, 125010 (2013) [arXiv:1304.7825 [hep-th]].
- [108] D. M. Dantas, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **725**, 425 (2013) [arXiv:1307.2317 [hep-th]].
- [109] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, Class. Quant. Grav. **30**, 025005 (2013) [arXiv:1208.2364 [hep-th]].
- [110] B. Chow, P. Lu, L. Ni, Hamilton's Ricci flow, Science Press, 2006.
- [111] P. Topping, Lectures on the Ricci flow, London Mathematical Society, Lecture note series 325, Cambridge university press.
- [112] R.S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, Contemporary Mathematics 71 (1988), 237-261.
- [113] E. Witten, Phys.Rev.D, 44 (1991).
- [114] R. S. Hamilton, Three-manifold with positive Ricci curvature, J. Differential Geometry, 17 (1982).
- [115] J. Morgan, G. Tian, Ricci flow and the Poincaré conjecture, Clay Mathematics Monographs, American Mathematical Society, (2007).
- [116] B. Chow, Ricci flow on the 2-sphere, J. Differential Geometry, 33 (1991).
- [117] H.D.Cao, B.Chow, Recent progress on Ricci solitons, Bulletin of american mathematical society, 36 (1999).

- [118] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math/0211159v1.
- [119] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math/0303109v1.
- [120] E. Woolgar, Can. J. Phys. **86**, 645 (2008) [arXiv:0708.2144 [hep-th]].
- [121] D. Friedan, Phys. Rev. Lett. **45**, 1057 (1980).
- [122] T. Oliynyk, V. Suneeta and E. Woolgar, Nucl. Phys. B **739**, 441 (2006) [hep-th/0510239].
- [123] A. A. Tseytlin, Phys. Rev. D **75**, 064024 (2007) [hep-th/0612296].
- [124] TOliynyk, VSuneeta and EWoolgar, Phys. Rev. D **76**, 045001 (2007) [arXiv:0705.0827 [hep-th]].
- [125] M. Headrick and T. Wiseman, Class. Quant. Grav. **23**, 6683 (2006) [hep-th/0606086].
- [126] D. Xianzhe, L. Ma, Comm. Math. Phys., 274, Number 1, 65-80 (2007).
- [127] N. Lashkari and A. Maloney, Class. Quant. Grav. **28**, 105007 (2011) [arXiv:1007.1661 [hep-th]].
- [128] P. P. Orth, P. Chandra, P. Coleman and J. Schmalian, Phys. Rev. Lett. **109**, 237205 (2012) [arXiv:1206.5740 [cond-mat.str-el]].
- [129] P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B **342**, 246 (1990).
- [130] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, JHEP **0008**, 052 (2000) [arXiv:hep-th/0007191].
- [131] I. R. Klebanov and A. Murugan, JHEP **0703**, 042 (2007) [hep-th/0701064].
- [132] L. A. Pando Zayas and A. A. Tseytlin, JHEP **0011**, 028 (2000) [arXiv:hep-th/0010088].
- [133] M. Cvetič, H. Lu and C. N. Pope, Nucl. Phys. B **600**, 103 (2001) [hep-th/0011023].
- [134] J. F. Vazquez-Poritz, JHEP **0209**, 001 (2002) [arXiv:hep-th/0111229].
- [135] F. Brummer, A. Hebecker and E. Trincherini, Nucl. Phys. B **738**, 283 (2006) [arXiv:hep-th/0510113].
- [136] H. Firouzjahi and S. H. Tye, JHEP **0601**, 136 (2006) [arXiv:hep-th/0512076].
- [137] T. Noguchi, M. Yamaguchi and M. Yamashita, Phys. Lett. B **636**, 221 (2006) [arXiv:hep-th/0512249].
- [138] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman, JCAP **1010**, 026 (2010) [arXiv:1008.0048 [hep-th]].
- [139] C. -EFu, Y. -X. Liu and H. Guo, Phys. Rev. D **84**, 044036 (2011) [arXiv:1101.0336 [hep-th]].

