



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

JOEL VITOR BARRETO SANTOS

**UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DA MUDANÇA CONFORME DA MÉTRICA
RIEMANNIANA EM VARIEDADES COMPLETAS**

FORTALEZA

2025

JOEL VITOR BARRETO SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DA MUDANÇA CONFORME DA MÉTRICA
RIEMANNIANA EM VARIEDADES COMPLETAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S235e Santos, Joel Vitor Barreto.
Um estudo sobre a utilização da mudança conforme da métrica riemanniana em variedades completas /
Joel Vitor Barreto Santos. – 2025.
84 f.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral.
1. Mudança conforme. 2. Hipersuperfícies. 3. Variedade completa. I. Título.

CDD 510

JOEL VITOR BARRETO SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DA MUDANÇA CONFORME DA MÉTRICA
RIEMANNIANA EM VARIEDADES COMPLETAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 12/03/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marco Magliaro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luciano Mari
Università degli Studi di Milano (UNIMI)

À Jeová por todas as bênçãos e à minha família pelo apoio e por sempre confiar em minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Paulo Cezar e Sonia Maria, pelo apoio e, principalmente, pela confiança depositada em mim desde o início dessa jornada.

À minha esposa Gecicleide de Freitas pela paciência, perseverança, em especial durante o período de meu mestrado, e por ser meu porto seguro em todas as dificuldades e aflições.

Ao Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral, pela excelente orientação e por confiar em meu potencial.

Aos professores participantes da banca examinadora Marco Magliaro e Luciano Mari pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos os professores da Universidade Federal do Ceará que fizeram parte da minha formação pelos valiosos ensinamentos.

Aos excelentes colegas da turma de mestrado, Diego Willian, Eduardo Albert, George Lucas, Maria Eduarda, Marcos Alexandre, Matheus Miler, Maicon Lima, Thiago Lima e Tiago de Vasconcelos, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas e, especialmente, pelos momentos de descontração.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A Geometria existe por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”
(Johannes Kepler)

RESUMO

No presente trabalho será estudada uma ferramenta importante na área da Geometria Riemanniana, a mudança conforme de uma métrica Riemanniana. Fazendo uso de tal ferramenta no contexto de variedades completas, serão provados três teoremas principais: um teorema de pinching para hipersuperfícies completas da esfera, uma generalização do teorema de Bonnet-Myers e uma estimativa de diâmetro para H-hipersuperfícies estáveis e imersas em um ambiente de curvatura seccional limitada inferiormente.

Palavras-chave: mudança conforme; hipersuperfícies; variedade completa.

ABSTRACT

In the present work, an important tool in the area of Riemannian Geometry will be studied, the conformal change of a Riemannian metric. Making use of such a tool in the context of complete manifolds, three main theorems will be proved: a pinching theorem for complete submanifolds of the sphere, a generalization of the Bonnet-Myers theorem and a diameter estimate for a stable H -hypersurface immersed in an ambient manifold with sectional curvature bounded from below.

Keywords: conformal change; hypersurfaces; complete manifold.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curva γ_j	29
---------------------------------------	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RESULTADOS PRELIMINARES	12
2.1	Tensores	12
2.2	Segunda Forma Fundamental e Equações Fundamentais	21
2.3	Variedades completas	22
2.4	Variação da Energia	34
2.5	Mudança Conforme	37
3	RESULTADOS	41
3.1	Pinching Theorem para uma subvariedade completa da esfera	41
3.1.1	<i>Estimativa para $\Delta \Phi ^2$ e alguns lemas</i>	46
3.1.2	<i>Demonstração do Teorema 3.1.2</i>	53
3.2	Generalização do Teorema de Bonnet-Myers	62
3.3	Estimativa de diâmetro para uma H -hipersuperfície estável	72
4	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

O intuito da presente dissertação é estudar a utilização da mudança conforme de uma métrica Riemanniana em diferentes contextos da geometria, seja para obter propriedades topológicas ou estimativas de diâmetro. Antes de mais detalhes serem dados, vejamos do que se trata tal conceito:

Dadas M uma variedade suave, g e \bar{g} métricas Riemannianas em M , $p \in M$ e vetores não nulos u e v , tangentes a M em p , os ângulos θ e $\bar{\theta}$ entre u e v , com respeito a g e \bar{g} , respectivamente, são definidos por

$$\cos(\theta) = \frac{g(u, v)}{\sqrt{g(u, u) \cdot g(v, v)}} \quad \text{e} \quad \cos(\bar{\theta}) = \frac{\bar{g}(u, v)}{\sqrt{\bar{g}(u, u) \cdot \bar{g}(v, v)}}.$$

Diz-se que as métricas g e \bar{g} são conformemente relacionadas, ou conforme uma a outra, quando os ângulos entre quaisquer dois vetores tangentes a M , com respeito a g e \bar{g} , são sempre iguais. Nesse caso, a mudança entre as métricas g e \bar{g} é chamada uma mudança conforme na métrica Riemanniana.

Para que duas métricas g e \bar{g} em M sejam conformemente relacionadas é necessário e suficiente que exista uma função suave e positiva ρ em M satisfazendo $\bar{g} = \rho \cdot g$. Tal relação entre métricas conformes nos permite obter diversas fórmulas relacionando quantidades geométricas definidas a partir de cada uma destas métricas (algumas delas desempenharão um papel importante neste trabalho e, em vista disso, serão abordadas na seção 2.5).

A perspectiva adotada para este trabalho será da mudança conforme como ferramenta para se obter consequências topológicas e geométricas sob as mais distintas hipóteses. Uma sugestão para uma abordagem com outro ponto de vista, com teoremas de rigidez envolvendo mudança conforme, é o trabalho de Yano e Obata [17]. Os primeiros indícios de utilização da mudança conforme para obtenção de propriedades de compacidade ou rigidez se encontram nos trabalhos de Schoen e Yau [15], Fischer-Colbrie [9] e Shen e Ye [16].

Para uma organização mais didática, esta dissertação se encontra dividida em duas partes, a primeira parte sendo destinada a uma revisão de conceitos e resultados que serão utilizados amplamente no decorrer do texto, enquanto a segunda parte será dedicada a apresentação e demonstração dos três teoremas principais deste trabalho. O primeiro destes teoremas, devido a Magliaro et al. [12], trata de uma caracterização de subvariedades completas da esfera, o qual estende um resultado já conhecido, cuja prova se deve a Alencar e do Carmo [1]. O segundo, obtido por Catino e Roncoroni em [4], corresponde a uma generalização do teorema de

Bonnet-Myers que apresenta aplicações na área da cosmologia, além de implicar uma extensão para um resultado devido a Cheng [6] que fornece uma cota superior para o primeiro autovalor de $-\Delta$. O último teorema, provado por Elbert, Nelli e Rosenberg em [8], aborda uma estimativa de diâmetro para hipersuperfícies estáveis de curvatura média constante em um ambiente de curvatura seccional limitada inferiormente.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é organizar as definições e os principais resultados que serão abordados ao longo do texto. Todas as demonstrações aqui omitidas, assim como apresentações mais detalhadas, podem ser encontradas em [3].

2.1 Tensores

Nesta seção serão apresentadas algumas definições a respeito de tensores assim como alguns resultados que serão recorrentes no decorrer deste trabalho. Nesta seção M denotará uma n -variedade Riemanniana com métrica g e conexão Riemanniana ∇ .

Definição 2.1.1. *Um tensor T de ordem r (também denominado um r -tensor ou um tensor do tipo $(0, r)$) em M é uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ vezes}} \mapsto C^\infty(M).$$

Em vista da linearidade, tensores são objetos pontuais. Para tornar isto mais claro, consideremos T um r -tensor em M , $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ e (U, x^1, \dots, x^n) uma carta em torno de p . Em U podemos escrever

$$Y_i = \sum_j Y_i^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i \in \{1, \dots, r\}.$$

Sejam $V \subset U$ uma vizinhança de p tal que $\bar{V} \subset U$ e $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ campos satisfazendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ em V . Pela multilinearidade de T vale que

$$T(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_{j_1, \dots, j_r} Y_1^{j_1} \cdots Y_r^{j_r} \cdot T(X_{j_1}, \dots, X_{j_r}) = \sum_{j_1, \dots, j_r} Y_1^{j_1} \cdots Y_r^{j_r} \cdot T_{j_1 \dots j_r}$$

em V . A expressão acima mostra que o valor da função $T(Y_1, \dots, Y_r)$ em p só depende dos valores dos campos Y_1, \dots, Y_r e das funções $T(X_{j_1}, \dots, X_{j_r})$ no ponto p .

Definição 2.1.2. *Seja T um r -tensor em M . A diferencial covariante de T é o tensor de ordem $r+1$ denotado por ∇T e definido por*

$$(\nabla T)(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_i T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_i, \dots, Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante de T na direção de Z é o r -tensor $\nabla_Z T$ dado por

$$(\nabla_Z T)(Y_1, \dots, Y_r) = (\nabla T)(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

Em posse da métrica g é possível definir um produto interno no espaço dos tensores.

Definição 2.1.3. *Sejam T e S r -tensores em M . Dada uma base coordenada local $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ com base dual (dx^1, \dots, dx^n) podemos escrever, na vizinhança coordenada,*

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j_1, \dots, j_r} T_{j_1 \dots j_r} \cdot dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}, \\ S &= \sum_{j_1, \dots, j_r} S_{j_1 \dots j_r} \cdot dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}. \end{aligned}$$

Daí, definimos

$$\langle T, S \rangle = \sum_{j_1, \dots, j_r, i_1, \dots, i_r} T_{j_1 \dots j_r} \cdot S_{i_1 \dots i_r} \cdot g^{j_1 i_1} \dots g^{j_r i_r},$$

onde (g^{ij}) é a inversa da matriz da métrica g no referencial $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, e

$$|T|^2 = \langle T, T \rangle.$$

Em um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M , com base dual $\{e^1, \dots, e^n\}$, um r -tensor T em M se escreve como

$$T = \sum_{j_1, \dots, j_r} T_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

e sua norma ao quadrado assume a expressão

$$|T|^2 = \sum_{j_1, \dots, j_r} (T_{j_1 \dots j_r})^2.$$

Definição 2.1.4. *Seja T um r -tensor em M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local. Definimos o (traço) Laplaciano de T como o r -tensor*

$$tr(\nabla^2 T)(Y_1, \dots, Y_r) := \sum_i (\nabla^2 T)(Y_1, \dots, Y_r, e_i, e_i).$$

Também podemos escrever o Laplaciano de T da seguinte forma

$$tr(\nabla^2 T) = \sum_i \left[\nabla_{e_i} (\nabla_{e_i} T) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} T \right],$$

ou, de forma mais geral, vale

$$(\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_r, Y_2, Y_1) = (\nabla_{Y_1} (\nabla_{Y_2} T) - \nabla_{\nabla_{Y_1} Y_2} T)(X_1, \dots, X_r),$$

para quaisquer $X_1, \dots, X_r, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_r, Y_2, Y_1) &= Y_1((\nabla T)(X_1, \dots, X_r, Y_2)) - (\nabla T)(X_1, \dots, X_r, \nabla_{Y_1} Y_2) \\
 &\quad - \sum_i (\nabla T)(Y_2, X_1, \dots, \nabla_{Y_1} X_i, \dots, X_r) \\
 &= Y_1((\nabla_{Y_1} T)(X_1, \dots, X_r)) - (\nabla_{\nabla_{Y_1} Y_2} T)(X_1, \dots, X_r) \\
 &\quad - \sum_i (\nabla_{Y_2} T)(X_1, \dots, \nabla_{Y_1} X_i, \dots, X_r) \\
 &= (\nabla_{Y_1} (\nabla_{Y_2} T) - \nabla_{\nabla_{Y_1} Y_2} T)(X_1, \dots, X_r).
 \end{aligned}$$

Serão apresentadas agora três proposições acerca dos objetos até aqui definidos, as quais desempenharão papel fundamental na prova do último resultado desta seção. A primeira é a compatibilidade entre o produto interno de tensores e a derivada covariante. Nessa proposição e no que segue, usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ao invés de g para tornar a notação mais limpa, embora haja a possibilidade de confusão com a notação para o produto interno de tensores (note que usaremos letras minúsculas para campos e maiúsculas para tensores a fim de reduzir o risco desta confusão).

Proposição 2.1.1. *Dados dois tensores de ordem s , T e S , em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$ vale que*

$$X \langle T, S \rangle = \langle \nabla_X T, S \rangle + \langle T, \nabla_X S \rangle.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local de M com base dual $\{e^1, \dots, e^n\}$. Neste referencial podemos escrever

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i_1, \dots, i_s} S_{i_1, \dots, i_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \\
 T &= \sum_{i_1, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \\
 \nabla_X S &= \sum_{i_1, \dots, i_s} (\nabla_X S)_{i_1, \dots, i_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \\
 \nabla_X T &= \sum_{i_1, \dots, i_s} (\nabla_X T)_{i_1, \dots, i_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s}
 \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\langle T, S \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_s} S_{i_1, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s}.$$

Por um lado temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X S, T \rangle &= \sum_{i_1, \dots, i_s} (\nabla_X S)_{i_1, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} = \sum_{i_1, \dots, i_s} \left(X(S_{i_1, \dots, i_s}) - \sum_k S_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} \right) T_{i_1, \dots, i_s} \\ \langle \nabla_X T, S \rangle &= \sum_{i_1, \dots, i_s} \left(X(T_{i_1, \dots, i_s}) - \sum_k T_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} \right) S_{i_1, \dots, i_s}\end{aligned}$$

e, por outro,

$$X\langle T, S \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_s} [X(S_{i_1, \dots, i_s}) T_{i_1, \dots, i_s} + S_{i_1, \dots, i_s} X(T_{i_1, \dots, i_s})].$$

Como

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X S, T \rangle + \langle S, \nabla_X T \rangle &= \sum_{i_1, \dots, i_s} [X(S_{i_1, \dots, i_s}) T_{i_1, \dots, i_s} + S_{i_1, \dots, i_s} X(T_{i_1, \dots, i_s})] \\ &\quad - \sum_{i_1, \dots, i_s} \sum_k [S_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} + T_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} S_{i_1, \dots, i_s}] \\ &= X\langle S, T \rangle - \sum_{i_1, \dots, i_s} \sum_k [S_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} + T_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} S_{i_1, \dots, i_s}]\end{aligned}$$

é suficiente provar que, para cada k

$$\sum_{i_1, \dots, i_s} (S_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} + T_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} S_{i_1, \dots, i_s}) = 0.$$

Isto segue diretamente da linearidade e da compatibilidade entre a conexão Riemanniana de M e a métrica g

$$\begin{aligned}\sum_{i_1, \dots, i_s} S_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} &= \sum_{i_1, \dots, i_s} \sum_m S_{i_1, \dots, \langle \nabla_X e_{i_k}, e_m \rangle e_m, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_s} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_s} \sum_m -\langle e_{i_k}, \nabla_X e_m \rangle S_{i_1, \dots, i_{k-1}, m, i_{k+1}, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_s} \\ &= - \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_s, m} S_{i_1, \dots, m, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, \nabla_X e_m, \dots, i_s} \\ &\stackrel{m \leftrightarrow i_k}{=} -S_{i_1, \dots, i_s} T_{i_1, \dots, \nabla_X e_{i_k}, \dots, i_s},\end{aligned}$$

o que equivale ao desejado. □

A segunda proposição fornece uma relação entre o laplaciano da norma de um tensor e o (traço) laplaciano desse tensor.

Proposição 2.1.2. *Se S é um r -tensor em M então*

$$\frac{1}{2} \Delta |S|^2 = |\nabla S|^2 + \langle \text{tr}(\nabla^2 S), S \rangle.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local. Pela proposição anterior temos

$$\begin{aligned}
 \Delta \left(\frac{1}{2} |S|^2 \right) &= \sum_i \left[\nabla_{e_i} \left(\nabla_{e_i} \left(\frac{1}{2} \langle S, S \rangle \right) \right) - (\nabla_{e_i} e_i) \left(\frac{1}{2} \langle S, S \rangle \right) \right] \\
 &= \sum_i \left[\nabla_{e_i} (\langle \nabla_{e_i} S, S \rangle) - \langle \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} S, S \rangle \right] \\
 &= \sum_i \left[\langle \nabla_{e_i} (\nabla_{e_i} S), S \rangle + \langle \nabla_{e_i} S, \nabla_{e_i} S \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} S, S \rangle \right] \\
 &= \sum_i \left[\langle \nabla_{e_i} (\nabla_{e_i} S) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} S, S \rangle + \langle \nabla_{e_i} S, \nabla_{e_i} S \rangle \right] \\
 &= \langle \text{tr}(\nabla^2 S), S \rangle + \sum_i \langle \nabla_{e_i} S, \nabla_{e_i} S \rangle.
 \end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\sum_i \langle \nabla_{e_i} S, \nabla_{e_i} S \rangle = |\nabla S|^2,$$

pois

$$\begin{aligned}
 |\nabla S|^2 &= \sum_{k, i_1, \dots, i_s} (\nabla S)(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, e_k)^2 = \sum_k \left(\sum_{i_1, \dots, i_s} (\nabla_{e_k} S)(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})^2 \right) \\
 &= \sum_k |\nabla_{e_k} S|^2 \\
 &= \langle \nabla_{e_k} S, \nabla_{e_k} S \rangle.
 \end{aligned}$$

□

A última proposição desta sequência apresenta uma forma de comutar a segunda derivada covariante de um tensor.

Proposição 2.1.3. *Se T é um s -tensor em M então*

$$(\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_s, U, V) - (\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_s, V, U) = - \sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, R(U, V)X_i, \dots, X_s),$$

onde R é o tensor de curvatura de M , $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$.

Demonstração. Por definição temos

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_s, U, V) &= V((\nabla T)(X_1, \dots, X_s, U)) - (\nabla T)(X_1, \dots, X_s, \nabla_V U) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^s (\nabla T)(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s, U)
 \end{aligned}$$

o que, aplicando novamente a definição e organizando os termos, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
& V(U(T(X_1, \dots, X_s))) - V\left(\sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, \nabla_U X_i, \dots, X_s)\right) - (\nabla_V U)(T(X_1, \dots, X_s)) \\
& + \sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, \nabla_{\nabla_V U} X_i, \dots, X_s) - U\left(\sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s)\right) \\
& + \sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, \nabla_U \nabla_V X_i, \dots, X_s) + \sum_{i \neq j}^s T(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, \nabla_U X_j, \dots, X_s). \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Notemos agora que o segundo e o quinto termo juntos formam uma expressão simétrica em U e V , logo quando fizermos a diferença com a segunda derivada covariante de T na ordem trocada de U e V esses termos serão cancelados. O mesmo vale para o sétimo termo.

Os quatro termos de $(\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_s, U, V) - (\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_s, V, U)$ provenientes do primeiro e o terceiro termo de (2.1) são

$$V(U(T(X_1, \dots, X_s))) - U(V(T(X_1, \dots, X_s))) - \nabla_V U(T(X_1, \dots, X_s)) + \nabla_U V(T(X_1, \dots, X_s)),$$

ou seja,

$$[V, U](T(X_1, \dots, X_s)) - (\nabla_V U - \nabla_U V)(T(X_1, \dots, X_s)) = 0,$$

pela simetria da conexão. Por fim, os termos que sobram são

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^s [T(X_1, \dots, \nabla_U \nabla_V X_i, \dots, X_s) - T(X_1, \dots, \nabla_V \nabla_U X_i, \dots, X_s) \\
& + T(X_1, \dots, \nabla_{\nabla_V U} X_i, \dots, X_s) - T(X_1, \dots, \nabla_{\nabla_U V} X_i, \dots, X_s)] \\
& = \sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, \nabla_U \nabla_V X_i - \nabla_V \nabla_U X_i - \nabla_{[U, V]} X_i, \dots, X_s) \\
& = - \sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, R(U, V)X_i, \dots, X_s).
\end{aligned}$$

□

Para concluir essa seção será apresentada a demonstração de uma fórmula, obtida por Cheng e Yau em [5], para o laplaciano da norma ao quadrado de um 2-tensor simétrico que satisfaz a equação de Codazzi. Antes disso é interessante fixar uma notação com respeito as funções componentes da diferencial covariante de um tensor: Dados um r -tensor T em M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial local de M adotaremos a seguinte notação

$$(\nabla T)(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e_k) := T_{i_1 \dots i_r; k}, \quad (\nabla^2 T)(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e_k, e_j) := T_{i_1 \dots i_r; k j}, \quad \text{etc.}$$

Para o caso particular de 0-tensores, isto é funções, convencionaremos

$$f_{;i} = e_i(f) \quad \text{e} \quad f_{;ij} = e_i(e_j(f)) - (\nabla_{e_j} e_i) f.$$

Definição 2.1.5. Dado um 2-tensor T em M , dizemos que T satisfaz a equação de Codazzi quando

$$(\nabla T)(X, Y, Z) = (\nabla T)(X, Z, Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Equivalentemente, T satisfaz a equação de Codazzi se, para qualquer referencial local $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M , as funções componentes de (∇T) cumprem

$$T_{ij;k} = T_{ik;j}, \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

A última observação antes de provarmos a fórmula citada acima diz respeito a tensores simétricos: Se T é um 2-tensor simétrico então sua diferencial covariante ∇T é simétrico nas duas primeiras entradas.

De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} (\nabla T)(X, Y, Z) &= Z(T(X, Y)) - T(\nabla_Z X, Y) - T(X, \nabla_Z Y) \\ &= Z(T(Y, X)) - T(\nabla_Z Y, X) - T(Y, \nabla_Z X) \\ &= (\nabla T)(Y, X, Z). \end{aligned}$$

De modo geral, se T é um r -tensor simétrico em duas entradas então ∇T (consequentemente $\nabla^k T$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$) herda essa simetria nas entradas correspondentes. A prova dessa afirmação segue novamente da definição da diferencial covariante de um tensor, assim como foi feito acima.

Proposição 2.1.4. (Cheng e Yau) Sejam T um 2-tensor simétrico em M que satisfaz a equação de Codazzi e $p \in M$. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local de M que diagonaliza T em p , isto é $T_{ij}(p) = T(e_i, e_j)(p) = \mu_i \delta_{ij}$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então, em p , vale

$$\frac{1}{2} \Delta |T|^2 = |\nabla T|^2 + \sum_i \mu_i \cdot \text{tr}(T)_{;ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij} (\mu_i - \mu_j)^2,$$

onde $\text{tr}(T) = \sum_k T_{kk}$ e R_{ijij} é a curvatura seccional do plano gerado pelos vetores $e_i(p)$ e $e_j(p)$ de $T_p M$.

