



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL**

JOÃO GILBERTO GONÇALVES NUNES

**CÔNICAS UNIFICADAS EM COORDENADAS POLARES PARA UMA NOVA
ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO**

FORTALEZA

2014

JOÃO GILBERTO GONÇALVES NUNES

**CÔNICAS UNIFICADAS EM COORDENADAS POLARES PARA UMA NOVA
ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Professor Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

N925c Nunes, João Gilberto Gonçalves
Cônicas unificadas em coordenadas polares para uma nova abordagem no ensino médio / João
Gilberto Gonçalves Nunes. – 2014.
96 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Álgebra. 2. Geometria. 3. Equações. 4. Coordenadas (Matemática). I. Título.

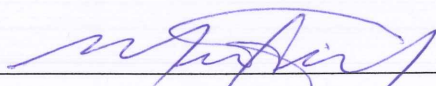
JOÃO GILBERTO GONÇALVES NUNES

CÔNICAS UNIFICADAS EM COORDENADAS POLARES PARA UMA NOVA
ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

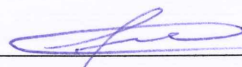
Aprovada em: 12 / 04 / 2014.

BANCA EXAMINADORA



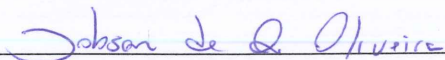
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico a conclusão deste Mestrado Profissional à minha adorável família: pais, esposa e filhos.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter feito esse sonho se tornar realidade em minha vida e ter me conduzido até o fim sem desanimar.

Aos meus rebentos Kaio e Kévin, por existirem e por deixarem minha vida mais afável facilitando a minha caminhada.

À minha querida esposa Fabiana, pela paciência e por ter me apoiado e ficado sempre ao meu lado.

Aos meus pais D. Luiza e Sr. Alonso, pelos incentivos dispensados a mim, pelo exemplo de vida honrada e honesta e pela abnegação de ter criado os seus filhos com muita dificuldade, mas sempre com muito zelo.

A todos os meus colegas de turma pelo companheirismo e perseverança em encarar longas viagens, compartilhar das angústias e alegrias e das muitas horas de estudos juntos.

Aos queridos professores do Mestrado por terem nos ajudado em todo o processo e, em particular, ao coordenador do Polo do ProfMat na UFC, Professor Marcelo Ferreira de Melo, pela atenção e respeito aos cursistas e compromisso com sua função.

Ao professor Dr. Marcos Ferreira de Melo, meu orientador, pela dedicação e apoio na reta final, sendo tão solícito e prestativo durante a construção do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Enfim, a todos que de uma forma ou de outra, direta ou indiretamente, contribuíram para a consecução de meu Mestrado Profissional.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Neste trabalho, estudam-se de maneira sucinta as características e os principais elementos algébricos e geométricos das secções cônicas. Inicialmente, foram abordados os três tipos gerais das secções cônicas, enfocando em princípio suas formas regulares para, em dado momento, também se discutir suas formas degeneradas. Verificou-se que, segundo um sistema cartesiano fixado, é possível estabelecer uma representação global das cônicas por meio de uma equação algébrica do segundo grau em duas variáveis, sendo que qualquer equação desta forma, reciprocamente, pode ser identificada, por meio de rotação ou translação, com a equação reduzida de algum tipo particular de cônica. Encerrando-se este trabalho, foi proposta uma abordagem inovadora para a lida no ensino médio desse tópico de ensino-aprendizagem riquíssimo em conceitos básicos de álgebra e geometria elementares, tão necessários para uma boa formação matemática. Foi proposto que no estudo das cônicas se use de forma complementar a maneira alternativa de defini-las a partir de sua excentricidade, convergindo para a equação geral unificada das cônicas em coordenadas polares. Essa forma generalizada e absolutamente simples de se representar as cônicas é tida como facilmente manipulável e reflete em si mesma uma beleza singular da Matemática, a Rainha das Ciências. Vale ressaltar que todo o enfoque dos conteúdos aqui discutidos foi apresentado numa linguagem bastante simples e de fácil compreensão, uma vez que este trabalho se destina preferencialmente a alunos e professores da educação básica.

Palavras-chave: Cônicas. Equações. Coordenadas Cartesianas. Coordenadas Polares.

ABSTRACT

In this work, the features and the main algebraic and geometric elements of conic sections were succinctly studied. Initially, the three general types of the conic sections were discussed, focusing at first on their regular forms and then, in certain moment, discussing about their degenerate forms. It was found that, according to a fixed Cartesian system, it is possible to establish a global representation of the conics through a two-variable algebraic quadratic equation, in a way that, in any equation of this form, reciprocally, can be identified by means of rotation or translation, with the reduced equation of any particular type of conic. At the end of this work, it was proposed an innovative approach of this rich teaching-learning topic in basic concepts of elementary algebra and geometry to be applied in high school, as required for good mathematical training. It was proposed that the study of conic would be used complementing the alternative way to define them from their eccentricity, converging to a unified general equation of the conics in polar coordinates. This generalized way and absolutely simple to represent the conical is seen as easily manipulated and reflects on itself a singular beauty of mathematics, The Queen of Sciences. It is worth to emphasize that the focus of the content discussed was presented in a very simple, easy to understand language, once this work is preferably intended for students and teachers of basic education.

Keywords: Conic. Equations. Cartesian Coordinates. Polar Coordinates.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	10
2.	ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES.....	12
3.	A ELIPSE E A CIRCUNFERÊNCIA.....	15
3.1.	Definição.....	15
3.2.	Elementos e nomenclatura.....	15
3.3.	Equação canônica da elipse.....	16
3.4.	Casos particulares da elipse.....	18
3.5.	Equação geral da elipse.....	19
3.6.	Elementos algébricos da elipse.....	20
3.7.	Equações paramétricas da elipse.....	22
3.8.	Sugestão de atividades.....	23
4.	ESTUDO DA HIPÉRBOLE.....	24
4.1.	Definição.....	24
4.2.	Elementos e nomenclatura.....	24
4.3.	Equação canônica da hipérbole.....	26
4.4.	Casos particulares da hipérbole.....	28
4.5.	Equação geral da hipérbole.....	28
4.6.	Elementos algébricos da hipérbole.....	29
4.7.	Equações paramétricas da hipérbole.....	31
4.8.	Sugestão de atividades.....	32
5.	ESTUDO DA PARÁBOLA.....	33
5.1.	Definição.....	33
5.2.	Elementos e nomenclatura.....	33
5.3.	Equação canônica da parábola.....	34
5.4.	Casos particulares da parábola.....	35
5.5.	Equação normal da parábola.....	36
5.6.	Elementos algébricos da parábola.....	36
5.7.	Equações paramétricas da parábola.....	37
5.8.	Sugestão de atividades.....	39
6.	ESTUDO GERAL DAS CÔNICAS.....	40
6.1.	Superfície cônica.....	40
6.2.	Secções cônicas.....	40

6.3.	Cônicas regulares.....	41
6.4.	Cônicas degeneradas.....	42
6.5.	Reconhecimento das cônicas.....	43
6.6.	Convertendo equações.....	45
6.7.	Construções no geogebra.....	47
6.8.	Translação de eixos.....	49
6.9.	Rotação de eixos.....	51
6.10.	Ângulo de rotação.....	53
6.11.	Tangente a uma cônica por um ponto dado.....	55
6.12.	Equação geral sem termo misto.....	57
6.13.	Sugestão de atividades.....	58
7.	EQUAÇÃO CARTESIANA UNIFICADA DAS CÔNICAS.....	60
7.1.	Definição generalizada de cônica.....	60
7.2.	Sugestão de atividades.....	67
8.	COORDENADAS POLARES.....	68
8.1.	Definição de coordenadas polares.....	69
8.2.	Funções em coordenadas polares.....	72
8.3.	Retas e curvas em coordenadas polares.....	74
8.4.	Sugestão de atividades.....	78
9.	EQUAÇÃO POLAR UNIFICADA DAS CÔNICAS.....	80
9.1.	Dedução da equação polar com parâmetro.....	80
9.2.	Dedução da equação polar com distância.....	83
9.3.	Distâncias de um foco aos vértices da elipse.....	87
9.4.	Sugestão de atividades.....	91
10.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	93
	REFERÊNCIAS.....	96

1. INTRODUÇÃO

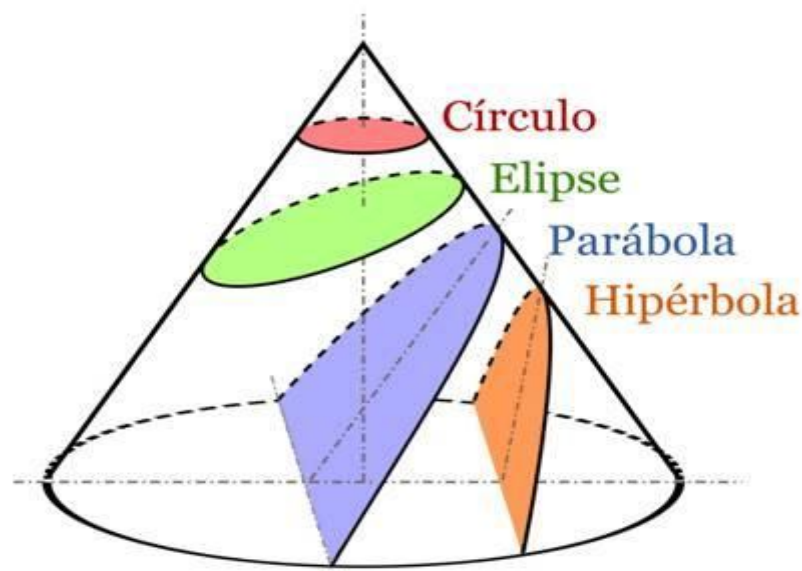
As cônicas no plano e as quádricas no espaço constituem dois tópicos primorosos da Geometria Analítica pela riqueza de detalhes e abstrações lógico-matemáticas. Ao longo da história da Matemática, desde tempos imemoriais aos dias hodiernos, encantam e mexem com o imaginário e a criatividade de matemáticos, cientistas e estudantes acadêmicos que se aventuram no estudo de tais objetos. Ambas têm uma relação intrínseca e são usadas como estrutura básica em diversas aplicações práticas do cotidiano nas mais diversas áreas do conhecimento. Em algumas situações, a nomenclatura desses entes geométricos é confundida e usada erroneamente. Haja vista, por exemplo, o caso da antena parabólica que deveria ser chamada de antena parabolóide, uma vez que a parábola e as demais cônicas são entes planos e as quádricas, entes espaciais. Comparações de semelhanças devem considerar este aspecto, que embora abstrato, define a natureza do objeto em questão. Seria o mesmo que dizer que um dado tem a forma quadrangular (plana) e não cúbica (espacial). Ou que uma bola de bilhar tem o formato de um círculo e não de uma esfera.

Este trabalho faz uma abordagem das cônicas, enfatizando seu estudo algébrico e mostrando algumas construções geométricas. Tem, ainda, a pretensão de servir aos professores da educação básica, mais precisamente do Ensino Médio, como um instrumental de apoio didático para o ensino efetivo das cônicas com toda a ênfase e importância que devem ser dedicadas a este conteúdo nesse nível de ensino.

Inicialmente, em três seções consecutivas - 3, 4 e 5 - faremos um estudo conciso de cada tipo específico das seções cônicas não degeneradas: elipse, hipérbole e parábola. Optamos por deduzir as equações canônicas das referidas cônicas de modo mais abrangente e só depois chamar a atenção do leitor para alguns casos particulares. Na seção subsequente foi feito um estudo generalizado das seções cônicas em coordenadas cartesianas que podem ser representadas por uma equação do segundo grau em duas variáveis e mostramos, reciprocamente, que qualquer equação do segundo grau em duas variáveis corresponde a algum tipo particular de cônica na sua forma regular ou degenerada. Tal correspondência pode ser feita por mera transformação algébrica da referida equação dita normal, geral ou

desenvolvida em algum tipo de equação canônica ou reduzida de cônica, usando-se para tanto a técnica de completar quadrado bem como uma transformação por meio de rotação e/ou translação dos eixos coordenados. O gráfico de tais equações em x e y é o conjunto de todos os pontos (x,y) no plano cartesiano que satisfazem a equação em questão; ele dá uma representação visual da equação. Reciprocamente, dada uma curva no plano Oxy , poderemos encontrar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre a curva e por nenhum outro ponto do plano. Isto se constitui em um dos princípios básicos da Geometria Analítica formulada por Renè Descartes e Pierre de Fermat. A ideia central aqui é que se uma curva geométrica pode ser representada por uma equação algébrica, então as regras da Álgebra podem ser usadas para analisar o problema geométrico que envolve a equação.

Finalizando este trabalho, nas seções 7, 8 e 9, abordamos algumas formas alternativas de se definir as cônicas e apresentamos algumas equações unificadas das cônicas regulares, fazendo uso de um novo sistema de coordenadas que acreditamos seja possível e necessário ser trabalhado no Ensino Médio: o sistema de coordenadas polares. Este sistema facilita sobremaneira a resolução de alguns problemas de natureza prática que teria uma resolução mais laboriosa caso fosse resolvido usando-se o tradicional sistema de coordenadas cartesianas.

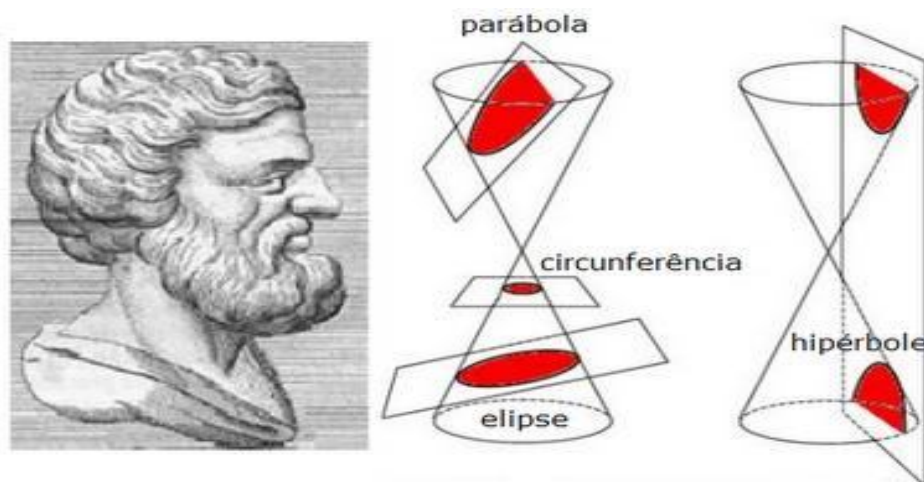


Fonte: http://es.wikipedia.org/wiki/Seccion_conica

Figura. 1: As Múltiplas Secções Cônicas.

2. CONTEXTO HISTÓRICO E APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

São denominadas de cônicas ou de secções cônicas as curvas produzidas pela intersecção de um plano que atravessa um cone de uma ou de duas folhas. Existem, pois, três maneiras dessas secções serem produzidas e cada forma recebe uma denominação própria. Cada uma depende do ângulo que o plano que a contém forma com o eixo do cone. Na literatura geométrica, essas secções são denominadas de elipses, hipérbolas e parábolas. As circunferências são casos particulares de elipses.



Fonte: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br>

Figura.2: Apolônio e as Secções Planas no Cone de Duas Folhas.

O grande geômetra grego Apolônio de Perga (Ásia Menor, por volta de 262-194 a.C.) é considerado o primeiro matemático a tratar das cônicas. Estudou em Alexandria, sendo aluno dos discípulos de Euclides. Foi ao longo da história considerado um dos mais originais e profícuos matemáticos gregos.

O brilhante Apolônio foi contemporâneo de Arquimedes. Ambos ao lado de Euclides constituíram a considerada tríade dos maiores matemáticos da Grécia Antiga. Apolônio recebeu dos antigos a alcunha de "O Grande Geômetra" e foi um notável astrônomo em sua época.

Infelizmente, ao longo do tempo, não se sabe como, mas a maior parte das obras produzidas por Apolônio se perderam. O que sabemos nos dias atuais dessas obras perdidas, deve-se aos registros do matemático egípcio helenizado Pappus de Alexandria (que viveu por volta do séc. IV a.C.). A obra prima de Apolônio é denominada *Secções Cônicas*. Esta obra consta de um total de oito

volumes, dos quais apenas sete sobreviveram (sendo quatro escritos em grego e três traduzidos para o árabe mais precisamente por volta do séc. IX.). Sabe-se que os três primeiros volumes manuscritos foram baseados nos promissores trabalhos de Euclides. O oitavo volume, todavia, desapareceu no decurso da História. Na Europa, em 1710, o britânico Edmund Halley teve a magnífica atitude de traduzir os sete volumes sobreviventes de *Secções Cônicas* para o latim e todas as demais traduções para as línguas modernas foram feitas a partir dessa tradução.

Outros matemáticos gregos foram precursores de Apolônio no estudo das cônicas, tais como o próprio Euclides e Menaecmus. A este último é atribuída a descoberta de tais curvas. Nesse período, elas eram obtidas simplesmente seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular.



Fonte: <http://10peac.blogspot.com.br> (3a)



Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>(3b)

Figura.3: Representação Artística de Arquimedes e Euclides.

O matemático que mais estudou e desenvolveu as secções cônicas na Antiguidade, todavia, foi o célebre Apolônio. Podemos elencar algumas de suas contribuições principais nesse assunto: Foi ele quem deu os nomes elipse e hipérbole a essas curvas e estudou as retas tangentes e normais a uma cônica regular qualquer. Também, partindo de um único cone de duas folhas, conseguiu gerar todas as cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de intersecção.

Difícilmente pode ser questionada a importância dada ao estudo das cônicas pelo matemático Apolônio. Os estudos de Cláudio Ptolomeu que viveu em Alexandria por volta do século I d.C. recebeu fortes influências das obras de Apolônio. Ptolomeu foi reconhecido pelos seus trabalhos como matemático, astrônomo, geógrafo, astrólogo e cartógrafo e se consagrou pelas suas duas obras mais famosas: o *Almagesto* (um tratado de Astronomia em 13 livros) e a *Geografia*

(em 8 volumes). Nesta é retratado todo o conhecimento geográfico greco-romano da época. O sistema de latitude e longitude conforme usamos nos dias atuais em cartografia foi proposto por Ptolomeu, o qual usou e aperfeiçoou métodos de projeção e transformações estereográficas.

Os estudos do alemão Johannes Kepler, do italiano Galileu Galilei e do inglês Isaac Newton também sofreram fortes influências das obras de Apolônio. Kepler se interessou pelas cônicas por ter percebido que poderia usá-las às suas aplicações à óptica e à construção de seus espelhos parabólicos. A Primeira Lei de Kepler no seu livro *Astronomia Nova* é enunciada com a seguinte afirmação: "Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, o qual ocupa um dos focos". A palavra foco (do latim *foculus*) significa fogo e seu uso é creditado a Kepler. Já Galileu Galilei, em 1632, afirmou em uma de suas obras que "a trajetória de um projétil próximo ao solo e desprezando-se a resistência do ar é uma parábola". A lei da Gravitação Universal de Newton matematizou as descobertas empíricas de Kepler e possibilitou mais tarde o estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço. Toda esta conjuntura matemática deu aos cientistas dos dias atuais as condições que possibilitariam a contento a viagem do homem à Lua.

O matemático francês Pierre de Fermat considerado um dos fundadores da Geometria Analítica Moderna deu sua riquíssima contribuição ao estudo das secções cônicas. Ele descobriu as equações cartesianas da reta e da circunferência, as equações canônicas ou reduzidas da elipse, da parábola e da hipérbole e realizou transformações com coordenadas retangulares usando rotação de eixos para reduzir uma extensa equação do segundo grau à sua forma mais simplificada.

Existem, inegavelmente, inúmeras aplicações práticas usuais recentes como na construção e uso dos telescópios, radares e receptores parabólicos ou hiperbólicos, sistemas de radionavegação aérea e de radionavegação marítima muito usados nos períodos de guerra para localização e abordagens inimigas, engrenagens de máquinas com formato elíptico, arcos de pontes ou tetos com a configuração elíptica ou parabólica, faróis dos automóveis e refletores parabólicos. Todos os fenômenos físicos que se produzem por uma lei de proporcionalidade inversa têm como modelo matemático um ramo de hipérbole. Podemos observar ainda no cotidiano inúmeros objetos e utensílios com formas cônicas: talheres, certos foguetões, alguns relógios e certos espelhos esféricos, dentre outros.

3. A ELIPSE E A CIRCUNFERÊNCIA

Comprovadamente, as órbitas dos planetas e satélites são elípticas. E no caso do Sistema Solar, curiosamente, as órbitas elípticas dos oito planetas encontram-se num mesmo plano. As elipses são usadas na fabricação de engrenagens das máquinas. Os arcos das pontes, às vezes, quando não são de forma parabólica são de forma elíptica. As salas de sussurro de certos museus e exposições e uma mesa de bilhar elíptica usam as propriedades refletoras das elipses. Faremos aqui um estudo sucinto e generalizado das cônicas do tipo elíptico que tem seu eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados do plano cartesiano. Veremos oportunamente que a circunferência é um tipo particular de elipse em que os dois focos coincidem.