- [140] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81**, 1158 (1998) [Erratum-ibid. **81**, 4279 (1998)] [hep-ex/9805021].
- [141] E. Ma and M. Raidal, Phys. Rev. Lett. **87**, 011802 (2001) [Erratum-ibid. **87**, 159901 (2001)] [hep-ph/0102255].
- [142] G. Karagiorgi, A. Aguilar-Arevalo, J. M. Conrad, M. H. Shaevitz, K. Whisnant, M. Sorel and V. Barger, Phys. Rev. D **75**, 013011 (2007) [Erratum-ibid. D **80**, 099902 (2009)] [hep-ph/0609177].
- [143] V. Rubin, W. Ford, Ast.J. **159**, 379 (1970).
- [144] M. W. Goodman and E. Witten, Phys. Rev. D **31**, 3059 (1985).
- [145] D. N. Spergel and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **84**, 3760 (2000) [astro-ph/9909386].
- [146] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], Astron. J. **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201].
- [147] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [148] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **64**, 2238 (1990).
- [149] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991).
- [150] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [151] V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [152] V. A. Kostelecky and R. Potting, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995) [hep-ph/9501341].
- [153] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997) [hep-ph/9703464].
- [154] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998) [hep-ph/9809521].
- [155] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001) [hep-th/0012060].
- [156] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [157] R. Bluhm, V. A. Kostelecky and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999) [hep-ph/9810269].
- [158] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **61**, 016002 (2000) [hep-ph/9909554].
- [159] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999) [hep-ph/9901358].
- [160] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001) [hep-th/0105082].
- [161] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002) [hep-ph/0205211].
- [162] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002) [hep-th/0111123].

- [163] M. Visser, Phys. Rev. D **80**, 025011 (2009) [arXiv:0902.0590 [hep-th]].
- [164] Q. G. Bailey and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **70**, 076006 (2004) [hep-ph/0407252].
- [165] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007) [astro-ph/0702379 [ASTRO-PH]].
- [166] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009) [arXiv:0905.0031 [hep-ph]].
- [167] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **69**, 016005 (2004) [hep-ph/0309025].
- [168] A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 096005 (2012) [arXiv:1112.6395 [hep-ph]].
- [169] J. T. Peltoniemi and J. W. F. Valle, Nucl. Phys. B **406**, 409 (1993) [hep-ph/9302316].
- [170] D. O. Caldwell and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D **48**, 3259 (1993).
- [171] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B **510**, 255 (2001) [hep-th/0012238].
- [172] J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **88**, 190403 (2002) [hep-th/0112090].
- [173] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999) [hep-ph/9812418].
- [174] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Lett. B **405**, 249 (1997) [hep-ph/9703240].
- [175] A. G. Cohen and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **97**, 021601 (2006) [hep-ph/0601236].
- [176] T. Jacobson and D. Mattingly, Phys. Rev. D **64**, 024028 (2001) [gr-qc/0007031].
- [177]
- [177] V. A. Kostelecky, R. Lehnert and M. J. Perry, Phys. Rev. D **68**, 123511 (2003) [astro-ph/0212003].
- [178] N. Arkani-Hamed, H. -C. Cheng, M. A. Luty and S. Mukohyama, JHEP **0405**, 074 (2004) [hep-th/0312099].
- [179] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004) [hep-th/0312310].
- [180] V. A. Kostelecky, N. Russell and J. Tasson, Phys. Rev. Lett. **100**, 111102 (2008) [arXiv:0712.4393 [gr-qc]].
- [181] V. A. Kostelecky and R. Potting, Gen. Rel. Grav. **37**, 1675 (2005) [Int. J. Mod. Phys. D **14**, 2341 (2005)] [gr-qc/0510124].
- [182] R. Bluhm and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **71**, 065008 (2005) [hep-th/0412320].
- [183] V. A. Kostelecky and J. Tasson, Phys. Rev. Lett. **102**, 010402 (2009) [arXiv:0810.1459 [gr-qc]].