Demonstração. Pela Proposição 2.1.2 vale

$$\frac{1}{2} \Delta |T|^2 = |\nabla T|^2 + \langle \text{tr}(\nabla^2 T), T \rangle. \quad (2.2)$$

Vamos nos concentrar então no termo $\langle tr(\nabla^2 T), T \rangle$. Temos, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, que

$$\begin{aligned}
 tr(\nabla^2 T)_{ij} &= \sum_k T_{ij;kk} \\
 &= \sum_k (T_{ij;kk} - T_{ik;jk}) + \sum_k (T_{ik;jk} - T_{ik;kj}) + \sum_k (T_{ik;kj} - T_{kk;ij}) + \sum_k (T_{kk})_{;ij} \\
 &= \sum_k (T_{ij;kk} - T_{ik;jk}) + \sum_k (T_{ik;kj} - T_{kk;ij}) + \sum_k (T_{kk})_{;ij} \\
 &\quad - \sum_k [T(R(e_j, e_k)e_i, e_k) + T(e_i, R(e_j, e_k)e_k)] \\
 &= \sum_k (T_{ij;kk} - T_{ik;jk}) + \sum_k (T_{ik;kj} - T_{kk;ij}) + \sum_k (T_{kk})_{;ij} \\
 &\quad - \sum_{k,m} T_{mk} R_{mikj} - \sum_{k,m} T_{im} R_{mkkj}, \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos a Proposição 2.1.3, na última igualdade escrevemos $R(e_j, e_k)e_i$ e $R(e_j, e_k)e_k$ no referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, isto é

$$R(e_j, e_k)e_i = \sum_m R_{jkim} \cdot e_m \quad \text{e} \quad R(e_j, e_k)e_k = \sum_m R_{jkk m} \cdot e_m,$$

e usamos as simetrias

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad \text{e} \quad R_{ijkl} = -R_{jikl},$$

e, na segunda igualdade, foi usado

$$\sum_k T_{kk;ij} = \sum_k (T_{kk})_{;ij}.$$

É importante destacar aqui que essa passagem não é apenas uma manipulação na notação, as parcelas do lado esquerdo da igualdade acima são as funções $(\nabla^2 T)(e_k, e_k, e_i, e_j)$ enquanto as parcelas do lado direito são as derivadas covariantes da função T_{kk} , logo, não é imediato que as somas coincidam. Mas de fato elas coincidem e a justificativa segue da simetria de ∇T nas duas primeiras entradas (a qual é consequência da simetria de T):

$$\begin{aligned}
 \sum_k T_{kk;ij} &= \sum_k [e_j((\nabla T)(e_k, e_k, e_i)) - (\nabla T)(e_k, e_k, \nabla_{e_j} e_i) - 2 \cdot (\nabla T)(\nabla_{e_j} e_k, e_k, e_i)] \\
 &= \sum_k \{e_j[e_i(T_{kk}) - 2 \cdot T(\nabla_{e_i} e_k, e_k)] - (\nabla_{e_j} e_i)(T_{kk}) - 2 \cdot T(\nabla_{\nabla_{e_j} e_i} e_k, e_k)\} \\
 &= \sum_k [e_j(e_i(T_{kk})) - (\nabla_{e_j} e_i)(T_{kk})] = \sum_k (T_{kk})_{;ij},
 \end{aligned}$$

onde foram usadas, na segunda e na terceira igualdade, respectivamente, as relações

$$\sum_k (\nabla T)(\nabla_{e_j} e_k, e_k, e_i) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k T(\nabla_X e_k, e_k) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

as quais são justificadas abaixo:

$$\begin{aligned}
\sum_k (\nabla T)(\nabla_{e_j} e_k, e_k, e_i) &= \sum_{k,m} \langle \nabla_{e_j} e_k, e_m \rangle (\nabla T)(e_m, e_k, e_i) = - \sum_{k,m} \langle e_k, \nabla_{e_j} e_m \rangle (\nabla T)(e_m, e_k, e_i) \\
&= - \sum_m (\nabla T)(e_m, \nabla_{e_j} e_m, e_i) \\
&= - \sum_m (\nabla T)(\nabla_{e_j} e_m, e_m, e_i), \\
\sum_k T(\nabla_X e_k, e_k) &= - \sum_{k,m} \langle e_k, \nabla_X e_m \rangle T(e_m, e_k) = - \sum_m T(\nabla_X e_m, e_m).
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de que T satisfaz a equação de Codazzi, obtemos que $\nabla^2 T$ possui uma simetria entre a segunda e a terceira entrada, ou seja, vale

$$T_{ij;kl} = T_{ik;jl}.$$

Juntando isso com a simetria de $\nabla^2 T$ com respeito as duas primeiras entradas (consequência da simetria de T), obtemos

$$T_{ij;kk} = T_{ik;jk} \quad \text{e} \quad T_{ik;kj} = T_{kk;ij}.$$

Substituindo essa informação em (2.3) vem que

$$tr(\nabla^2 T)_{ij} = \sum_k (T_{kk})_{;ij} - \sum_{k,m} T_{mk} R_{mikj} - \sum_k T_{im} R_{mkkj}.$$

Dessa forma, a igualdade (2.2) se torna

$$\frac{1}{2} \Delta |T|^2 = |\nabla T|^2 + \sum_{i,j,k} T_{ij} (T_{kk})_{;ij} - \sum_{i,j,k,m} T_{ij} T_{mk} R_{mikj} - \sum_{i,j,k,m} T_{ij} T_{im} R_{mkkj}.$$

Visto que a igualdade acima vale em todos os pontos do domínio dos campos $\{e_i, \dots, e_n\}$ então, no ponto p , onde $T_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta |T|^2 &= |\nabla T|^2 + \sum_i \mu_i (tr(T))_{;ii} - \sum_{i,k} \mu_i \mu_k R_{kiki} - \sum_{i,k} \mu_i^2 R_{ikki} \\
&= |\nabla T|^2 + \sum_i \mu_i (tr(T))_{;ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} R_{ikik} (\mu_i - \mu_k)^2,
\end{aligned}$$

já que, pelas simetrias de R ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,k} R_{ikik} (\mu_i - \mu_k)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} R_{ikik} \mu_i^2 - \sum_{i,k} R_{ikik} \mu_i \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k} R_{ikik} \mu_k^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} R_{ikik} \mu_i^2 - \sum_{i,k} R_{kiki} \mu_i \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k} R_{kiki} \mu_k^2 \\
&= \sum_{i,k} R_{ikik} \mu_i^2 - \sum_{i,k} R_{kiki} \mu_i \mu_k \\
&= - \sum_{i,k} R_{ikki} \mu_i^2 - \sum_{i,k} R_{kiki} \mu_i \mu_k.
\end{aligned}$$

□

2.2 Segunda Forma Fundamental e Equações Fundamentais

Nesta subseção consideraremos uma imersão $i : M^n \rightarrow (\bar{M}^{n+k}, \bar{g})$ e vamos munir M com a métrica induzida por i . Além disso, fixaremos as seguintes notações:

- $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \bar{M} , enquanto ∇ denota a conexão Riemanniana de M , a qual coincide com

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})^T,$$

onde \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais de $i_*(X)$ e $i_*(Y)$ e $(\cdot)^T$ significa a componente tangente à $M \cong i(M)$.

- A segunda forma fundamental de M será denotada por A , ou seja

$$A(X, Y) = (\nabla_Y X)^N, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

onde X^N denota a componente normal à M de X .

- R e \bar{R} denotam, respectivamente, as curvaturas de M e \bar{M} .

Proposição 2.2.1. *São válidas as seguintes relações*

1. (Equação de Gauss)

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) = \bar{g}(R(X, Y)Z, W) - \bar{g}(A(Y, W), A(X, Z)) + \bar{g}(A(X, W), A(Y, Z)),$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$;

2. (Equação de Codazzi)

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^N = (\nabla_Y^N A)(X, Z) - (\nabla_X^N A)(Y, Z),$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] páginas 135 e 137. □

Na equação de Codazzi a notação ∇^N significa a derivada covariante normal, ou seja

$$(\nabla_X^N A)(Y, Z) = ((\nabla_X A)(X, Y))^N = (\nabla_X A(Y, Z))^N - A(\nabla_X Y, Z) - A(Y, \nabla_X Z).$$

No caso de codimensão 1 podemos reescrever a equação de Codazzi da seguinte forma:

Seja ν uma escolha de normal unitário e definamos o 2-tensor simétrico $A_\nu(X, Y) = \bar{g}(A(X, Y), \nu)$.

Em particular, como $\nabla_X \nu$ é tangente a M , para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ (já que $|\nu| \equiv 1$), vale

$$(\nabla_Z A_\nu)(X, Y) = \bar{g}((\nabla_Z^N A)(X, Y), \nu), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

pois

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z A_v)(X, Y) &= Z(A_v(X, Y)) - A_v(\nabla_Z X, Y) - A_v(X, \nabla_Z Y) \\
&= Z(\bar{g}(A(X, Y), v)) - \bar{g}(A(\nabla_Z X, Y), v) - \bar{g}(A(X, \nabla_Z Y), v) \\
&= \bar{g}(Z(A(X, Y)), v) - \bar{g}(A(X, Y), \nabla_Z v) - \bar{g}(A(\nabla_Z X, Y) - A(X, \nabla_Z Y), v) \\
&= \bar{g}((\nabla_Z^N A)(X, Y), v).
\end{aligned}$$

Dessa forma, a equação de Codazzi se escreve como

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y), v) = (\nabla_Y A_v)(X, Z) - (\nabla_X A_v)(Y, Z). \quad (2.4)$$

2.3 Variedades completas

O objetivo desta seção é apresentar os principais conceitos e resultados a respeito de variedades completas, como o tão conhecido Teorema de Hopf-Rinow. A parte final será dedicada a demonstrações de alguns resultados que serão primordiais na prova dos três teoremas principais do presente trabalho. A menos de menção do contrário todas as variedades daqui em diante serão supostas conexas.

Definição 2.3.1. Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é (geodesicamente) completa se, para todo $p \in M$, o mapa exponencial, \exp_p , está definido em todo $T_p M$, ou seja, toda geodésica $\gamma(t)$ começando em p está definida para todo instante $t \in \mathbb{R}$.

Quando a métrica em questão for evidente, diremos apenas que M é completa. Da mesma forma, quando M estiver munida de duas métricas g e \bar{g} , diremos apenas que g , ou \bar{g} , é completa.

O próximo passo é definir uma função distância em uma variedade Riemanniana M , a qual está intimamente ligada tanto a estrutura diferenciável de M quanto a estrutura topológica (Ver Proposição 2.3.2).

Definição 2.3.2. Dada uma variedade Riemanniana (M, g) e $p, q \in M$, definimos

$$d(p, q) = \inf\{l(c); c \text{ é uma curva suave por partes ligando } p \text{ e } q\},$$

onde $l(c)$ é o comprimento da curva c , ou seja, se c está definida em $[a, b]$ e $\{t_0, \dots, t_k\}$ é uma

partição de $[a, b]$ tal que $c|_{[t_j, t_{j+1}]}$ é suave, para $j = 0, \dots, k-1$, então

$$l(c) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt.$$

Diremos que uma curva c , suave por partes, ligando p e q é minimizante se $l(c) = d(p, q)$.

Vale destacar que, sendo M conexa, sempre existem curvas suaves por partes ligando quaisquer pontos $p, q \in M$.

Proposição 2.3.1. *Munida da função distância d , M se torna um espaço métrico, ou seja, para quaisquer $p, q, r \in M$ valem as relações*

1. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$;
2. $d(p, q) = d(q, p)$;
3. $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 146. □

Proposição 2.3.2. *A topologia induzida por d em M coincide com a topologia original de M .*

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 146. □

Uma consequência imediata da proposição acima que relaciona a topologia de M com a estrutura métrica oriunda de d é o

Corolário 2.3.1. *Dado $p \in M$ a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(q) = d(p, q)$, é contínua.*

Na realidade vale algo mais forte do que o corolário acima diz.

Corolário 2.3.2. *A função distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Como a topologia induzida por d em M coincide com a topologia original de M é suficiente provar que, se $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow y_0$ (isto é $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$ e $d(y_n, y_0) \rightarrow 0$), então $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x_0, y_0)$.

Com efeito, pela desigualdade triangular vale que

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0) &\leq d(x_n, x_0) + d(x_0, y_n) - d(x_0, y_0) \\ &\leq d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_n) - d(x_0, y_0) \\ &= d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$d(x_0, y_0) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0).$$

Portanto,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

o que prova o desejado. \square

Teorema 2.3.1. (Hopf-Rinow) *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. \exp_p está definida em todo $T_p M$;
2. Os conjuntos fechados e limitados de M são compactos;
3. M é completa como espaço métrico;
4. M é geodesicamente completa;
5. Existe uma sequência de subconjuntos compactos $K_n \subset M$, com $K_n \subset K_{n+1}$ e $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, tal que, se $q_n \notin K_n$, então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.

Além disso, qualquer uma das assertivas acima implica

6. Para qualquer $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p e q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 147. \square

Será dado início agora a uma sequência de quatro resultados auxiliares que, como já comentado, serão fortemente utilizados no decorrer deste trabalho. O primeiro resultado fornece uma condição suficiente para que uma mudança conforme na métrica original de uma variedade completa dê origem a uma métrica também completa.

Proposição 2.3.3. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana completa, $k \geq 0$ e $u \in C^\infty(M)$ tal que $u > \delta > 0$, em M . Então M , munida da métrica $\bar{g} = u^{2k} \cdot g$, é também completa.*

Demonstração. Denotemos por d_g e $d_{\bar{g}}$ as funções distâncias em M induzidas por g e por \bar{g} . Pelo teorema de Hopf-Rinow, para provar o desejado, basta mostrar que $(M, d_{\bar{g}})$ é completo como espaço métrico. Para isto notemos que

$$d_{\bar{g}}(x, y) \geq \delta^k \cdot d_g(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

visto que, para $x, y \in M$ arbitrários e qualquer curva suave por partes $c : [a, b] \rightarrow M$ ligando x e y vale

$$\begin{aligned} l_{\bar{g}}(c) &= \int_a^b (\bar{g}(c'(t), c'(t)))^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b u^k(c(t)) \cdot (g(c'(t), c'(t)))^{\frac{1}{2}} dt \geq \delta^k \int_a^b (g(c'(t), c'(t)))^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \delta^k l_g(c), \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} d_{\bar{g}}(x, y) &= \inf\{l_{\bar{g}}(c); c \text{ é uma curva ligando } x \text{ e } y\} \\ &\geq \delta^k \cdot \inf\{l_g(c); c \text{ é uma curva ligando } x \text{ e } y\} \\ &= \delta^k \cdot d_g(x, y). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, se uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ converge para um ponto x_0 em relação à métrica d_g , então esta sequência também converge para x_0 em relação à métrica $d_{\bar{g}}$.

De fato, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $l_n = d_g(x_n, x_0) < 1$, para todo $n > n_0$.

Sendo (M, g) completa, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma g -geodésica minimizante $\gamma_n : [0, l_n] \rightarrow M$ ligando x_n e x_0 . Em particular, $\gamma_n([0, l_n]) \subset B_1(x_0)$ (bola intrínseca de M na métrica g), logo

$$d_{\bar{g}}(x_n, x_0) \leq l_{\bar{g}}(\gamma_n) = \int_0^{l_n} (\bar{g}(\gamma_n', \gamma_n'))^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{l_n} (u \circ \gamma_n)^k \cdot (g(\gamma_n', \gamma_n'))^{\frac{1}{2}} dt \leq \left(\max_{B_1(x_0)} u^k(x) \right) l_n,$$

para todo $n > n_0$, o que implica $d_{\bar{g}}(x_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, como afirmado.

Portanto, novamente pela completude de (M, g) , concluímos que

$$\begin{aligned} \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M \text{ de Cauchy em } d_{\bar{g}} &\stackrel{(2.5)}{\Rightarrow} \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ de Cauchy em } d_g \Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge em } d_g \\ &\Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge em } d_{\bar{g}}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

O segundo resultado trata da completude de um espaço de recobrimento.

Proposição 2.3.4. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ um mapa de recobrimento. Então, munindo \bar{M} com a métrica de recobrimento h , vale que*

$$(M, g) \text{ completa} \Rightarrow (\bar{M}, h) \text{ completa}.$$

Demonstração. Vale recordar que a métrica h é definida por

$$h_p(u, v) = g_{\pi(p)}(d\pi_p(u), d\pi_p(v)), \quad u, v \in T_p\overline{M}, \quad p \in \overline{M}$$

e, com essa métrica, $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ é uma isometria local. Denotaremos por d_h e d_g as funções distância em \overline{M} e M induzidas por h e g , respectivamente.

Pelo Teorema de Hopf-Rinow é suficiente provar que (\overline{M}, d_h) é completo como espaço métrico. Para tanto, consideremos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{M}$ uma sequência de Cauchy. Como π é uma isometria local, a sequência $\{\pi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ também é de Cauchy. Logo, sendo (M, d_g) completo, vale que $\pi(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0$ em d_g . Afirmamos que $x_n \rightarrow x_0$ em d_h , para algum $x_0 \in \pi^{-1}(y_0)$.

De fato, sendo $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ um mapa de recobrimento, existe uma vizinhança $V \subset M$ de y_0 tal que, em cada componente conexa U de $\pi^{-1}(V)$, $\pi|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo (consequentemente, uma isometria). Visto que $\pi(x_n) \in V$, para todo n suficientemente grande, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\{\pi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$. Em particular $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \pi^{-1}(V)$.

Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta^M(y_0) \subset V$, onde

$$B_\delta^M(y_0) = \{q \in M; d_g(q, y_0) < \delta\}$$

é a bola intrínseca de M centrada em y_0 e de raio δ . Como a restrição de π a qualquer componente conexa de $\pi^{-1}(V)$ é uma isometria sobre V , vale que $B_\delta^{\overline{M}}((\pi|_U)^{-1}(y_0)) \subset U$, para toda componente conexa U de $\pi^{-1}(V)$, onde $B_\delta^{\overline{M}}((\pi|_U)^{-1}(y_0))$ é a bola intrínseca de \overline{M} . Daí, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_g(\pi(x_n), y_0) < \frac{\delta}{4} \quad \text{e} \quad d_h(x_n, x_m) < \frac{\delta}{4}, \quad \forall n, m \geq n_0$$

e $U_0 \subset \pi^{-1}(V)$ a componente conexa de $\pi^{-1}(V)$ que contém x_{n_0} , segue que, para $n \geq n_0$

$$d_h(x_n, (\pi|_{U_0})^{-1}(y_0)) \leq d_h(x_n, x_{n_0}) + d_h(x_{n_0}, (\pi|_{U_0})^{-1}(y_0)) = d_h(x_n, x_{n_0}) + d_g(\pi(x_{n_0}), y_0) < \frac{\delta}{2},$$

o que significa $x_n \in B_\delta^{\overline{M}}((\pi|_{U_0})^{-1}(y_0)) \subset U_0$, para todo $n \geq n_0$. Por fim, novamente do fato que $\pi|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$ é uma isometria e de $\pi(x_n) \rightarrow y_0$ em d_g , concluímos que $x_n \rightarrow (\pi|_{U_0})^{-1}(y_0) =: x_0$ em d_h , o que prova o afirmado e, por conseguinte, a proposição. \square

Na verdade vale a recíproca da proposição acima, ou seja, se (\overline{M}, h) é completa então (M, g) é completa, contudo, como isso não será usado neste trabalho, a demonstração deste fato será omitida.

A próxima proposição trata de uma caracterização da completude de uma variedade não compacta em termos de curvas divergentes.

Definição 2.3.3. Uma curva divergente numa variedade Riemanniana M é um mapa suave $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$ tal que, para cada compacto $K \subset M$, existe $t_0 \in [0, \infty)$ satisfazendo $\alpha(t) \notin K$, para todo $t > t_0$. Em outras palavras, α escapa de qualquer compacto de M . Definimos o comprimento de uma curva divergente α por

$$l(\alpha) := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\alpha'(s)| ds.$$

Proposição 2.3.5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana não compacta. Então (M, g) é completa se, e somente se, toda curva divergente em M tem comprimento infinito.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que (M, g) é completa e tomemos uma curva divergente em M , $\gamma : [0, T) \rightarrow M$. Como M é completa, segue do teorema de Hopf-Rinow que, para cada $N \in \mathbb{N}$, a bola fechada $\overline{B(\gamma(0), N)} \subset M$ é compacta. Tomemos $t_N < T$ tal que

$$\gamma(t) \notin \overline{B(\gamma(0), N)}, \quad \forall t > t_N.$$

Daí,

$$\int_0^t \|\gamma'(s)\| ds \geq d(\gamma(0), \gamma(t)) > N, \quad \forall t > t_N \Rightarrow l_g(\gamma) = \lim_{t \rightarrow T} \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = \infty.$$

Assumindo agora que toda curva divergente em M tem comprimento infinito, suponhamos por absurdo que M não é completa. Em particular, pelo teorema de Hopf-Rinow, M não é geodesicamente completa. Consideremos então uma geodésica $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$, parametrizada por comprimento de arco, com $\varepsilon < \infty$, que não pode ser estendida além de ε . Provemos que γ é divergente.

Com efeito, caso isso não seja verdade, existem $K \subset M$ compacto e uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \varepsilon)$ tais que

$$t_n \rightarrow \varepsilon \text{ e } \gamma(t_n) \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir $\gamma(t_n) \rightarrow q \in K$. Seja $W \subset M$ uma vizinhança totalmente normal de q (a existência de tal vizinhança é garantida em [3], p.72) e n_0 suficientemente grande tal que $\gamma(t_n) \in W$, para todo $n \geq n_0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que, para cada $p \in W$, \exp_p é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_p M$ e $\exp_p(B_\delta(0)) \supset W$. Em particular, a geodésica $\beta : (t_{n_0} - \delta, t_{n_0} + \delta) \rightarrow M$, dada por

$$\beta(t) = \exp_{\gamma(t_{n_0})}((t - t_{n_0})\gamma'(t_{n_0}))$$

passa, no instante $t = t_{n_0}$, em $\gamma(t_{n_0})$ e com velocidade $\gamma'(t_{n_0})$ (já que a derivada de $\exp_{\gamma(t_{n_0})}$ na origem é a identidade). Logo, por unicidade, γ é igual a β em $[0, \varepsilon) \cap (t_{n_0} - \delta, t_{n_0} + \delta)$. Aumentando n_0 , se necessário, podemos assumir que $t_{n_0} + \delta > \varepsilon$, logo conseguimos estender γ além de ε , o que é uma contradição. Disto concluimos que γ é divergente.

Dessa forma, temos por hipótese que $l(\gamma) = \infty$. Porém, sendo γ parametrizada por comprimento de arco, vale que $l(\gamma) = \varepsilon < \infty$, o que é um absurdo.

Do exposto, segue que M é completa. \square

Por fim, o último resultado desta seção, obtido em [12], também fornece uma caracterização da completude de uma variedade não compacta, porém, agora em termos do comprimento da "menor curva divergente".

Proposição 2.3.6. (*Magliaro, Mari, Roing e Savas-Halilaj*) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana não compacta. Então, para cada $p \in M$, existe uma curva divergente $\gamma: [0, T) \rightarrow M$, com $\gamma(0) = p$, que é uma geodésica e minimizante em cada subintervalo compacto de $[0, T)$. Além disso, vale que*

$$(M, g) \text{ é completa} \Leftrightarrow T = \infty.$$

Demonstração. Vamos construir inicialmente uma exaustão de M por abertos pré compactos $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$.

Com efeito, tomemos uma função exaustão suave e positiva $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de M , ou seja, para todo $b \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, b])$ é compacto (a existência de tal função é garantida em [11], p. 46). Seja $b_1 > 1$ um valor regular de f e tal que $p \in f^{-1}((-\infty, b_1])$ (tal b_1 existe pelo teorema de Sard). Definamos $\Omega_1 = f^{-1}((-\infty, b_1))$. Tomando $b_2 > \max\{b_1, 2\}$ tal que b_2 é um valor regular de f e definindo $\Omega_2 = f^{-1}((-\infty, b_2))$ teremos

$$\overline{\Omega_1} = f^{-1}((-\infty, b_1]) \subset \Omega_2 \text{ e } f^{-1}((-\infty, 2)) \subset \Omega_2.$$

Prosseguindo indutivamente, obtemos uma exaustão

$$M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j \left(\text{pois } M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}((-\infty, j)) \text{ e } f^{-1}((-\infty, j)) \subset \Omega_j \right)$$

por abertos pré compactos satisfazendo $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Em particular, $\partial\Omega_j$ é compacto para cada $j \in \mathbb{N}$, já que é um fechado contido no compacto $\overline{\Omega_j}$. Logo, a função contínua $q \in \partial\Omega_j \mapsto d(p, q)$ assume um mínimo, digamos em p_j . (pode

haver mais de um ponto onde tal função assume um mínimo, estamos apenas fixando um desses possíveis pontos)

Afirmamos que existe uma geodésica minimizante $\gamma_j : [0, T_j] \rightarrow M$ ligando p a p_j .