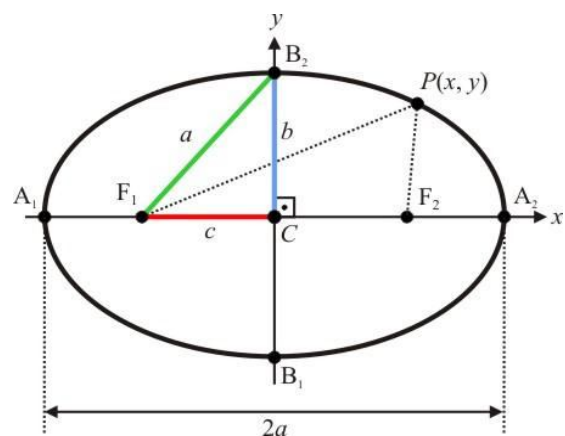
3.1. Definição

Dados os pontos no plano F_1 e F_2 com distância $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ e um comprimento $2a > 2c$, é denominada Elipse de focos F_1 e F_2 com eixo maior $2a$ o Lugar Geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, cujas somas das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, ou seja:

$$|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a$$

3.2. Elementos e Nomenclatura

- $C(x_0, y_0)$ é o centro;
- A_1, A_2, B_1 e B_2 são os vértices;
- F_1 e F_2 são os focos;
- $A_1A_2 = 2a$ é o comprimento do eixo maior;
- $B_1B_2 = 2b$ é o comprimento do eixo menor;
- $F_1F_2 = 2c$ é a distância focal;



Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br>

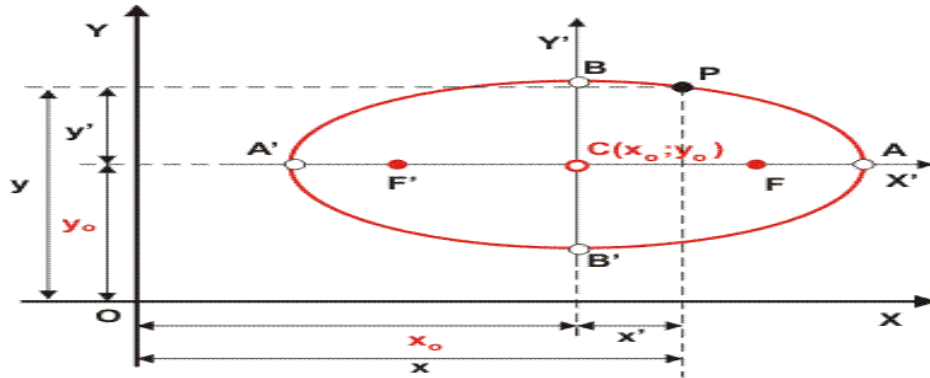
Figura.4: Elementos da Elipse

- A reta que passa nos focos constitui o eixo focal;
- Em toda elipse há uma **RELAÇÃO FUNDAMENTAL** entre os termos a, b, c dada por $a^2 = b^2 + c^2$, conforme o Teorema de Pitágoras no triângulo CF_1B_2 da *Figura.4*.
- A **EXCENTRICIDADE** $e = c/a$ mede a abertura das cônicas, ou seja, quanto mais "arredondada" ou "achatada" é o gráfico da cônica. Como, para elipse $c < a$, então $0 < e < 1$. Assim, quanto mais próximo de 1 estiver a excentricidade, mais achatada (alongada) é a elipse e, quanto mais próximo de zero, mais arredondada ela será. Quando atinge o zero, chega-se a sua forma particular de circunferência.
- O **PARÂMETRO** da elipse é a metade da corda focal perpendicular ao eixo maior. É também chamado de *semilatus rectum*.
- O **LATUS RECTUM** é a quantidade definida como sendo o dobro do parâmetro. Podemos facilmente calcular o parâmetro p da elipse, considerando um ponto $P(x, y)$ dela que fica sobre a perpendicular que passa em um dos focos, conforme a *Figura.4*. Considerando que o triângulo formado pelo ponto P e pelos focos seja retângulo, então o segmento F_2P é perpendicular ao eixo focal F_1F_2 e o segmento F_1P será a hipotenusa de um triângulo de vértices PF_1F_2 . Assim, fazendo $|F_1P| = 2a - p$; $|F_2P| = p$ e $|F_1F_2| = 2c$, aplicamos o Teorema de Pitágoras $(2a - p)^2 = (2c)^2 + (p)^2$ e obtemos a relação $p = b^2/a$. Como seu *latus rectum* é definido como sendo $2p$, então temos que $2p = 2b^2/a$.

3.3. Equação Canônica da Elipse

Considere $P(x, y)$ um ponto genérico da elipse. A distância do ponto P ao foco F_1 é dada por $|F_1P|$ e a distância do ponto P ao foco F_2 é dada por $|F_2P|$. Portanto, pela definição da elipse escrevemos a expressão do lugar geométrico como sendo $|F_1P| + |F_2P| = 2a$, chamada de equação **VETORIAL** da elipse. O desenvolvimento da equação vetorial resulta em outra expressão chamada equação **CANÔNICA** ou **REDUZIDA**. Vamos fazer este desenvolvimento, usando para isso

uma elipse que tem eixo focal paralelo ao eixo das abscissas. Considere uma elipse de centro $C(x_0, y_0)$, focos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ e eixo maior horizontal, ou seja, o eixo maior da elipse é A_1A_2 paralelo ao eixo coordenado Ox . Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse como mostra a *Figura.5* seguinte.



Fonte: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br>(2012)

Figura.5: Elipse com eixo horizontal.

$$\text{Temos que } \vec{F_1P} = [x - (x_0 - c), y - y_0] \Rightarrow F_1P = [(x - x_0) + c, y - y_0]$$

$$\text{e } \vec{F_2P} = [x - (x_0 + c), y - y_0] \Rightarrow F_2P = [(x - x_0) - c, y - y_0]$$

$$\text{Então } |\vec{F_1P}| = \sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} \text{ e } |\vec{F_2P}| = \sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\text{Como } |\vec{F_1P}| + |\vec{F_2P}| = 2a \Rightarrow |\vec{F_1P}| = 2a - |\vec{F_2P}|$$

Elevando ambos os lados desta última igualdade vêm que

$$|\vec{F_1P}|^2 = (2a - |\vec{F_2P}|)^2 \Rightarrow |\vec{F_1P}|^2 = 4a^2 - 4a|\vec{F_2P}| + |\vec{F_2P}|^2 \Rightarrow |\vec{F_1P}|^2 - |\vec{F_2P}|^2 = 4a^2 - 4a|\vec{F_2P}|$$

$$\Rightarrow \{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2\} - \{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2\} = 4a^2 - 4a|\vec{F_2P}|$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 + 2c(x - x_0) - c^2 - (y - y_0)^2 = 4a^2 - 4a|\vec{F_2P}|$$

$$\Rightarrow 4c(x - x_0) = 4a^2 - 4a|\vec{F_2P}| \Rightarrow c(x - x_0) - a^2 = -a|\vec{F_2P}|$$

Agora elevamos ambos os lados ao quadrado e obtemos

$$\Rightarrow [c(x - x_0) - a^2]^2 = [-a|\vec{F_2P}|]^2 \Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2c(x - x_0)a^2 + a^4 = a^2|\vec{F_2P}|^2$$

$$\Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2ca^2(x - x_0) + a^4 = a^2\{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2\}$$

$$\Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2ca^2(x - x_0) + a^4 = a^2[(x - x_0)^2 - 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2]$$

$$\Rightarrow c^2(x-x_0)^2 - 2ca^2(x-x_0) + a^4 = a^2(x-x_0)^2 - 2ca^2(x-x_0) + c^2a^2 + a^2(y-y_0)^2$$

$$\Rightarrow c^2(x-x_0)^2 - a^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 + a^4 - a^2c^2 = 0$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 + a^2(a^2 - c^2) = 0$$

Empregando a relação fundamental da elipse: $a^2 - c^2 = b^2$ na última equação

$$\text{vem que } -b^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 + a^2b^2 = 0 \Rightarrow b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$$

Dividindo todos os termos da equação por a^2b^2 temos

$$\frac{b^2}{a^2b^2}(x-x_0)^2 + \frac{a^2}{a^2b^2}(y-y_0)^2 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

E, finalmente, obtemos a equação reduzida da elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

A expressão acima demonstrada é chamada de equação CANÔNICA ou REDUZIDA de uma elipse de eixo maior horizontal (eixo A_1A_2 paralelo ao eixo Ox), mas existem as elipses de eixo maior vertical (eixo A_1A_2 paralelo ao eixo Oy) e suas equações são muito semelhantes. O desenvolvimento para obtermos a equação reduzida de uma elipse de eixo maior vertical é análogo ao que fizemos para a elipse de eixo maior horizontal e, portanto, omitiremos aqui este desenvolvimento e o deixaremos como exercício para o leitor. De uma forma geral temos duas formas para a Equação Reduzida:

ELIPSE DE EIXO MAIOR HORIZONTAL (paralelo ao eixo Ox):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

ELIPSE DE EIXO MAIOR VERTICAL (paralelo ao eixo Oy):

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

3.4. Casos Particulares da Elipse:

Alguns casos particulares da elipse merecem atenção especial. Vejamos:

CIRCUNFERÊNCIA: A circunferência é um tipo particular de elipse. Se fizermos $a = b$ na relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2$ teremos $a^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - a^2 \Leftrightarrow c = 0$.

E fazendo $a=b$ na equação reduzida vem que $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$, donde se obtém a equação reduzida da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

que nada mais é que a equação reduzida de uma circunferência de raio a , ou seja, a circunferência pode ser considerada uma elipse de excentricidade nula, uma vez que $e = \frac{c}{a} = \frac{0}{a} = 0$.

ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM: Se o centro da elipse for a origem dos eixos coordenados $C(x_0, y_0) = O(0,0)$ e o seu eixo focal se apoiar sobre um dos eixos, então a equação canônica da elipse terá uma das duas formas simplificadas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ OU } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

3.5. Equação Geral da Elipse

Desenvolvendo a equação reduzida da elipse obtemos outra expressão chamada de equação geral, a qual tem a forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Esta equação não apresenta o termo misto Bxy . Isto ocorre sempre que a elipse apresentar eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados do plano. Vamos fazer este desenvolvimento para o caso de uma elipse de eixo maior horizontal, cuja equação reduzida é $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Multiplicando a equação por a^2b^2 temos

$$\frac{a^2b^2(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{a^2b^2(y-y_0)^2}{b^2} = a^2b^2 \Rightarrow b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow b^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) + a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 + a^2y^2 - 2a^2y_0y + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Organizando os termos desta equação temos a equação geral ou normal da elipse:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Fazendo $(b^2)x^2 + (a^2)y^2 + (-2b^2x_0)x + (-2a^2y_0)y + (b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0$ e comparando com a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos que os coeficientes

correspondentes são: $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e o termo independente é $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Dada a equação geral de uma elipse $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, facilmente podemos convertê-la na sua equação canônica ou reduzida, usando apenas a técnica de completar quadrados. Podemos tirar conclusões semelhantes para o caso particular da circunferência, o que deixamos como atividade para o leitor.

Exemplo 3.1. Encontre a equação canônica da elipse de equação geral dada por $9x^2 + 4y^2 + 54x - 16y + 61 = 0$.

SOLUÇÃO: Primeiro agrupamos os termos: $(9x^2 + 54x) + (4y^2 - 16y) = -61$.

Em seguida, seguimos os passos da técnica de completar quadrados:

$$9(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 4y) = -61 \Rightarrow 9(x^2 + 6x + 3^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = -61 + 81 + 16$$

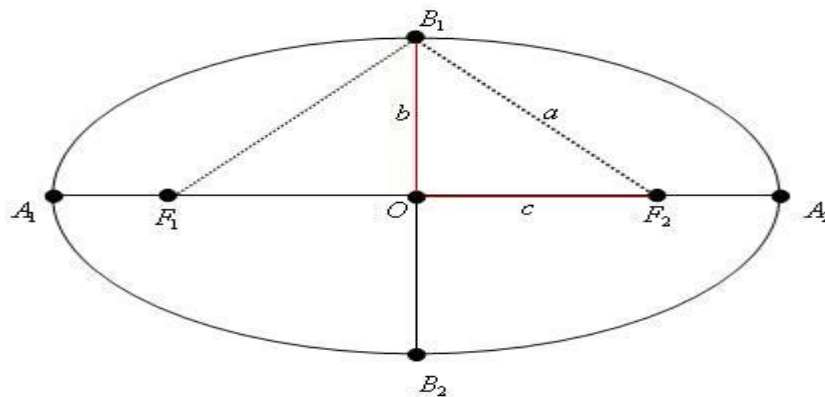
$$\Rightarrow 9(x+3)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow \frac{9}{36}(x+3)^2 + \frac{4}{36}(y-2)^2 = \frac{36}{36}$$

E, finalmente, obtemos a equação desejada: $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

3.6. Elementos Algébricos da Elipse

Também é conveniente determinar todos os elementos de uma elipse. Vejamos isso em duas situações:

ELIPSE DE EIXO MAIOR HORIZONTAL



Fonte: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/elipse.htm>

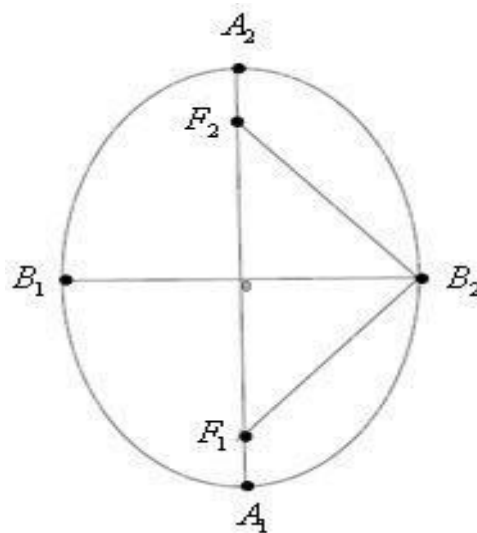
Figura.6: Elipse com eixo focal horizontal.

Da equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ obtemos os termos a e b diretamente.

Considerando $a > b$, da relação fundamental obtemos $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e

consequentemente sua excentricidade $e = \frac{c}{a}$, seu parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$ e seu *latus rectum* $2p = 2\frac{b^2}{a}$. Como o termo a da elipse fica sempre sob as coordenadas que indicam a direção do eixo focal, neste caso o eixo focal é paralelo ao eixo das abscissas (Ox). Como o centro da elipse é $C(x_0, y_0)$, a equação do eixo focal é dada por $y = y_0$ e as coordenadas dos focos por $F(x_0 \pm c, y_0)$, as coordenadas dos vértices do eixo maior por $A(x_0 \pm a, y_0)$ e as coordenadas dos vértices do eixo menor por $B(x_0, y_0 \pm b)$.

ELIPSE DE EIXO MAIOR VERTICAL



Fonte: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/elipse.htm>

Figura.7: Elipse com eixo focal vertical.

Da equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ obtemos os termos a e b diretamente.

Como $a > b$, da relação fundamental obtemos $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e consequentemente sua excentricidade $e = \frac{c}{a}$, seu parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$ e seu *latus rectum* $2p = 2\frac{b^2}{a}$. Como o termo a está sempre sob as coordenadas que indicam a direção do eixo focal, neste caso o eixo é paralelo ao eixo das ordenadas (Oy). Como o centro é $C(x_0, y_0)$, a equação do eixo focal é dada por $x = x_0$ e as coordenadas dos focos por $F(x_0, y_0 \pm c)$ as coordenadas dos vértices do eixo maior por $A(x_0, y_0 \pm a)$ e as coordenadas dos vértices do eixo menor por $B(x_0 \pm b, y_0)$.

Exemplo 3.2. Determine todos os elementos da elipse de equação geral dada por $x^2 + 4y^2 - 4x - 32y + 32 = 0$.

SOLUÇÃO: Vamos completar quadrados para passar a equação para sua forma canônica

$$(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 8y + 16 - 16) + 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 4(y-4)^2 - 4 - 64 + 32 = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-4)^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

Dessa última equação temos que $a = 6$ e $b = 3$, já que sempre $a^2 > b^2$, sendo a elipse de eixo horizontal (pois a está sob as coordenadas x) e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3\sqrt{3}$. O centro da elipse é $C(2, 4)$. Os vértices do eixo maior são $A_1(x_0 - a, y_0) = (-4, 4)$ e $A_2(x_0 + a, y_0) = (8, 4)$. Os vértices do eixo menor são $B_1(x_0, y_0 - b) = (2, 1)$ e $B_2(x_0, y_0 + b) = (2, 7)$. Os focos são dados por

$$F_1(x_0 - c, y_0) = (2 - 3\sqrt{3}, 4) \text{ e}$$

$F_2(x_0 + c, y_0) = (2 + 3\sqrt{3}, 4)$. A elipse tem excentricidade $e = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, parâmetro

$p = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ e *latus rectum* $2p = 3$. Seu eixo focal tem equação $y = 4$.

3.7. Equações Paramétricas da Elipse

Para se determinar as equações paramétricas da elipse podemos fazer a seguinte identificação. Se a elipse tem eixo focal horizontal e centro no ponto $C(x_0, y_0)$ então escrevemos sua equação reduzida como sendo

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1 \text{ e comparamos com a relação fundamental da trigonometria}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Temos, portanto: $\cos\theta = \frac{x-x_0}{a} \Rightarrow x = x_0 + a\cos\theta$ e $\sin\theta = \frac{y-y_0}{b} \Rightarrow y = y_0 + b\sin\theta$.

Temos, pois, duas formas de representar as equações paramétricas da elipse:

ELIPSE DE EIXO FOCAL HORIZONTAL:

$$x = x_0 + a\cos\theta \text{ e } y = y_0 + b\sin\theta, \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ELIPSE DE EIXO FOCAL VERTICAL:

$$x = x_0 + b\cos\theta \text{ e } y = y_0 + a\sin\theta, \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Uma circunferência também pode ser parametrizada. Neste caso, considerando-se $a = b = r$ temos que $x = x_0 + r \cos \theta$ e $y = y_0 + r \sin \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ou ainda que $x = x_0 + r \sin \theta$ e $y = y_0 + r \cos \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ são formas de parametrização.

Exemplo 3.3. Escrever as equações paramétricas da elipse de equação canônica

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

SOLUÇÃO: Basta identificarmos as coordenadas do centro $C(2,4)$ e os termos $a = 6$ e $b = 3$. Então podemos escrever: $x = 2 + 6 \cos \theta$ e $y = 4 + 3 \sin \theta$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3.8. Sugestão de Atividades

- 1) Parametrizar a equação da elipse: $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$.
- 2) Determine a equação reduzida da elipse de excentricidade $4/5$, cujos focos são pontos da reta $x + 4 = 0$ e sendo $B_1(-1,3)$ um dos extremos do eixo menor.
- 3) Determine a equação geral ou normal da circunferência que tem centro sobre o eixo Ox e na qual uma de suas cordas tem por extremo os pontos $A(6,4); B(3,-5)$.
- 4) Escrever a equação normal da circunferência que passa pelos pontos $A(0,1)$, $B(1,2)$ e $C(1,8)$.
- 5) Um satélite em órbita elíptica e excentricidade $1/3$, viaja ao redor da Terra, situada num dos focos da trajetória do satélite. Sabendo-se que a distância mais próxima do satélite à Terra é de $300km$, calcular a maior distância.
- 6) Calcule a excentricidade da elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$.
- 7) Determinar os pontos de intersecção da elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ com os eixos coordenados.
- 8) Uma elipse tem os focos em $F_1(-3,0); F_2(3,0)$ e excentricidade igual a $0,5$. Escreva sua equação reduzida e sua área S (da Geometria $S = \pi ab$).
- 9) Obtenha os focos da equação da elipse $4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$.
- 10) Um ponto $P(x,y)$ se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos $(2,-4); (2,2)$ é 10 . Deduzir a equação geral do lugar geométrico descrito.

RESPOSTAS

1) $x = 1 + 4\cos\theta; y = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$.

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.

3) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

4) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$.

5) 600km . 6) $e = 3/5$.

7) $(-5/3, 0); (5/3, 0); (0, -5/2); (0, 5/2)$.

8) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ e $S = 18\sqrt{3}\pi$.

9) $(4, -2 + \sqrt{3}); (4, -2 - \sqrt{3})$.

10) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y = 284$.

4. ESTUDO DA HIPÉRBOLE

As hipérbolas ocorrem frequentemente como gráficos de equações em Química, Física, Biologia e Economia (Ex.: Lei de Boyle, Lei de Ohm, curvas de demanda e de oferta, etc.). Uma aplicação particularmente importante de hipérbolas é encontrada nos sistemas de navegação desenvolvidos ainda nas duas grandes Guerras Mundiais. Também faremos aqui um estudo sucinto e generalizado das cônicas do tipo hiperbólico que tem seu eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados do plano cartesiano.

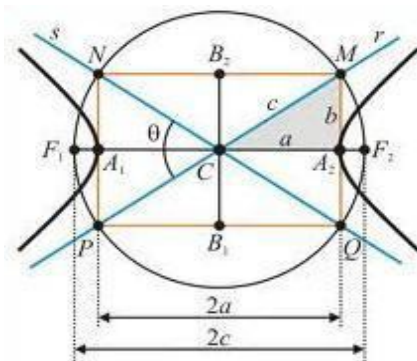
4.1. Definição:

Dados dois pontos no plano F_1 e F_2 com distância focal $|F_1F_2| = 2c$ e um comprimento $2a < 2c$, é denominada Hipérbole de focos F_1 e F_2 com eixo real $2a$ o Lugar Geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, ou seja:

$$\left| |F_1P| - |F_2P| \right| = 2a$$

4.2. Elementos e Nomenclatura

- $C(x_0, y_0)$ é o centro;
- A_1, A_2 são os vértices reais;
- B_1, B_2 são os vértices imaginários.
- F_1 e F_2 são os focos; ;



Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br>

Figura.8: Elementos da Hipérbole .

- $A_1A_2 = 2a$ é o comprimento do eixo real ou transversal;
- $B_1B_2 = 2b$ é o comprimento do eixo imaginário ou conjugado;
- $F_1F_2 = 2c$ é a distância focal; A reta que passa nos focos constitui o eixo focal;
- Em toda hipérbole há uma relação fundamental entre os termos a, b, c dada por $c^2 = a^2 + b^2$, conforme o Teorema de Pitágoras no triângulo CA_2M da *Figura.8*.
- As retas r e s (*Figura.8*) são chamadas de *ASSÍNTOTAS*. Elas não interceptam nem tangenciam a hipérbole, mas a hipérbole se aproxima cada vez mais delas quando tende a $\pm\infty$. Louis Leithold (1986) sugere uma regra prática que ele chama de “holística” para a determinação das equações das assíntotas de uma hipérbole qualquer. Basta substituir o termo independente do segundo membro da equação canônica por zero e fatorar o produto notável dado pela diferença de quadrados. Com esse método é imediato se obter as duas equações das assíntotas. As assíntotas contêm as diagonais do chamado *RETÂNGULO FUNDAMENTAL* da hipérbole, cujos lados são segmentos que passam sobre os vértices reais e conjugados. E os vértices deste retângulo estão sobre a circunferência que passa nos focos (*Figura.8*). As assíntotas de uma hipérbole equilátera (quando $a = b$) são perpendiculares entre si. O retângulo fundamental para tal hipérbole é um quadrado e os eixos transversal e conjugado têm comprimentos iguais. Quando duas hipérboles possuem as mesmas assíntotas são chamadas de hipérboles conjugadas. Exemplo de equações reduzidas de hipérboles conjugadas:

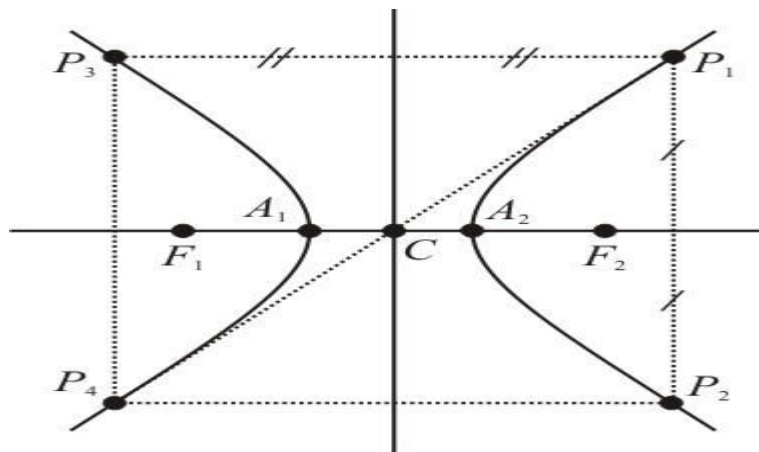
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

- A *EXCENTRICIDADE* $e = \frac{c}{a}$ da hipérbole é $e > 1$, pois $a < c$. Assim, quanto mais próximo de 1 estiver a excentricidade mais fechados serão os ramos da hipérbole e mais abertos eles serão quanto mais a excentricidade se afastar de 1.
- O *PARÂMETRO* ou *semilatus rectum* da hipérbole também é a metade da corda focal perpendicular ao eixo maior.
- O *LATUS RECTUM* é a quantidade definida como o dobro do parâmetro. Podemos facilmente calcular o parâmetro p da hipérbole, considerando um ponto $P(x, y)$ dela que fica sobre a perpendicular que passa em um dos focos. O triângulo

formado pelo ponto e pelos focos é retângulo. Se o segmento F_2P é perpendicular ao eixo focal F_1F_2 , então F_1P será a hipotenusa de um triângulo de vértices PF_1F_2 . Assim, fazendo $|F_1P| = 2a - p$; $|F_2P| = p$ e $|F_1F_2| = 2c$, aplicamos o Teorema de Pitágoras $(2a - p)^2 = (2c)^2 + (p)^2$ e obtemos a relação $p = \frac{b^2}{a}$. Como seu *latus rectum* é definido como o dobro de p , temos $2p = \frac{2b^2}{a}$.