- [184] A. V. Kosteleyky and J. D. Tasson, Phys. Rev. D **83**, 016013 (2011) [arXiv:1006.4106 [gr-qc]].
- [185] R. Bluhm, S. -H. Fung and V. A. Kosteleyky, Phys. Rev. D **77**, 065020 (2008) [arXiv:0712.4119 [hep-th]].
- [186] V. A. Kosteleyky and R. Potting, Phys. Rev. D **79**, 065018 (2009) [arXiv:0901.0662 [gr-qc]].
- [187] B. Altschul, Q. G. Bailey and V. A. Kosteleyky, Phys. Rev. D **81**, 065028 (2010) [arXiv:0912.4852 [gr-qc]].
- [188] A. Kosteleyky, Phys. Lett. B **701**, 137 (2011) [arXiv:1104.5488 [hep-th]].
- [189] A. V. Kosteleyky and N. Russell, Phys. Lett. B **693**, 443 (2010) [arXiv:1008.5062 [hep-ph]].
- [190] V. A. Kosteleyky, N. Russell and R. Tso, Phys. Lett. B **716**, 470 (2012) [arXiv:1209.0750 [hep-th]].
- [191] D. Bao, S. Chern, Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer, 1991.
- [192] G. Randers, Phys. Rev. **59**, 195 (1941).
- [193] G. S. Asanov, Found. Phys. **11**, 1981
- [194] G. S. Asanov, Found. Phys. **13**, 501 (1983).
- [195] Z. Chang and X. Li, Phys. Lett. B **663**, 103 (2008).
- [196] Z. Chang and X. Li, Phys. Lett. B **668**, 453 (2008) [arXiv:0806.2184 [gr-qc]].
- [197] Z. Chang and X. Li, Phys. Lett. B **676**, 173 (2009) [arXiv:0901.1023 [gr-qc]].
- [198] C. Pfeifer and M. N. R. Wohlfarth, Phys. Rev. D **85**, 064009 (2012) [arXiv:1112.5641 [gr-qc]].
- [199] C. Pfeifer and M. N. R. Wohlfarth, Phys. Lett. B **712**, 284 (2012) [arXiv:1109.6005 [gr-qc]].
- [200] C. Pfeifer and M. N. R. Wohlfarth, Phys. Rev. D **84**, 044039 (2011) [arXiv:1104.1079 [gr-qc]].
- [201] S. I. Vacaru, Class. Quant. Grav. **28**, 215001 (2011) [arXiv:1008.4912 [math-ph]].
- [202] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, arXiv:1309.4671 [hep-th].
- [203] T. G. Rizzo, JHEP **1011**, 156 (2010) [arXiv:1008.0380 [hep-ph]].
- [204] H. F. Gonner and G. Y. .Bogoslovsky, Gen. Rel. Grav. **31**, 1383 (1999) [gr-qc/9701067].
- [205] G. Y. .Bogoslovsky and H. F. Goenner, Phys. Lett. A **244**, 222 (1998) [gr-qc/9804082].

- [206] G. Y. .Bogoslovsky and H. F. Goenner, *Gen. Rel. Grav.* **31**, 1565 (1999) [gr-qc/9904081].
- [207] G. Y. .Bogoslovsky and H. F. Goenner, *Phys. Lett. A* **323**, 40 (2004) [hep-th/0402172].
- [208] G. Y. .Bogoslovsky, *Phys. Lett. A* **350**, 5 (2006) [hep-th/0511151].
- [209] V. Balan, G. Y. .Bogoslovsky, S. S. Kokarev, D. G. Pavlov, S. V. Siparov and N. Voicu, *J. Mod. Phys.* **3** (2012) 1314 [arXiv:1111.4346 [gr-qc]].
- [210] G. W. Gibbons, J. Gomis and C. N. Pope, *Phys. Rev. D* **76**, 081701 (2007) [arXiv:0707.2174 [hep-th]].
- [211] S. Mignemi, *Phys. Rev. D* **76**, 047702 (2007) [arXiv:0704.1728 [gr-qc]].
- [212] D. V. Ahluwalia and S. P. Horvath, *JHEP* **1011**, 078 (2010) [arXiv:1008.0436 [hep-ph]].
- [213] W. Muck, *Phys. Lett. B* **670**, 95 (2008) [arXiv:0806.0737 [hep-th]].
- [214] E. Alvarez and R. Vidal, *Phys. Rev. D* **77**, 127702 (2008) [arXiv:0803.1949 [hep-th]].
- [215] A. P. Kouretsis, M. Stathakopoulos and P. C. Stavrinos, *Phys. Rev. D* **79**, 104011 (2009) [arXiv:0810.3267 [gr-qc]].
- [216] A. P. Kouretsis, M. Stathakopoulos and P. C. Stavrinos, *Phys. Rev. D* **82**, 064035 (2010) [arXiv:1003.5640 [gr-qc]].
- [217] P. Stavrinos, *Gen. Rel. Grav.* **44**, 3029 (2012) [arXiv:1202.3882 [gr-qc]].
- [218] J. Skakala and M. Visser, *J. Phys. Conf. Ser.* **189**, 012037 (2009) [arXiv:0810.4376 [gr-qc]].
- [219] F. Girelli, S. Liberati and L. Sindoni, *Phys. Rev. D* **75**, 064015 (2007) [gr-qc/0611024].
- [220] J. Skakala and M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **28**, 065007 (2011) [arXiv:1012.4467 [gr-qc]].
- [221] X. Li and Z. Chang, *Phys. Lett. B* **692**, 1 (2010) [arXiv:0909.3713 [gr-qc]].
- [222] G. W. Gibbons, C. A. R. Herdeiro, C. M. Warnick and M. C. Werner, *Phys. Rev. D* **79**, 044022 (2009) [arXiv:0811.2877 [gr-qc]].
- [223] V. Perlick, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 365 (2006) [gr-qc/0508029].
- [224] L. Sindoni, *Phys. Rev. D* **77**, 124009 (2008).