Consideremos $T_j := d(p, p_j)$, $\delta > 0$ tal que a bola normal fechada $\overline{B_\delta(p)}$ (ou seja $B_\delta(p)$ é a imagem difeomorfa, por \exp_p , de $B_\delta(0) \subset T_p M$) está contida em Ω_j , $S = S_\delta(p)$ o bordo de B_δ e $q_0 \in S$ tal que

$$d(p_j, q_0) = \min\{d(p_j, q); q \in S\} =: d(p_j, S).$$

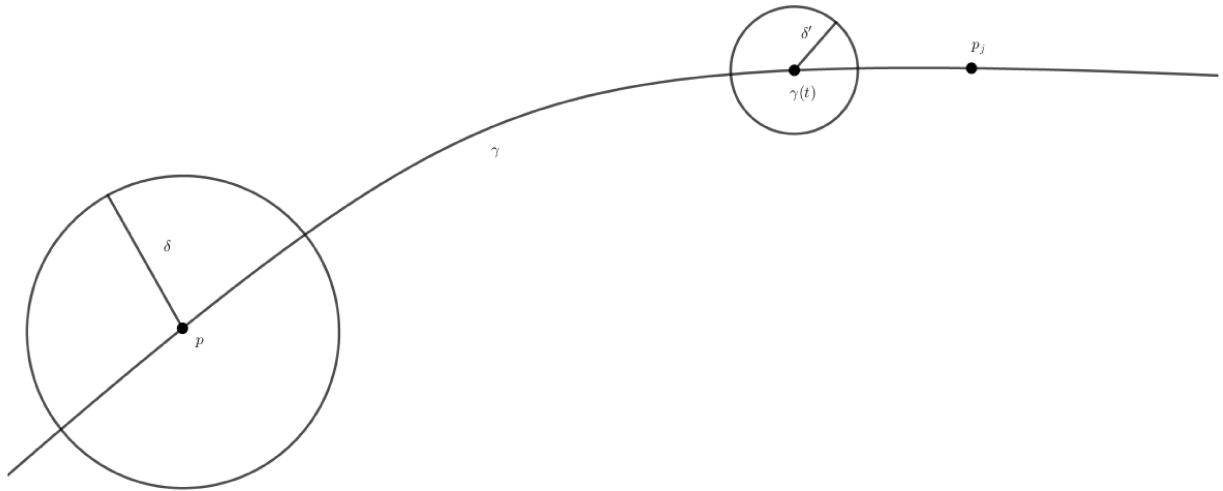
Então $q_0 = \exp_p(\delta v)$, onde $v \in T_p M$ e $|v| = 1$. Tomemos $\gamma_j : [0, r) \rightarrow M$ a geodésica partindo de p com velocidade v e definida no intervalo maximal. Se $r \leq T_j < \infty$, então γ_j seria divergente (por um argumento análogo ao que foi usado na Proposição 2.3.5), em particular γ_j sairía de Ω_j em algum momento, donde obteríamos $t_0 \in [0, r)$ satisfazendo $\gamma_j(t_0) \in \partial\Omega_j$, logo

$$r = l(\gamma_j) > l(\gamma_j|_{[0, t_0]}) \geq d(p, p_j) = T_j,$$

o que é uma contradição. Portanto, $T_j < r$. Para provar o afirmado é suficiente mostrar que $\gamma_j(T_j) = p_j$ (Ver Figura 1).

Para tanto, definamos $A = \{t \in [0, T_j]; d(\gamma_j(t), p_j) = T_j - t\}$. Temos que A é fechado e não vazio, visto que $0 \in A$ e as funções $t \in [0, T_j] \mapsto d(\gamma_j(t), p_j)$ e $t \in [0, T_j] \mapsto T_j - t$ são contínuas. Dado $t \in A$, com $t < T_j$, vamos mostrar que $t + \delta' \in A$, para $\delta' > 0$ suficientemente pequeno.

Figura 1 – Curva γ_j



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com efeito, tomemos $\delta' > 0$ tal que a bola normal fechada $\overline{B_{\delta'}(\gamma_j(t))}$ está contida em Ω_j e $t + \delta' < T_j$. Sejam S' o bordo dessa bola e $q'_0 \in S'$ tal que $d(p_j, q'_0) = d(p_j, S')$. Tem-se

então

$$T_j - t = d(\gamma_j(t), p_j) \geq \delta' + d(p_j, q'_0), \quad (2.6)$$

haja vista que, para toda curva $\sigma : [0, l] \rightarrow M$ ligando p_j e $\gamma_j(t)$, existe $s \in [0, l]$ com $\sigma(s) \in S'$, logo

$$l(\sigma) = l(\sigma|_{[0, s]}) + l(\sigma|_{[s, l]}) \geq \delta' + d(p_j, S') = \delta' + d(p_j, q'_0).$$

De (2.6) e da desigualdade triangular segue que

$$d(p, q'_0) \geq d(p, p_j) - d(q'_0, p_j) \geq T_j - (T_j - t - \delta') = t + \delta'. \quad (2.7)$$

Por outro lado, a curva obtida ao concatenar $\gamma_j|_{[0, t]}$ e a geodésica $s \in [0, \delta'] \mapsto \exp_{\gamma_j(t)}(s \cdot w)$, com $|w| = 1$, que liga $\gamma_j(t)$ e q'_0 , tem comprimento $t + \delta'$, portanto $d(p, q'_0) = t + \delta'$ e as desigualdades em (2.7) se tornam igualdades. Em particular, essa curva é uma geodésica (pois é minimizante), logo, por unicidade,

$$\gamma_j(t + \delta') = \exp_{\gamma_j(t)}(\delta' \cdot w) = q'_0.$$

Como a segunda desigualdade de (2.6) é na verdade uma igualdade, concluímos que

$$d(\gamma_j(t + \delta'), p_j) = d(q'_0, p_j) = T_j - t - \delta' = T_j - (t + \delta'),$$

ou seja, $t + \delta' \in A$.

Disto, e do fato que A é fechado, segue que $T_j = \sup A \in A$, provando assim o afirmado.

A curva $\gamma_j : [0, T_j] \rightarrow M$ assim obtida é minimizante (consequentemente, geodésica) e liga p e p_j . Note ainda que γ_j está parametrizada por comprimento de arco, já que $|\gamma'_j(0)| = |v| = 1$.

A construção da curva $\gamma : [0, T) \rightarrow M$ desejada seguirá dos seguintes fatos:

a) $\gamma_j([0, T_j)) \subset \Omega_j$.

De fato, se existisse $t < T_j$ com $\gamma_j(t) \notin \Omega_j$ obteríamos $t_0 < t < T_j$ tal que $\gamma_j(t_0) \in \partial\Omega_j$.

Daí

$$d(p, \gamma_j(t_0)) = t_0 < T_j = d(p, \gamma_j(T_j)) = d(p, p_j),$$

o que contradiz a definição de p_j .

b) $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente.

Como $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$, temos que $\overline{\Omega_j} \cap \partial\Omega_{j+1} = \emptyset$. Logo, como $\gamma_{j+1}(0) = p \in \Omega_j$ e $\gamma_{j+1}(T_{j+1}) = p_{j+1} \in \partial\Omega_{j+1}$, existe $t < T_{j+1}$ satisfazendo $\gamma_{j+1}(t) \in \partial\Omega_j$, donde

$$T_j = l(\gamma_j) = d(p, p_j) \leq d(p, \gamma_{j+1}(t)) < d(p, \gamma_{j+1}(T_{j+1})) = T_{j+1}.$$

c) Existe uma subsequência $\{\gamma_{j_k}\}$ que converge uniformemente em compactos para uma curva $\gamma: [0, T) \rightarrow M$, onde $T = \sup\{T_j\}$.

Como a sequência $\{\gamma'_j(0)\} \subset T_p M$ está contida no compacto $S_1(0) \subset T_p M$, existe uma subsequência $\{\gamma'_{j_k}(0)\}$ convergente, digamos $\gamma'_{j_k}(0) \rightarrow w \in S_1(0)$. Tomemos $\gamma: [0, s) \rightarrow M$ a geodésica, parametrizada por comprimento de arco e definida no intervalo maximal, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$. Pela suavidade com respeito às condições iniciais de uma EDO, vale que $\gamma_{j_k} \rightarrow \gamma$ uniformemente em compactos de $[0, \min\{s, T\})$. É suficiente então mostrar que $T \leq s$.

Suponhamos que isso não ocorra. Sendo assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s < T_{j_0} < \infty$, donde segue que γ é divergente (pelo argumento que usamos na prova da Proposição 2.3.5) e

$$l(\gamma) = s < T_{j_0} = d(p, \partial\Omega_{j_0}) \Rightarrow \gamma([0, s)) \subset \overline{\Omega_{j_0}},$$

o que é uma contradição já que $\overline{\Omega_{j_0}}$ é compacto.

No que segue iremos denotar apenas por $\{\gamma_j\}$ a subsequência acima obtida. A seguir será provado que γ satisfaz as condições desejadas:

d) γ é minimizante em cada subintervalo compacto de $[0, T)$.

Dados $t_1 < t_2$ em $[0, T)$, temos

$$d(\gamma_j(t_1), \gamma_j(t_2)) \rightarrow d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)),$$

já que $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Por outro lado, como cada γ_j é minimizante e γ é parametrizada por comprimento de arco, vale

$$d(\gamma_j(t_1), \gamma_j(t_2)) = l(\gamma_j|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1 = l(\gamma|_{[t_1, t_2]}), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = l(\gamma|_{[t_1, t_2]})$ e, por conseguinte, γ é minimizante em $[t_1, t_2]$.

e) γ é divergente.

Vamos aqui considerar dois casos:

Caso 1: $T < \infty$: Mostremos inicialmente que existe uma sequência $\{t_j\} \subset [0, T)$ tal que

$$t_j \rightarrow T \text{ e } \gamma(t_j) \notin \Omega_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, fixado $j_0 \in \mathbb{N}$, temos que, para todo $j > j_0 + 1$, existe $\bar{t}_j < T_j$ cumprindo $\gamma_j(\bar{t}_j) \notin \Omega_{j_0}$ e $\gamma_j(\bar{t}_j) \in \partial\Omega_{j_0+1}$, pois

$$\begin{cases} \gamma_j(T_j) \in \partial\Omega_j \\ \gamma_j(0) = p \in \Omega_{j_0+1} \\ \overline{\Omega_{j_0+1}} \cap \partial\Omega_j = \emptyset \end{cases}$$

Além disso, tomando $\varepsilon = d(\partial\Omega_{j_0+1}, \partial\Omega_{j_0+2})$ e observando que, para todo $j > j_0 + 2$, existe $s_j < T_j$ com $\gamma_j(s_j) \in \partial\Omega_{j_0+2}$ e $\gamma_j(t) \notin \partial\Omega_{j_0+2}$, para todo $t > s_j$ (basta tomar $s_j = \sup\{t; \gamma_j(t) \in \partial\Omega_{j_0+2}\}$), vem que $\bar{t}_j < s_j$ (do contrário obteríamos $t > s_j$ com $\gamma_j(t) \in \partial\Omega_{j_0+2}$) e

$$\varepsilon \leq l(\gamma_j|_{[\bar{t}_j, s_j]}) = s_j - \bar{t}_j < T_j - \bar{t}_j \leq T - \bar{t}_j, \forall j > j_0 + 2.$$

Daí, a sequência $\{\bar{t}_j\}_{j > j_0+2}$ está contida no compacto $[0, T - \varepsilon]$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\bar{t}_j \rightarrow t_{j_0} \in [0, T - \varepsilon]$. Logo, como $\gamma_j \rightarrow \gamma$ uniformemente em $[0, T - \varepsilon]$, temos

$$d(\gamma_j(\bar{t}_j), \gamma(t_{j_0})) \leq d(\gamma_j(\bar{t}_j), \gamma(\bar{t}_j)) + d(\gamma(\bar{t}_j), \gamma(t_{j_0})) \rightarrow 0,$$

ou seja, $\gamma_j(\bar{t}_j) \rightarrow \gamma(t_{j_0})$. Por $\gamma_j(\bar{t}_j) \notin \Omega_{j_0}$, para todo $j > j_0 + 1$, e Ω_{j_0} ser aberto segue que $\gamma(t_{j_0}) \notin \Omega_{j_0}$.

Em particular, sendo $s_{j_0} = \inf\{t; \gamma(t) \in \partial\Omega_{j_0}\}$, vale

$$T > t_{j_0} > s_{j_0} = l(\gamma|_{[0, s_{j_0}]}) \geq d(p, p_{j_0}) = T_{j_0}.$$

Sendo $j_0 \in \mathbb{N}$ arbitrário segue que a sequência $\{t_j\}$ acima obtida satisfaz $t_j \rightarrow T$ e $\gamma(t_j) \notin \Omega_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Obtida essa sequência, suponhamos agora que γ não é divergente. Então existem $K \subset M$ compacto e uma sequência $\{s_j\} \subset [0, T)$ tais que

$$s_j \rightarrow T \text{ e } \gamma(s_j) \in K, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sendo $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$ uma exaustão de M por abertos, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \Omega_{j_0}$. Então, para todo $j > j_0 + 1$, vale que $\gamma(s_j) \in K$ e $\gamma(t_j) \notin \Omega_{j_0+1}$, donde obtemos r_j e

\bar{r}_j entre s_j e t_j satisfazendo

$$\begin{cases} \gamma(r_j) \in \partial\Omega_{j_0} \\ \gamma(\bar{r}_j) \in \partial\Omega_{j_0+1} \end{cases}$$

Portanto,

$$0 < d(\partial\Omega_{j_0}, \partial\Omega_{j_0+1}) \leq d(\gamma(r_j), \gamma(\bar{r}_j)) = |r_j - \bar{r}_j| \leq |s_j - t_j|,$$

para todo $j > j_0 + 1$, o que é absurdo pois $s_j \rightarrow T$, $t_j \rightarrow T$ e $T < \infty$.

Do exposto, concluímos que γ é divergente nesse caso.

Caso 2: $T = \infty$: Para cada $j \in \mathbb{N}$ definamos $L_j = \max\{d(p, q); q \in \overline{\Omega_j}\}$. Fixado $j_0 \in \mathbb{N}$ arbitrariamente, seja j_1 suficientemente grande de modo que $T_{j_1} > L_{j_0}$ (existe pois $T_j \rightarrow T = \infty$). Então

$$d(p, \gamma(t)) = t > T_{j_1} > L_{j_0}, \forall t > T_{j_1} \Rightarrow \gamma(t) \notin \Omega_{j_0}, \forall t > T_{j_1}.$$

Ou seja, eventualmente a curva γ escapa de qualquer dos abertos Ω_j (e não retorna novamente). Isto por sua vez nos garante que γ é divergente, pois, dado $K \subset M$ compacto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \Omega_{j_0}$.

Concluímos assim que a curva γ cumpre os requisitos desejados. Por fim, provemos a equivalência:

$$(M, g) \text{ é completa} \Leftrightarrow T = \infty.$$

(\Rightarrow) : Sendo (M, g) completa e γ divergente, segue imediatamente da Proposição 2.3.5 que $T = \infty$.

(\Leftarrow) : Seja $\sigma : [0, T_\sigma) \rightarrow M$ uma curva divergente arbitrária parametrizada por comprimento de arco. Trocando, se necessário, σ pela curva obtida ao concatenar uma curva ligando p e $\sigma(0)$ e σ , podemos assumir que $\sigma(0) = p$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $t_j < T_\sigma$ tal que $\sigma(t_j) \in \partial\Omega_j$ (existe pois σ começa em $p \in \Omega_j$ e em algum momento escapa do compacto $\overline{\Omega_j}$). Então, como $T_j = d(p, \partial\Omega_j)$,

$$T_\sigma = l(\sigma) \geq l(\sigma|_{[0, t_j]}) \geq T_j.$$

Sendo $j \in \mathbb{N}$ arbitrário e $T_j \rightarrow T = \infty$, concluímos que $T_\sigma = \infty$, por conseguinte (M, g) é completa (novamente pela Proposição 2.3.5). \square

2.4 Variação da Energia

Esta seção é dedicada a apresentação de alguns conceitos como a variação de uma curva e a função energia, contudo o conteúdo mais importante aqui será a denominada fórmula da segunda variação da energia, a qual se fará presente nos três teoremas principais.

Definição 2.4.1. *Seja $c : [0, a] \rightarrow M$ uma curva suave por partes na variedade M . Uma variação de c é um mapa contínuo $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ tal que*

- a) $f(0, t) = c(t)$, para $t \in [0, a]$;
- b) *existe uma partição $\{t_0, \dots, t_k\}$ de $[0, a]$ tal que a restrição de f a cada um dos subconjuntos $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$, é suave.*

A variação f é dita própria quando

$$f(s, 0) = c(0) \text{ e } f(s, a) = c(a), \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Se a função f é suave diremos que a variação é suave.

Definição 2.4.2. *Dada uma curva suave por partes $c : [0, a] \rightarrow M$ e uma variação de c , $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$, definimos o campo variacional de f como o campo de vetores (suave por partes) ao longo de c dado por*

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t), \quad t \in [0, a].$$

Proposição 2.4.1. *Dado um campo suave por partes $V(t)$, ao longo de uma curva suave por partes $c : [0, a] \rightarrow M$, existe uma variação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ de c cujo campo variacional coincide com $V(t)$. Além disso, se $V(0) = V(a) = 0$, então f pode ser escolhida como uma variação própria.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 193. □

O restante desta seção dará ênfase ao conceito de energia associado à variação de uma curva. Contudo, é relevante apresentar uma noção mais geral de energia, a qual será retomada na seção 3.2. A menos de menção do contrário, todas as curvas daqui em diante serão assumidas suaves por partes.

Definição 2.4.3. *Dada uma curva $c : [0, a] \rightarrow M$, definimos a sua energia como sendo*

$$E(c) = \int_0^a |c'(t)|^2 dt.$$

Para qualquer curva $c : [0, a] \rightarrow M$ vale que

$$l(c)^2 \leq a \cdot E(c), \quad (2.8)$$

basta tomar $f \equiv 1$ e $g = |c'|$ na desigualdade de Schwarz

$$\left(\int_0^a f \cdot g \, dt \right)^2 \leq \left(\int_0^a f^2 \, dt \right) \cdot \left(\int_0^a g^2 \, dt \right).$$

Além disso, vale a igualdade em (2.8) se, e somente se, $g = |c'|$ é constante, ou seja, o parâmetro t é proporcional ao comprimento de arco de c .

O lema abaixo mostra que uma geodésica que minimiza o comprimento também minimiza a energia.

Lema 2.4.1. *Sejam $p, q \in M$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante ligando p e q . Então, para qualquer curva $c : [0, a] \rightarrow M$ ligando p e q , vale que*

$$E(\gamma) \leq E(c).$$

Demonstração. Sendo γ parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco (pois é uma geodésica) e minimizante, segue da discussão acima que

$$a \cdot E(\gamma) = l(\gamma)^2 \leq l(c)^2 \leq aE(c),$$

o que prova o desejado. □

Definição 2.4.4. *Dada uma curva $c : [0, a] \rightarrow M$ e $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de c , definimos a função energia relativa a f como sendo*

$$E_f(s) = E(f(s, \cdot)) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Quando a variação estiver subentendida denotaremos E_f apenas por E . Para finalizar esta seção, apresentaremos as fórmulas para a primeira e a segunda derivada da energia de uma curva relativa a uma variação da mesma. Adiante, e no restante dessa dissertação, quando não houver risco de confusão, usaremos a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ao invés de g .

Proposição 2.4.2. (Fórmula da primeira variação da energia) *Sejam $c : [0, a] \rightarrow M$ uma curva, $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de c e $V(t)$ o campo variacional de f . Se $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$*

é a função energia associada a f e $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_k = a\}$ é uma partição de $[0, a]$ tal que c é suave em cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E'(0) &= - \int_0^a \left\langle V(\tau), \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt}(\tau) \right\rangle d\tau - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle V(t_i), \frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle V(0), \frac{dc}{dt}(0) \right\rangle + \left\langle V(a), \frac{dc}{dt}(a) \right\rangle, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{dc}{dt}(t_i^\pm) = \lim_{\tau \rightarrow t_i^\pm} \frac{dc}{dt}(\tau).$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 195. □

Uma consequência dessa fórmula é uma caracterização das geodésicas como pontos críticos da energia para variações próprias.

Proposição 2.4.3. *Uma curva $c : [0, a] \rightarrow M$ é uma geodésica se, e somente se, para toda variação própria f de c , vale $E'(0) = 0$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 196. □

Corolário 2.4.1. *Se $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ é uma geodésica minimizante, $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ é uma variação própria de γ e E_f é a função energia associada a f , então $E_f''(0) \geq 0$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.4.3 vale que $E_f'(0) = 0$. Se fosse $E_f''(0) < 0$, então E_f' seria decrescente numa vizinhança de 0, donde $E_f'(s) < E_f'(0) = 0$, para $s > 0$ pequeno. Por conseguinte,

$$E(f(s, \cdot)) = E_f(s) < E_f(0) = E(\gamma),$$

para $s > 0$ pequeno, o que contradiz o Lema 2.4.1, visto que a curva $t \in [0, a] \mapsto f(s, t)$ liga $\gamma(0)$ e $\gamma(a)$ (pois a variação é própria). Portanto, $E_f''(0) \geq 0$. □

Proposição 2.4.4. (Fórmula da segunda variação da energia) *Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica, $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de c com campo variacional $V(t)$ e E a função energia associada a f . Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E''(0) &= \int_0^a [\langle V'(t), V'(t) \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle] dt \\ &\quad - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a) \right\rangle. \end{aligned}$$

Em particular, se a variação f é própria, vale

$$\frac{1}{2}E''(0) = \int_0^a [\langle V'(t), V'(t) \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle] dt.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [3] página 198 . □

2.5 Mudança Conforme

Nessa última seção serão destacadas algumas fórmulas referentes a uma mudança conforme de uma métrica Riemanniana. Consideraremos no decorrer desta seção (M, g) uma variedade Riemanniana, u uma função suave e positiva em M e $\bar{g} = u^{2k} \cdot g$ a mudança conforme de g . Além disso, todas as quantidades que estiverem sobre uma barra são relacionadas à métrica \bar{g} , por exemplo, $\bar{\nabla}$ denota a conexão Riemanniana de (M, \bar{g}) .

Proposição 2.5.1. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, são válidas as seguintes relações*

- a) $\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + X(\ln u^k) \cdot Y + Y(\ln u^k) \cdot X - g(X, Y) \cdot \nabla(\ln u^k);$
b)

$$\begin{aligned} \bar{Ric}(X, Y) &= Ric(X, Y) - (n-2) \cdot Hess(\ln u^k)(X, Y) + (n-2) \cdot X(\ln u^k) \cdot Y(\ln u^k) \\ &\quad - g(X, Y) \cdot \left(\Delta(\ln u^k) + (n-2) \cdot |\nabla \ln u^k|^2 \right). \end{aligned}$$

Demonstração. A fórmula de Koszul nos diz que

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2} \cdot \{X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \\ &\quad - g([X, Y], Z)\}, \end{aligned}$$

para qualquer $Z \in \mathfrak{X}(M)$, o mesmo valendo para \bar{g} , trocando ∇ por $\bar{\nabla}$. Sendo assim, fixando $p \in M$ e tomando um referencial ortonormal (em relação a g) $\{e_1, \dots, e_n\}$ numa vizinhança de p ,

temos, em p , que

$$\begin{aligned}
g(\bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X, e_i) &= u^{-2k} \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, e_i) - g(\nabla_Y X, e_i) \\
&= u^{-2k} \cdot \frac{1}{2} \{X(\bar{g}(Y, e_i)) + Y(\bar{g}(X, e_i)) - e_i(\bar{g}(X, Y)) - \bar{g}([X, e_i], Y) \\
&\quad - \bar{g}([Y, e_i], X) - \bar{g}([X, Y], e_i)\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \{X(g(Y, e_i)) + Y(g(X, e_i)) - e_i(g(X, Y)) - g([X, e_i], Y) \\
&\quad - g([Y, e_i], X) - g([X, Y], e_i)\} \\
&= u^{-2k} \cdot \frac{1}{2} \{X(u^{2k}) \cdot g(Y, e_i) + Y(u^{2k}) \cdot g(X, e_i) - e_i(u^{2k}) \cdot g(X, Y) \\
&\quad + u^{2k} X(g(Y, e_i)) + u^{2k} Y(g(X, e_i)) - u^{2k} e_i(g(X, Y))\} \\
&\quad - \frac{1}{2} [X(g(Y, e_i)) + Y(g(X, e_i)) - e_i(g(X, Y))] \\
&= X(\ln u^k) \cdot g(Y, e_i) + Y(\ln u^k) g(X, e_i) - e_i(\ln u^k) \cdot g(X, Y).
\end{aligned}$$

Daí, em p ,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X &= \sum_i \langle \bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X, e_i \rangle e_i \\
&= X(\ln u^k) \sum_i \langle Y, e_i \rangle e_i + Y(\ln u^k) \sum_i \langle X, e_i \rangle e_i - g(X, Y) \sum_i e_i(\ln u^k) \cdot e_i \\
&= X(\ln u^k) Y + Y(\ln u^k) X - g(X, Y) \nabla(\ln u^k).
\end{aligned}$$

Sendo p arbitrário, fica provado **a**).