4.3. Equação Canônica da Hipérbole

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole. A distância do ponto P ao foco F_1 é dada por $|F_1P|$ e a distância do ponto P ao foco F_2 é dada por $|F_2P|$. Portanto, pela definição da hipérbole escrevemos a expressão do lugar geométrico que é $\left| |F_1P| - |F_2P| \right| = 2a$, chamada de equação vetorial da hipérbole. O desenvolvimento da equação vetorial resulta em outra expressão chamada equação canônica ou reduzida. Vamos fazer este desenvolvimento usando para isso uma hipérbole que tem eixo focal paralelo ao eixo das abscissas. Considere uma hipérbole de centro $O(x_0, y_0)$, focos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ e eixo maior horizontal, ou seja, eixo maior A_1A_2 paralelo ao eixo coordenado Ox . Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole como mostra a Figura.9 abaixo.



Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br>

Figura.9: Hipérbole com Eixo Horizontal.

Temos que $F_1P = [x - (x_0 - c), y - y_0] \Rightarrow F_1P = [(x - x_0) + c, y - y_0]$

$$\text{e } F_2P = [x - (x_0 + c), y - y_0] \Rightarrow F_2P = [(x - x_0) - c, y - y_0]$$

$$\text{Então } |\overrightarrow{F_1P}|^2 = [(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2 \text{ ou } |\overrightarrow{F_1P}| = \sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} \text{ e}$$

$$|\overrightarrow{F_2P}|^2 = [(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2 \text{ ou } |\overrightarrow{F_2P}| = \sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\text{Como é } \left| |\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| \right| = 2a \Rightarrow |\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| = \pm 2a \Rightarrow |\overrightarrow{F_1P}| = \pm 2a + |\overrightarrow{F_2P}|$$

Devemos elevar ao quadrado ambos os lados desta última igualdade:

$$|\overrightarrow{F_1P}|^2 = (\pm 2a + |\overrightarrow{F_2P}|)^2 \Rightarrow |\overrightarrow{F_1P}|^2 = 4a^2 \pm 4a|\overrightarrow{F_2P}| + |\overrightarrow{F_2P}|^2$$

$$\Rightarrow [(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2 = 4a^2 \pm 4a|\overrightarrow{F_2P}| + [(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2$$

$$\Rightarrow [(x - x_0) + c]^2 = 4a^2 \pm 4a|\overrightarrow{F_2P}| + [(x - x_0) - c]^2$$

$$\Rightarrow [(x - x_0) + c]^2 - [(x - x_0) - c]^2 - 4a^2 = \pm 4a|\overrightarrow{F_2P}|$$

$$\Rightarrow 4c(x - x_0) - 4a^2 = \pm 4a|\overrightarrow{F_2P}| \Rightarrow c(x - x_0) - a^2 = \pm a|\overrightarrow{F_2P}|$$

$$\Rightarrow [c(x - x_0) - a^2]^2 = (\pm a|\overrightarrow{F_2P}|)^2 \Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2ca^2(x - x_0) + a^4 = a^2|\overrightarrow{F_2P}|^2$$

$$\Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2ca^2(x - x_0) + a^4 = a^2\{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2\}$$

$$\Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2ca^2(x - x_0) + a^4 = a^2\{(x - x_0)^2 - 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2\}$$

$$\Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - 2ca^2(x - x_0) + a^4 = a^2(x - x_0)^2 - 2a^2c(x - x_0) + a^2c^2 + a^2(y - y_0)^2$$

$$\Rightarrow c^2(x - x_0)^2 - a^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Empregando a relação fundamental da hipérbole: $c^2 - a^2 = b^2$ nesta última equação vem que $b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$. Dividindo todos os termos da equação por a^2b^2 vem que $\frac{b^2}{a^2b^2}(x - x_0)^2 - \frac{a^2}{a^2b^2}(y - y_0)^2 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$. E, assim, obtemos a equação

reduzida da HIPÉRBOLE DE EIXO REAL HORIZONTAL $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Para uma HIPÉRBOLE DE EIXO REAL VERTICAL, obtemos uma equação semelhante dada pela equação $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

4.4. Casos Particulares da Hipérbole

Alguns casos particulares da hipérbole merecem atenção. Vejamos:

HIPÉRBOLE EQUILÁTERA: Se fizermos $a=b$ na relação fundamental $c^2 = a^2 + b^2$ teremos $c^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$. E fazendo $a=b$ na equação reduzida temos $\pm \frac{(x-x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \pm(x-x_0)^2 \mp (y-y_0)^2 = a^2$, que é a equação particular

das duas hipérboltes equiláteras, cuja excentricidade é dada por $e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

HIPÉRBOLE CENTRADA NA ORIGEM: Se o centro da hipérbole for a origem dos eixos coordenados $C(x_0, y_0) = O(0, 0)$ e o seu eixo focal se apoiar sobre um dos eixos, então a equação da hipérbole terá uma das duas configurações simplificadas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ OU } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

4.5. Equação Geral da Hipérbole

Desenvolvendo-se uma equação REDUZIDA da hipérbole obtém-se outra expressão chamada de equação GERAL ou NORMAL que tem a forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Esta equação não apresenta o termo misto Bxy . Isto ocorre sempre que a hipérbole apresentar eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados do plano. Vamos fazer este desenvolvimento para o caso de uma hipérbole de eixo real horizontal, cuja equação reduzida é $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

Multiplicando ambos os membros desta equação por a^2b^2 vem que:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b^2(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{a^2b^2(y-y_0)^2}{b^2} &= a^2b^2 \Rightarrow b^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2 \\ \Rightarrow b^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) - a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) &= a^2b^2 \\ \Rightarrow b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 - a^2b^2 &= 0 \\ \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Organizando os termos temos a equação geral ou normal da hipérbole:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Fazendo $(b^2)x^2 + (-a^2)y^2 + (-2b^2x_0)x + (2a^2y_0)y + (b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0$ e comparando com a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ temos que os coeficientes correspondentes são: $A = b^2$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$ e o termo independente é $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Dada a equação geral de uma hipérbole $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, facilmente podemos convertê-la na sua equação canônica ou reduzida, a exemplo do que foi feito com a elipse, usando apenas a TÉCNICA DE COMPLETAR QUADRADOS.

Exemplo 4.1. Encontre a equação canônica da elipse de equação geral dada por $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 101 = 0$.

SOLUÇÃO: Primeiro agrupamos os termos: $(9x^2 + 54x) + (-4y^2 + 16y) = -101$. Em seguida, seguimos os passos da técnica de completar quadrados:

$$9(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) = -101 \Rightarrow 9(x^2 + 6x + 3^2) - 4(y^2 - 4y + 2^2) = -101 + 81 - 16$$

$$\Rightarrow 9(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = -36 \Rightarrow \frac{9}{-36}(x+3)^2 - \frac{4}{-36}(y-2)^2 = \frac{-36}{-36} \quad \text{E, finalmente, obtemos a}$$

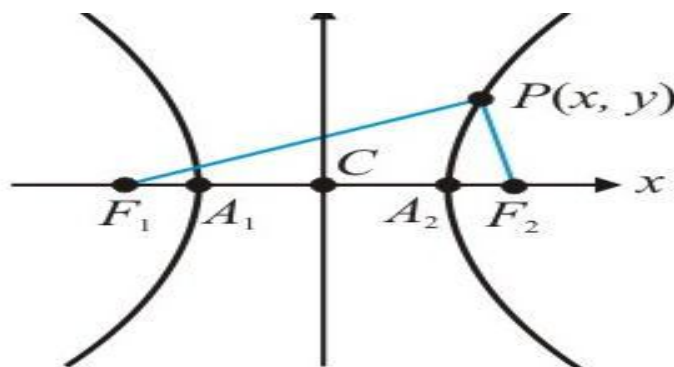
$$\text{equação desejada } \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1.$$

4.6. Elementos Algébricos da Hipérbole

Também é conveniente determinar todos os elementos de uma hipérbole.

Vejamos isso em duas situações:

HIPÉRBOLE DE EIXO FOCAL HORIZONTAL

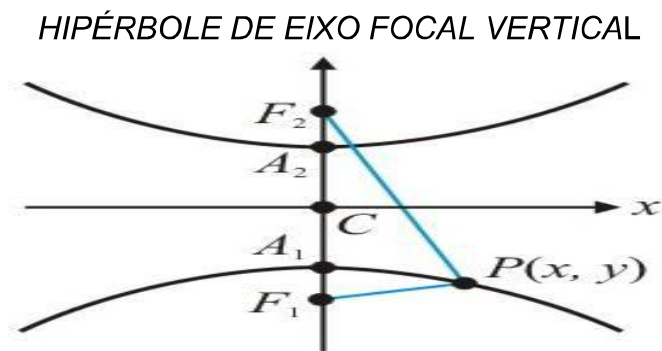


Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br>

Figura.10: Hipérbole com Eixo Focal Horizontal.

Da equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ obtemos os termos a e b diretamente.

Da relação fundamental obtemos $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e conseqüentemente sua excentricidade $e = \frac{c}{a}$, seu parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$ e seu latus rectum $2p = 2\frac{b^2}{a}$. O termo a está sempre sob as coordenadas que indicam a direção do eixo focal, neste caso paralelo ao eixo das abscissas (Ox). Como o centro da hipérbole é $C(x_0, y_0)$, a equação do eixo focal é dada por $y = y_0$ e as coordenadas dos focos por $F(x_0 \pm c, y_0)$, as coordenadas dos vértices do eixo real por $A(x_0 \pm a, y_0)$ e as coordenadas dos vértices do eixo imaginário por $B(x_0, y_0 \pm b)$. Suas assíntotas são as retas dadas por $(y - y_0) = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$.



Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br>

Figura.11: Hipérbole com eixo focal vertical.

Da mesma forma que no caso anterior, da equação reduzida $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ obtemos os termos a e b diretamente. Da relação fundamental obtemos $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e conseqüentemente sua excentricidade $e = \frac{c}{a}$, seu parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$, e seu latus rectum $2p = 2\frac{b^2}{a}$. Como o termo a está sempre sob as coordenadas que indicam a direção do eixo focal, então neste caso o eixo é paralelo ao eixo das ordenadas (Oy). Como o centro é $C(x_0, y_0)$ a equação do eixo focal é dada por $x = x_0$ e as coordenadas dos focos por $F(x_0, y_0 \pm c)$, as coordenadas dos vértices do eixo real por $A(x_0, y_0 \pm a)$ e as coordenadas dos vértices do eixo conjugado por

$B(x_0 \pm b, y_0)$. Suas assíntotas são as retas dadas pelas equações:

$$(x - x_0) = \pm \frac{b}{a}(y - y_0).$$

Exemplo 4.2. Determine todos os elementos da hipérbole de equação geral dada por $x^2 - 4y^2 - 4x + 32y - 96 = 0$.

SOLUÇÃO: Vamos completar quadrados para passar a equação para sua forma

$$\text{canônica: } (x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 - 8y + 16 - 16) - 96 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + 4(y - 4)^2 - 4 + 64 - 96 = 0 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{36} - \frac{4(y - 4)^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{36} - \frac{(y - 4)^2}{9} = 1$$

Dessa última equação temos que $a = 6; b = 3$, sendo a hipérbole de eixo horizontal

(pois a está sob as coordenadas x). Obtemos $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. O centro da

hipérbole é $C(2, 4)$. Os vértices do eixo real são $A_1(x_0 - a, y_0) = (-4, 4)$ e

$A_2(x_0 + a, y_0) = (8, 4)$. Os vértices do eixo conjugado são $B_1(x_0, y_0 - b) = (2, 1)$ e

$B_2(x_0, y_0 + b) = (2, 7)$. Os focos são dados por $F_1(x_0 - c, y_0) = (2 - 3\sqrt{5}, 4)$ e

$F_2(x_0 + c, y_0) = (2 + 3\sqrt{5}, 4)$. A hipérbole tem excentricidade $e = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

parâmetro $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e *latus rectum* $2p = 1$. Seu eixo focal tem equação $y = 4$.

E suas assíntotas são as retas $(y - 4) = \pm \frac{1}{2}(x - 2)$.

4.7. Equações Paramétricas da Hipérbole

Assim como fizemos para a elipse, também podemos determinar as equações paramétricas da hipérbole fazendo uma mera identificação. Se a hipérbole tem eixo focal horizontal e centro no ponto $C(x_0, y_0)$, então sua equação reduzida

pode ser escrita como sendo $(\frac{x - x_0}{a})^2 - (\frac{y - y_0}{b})^2 = 1$ e, então, se comparada com a

identidade trigonométrica $\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$, tem-se, portanto:

$$\sec \theta = \frac{x - x_0}{a} \Rightarrow x = x_0 + a \sec \theta \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y - y_0}{b} \Rightarrow y = y_0 + b \operatorname{tg} \theta.$$

Temos, assim, as duas equações paramétricas da hipérbole:

HIPÉRBOLE DE EIXO FOCAL HORIZONTAL:

$$x = x_0 + a \sec \theta \text{ e } y = y_0 + b \operatorname{tg} \theta, \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

HIPÉRBOLE DE EIXO FOCAL VERTICAL:

$$x = x_0 + b \operatorname{tg} \theta \text{ e } y = y_0 + a \sec \theta, \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Poderíamos também obter outra forma sugestiva de parametrização da hipérbole usando a relação hiperbólica $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ da qual obteríamos as relações

$$\text{seguintes } \begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh \theta \\ y = y_0 + b \sinh \theta \end{cases} \text{ para } \theta \in R \text{ ou } \begin{cases} y = y_0 \pm a \cosh \theta \\ x = x_0 + b \sinh \theta \end{cases} \text{ para } \theta \in R$$

4.8. Sugestão de Atividades

- 1) Dada a hipérbole de equação $16x^2 - 25y^2 = 400$, pede-se:
 - a) A equação na forma reduzida. b) A excentricidade.
 - c) As coordenadas dos focos e dos vértices.
- 2) Dê as assíntotas da hipérbole $16x^2 - 25y^2 = 400$.
- 3) Determinar a equação da hipérbole equilátera que passa pelo ponto $P(4, -2)$, tem centro na origem e focos sobre o eixo Ox.
- 4) Achar a distância do foco superior da hipérbole $9y^2 - 16x^2 = 144$ a cada uma das suas assíntotas.
- 5) Uma hipérbole tem um de seus vértices em $A(3, 0)$ e as equações de suas assíntotas são $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$. Determine a equação da hipérbole.
- 6) obter as coordenadas dos pontos de intersecção da reta $x - 4y - 4 = 0$ com a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 16$.
- 7) Uma hipérbole tem excentricidade igual 2. Calcule o ângulo entre as assíntotas. (sugestão: O ângulo entre o eixo Ox e a assíntota ascendente é tal que sua tangente é b/a).
- 8) Determinar o *latus rectum* da hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$.
- 9) Uma hipérbole passa pelo ponto $P(1, 2)$ e uma de suas assíntotas é a reta $3y - \sqrt{11}x = 0$. Determine a equação da hipérbole sabendo que o eixo real coincide com o eixo Oy e o centro com a origem.
- 10) determine as coordenadas dos focos da hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$.

RESPOSTAS

1) a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; b) $\frac{\sqrt{41}}{5}$; c) $A_1(-5, 0)$

$A_2(5, 0)$; $F_1(-\sqrt{41}, 0)$, $F_2(\sqrt{41}, 0)$.

2) $r': 4x - 5y = 0$; $r'': 4x + 5y = 0$

3) $x^2 - y^2 = 12$. 4) 3.

5) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

6) $(4, 0)$; $(-20/3, -8/3)$

7) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 8) 2.

9) $9y^2 - 11x^2 = 25$.

10) $(3 - \sqrt{3}, 2)$; $(3 + \sqrt{3}, 2)$

5. ESTUDO DA PARÁBOLA

No século XVI, Galileu Galilei mostrou que a trajetória de um projétil atirado ao ar com certo ângulo em relação ao solo e desprezando-se a resistência do ar é uma parábola. Desde essa época, os formatos parabólicos têm sido usados para desenhar faróis de automóveis, telescópios refletores, certos tipos de espelhos e pontes suspensas. Faremos aqui também um estudo sucinto das cônicas do tipo parabólico que tem seu eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados do plano cartesiano.

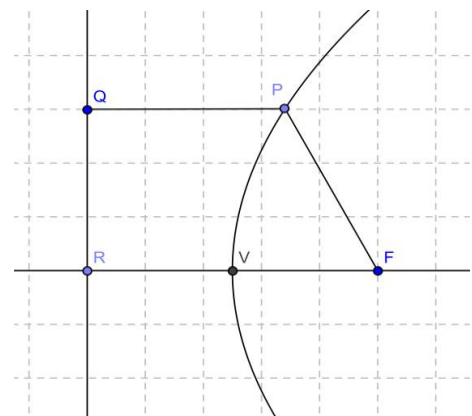
5.1. Definição

Chama-se parábola ao lugar geométrico dos pontos do plano, equidistantes de uma reta fixada d e de um ponto fixado F não pertencente à reta.

5.2. Elementos e Nomenclatura

Consideremos os elementos da parábola ao lado:

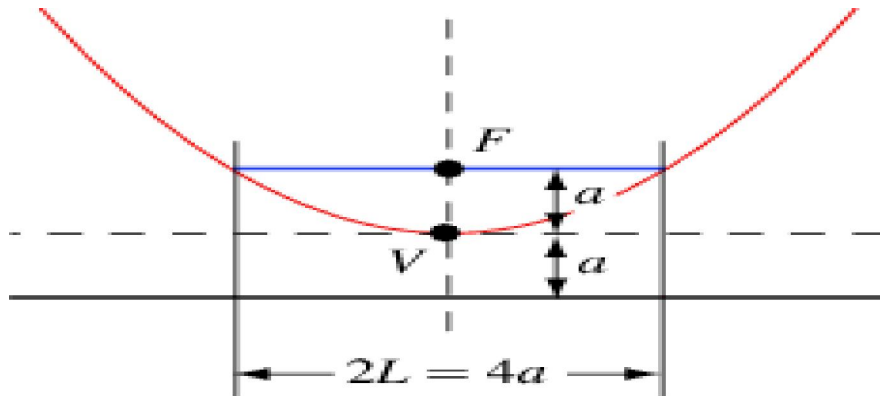
- Vértice: $V(x_0, y_0)$.
- Foco: $F(x_0 + p, y_0)$.
- Reta diretriz (d) de equação $x = x_0 - p$.
- A reta que passa por F e V é o eixo de simetria ou eixo focal da parábola. Chamemos de R a intersecção do eixo de simetria com a diretriz e $dist(P, Q) = dist(P, d)$.
- O número positivo $p = f = dist(FV) = dist(VR)$ é a distância focal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.12: Parábola

- A **EXCENTRICIDADE** da parábola é $e = 1$.
- O **PARÂMETRO** da parábola aqui é definido como sendo o número constante $2p = \text{dist}(RF)$. Note que $\text{dist}(V, F) = \text{dist}(V, R) = p$ é o comprimento focal.
- O **LATUS RECTUM** é a corda da parábola que é paralela à diretriz e passa através do foco. Pode-se demonstrar por construção geométrica que o *latus rectum* da parábola mede $|4p|$, ou seja, é 4 vezes a distância do foco ao vértice.



Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/>

Figura.13: Latus Rectum $2L$ da Parábola para $p=a$.

5.3. Equação Canônica da Parábola

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola. Pela definição temos a equação vetorial $|dP| = |FP|$. O desenvolvimento desta equação resulta na equação reduzida da parábola.

Considere uma parábola com eixo de simetria horizontal (paralelo ao eixo Ox) como na Figura.12 anterior. Então sua equação vetorial é $|dP| = |FP|$. Como $P(x, y)$ pertence à parábola, a diretriz d tem equação $x = x_0 - p$ e $|PQ| = |Pd|$, sendo $Q \in d$ e as coordenadas do foco são $F(x_0 + p, y_0)$, então segue que

$$|QP| = |FP| \Rightarrow |QP|^2 = |FP|^2$$

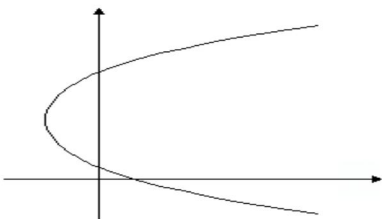
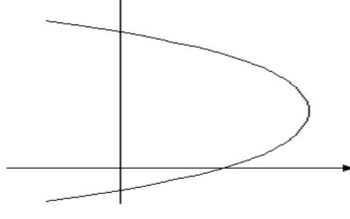
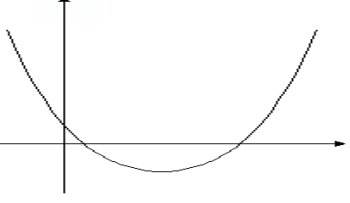
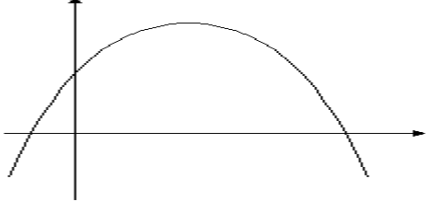
$$\Rightarrow [(x - x_0) + p]^2 = [(x - x_0) - p]^2 + (y - y_0)^2$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + 2p(x - x_0) + p^2 = (x - x_0)^2 - 2p(x - x_0) + p^2 + (y - y_0)^2$$

$\Rightarrow 4p(x - x_0) = (y - y_0)^2 \Rightarrow (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$. Esta última equação é a equação canônica ou reduzida da parábola de eixo de simetria horizontal com concavidade

voltada para a porção positiva do eixo Ox. Analogamente se demonstra a equação reduzida de uma parábola com eixo de simetria vertical (paralelo ao eixo Oy). Parábolas podem abrir para cima, para baixo, para a esquerda, para a direita ou em alguma outra direção arbitrária. Qualquer parábola pode ser reposicionada e redimensionada para caber exatamente em qualquer outra parábola - ou seja, todas as parábolas são geometricamente semelhantes. O sinal que acompanha o parâmetro indicará se a parábola tem concavidade voltada para baixo (-) ou para cima (+), para a esquerda (-) ou para a direita (+). Sendo $p > 0$ e o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados, temos quatro casos a considerar:

Tabela 1-Tipos de Parábolas

	
Eixo de simetria horizontal e concavidade para a direita.	Eixo de simetria horizontal e concavidade para a esquerda.
$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$	$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$
	
Eixo de simetria vertical e concavidade para cima.	Eixo de simetria vertical e concavidade para baixo.
$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$	$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4. Casos Particulares da Parábola

PARÁBOLAS DE VÉRTICE NA ORIGEM: Se o vértice da parábola for a origem dos eixos coordenados $C(x_0, y_0) = O(0, 0)$ e o seu eixo de simetria se apoiar sobre um dos eixos coordenados do sistema cartesiano, então a equação da parábola terá uma das configurações, dependendo da concavidade:

$$y^2 = \pm 4px \text{ OU } x^2 = \pm 4py$$

5.5. Equação Normal da Parábola

Se a parábola apresenta EIXO DE SIMETRIA VERTICAL sua equação é dada por $(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$. Desenvolvendo essa equação e a colocando em

função de y tem-se: $y = \frac{(x-x_0)^2}{4p} + y_0$ e podemos desenvolver mais ainda e deixá-la

na forma normal da equação $y = ax^2 + bx + c$, onde: $a = \frac{1}{4p}$; $b = \frac{-x_0}{2p}$; $c = \frac{x_0^2}{4p} + y_0$;

$x_0 = \frac{-b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, em que $V(x_0, y_0)$ é o vértice da parábola.