Quanto a **b**), por conta da linearidade, é suficiente provar a igualdade em um sistema de coordenadas $\{U, x^1, \dots, x^n\}$ de M , com campos coordenados $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Além disso, podemos assumir que, num ponto fixado $p \in U$, vale $g_{ij} = \delta_{ij}$. Assim, em p ,

$$\begin{aligned}
Ric(X_i, X_j) &= \sum_r g(R(X_i, X_r) X_j, X_r) = \sum_r \sum_l R_{irj}^l \cdot g_{lr} = \sum_r R_{irj}^r \\
&= \sum_r \left[X_r(\Gamma_{ij}^r) - X_i(\Gamma_{rj}^r) + \sum_l \Gamma_{ij}^l \cdot \Gamma_{rl}^r - \sum_l \Gamma_{rj}^l \cdot \Gamma_{il}^r \right], \quad (2.9)
\end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_s (X_i(g_{js}) + X_j(g_{si}) - X_s(g_{ij})) \cdot g^{sm}$$

são os símbolos de Christoffel com respeito a g . Como $\bar{g}^{ij} = u^{-2k} \cdot g^{ij}$, vale

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^m &= \frac{1}{2} \sum_s (X_i(\bar{g}_{js}) + X_j(\bar{g}_{si}) - X_s(\bar{g}_{ij})) \cdot \bar{g}^{sm} \\
&= \frac{1}{2} \sum_s \left\{ X_i(u^{2k}) g_{js} + X_j(u^{2k}) g_{si} - X_s(u^{2k}) g_{ij} + u^{2k} [X_i(g_{js}) + X_j(g_{si}) - X_s(g_{ij})] \right\} u^{-2k} g^{sm} \\
&= X_i(\ln u^k) \cdot \delta_{jm} + X_j(\ln u^k) \cdot \delta_{im} - g_{ij} \cdot \sum_s g^{sm} X_s(\ln u^k) + \Gamma_{ij}^m,
\end{aligned}$$

o que, substituindo em 2.9, fornece a fórmula desejada. \square

Proposição 2.5.2. (Elbert, Nelli e Rosenberg) *Se γ é uma \bar{g} -geodésica, com s e \bar{s} denotando o comprimento de arco de γ com respeito a g e \bar{g} , respectivamente, então, ao longo de γ , vale a relação*

$$\overline{Ric} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right) = u^{-2k} \cdot \left[Ric \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k \frac{\Delta u}{u} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right],$$

$$\text{onde } (\ln u)_{ss} = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \right).$$

Demonstração. Pelo item **b)** da proposição anterior temos

$$\begin{aligned} \overline{Ric} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right) &= Ric \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right) - k(n-2) \cdot Hess(\ln u) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right) \\ &\quad + k^2(n-2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} (\ln u) \right)^2 - [k\Delta(\ln u) + k^2(n-2)|\nabla \ln u|^2] u^{-2k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para simplificar esta expressão vamos calcular $\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}$. Pelo item **a)** da proposição anterior, obtemos

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} = \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} + 2k \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} (\ln u) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} - k \nabla(\ln u). \quad (2.11)$$

Por outro lado, sendo γ uma \bar{g} -geodésica, vale $\bar{\nabla}_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} = 0$, logo, por $\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} = u^{-k} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$, segue que

$$u^{-k} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} (u^{-k}) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} + u^{-k} \cdot \bar{\nabla}_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right] = 0.$$

Podemos ainda reescrever a relação acima da seguinte forma

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} = -u^k \frac{\partial \gamma}{\partial s} (u^{-k}) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} = -\frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u^{-k}) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} = k \frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s}.$$

Substituindo isto em (2.11), vem que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} &= k \left[\nabla(\ln u) - \frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] = k \left[\nabla(\ln u) - g \left(\nabla(\ln u), \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] \\ &= k(\nabla(\ln u))^\perp, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $(\nabla(\ln u))^\perp$ significa a componente de $\nabla(\ln u)$ perpendicular a $\frac{\partial \gamma}{\partial s}$. Além disso,

$$\begin{aligned} Hess(\ln u) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} (\ln u) \right) - \left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} \right) (\ln u) \\ &= u^{-k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} \left(u^{-k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \right) - u^{-k} \left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \left(u^{-k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \right) (\ln u) \\ &= u^{-2k} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \right) - \left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) (\ln u) \right] \\ &= u^{-2k} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \right) - k |(\nabla(\ln u))^\perp|^2 \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde, na última igualdade, usamos (2.12) para obter

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) (\ln u) = k \cdot (\nabla(\ln u))^\perp (\ln u) = kg(\nabla(\ln u), (\nabla(\ln u))^\perp) = k|(\nabla(\ln u))^\perp|^2.$$

Por fim, ao substituir (2.13) em (2.10) e usar $Ric\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}\right) = u^{-2k} Ric\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right)$, concluímos que

$$\begin{aligned} \overline{Ric}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}\right) &= u^{-2k} \left[Ric\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right) - k(n-2) \frac{\partial \gamma}{\partial s} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \right) + k^2(n-2) |(\nabla(\ln u))^\perp|^2 \right. \\ &\quad \left. + k^2(n-2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} (\ln u) \right)^2 - k\Delta(\ln u) - k^2(n-2) |\nabla(\ln u)|^2 \right] \\ &= u^{-2k} \left[Ric\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right) - k(n-2) (\ln u)_{ss} - k\Delta(\ln u) \right] \\ &= u^{-2k} \left[Ric\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right) - k(n-2) (\ln u)_{ss} - k \frac{\Delta u}{u} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right]. \end{aligned}$$

□

3 RESULTADOS

3.1 Pinching Theorem para uma subvariedade completa da esfera

O primeiro dos três teoremas principais deste trabalho é uma extensão de um resultado obtido por Alencar e do Carmo em [1], o qual caracteriza subvariedades compactas da esfera com curvatura média constante e que satisfazem uma certa estimativa envolvendo um tensor associado à segunda forma fundamental. Antes de apresentar tal resultado e sua extensão é necessário fixar algumas notações e apresentar algumas definições.

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma hipersuperfície imersa e orientável. No que segue identificaremos M com a subvariedade $f(M)$. Denotaremos por A a segunda forma fundamental de M em \mathbb{S}^{n+1} , ou seja

$$A(X, Y) = (\bar{\nabla}_Y X)^N = -\langle X, \bar{\nabla}_Y \eta \rangle \eta, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

onde $\bar{\nabla}$ representa a conexão Riemanniana em \mathbb{S}^{n+1} e η uma escolha de normal unitário. Como A é um tensor simétrico, para cada $p \in M$ o operador forma $B : T_p M \rightarrow T_p M$ definido por

$$\langle B(X), Y \rangle = \langle A(X, Y), \eta \rangle, \quad \forall X, Y \in T_p M,$$

é simétrico, logo existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ tal que $B(e_i) = k_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Denotaremos por $H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ a curvatura média de M e $|A|^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2$ a norma ao quadrado da segunda forma fundamental. Definamos o operador $\phi : T_p M \rightarrow T_p M$, chamado operador forma de traço nulo, por $\langle \phi(X), Y \rangle = \langle B(X), Y \rangle - H \langle X, Y \rangle$ e o 2-tensor simétrico Φ , denominado segunda forma fundamental de traço nulo, por $\Phi(X, Y) = \langle \phi(X), Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Notemos que $\text{tr}(\phi) = 0$ e $|\Phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n (k_i - k_j)^2$. De fato, fixado $p \in M$ tomemos novamente $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ que diagonaliza B . Temos assim que

$$\text{tr}(\phi) = \sum_{i=1}^n \langle \phi(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle B(e_i), e_i \rangle - H \langle e_i, e_i \rangle) = \sum_{i=1}^n k_i - nH = 0.$$

Além disso, escrevendo $\Phi = \sum_{i,j=1}^n \Phi(e_i, e_j) e^i \otimes e^j$, onde $\{e^1, \dots, e^n\}$ é a base dual associada a $\{e_1, \dots, e_n\}$, temos

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \sum_{i,j=1}^n (\langle B(e_i), e_j \rangle - H \langle e_i, e_j \rangle)^2 = \sum_{i,j=1}^n (k_i \delta_{ij} - H \delta_{ij})^2 = \sum_{i=1}^n (k_i - H)^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 - nH^2 \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 = \frac{1}{n} \left((n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 - \sum_{i \neq j}^n k_i k_j \right) = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n (k_i - k_j)^2. \end{aligned}$$

Em particular, $|\Phi|^2 = 0$ se, e somente se, M é totalmente umbílica.

Duas subvariedades específicas da esfera irão desempenhar um papel importante nessa seção, a saber, o Toro de Clifford $T^{n,k}$ e o $H(r)$ -toro, os quais são definidos, respectivamente, por

$$T^{n,k} = \mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right), \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$H(r) = \mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1 \left(\sqrt{1-r^2} \right), \quad r \in (0, 1).$$

Feitas as devidas apresentações, passemos ao enunciado do resultado de Alencar e do Carmo citado acima:

Teorema 3.1.1. (Alencar e do Carmo) *Ainda na notação acima, assuma que M é compacta, possui curvatura média constante $H \geq 0$ e satisfaz $|\Phi|^2 \leq b(n, H)^2$ em M , onde $b(n, H)$ é a raiz positiva do polinômio*

$$P_{(n,H)}(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2 + 1).$$

Nessas condições vale

(i) *Ou $|\Phi| \equiv 0$ e M é totalmente umbílica ou $|\Phi| \equiv b(n, H)$;*

(ii) *$|\Phi| \equiv b(n, H)$ se, e somente se*

a) *$H = 0$ e M é localmente um Toro de Clifford;*

b) *$H \neq 0$, $n \geq 3$ e M é localmente um $H(r)$ -toro com $r^2 < \frac{n-1}{n}$;*

c) *$H \neq 0$, $n = 2$ e M é localmente um $H(r)$ -toro com $r^2 \neq \frac{n-1}{n}$.*

Antes de passarmos para o teorema principal dessa seção vamos estudar a caracterização presente em (ii) no Teorema 3.1.1. Mais especificamente, será provado que tanto o Toro de Clifford quanto o $H(r)$ -toro (com r como no teorema acima) satisfazem $|\Phi| \equiv b(n, H)$.

Proposição 3.1.1. *Para cada $0 < r < 1$, o $H(r)$ -toro é uma subvariedade de \mathbb{S}^{n+1} com curvaturas principais*

$$k_1 = \dots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad e \quad k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

para uma escolha de orientação. Para a outra escolha de orientação as curvaturas principais são as simétricas das apresentadas acima.

Demonstração. Para um ponto $(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, convencionaremos a seguinte notação $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (x_{n+1}, x_{n+2})$. Note que, dado $(x, y) \in H(r)$, o espaço tangente $T_{(x,y)}H(r)$ é identificado com o subespaço de \mathbb{R}^{n+2}

$$V = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle v, x \rangle = \langle w, y \rangle = 0\},$$

Isto segue do fato que $H(r)$ é dado como pré imagem do valor regular $(r^2, 1 - r^2) \in \mathbb{R}^2$ da aplicação $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (|x|^2, |y|^2)$, logo

$$T_{(x,y)}H(r) = \text{Ker}(DF_{(x,y)}) = (\nabla f_1(x, y))^\perp \cap (\nabla f_2(x, y))^\perp = V.$$

Em $\bar{H}(r) := H(r) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+2}; x_n, x_{n+2} > 0\}$ definamos a carta $\varphi : \bar{H}(r) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(x, y) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})$. Os campos coordenados $\{X_1, \dots, X_n\}$ relativos a φ são dados por

$$X_i(x, y) = e_i - \frac{x_i}{x_n} e_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \text{e} \quad X_n = e_{n+1} - \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} e_{n+2}.$$

Além disso, o campo $N : H(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ dado por

$$N(x, y) = \left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} x, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} y \right),$$

é unitário e cumpre

$$\begin{cases} \langle N(x, y), (x, y) \rangle = 0, & \forall (x, y) \in H(r) \\ \langle N(x, y), (v, w) \rangle = 0, & \forall (v, w) \in T_{(x,y)}H(r) \end{cases},$$

pois, para quaisquer $(x, y) \in H(r)$ e $(v, w) \in T_{(x,y)}H(r)$, vale

$$|N(x, y)|^2 = \frac{1-r^2}{r^2} |x|^2 + \frac{r^2}{1-r^2} |y|^2 = 1,$$

$$\langle N(x, y), (x, y) \rangle = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} |x|^2 - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} |y|^2 = r\sqrt{1-r^2} - r\sqrt{1-r^2} = 0,$$

e

$$\langle N(x, y), (v, w) \rangle = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \langle x, v \rangle - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \langle y, w \rangle = 0.$$

Portanto, N é um campo unitário, tangente a \mathbb{S}^{n+1} e normal à $H(r)$. Em $\bar{H}(r)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i}^{\mathbb{R}^{n+2}} N(x, y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \left(e_i - \frac{x_i}{x_n} e_n \right) \\ &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} X_i(x, y), \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n-1$, e

$$\begin{aligned} \nabla_{X_n}^{\mathbb{R}^{n+2}} N(x, y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1} + t)) = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \left(e_{n+1} - \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} e_{n+2} \right) \\ &= -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} X_n(x, y). \end{aligned}$$

Isto nos diz que $\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$ é autovalor do operador forma de $H(r)$ com multiplicidade $n-1$ e $-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ é autovalor com multiplicidade 1, donde conclui-se que

$$k_1 = \dots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{e} \quad k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

em $\bar{H}(r)$. Nos demais pontos de $H(r)$ procedemos de modo análogo, considerando as cartas de gráfico e verificando que os campos coordenados associados a essas cartas são autovetores do operador forma. \square

Em particular, a curvatura média do $H(r)$ -toro é

$$H = \frac{1}{n} \left((n-1) \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right) = \frac{n-1-nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}},$$

ou o simétrico disso, a depender da orientação.

Proposição 3.1.2. *Seja r como na caracterização do Teorema 3.1.1 e Φ a segunda forma fundamental de traço nulo do $H(r)$ -toro. Então $|\Phi| \equiv b(n, H)$.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $r^2 < \frac{n-1}{n}$. Nesse caso, a escolha da orientação de $H(r)$ deve ser tal que $H = \frac{n-1-nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}}$, para que se tenha $H > 0$. Daí, como

$$|\Phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i \neq j} (k_i - k_j)^2 = \frac{n-1}{n} \left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right)^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)},$$

segue que

$$\begin{aligned} P_{(n,H)}(|\Phi|) &= |\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| - n(H^2 + 1) \\ &= \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)} + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\frac{n-1-nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} \right) \frac{\sqrt{n-1}}{r\sqrt{n(1-r^2)}} \\ &\quad - n \left(\frac{(n-1)^2 - 2(n-1)nr^2 + n^2r^4}{n^2r^2(1-r^2)} + 1 \right) \\ &= \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)} + \frac{(n-2)(n-1-nr^2)}{nr^2(1-r^2)} \\ &\quad - \frac{(n-1)^2 - 2(n-1)nr^2 + n^2r^4 + n^2r^2(1-r^2)}{nr^2(1-r^2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $|\Phi| \equiv b(n, H)$.

Consideremos agora $r^2 > \frac{n-1}{n}$. Nesse caso temos a restrição $n = 2$ como na caracterização do Teorema 3.1.2. Portanto,

$$P_{(2,H)}(|\Phi|) = \frac{1}{2r^2(1-r^2)} - 2 \left(\frac{1-4r^2+4r^4}{4r^2(1-r^2)} + 1 \right) = \frac{1}{2r^2(1-r^2)} - \frac{1}{2r^2(1-r^2)} = 0,$$

donde $|\Phi| \equiv b(n, H)$. \square

Vale salientar que, para $r^2 > \frac{n-1}{n}$ e $n \geq 3$, tem-se $|\Phi| > b(n, H)$, pois nesse caso deve-se escolher a orientação de modo que

$$H = \frac{nr^2 - (n-1)}{nr\sqrt{1-r^2}},$$

para que se tenha $H > 0$. Daí, seguindo um cálculo análogo ao que foi apresentado na prova acima obtém-se

$$P_{(n,H)}(|\Phi|) = 2 \frac{nr^2(n-2) - (n-1)(n-2)}{nr^2(1-r^2)} > 0,$$

já que

$$nr^2(n-2) - (n-1)(n-2) = (n-2)(nr^2 - (n-1)) > 0.$$

Como $P_{(n,H)}$ é crescente em \mathbb{R}^+ , conclui-se que $|\Phi| > b(n, H)$, como afirmado. Essa diferença de comportamento entre $n = 2$ e $n \geq 3$ se dá por conta do termo de grau 1 de $P_{(n,H)}$, o qual se anula quando $n = 2$.

Seguindo passos análogos obtém-se que as curvaturas principais do Toro de Clifford $T^{n,l} = \mathbb{S}^l \left(\sqrt{\frac{l}{n}} \right) \times \mathbb{S}^{n-l} \left(\sqrt{\frac{n-l}{n}} \right)$ são

$$k_1 = \dots = k_l = \sqrt{\frac{n-l}{n}} \quad \text{e} \quad k_{l+1} = \dots = k_n = -\sqrt{\frac{l}{n-l}},$$

ou os simétricos destes, a depender da orientação. Em particular, a curvatura média de $T^{n,l}$ é

$$H = l \cdot k_1 + (n-l) \cdot k_n = \sqrt{l \cdot (n-l)} - \sqrt{(n-l) \cdot l} = 0.$$

Portanto,

$$|\Phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i \neq j} (k_i - k_j)^2 = \frac{1}{n} l \cdot (n-l) \cdot \left(\sqrt{\frac{n-l}{l}} + \sqrt{\frac{l}{n-l}} \right)^2 = n = b(n, 0)^2.$$

Tendo discutido esse detalhe a respeito do resultado de Alencar e do Carmo, passemos ao teorema principal dessa seção, o qual enfraquece a hipótese de compacidade, requerindo agora apenas a completude de M .

Teorema 3.1.2. (Magliaro, Mari, Roing e Savas-Halilaj) Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície imersa e completa com curvatura média constante $H \geq 0$. Suponha que

$$|\Phi|^2 \leq b(n, H)^2,$$

onde $b(n, H)$ é a raiz positiva do polinômio

$$P_{(n, H)}(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2 + 1). \quad (3.1)$$

Então, ou $|\Phi| \equiv 0$ (e M é uma esfera totalmente umbílica) ou $|\Phi| \equiv b(n, H)$. Além disso, $|\Phi| \equiv b(n, H)$ se, e somente se:

a) $H = 0$ e M é um recobrimento de um Toro de Clifford $T^{n,k}$, onde $k \in \{1, \dots, n-1\}$;

b) $H > 0$, $n \geq 3$ e M é um recobrimento de um $H(r)$ -toro, com $r^2 < \frac{n-1}{n}$;

c) $H > 0$, $n = 2$ e M é um recobrimento de um $H(r)$ -toro, com $r^2 \neq \frac{n-1}{n}$.

Antes de iniciar a prova do Teorema 3.1.2, será provada uma estimativa para o laplaciano da função $|\Phi|^2$ juntamente com alguns lemas essenciais para a demonstração do teorema supracitado.

3.1.1 Estimativa para $\Delta|\Phi|^2$ e alguns lemas

Na prova do Teorema 3.1.2 faremos uso da estimativa obtida por Alencar e do Carmo em [1] (a qual será provada aqui de modo a tornar o presente trabalho autocontido, embora seu conteúdo fuja do conceito principal que aqui se deseja tratar):

Proposição 3.1.3. Ainda na notação do Teorema 3.1.2, o laplaciano da função $|\Phi|^2$ satisfaz

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2 P_{(n, H)}(|\Phi|) + 2|\nabla\Phi|^2.$$

Para provar tal estimativa serão necessários dois lemas de conteúdo algébrico. O primeiro destes lemas foi obtido por Alencar e do Carmo em [1] enquanto o segundo foi provado por Nomizu e Smyth em [13].

Lema 3.1.1. (Alencar e do Carmo) Sejam μ_i , $i = 1, \dots, n$, números reais tais que $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2$, com $\beta \geq 0$. Então

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3.$$

Demonstração. Caso $\beta = 0$ a conclusão é imediata pois

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2 = 0 \Rightarrow \mu_i = 0, i = 1, \dots, n.$$

Consideremos então $\beta > 0$. É suficiente mostrar que o máximo e o mínimo da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^3$, restrita ao conjunto $X := g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, onde $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \text{ e } h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \beta^2,$$

são, respectivamente, $\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$ e $-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$.

Para tanto, vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange, ou seja, vamos analisar o sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \beta^2 = 0 \\ \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n) + \alpha \nabla h(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

o qual equivale a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \beta^2 = 0 \\ 3x_i^2 - 2\alpha x_i - \lambda = 0, i = 1, \dots, n \end{cases}.$$

Vale ressaltar que tal sistema possui solução, já que X é compacto. Se $a \geq -b$ são as raízes do polinômio $3x^2 - 2\alpha x - \lambda$, então um ponto crítico $(x_1, \dots, x_n) \in X$ de f restrita a X possui p coordenadas iguais a a e $n - p$ coordenadas iguais a $-b$. com $p \in \{0, \dots, n\}$ (evidentemente os números a e $-b$ dependem dos valores de α e λ , porém, visando tornar a notação mais limpa, iremos omitir tal dependência).