Se a parábola apresenta EIXO FOCAL HORIZONTAL sua equação é dada por $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$. Desenvolvendo essa equação e a colocando em

função de x tem-se: $x = \frac{(y-y_0)^2}{4p} + x_0$ e podemos desenvolver mais ainda e deixá-la

na forma normal da equação $x = ay^2 + by + c$, onde: $a = \frac{1}{4p}$; $b = \frac{-y_0}{2p}$; $c = \frac{y_0^2}{4p} + x_0$;

$y_0 = \frac{-b}{2a}$; $x_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, em que $V(x_0, y_0)$ é o vértice da parábola.

OBSERVAÇÃO: Quando a equação da forma $y = ax^2 + bx + c$ caracteriza uma parábola com eixo focal vertical, ela pode ser estudada como sendo de uma função do 2º grau ou função quadrática. Esta é a forma da parábola mais explorada no ensino básico, por estar justamente associada ao gráfico de uma função. Neste ponto, cabe ao professor propor atividades que conduzam por parte do aluno à distinção do conceito algébrico de função ou aplicação e de lugar geométrico representado pelas equações das cônicas. Muitas outras equações de lugares geométricos, como as das retas não verticais, também representam casos particulares de função.

5.6. Elementos Algébricos da Parábola

O eixo de simetria é a linha que passa através do foco e do vértice. Na equação de uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ de vértice $V(x_0, y_0)$, o eixo de simetria

vertical é dado por $x = x_0 = \frac{-b}{2a}$, o foco é $F(x_0, y_0 + p)$, a reta diretriz tem equação

$y = y_0 - p$, o parâmetro é $2|p|$ e o latus rectum é $4|p|$. Já na equação de uma parábola $x = ay^2 + by + c$ de vértice $V(x_0, y_0)$ o eixo de simetria horizontal é da forma $y = y_0 = \frac{-b}{2a}$ o foco é $F(x_0 + p, y_0)$ a reta diretriz tem equação $x = x_0 - p$, a distância focal é $|p|$, o parâmetro é $2|p|$ e o latus rectum é $4|p|$.

5.7. Equações Paramétricas da Parábola

As equações canônicas das parábolas se caracterizam por apresentar uma das variáveis no primeiro grau. Isso permite expressar essa variável como função da variável do segundo grau. Existem várias formas de representarmos as paramétricas de uma parábola. Vejamos duas formas simples:

SEM RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

A equação da parábola $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ corresponde à forma paramétrica dada

por: $x = t + x_0$ e $y = \frac{1}{4p}t^2 + y_0$ para isto basta que façamos $x - x_0 = t$.

Já a equação da parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ corresponde à forma paramétrica

dada por: $x = \frac{1}{4p}t^2 + x_0$ e $y = t + y_0$, para isto basta que façamos $y - y_0 = t$.

Assim, têm-se duas formas parametrizadas para a parábola:

Com EIXO DE SIMETRIA HORIZONTAL e vértice $V(x_0, y_0)$:

$$x = t + x_0 \text{ e } y = \frac{1}{4p}t^2 + y_0$$

Com EIXO DE SIMETRIA VERTICAL e vértice $V(x_0, y_0)$:

$$x = \frac{1}{4p}t^2 + x_0 \text{ e } y = t + y_0$$

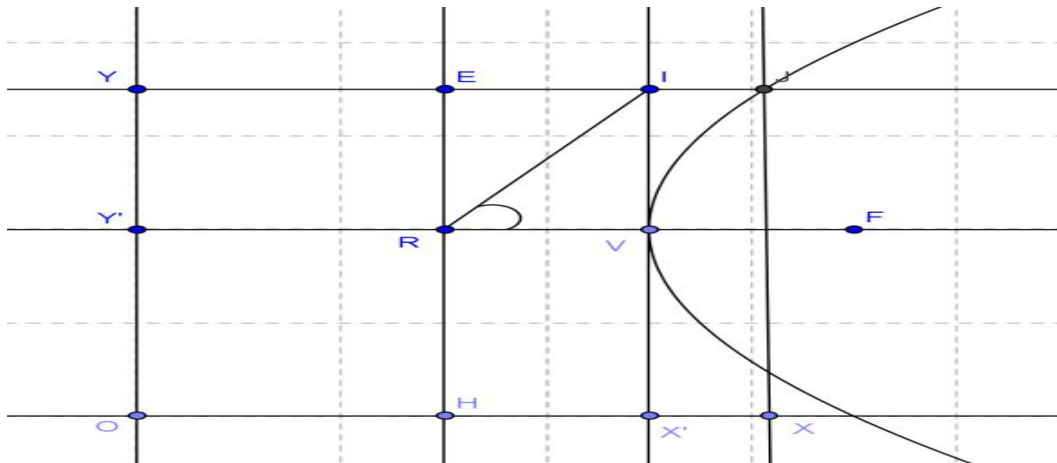
Exemplo 5.1. Parametrizar a equação da parábola dada por: $y^2 - 2x + 4y = 0$.

SOLUÇÃO: Completando quadrados tem-se que $y^2 + 4y - 2x = 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 2(x + 2)$

então, faz-se $y + 2 = t$ e obtêm-se as paramétricas desejadas: $x = \frac{t^2}{2} - 2$ e $y = t - 2$.

COM RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

Na Figura.15 abaixo, considere o ponto $J(x, y)$ da parábola e a perpendicular ao eixo Oy pelo vértice $V(x', y')$, determinando o ponto $I(x', y)$. Seja o ângulo $\angle IRV = \theta$ e $dist(RV) = p$, então do triângulo IRV tem-se que $tg\theta = \frac{y-y'}{p} \Rightarrow y = ptg\theta + y'$. E como $(y-y')^2 = (ptg\theta)^2$ e também $(y-y')^2 = 4p(x-x')$, igualando as expressões vem que: $4p(x-x') = p^2tg^2\theta \Rightarrow x = \frac{p}{4}tg^2\theta + x'$. Essas são as equações paramétricas com razões trigonométricas para uma parábola com eixo de simetria horizontal. Analogamente, podemos demonstrar as equações paramétricas de uma parábola com eixo de simetria vertical.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.15: Parábola.

Assim, têm-se as paramétricas para a parábola:

COM EIXO DE SIMETRIA HORIZONTAL e vértice $V(x_0, y_0)$:

$$x = \frac{p}{4}tg^2\theta + x_0 \text{ e } y = ptg\theta + y_0, \text{ para } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ e } \theta \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$$

COM EIXO DE SIMETRIA VERTICAL e vértice $V(x_0, y_0)$:

$$x = pcotg\theta + x_0 \text{ e } y = \frac{p}{4}cotg^2\theta + y_0 \text{ (para } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ e } \theta \neq 0; \pi)$$

Exemplo 5.2. Determine as equações reduzida, normal e as paramétricas da parábola que tem foco $F(4,3)$ e diretriz $x = 2$.

SOLUÇÃO: Se a diretriz é vertical o eixo de simetria é horizontal. O vértice é o ponto médio do segmento sobre o eixo que liga a reta diretriz ao foco, portanto, $V(3,3)$ e o parâmetro é $2p=2$, então $p=1$. Tem-se que a equação reduzida é $(y-3)^2=4(x-3)$

Desenvolvendo, tem-se a equação normal $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{21}{4}$. As paramétricas são:

$$x=\frac{1}{4}tg^2\theta+3 \text{ e } y=tg\theta+3, \text{ (para } 0\leq\theta<2\pi; \theta\neq\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\text{)}.$$

5.8. Sugestão de Atividades

- 1) Determinar a equação da parábola de concavidade voltada para cima, que passa pelo ponto $A(1,2)$ e cujo vértice é $V(0,0)$.
- 2) Obter as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $7y^2+3x=0$.
- 3) Achar a equação de uma parábola de vértice na origem, que passa pelo ponto $(-3,2)$ e cujo eixo de simetria é o eixo x .
- 4) Encontre os pontos de intersecção da parábola $y^2-4x=0$ com a reta $4x-2y-3=0$.
- 5) Obter as coordenadas do vértice e do foco da parábola $y=-2x^2+8x-8$.
- 6) Escreva a equação da parábola que tem foco $F(1,3)$ e vértice $V(2,-2)$.
- 7) Escreva a equação da parábola que tem foco $F(1,3)$ e diretriz $y=-1$.
- 8) Determine o vértice, o foco e a diretriz da parábola $(x-2)^2-4(y-8)=0$.
- 9) Qual é a equação do conjunto de pontos $P(x,y)$ que são equidistantes da reta $y=3$ e do ponto $F(0,0)$?
- 10) Obter a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y , vértice em $(1,3)$ e que passa pelo ponto $(2,4)$

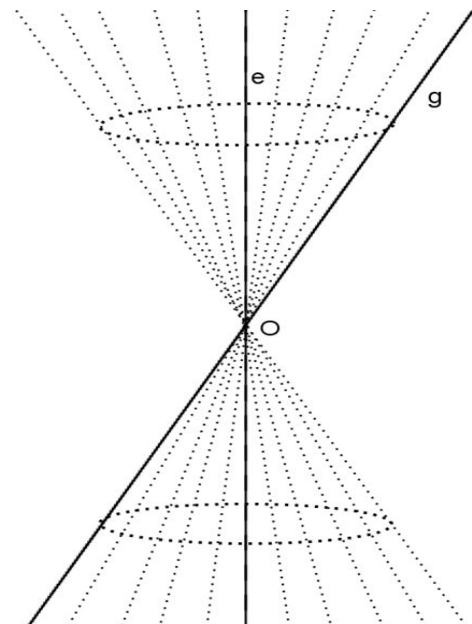
RESPOSTAS

- | | |
|---|----------------------------|
| 1) $2x^2-y=0$. | 6) $(x-2)^2=24(y+2)$. |
| 2) $F(\frac{-3}{28},0)$ e $d:28x-3=0$. | 7) $(x-1)^2=8(y-1)$. |
| 3) $3y^2+4x=0$. | 8) $V(2,8);F(2,7);d:y-9=0$ |
| 4) $(1/4,-1);(9/4,0)$. | 9) $x^2+6x-9=0$. |
| 5) $V(2,0);F(2,-1/8)$. | 10) $x^2-2x-y+4=0$ |

6. ESTUDO GERAL DAS CÔNICAS

6.1. Superfície Cônica

São dadas duas retas g e e concorrentes entre si (com um ponto O em comum) e não perpendiculares (ângulo diferente de 90°). Girando a reta g um ângulo de 360° em torno da reta e , formaremos uma superfície cônica de duas folhas. Nesse caso, a reta e constitui o eixo e a reta g se denomina de geratriz da superfície cônica. O ponto O será seu vértice.

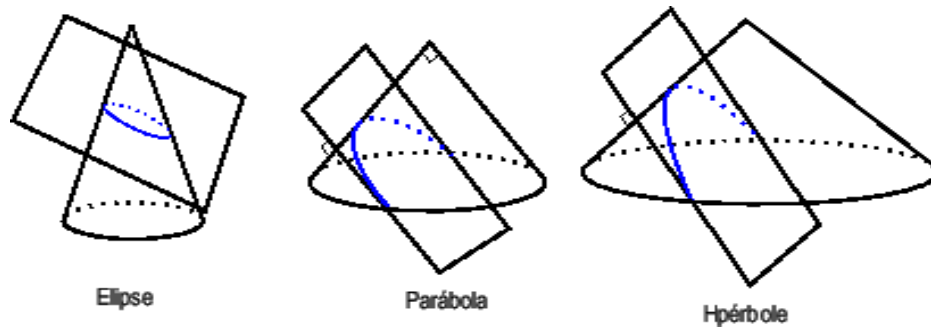


Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

Figura.16: Cone de Revolução.

6.2. Secções Cônicas

Chama-se secção cônica ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica. O professor Jacir Venturi (1949) define cônica como sendo um conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do 2° grau com duas variáveis: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. É possível gerar dois tipos específicos de secções cônicas: as CÔNICAS REGULARES e as CÔNICAS DEGENERADAS.

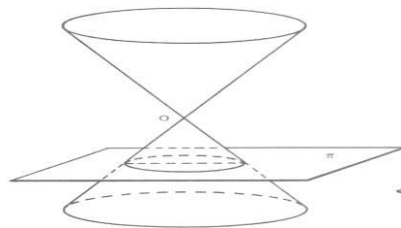


Fonte: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html>

Figura.17: Cônicas Não-Degeneradas

6.3. Cônicas Regulares

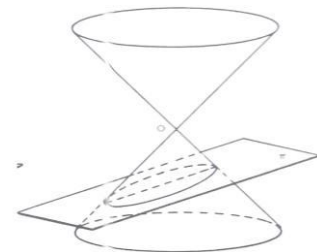
As chamadas cônicas regulares ou não degeneradas são aquelas em que um plano qualquer que intercepta a superfície cônica não passa pelo vértice. Os tipos de cônicas geradas a partir dessa interseção são quatro e variam de acordo com o ângulo formado entre o plano e o eixo do cone. De acordo com a figura formada pela intersecção, a cônica gerada recebe as seguintes denominações:



Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

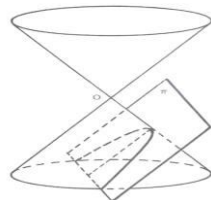
Figura.18

b) ELIPSE – quando o plano foi oblíquo ao eixo, cortando apenas uma das folhas(Figura.19);



Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

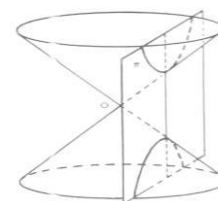
Figura.19



Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

Figura.20

d) HIPÉRBOLE – quando o plano for paralelo ao eixo da superfície. Nesse caso, cortando as duas folhas do cone (Figura.21).



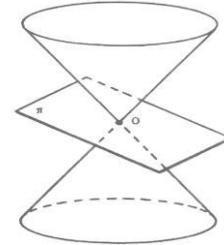
Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

Figura.21

6.4. Cônicas Degeneradas

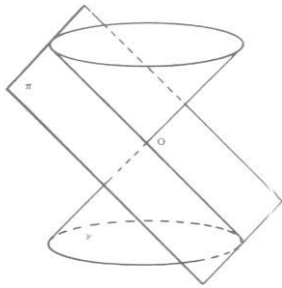
As cônicas degeneradas são as geradas quando um plano qualquer passa pelo vértice da superfície cônica. Dependendo da posição do plano, é possível gerar três tipos de cônicas degeneradas:

a) PUNTO – quando o plano tiver em comum com a superfície apenas o vértice (*Figura.22*);



Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

Figura.22

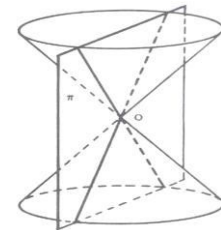


Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

Figura.23

b) UMA RETA – quando o plano tangenciar a superfície cônica em uma geratriz desta (*Figura.23*);

c) DUAS RETAS CONCORRENTES– quando o plano formar com o eixo da superfície um ângulo menor que o formado entre o eixo e a geratriz (*Figura.24*).



Fonte: Steinbruch & Winterle (2006)

Figura.24

Além destas três formas de cônicas degeneradas existe o caso da parábola que se degenera em DUAS RETAS PARALELAS. Considera-se para tanto como se o cone se convertesse em um cilindro com vértice no infinito. E há também o caso da degeneração da elipse ou da parábola em um conjunto de nenhum elemento (CONJUNTO VAZIO).

6.5. Reconhecimento das Cônicas

Através da equação completa do 2º grau com duas variáveis é possível determinar a natureza da cônica gerada pela interseção do plano. Primeiro definimos qual é o aspecto da cônica, se ela é regular ou degenerada, através da resolução do determinante Δ da chamada matriz característica da equação da cônica:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}.$$

Se $\Delta = 0$ a cônica será *DEGENERADA*.

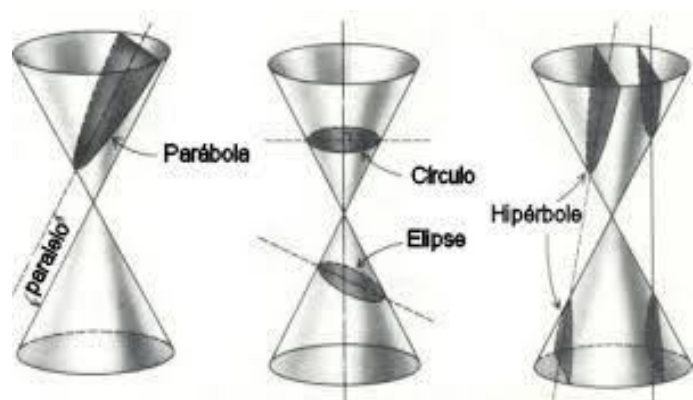
Se $\Delta \neq 0$ cônica será *REGULAR*.

Em seguida, achamos o valor do discriminante ou indicador das cônicas que é dado por $I = B^2 - 4AC$ para definir que tipo de cônica é gerada:

- i) Se $I = B^2 - 4AC = 0$: Então, trata-se de uma parábola (se regular) ou de uma reta ou da união de um par de retas paralelas (se degenerada).
- ii) Se $I = B^2 - 4AC > 0$: Então, trata-se de uma hipérbole (se regular) ou da união de um par de retas concorrentes (se degenerada).
- iii) Se $I = B^2 - 4AC < 0$: Então, trata-se de uma circunferência ou elipse (se regular e $A\Delta > 0$) ou de um ponto (se degenerada) ou mesmo de um conjunto vazio (se $A\Delta < 0$)

Dependendo do sinal do discriminante, a equação geral das cônicas é:

- a) do tipo parabólico (se $I = 0$),
- b) do tipo elíptico (se $I < 0$) ou
- c) do tipo hiperbólico (se $I > 0$).



Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/kepleis/node5.htm>

Figura.25: Tipos de Cônicas.

O Quadro-Resumo seguinte sintetiza as possíveis classificações das cônicas.

Tabela 2-Classificação das cônicas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

DISCRIMINANTE	DETERMINANTE	CLASSIFICAÇÃO	
$I = B^2 - 4AC < 0$	$\Delta = 0 \rightarrow$ Degenerada	um ponto	
	$\Delta \neq 0 \rightarrow$ Regular	$A \cdot \Delta > 0$	<i>conjunto vazio</i>
		$A \cdot \Delta < 0$	ELIPSE
$I = B^2 - 4AC = 0$	$\Delta = 0 \rightarrow$ Degenerada	<i>uma reta, conjunto vazio ou um par de retas paralelas</i>	
	$\Delta \neq 0 \rightarrow$ Regular	PARÁBOLA	
$I = B^2 - 4AC > 0$	$\Delta = 0 \rightarrow$ Degenerada	<i>um par de retas concorrentes</i>	
	$\Delta \neq 0 \rightarrow$ Regular	HIPÉRBOLE	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Desenvolvendo o determinante Δ e simplificando sua expressão por dois, já que o que importa é somente o estudo do seu sinal, temos a expressão algébrica dada por

$$\Delta = 4ACF + BDE - B^2F - D^2C - E^2A.$$

Exemplo 6.1. Dada a equação completa do 2º grau: $x^2 + 2xy - 3y^2 + 4x - 3y + 1 = 0$, identifique o tipo e aspecto da cônica.

SOLUÇÃO: Comparando a equação dada com a forma geral da equação das cônicas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ temos que os coeficientes são $A = 1; B = 2; C = -3; D = 4; E = -3; F = 1$. Determinamos o valor do discriminante: $I = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$. Para sabermos se a cônica é regular ou degenerada, calculamos o determinante Δ associado à equação:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \text{ Então: } \Delta = 2 \cdot (-6) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot (-3) = -2.$$

E como o $\Delta = -2 \neq 0$, a cônica é regular e sabendo que o discriminante é um número positivo ($I > 0$), a cônica é uma hipérbole.

NOTA-1: Dada uma equação geral do 2º grau temos duas formas para reconhecermos a natureza da cônica (seu tipo e aspecto): ou se calcula o seu determinante e discriminante, como feito nos exemplos, ou se converte a equação geral para sua forma canônica ou reduzida, conforme faremos oportunamente.

NOTA-2: Pode-se demonstrar, de forma não muito trivial, por que as duas relações que servem para determinar o discriminante ($I = B^2 - 4AC$) e o determinante Δ da

matriz característica da equação geral com o intuito de classificar a natureza da cônica (tipo e aspecto, respectivamente) funcionam sempre, mas isso envolve conhecimentos de Álgebra Linear como noções de autovalores, o que não faz parte do nosso propósito aqui. Deixamos então tais demonstrações como atividade de pesquisa para o leitor.

6.6. Convertendo Equações

Dado um sistema de coordenadas cartesianas Oxy , chama-se CÔNICA ao conjunto de todos os pontos P , com coordenadas (x, y) que satisfazem a equação quadrática: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sendo que os coeficientes A, B, C, D, E, F são números reais e A, B, C não podem ser simultaneamente nulos (pelo menos um deve ser diferente de zero). Existem NOVE casos a considerar, exemplificados a seguir, que esgotam todas as possibilidades que satisfazem a equação quadrática supracitada:

i) *UM CONJUNTO VAZIO*: \emptyset

Exemplo: $x^2 + y^2 + 1 = 0$, para o qual não existem x e y reais, pois é fato que $x^2 + y^2 = -1$ não se satisfaz para $\forall x \in \mathbb{R}$. Os coeficientes desta equação são: $A = 1; B = D = E = 0; C = 1; F = 1$.

ii) *UM PONTO*: A origem $O(0, 0)$

Exemplo: $x^2 + y^2 = 0$, que só é satisfeita com as coordenadas da origem do plano cartesiano Oxy . Os coeficientes desta equação são: $A = 1; C = 1; B = D = E = F = 0$.

iii) *UMA RETA*: $ax + by + c = 0$

Exemplo: $x + y = 0$, que pode ser colocada na forma $((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0)^2$. Os coeficientes desta equação são: $A = C = 1; B = 2; D = E = F = 0$.

vi) *UNIÃO DE 2 RETAS PARALELAS*: $ax + by + c = 0$ e $ax + by + d = 0$, que podem ser colocadas na forma de produto: $(ax + by + c)(ax + by + d) = 0$

Exemplo: $(x + y)(x + y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$.