Como

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i = pa - (n - p)b \text{ e } 0 < \beta^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = pa^2 + (n - p)b^2,$$

devemos ter $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se, por exemplo, $a \neq 0$ e $b = 0$, então

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i = pa - (n - p)b = pa \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \beta^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = pa^2 + (n - p)b^2 = 0,$$

o que é uma contradição. Da mesma forma, não pode ocorrer $b \neq 0$ e $a = 0$. Logo, $a, b \neq 0$. Além disso, $a = b$ implicaria que a soma das coordenadas x_i seria igual a $na \neq 0$, portanto $a \neq b$. Mais ainda, $p \neq 0, n$, pois, do contrário, a soma das coordenadas x_i seria $nb \neq 0$ ou $na \neq 0$. Por fim, caso ocorresse $-b > 0$ ou $0 > a$ obteríamos, por $pa - (n-p)b = 0$, que $-b > a$, o que é uma contradição, logo $a > 0 > -b$. Temos assim que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \beta^2 = pa^2 + (n-p)b^2 \\ 0 = pa - (n-p)b \\ f(x_1, \dots, x_n) = pa^3 - (n-p)b^3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \beta^2 = p \left(\frac{n-p}{p} b \right)^2 + (n-p)b^2 \\ a = \frac{n-p}{p} b \\ f(x_1, \dots, x_n) = pa^3 - (n-p)b^3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{p}{n(n-p)} \beta^2 \\ a^2 = \frac{n-p}{pn} \beta^2 \\ f(x_1, \dots, x_n) = pa^2a - (n-p)b^2b \end{cases} \\ &\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{n-p}{n} a - \frac{p}{n} b \right) \beta^2. \end{aligned}$$

Segue então dessa expressão que o valor de f , num ponto crítico (x_1, \dots, x_n) de f restrita a X , decresce à medida que p aumenta. Portanto, os valores de máximo e mínimo de f em X são, respectivamente,

$$\begin{aligned} a^3 - (n-1)b^3 &\stackrel{\Sigma x_i=0}{=} ((n-1)b)^3 - (n-1)b^3 \\ &= b^3(n-1)n(n-2) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n(n-1)} \beta^2 \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \beta(n-1)n(n-2) \\ &= \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (n-1)a^3 - b^3 &= (n-1)a^3 - ((n-1)a)^3 = -a^3(n-1)n(n-2) \\ &\stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{n(n-1)} \beta^2 \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \beta(n-1)n(n-2) \\ &= -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3, \end{aligned}$$

o que prova o desejado. □

Lema 3.1.2. (Nomizu e Smyth) *Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Então, para qualquer constante c , vale que*

$$n \cdot c \cdot \text{tr}(A^2) - (\text{tr}(A^2))^2 - c(\text{tr}(A))^2 + (\text{tr}(A))(\text{tr}(A^3)) = \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (c + \lambda_i \lambda_j). \quad (3.2)$$

¹Lembre que $b^2 = \frac{p}{n(n-p)} \beta^2$ e $a^2 = \frac{n-p}{pn} \beta^2$.

Demonstração. Faremos por indução em n . No caso $n = 1$ entendemos o lado direito de (3.2) como sendo 0. Daí,

$$1 \cdot c \cdot \lambda_1^2 - (\lambda_1^2)^2 - c(\lambda_1)^2 + (\lambda_1)(\lambda_1^3) = 0,$$

ou seja, o lema é verdadeiro para $n = 1$. Suponhamos agora que o lema vale para $n - 1$. Então

$$\begin{aligned} n \cdot c \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 + \lambda_n^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 + \lambda_n^2 \right)^2 - c \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_n \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_n \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^3 + \lambda_n^3 \right) = \\ = \left[(n-1)c \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \right)^2 - c \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^3 \right) \right] \\ + \left[c \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \right) - 2c \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \lambda_n + (n-1)c \lambda_n^2 \right] \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^3 \lambda_n - 2\lambda_i^2 \lambda_n^2 + \lambda_i \lambda_n^3). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, a primeira linha da expressão acima é igual a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (c + \lambda_i \lambda_j).$$

A segunda linha, por sua vez, é igual a

$$c \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i \lambda_n + \lambda_n^2) = c \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n)^2,$$

enquanto a terceira linha é

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \lambda_n (\lambda_i - \lambda_n)^2.$$

Portanto, a soma fica

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (c + \lambda_i \lambda_j) + c \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \lambda_n (\lambda_i - \lambda_n)^2 = \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (c + \lambda_i \lambda_j),$$

onde, no último somatório, os índices variam entre 1 e n . Isto garante que o lema também vale para n , o que conclui prova indutiva. \square

Prova da Proposição 3.1.3. Fixemos inicialmente um ponto $p \in M$. Começemos calculando o laplaciano da função $|\Phi|^2$ em p . Num referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M numa vizinhança de p , com base dual $\{e^1, \dots, e^n\}$, podemos escrever

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij} e^i \otimes e^j \\ |\Phi|^2 = \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}^2 \end{cases}$$

Sendo Φ um tensor simétrico, podemos escolher o referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ de modo que, em $p \in M$, vale

$$\Phi(e_i, e_j) = \mu_i \delta_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \langle B(e_i), e_j \rangle = (\mu_i + H) \delta_{ij} \\ \langle \phi(e_i), e_j \rangle = \mu_i \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_i = \mu_i + H \\ 0 = \text{tr}(\phi) = \sum_i \mu_i \end{cases}$$

Afirmamos que Φ satisfaz a equação de Codazzi, isto é, sendo

$$\nabla \Phi = \sum_{i,j,k} (\nabla \Phi)_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k = \sum_{i,j,k} \Phi_{ij;k} e^i \otimes e^j \otimes e^k,$$

vale

$$\Phi_{ij;k} = \Phi_{ik;j}, \text{ para quaisquer } i, j, k \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.3)$$

De fato, sendo η uma escolha local de campo normal unitário de M , A_η o 2-tensor simétrico $A_\eta(X, Y) = \langle B(X), Y \rangle = \langle A(X, Y), \eta \rangle$ e $\nabla A_\eta = \sum_{i,j,k} A_{\eta_{ij;k}} e^i \otimes e^j \otimes e^k$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_{ij;k} &= e_k(\Phi_{ij}) - \Phi(\nabla_{e_k} e_i, e_j) - \Phi(e_i, \nabla_{e_k} e_j) \\ &= e_k(\langle B(e_i), e_j \rangle - H \langle e_i, e_j \rangle) - \langle B(\nabla_{e_k} e_i), e_j \rangle + H \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle \\ &\quad - \langle B(e_i), \nabla_{e_k} e_j \rangle + H \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle \\ &= -H \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle - H \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle + H \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle + H \langle e_i, \nabla_{e_k} e_j \rangle \\ &\quad + e_k(A_\eta(e_i, e_j)) - A_\eta(\nabla_{e_k} e_i, e_j) - A_\eta(e_i, \nabla_{e_k} e_j) \\ &= A_{\eta_{ij;k}}. \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que A_η satisfaz a equação de Codazzi. Para provar isto usaremos a equação de Codazzi no caso de codimensão 1, que nos diz que

$$\langle R^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_i, e_j)e_k, \eta \rangle = (\nabla_{e_j} A_\eta)(e_i, e_k) - (\nabla_{e_i} A_\eta)(e_j, e_k), \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\},$$

onde $R^{\mathbb{S}^{n+1}}$ é a curvatura da esfera (ver discussão após a Proposição 2.2.1). Além disso, a equação de Gauss aplicada à esfera nos dá

$$\begin{aligned} \langle R^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_i, e_j)e_k, \eta \rangle &= \langle R^{\mathbb{R}^{n+2}}(e_i, e_j)e_k, \eta \rangle - \langle A^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_j, \eta), A^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_i, e_k) \rangle \\ &\quad + \langle A^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_i, \eta), A^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_j, e_k) \rangle, \end{aligned}$$

onde $A^{\mathbb{S}^{n+1}}$ é a segunda forma fundamental da esfera.

Portanto, como $R^{\mathbb{R}^{n+2}} \equiv 0$ e $A^{\mathbb{S}^{n+1}}(X, Y) = -\langle X, Y \rangle Id_{\mathbb{S}^{n+1}}$, segue que

$$(\nabla_{e_j} A_\eta)(e_i, e_k) - (\nabla_{e_i} A_\eta)(e_j, e_k) = \langle R^{\mathbb{S}^{n+1}}(e_i, e_j)e_k, \eta \rangle = 0,$$

provando assim que A_η satisfaz a equação de Codazzi e, consequentemente, o afirmado.

Dessa maneira, pela Proposição 2.1.4, obtemos, em p ,

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = |\nabla\Phi|^2 + \sum_i \mu_i(tr(\Phi))_{;ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2, \quad (3.4)$$

onde R é o tensor de curvatura de M e $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$. Vamos agora calcular a última parcela do lado direito de (3.4):

Por $\mu_i = k_i - H$ e da equação de Gauss

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R^{\mathbb{S}^{n+1}}(X, Y)Z, W \rangle - \langle A(X, W), A(Y, Z) \rangle + \langle A(X, Z), A(Y, W) \rangle$$

segue que, para $i \neq j$,

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= R_{ijij}^{\mathbb{S}^{n+1}} - \langle B(e_i), e_j \rangle \cdot \langle B(e_j), e_i \rangle + \langle B(e_i), e_i \rangle \cdot \langle B(e_j), e_j \rangle \\ &= R_{ijij}^{\mathbb{S}^{n+1}} + (\mu_i + H)(\mu_j + H) \\ &= 1 + H^2 + \mu_i \mu_j + H(\mu_i + \mu_j). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando o Lema 3.1.2, com $c = 1$, para o operador $\phi : T_p M \rightarrow T_p M$, $\langle \phi(X), Y \rangle = \Phi(X, Y)$, o qual satisfaz $\sum_i \mu_i = tr(\phi) = 0$, obtemos

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (1 + \mu_i \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 = n \sum_i \mu_i^2 - \left(\sum_i \mu_i^2 \right)^2 = n|\Phi|^2 - |\Phi|^4.$$

Dessa forma, por $\sum_{i,j} (\mu_i - \mu_j)^2 = \sum_{i,j} (k_i - k_j)^2 = 2n|\Phi|^2$ e (3.5), vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (1 + H^2 + \mu_i \mu_j + H(\mu_i + \mu_j))(\mu_i - \mu_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (1 + \mu_i \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 + \frac{H^2}{2} \sum_{i,j} (\mu_i - \mu_j)^2 \\ &\quad + \frac{H}{2} \sum_{i,j} (\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \\ &= n|\Phi|^2 - |\Phi|^4 + nH^2|\Phi|^2 + \frac{H}{2} \sum_{i,j} (\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 &= \sum_{i,j} (\mu_i^3 - \mu_i^2 \mu_j - \mu_i \mu_j^2 + \mu_j^3) \\ &= n \sum_i \mu_i^3 - \left(\sum_i \mu_i^2 \right) \left(\sum_j \mu_j \right) - \left(\sum_i \mu_i \right) \left(\sum_j \mu_j^2 \right) + n \sum_j \mu_j^3 \\ &= 2n \sum_i \mu_i^3. \end{aligned}$$

Juntando essas duas informações e substituindo em (3.4) encontramos

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^4 + n|\Phi|^2 + nH^2|\Phi|^2 + nH\sum_i \mu_i^3.$$

Por fim, aplicando o Lema 3.1.1 com $\beta = |\Phi|$, concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &\geq |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^4 + n(H^2 + 1)|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3 \\ &= |\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2 \left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2 + 1) \right) \\ &= |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2 P_{(n,H)}(|\Phi|). \end{aligned}$$

□

O último lema antes da prova do Teorema 3.1.2 é de caráter puramente algébrico e será útil para tratar da norma do 2-tensor Φ .

Lema 3.1.3. *Seja $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n \geq 2$, uma forma bilinear simétrica com componentes Φ_{ij}^α , $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $\alpha \in \{1, \dots, p\}$. Suponha que, para cada α , $\sum_{k=1}^n \Phi_{kk}^\alpha = 0$. Então, a norma de Φ ,*

$$|\Phi|^2 = \sum_{\alpha, i, j} (\Phi_{ij}^\alpha)^2,$$

satisfaz

$$|\Phi|^2 \geq \frac{n}{n-1} \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \geq \frac{n}{n-1} \sum_{\alpha} (\Phi_{11}^\alpha)^2.$$

Demonstração. A desigualdade de Cauchy-Schwarz e a hipótese $\sum_{k=1}^n \Phi_{kk}^\alpha = 0$ nos garante que, para cada α , vale

$$(\Phi_{11}^\alpha)^2 = \left(-\sum_{j=2}^n \Phi_{jj}^\alpha \right)^2 \leq (n-1) \sum_{j=2}^n (\Phi_{jj}^\alpha)^2.$$

Logo, como Φ é simétrica, obtemos

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &\geq \sum_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 + \sum_{j=2}^n (\Phi_{j1}^\alpha)^2 \right) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + 2 \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \right) \\ &\geq \sum_{\alpha} \left((\Phi_{11}^\alpha)^2 + \frac{1}{n-1} (\Phi_{11}^\alpha)^2 + 2 \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \right) = \frac{n}{n-1} \sum_{\alpha} (\Phi_{11}^\alpha)^2 + 2 \sum_{\alpha} \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \\ &\geq \frac{n}{n-1} \left(\sum_{\alpha} (\Phi_{11}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha} \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \right) = \frac{n}{n-1} \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2. \end{aligned}$$

□

3.1.2 Demonstração do Teorema 3.1.2

Vamos denotar por $b_- < 0 < b_+ = b(n, H)$ as raízes do polinômio $P_{(n,H)}(x)$, ou seja

$$b_{\pm} = -\frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}} \pm \sqrt{\frac{n^2(n-2)^2}{4n(n-1)}H^2 + n(H^2 + 1)}.$$

Como $|b_-| \geq b_+$ (note que $|b_-| = b_+ + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H$), temos, para $x \in [0, b_+]$, que

$$P_{(n,H)}(x) = (x - b_+)(x - b_-) \leq (x - b_+)(x + b_+) = x^2 - b_+^2,$$

donde podemos reescrever a desigualdade da Proposição 3.1.3 como

$$\begin{aligned} \Delta|\Phi|^2 &\geq -2|\Phi|^2 P_{(n,H)}(|\Phi|) + 2|\nabla\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2(|\Phi|^2 - b_+^2) \\ &= 2|\Phi|^2(b_+^2 - |\Phi|^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

No que segue escreveremos $b_+ = b$. Como consequência da desigualdade acima temos que a função $u = b^2 - |\Phi|^2$ satisfaz

$$u \geq 0 \text{ e } \Delta u = -\Delta|\Phi|^2 \leq -2|\Phi|^2 u \text{ em } M.$$

Consideremos agora dois casos:

Caso 1: $u(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in M$.

Nesse caso, como $u \geq 0$ e $\Delta u \leq 0$, segue do princípio do máximo que $u \equiv 0$, logo $|\Phi|^2 \equiv b$ e $|\nabla\Phi| \equiv 0$. O restante da argumentação é essencialmente uma consequência do que é feito em [1], mais especificamente prova-se que M possui duas curvaturas principais distintas e constantes e que cada ponto de M possui uma vizinhança U tal que $f(U)$ é um pedaço de um toro de Clifford ou um $H(r)$ -toro, a depender do valor de H . Juntando isso com a hipótese de completude sobre M é possível mostrar que $f(M)$ é exatamente um desses toros, digamos Σ , e $f : M \rightarrow \Sigma$ é um mapa de recobrimento. Como isto foge do cerne deste trabalho, não serão dados mais detalhes a respeito desse caso (para mais detalhes ver [12]).

Caso 2: $u > 0$ em M .

Vamos provar que, nesse caso, $|\Phi| \equiv 0$ e, por conseguinte, M é uma esfera totalmente umbílica. Para tanto consideremos a mundança conforme da métrica de M dada por

$$\bar{g} = u^{2\beta} g,$$

onde g é a métrica de M e

$$\beta = \begin{cases} \text{qualquer número em } (0, 1) & , \text{ se } n = 2, 3 \\ \frac{1}{n-2} & , \text{ se } n \geq 4 \end{cases}$$

Seja $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ uma curva parametrizada por comprimento de arco s , em relação a g , e \bar{s} o comprimento de arco com relação a \bar{g} , ou seja

$$\bar{s}(s) = \int_0^s \sqrt{\bar{g}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_0^s u^\beta(\gamma(t)) dt.$$

Em particular, $d\bar{s} = u^\beta ds$.

A prova seguirá das três afirmações a seguir:

Afirmção 1: Suponha que γ é uma \bar{g} -geodésica com segunda variação da energia não negativa, com respeito ao comprimento de arco em \bar{g} , para qualquer variação própria de γ . Então existem constantes $c_0 > 0$ e $t_0 > 1$, dependendo de n e β , tais que

$$c_0 \int_0^a u^\beta(\gamma(s)) \psi^2(s) ds \leq -2t_0 \int_0^a u^\beta(\gamma(s)) \psi(s) \psi_{ss}(s) ds, \quad \forall \psi \in C_0^2([0, a])$$

onde

$$C_0^2([0, a]) = \{\psi \in C^2([0, a]); \psi(0) = \psi(a) = 0\}.$$

Afirmção 2: M é compacta.

Afirmção 3: M é uma esfera totalmente umbílica.

Demonstração da Afirmção 1. Consideremos campos paralelos, com respeito à métrica \bar{g} , $\{e_1(\bar{s}), \dots, e_{n-1}(\bar{s})\}$ ao longo de γ tais que $\{e_1(\bar{s}), \dots, e_{n-1}(\bar{s}), \gamma_s(\bar{s})\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(\bar{s})}M$, para todo $\bar{s} \in [0, \bar{s}(a)]$ (basta tomar o transporte paralelo de uma base ortonormal de $T_{\gamma(0)}M$, que contenha $\gamma_s(0)$, ao longo de γ , visto que γ é uma \bar{g} -geodésica). Dada $\varphi \in C_0^2([0, a])$, definamos os campos V_j , $j = 1, \dots, n-1$, ao longo de γ por

$$V_j(\bar{s}) = \varphi(s) e_j(\bar{s}), \quad \forall \bar{s} \in [0, \bar{s}(a)].$$

Como $V_j(0) = V_j(\bar{s}(a)) = 0$, existe uma variação própria de γ , $f_j: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0, \bar{s}(a)] \rightarrow M$, tal que V_j é o campo variacional de f_j , ou seja, $V_j(\bar{s}) = \frac{\partial f_j}{\partial t}(0, \bar{s})$ (Proposição 2.4.1). Se E_j denota a energia relativa à variação f_j , então a fórmula da segunda variação da energia e a hipótese nos garantem

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2} E_j''(0) &= \int_0^{\bar{s}(a)} \left[\left\langle \frac{DV_j}{d\bar{s}}(\tau), \frac{DV_j}{d\bar{s}}(\tau) \right\rangle - \langle \bar{R}(\gamma_s(\tau), V_j(\tau)) \gamma_s(\tau), V_j(\tau) \rangle \right] d\tau \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^{\bar{s}(a)} [(\varphi_s(\tau))^2 - (\varphi(\tau))^2 \langle \bar{R}(\gamma_s, e_j(\tau)) \gamma_s(\tau), e_j(\tau) \rangle] d\tau, \end{aligned}$$

onde \bar{R} é o tensor curvatura de M com respeito a métrica \bar{g} , $\varphi_s = \frac{d}{d\bar{s}}(\varphi \circ \bar{s}^{-1})$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle = \bar{g}$.

²Note que $\frac{DV_j}{d\bar{s}} = \varphi_s e_j + \varphi \frac{\partial e_j}{\partial \bar{s}} = \varphi_s e_j$, já que e_j é um campo paralelo.

Somando em j , obtemos que

$$\int_0^{\bar{s}(a)} [(n-1)(\varphi_{\bar{s}}(\tau))^2 - (\varphi(\tau))^2 \overline{Ric}(\gamma_{\bar{s}}, \gamma_{\bar{s}})] d\tau \geq 0$$

Uma forma equivalente de escrever a desigualdade acima é

$$\int_0^a [(n-1)(\varphi_s(s))^2 - (\varphi(s))^2 \overline{Ric}(\gamma_s(s), \gamma_s(s))] u^{-\beta}(\gamma(s)) ds \geq 0. \quad (3.7)$$

Para ver isso basta notar que, para todo $\tau \in [0, \bar{s}(a)]$

$$\begin{cases} \varphi_{\bar{s}}(\tau) = \varphi_s(\bar{s}^{-1}(\tau)) \frac{d\bar{s}^{-1}}{d\tau}(\tau) = \varphi_s(\bar{s}(\tau)) u^{-\beta}(\gamma(\bar{s}^{-1}(\tau))) \\ \gamma_{\bar{s}}(\tau) = \gamma_s(\bar{s}^{-1}(\tau)) \frac{d\bar{s}^{-1}}{d\tau}(\tau) = \gamma_s(\bar{s}^{-1}(\tau)) u^{-\beta}(\gamma(\bar{s}^{-1}(\tau))) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{s}(a)} [(\varphi_{\bar{s}}(\tau))^2 - (\varphi(\tau))^2 \langle \bar{R}(\bar{\gamma}_{\bar{s}}, e_j(\tau)) \bar{\gamma}_{\bar{s}}(\tau), e_j(\tau) \rangle] d\tau \\ &= \int_0^{\bar{s}(a)} [(\varphi_s \circ \bar{s}^{-1})^2 u^{-2\beta}(\gamma \circ \bar{s}^{-1}) - (\varphi \circ \bar{s}^{-1})^2 u^{-2\beta}(\gamma \circ \bar{s}^{-1}) \langle \bar{R}(\gamma_s \circ \bar{s}^{-1}, e_j) \gamma_s \circ \bar{s}^{-1}, e_j \rangle] d\tau \\ &= \int_0^a [(\varphi_s(s))^2 - (\varphi(s))^2 \langle \bar{R}(\gamma_s(s), e_j(\bar{s}(s))) \gamma_s(s), e_j(\bar{s}(s)) \rangle] u^{-\beta}(\gamma_s(s)) ds, \end{aligned}$$

logo basta somar em j para obter (3.7).