Os coeficientes desta equação são: $A = C = 1; B = 2; D = E = 1; F = 0$.

v) *UNIÃO DE 2 RETAS CONCORRENTES*: $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$, que podem ser colocadas na forma de produto: $(ax + by + c)(dx + ey + f) = 0$

Exemplo: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$,

Os coeficientes desta equação são: $A = 1; C = -1; B = D = E = F = 0$.

vi) **CIRCUNFERÊNCIA:**

Exemplo: $x^2 + y^2 - 10 = 0$,

Os coeficientes desta equação são: $A = C = 1; B = D = E = 0; F = -10$

vii) **ELIPSE:**

Exemplo: $x^2 + 2y^2 - 10 = 0$,

Os coeficientes desta equação são: $A = 1; C = 2; B = D = E = 0; F = -10$.

viii) **PARÁBOLA:**

Exemplo: $x - y^2 = 0$,

Os coeficientes desta equação são: $C = -1; D = 1; A = B = E = F = 0$

ix) **HIPÉRBOLE:**

Exemplo: $x^2 - y^2 - 1 = 0$,

Os coeficientes desta equação são: $A = 1; C = -1; B = D = E = 0; F = -1$.

Sendo dada uma equação geral do 2º grau de uma cônica ($Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$) poderemos facilmente obter a equação canônica ou reduzida equivalente. Analisando melhor esta equação observamos que ela possui três termos de 2º grau ($Ax^2; Bxy; Cy^2$), dois termos de 1º grau ($Dx; Ey$) e um termo independente (F). Para encontrarmos a equação reduzida ou canônica da cônica devemos observar a presença ou não do termo misto xy na equação. Temos, então, dois casos gerais a considerar:

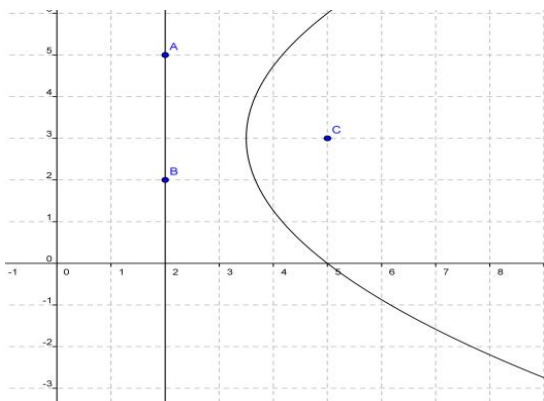
1ºCASO: A equação não possui o termo misto xy , ou seja, $B = 0$. A equação geral se reduz à $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Neste caso, basta usarmos a técnica de completar quadrados e teremos uma equação canônica de um dos três tipos: elíptico, parabólico ou hiperbólico. Geometricamente, o eixo focal da cônica será paralelo a um dos eixos coordenados. Efetuando uma translação de eixos encontramos seu centro ou o seu vértice, quando a cônica não for degenerada.

2ºCASO: A equação possui o termo misto xy , ou seja, o termo $B \neq 0$: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Neste caso o eixo focal da cônica será oblíquo aos eixos coordenados. Podemos escrever uma equação equivalente desprovida do termo xy fazendo uma rotação de eixos por certo ângulo θ , escolhido

convenientemente, usando as equações que obteremos logo a seguir. E em seguida, se necessário, com uma translação de eixos encontramos seu centro ou o seu vértice, quando a cônica não for degenerada.

6.7. Construções no Geogebra

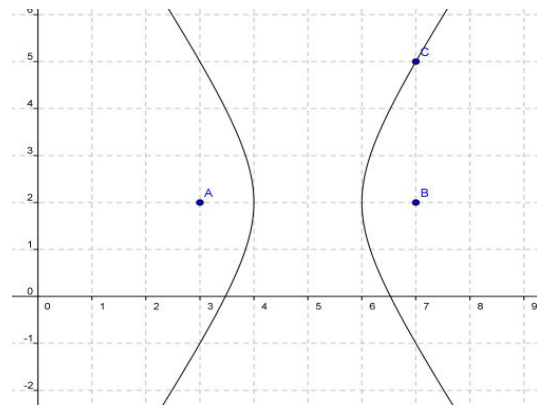
O Geogebra, escrito em Java, é uma ferramenta dinâmica de Geometria e Álgebra. A interface do Geogebra compreende duas janelas interconectadas: uma algébrica e outra geométrica. Estando na janela geométrica, é possível se fazer construções usando diversas ferramentas, tais como vetores, linhas, pontos, secções cônicas, polígonos, segmentos ou funções de naturezas diversas que podem ser modificados dinamicamente. É possível a qualquer momento se inserir ou modificar elementos, equações ou gravuras através da linha de comando ou diretamente na tela, como queira. Automaticamente as operações em uma janela são transformadas para o formato da outra. Por exemplo: criando-se uma equação na janela de álgebra, instantaneamente é criada a sua curva correspondente na janela geométrica e vice-versa. O Geogebra é um software gratuito de plataforma múltipla para todos os níveis de ensino. Ele combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único sistema. É um poderoso recurso pedagógico que pode ser utilizado nas aulas de matemática e deve estar disponível em qualquer bom laboratório escolar de informática. Para facilitar a compreensão do formato das figuras cônicas, pode-se solicitar aos alunos que estabeleçam construções com as equações das mesmas no Geogebra, como ilustramos a seguir:



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.26: Parábola com eixo horizontal

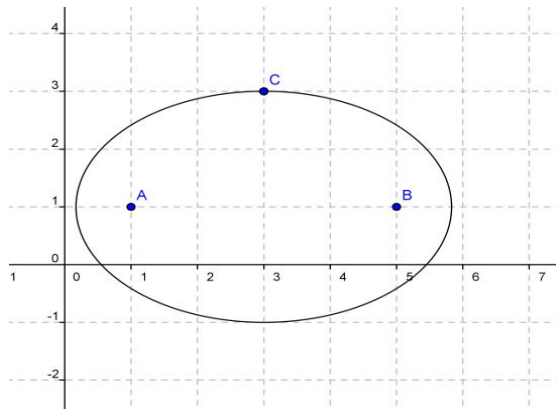
de equação: $y^2 - 6x - 6y = -30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

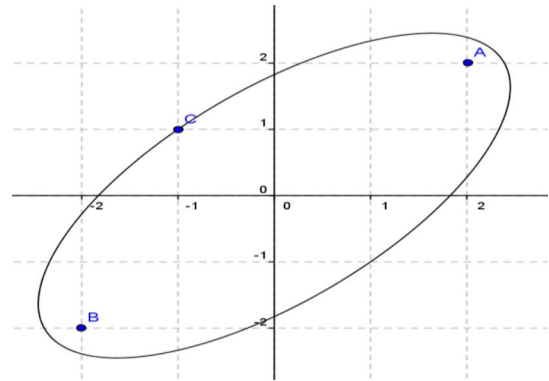
Figura.27: Hipérbole com eixo horizontal

de equação: $-30x^2 + y^2 + 30x - 4y = 68$



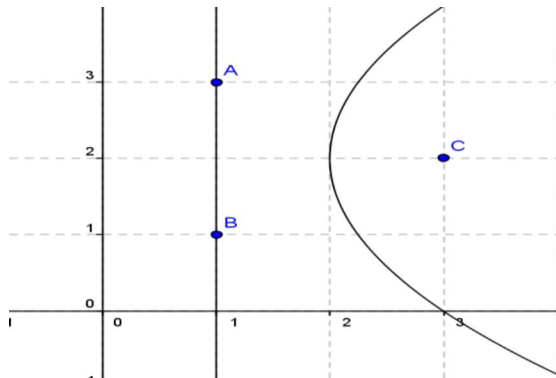
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.28: Elipse com eixo horizontal de equação $x^2 + 2y^2 - 6x - 4y = -3$



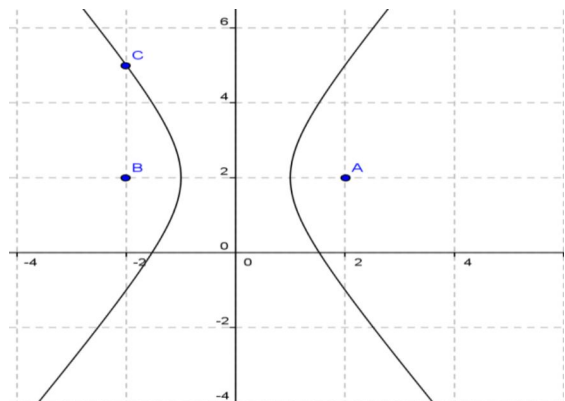
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura.29: Elipse oblíqua de equação $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 103$



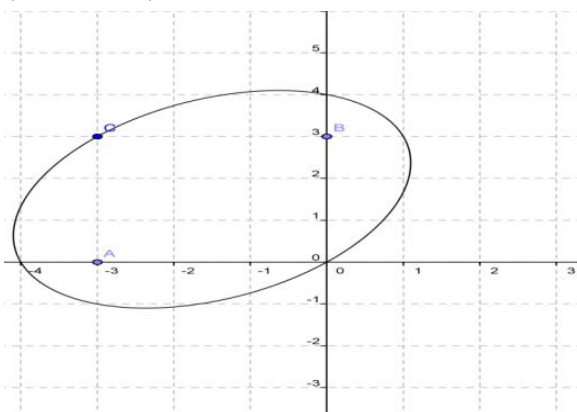
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura.30: Parábola dada pela equação $y^2 - 4x - 4y = -12$



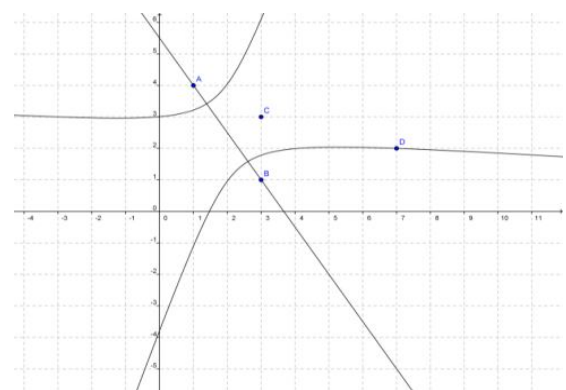
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.31: Hipérbole de eixo horizontal de equação $-3x^2 + y^2 - 4y = -7$



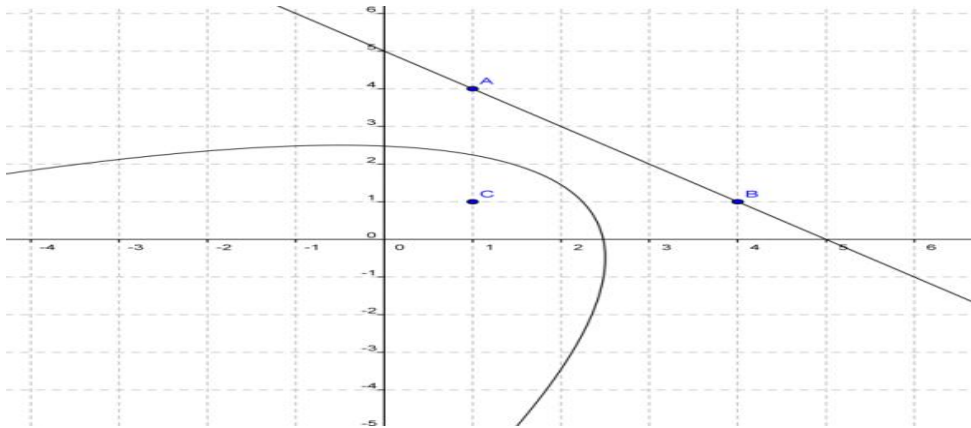
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.32: Elipse oblíqua de equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 12x - 12y = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.33: Hipérbole oblíqua de equação $3,39x^2 + 48xy - 16,61y^2 - 133,54x - 12,93y = -189,22$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura.34: Parábola oblíqua de equação: $x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 6y - 21 = 0$

Eis que surge um questionamento: quando e em que ordem deve-se aplicar uma rotação e/ou uma translação? O professor Jacir Venturi (1949) sugere “com o intuito de tornar menos laborioso os cálculos” que, na prática, pode-se seguir a seguinte ordem das transformações, dependendo do valor do discriminante da equação:

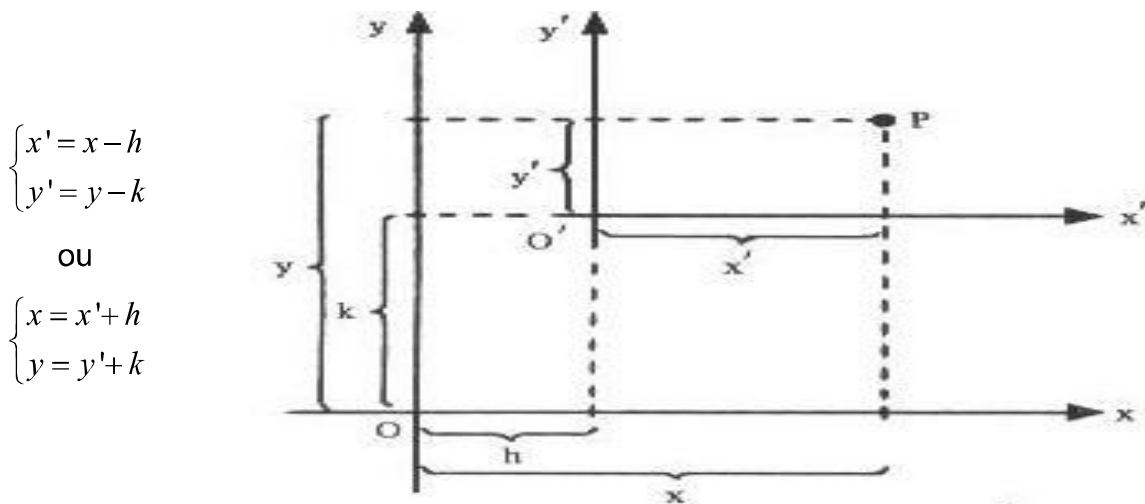
Se $B^2 - 4AC \neq 0$ (elipse ou hipérbole) \rightarrow 1º translação \rightarrow 2º rotação.

Se $B^2 - 4AC = 0$ (parábola) \rightarrow 1º rotação \rightarrow 2º translação.

Como veremos, a ROTAÇÃO tem por objetivo eliminar o termo B_{xy} e não afeta o termo independente F da equação. Já a TRANSLAÇÃO tem por objetivo excluir os termos de 1º grau ($D_x; E_y$), e não afeta os termos de 2º grau ($Ax^2; B_{xy}; Cy^2$). Também é bom ressaltar que o grau de uma equação não muda quando se faz a translação e/ou a rotação de eixos coordenados.

6.8. Translação de Eixos

A Figura.35 mostra as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ em dois sistemas de coordenadas: o sistema original Oxy e o sistema $O'x'y'$ obtido após uma translação. Se a nova origem é o ponto $O'(h, k)$ é fácil deduzir que as coordenadas x' e y' do ponto P , no novo sistema de coordenadas, são determinadas pelo sistema:



Fonte: Steinbruch & Winterle, (2006)

Figura.35: Translação de Eixos.

Exemplo 6.2. Identifique a cônica de equação $9x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 37 = 0$.

SOLUÇÃO: Completando quadrados, a equação se escreve

$$\begin{aligned}
 9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 8y) + 37 &= 0 \Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) - 9 - 64 + 37 = 0 \\
 \Rightarrow 9(x-1)^2 + 4(y+4)^2 &= 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1
 \end{aligned}$$

Assim obtemos a equação canônica de uma elipse com centro no ponto $O'(1, -4)$ e parâmetros $a = 3; b = 2; c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ e focos $F'(0, \pm\sqrt{5})$ e a equação pode ser escrita no sistema $x'y'$ como $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$ ou em sua forma geral que é $9x'^2 + 4y'^2 - 36 = 0$.

Note que a translação não afeta os termos de 2º grau e apenas elimina os termos de 1º grau. Podemos ainda constatar que após uma translação para um sistema com nova origem $O'(x', y')$, o novo termo independente F' pode ser obtido na equação inicial como sendo $F' = Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F$. Assim, para transladar a equação $9x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 37 = 0$ para o sistema de eixos com origem no ponto $O'(1, -4)$, excluimos os termos de 1º grau $(-18x + 32y + 37)$ e fazendo $F' = 9(1)^2 + 4(-4)^2 - 18(1) + 32(-4) + 37$ obtemos $F' = -36$, daí é só escrever: $9x'^2 + 4y'^2 - 36 = 0$.

Exemplo 6.3. Na equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$, os termos do 1º grau são eliminados quando feita uma translação para a nova origem no ponto $O'(1, -1)$.

Determine a nova equação em relação ao novo sistema de coordenadas.

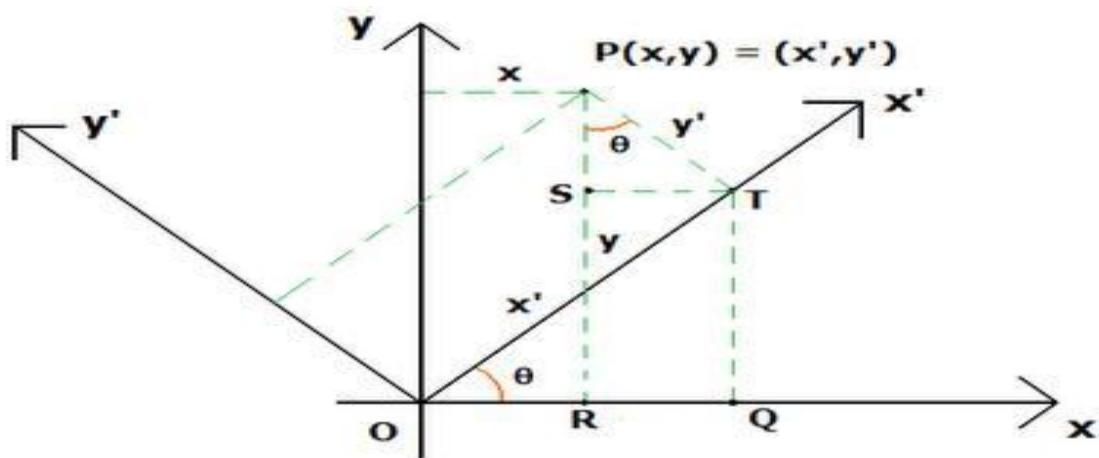
SOLUÇÃO: Em relação ao sistema $x'y'$ a nova equação terá a forma

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + F' = 0. \text{ Mas } F' = 5(1)^2 + 6(1)(-1) + 5(-1)^2 - 4(1) + 4(-1) + 8 = 4.$$

Resposta: $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + 4 = 0$.

6.9. Rotação de Eixos

A figura ao lado mostra as coordenadas x' e y' de um ponto $P(x, y)$ após uma rotação de eixos no sentido positivo (anti-horário) do sistema de coordenadas xy . Representamos por θ o ângulo de rotação e, observando a figura, em que os triângulos TOQ e TPS são semelhantes, pois existem dois pares de lados perpendiculares entre si, vamos determinar as relações entre as coordenadas do ponto P nos dois sistemas:



Fonte: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br>(2012)

Figura.36. Rotação de Eixos Coordenados.

$$\begin{cases} x = OR = OQ - RQ \\ y = RP = RS + SP \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \\ y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\ y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

Podemos escrever esses resultados numa tabela vetorial mnemônica ou na forma matricial, como se segue:

Tabela 3-Transformação vetorial.

·	x'	y'
x	$\cos \theta$	$-\text{sen} \theta$
y	$\text{sen} \theta$	$\cos \theta$

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$M_1 : (x', y') = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} (x, y)$$

$$M_2 : (x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} (x', y')$$

A matriz de rotação em M_1 transforma as coordenadas de qualquer $P(x, y)$ do sistema xy para o sistema $x'y'$. Em contrapartida, a matriz de rotação em M_2 faz o processo contrário, transformando as coordenadas de qualquer ponto $P(x', y')$ do sistema $x'y'$ para o sistema xy .

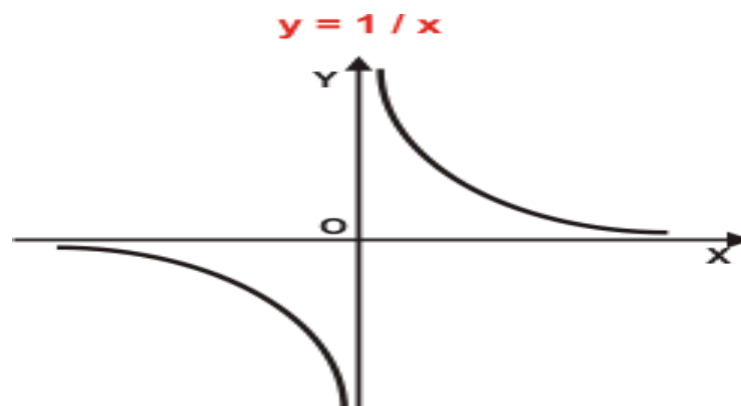
Exemplo 6.4. Encontrar a equação canônica da hipérbole equilátera $xy = 1$.

SOLUÇÃO: Usando ângulo de rotação de $45^\circ (\pi/2)$ e as equações de mudança de

coordenadas $\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \text{sen} \theta \\ y = x' \text{sen} \theta + y' \cos \theta \end{cases}$ e encontramos as expressões $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{cases}$

Então temos que $(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y') \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y') = 1$.

Resolvendo os produtos e as somas e simplificando, obtemos $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$, que representa a equação canônica da hipérbole equilátera esboçada a seguir.



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsm/fun0203.htm

Figura.37: Esboço da Hipérbole Equilátera.

6.10. Ângulo de Rotação

Como saber o ângulo adequado numa rotação de eixos coordenados de modo a eliminar o termo Bxy da equação geral das cónicas? Vejamos: Tomando a equação geral das cónicas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e as equações de rotação já estabelecidas $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ e $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ e levando os valores de x e y na equação geral, obtemos:

$$A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + \\ + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0$$

Resolvendo os produtos e as somas, obtemos as expressões:

$$A(x'^2 \cos^2 \theta - 2x' y' \cos \theta \sin \theta + y'^2 \sin^2 \theta) + \\ + B(x'^2 \sin \theta \cos \theta + x' y' \cos^2 \theta - x' y' \sin^2 \theta - y'^2 \sin \theta \cos \theta) + \\ + C(x'^2 \sin^2 \theta + 2x' y' \sin \theta \cos \theta + y'^2 \cos^2 \theta) + \\ + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0$$

Ordenando os termos e deixando a equação em função dos termos quadráticos,

$$\text{tem-se: } (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta)x'^2 + \\ + [-2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta]x' y' + \\ + (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta)y'^2 + R(\theta, x', y') = 0$$

Onde o Resto indicado por $R(\theta, x', y')$ não envolve termos de grau 2. Para eliminarmos o termo misto $x' y'$ é suficiente considerarmos seu coeficiente igual a

zero. Assim, tem-se que: $-2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta = 0$

$$\Rightarrow -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta = 0 \Rightarrow C \sin 2\theta - A \sin 2\theta = -B \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow (C - A) \sin 2\theta = -B \cos 2\theta \Rightarrow (C - A) \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -B \Rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

que nos dá o ângulo procurado para $A \neq C$.