Como já mostrado na Proposição (2.5.2), ao longo de γ vale a relação

$$\overline{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) = Ric(\gamma_s, \gamma_s) - \beta(n-2)(\ln(u \circ \gamma))_{ss} - \beta \Delta \ln(u). \quad (3.8)$$

Note que

$$\Delta \ln(u) = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = \frac{\Delta u}{u} - |\nabla \ln u|^2,$$

pois dado $p \in M$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança de p , tem-se

$$\begin{aligned} (\Delta \ln(u))_p &= \sum_{i=1}^n \left[X_{i_p}(X_i(\ln(u))) - (\nabla_{X_i} X_i)_p(\ln(u)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[X_{i_p} \left(\frac{X_i(u)}{u} \right) - \frac{(\nabla_{X_i} X_i)_p(u)}{u(p)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(X_{i_p}(X_i(u)))u - (X_{i_p}(u))^2}{u(p)^2} - \frac{(\nabla_{X_i} X_i)_p(u)}{u(p)} \right] \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n [X_{i_p}(X_i(u)) - (\nabla_{X_i} X_i)_p(u)]}{u(p)} - \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i_p}(u))^2}{u(p)^2} \\ &= \frac{(\Delta u)_p}{u(p)} - \frac{|(\nabla u)(p)|^2}{u(p)^2}, \end{aligned}$$

e

$$|(\nabla \ln(u))(p)|^2 = \sum_{i=1}^n (X_{i_p}(\ln(u)))^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{i_p}(u)}{u(p)} \right)^2 = \frac{|(\nabla u)(p)|^2}{u(p)^2}.$$

Disto e de $\Delta u \leq -2|\Phi|^2 u$, temos que

$$\Delta \ln(u) \leq -2|\Phi|^2 - |\nabla \ln(u)|^2 \stackrel{(3)}{\leq} -2|\Phi|^2 - [(\ln(u \circ \gamma))_s]^2.$$

Substituindo em (3.8), obtemos

$$\overline{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) \geq Ric(\gamma_s, \gamma_s) + 2\beta|\Phi|^2 - \beta(n-2)(\ln(u \circ \gamma))_{ss} + \beta[(\ln(u \circ \gamma))_s]^2. \quad (3.9)$$

Consideremos agora $\{v_1(s) = \gamma_s(s), v_2(s), \dots, v_n(s)\}$ um referencial ortonormal de M , com respeito a g , ao longo de γ (basta tomar $v_i(s) = u^\beta(\gamma(s)) \cdot e_i(\bar{s})$). Pela equação de Gauss, obtemos que as componentes do tensor curvatura R (em relação a g) de M são

$$R_{ijij} = R_{ijij}^{\mathbb{S}^{n+1}} + \langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j) \rangle - \langle A(e_i, e_j), A(e_j, e_i) \rangle = 1 - \delta_{ij} + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2,$$

para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, onde h_{ij} são as componentes da segunda forma fundamental de M . Como $\Phi = A - Hg$, podemos reescrever a igualdade acima como

$$R_{ijij} = 1 - \delta_{ij} + (\Phi_{ii} + H)(\Phi_{jj} + H) - (\Phi_{ij} + H\delta_{ij})^2, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Disto e de $tr(\phi) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} Ric(\gamma_s, \gamma_s) &= \sum_{j=2}^n R_{1j1j} \\ &= \sum_{j=2}^n [1 - \delta_{1j} + \Phi_{11}\Phi_{jj} + \Phi_{11}H + H\Phi_{jj} + H^2 - (\Phi_{1j} + H\delta_{1j})^2] \\ &= n - 1 - \Phi_{11}^2 + (n-1)\Phi_{11}H - H\Phi_{11} + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \\ &= n - 1 - \Phi_{11}^2 + (n-2)\Phi_{11}H + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pelo Lema 3.1.3 temos

$$|\Phi|^2 \geq \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^n \Phi_{1j}^2 \geq \frac{n}{n-1} \Phi_{11}. \quad (3.11)$$

³Dado $s \in [0, a]$ tome um referencial ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ de M numa vizinhança de $\gamma(s)$ tal que $X_{1_{\gamma(s)}} = \gamma_s(s)$. Daí

$$|(\nabla \ln(u))(\gamma(s))|^2 = \sum_{i=1}^n (X_{i_{\gamma(s)}}(\ln(u)))^2 \leq (X_{1_{\gamma(s)}}(\ln(u)))^2 = (\gamma_s(s)(\ln(u)))^2 = [(\ln(u \circ \gamma))_s(s)]^2.$$

Fixemos $\tau \in (0, 1]$ e $\varepsilon > 0$. Pela desigualdade de Young e (3.11), vem que

$$H \cdot \Phi_{11} = H(1 - \tau)\Phi_{11} + H\tau\Phi_{11} \stackrel{(4)}{\geq} -H(1 - \tau)\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Phi| - \frac{\tau H^2}{2\varepsilon} - \frac{\tau\varepsilon\Phi_{11}^2}{2},$$

logo, por (3.10),

$$\begin{aligned} Ric(\gamma_s, \gamma_s) &\geq n - 1 - \Phi_{11}^2 + (n-2) \left[-H(1 - \tau)\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Phi| - \frac{\tau H^2}{2\varepsilon} - \frac{\tau\varepsilon\Phi_{11}^2}{2} \right] \\ &\quad + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2. \end{aligned}$$

Como $P_{(n,H)}(b) = 0$ e $0 \leq |\Phi| \leq b$, temos

$$\begin{aligned} P_{(n,H)}(|\Phi|) \leq 0 &\Leftrightarrow |\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| - n(H^2 + 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (n-2)\sqrt{\frac{n-1}{n}}H|\Phi| \leq (n-1)(H^2 + 1) - \frac{n-1}{n}|\Phi|^2, \end{aligned}$$

o que, ao substituir na relação anterior, implica

$$\begin{aligned} Ric(\gamma_s, \gamma_s) &\geq (n-1)\tau + \tau \left(n - 1 - \frac{n-2}{2\varepsilon} \right) H^2 + \frac{n-1}{n}(1 - \tau)|\Phi|^2 \\ &\quad - \left(1 + \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \right) \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \\ &\geq (n-1)\tau + \tau \left(n - 1 - \frac{n-2}{2\varepsilon} \right) H^2 + \frac{n-1}{n}(1 - \tau)|\Phi|^2 \\ &\quad - \left(1 + \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \right) \sum_{j=1}^n \Phi_{1j}^2. \end{aligned}$$

Usando isso em (3.9) obtemos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) &\geq (n-1)\tau + \tau \left(n - 1 - \frac{n-2}{2\varepsilon} \right) H^2 + \frac{n-1}{n}(1 - \tau)|\Phi|^2 \\ &\quad - \left(1 + \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \right) \sum_{j=1}^n \Phi_{1j}^2 + 2\beta|\Phi|^2 - \beta(n-2)(\ln(u \circ \gamma))_{ss} \\ &\quad + \beta[(\ln(u \circ \gamma))_s]^2 \\ &= (n-1)\tau + \tau \left(n - 1 - \frac{n-2}{2\varepsilon} \right) H^2 + \left(2\beta + \frac{n-1}{n}(1 - \tau) \right) |\Phi|^2 \\ &\quad - \left(1 + \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \right) \sum_{j=1}^n \Phi_{1j}^2 - \beta(n-2)(\ln(u \circ \gamma))_{ss} + \beta[(\ln(u \circ \gamma))_s]^2 \\ &\geq (n-1)\tau + \tau \left(n - 1 - \frac{n-2}{2\varepsilon} \right) H^2 + \left(\frac{2\beta n}{n-1} - \tau - \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \right) \sum_{j=1}^n \Phi_{1j}^2 \\ &\quad - \beta(n-2)(\ln(u \circ \gamma))_{ss} + \beta[(\ln(u \circ \gamma))_s]^2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

⁴ $|H\tau\Phi_{11}| = H\tau|\Phi_{11}| = \tau \left(\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} \right) (\sqrt{\varepsilon}|\Phi_{11}|) \leq \frac{\tau H^2}{2\varepsilon} + \frac{\tau\varepsilon\Phi_{11}^2}{2}.$

onde, na última desigualdade, foi usado $|\Phi|^2 \geq \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^n \Phi_{1j}^2$. Escolhamos agora τ e ε de modo que

$$\begin{cases} n-1 - \frac{n-2}{2\varepsilon} \geq 0 \\ \frac{2n\beta}{n-1} - \tau - \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \geq 0 \end{cases}$$

Para isso basta tomar

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 2 \\ \frac{n-2}{2(n-1)} & , \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$$

e τ suficientemente pequeno. Feita essa escolha, definamos $c_0 = \tau(n-1)$. Daí, segue de (3.12) que

$$\overline{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) \geq c_0 - \beta(n-2)(\ln(u \circ \gamma))_{ss} + \beta[(\ln(u \circ \gamma))_s]^2.$$

Substituindo em (3.7) (na relação abaixo abusaremos da notação ao escrever apenas u para indicar $u \circ \gamma$)

$$(n-1) \int_0^a \varphi_s^2 u^{-\beta} ds \geq \int_0^a \varphi^2 u^{-\beta} (c_0 - \beta(n-2)(\ln(u))_{ss} + \beta[(\ln(u))_s]^2) ds. \quad (3.13)$$

Integrando por partes e usando que $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, vem que

$$\begin{aligned} -\beta \int_0^a \varphi^2 (\ln(u \circ \gamma))_{ss} (u \circ \gamma)^{-\beta} ds &= 2\beta \int_0^a \varphi \varphi_s (\ln(u \circ \gamma))_s (u \circ \gamma)^{-\beta} ds \\ &\quad - \beta^2 \int_0^a \varphi^2 [(\ln(u \circ \gamma))_s]^2 (u \circ \gamma)^{-\beta} ds. \end{aligned}$$

Substituindo isso em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^a \varphi_s^2 (u \circ \gamma)^{-\beta} ds &\geq c_0 \int_0^a \varphi^2 (u \circ \gamma)^{-\beta} ds + 2\beta(n-2) \int_0^a \varphi \varphi_s (\ln(u \circ \gamma))_s (u \circ \gamma)^{-\beta} ds \\ &\quad + \beta(1 - \beta(n-2)) \int_0^a \varphi^2 [(\ln(u \circ \gamma))_s]^2 (u \circ \gamma)^{-\beta} ds \\ &= c_0 \int_0^a \varphi^2 (u \circ \gamma)^{-\beta} ds + 2\beta(n-2) \int_0^a \varphi \varphi_s (u \circ \gamma)_s (u \circ \gamma)^{-\beta-1} ds \\ &\quad + \beta(1 - \beta(n-2)) \int_0^a \varphi^2 (u \circ \gamma)_s^2 (u \circ \gamma)^{-\beta-2} ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como estamos supondo $u > 0$, para toda $\varphi \in C_0^2([0, a])$, podemos escrever

$$\varphi = (u \circ \gamma)^\beta \cdot \psi,$$

com $\psi \in C_0^2([0, a])$. Em particular,

$$\begin{cases} \varphi_s^2(u \circ \gamma)^{-\beta} = \psi_s^2(u \circ \gamma)^\beta + 2\beta \psi \psi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{\beta-1} + \beta^2 \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} \\ \varphi^2(u \circ \gamma)^{-\beta} = \psi^2(u \circ \gamma)^\beta \\ \varphi \varphi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{-\beta-1} = \beta \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} + \psi \psi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{\beta-1} \\ \varphi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{-\beta-2} = \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} \end{cases}$$

Substituindo essas informações em (3.14) e simplificando, obtemos

$$(n-1) \int_0^a \psi_s^2(u \circ \gamma)^\beta ds \geq c_0 \int_0^a \psi^2(u \circ \gamma)^\beta ds + \beta(1-\beta) \int_0^a \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} ds - 2\beta \int_0^a \psi \psi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{\beta-1} ds. \quad (3.15)$$

Definamos

$$I = \beta \int_0^a \psi \psi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{\beta-1} ds = \frac{1}{2} \int_0^a (\psi^2)_s((u \circ \gamma)^\beta)_s ds.$$

Integrando por partes e usando $\psi(0) = \psi(a) = 0$, segue que

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^a (\psi^2)_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds = -\int_0^a (\psi_s)^2(u \circ \gamma)^\beta ds - \int_0^a \psi \psi_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds.$$

Para quaisquer $t > 1$ e $\delta > 0$, vale que

$$\begin{aligned} 2I &= 2tI + 2(1-t)I \\ &= -2t \int_0^a (\psi_s)^2(u \circ \gamma)^\beta ds - 2t \int_0^a \psi \psi_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds \\ &\quad + 2\beta(1-t) \int_0^a \psi \psi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{\beta-1} ds \\ &\leq -2t \int_0^a (\psi_s)^2(u \circ \gamma)^\beta ds - 2t \int_0^a \psi \psi_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds \\ &\quad + \beta(t-1) \delta \int_0^a \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} ds + \frac{\beta(t-1)}{\delta} \int_0^a \psi_s^2(u \circ \gamma)^\beta ds, \end{aligned}$$

sendo que, na última desigualdade, usamos a desigualdade de Young para obter

$$\begin{aligned} |\beta(1-t) \psi \psi_s(u \circ \gamma)_s(u \circ \gamma)^{\beta-1}| &= \beta(1-t) \left((u \circ \gamma)^{\frac{\beta}{2}-1} |(u \circ \gamma)_s \psi| \sqrt{\delta} \right) \cdot \left(\frac{(u \circ \gamma)^{\frac{\beta}{2}} |\psi_s|}{\sqrt{\delta}} \right) \\ &\leq \beta(1-t) \left[\frac{(u \circ \gamma)^{\beta-2} (u \circ \gamma)_s^2 \psi^2 \delta}{2} + \frac{(u \circ \gamma)^\beta (\psi_s)^2}{2\delta} \right]. \end{aligned}$$

Visto que $\beta < 1$ e $t > 1$, podemos tomar $\delta = \frac{1-\beta}{t}$. Com essa escolha, obtemos

$$\begin{aligned} 2I &\leq -2t \int_0^a \psi \psi_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds + \left(\frac{\beta(1-t)}{\delta} - 2t \right) \int_0^a (\psi_s)^2(u \circ \gamma)^\beta ds \\ &\quad + \beta(t-1) \delta \int_0^a \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} ds \\ &= -2t \int_0^a \psi \psi_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds + \left(\frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t \right) \int_0^a (\psi_s)^2(u \circ \gamma)^\beta ds \\ &\quad + \beta(1-\beta) \int_0^a \psi^2(u \circ \gamma)_s^2(u \circ \gamma)^{\beta-2} ds, \end{aligned}$$

o que, ao substituir em (3.15), implica

$$\begin{aligned}
 (n-1) \int_0^a \psi_s^2 (u \circ \gamma)^\beta ds &\geq c_0 \int_0^a \psi^2 (u \circ \gamma)^\beta ds + \beta(1-\beta) \int_0^a \psi^2 (u \circ \gamma)_s^2 (u \circ \gamma)^{\beta-2} ds - 2I \\
 &\geq c_0 \int_0^a \psi^2 (u \circ \gamma)^\beta ds - \left(\frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t \right) \int_0^a (\psi_s)^2 (u \circ \gamma)^\beta ds \\
 &\quad + 2t \int_0^a \psi \psi_{ss} (u \circ \gamma)^\beta ds,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^a \left[c_0 \psi^2 - \overbrace{\left(\frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t + n - 1 \right)}{=: p(n,t,\beta)} (\psi_s)^2 + 2t \psi \psi_{ss} \right] (u \circ \gamma)^\beta ds \leq 0. \quad (3.16)$$

Pela escolha de β , temos que

$$p(n, t_0, \beta) \leq 0, \text{ para } t_0 = \begin{cases} 1 + \frac{2(1-\beta)}{\beta}, & \text{se } n \in \{2, 3\} \\ n - 2, & \text{se } n \geq 4 \end{cases}.$$

De fato, isso pode ser verificado por uma computação direta em cada um dos casos:

- $n = 2$:

$$p(2, t_0, \beta) = \frac{4(1-\beta)}{\beta} - 2 - \frac{4(1-\beta)}{\beta} + 1 = -1.$$

- $n = 3$:

$$p(3, t_0, \beta) = 1 + p(2, t_0, \beta) = 0.$$

- $n \geq 4$: Lembre que $\beta = \frac{1}{n-2}$ nesse caso, logo

$$p(n, t_0, \beta) = \frac{\frac{1}{n-2}}{1 - \frac{1}{n-2}} (n-3)^2 - 2(n-2) + n - 1 = 0.$$

Juntando isso e (3.16), vem que (vale notar que $t_0 > 1$)

$$c_0 \int_0^a \psi^2 (u \circ \gamma)^\beta ds \leq -2t_0 \int_0^a \psi \psi_{ss} (u \circ \gamma)^\beta ds.$$

Como $\varphi = (u \circ \gamma)^\beta \cdot \psi$ é arbitrária, concluímos o desejado. \square

Demonstração da Afirmação 2. Suponhamos que M não é compacta e tomemos a menor curva divergente $\gamma: [0, T) \rightarrow M$ construída na Proposição 2.3.6 com respeito a \bar{g} , ou seja, γ é uma \bar{g} -geodésica, minimizante em cada intervalo compacto de $[0, T)$ e divergente.

Parametrizando γ por comprimento de arco s em relação a g temos, por (M, g) ser completa, que, nessa parametrização, γ está definida em $[0, \infty)$ (Proposição 2.3.5). Segue do Corolário 2.4.1 que γ possui segunda variação da energia não negativa, com respeito ao comprimento de arco em \bar{g} , para qualquer variação própria, logo, pela afirmação 1, existem constantes $c_0 > 0$ e $t_0 > 1$ satisfazendo

$$c_0 \int_0^a \psi^2(u \circ \gamma)^\beta ds \leq -2t_0 \int_0^a \psi \psi_{ss}(u \circ \gamma)^\beta ds,$$

para quaisquer $a > 0$ e $\psi \in C_0^2([0, a])$ (por γ ser \bar{g} -minimizante em cada intervalo compacto de $[0, T)$ e por ela estar definida em $[0, \infty)$ quando parametrizada em relação ao comprimento de arco de g podemos aplicar a afirmação 1 para todo $a > 0$.)

Tomando $\psi(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{a}\right)$, obtemos

$$c_0 \int_0^a u^\beta(\gamma(s)) \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds \leq 2t_0 \int_0^a u^\beta(\gamma(s)) \frac{\pi^2}{a^2} \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds, \quad \forall a > 0,$$

o que equivale a

$$\left(c_0 - 2t_0 \frac{\pi^2}{a^2}\right) \int_0^a u^\beta(\gamma(s)) \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds \leq 0, \quad \forall a > 0.$$

Por outro lado, tomando $a > \pi \sqrt{\frac{2t_0}{c_0}}$ vemos que

$$c_0 - 2t_0 \frac{\pi^2}{a^2} > 0 \text{ e } \int_0^a u^\beta(\gamma(s)) \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds > 0,$$

ou seja, uma contradição. Portanto, M é compacta. □

Demonstração da Afirmação 3. Como $\Delta|\Phi|^2 \geq 0$ e M é compacta, segue do princípio do máximo forte que $|\Phi|^2$ é constante. Por estarmos assumindo $u > 0$, devemos ter $|\Phi|^2 < b^2$. Portanto, da desigualdade 3.6, encontramos

$$0 = \Delta|\Phi|^2 \geq 2(b^2 - |\Phi|^2)|\Phi|^2 + 2|\nabla\Phi|^2 \geq (b^2 - |\Phi|^2)|\Phi|^2,$$

o que nos permite concluir que $|\Phi| \equiv 0$ em M , donde segue que M é uma esfera totalmente umbílica. Isto conclui a prova da afirmação 3 e, por conseguinte, do teorema. □

3.2 Generalização do Teorema de Bonnet-Myers

Um resultado amplamente estudado e aplicado na área da geometria Riemanniana é o teorema de Bonnet-Myers, que garante propriedades topológicas (compacidade e grupo fundamental finito) a partir de completude e uma estimativa inferior para o tensor de Ricci. O foco desta seção será apresentar e provar uma generalização deste teorema obtida em [4], a qual apresenta aplicações no ramo da cosmologia (para mais detalhes, ver Seção 1.2 de [4]). Antes disso, apresentaremos o teorema de Bonnet-Myers junto com sua prova e discutiremos alguns detalhes a respeito do mesmo. Um olhar atento a essa demonstração revela uma inspiração para os argumentos utilizados nas demonstrações dos três teoremas principais deste trabalho (mais especificamente na aplicação da fórmula da segunda variação da energia).

Teorema 3.2.1. (Bonnet-Myers) *Seja (M^n, g) , $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$\text{Ric} \geq (n-1)\lambda \cdot g,$$

para algum $\lambda > 0$. Então M é compacta e satisfaz

$$\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Demonstração. Dados $p, q \in M$, segue da hipótese de completude que existe uma geodésica minimizante $\gamma: [0, l] \rightarrow M$ ligando p e q , onde $l = l(\gamma) = d(p, q)$. Se mostrarmos que $l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, teremos, simultaneamente, que M satisfaz a estimativa com respeito ao seu diâmetro e é compacta (pois é completa).

Para provar isso suponhamos por absurdo que $l > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ e tomemos $\{e_2, \dots, e_n\}$ campos paralelos ao longo de γ e tais que $\{\gamma'(t), e_2(t), \dots, e_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in [0, l]$. Com isso, definamos os campos $V_j(t) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) \cdot e_j(t)$, $t \in [0, l]$, ao longo de γ , $j = 2, \dots, n$. Como $V_j(0) = V_j(l) = 0$, a Proposição 2.4.1 garante a existência de uma variação própria $f_j: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \rightarrow M$ de γ cujo campo variacional coincide com V_j , ou seja $V_j(t) = \frac{\partial f_j}{\partial s}(0, t)$. Daí, denotando por E_j a energia relativa à variação f_j , segue da fórmula da segunda variação da energia que, para cada $j \in \{2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_j''(0) &= \int_0^l \left[\left\langle \frac{DV_j}{dt}(t), \frac{DV_j}{dt}(t) \right\rangle - \langle R(\gamma'(t), V_j(t))\gamma'(t), V_j(t) \rangle \right] dt \\ &= \int_0^l \left[\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) \langle R(\gamma'(t), e_j(t))\gamma'(t), e_j(t) \rangle \right] dt, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, foi usado que os campos e_j são paralelos para obter

$$V'_j(t) = \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) e_j + \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) \cdot \frac{De_j}{dt} = \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) e_j.$$

Somando em j e usando $l > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ junto com a hipótese sobre o tensor de Ricci obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \frac{1}{2} E''_j(0) &= \int_0^l \left[(n-1) \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{l} \cdot t\right) Ric(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right] dt \\ &< \int_0^l (n-1) \cdot \lambda \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot t\right) dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $E''_j(0) < 0$, para algum $j \in \{2, \dots, n\}$, o que contradiz o Corolário 2.4.1, já que γ é uma geodésica minimizante. Desta contradição concluímos que $l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, como queríamos provar. \square

O teorema de Bonnet-Myers permanece válido se trocarmos o tensor de Ricci pelo chamado tensor m -Bakry-Émery Ricci, denotado por Ric_f^m e definido como

$$Ric_f^m := Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df,$$

onde $m > 0$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave denominada potencial. Mais especificamente, vale o teorema abaixo, cuja demonstração se encontra em [14].

Teorema 3.2.2. (Qian) *Seja (M^n, g) , $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana completa. Suponha que existam $m > 0$ e $f \in C^\infty(M)$ tais que*

$$Ric_f^m \geq (n+m-1)\lambda \cdot g, \quad (3.17)$$

para algum $\lambda > 0$. Então M é compacta e

$$diam(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Tomando $f = -\ln u$, com $u \in C^\infty(M)$ positiva, a desigualdade (3.17) torna-se

$$Ric \geq \frac{\nabla^2 u}{u} + \left(\frac{1}{m} - 1\right) \frac{du \otimes du}{u^2} + (n+m-1)\lambda g. \quad (3.18)$$

Sabe-se que a hipótese de limitação uniformemente positiva do tensor de Ricci (ou do m -Bakry-Émery Ricci) não pode ser enfraquecida para $Ric > 0$ (ou $Ric_f^m > 0$). De fato, o paraboloide $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$ é completo e tem curvatura Gaussiana (que no caso de dimensão 2 coincide com o Ricci) igual a

$$K(x, y, z) = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} > 0, \quad \forall (x, y, z) \in M.$$

Apesar disso, M não é compacto.

Todavia, como mostra o segundo teorema principal desta dissertação, isso não ocorre quando a função u na desigualdade (3.18) é uma supersolução de uma EDP elíptica adequada:

Teorema 3.2.3. (Catino e Roncoroni) *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa, $n \geq 2$, tal que*

$$\text{Ric} \geq \alpha \frac{\nabla^2 u}{u} + \beta \frac{du \otimes du}{u^2} + Q, \text{ em } M, \quad (3.19)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Q é um 2-tensor simétrico e $u \in C^\infty(M)$ satisfaz

$$u > 0 \quad e \quad -\Delta u \geq Vu + \gamma \frac{|\nabla u|^2}{u}, \text{ em } M, \quad (3.20)$$

com $\gamma \in \mathbb{R}$ e $V \in C^\infty(M)$. Suponha ainda que existe $k \geq 0$ tal que

$$Q + kVg \geq (n-1)\lambda g, \quad (3.21)$$

para algum $\lambda > 0$,

$$k(\gamma + 1 - \alpha) \geq 0, \quad (3.22)$$

e

$$\alpha + \beta + k(\gamma + 1) - (n-1)\frac{k^2}{4} > 0. \quad (3.23)$$

Então M é compacta, tem grupo fundamental finito e

$$\text{diam}(M^n, g) \leq \pi \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{[2\alpha - k(n-3)]^2}{4(n-1)[\alpha + \beta + k(\gamma + 1) - (n-1)\frac{k^2}{4}]} \right)}.$$

Em particular, se $V \geq 0$ e $\gamma \geq 0$ então $V \equiv 0$ em M .

Se tomarmos $u \equiv \text{const.}$, $V \equiv 0$, $Q = (n-1)\lambda g$, $\alpha = \gamma = k = 0$ e $\beta = 1$ no teorema acima recuperamos o teorema de Bonnet-Myers. Além disso, se a função V é positiva, então a condição (3.21) permite uma estimativa inferior negativa para o tensor Q .

Demonstração. Consideremos a mudança conforme

$$\bar{g} = u^{2k} \cdot g.$$

Dado $p \in M$ seja $r > 0$ tal que $\partial B_r(p) \neq \emptyset$, onde $B_r(p)$ é a bola intrínseca de M segundo a métrica g . Vamos construir uma \bar{g} -geodésica minimizante $\bar{\gamma}$ ligando p e $\partial B_r(p)$.

Com efeito, definamos $u_r := u + \eta_r$, onde $\eta_r \in C^\infty(M)$ satisfaz $\eta_r \equiv 1$ em $B_{r+1}(p)^c$ e $\eta_r \equiv 0$ em $B_r(p)$. A função u_r é uniformemente limitada por baixo por uma constante positiva, pois

$$\begin{cases} u_r > 1, & \text{em } B_{r+1}(p)^c \\ u_r > 0, & \text{em } \overline{B_{r+1}(p)} \end{cases} \Rightarrow u_r > \min \left\{ 1, \min_{\overline{B_{r+1}(p)}} u_r(x) \right\} =: \delta_r > 0.$$

Disto segue que a métrica conforme $\bar{g}_r = u_r^{2k} \cdot g$ é completa (Proposição 2.3.3). Sendo assim, existe uma \bar{g}_r -geodésica minimizante $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow M$ ligando p e q_r , onde

$$d_{\bar{g}_r}(p, q_r) = \min \{ d_{\bar{g}_r}(p, q); q \in \partial B_r(p) \}.$$

Em particular, $\bar{\gamma}([0, a]) \subset \overline{B_r(p)}$, pois do contrário teríamos $\bar{\gamma}(t) \in \partial B_r(p)$, para $t < a$, o que contradiz a definição de q_r já que

$$d_{\bar{g}_r}(p, q_r) = l_{\bar{g}_r}(\bar{\gamma}) > l_{\bar{g}_r}(\bar{\gamma}|_{[0, t]}) = d_{\bar{g}_r}(p, \bar{\gamma}(t)).$$

Afirmamos que a curva $\bar{\gamma}$ assim obtida é \bar{g} -minimizante.

De fato, por $u_r \equiv u$ em $\overline{B_r(p)}$, temos que $d_{\bar{g}}(p, q_r) \geq d_{\bar{g}_r}(p, q_r)$, visto que, dada uma curva c ligando p e q_r , se $t_c = \inf \{ t; c(t) \in \partial B_r(p) \}$, então $c([0, t_c]) \subset \overline{B_r(p)}$, logo

$$l_{\bar{g}}(c) \geq l_{\bar{g}}(c|_{[0, t_c]}) = l_{\bar{g}_r}(c|_{[0, t_c]}) \geq d_{\bar{g}_r}(p, \partial B_r(p)) = d_{\bar{g}_r}(p, q_r).$$

Por outro lado, como $\bar{\gamma}([0, a]) \subset \overline{B_r(p)}$, vale

$$l_{\bar{g}}(\bar{\gamma}) = l_{\bar{g}_r}(\bar{\gamma}) = d_{\bar{g}_r}(p, q_r),$$

portanto $l_{\bar{g}}(\bar{\gamma}) = d_{\bar{g}}(p, q_r)$, o que prova o afirmado e, por conseguinte, conclui a construção da curva $\bar{\gamma}$ desejada.

Denotemos por l o comprimento de $\bar{\gamma}$ com respeito a g . Como $\bar{\gamma}$ liga p a $q_r \in \partial B_r(p)$, vale $l \geq r$. Se provarmos que existe uma constante $C = C(n, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, k) > 0$ satisfazendo

$$l \leq C$$

obteremos, simultâneamente, que M é compacto e $\text{diam}(M, g) \leq C$, pois teremos $r \leq C$, para todo $r > 0$ tal que $\partial B_r(p) \neq \emptyset$, donde $d_g(p, q) \leq C$, para todo $q \in M$, ou seja, M é limitado, consequentemente compacto. Além disso, sendo p arbitrário, também seguirá que $d_g(p, q) \leq C$, para quaisquer $p, q \in M$, isto é, $\text{diam}(M, g) \leq C$.

Para determinar tal constante C , serão fixadas as seguintes notações

a) s e \bar{s} os comprimentos de arco de $\bar{\gamma}$ com respeito às métricas g e \bar{g} , respectivamente;

- b) $\{\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ campos paralelos e ortonormais ao longo de $\bar{\gamma}$ com respeito à métrica \bar{g} . Em particular, os campos $\{e_1 = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, e_2 = (u \circ \bar{\gamma})^k \bar{e}_2, \dots, e_n = (u \circ \bar{\gamma})^k \bar{e}_n\}$ ao longo de $\bar{\gamma}$ são ortonormais na métrica g ;
- c) R e \bar{R} os tensores de curvatura de M , Ric e \bar{Ric} os tensores de Ricci de M , com respeito às métricas g e \bar{g} , respectivamente, $Ric(e_1, e_1) = R_{11}$ e $\bar{Ric}(e_1, e_1) = \bar{R}_{11}$.

Sendo $\bar{\gamma}$ uma \bar{g} -geodésica minimizante segue da fórmula da segunda variação da energia que

$$\int_0^l (u \circ \bar{\gamma})^{-k} \cdot [(n-1)(\varphi_s)^2 - \bar{R}_{11} \cdot \varphi^2] ds \geq 0, \quad (3.24)$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty([0, l])$ (tal desigualdade é obtida da mesma maneira que obtemos (3.7)).

Também temos, pela Proposição 2.5.2, que ao longo de γ vale

$$\bar{R}_{11} = R_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k \frac{\Delta u}{u} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2}. \quad (3.25)$$

Por (3.19),

$$R_{11} \geq \alpha \cdot \frac{\nabla_{11}^2 u}{u} + \beta \cdot \frac{u_s^2}{u^2} + Q_{11} = \alpha \cdot \frac{\nabla_{11}^2 u}{u} + \beta \cdot (\ln u)_s^2 + Q_{11}, \quad (3.26)$$

onde $\nabla_{11}^2 u = (\nabla^2 u)(e_1, e_1)$ e $Q_{11} = Q(e_1, e_1)$.

Visto que

$$\nabla_{11}^2 (\ln u) = e_1(e_1(\ln u)) - (\nabla_{e_1} e_1)(\ln u) = \frac{e_1(e_1(u))}{u} - \frac{e_1(u)^2}{u^2} - \frac{(\nabla_{e_1} e_1)(u)}{u} = \frac{\nabla_{11}^2 u}{u} - (\ln u)_s^2,$$

a desigualdade (3.26) pode ser reescrita como

$$R_{11} \geq \alpha \cdot \nabla_{11}^2 (\ln u) + (\alpha + \beta)(\ln u)_s^2 + Q_{11}. \quad (3.27)$$

Pela relação obtida em (2.12), segue que

$$\nabla_{11}^2 (\ln u) = (\ln u)_{ss} - \left(\nabla_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} \right) (\ln u) = (\ln u)_{ss} - k(\nabla \ln u)^\perp (\ln u) = (\ln u)_{ss} - k|(\nabla \ln u)^\perp|^2,$$

onde $(\nabla \ln u)^\perp$ é a componente do gradiente $\nabla \ln u$ perpendicular a $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}$ (segundo g) e, na última igualdade acima, foi usado

$$(\nabla \ln u)^\perp (\ln u) = \left(\nabla \ln u - g \left(\nabla \ln, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} \right) \cdot \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} \right) (\ln u) = |\nabla \ln u|^2 - g \left(\nabla \ln, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} \right)^2 = |(\nabla \ln u)^\perp|^2.$$

Dessa forma, (3.27) se torna

$$R_{11} \geq \alpha(\ln u)_{ss} - k\alpha|(\nabla \ln u)^\perp|^2 + (\alpha + \beta)(\ln u)_s^2 + Q_{11}.$$

Substituindo isso em (3.25) obtemos

$$\bar{R}_{11} \geq [\alpha - k(n-2)] \cdot (\ln u)_{ss} - \alpha k \cdot |(\nabla \ln u)^\perp|^2 + (\alpha + \beta) \cdot (\ln u)_s^2 + Q_{11} - k \frac{\Delta u}{u} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

Usando (3.20), (3.21) e (3.22) vem que

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} &\stackrel{(3.20)}{\geq} [\alpha - k(n-2)] \cdot (\ln u)_{ss} - \alpha k \cdot |(\nabla \ln u)^\perp|^2 + (\alpha + \beta) \cdot (\ln u)_s^2 + Q_{11} + kV \\ &\quad + k(\gamma + 1) \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \\ &\stackrel{(3.21)}{\geq} [\alpha - k(n-2)] \cdot (\ln u)_{ss} - \alpha k \cdot |(\nabla \ln u)^\perp|^2 + (\alpha + \beta) \cdot (\ln u)_s^2 + (n-1)\lambda \\ &\quad + k(\gamma + 1) \left[(\ln u)_s^2 + |(\nabla \ln u)^\perp|^2 \right] \\ &\stackrel{(3.22)}{\geq} [\alpha - k(n-2)] \cdot (\ln u)_{ss} + [\alpha + \beta + k(\gamma + 1)] (\ln u)_s^2 + (n-1)\lambda. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.24), segue que (abaixo, e no restante dessa demonstração, abusaremos da notação escrevendo apenas u ao invés de $u \circ \bar{\gamma}$)

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^l (\varphi_s)^2 \cdot u^{-k} ds &\geq [\alpha - k(n-2)] \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k} \cdot (\ln u)_{ss} ds \\ &\quad + [\alpha + \beta + k(\gamma + 1)] \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k} \cdot (\ln u)_s^2 ds \\ &\quad + (n-1)\lambda \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k} ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira parcela do lado direito da desigualdade acima e usando que $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k} \cdot (\ln u)_{ss} ds &= -2 \int_0^l \varphi \cdot \varphi_s \cdot u^{-k} \cdot (\ln u)_s ds + k \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k-1} \cdot u_s \cdot (\ln u)_s ds \\ &= -2 \int_0^l \varphi \cdot \varphi_s \cdot u^{-k-1} u_s ds + k \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k-2} \cdot u_s^2 ds, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^l (\varphi_s)^2 \cdot u^{-k} ds &\geq -2[\alpha - k(n-2)] \int_0^l \varphi \cdot \varphi_s \cdot u^{-k-1} u_s ds \\ &\quad + [\alpha + \beta + k(\gamma + 1 + \alpha) - (n-2)k^2] \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k-2} u_s^2 ds \\ &\quad + (n-1)\lambda \int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k} ds, \end{aligned} \tag{3.28}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty([0, l])$.

Para dar fim ao fator u^{-k} na desigualdade acima, escreveremos $\varphi = u^{\frac{k}{2}} \psi$, com $\psi \in C_0^\infty([0, l])$.

Com essa alteração, as integrais presentes na desigualdade (3.28) se tornam

(i)

$$\begin{aligned}
\int_0^l (\varphi_s)^2 \cdot u^{-k} ds &= \int_0^l \left(\frac{k}{2} u^{\frac{k}{2}-1} \cdot u_s \cdot \psi + u^{\frac{k}{2}} \cdot \psi_s \right)^2 \cdot u^{-k} ds \\
&= \frac{k^2}{4} \int_0^l \psi^2 \cdot u^{-2} \cdot u_s^2 ds + k \int_0^l \psi \cdot \psi_s \cdot u^{-1} \cdot u_s ds + \int_0^l (\psi_s)^2 ds,
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi \cdot \varphi_s \cdot u^{-k-1} \cdot u_s ds &= \int_0^l u^{\frac{k}{2}} \cdot \psi \cdot \left(\frac{k}{2} u^{\frac{k}{2}-1} \cdot u_s \cdot \psi + u^{\frac{k}{2}} \cdot \psi_s \right) \cdot u^{-k-1} \cdot u_s ds \\
&= \frac{k}{2} \int_0^l \psi^2 \cdot u^{-2} \cdot u_s^2 ds + \int_0^l \psi \cdot \psi_s \cdot u^{-1} \cdot u_s ds,
\end{aligned}$$

(iii)

$$\int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k-2} \cdot u_s^2 ds = \int_0^l \psi^2 \cdot u^{-2} \cdot u_s^2 ds,$$

(iv)

$$\int_0^l \varphi^2 \cdot u^{-k} ds = \int_0^l \psi^2 ds,$$

o que, substituindo em (3.28), nos fornece

$$\begin{aligned}
(n-1) \int_0^l (\psi_s)^2 ds &\geq [k(n-3) - 2\alpha] \int_0^l \psi \cdot \psi_s \cdot u^{-1} u_s ds \\
&\quad + \left[\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1) \frac{k^2}{4} \right] \int_0^l \psi^2 \cdot u^{-2} u_s^2 ds \\
&\quad + (n-1) \lambda \cdot \int_0^l \psi^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Pela hipótese (3.23), estão bem definidas as funções $f, h : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f = \left(\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1) \frac{k^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi \cdot \frac{u_s}{u}$$

e

$$h = \frac{-2[\alpha - k(n-2)] - k(n-1)}{2 \left(\alpha + \beta k(\gamma+1) - (n-1) \frac{k^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \psi_s.$$

Além disso, a relação $f^2 + h^2 \geq -2f \cdot h$ nos diz que

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1) \frac{k^2}{4} \right] \psi^2 \cdot u^{-2} \cdot u_s^2 + \frac{[k(n-3) - 2\alpha]^2}{4 \left(\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1) \frac{k^2}{4} \right)} \cdot \psi_s^2 \\
&\geq -[k(n-3) - 2\alpha] \cdot \psi \cdot \psi_s \cdot u^{-1} \cdot u_s.
\end{aligned}$$

Usando essa informação em (3.29) encontramos

$$A \cdot \int_0^l (\psi_s)^2 ds \geq B \cdot \int_0^l \psi^2 ds \Rightarrow \int_0^l (A\psi \cdot \psi_{ss} + B\psi^2) ds \leq 0, \quad (3.30)$$

para toda $\psi \in C_0^\infty([0, l])$, onde

$$A = n - 1 + \frac{[k(n-3) - 2\alpha]^2}{4\left(\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1)\frac{k^2}{4}\right)}, \quad B = (n-1)\lambda$$

e a implicação acima é simplesmente obtida ao integrar por partes a integral da esquerda e usar $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Por fim, escolhendo $\psi(s) = \sin\left(\frac{\pi \cdot s}{l}\right)$, conclui-se que

$$\left(B - A \cdot \frac{\pi^2}{l^2}\right) \cdot \int_0^l \sin\left(\frac{\pi \cdot s}{l}\right) ds \leq 0,$$

donde

$$B - A \frac{\pi^2}{l^2} \leq 0 \Rightarrow l \leq \pi \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{[k(n-3) - 2\alpha]^2}{4(n-1)\left(\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1)\frac{k^2}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$C = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{[k(n-3) - 2\alpha]^2}{4(n-1)\left(\alpha + \beta + k(\gamma+1) - (n-1)\frac{k^2}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

é a constante buscada. Como já comentado, isto implica que M é compacta e $\text{diam}(M, g) \leq C$.

Quanto à afirmação do Teorema 3.2.3 sobre o grupo fundamental de M , consideremos $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M . Munindo \bar{M} com a métrica h induzida por π (segundo a qual π é uma isometria local), temos que (\bar{M}, h) é completa (Proposição 2.3.4).

Com essa métrica, \bar{M} se encaixa nas hipóteses do Teorema 3.2.3, com $V \circ \pi$ ao invés de V , $u \circ \pi$ no lugar de u , as mesmas constantes α, β, γ, k e o 2-tensor \bar{Q} definido da seguinte forma :

Dados $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, a função $\bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y})$ num ponto $\bar{p} \in \bar{M}$ vale $Q(X, Y)(\pi(p))$, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $X_{\pi(p)} = d\pi_{\bar{p}}(\bar{X}_{\bar{p}})$ e $Y_{\pi(p)} = d\pi_{\bar{p}}(\bar{Y}_{\bar{p}})$. (o fato que Q é um objeto pontual garante que a função $\bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y})$ está bem definida. Além disso, como π é um difeomorfismo local, a função $\bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y})$ é suave.)

Dessa forma, pelo que já foi provado, \bar{M} é também compacto, logo as folhas do recobrimento $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ são finitas, donde $\pi_1(M)$ é finito ([10], p. 247).

Por fim, caso $V \geq 0$ e $\gamma > 0$, temos por (3.20) que $\Delta u \leq 0$, logo, sendo M compacto, u deve ser constante pelo princípio do máximo. Novamente por (3.20) e por $u > 0$ segue que

$$0 = -\Delta u \geq Vu + \gamma \frac{|\nabla u|^2}{u} = Vu \Rightarrow V \leq 0 \Rightarrow V \equiv 0 \text{ em } M,$$

o que conclui a prova do teorema. \square

Uma consequência do Teorema 3.2.3 é uma estimativa superior para o primeiro autovalor de $-\Delta$, a qual estende um resultado clássico obtido por Cheng em [6]:

Corolário 3.2.1. *Seja (M^n, g) , $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana completa com $\text{Ric} \geq -(n-1)g$. Se existe uma solução positiva $u \in C^\infty(M)$ de*

$$-\Delta u \geq \mu u,$$

para algum $\mu > 0$, então

$$\mu \leq \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Demonstração. Suponhamos que

$$\mu > \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Na notação do Teorema 3.2.3, se tomarmos $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $V \equiv \mu$ e $Q = -(n-1)g$, teremos que M satisfaz (3.19) e (3.20), com u sendo a solução positiva de

$$-\Delta u \geq \mu u.$$

Com essas escolhas, (3.21), (3.22) e (3.22) tornam-se

$$\begin{cases} -(n-1) + k\mu \geq (n-1)\lambda \\ k \geq 0 \\ k\left(1 - \frac{n-1}{4}k\right) > 0 \end{cases}.$$

Assim, tomando $k = \frac{4}{n-1} - \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ satisfaz

$$\frac{4}{n-1} - \varepsilon > 0 \text{ e } \frac{\left(\frac{4}{n-1} - \varepsilon\right)\mu}{n-1} - 1 \stackrel{(5)}{>} 0,$$

e $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{\left(\frac{4}{n-1} - \varepsilon\right)\mu}{n-1} - 1 \geq \lambda,$$

⁵note que essa desigualdade é satisfeita quando $\varepsilon = 0$ pela suposição feita sobre μ .

segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} -(n-1) + k\mu = \left(\frac{4}{n-1} - \varepsilon\right)\mu - (n-1) \geq (n-1)\lambda \\ k \geq 0 \\ k\left(1 - \frac{n-1}{4} \cdot k\right) = k \cdot \varepsilon \cdot \frac{n-1}{4} > 0 \end{array} \right. ,$$

logo M se encaixa nas hipóteses do Teorema 3.2.3, em particular M é compacto. Se $p \in M$ é um ponto de mínimo de u então

$$0 \leq \Delta u(p) \leq -\mu \cdot u(p) < 0,$$

o que é uma contradição decorrente da suposição $\mu > \frac{(n-1)^2}{4}$. Portanto, $\mu \leq \frac{(n-1)^2}{4}$, como queríamos demonstrar. \square

3.3 Estimativa de diâmetro para uma H -hipersuperfície estável

O último teorema deste trabalho, obtido por Elbert, Nelli e Rosenberg em [8], trata de uma estimativa de diâmetro sob hipóteses de estabilidade, controle de curvatura seccionais e curvatura média constante. Antes de apresentá-lo, é conveniente fazer uma breve revisão sobre o conceito de estabilidade, assim como enunciar dois resultados sobre esse tema que serão ferramentas importantes no decorrer desta seção. Para uma exposição mais detalhada desse tema sugerimos a leitura de [2] e [7].

O conceito de estabilidade está intimamente ligado a um problema variacional. Para motivar a definição de estabilidade faremos algumas considerações a respeito desse problema.

Seja $i : (M^n, g) \rightarrow \Sigma$ uma imersão isométrica com curvatura média H e N um campo normal unitário ao longo de $i(M)$. Dada uma variação normal $i_t : M \rightarrow \Sigma$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de $i(M)$, associada ao campo normal fN (ou seja, $\left. \frac{di_t}{dt} \right|_{t=0} = fN$) e que fixa o bordo ∂M , sabemos que a variação do funcional área $A(t) = A(i_t)$ é dada por

$$A'(0) = - \int_M fH dM.$$

Em particular, imersões mínimas podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional área para variações como acima. Imersões com curvatura média constante, por sua vez, podem ser visualizadas como pontos críticos do funcional área quando nos restringimos a variações que preservam o volume, ou seja, para variações cuja componente normal do campo variacional $f \in C_0^\infty(M)$ satisfaz $\int_M f dM = 0$.

Para estes pontos críticos, a segunda variação do funcional área é dada por

$$A''(0) = - \int_M fLf dM,$$

onde $Lf = \Delta_M f + |B|^2 f + \text{Ric}^\Sigma(N, N)f$ é o chamado operador de estabilidade de M (ou operador de Jacobi), B é o operador forma de M e Ric^Σ é o tensor de Ricci do ambiente Σ .

Definição 3.3.1. *Sejam Σ^{n+1} uma variedade Riemanniana, $M^n \subset \Sigma$ uma hipersuperfície com bordo e two-sided (i.e, fibrado normal trivial) e L o operador de estabilidade de M . Diremos que M é estável quando*

$$- \int_S f \cdot Lf dM \geq 0, \quad \forall f \in C_0^\infty(M). \quad (3.31)$$

No caso em que M é completa (possivelmente não compacta) e sem bordo, dizemos que M é estável se todo subdomínio compacto de M é estável.

Vale salientar que a definição de estabilidade aqui apresentada é conhecida como estabilidade forte. Existe também o conceito de estabilidade fraca, onde restringimos a condição (3.31) apenas a funções $f \in C_0^\infty(M)$ que satisfazem $\int_M f dM = 0$.

Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto. O espectro de L com respeito a Ω é dado por uma sequência crescente $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ que converge para ∞ , sendo associada, respectivamente, a autofunções u_i , ou seja

$$Lu_i + \lambda_i u_i = 0,$$

com $u_i \in C_0^\infty(\Omega)$, não identicamente nula. A estabilidade em Ω equivale a $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$ (ver [7], página 43), onde

$$\lambda_1(\Omega, L) = \inf \left\{ - \int_{\Omega} \eta \cdot L\eta dM; \eta \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \eta^2 = 1 \right\}.$$

O lema a seguir fornece uma informação relevante sobre as autofunções associadas ao primeiro autovalor de L . Este lema vale na verdade para qualquer operador do tipo $L = \Delta + q$, onde q é uma função.

Lema 3.3.1. *Ainda na notação acima, se u é uma função suave em Ω , contínua em $\overline{\Omega}$, se anula em $\partial\Omega$ e satisfaz $Lu = -\lambda_1 u$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, L)$, então u não muda de sinal em Ω .*

Demonstração. Pode ser encontrada em [7], página 46. □

O teorema que fecha essa breve exposição fornece uma condição equivalente à estabilidade de uma hipersuperfície completa não compacta.

Teorema 3.3.1. (Fischer-Colbrie e Schoen) *Se $M^n \subset \Sigma^{n+1}$ é uma hipersuperfície completa, não compacta e com fibrado normal trivial, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $\lambda_1(\Omega, L) \geq 0$, para qualquer domínio compacto $\Omega \subset M$;
- b) $\lambda_1(\Omega, L) > 0$, para qualquer domínio compacto $\Omega \subset M$;
- c) Existe uma função suave e positiva u tal que $Lu = 0$ em M .

Demonstração. Pode ser encontrada em [7], página 49. □

Feito este resumo, resta apenas fixar algumas notações para adentrarmos no teorema desta seção:

Seja Σ^{n+1} uma variedade Riemanniana com curvaturas seccionais uniformemente limitadas por baixo e denotemos por $\sec(\Sigma)$ o ínfimo das curvaturas seccionais de Σ . Dizemos

que $M \subset \Sigma$ é uma H -hipersuperfície de Σ quando M é uma n -subvariedade imersa de Σ com curvatura média constante H . No que segue M será assumida two-sided.