Caso tenhamos $A = C$, então a equação

$$-2A \cos \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta = 0 \text{ se reduz para}$$

$-2A\sin\theta\cos\theta + 2C\sin\theta\cos\theta = 0$, donde obtemos $\operatorname{tg}2\theta = 1$ e daí $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianos.

Consideremos sempre o valor do ângulo θ agudo ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$).

Exemplo 6.5. Achar o ângulo que elimina o termo misto xy na equação da cônica $3x^2 - 4xy - 1 = 0$, as fórmulas de rotação e a equação reduzida.

SOLUÇÃO: $\operatorname{tg}2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-4}{3-0} = \frac{-4}{3}$. Mas $\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{-4}{3}$. Efetuando-se temos

$$2\operatorname{tg}^2\theta - 3\operatorname{tg}\theta - 2 = 0, \text{ cujas raízes são } \operatorname{tg}'\theta = 2; \operatorname{tg}''\theta = \frac{-1}{2}.$$

Sendo o ângulo θ agudo, devemos considerar somente $\operatorname{tg}\theta = 2$ e, portanto, o ângulo procurado é $\theta = \operatorname{arctg}2$ que numa tábua trigonométrica indica aproximadamente 63° . Para determinarmos as fórmulas de rotação precisamos encontrar $\operatorname{sen}\theta; \cos\theta$. Como $\operatorname{tg}\theta = 2$, devemos usar as identidades trigonométricas convenientes:

$$\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta = 1 + 2^2 = 5 \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{5} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

As fórmulas de rotação são $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$ e $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$

$$\text{Ficarão assim: } x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}} \text{ e } y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$$

Para obtermos a equação no novo sistema $Ox'y'$, após a rotação de eixos de amplitude θ , devemos substituir as fórmulas de rotação na equação dada

$$3x^2 - 4xy - 1 = 0, \text{ obtendo } 3\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 0. \text{ Simplificando,}$$

obtemos $4y'^2 - x'^2 - 1 = 0$, que representa uma hipérbole referida ao sistema $Ox'y'$.

Vale a pena perceber que a equação dada representa a mesma hipérbole, porém referente ao sistema Oxy . Os eixos coordenados mudam de posição, mas a figura da cônica no plano fica inalterada.

6.11. Tangente a uma Cônica por um Ponto Dado

Dado um ponto $P_0(x_0, y_0)$ PERTENCENTE À UMA CÔNICA qualquer e a equação desta cônica, determinamos a equação da reta tangente pelo referido ponto fazendo $y - y_0 = m(x - x_0)$ ou $y = y_0 + m(x - x_0)$ e substituindo na equação da cônica. Vamos aqui considerar a cônica como sendo uma parábola $y^2 = 4px$. Então, fazendo a substituição teremos $[y_0 + m(x - x_0)]^2 = 4px$. Desenvolvendo, obtemos uma equação do 2º grau em x:

$$y_0^2 + 2m(x - x_0)y_0 + m^2(x - x_0)^2 - 4px = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2x^2 + (2my_0 - 2m^2x_0 - 4p)x + y_0^2 - 2my_0x_0 + m^2x_0^2 = 0.$$

Para obtermos a equação da tangente devemos impor a condição $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

$$\text{Ficamos, então, com: } (2my_0 - 2m^2x_0 - 4p)^2 - 4m^2(y_0^2 - 2my_0x_0 + m^2x_0^2) = 0,$$

$$\Leftrightarrow 4y_0^2m^2 + 4x_0^2m^4 + 16p^2 - 8y_0x_0m^3 - 16y_0mp + 16x_0m^2p - 4y_0^2m^2 + 8y_0x_0m^3 - 4x_0^2m^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow +16p^2 - 16y_0mp + 16x_0m^2p = 0 \Leftrightarrow x_0m^2 - y_0m + p = 0.$$

Aplicando a fórmula resolutiva de Bháskara nessa equação do 2º grau em m, vem

que: $m = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4px_0}}{2x_0}$. Como o ponto $P_0(x_0, y_0)$ pertence à parábola, temos que

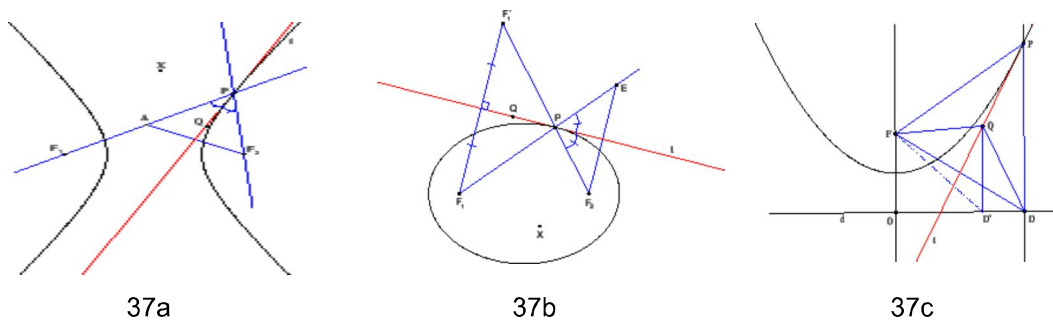
$$y_0^2 = 4px_0, \text{ então: } m = \frac{y_0 \pm \sqrt{4px_0 - 4px_0}}{2x_0} \Leftrightarrow m = \frac{y_0}{2x_0}.$$

Se $y_0^2 = 4px_0$, então $\frac{y_0}{2x_0} = \frac{2p}{y_0} = m$, logo na equação da tangente teremos que

$$y = y_0 + \frac{2p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y_0y = y_0^2 + 2px - 2px_0 \Leftrightarrow y_0y = 4px_0 + 2px - 2px_0 \Leftrightarrow$$

$$y_0y = 2px + 2px_0 \Leftrightarrow y_0y = 2p(x + x_0).$$

Concluimos com isso que a tangente à parábola $y^2 = 4px$ em seu ponto $P_0(x_0, y_0)$ tem equação $y_0y = 2p(x + x_0)$. De modo análogo, podemos obter as equações das tangentes às demais cônicas regulares.



Fonte: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node15.html>

Figura.37: Cônicas com Reta Tangente.

Adotemos uma REGRA PRÁTICA para determinarmos a equação da reta tangente no ponto $P_0(x_0, y_0)$ de uma cônica regular qualquer. Basta substituímos a variável quadrática x^2 por x_0x ; a variável quadrática y^2 por y_0y ; a variável linear x por $\frac{x_0+x}{2}$; a variável linear y por $\frac{y_0+y}{2}$; e a variável mista xy por $\frac{x_0y+y_0x}{2}$.

Exemplo 6.6. Encontre a equação da reta tangente à hipérbole $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 6y - 11 = 0$ no ponto $(2, 1)$.

SOLUÇÃO: Notemos que o ponto dado pertence à cônica. Fazemos, então, as devidas substituições, considerando $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ e simplificamos a expressão

$$\text{obtida: } x_0x - 2\left(\frac{x_0y + y_0x}{2}\right) + y_0y + 2\left(\frac{x_0+x}{2}\right) + 6\left(\frac{y_0+y}{2}\right) - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x - 2\left(\frac{2y + 1x}{2}\right) + 1y + 2\left(\frac{2+x}{2}\right) + 6\left(\frac{1+y}{2}\right) - 11 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$$

SE O PONTO $P_0(x_0, y_0)$ NÃO PERTENCER À CÔNICA dada, então, devemos levar a equação da tangente procurada $y = y_0 + m(x - x_0)$ na equação da cônica. Fazendo isso, recaímos numa equação do 2º grau em x e nesta, impomos a condição de que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Obtemos assim, o(s) coeficiente(s) angular(es) m da equação da reta tangente. Os pontos de contato P_1 e P_2 das tangentes à cônica determinam a reta P_1P_2 , denominada RETA POLAR do ponto $P_0(x_0, y_0)$ em relação à cônica.

Exemplo 6.7. Dada a equação $9x^2 - y^2 = 36$ de uma hipérbole e um ponto exterior $P_0(0, 6)$, calcular as equações das retas tangentes à hipérbole que passam por esse ponto e a equação da reta polar do ponto em relação à hipérbole.

SOLUÇÃO: Passando no ponto dado, a equação da tangente será $y = 6 + mx$.
Substituindo na equação da hipérbole:

$$9x^2 - (6 + mx)^2 = 36, \text{ obtemos } 9x^2 - (36 + 12mx + m^2x^2) - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 36 - 12mx - m^2x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (9 - m^2)x^2 - 12mx - 72 = 0.$$

$$\text{Impondo } \Delta = b^2 - 4ac = 0, \text{ vem que } (-12m)^2 - 4(9 - m^2)(-72) = 0$$

$$\Leftrightarrow 144m^2 + 2592 - 288m^2 = 0 \Leftrightarrow 144m^2 = 2592 \Leftrightarrow m^2 = 18 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{2}$$

As retas tangentes têm equações $y = \pm 3\sqrt{2}x + 6$. Os pontos de contatos das tangentes com as hipérbolares são determinados pelo sistema
$$\begin{cases} y = \pm 3\sqrt{2}x + 6 \\ 9x^2 - y^2 = 36 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos os pontos $(\pm 2\sqrt{2}, -6)$. Para determinar a reta que passa por esses pontos, podemos usar o cálculo por determinante de pontos

$$\text{alinhados } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2\sqrt{2} & -6 & 1 \\ -2\sqrt{2} & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e obteremos a equação } y + 6 = 0.$$

6.12. Equação Geral sem Termo Misto

Dada uma equação geral do 2º grau sem termo misto $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, podemos reduzi-la a sua forma canônica, usando a técnica de completar quadrados e deixá-la com a seguinte configuração (verifique):

$$\frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{\frac{C}{A}} + \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{\frac{A}{C}} = \frac{-4ACF + CD^2 + AE^2}{4A^2C^2} = \frac{M}{4A^2C^2}$$

(01). Considerando $M = -4ACF + CD^2 + AE^2$ e $A \neq C$ não nulos, teremos que:

A) Se A e C têm mesmo sinal ($A \cdot C > 0$) e $M = 0$, a equação representa um ponto de coordenadas $(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C})$; **B)** Se A, C e M têm mesmo sinal, a equação representa uma elipse; **C)** Se A e C têm mesmo sinal e M sinal contrário, a equação representa um conjunto vazio; **D)** Se A e C têm sinais contrários ($A \cdot C < 0$) e $M \neq 0$, a equação representa uma hipérbole;. **E)** Se A e C têm sinais contrários e $M = 0$, a equação representa um par de retas concorrentes no ponto $(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C})$.

(02). Agora se $A=C \neq 0$, a equação fica reduzida a

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \text{ e nesse caso será uma circunferência se}$$

$D^2 + E^2 > 4AF$, um ponto se $D^2 + E^2 = 4AF$ ou um conjunto vazio se $D^2 + E^2 < 4AF$.

Nos casos em que a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa alguma cônica degenerada ou não do tipo parabólico, temos que A ou C é nulo (mas não ambos).

(03). Se $A=0$ e $C \neq 0$, temos que **A)** Se $D \neq 0$, a equação $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo OX; **B)** Se $D=0$, a equação

se reduz a $Cy^2 + Ey + F = 0$ e representa um par de retas paralelas ao eixo OX se $E^2 - 4CF > 0$; **C)** Se $D=0$ e $E^2 - 4CF = 0$ representa uma reta paralela ao eixo OX; **D)**

Se $D=0$ e $E^2 - 4CF < 0$ representa um conjunto vazio.

(04). Se $A \neq 0$ e $C=0$, temos que **A)** Se $E \neq 0$, a equação $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo OY; **B)** Se $E=0$, a equação se reduz a

$Ax^2 + Dx + F = 0$ e representa um par de retas paralelas ao eixo OY se $D^2 - 4AF > 0$;

C) Se $E=0$ e $D^2 - 4AF = 0$ representa uma reta paralela ao eixo OY; **D)** Se $E=0$ e $D^2 - 4AF < 0$ representa um conjunto vazio.

6.13. Sugestão de Atividades

1) Identifique o tipo e o aspecto das cônicas em cada item seguinte:

a) Se $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

c) Se $3x^2 + 18xy + 3y^2 + 2x - 24 = 0$.

b) Se $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$.

2) Escreva a equação da cônica na forma reduzida e a identifique:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$.

d) $2x^2 + 3y^2 - 42x + 12y = 20$.

b) $y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$.

e) $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 8$.

c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$.

3) Por meio de uma rotação, identifique o tipo da cônica:

a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x = 32$.

d) $xy + x - 2y + 3 = 0$.

b) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y = 12$.

e) $xy = 1$.

c) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 6$.

4) Identifique que lugar geométrico é representado pela equação:

a) $x^2 + y^2 = 9$.

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

g) $x^2 + y^2 = 0$.

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

e) $y^2 - x = 0$.

h) $x^2 - 4 = 0$.

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

f) $x^2 - y^2 = 0$.

i) $x^2 + 2y^2 = -1$.

5) Identificar a cônica, encontrar o centro e determinar a equação canônica:

$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

6) Identificar a cônica, encontrar o centro, determinar a equação canônica e os pontos de intersecção com os eixos coordenados: $x^2 + 4y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$.

7) Identificar a cônica, encontrar o centro, determinar a equação canônica e o ângulo de rotação que elimina o termo xy em $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3} - 4y - 12 = 0$.

8) Identificar os pontos de intersecção da cônica $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3} - 4y - 12 = 0$ com os eixos coordenados.

9) Identificar as cônicas degeneradas e suas equações resultantes:

a) $2x^2 + xy - y^2 + 7x + y + 6 = 0$.

d) $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y + 2 = 0$.

b) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 10x - 6y - 1 = 0$.

e) $15x^2 + 20xy + 7x - 4y - 2 = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 2x = 10y + 26 = 0$.

10) Verifique se a equação da cônica corresponde ou não a um ponto no plano:

$5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 4y + 20 = 0$.

RESPOSTAS

1) a) $\Delta = 8$, cônica não degenerada. $B^2 - 4AC = 0$. Parábola.

b) $\Delta = -928$, cônica não degenerada. $B^2 - 4AC = -64 < 0$. Elipse.

c) $\Delta = 13800$, cônica não degenerada. $B^2 - 4AC = 288 > 0$. Hipérbole.

2) a) $x'^2 + y'^2 = 25$ (circunferência);

b) $y'^2 = 4x'$ (parábola);

d) $2x'^2 + 3y'^2 = 34$ (elipse);

c) $3x'^2 - 4y'^2 = 12$ (hipérbole);

e) $2x'^2 + 4y'^2 = 33$ (elipse);

3) a) Hipérbole;

b) Elipse;

d) Hipérbole;

c) Elipse;

e) Hipérbole.

4) a) circunferência de raio=3;

b) elipse, onde $a = 3; b = 2$;

c) hipérbole, onde $a = 3; b = 2$;

- d) reta;
- e) parábola com concavidade para a direita e eixo focal sobre Ox;
- f) par de retas $(x-y)(x+y)=0$;
- 5) Elipse; $O'(1,2); \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$.
- 6) Hipérbole. $O'(-2,3/4); \frac{x'^2}{3/4} - \frac{y'^2}{3/16} = 1$.
- Pontos sobre Ox: $(-2-\sqrt{2},0); (-2+\sqrt{2},0)$;
- Pontos sobre Oy: $(0, \frac{3+\sqrt{13}}{4}); (0, \frac{3-\sqrt{13}}{4})$.
- 7) Elipse. $O'(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}); \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1; \theta = 30^\circ$.
- 8) Pontos sobre Ox: $(\frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{7}, 0); (\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{7}, 0)$;
- Pontos sobre Oy: $(0, \frac{2+4\sqrt{10}}{13}); (0, \frac{2-4\sqrt{10}}{13})$.
- 9) a) um par de retas concorrentes: $x+y+2=0; 2x-y+3=0$;
- b) uma reta: $5x-3y=-1$; c) um ponto $P(-1,-5)$.
- d) duas retas paralelas: $2x+y+1=0; 2x+y+2=0$;
- e) duas retas concorrentes: $5x-1=0; 3x+4y+2=0$.
- 10) Sim. Ponto $P(4,6)$.

7. EQUAÇÃO CARTESIANA UNIFICADA DAS CÔNICAS

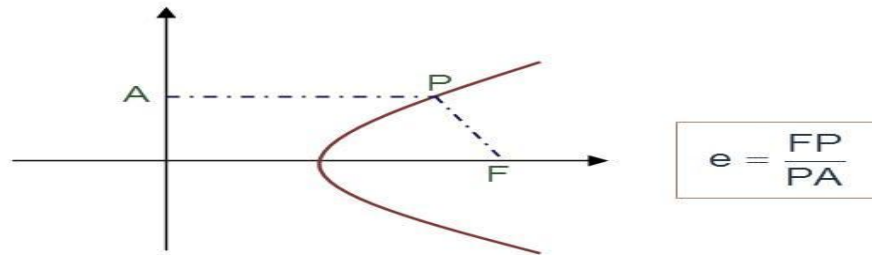
Voltamos a definir as cônicas regulares, com exceção da circunferência, de forma generalizada, usando apenas uma relação simples, como se segue:

7.1. Definição Generalizada de Cônica:

Uma cônica é o conjunto de todos os pontos P num plano, de tal modo que a distância de P a um ponto fixo F (chamado foco) esteja numa razão constante e (chamada excentricidade) com a distância de P a uma reta fixa d (chamada

diretriz), que não contenha o ponto fixo. Sendo A o ponto da reta d mais próximo de

P , podemos escrever: $\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{AP}|} = e$ ou $|\overline{FP}| = e|\overline{AP}|$.



Fonte: <http://www.portalescolar.net>(2011)

Figura.38: Definição Generalizada de Cônica.

Nesta definição de cônica, foi usada a tríade (*foco, diretriz, excentricidade*), diferindo-se assim das definições individuais dadas nos capítulos 3, 4 e 5 deste trabalho, que tratam da elipse, da hipérbole e da parábola, respectivamente. A razão constante na definição acima é chamada excentricidade da cônica e é denotada por e . A excentricidade e é um número não-negativo, pois é a razão de duas distâncias. De fato, para cônicas não degeneradas $e > 0$. Se $e > 1$, a cônica é uma hipérbole, se $e = 1$, a cônica é uma parábola, e se $0 < e < 1$, a cônica é uma elipse. Veremos que uma parábola tem um foco e uma diretriz. Já uma elipse e uma hipérbole têm cada uma dois focos e duas diretrizes, correspondendo a cada foco uma determinada diretriz.

A reta que passa por um foco de uma cônica e é perpendicular à diretriz chama-se eixo principal da cônica. Os pontos de intersecção da cônica e o eixo principal chamam-se os vértices da cônica. Do nosso estudo da parábola, sabemos que uma parábola tem um vértice. Contudo, a elipse e a hipérbole têm dois vértices. Isto é demonstrado no teorema seguinte.

TEOREMA: Se e é a excentricidade de uma cônica não degenerada, com exceção da circunferência, então, se $e \neq 1$, a cônica tem dois vértices e se $e = 1$, a cônica tem somente um vértice.

DEMONSTRAÇÃO: Seja F o foco da cônica e D o ponto de intersecção da diretriz e o eixo principal. Seja d a distância entre o foco e sua diretriz. Considere inicialmente uma diretriz à esquerda do foco F e seja V um vértice da cônica à direita do foco. Queremos demonstrar que se $e \neq 1$, existem dois vértices possíveis, e se $e = 1$, existe somente um vértice. Sabendo que o vértice é um ponto da cônica, então, da

definição acima, temos que: $|\overrightarrow{FV}| = e|\overrightarrow{DV}|$. Eliminando as barras de módulo temos que: $\overrightarrow{FV} = \pm e\overrightarrow{DV}$. Como D , F e V estão sobre o eixo principal e nessa ordem da esquerda para a direita, então $\overrightarrow{DV} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FV}$. Se F está à direita de D , $\overrightarrow{DF} = d$. Logo, temos: $\overrightarrow{DV} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FV} \Leftrightarrow \overrightarrow{DV} = d \pm e\overrightarrow{DV} \Leftrightarrow \overrightarrow{DV} = \frac{d}{1 \pm e}$.

Se $e = 1$, o sinal menos na equação acima deve ser desprezado, pois estaríamos dividindo por zero. Logo, se $e \neq 1$, obtemos dois pontos V ; agora, se $e = 1$, obtemos somente um ponto V .

Agora, se V está à esquerda de F que está à esquerda de D , $\overrightarrow{DF} = -d$. Seguindo o mesmo raciocínio acima obtemos $\overrightarrow{DV} = \frac{-d}{1 \mp e}$ e segue-se a mesma conclusão. Assim, o teorema está demonstrado.

O ponto no eixo principal de uma elipse ou de uma hipérbole equidistante dos dois vértices (ou mesmo dos focos) é o *centro* da cônica. Então, a elipse e a hipérbole chamam-se *cônicas com centro* (ou *cônicas cêntricas*) em contraste com a parábola que não tem centro, pois tem somente um vértice.

RECORDANDO: Da Geometria Analítica obtemos dois resultados importantes que são muitos úteis aqui em nosso estudo.

a) A distância entre dois pontos no plano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é dada pela relação

$$\text{dist}(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

b) A distância entre um ponto $P_1(x_1, y_1)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$ é dada pela

$$\text{expressão } \text{dist}(P_1, r) = |\overrightarrow{P_1D}| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ em que } D \text{ é o ponto da reta } r \text{ mais}$$

próximo de P_1 .

Consideremos uma cônica com um foco na origem do sistema cartesiano e sua diretriz vertical correspondente à esquerda do eixo Oy . Seja D o ponto de intersecção da diretriz com o eixo principal e d a distância entre o foco e sua diretriz. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da cônica à direita da diretriz. Traçamos perpendiculares PQ e PR ao eixo principal e à diretriz, respectivamente. O ponto $P(x, y)$ estará sobre a cônica se e somente se: $|\overrightarrow{OP}| = e|\overrightarrow{RP}|$. Queremos agora

demonstrar a veracidade dessa relação que unifica em uma só relação a definição dos três tipos de cônicas não-degeneradas em coordenadas cartesianas.

Considere a relação $|\overline{OP}| = e|\overline{RP}|$. Vamos elevar ambos os lados dessa equação ao quadrado e desenvolver os produtos e as somas:

$$\begin{aligned} |\overline{OP}|^2 &= e^2 |\overline{RP}|^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = e^2(x^2 + 2dx + d^2) \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2 \Rightarrow x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2e^2dx + e^2d^2 \\ \Rightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 &= 2de^2(x + \frac{1}{2}d). \end{aligned}$$

Nesta equação, se fizermos $e=1$, a equação se reduz a $y^2 = 2d(x + \frac{1}{2}d)$ que é a equação reduzida de uma parábola de vértice no ponto $V(-\frac{1}{2}d, 0)$. Se transladarmos a origem para o ponto $(-\frac{1}{2}d, 0)$, substituindo x por $x' - \frac{1}{2}d$ e y por y' , a equação se reduzirá a $y'^2 = 2dx'$, que é uma parábola com foco no ponto $(\frac{1}{2}d, 0)$, que é a origem relativa aos eixos Oxy .