Teorema 3.3.2. (Elbert, Nelli e Rosenberg) *Seja $M^n \subset \Sigma$ uma H -hipersuperfície estável e completa, com $n = 3, 4$. Se $|H| > 2\sqrt{|\min\{0, \sec(\Sigma)\}|}$ então existe uma constante $c = c(n, H, \sec(\Sigma))$ tal que, para todo $p \in M$, $d_M(p, \partial M) \leq c$.*

No enunciado acima o termo "completa" significa que $(\text{int}(M), d_g)$ é completo como espaço métrico, onde g é a métrica induzida pela imersão $M \subset \Sigma$, d_g a função distância induzida por g e $\text{int}(M) = M - \partial M$. Como consequência do Teorema 3.3.2 temos o

Corolário 3.3.1. (Elbert, Nelli e Rosenberg) *Seja $M^n \subset \Sigma$ uma H -hipersuperfície estável e completa, com $n = 3, 4$. Se $|H| > 2\sqrt{|\min\{0, \sec(\Sigma)\}|}$ então $\partial M \neq \emptyset$.*

O corolário 3.3.1 nos diz, em particular, que em \mathbb{R}^{n+1} , $n = 3, 4$, uma H -hipersuperfície estável, completa e sem bordo deve ser mínima, visto que $\sec(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$.

Demonstração do Teorema 3.3.2. Sejam $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ o operador de Jacobi

$$Lu = \Delta u + (|B|^2 + \text{Ric}^\Sigma(N, N))u,$$

onde N um campo unitário e normal a M em Σ , B o operador forma de M , Ric^Σ o tensor de Ricci de Σ e ϕ o operador forma de traço nulo $\phi(X) = B(X) - HX$. Podemos escrever o operador de Jacobi em termos de ϕ

$$Lu = \Delta + (|\phi|^2 + nH^2 + \text{Ric}^\Sigma(N, N))u,$$

já que, se v_1, \dots, v_n são autovetores de B com autovalores k_1, \dots, k_n , então v_1, \dots, v_n são autovetores de ϕ com autovalores $k_1 - H, \dots, k_n - H$, logo

$$|\phi|^2 = \sum_i (k_i - H)^2 = \sum_i (k_i^2 - 2k_i H + H^2) = |B|^2 - nH^2,$$

onde na última igualdade foi usado que $H = \frac{1}{n} \sum_i k_i$.

Sendo M estável, existe uma função u suave em M e positiva no interior de M tal que $Lu \leq 0$. (Caso M seja não compacta basta aplicar o Teorema 3.3.1. Do contrário, tomamos u como uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 de L . Pelo Lema 3.3.1, podemos assumir que u é positiva no interior de M , logo, pela hipótese de estabilidade $Lu = -\lambda_1 u \leq 0$.) Definamos então, no interior de M , a métrica $\bar{g} = u^{2k} g$, onde k satisfaz

$$\frac{5(n-1)}{4n} \leq k < \frac{4}{n-1}.$$

A escolha de tal k ficará mais clara adiante. Vale porém notar que, para $n > 4$, temos

$$\frac{4}{n-1} \leq 1 \leq \frac{5(n-1)}{4n},$$

logo a escolha de k feita acima não é possível se $n > 4$.

Fixado p no interior de M , seja $r > 0$ tal que a bola intrínseca $B_r(p)$ de M não toca ∂M . Consideremos γ uma \bar{g} -geodésica minimizante ligando p a $\partial B_r(p)$ (a construção de tal curva é a mesma que foi apresentada na demonstração do Teorema 3.2.3)⁽⁶⁾ e seja $a = l_g(\gamma)$ o comprimento de γ na métrica g . Como γ liga p a um ponto de $\partial B_r(p)$, vale que $a \geq r$. É suficiente então provar que existe uma constante $c = c(n, H, \sec(\Sigma))$ satisfazendo $a \leq c$.

De fato, feito isto, teremos $r \leq c$, para todo $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap \partial(M) = \emptyset$. Daí, caso $d := d_M(p, \partial M) > c$, então, tomando $c_0 \in (c, d)$, obtemos $B_{c_0}(p) \cap \partial M = \emptyset$ e $c_0 > c$, o que é uma contradição. Logo, $d_M(p, \partial M) \leq c$, como desejado.

Passemos à prova da existência de tal constante c . Como de costume, consideraremos:

- (i) s e \bar{s} os comprimentos de arco de γ com respeito às métricas g e \bar{g} , respectivamente;
- (ii) $\{\bar{e}_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}}, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ campos paralelos e ortonormais ao longo de γ com respeito à métrica \bar{g} e $\overline{e_{n+1}} = N \circ \gamma$. Em particular, os campos $\{e_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial s}, e_2 = (u \circ \gamma)^k \bar{e}_2, \dots, e_n = (u \circ \gamma)^k \bar{e}_n\}$ ao longo de γ são ortonormais na métrica g ;
- (iii) R e \bar{R} os tensores de curvatura de M , Ric e \bar{Ric} os tensores de Ricci de M , com respeito às métricas g e \bar{g} , respectivamente.

Visto que γ é \bar{g} -minimizante, segue dos argumentos apresentados na demonstração do Teorema 3.1.2 (ver equação (3.7)) que

$$\int_0^a u^{-k} [(n-1)\varphi_s^2 - \bar{Ric}(e_1, e_1)\varphi^2] ds \geq 0, \quad (3.32)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty([0, a])$. (na desigualdade acima e no que segue abusaremos da notação e escreveremos apenas u ao invés de $u \circ \gamma$)

Pela Proposição (2.5.2), vale, ao longo de γ , que

$$\bar{Ric}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = u^{-2k} \left[Ric(e_1, e_1) - k(n-2)(\ln(u))_{ss} - k \frac{\Delta u}{u} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right],$$

ou ainda

$$\bar{Ric}(e_1, e_1) = Ric(e_1, e_1) - k(n-2)(\ln(u))_{ss} - k \frac{\Delta u}{u} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2},$$

⁶Vale salientar que nessa passagem foi utilizada que o interior de M é completo como espaço métrico, em particular, as bolas intrínsecas de M que não tocam o bordo são compactas.

Como $Lu = \Delta u + (|\phi|^2 + nH^2 + Ric^\Sigma(N, N))u \leq 0$, obtemos

$$\overline{Ric}(e_1, e_1) \geq Ric(e_1, e_1) - k(n-2)(\ln(u))_{ss} + k(|\phi|^2 + nH^2 + Ric^\Sigma(N, N)) + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2}. \quad (3.33)$$

Pela equação de Gauss vem que

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= R_{ijij}^\Sigma + g_\Sigma(A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)) - g_\Sigma(A(e_i, e_j), A(e_i, e_j)) \\ &= R_{ijij}^\Sigma + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2, \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde g_Σ é a métrica de Σ , A é a segunda forma fundamental de M e $h_{ij} = g(A(e_i, e_j), N)$. Sendo

$$h_{ij} = g_\Sigma(A(e_i, e_j), N) = g_\Sigma(\nabla_{e_i} e_j, N) = -g_\Sigma(e_j, \nabla_{e_i} N) = -g(e_j, B(e_i)) = -g(e_i, \phi(e_j)) - H\delta_{ij}$$

e Φ o 2-tensor simétrico em M , $\Phi(X, Y) = g(e_i, \phi(e_j))$, temos, por (3.34), que

$$R_{ijij} = R_{ijij}^\Sigma + (\Phi_{ii} + H)(\Phi_{jj} + H) - (\Phi_{ij} + H\delta_{ij})^2,$$

onde $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$. Fazendo $i = 1$ na expressão acima e somando em j de 2 até n obtemos

$$\begin{aligned} Ric(e_1, e_1) = \sum_{j=2}^n R_{1j1j} &= \sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + \Phi_{11} \sum_{j=2}^n \Phi_{jj} + (n-1)\Phi_{11}H \\ &\quad + H \sum_{j=2}^n \Phi_{jj} + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2. \end{aligned}$$

Usando $\sum_{j=1}^n \Phi_{jj} = tr(\phi) = 0$, podemos simplificar a expressão acima para

$$Ric(e_1, e_1) = \sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma - \Phi_{11}^2 + (n-2)\Phi_{11}H + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2.$$

Substituindo isso em (3.33) encontramos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(e_1, e_1) &\geq \sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) + (kn + n - 1)H^2 + (n-2)\Phi_{11}H \\ &\quad + k|\Phi|^2 - \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 - k(n-2)(\ln(u))_{ss} + k \frac{|\nabla u|^2}{u^2}. \end{aligned}$$

Juntando isso com a desigualdade (3.32) vem que

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^a u^{-k} \varphi_s^2 ds &\geq \int_0^a \varphi^2 u^{-k} \left(\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) \right) ds \\ &\quad + \int_0^a \varphi^2 u^{-k} \left[(kn + n - 1)H^2 + (n-2)H\Phi_{11} + k|\Phi|^2 - \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \right] ds \\ &\quad - \int_0^a \varphi^2 u^{-k} \left[k(n-2)(\ln(u))_{ss} - k \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right] ds. \end{aligned}$$

Para dar fim ao termo u^{-k} na desigualdade acima escreveremos $\varphi = u^{\frac{k}{2}}\psi$, com $\psi \in C_0^\infty([0, a])$.

Fazendo essa mudança a relação acima se torna

$$\begin{aligned}
(n-1) \int_0^a \psi_s^2 ds &\geq \int_0^a \psi^2 \left(\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) \right) ds \\
&+ \int_0^a \psi^2 \left[(kn+n-1)H^2 + (n-2)H\Phi_{11} + k|\Phi|^2 - \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \right] ds \\
&- \int_0^a \psi^2 \left[k(n-2)(\ln(u))_{ss} - k \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right] ds \\
&- k(n-1) \int_0^a \psi \psi_s (\ln(u))_s ds - \frac{k^2(n-1)}{4} \int_0^a \psi^2 (\ln(u))_s^2 ds \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando $\psi(0) = \psi(a) = 0$ obtemos

$$-k(n-2) \int_0^a \psi^2 (\ln(u))_{ss} ds = 2k(n-2) \int_0^a \psi \psi_s (\ln(u))_s ds.$$

Além disso,

$$\frac{k^2(n-1)}{4} \int_0^a \psi^2 (\ln(u))_s^2 ds = \frac{n-1}{4} \int_0^a \psi^2 (\ln(u^k))_s^2 ds$$

e

$$k \int_0^a \psi^2 \frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds = k \int_0^a \psi^2 |\nabla \ln(u)|^2 ds \geq k \int_0^a \psi^2 (\ln(u))_s^2 ds = \frac{1}{k} \int_0^a \psi^2 (\ln(u^k))_s^2 ds.$$

Substituindo essas informações em (3.35) e simplificando encontramos

$$\begin{aligned}
(n-1) \int_0^a \psi_s^2 ds &\geq k(n-3) \int_0^a \psi \psi_s (\ln(u))_s ds + \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right) \int_0^a \psi^2 (\ln(u^k))_s^2 ds \\
&+ \int_0^a \psi^2 \left(\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) \right) ds \\
&+ \int_0^a \psi^2 \left[(kn+n-1)H^2 + (n-2)H\Phi_{11} + k|\Phi|^2 - \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \right] ds \\
&\geq (n-3) \int_0^a \psi \psi_s (\ln(u^k))_s ds + \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right) \int_0^a \psi^2 (\ln(u^k))_s^2 ds \\
&+ \int_0^a \psi^2 \left[\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) + (kn-n^2+5n-5)H^2 \right] ds \\
&+ \int_0^a \psi^2 \left(k|\Phi|^2 - \frac{5}{4}\Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \right), \quad (3.36)
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usado $x^2 + y^2 \geq -2xy$, para $x = (n-2)H$ e $y = \frac{\Phi_{11}}{2}$, ou seja

$$(n-2)^2 H^2 + \frac{\Phi_{11}^2}{4} \geq -(n-2)H\Phi_{11}.$$

Note que a última parcela de (3.36) é não negativa, pois as relações

$$\begin{cases} |\phi|^2 \geq \sum_{j=1}^n \Phi_{jj}^2 + \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 + \sum_{j=2}^n \Phi_{j1}^2 = \sum_{j=1}^n \Phi_{jj} + 2 \sum_{j=2}^n \Phi_{1j} \\ \sum_{j=1}^n \Phi_{jj} = 0 \\ \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^n \Phi_{jj}^2 \stackrel{(7)}{\geq} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^n \Phi_{jj} \right)^2 \end{cases}$$

implicam

$$|\phi|^2 \geq \Phi_{11}^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=2}^n \Phi_{jj} \right)^2 + 2 \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 = \frac{n}{n-1} \Phi_{11}^2 + 2 \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2.$$

Logo, por $k \geq \frac{5(n-1)}{4n}$,

$$k|\Phi|^2 - \frac{5}{4} \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \geq \frac{5(n-1)}{2n} \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 = \frac{3n-5}{2n} \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \geq 0,$$

ao longo de γ , donde segue que

$$\int_0^a \psi^2 \left(k|\Phi|^2 - \frac{5}{4} \Phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \Phi_{1j}^2 \right) ds \geq 0.$$

Sendo assim, a desigualdade (3.36) se reduz a

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^a \psi_s^2 ds &\geq (n-3) \int_0^a \psi \psi_s (\ln(u^k))_s ds + \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right) \int_0^a \psi^2 (\ln(u^k))_s^2 ds \\ &\quad + \int_0^a \psi^2 \left[\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + k \text{Ric}^\Sigma(N, N) + (kn - n^2 + 5n - 5) H^2 \right] ds \end{aligned} \quad (3.37)$$

Novamente usaremos $x^2 + y^2 \geq -2xy$, para

$$x = \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \psi (\ln(u^k))_s \quad \text{e} \quad y = \frac{n-3}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \psi_s,$$

ou seja

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right) \psi^2 (\ln(u^k))_s^2 + \frac{(n-3)^2}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right)^{-1} \psi_s^2 \geq -(n-3) \psi \psi_s (\ln(u^k))_s$$

Vale lembrar que, pela escolha de k , $\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} > 0$. Substituindo em (3.37) segue que

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^a \psi_s^2 ds &\geq -\frac{(n-3)^2}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right)^{-1} \int_0^a \psi_s^2 ds \\ &\quad + \int_0^a \psi^2 \left[\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + k \text{Ric}^\Sigma(N, N) + (kn - n^2 + 5n - 5) H^2 \right] ds, \end{aligned}$$

⁷Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

ou ainda, pondo $A_0 = n - 1 + \frac{(n-3)^2}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{n-1}{4} \right)^{-1} > 0$,

$$A_0 \int_0^a \psi_s^2 ds \geq \int_0^a \psi^2 \left[\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) + (kn - n^2 + 5n - 5)H^2 \right] ds. \quad (3.38)$$

Neste ponto, queremos encontrar uma constante $B_0 = B_0(n, H, sec(\Sigma))$ tal que

$$0 < B_0 \leq \sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) + (kn - n^2 + 5n - 5)H^2,$$

ao longo de γ . Para tanto, note que

$$\sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) = \sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + k \sum_{j=1}^n R^\Sigma(N, e_j, N, e_j) \geq (kn + n - 1)sec(\Sigma),$$

ao longo de γ , logo, pondo

$$B_0 = (kn - n^2 + 5n - 5)H^2 + (kn + n - 1) \min\{0, sec(\Sigma)\}$$

temos imediatamente

$$B_0 \leq \sum_{j=2}^n R_{1j1j}^\Sigma + kRic^\Sigma(N, N) + (kn - n^2 + 5n - 5)H^2.$$

Na desigualdade acima foi usado que $kn + n - 1$ e $kn - n^2 + 5n - 5$ são positivos, o que pode ser verificado diretamente nos dois casos, $n = 3$ e $n = 4$,

- $n = 3$:

$$kn + n - 1 = 3k + 2 > 0 \quad \text{e} \quad 3k - n^2 + 5n - 5 = 3k + 1 > 0;$$

- $n = 4$:

$$kn + n - 1 = 4k + 3 > 0 \quad \text{e} \quad kn - n^2 + 5n - 5 = 4k - 1 > 0,$$

$$\text{haja vista que } k \geq \frac{5(n-1)}{4n} = \frac{15}{16} > \frac{1}{4}.$$

Já quanto à condição $B_0 > 0$, temos

$$\frac{kn + n - 1}{kn - n^2 + 5n - 5} < 4.$$

Novamente isso pode ser checado através de uma verificação direta

- $n = 3$:

$$\frac{kn + n - 1}{kn - n^2 + 5n - 5} = \frac{3k + 2}{3k + 1} < 4 \Leftrightarrow k > -\frac{2}{9}$$

e a última desigualdade é satisfeita já que $k > 0$;

- $n = 4$:

$$\frac{kn + n - 1}{kn - n^2 + 5n - 5} = \frac{4k + 3}{4k - 1} < 4 \Leftrightarrow k > \frac{7}{12}$$

e a última desigualdade é satisfeita já que $k \geq \frac{5(n-1)}{4n} = \frac{15}{16} > \frac{7}{12}$.

A hipótese sobre H nos diz que $H^2 > 4|\min\{0, \sec(\Sigma)\}|$, donde segue que

$$H^2 > \frac{kn + n - 1}{kn - n^2 + 5n - 5} |\min\{0, \sec(\Sigma)\}|.$$

Portanto,

$$B_0 > (kn + n - 1)(|\min\{0, \sec(\Sigma)\}| + \min\{0, \sec(\Sigma)\}) \geq 0.$$

Dessa forma, por (3.38),

$$A_0 \int_0^a \psi_s^2 \geq B_0 \int_0^a \psi^2 ds \stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} \int_0^a (B_0 \psi^2 + A_0 \psi \psi_{ss}) ds \leq 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty([0, a]).$$

Por fim, tomando $\psi(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{a}\right)$ na desigualdade acima concluimos que

$$\left(B_0 - A \frac{\pi^2}{a^2}\right) \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds \leq 0 \Rightarrow a \leq \sqrt{\frac{A_0}{B_9}} \pi,$$

ou seja

$$\begin{aligned} c(n, H, \sec(\Sigma)) &= \sqrt{\frac{A_0}{B_0}} \pi \\ &= \frac{2\pi \sqrt{k(2-n) + n - 1}}{\{[4 - k(n-1)][(kn - n^2 + 5n - 5)H^2 + (kn + n - 1)|\min\{0, \sec(\Sigma)\}|\}\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

é a constante desejada. Pelo que já foi comentado, isto conclui a prova do teorema. \square

Para concluir essa seção apresentaremos a prova do Corolário 3.3.1.

Demonstração do Corolário 3.3.1. Suponhamos por absurdo que exista uma H -hipersuperfície $M^n \subset \Sigma$ estável, completa, com $|H| > 2\sqrt{|\min\{0, \sec(\Sigma)\}|}$ e $\partial M = \emptyset$. Como foi visto na demonstração do Teorema 3.3.2, toda bola intrínseca de M que não toca ∂M tem raio limitado por uma constante c . Sendo $\partial M = \emptyset$, temos que $\text{diam}_g(M) \leq c$. Por M ser completa, segue que M é compacta. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 de L . Trocando f por $-f$ podemos assumir que f é positiva (Lema 3.3.1). Pela hipótese de estabilidade temos $\lambda_1 \geq 0$, logo $Lf = -\lambda_1 f \leq 0$. Daí, se p é um ponto de mínimo de f , vale que

$$0 \leq \Delta f(p) \leq -(|\phi|^2(p) + nH^2 + \text{Ric}_p^\Sigma(N.N))f(p). \quad (3.39)$$

⁸Integração por partes.

Por outro lado, como $H^2 > 4|\min\{0, \sec(\Sigma)\}|$, obtemos

$$|\phi|_p^2 + nH^2 + Ric_p^\Sigma(N, N) > 4n|\min\{0, \sec(\Sigma)\}| + n\min\{0, \sec(\Sigma)\} \geq 0,$$

o que implica

$$-(|\phi|^2(p) + nH^2 + Ric_p^\Sigma(N, N))f(p) < 0.$$

Isto por sua vez contradiz a desigualdade (3.39) provando assim o desejado. □

4 CONCLUSÃO

É importante destacar que os resultados aqui tratados, fruto da colaboração de excelentes matemáticos, não podem ser reduzidos a simples aplicações da mudança conforme. Estes foram escolhidos para esse trabalho visando ilustrar a aplicabilidade da técnica aqui abordada visto que eles compartilham de um ponto em comum que é a utilização da mudança conforme, mesmo que para fins distintos.

Dito isto, a exposição dos resultados no capítulo anterior tornou evidente a força que possui a técnica da mudança conforme de uma métrica Riemanniana, principalmente por conta de que esta pode ser utilizada em contextos diversos na geometria. Como foi visto nas demonstrações anteriores, o ponto principal a se levar em conta ao fazer uso dessa técnica é a existência de uma função que goza de propriedades relevantes para o contexto que se deseja trabalhar. Neste trabalho em específico a propriedade buscada era ser uma supersolução de uma EDP conveniente. Por exemplo, no teorema de pinching, a partir da hipótese sobre a norma da segunda forma fundamental sem traço, obtivemos uma função u satisfazendo $\Delta u \leq -2|\Phi|^2 u$. Já na generalização do teorema de Bonnet-Myers a hipótese garantia a existência de uma função cumprindo $-\Delta u \geq Vu + \gamma \frac{|\nabla u|^2}{u}$. Por fim, no último resultado foi utilizada a hipótese de estabilidade para se obter uma solução de $\Delta u + (|\Phi|^2 + nH^2 + Ric^\Sigma(N, N)) \cdot u \leq 0$.

REFERÊNCIAS

- [1] ALENCAR, Hilário; CARMO, Manfredo do. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 120, n. 4, p. 1223-1229, 1994.
- [2] BARBOSA, Lucas; BÉRARD, Pierre. Eigenvalue and “twisted” eigenvalue problems, applications to CMC surfaces. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 79, n. 5, p. 427-450, 2000.
- [3] CARMO, M. D. **Geometria Riemanniana**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [4] CATINO, Giovanni; RONCORONI, Alberto. A closure result for globally hyperbolic spacetimes. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 152, n. 12, p. 5339-5354, 2024.
- [5] CHENG, Shiu-Yuen; YAU, Shing-Tung. Hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Annalen**, v. 225, p. 195-204, 1977.
- [6] CHENG, Shiu-Yuen. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. **Mathematische Zeitschrift**, v. 143, p. 289-297, 1975.
- [7] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. **A course in minimal surfaces**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, c2011. (Graduate studies in mathematics, v. 121).
- [8] ELBERT, Maria; NELLI, Barbara; ROSENBERG, Harold. Stable constant mean curvature hypersurfaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 135, n. 10, p. 3359-3366, 2007.
- [9] FISCHER-COLBRIE, Doris. On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds. **Inventiones mathematicae**, v. 82, n. 1, p. 121-132, 1985.
- [10] LEE, John. **Introduction to topological manifolds**. New York: Springer Science & Business Media, 2010. (Graduate texts in mathematics, v. 202).
- [11] LEE, John M.; **Introduction to smooth manifolds**. New York: Springer, 2012. (Graduate texts in mathematics, v. 218).
- [12] MAGLIARO, Marco *et al.* Sharp pinching theorems for complete submanifolds in the sphere. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)**, v. 2024, n. 814, p. 117-134, 2024.
- [13] NOMIZU, Katsumi; SMYTH, Brian. A formula of Simons’ type and hypersurfaces with constant mean curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 3, n. 3-4, p. 367-377, 1969.

- [14] QIAN, Zhongmin. Estimates for weighted volumes and applications. **Quarterly Journal of Mathematics**, v. 48, n. 2, p. 235-242, 1997.
- [15] SCHOEN, Richard; YAU, S. -T. The existence of a black hole due to condensation of matter. **Communications in Mathematical Physics**, v. 90, p. 575-579, 1983.
- [16] SHEN, Ying; YE, Rugang. On stable minimal surfaces in manifolds of positive bi-Ricci curvatures. **Duke Math J.**, v. 85, n. 1, p. 109-116, Oct. 1996.
- [17] YANO, Kentaro; OBATA, Morio. Conformal changes of Riemannian metrics. **Journal of Differential Geometry**, v. 4, n. 1, p. 53-72, 1970.