Agora, se $e \neq 1$, dividimos os dois lados da equação $x^2(1 - e^2) + y^2 = 2e^2dx + e^2d^2$ por $(1 - e^2)$ e organizando os termos obtemos: $x^2 - \frac{2e^2d}{(1 - e^2)}x + \frac{1}{(1 - e^2)}y^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)}$.

Com os termos envolvendo x usamos a técnica de completar quadrados. Somamos a cada lado da equação o quadrado da metade do coeficiente de x que é $\frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$ e

obtemos: $(x - \frac{e^2d}{1 - e^2})^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$. Transladando-se a origem dos eixos

cartesianos para o ponto $O'(x', y') = (\frac{e^2d}{1 - e^2}, 0)$, encontramos a equação reduzida

$x'^2 + \frac{1}{1 - e^2}y'^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$. Para obtermos a equação canônica da cônica, dividimos

cada termo por $\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$, obtendo $\frac{x'^2}{\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}} = 1$. Agora façamos $a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$

(sendo $a > 0$) e teremos $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$. Substituindo x' e y' pelas coordenadas

tradicionais x e y , obtemos $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$. Esta equação representa uma forma

PADRÃO de uma cônica com centro que tem seu eixo principal no eixo x e excentricidade e .

Vale lembrar que a equação inicial tinha o foco na origem dos eixos coordenados e que a equação obtida partiu de uma translação dos eixos coordenados para a nova origem no ponto $(\frac{e^2d}{1-e^2}, 0)$. Segue, então, que a cônica da última equação nos novos

eixos coordenados tem foco $(-\frac{e^2d}{1-e^2}, 0)$.

Agora, se $a^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$ e sendo $a > 0$, então, tem-se que:

$$a = \begin{cases} \frac{ed}{1-e^2}, & \text{se } 0 < e < 1 \\ \frac{ed}{e^2-1}, & \text{se } e > 1 \end{cases}$$

$$\text{Também } -\frac{e^2d}{1-e^2} = -e\left(\frac{ed}{1-e^2}\right) = \begin{cases} -ea, & \text{se } 0 < e < 1 \\ ea, & \text{se } e > 1 \end{cases}$$

CONCLUSÃO: A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ se for de uma elipse ($0 < e < 1$), esta terá

um foco no ponto $(-ae, 0)$. Se for de uma hipérbole ($e > 1$), esta terá um foco no ponto $(ae, 0)$. Em cada caso a diretriz correspondente está d unidades à esquerda do foco.

Assim, se o gráfico da referida equação é de uma elipse, a diretriz correspondente ao foco $(-ae, 0)$ tem equação $x = -ae - d$.

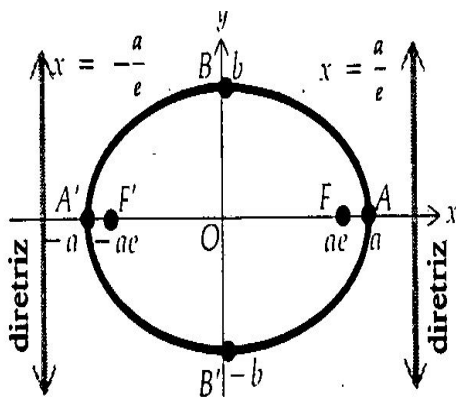
$$\text{Como, quando } 0 < e < 1, \text{ tem-se } a = \frac{ed}{1-e^2} \Rightarrow d = \frac{a(1-e^2)}{e}$$

$$\text{a equação da diretriz se transforma em } x = -ae - \frac{a(1-e^2)}{e} \Leftrightarrow x = -a/e.$$

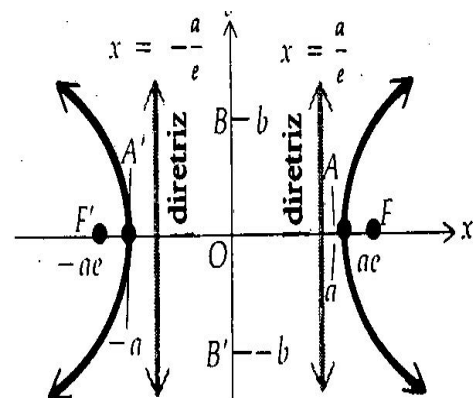
Analogamente, se o gráfico for de uma hipérbole, a diretriz correspondente ao foco $(ae, 0)$ terá equação $x = ae - d$. Quando $e > 1$, $d = \frac{a(e^2-1)}{e}$, a equação da diretriz é

reescrita como sendo $x = \frac{a}{e}$.

Como a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ só tem potências pares de x e y , seu gráfico é simétrico em relação aos dois eixos. Portanto, se existe um foco em $(-ae, 0)$ que tem uma diretriz correspondente $x = -\frac{a}{e}$, por simetria, existe também um foco $(ae, 0)$ e uma diretriz correspondente $x = \frac{a}{e}$. E vice-versa.



(39.a)



(39.b)

Fonte: Hari Kishan(2006)

Figura.39: Diretrizes e Focos de Elipse e Hipérbole.

Finalmente, podemos estabelecer que para certo valor b , não-negativo, tem-se: $a^2(1-e^2)=b^2$ para a elipse ($0 < e < 1$) e $a^2(1-e^2)=-b^2$ ou $a^2(e^2-1)=b^2$ para a hipérbole ($e > 1$). Tudo isso nos garante as equações reduzidas ou canônicas a partir da forma padrão $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ para a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e para a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Exemplo 7.1. Usando a definição de cônica que relaciona a tríade (foco, diretriz e excentricidade) determine a equação geral da cônica que apresenta excentricidade $4/5$, foco no ponto $F(1,-2)$ e tem a reta $4y + 17 = 0$ como a diretriz correspondente.

SOLUÇÃO: Como a excentricidade é $e = 4/5 < 1$, trata-se de uma elipse. Usando um ponto genérico $P(x,y)$ e a definição generalizada de cônica $|\overline{FP}| = e|\overline{DP}|$, vem que:

$|\overline{FP}| = \frac{4}{5}|\overline{DP}|$. Usando as fórmulas da distância podemos encontrar $|\overline{FP}|$ e $|\overline{DP}|$:

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \frac{4}{5} \left| y + \frac{17}{4} \right|$. Elevando ao quadrado os dois lados desta equação e

simplificando os produtos e as somas, obtemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = \frac{16}{25} \left(y^2 + \frac{17}{2}y + \frac{289}{16} \right)$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 50x + 25y^2 + 100y + 125 = 16y^2 + 136y + 289$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 9y^2 - 50x - 36y = 164.$$

Exemplo 7.2. Determine a equação da parábola e seu latus rectum, sabendo que seu foco é $(0, -3)$ e sua diretriz é $y=3$.

SOLUÇÃO: Como o foco se encontra sobre o eixo Oy e abaixo da diretriz, a parábola abre-se pra baixo e $p=-3$. Portanto, sua equação é x^2-12y e seu latus rectum é $|4(-3)|=12$.

Exemplo 7.3. Dada a elipse com equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, encontre seus elementos algébricos.

SOLUÇÃO: Da equação $a^2=25$ e $b^2=16$, obtemos $c^2=a^2-b^2=9$; desse modo $a=5$, $b=4$

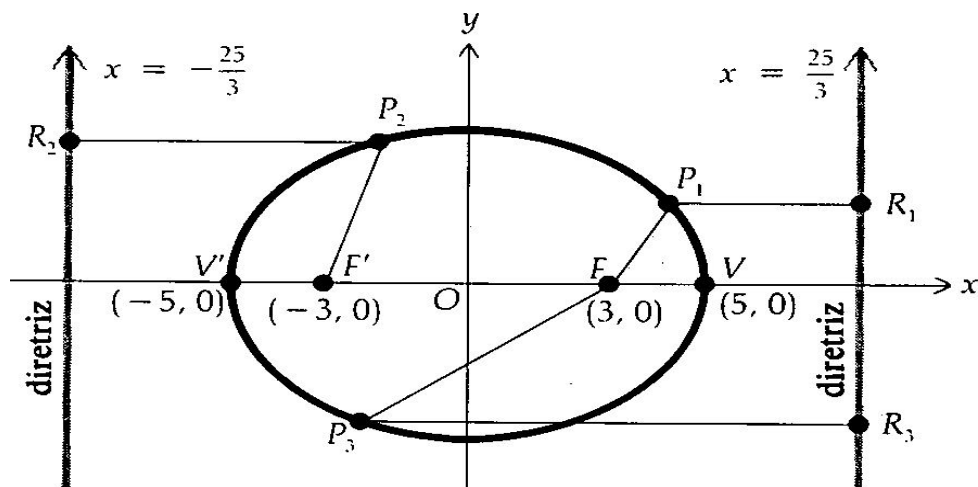
e $c=3$. Sua excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$; seu parâmetro $p = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}$ e seu latus rectum

é $2p = \frac{32}{5}$. Seus focos e diretrizes são obtidos por $ae=3$ e $\frac{a}{e} = \frac{25}{3}$, logo $F_1(3,0)$ e sua

diretriz correspondente é $x = \frac{25}{3}$ e o outro foco é $F_2(-3,0)$ e sua diretriz

correspondente é $x = \frac{-25}{3}$. Os vértices da elipse são os pontos $A_1(-5,0)$ e $A_2(5,0)$ e

os extremos do eixo menor são $B_1(0,-4)$ e $B_2(0,4)$.



Fonte: Hari Kishan(2006.)

Figura.40: Ilustração da Elipse do Exemplo-17.

Exemplo 7.4. Dada a hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, encontre todos os seus elementos algébricos.

SOLUÇÃO: Da equação $a^2=9$ e $b^2=16$, obtemos $c^2=a^2+b^2=25$; desse modo $a=3$, $b=4$ e $c=5$. Sua excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$; seu parâmetro $p = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{3}$ e seu latus rectum é $2p = \frac{32}{3}$. Seus focos e diretrizes são obtidos por $ae = 5$ e $\frac{a}{e} = \frac{9}{5}$, logo $F_1(-5,0)$ e sua diretriz correspondente é $x = \frac{-9}{5}$ e o outro foco é $F_2(5,0)$ e sua diretriz correspondente é $x = \frac{9}{5}$. Os vértices da hipérbole são os pontos $A_1(-3,0)$ e $A_2(3,0)$, o comprimento do eixo real é $2a = 6$ e do eixo conjugado é $2b = 8$. Suas assíntotas são obtidas fatorando $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0 \Leftrightarrow (\frac{x}{3} - \frac{y}{4})(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}) = 0$, sendo: $y = \pm \frac{4}{3}x$.

7.2. Sugestão de Atividades

- 1) Determine o tipo de curva representada pela equação $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 16$, em cada um dos seguintes casos: a) $k > 16$. b) $0 < k < 16$. c) $k < 0$.
- 2) Encontre as equações das parábolas tendo as propriedades dadas:
 - a) Foco(5,0);diretriz $x=-5$. b)Foco(0,-2);diretriz $y-2=0$. c)Foco(1/2,0);diretriz $2x+1=0$.
- 3) Encontre a equação da parábola que tenha como diretriz a reta $y=1$ e foco $(-3,7)$.
- 4) Encontre os vértices, focos, diretrizes, excentricidade e extremos do eixo menor da elipse $4x^2+9y^2=36$.
- 5) Encontre os vértices, focos, diretrizes, excentricidade e extremos do eixo menor da elipse $2x^2+3y^2=18$.
- 6) Encontre os vértices, focos, diretrizes, excentricidade e comprimento dos eixos transversal e conjugado da hipérbole $9x^2-4y^2=36$.
- 7) Encontre os vértices, focos, diretrizes, excentricidade e comprimento dos eixos transversal e conjugado da hipérbole $9x^2-16y^2=1$.
- 8) Encontre a equação da reta tangente à elipse $4x^2+9y^2=72$ no ponto $(3,2)$.
- 9) Encontre a equação da hipérbole com focos nos vértices e vértices nos focos da elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$.

10) Encontre a equação da cônica que satisfaça as condições dadas:

a) Hipérbole com vértices em $(-2,0)$ $(2,0)$ e um eixo conjugado de comprimento 6.

b) Elipse com vértices em $(-5/2,0)$ e $(5/2,0)$ e um foco em $(3/2,0)$.

RESPOSTA

1) a) elipse; b) hipérbole; c) curva nenhuma.

2) a) $y^2=20x$; b) $x^2=-8y$; c) $y^2=2x$.

3) $x^2+6x-12y+57=0$

4) vértices $(\pm 3,0)$; focos $(\pm\sqrt{5},0)$; diretrizes $x = \pm \frac{9}{5}\sqrt{5}$; $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$;

extremos do eixo menor $(0,\pm 2)$.

5) vértices $(\pm 3,0)$; focos $(\pm\sqrt{3},0)$; diretrizes $x = \pm 3\sqrt{3}$; $e = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;

extremos do eixo menor $(0,\pm\sqrt{6})$.

6) vértices $(\pm 2,0)$; focos $(\pm\sqrt{13},0)$; diretrizes $x = \pm \frac{4}{13}\sqrt{13}$; $e = \frac{1}{2}\sqrt{13}$; $2a = 4$; $2b = 6$.

7) vértices $(\pm \frac{1}{3},0)$; focos $(\pm \frac{5}{12},0)$; diretrizes $x = \pm \frac{4}{15}$; $e = \frac{5}{4}$; $2a = \frac{2}{3}$; $2b = \frac{1}{2}$.

8) $2x + 3y - 12 = 0$. 9) $7x^2 - 4y^2 = 28$. 10) a) $9x^2 - 4y^2 = 36$; b) $16x^2 + 25y^2 = 100$.

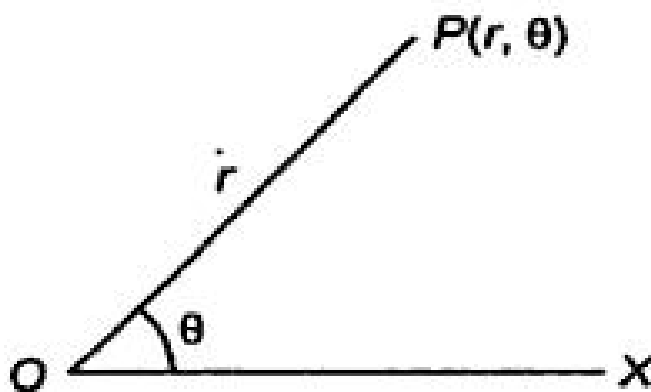
8. COORDENADAS POLARES

Os alunos do Ensino Médio, em geral, são orientados pelos professores e livros didáticos a utilizarem somente o tradicional sistema de coordenadas cartesianas, seja no estudo de funções algébricas ou de geometria analítica. Acreditamos, todavia, que seria muito interessante e produtivo introduzir neste nível de ensino o sistema de coordenadas polares. Pode até parecer desnecessário considerar outro sistema diferente do sistema cartesiano, habitualmente utilizado. Porém, em muitas situações, o uso do sistema de coordenadas polares representa algumas vantagens sobre o das coordenadas cartesianas. Nele, a localização de um ponto P do plano se restringe ao conhecimento da distância r do ponto P a um ponto fixo O (chamado polo) e à direção indicada por um ângulo θ que o segmento OP forma com uma reta fixada que passa por O . Estes dois aspectos (distância e direção) constituem as coordenadas polares do ponto P , indicadas por (r, θ) .

8.1. Definição de Coordenadas Polares

Comecemos descrevendo o mais tradicional sistema de coordenadas usado frequentemente no Ensino Médio: O sistema de coordenadas cartesianas Oxy compreende dois eixos perpendiculares que dividem o plano em quatro regiões, denominadas quadrantes. Um dos eixos constitui o eixo das abscissas (indicado por Ox) e o outro, o eixo das ordenadas (indicado por Oy). O primeiro tem direção horizontal e é orientação positiva para a direita. O segundo tem direção vertical e é orientação positiva para cima. Ambos se cruzam no ponto $O(0,0)$ que constitui a origem do sistema de coordenadas cartesianas e correspondem cada um à uma reta real.

Vamos agora construir o sistema de coordenadas polares. Para tanto, traçamos o segmento \vec{OP} cuja medida de seu comprimento será indicado por r . Sua origem receberá o nome de POLO (usualmente tomaremos a origem do sistema cartesiano). A semirreta formada pela origem e pela porção positiva do eixo x será denominada EIXO POLAR. Ao ângulo formado entre o segmento r e o eixo polar designaremos por θ . Definimos assim, as coordenadas polares do ponto $P(r, \theta)$. Nesse par ordenado, r é chamado de coordenada radial, raio vetor ou raio polar e θ é chamado coordenada angular, argumento ou ângulo polar.



Fonte: Hari Kishan(2006.)

Figura.41: Sistema de Coordenadas polares.

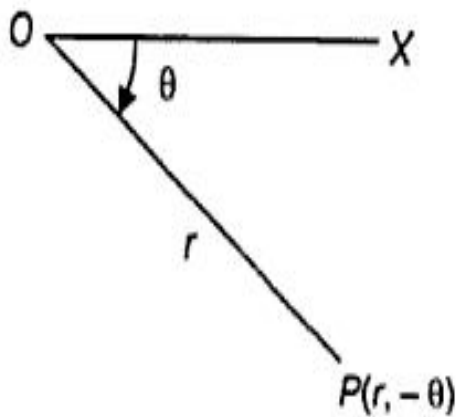
O ponto P não é univocamente determinado, ou seja, suas coordenadas polares podem ter infinitas representações. Vejamos as observações a seguir:

1) Variando o argumento θ no intervalo $[0, 2\pi)$ e o raio polar não negativo ($r \in \mathbb{R}_+$) fica associado a cada ponto do plano um único par ordenado (r, θ) , exceto para o polo que tem coordenadas polares $(0, \theta)$, qualquer que seja θ .

2) Podemos adotar que tanto θ quanto r assumem qualquer valor real ou positivo ou negativo) desde que apropriadamente interpretados. Assim sendo: o argumento θ de um ponto P do plano deve ser reduzido ou aumentado por múltiplos de 2π , de modo a se obter um valor entre 0 e 2π : $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

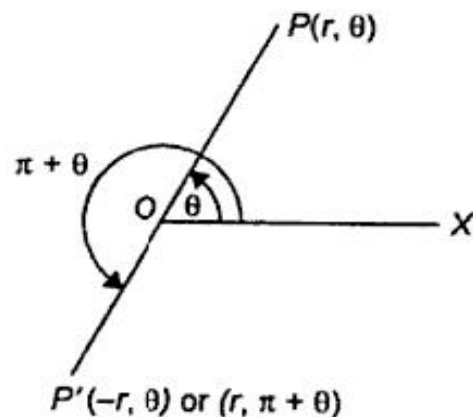
Exemplos: $(r, \frac{9\pi}{4}) = (r, \frac{\pi}{4})$; $(r, -\frac{\pi}{4}) = (r, \frac{5\pi}{4})$; $(r, -\pi) = (r, \pi)$. Agora, se o valor do raio polar for negativo, troca-se o sinal e acrescenta-se ou reduz-se o argumento de π .

Exemplos: $(-1, \frac{\pi}{4}) = (1, \frac{5\pi}{4})$; $(-2, -\frac{\pi}{3}) = (2, \frac{2\pi}{3})$; $(-3, \frac{\pi}{3}) = (3, \frac{4\pi}{3})$. Se $\theta < 0$ é porque foi tomado no sentido anti-horário. E $-r$ é o oposto de r diametralmente ao polo.



Fonte: Hari Kishan(2006.)

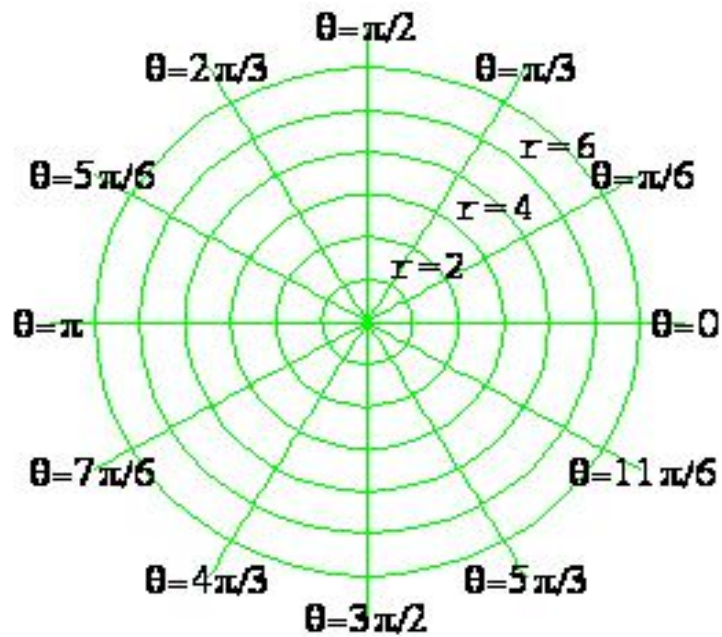
Figura.42: Argumento Negativo.



Fonte: Hari Kishan(2006.)

Figura.43: Raio Polar Negativo.

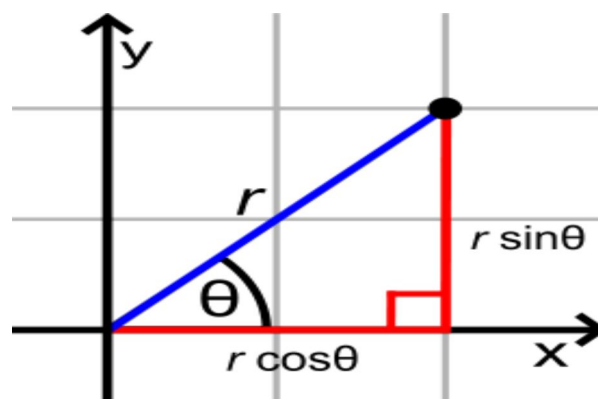
3) Na escola, nas primeiras experiências com os sistemas de coordenadas cartesianas, considera-se o plano reticulado por pares de retas perpendiculares, umas paralelas ao eixo das abscissas e outras retas paralelas ao eixo das ordenadas, formando uma malha de modo a facilitar a localização de pontos no plano. Analogamente, no sistema de coordenadas polares, usa-se a malha de círculos concêntricos com centro no polo e segmentos radiais partindo do polo, conforme a ilustração a seguir.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.44: Malha com Coordenadas Polares.

Sobrepondo-se um sistema de coordenadas cartesianas ao sistema de coordenadas polares, de modo que o semieixo positivo de Ox coincida com o eixo polar, obtêm-se as seguintes transformações entre as coordenadas polares e cartesianas de um mesmo ponto P.



Fonte:Herberty&Jonathan-PUCMG(2010)

Figura.45: Coordenadas Polares e Cartesianas.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} r = x \sec \theta \\ r = y \operatorname{cosec} \theta \end{cases}$$

Essas relações fornecem as transformações das coordenadas de um sistema para o outro. Os pontos $(r, \frac{\pi}{2})$ e $(r, \frac{3\pi}{2})$ têm coordenadas cartesianas com abscissa $x=0$. Já os pontos $(r, 0)$ e (r, π) correspondem aos pontos que ficam sobre o eixo Ox .

8.2. Funções em Coordenadas Polares

Expressões da forma $r = f(\theta)$ são denominadas funções em coordenadas polares. O traçado de seu gráfico pode ser feito de maneira "primitiva", como no caso de coordenadas cartesianas $y = f(x)$. Em outras palavras, após localizar alguns pontos (r, θ) que verificam a igualdade $r = f(\theta)$ o gráfico é obtido "interpolando-se" os pontos localizados no sistema de coordenadas. Expressões algébricas envolvendo as coordenadas r e θ (mesmo que não se possa explicitar uma dessas coordenadas), serão denominadas *equações de curvas em coordenadas polares*. Algumas vezes, transformando a expressão algébrica de coordenadas polares para cartesianas, ou vice-versa, pode ser útil no traçado das curvas. Inúmeros gráficos de equações em coordenadas polares recebem denominações especiais, tais como:

Cardioide: $r = 1 + \text{sen}\theta$ (tem o formato parecido com um coração);

Rosácea: $r = a \cos(n\theta)$ ou $r = a \text{sen}(n\theta)$ (tem o formato de uma flor);

Limaçons: $r = 1 + c \text{sen}\theta$ (vem da palavra caracol, em francês);

Cissoide de Diocles: $r = \text{sen}\theta \text{tg}\theta$;

Ovais de Cassini: $r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$;

Espiral de Arquimedes: $r = 2\theta$;

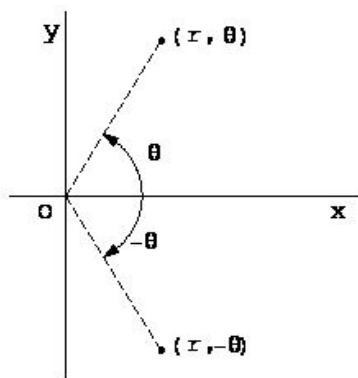
Conchoide: $r = 4 + 2 \sec \theta$;

Lemniscata de Bernoulli: $r^2 = 4 \cos 2\theta$. E tantas outras.

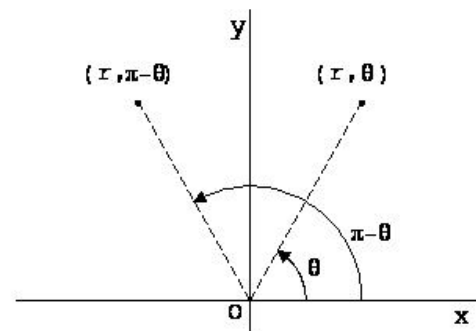
Citamos aqui estes exemplos apenas como ilustração, mas não iremos nos deter em estudar tais curvas, pois isto foge ao nosso propósito. Recomendamos a obra de James Stewart (2011) ao leitor que queira se aventurar em tal estudo. Ressaltamos, todavia, que o gráfico de uma equação em coordenadas polares fica mais fácil de ser traçado quando são feitos os TESTES DE SIMETRIA seguintes:

1. Se a equação não se alterar quando se substitui θ por $-\theta$ o gráfico é simétrico com respeito ao eixo Ox (ou eixo polar);
2. Se a equação não se alterar quando se substitui θ por $\pi - \theta$, o gráfico é simétrico com respeito ao eixo Oy (ou reta vertical $\theta = \pi/2$);
3. Se a equação não se alterar quando se substitui r por $-r$ ou mesmo θ por $\theta + \pi$, o gráfico é simétrico com respeito à origem (ou polo).

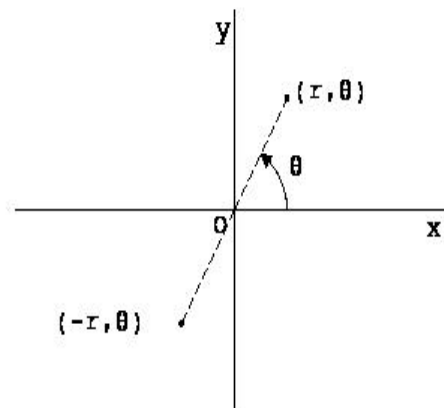
É bom lembrar que estas condições de simetria são suficientes, mas não são necessárias. Isto significa que as simetrias referidas podem ocorrer mesmo que estas condições não sejam satisfeitas.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)
 Figura.46: Simetria em Relação ao Eixo Ox.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)
 Figura.47: Simetria em Relação ao Eixo Oy.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)
 Figura.48: Simetria em Relação à Origem $O(0,0)$.

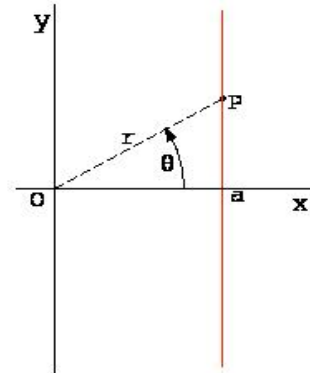
Daremos, excepcionalmente, alguns exemplos de retas e curvas simples em coordenadas polares para melhor compreensão deste assunto.

8.3. Retas e Curvas em Coordenadas Polares

As RETAS que têm uma representação bastante simples em coordenadas polares são as retas verticais, as retas horizontais e as retas que passam pela origem das coordenadas.

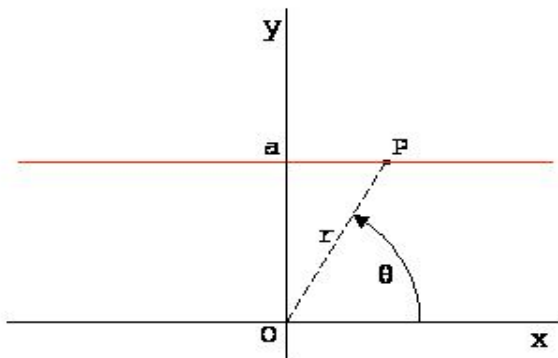
A reta vertical (*Figura.49*) $x = a$ pode ser representada em coordenadas polares como $r \cos \theta = a$ ou $r = a \sec \theta$,

Para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.49: Reta Vertical.



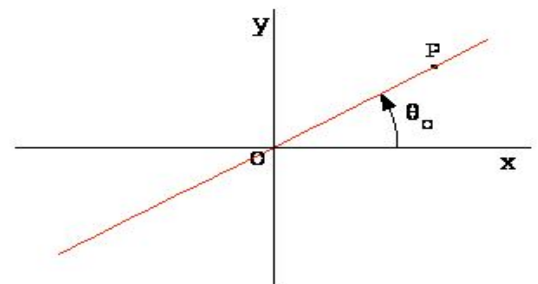
A reta horizontal (*Figura.50*) $y = a$ pode ser representada em coordenadas polares como $r \sin \theta = a$ ou $r = a \operatorname{cosec} \theta$
Para $0 < \theta < \pi$.

Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.50: Reta Horizontal.

A reta oblíqua que passa pela origem (*Figura.51*) e que faz um ângulo θ_0 com a parte positiva do eixo Ox tem a seguinte equação em coordenadas polares: $\theta = \theta_0$,

Sendo $-\infty < r < +\infty$.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.51: Reta Oblíqua pela Origem.

Vamos deduzir a equação polar da CIRCUNFERÊNCIA (ou do círculo). Considere uma circunferência de centro $C(R, \alpha)$ e um ponto qualquer $P(r, \theta)$ da circunferência de raio a , conforme a *Figura.52*.

Temos então que $OC = R; OP = r; PC = a$.

Temos também os ângulos:

$$\angle XOP = \theta; \angle XOC = \alpha; \angle COP = \theta - \alpha.$$

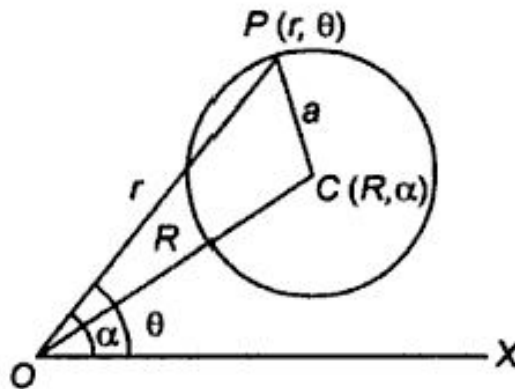
Usando a Lei dos Cossenos no triângulo POC , vem que:

$$(PC)^2 = (PO)^2 + (OC)^2 - 2PO \cdot OC \cos \angle POC \Leftrightarrow$$

$$a^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha) - a^2 = 0$$

Esta é a EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA (ou do círculo).



Fonte: Hari Kishan(2006.)

Figura.52: Circunferência em Coordenadas Polares.

A partir daí, poderemos obter vários casos particulares, tais como:

i) O Centro coincide com o polo: $R = 0$. Nesse caso a equação se reduz a $r^2 - a^2 = 0$ ou $r = a$.

ii) O Centro está fincado sobre o eixo Ox: $\alpha = 0$. Temos $r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta - a^2 = 0$.

iii) O polo tangencia a circunferência (ou círculo): $R = a$. Neste caso teremos $r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \alpha) - a^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2a \cos(\theta - \alpha)$.

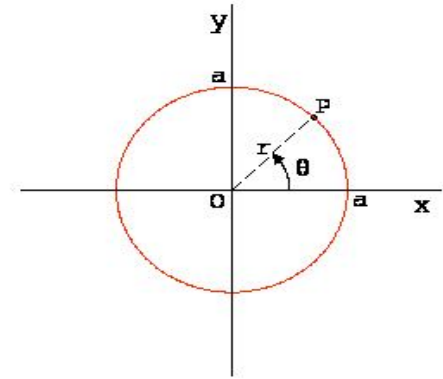
iv) O polo é um extremo do diâmetro que fica apoiado sobre o eixo polar: $R = a$ e $\alpha = 0$. A equação geral se reduz a $r = 2a \cos \theta$.

Graficamente, podemos constatar que as CIRCUNFERÊNCIAS com equações mais simples em coordenadas polares são aquelas com centro sobre a origem ou mesmo sobre um dos eixos coordenados, tangenciando o outro eixo bem na origem. Veja os exemplos a seguir:

Uma circunferência com centro na origem e de raio $r = |a|$ (Figura.53) tem a seguinte equação em coordenadas polares:

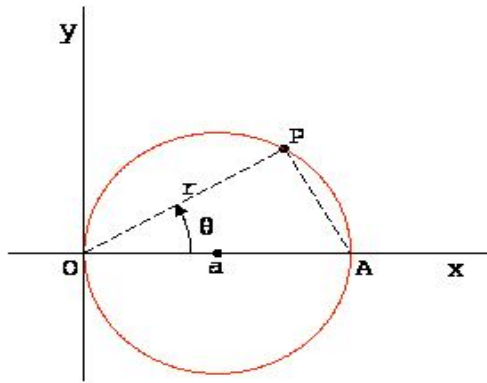
$$r = a,$$

Sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.53: Circunferência Centrada no Polo.



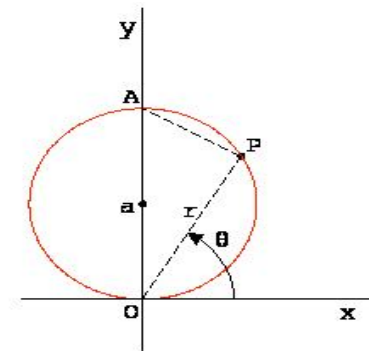
Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.54: Circunferência Centrada no Eixo Polar.

Uma circunferência com centro no ponto $(0, a)$ e de raio $r = |a|$ (Figura.55) tem a seguinte equação em coordenadas polares:

$$r = 2a \sin \theta,$$

Sendo $0 \leq \theta \leq \pi$.



Fonte: João Mendonça-FEUP(2008)

Figura.55: Circunferência Centrada em $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 8.1. Escrever em coordenadas polares as equações seguintes, dadas em coordenadas cartesianas retangulares:

a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$. b) $3x + 2y = 2$. c) $xy = 1$.

SOLUÇÃO: a) Esta equação é de uma circunferência de centro em $(-2,3)$ e raio $\sqrt{13}$. Desenvolvendo os produtos, tem-se: $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$. Substituindo as coordenadas cartesianas pelas polares, vem que $r^2 + 4r \cos \theta - 6r \operatorname{sen} \theta = 0 \Leftrightarrow r^2 = 6r \operatorname{sen} \theta - 4r \cos \theta \Leftrightarrow r = 6 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta$.

b) Esta equação é de uma reta. Substituindo as coordenadas cartesianas pelas polares, vem que $3r \cos \theta + 2r \operatorname{sen} \theta = 2 \Leftrightarrow r(3 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta) = 2 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta}$.

c) Esta equação é de uma hipérbole equilátera. Substituindo as coordenadas cartesianas pelas coordenadas polares, vem que $r \cos \theta \cdot r \operatorname{sen} \theta = 1 \Leftrightarrow r^2 \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 1 \Leftrightarrow 2r^2 \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 2 \Leftrightarrow r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\theta} \Leftrightarrow r = \pm \sqrt{\frac{2}{\operatorname{sen} 2\theta}} = \pm \sqrt{2} \operatorname{sen}^{-1/2} \theta$.

Exemplo 8.2. Escrever em coordenadas cartesianas retangulares as equações dos lugares geométricos seguintes, dadas em coordenadas polares:

a) $r = \frac{9}{3 - 6 \cos \theta}$ b) $r = \frac{12}{3 + 3 \operatorname{sen} \theta}$ c) $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$.

SOLUÇÃO: a) Podemos simplificar a expressão $r = \frac{3}{1 - 2 \cos \theta} \Leftrightarrow r(1 - 2 \cos \theta) = 3$

Substituindo as coordenadas cartesianas pelas polares vem que $(\pm \sqrt{x^2 + y^2})(1 - 2 \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}) = 3 \Leftrightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 3 \Leftrightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2} = 3 + 2x$. Agora

elevemos ambos os lados dessa equação ao quadrado: $(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = (3 + 2x)^2$ e obtemos $x^2 + y^2 = 9 + 12x + 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - y^2 + 9 = 0$. Completando quadrado com os termos em x , temos que: $3(x^2 + 4x) - y^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x + 2x)^2 - y^2 + 9 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x + 2x)^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow (x + 2x)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. O lugar geométrico é uma hipérbole com eixo horizontal, centro no ponto $(-2,0)$, termos $a = 1; b = \sqrt{3}; c = 2; e = 2; p = 3/2$, um foco na origem e outro foco no ponto $(-4,0)$.

b) Podemos simplificar a expressão $r = \frac{4}{1 + \operatorname{sen} \theta} \Leftrightarrow r(1 + \operatorname{sen} \theta) = 4$ Substituindo as

coordenadas cartesianas pelas polares vem que $(\pm \sqrt{x^2 + y^2})(1 + \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}) = 4 \Leftrightarrow$

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} + y = 4 \Leftrightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y \Leftrightarrow (\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = (4 - y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 - 8y + y^2$$

$\Leftrightarrow x^2 = -8y + 16 \Leftrightarrow x^2 = -8(y - 2)$. O lugar geométrico é de uma parábola com eixo vertical sobre o eixo Oy; parâmetro 4; vértice no ponto (0,2); foco na origem; concavidade para baixo e diretriz $x=4$.

c) A equação pode ser reescrita como $r^2 = 4.2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$. Substituindo as coordenadas cartesianas pelas polares vem que $r^2 = 4.2 \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r} \Leftrightarrow r^2 = 8 \frac{yx}{r^2} \Leftrightarrow (r^2)^2 = 8xy \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

Exemplo 8.3. Converter $P_1(5, \frac{3\pi}{4})$ para suas coordenadas cartesianas retangulares e $P_2(-\sqrt{3}, -1)$ para suas coordenadas polares, sendo $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

SOLUÇÃO: Para P_1 , tem-se $r = 5$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$, então $x = r \cos\theta = 5 \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-5\sqrt{2}}{2}$ e $y = r \operatorname{sen}\theta = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Então $P_1(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$. Para P_2 , tem-se $x = -\sqrt{3}; y = -1$,

então $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) = \operatorname{tg}^{-1}(\frac{-1}{-\sqrt{3}}) = \operatorname{tg}^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$. O ponto está no terceiro quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Então $P_2(2, \frac{7\pi}{6})$.

Exemplo 8.4. Dada a equação cartesiana de um gráfico $2x^2 + 2y^2 - 6x = 0$, encontre a equação polar.

SOLUÇÃO: Fazendo as conversões $x = r \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$ na equação dada, temos que $2r^2 \cos^2\theta + 2r^2 \operatorname{sen}^2\theta - 6r \cos\theta = 0 \Leftrightarrow 2r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 6r \cos\theta = 0$,
 $\Leftrightarrow 2r^2 - 6r \cos\theta = 0 \Leftrightarrow 2r(r - 3 \cos\theta) = 0$. Logo: $2r = 0$ ou $r - 3 \cos\theta = 0$, ou então $r = 0$ ou $r = 3 \cos\theta$.

8.4. Sugestão de Atividades

1) Os pontos $P_1(2, -2)$ e $P_2(-1, \sqrt{3})$ são dados em coordenadas cartesianas retangulares. Determine suas coordenadas polares, obedecendo a cada critério:

a) $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. b) a) $r < 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

2) Encontre a distância entre os pontos em coordenadas polares $P_1(2, \pi/3)$ e $P_2(4, 2\pi/3)$.

- 3) Encontre a equação cartesiana para as curvas seguintes, descritas por sua equação polar: a) $r = 2$. b) $r = 3\operatorname{sen}\theta$. c) $r = \operatorname{cosec}\theta$.
- 4) Encontre uma equação polar para cada curva representada pela equação cartesiana seguinte: a) $y = 5$. b) $x = -y^2$. c) $x^2 + y^2 = 2cx$.
- 5) Encontre um conjunto de coordenadas polares para o ponto $(4, \pi/4)$ que obedece em cada caso as determinações: a) $r < 0; 0 \leq \theta < 2\pi$ b) $r > 0; -2\pi < \theta \leq 0$ c) $r < 0; -2\pi < \theta \leq 0$
- 6) Encontre as coordenadas cartesianas retangulares de cada um dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:
- a) $(\sqrt{2}, -3\pi/4)$; b) $(-2, -\pi/2)$; c) $(-1, -7\pi/6)$
- 7) Encontre uma equação polar correspondente a cada equação cartesiana seguinte:
- a) $x^2 + y^2 = a^2$ b) $y^2 = 4(x+1)$ c) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
- 8) Encontre a equação cartesiana correspondente a cada equação polar dada:
- a) $r^2 = 2\operatorname{sen}2\theta$ b) $r^2 = \cos\theta$ c) $r^2 \cos 2\theta$ d) $r = \frac{6}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$
- 9) Determinar os pontos de intersecção das curvas polares a seguir:
- a) $r = 2$ e $r = \cos\theta$ b) $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1 - \cos\theta$.
- 10) Verifique se o gráfico das equações polares apresentam simetria em relação ao eixo Ox, ao eixo Oy ou à Origem.
- a) $r = 2\cos\theta$; b) $r = 1 + \cos\theta$; c) $r = 2 + 4\cos\theta$; d) $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$;
e) $r = 2\operatorname{sen}2\theta$; f) $r = 3\cos 3\theta$ g) $r^2 = 4\operatorname{sen}\theta$.

RESPOSTAS

- 1) a) $P_1(2\sqrt{2}, 7\pi/4); P_2(2, 2\pi/3)$.
b) $P_1(-\sqrt{2}, 3\pi/4); P_2(-2, 5\pi/3)$.
- 2) $2\sqrt{3}$.
- 3) a) Círculo, centro O, raio= 2. b) Círculo, centro $(0, 3/2)$, raio=3/2.
c) Reta horizontal, 1 unid. acima do eixo Ox.
- 4) a) $r \operatorname{sen}\theta = 5$ b) $r = -\cot g\theta \operatorname{cosec}\theta$ c) $r = 2c \cos\theta$
- 5) a) $(-4, 5\pi/4)$; b) $(4, -7\pi/4)$; c) $(-4, -3\pi/4)$.
- 6) a) $(-1, -1)$; b) $(0, 2)$; c) $(\sqrt{3}/2, -1/2)$.

7) a) $r = |a|$; b) $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$; c) $r^2 = 4 \cos 2\theta$; d) $r = \frac{3a \sin 2\theta}{2(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)}$.

8) a) $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$; b) $(x^2 + y^2)^3 = x^2$;

c) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$; d) $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$.

9) a) *não-existe.*; b) $(1, \pi/2); (1, 3\pi/2)$.

10) a) Ox ; b) Ox ; c) Ox ; d) *Origem*; e) Ox, Oy, \textit{Origem} ; f) Ox ; g) Oy .

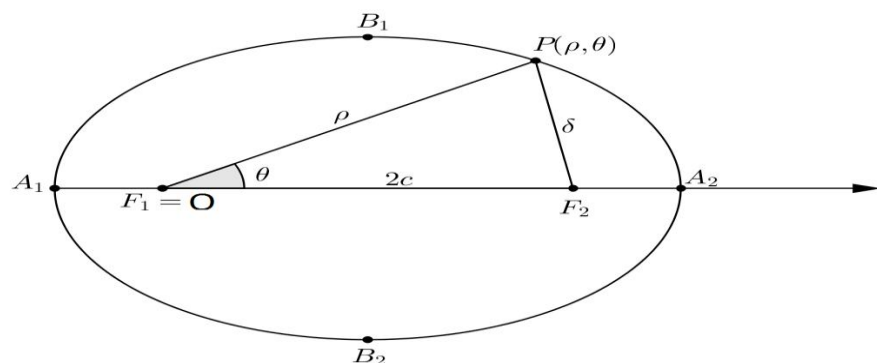
9. EQUAÇÃO POLAR UNIFICADA DAS CÔNICAS

Daremos aqui um tratamento mais uniforme para os três tipos de cônicas regulares (com exceção da circunferência), tendo como referenciais básicos um foco, uma diretriz e a excentricidade. Colocaremos o foco na origem (polo) do sistema de coordenadas polares. E com uma simples equação polar, será possível se fazer uma descrição conveniente do movimento dos planetas, satélites e cometas, por exemplo. Deduziremos, pois, as equações unificadas das cônicas em coordenadas polares de duas maneiras:

1. Com raio em função da excentricidade e , do parâmetro p e do ângulo θ .
2. Com raio em função da excentricidade e , da distância d do foco à diretriz e de θ .

9.1. Dedução da Equação Polar com Parâmetro

Neste caso, faremos a dedução de cada cônica separadamente e, ao final, constataremos que se trata da mesma equação.



Fonte: César P. Martins-UFG(2013)

Figura.56: *Elipse em Coordenadas Polares.*

Considere uma CÔNICA ELÍPTICA de eixo maior horizontal $A_1A_2=2a$, eixo menor $B_1B_2=2b$, distância focal $F_1F_2=2c$, com o foco F_1 sobre o polo O e eixo polar fincado sobre o eixo maior, como na *Figura.56* acima. Seja o ponto $P(\rho, \theta)$ um ponto genérico da elipse. Para enfatizar a nossa resolução, vamos considerar o raio polar como sendo ρ e a outra distância do ponto ao outro foco como sendo δ . Aplicando a lei dos cossenos no triângulo F_1F_2P e a definição de elipse, obtemos as equações seguintes:

$$\delta = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \quad \text{e} \quad |F_1P| + |F_2P| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \delta + \rho = 2a \Leftrightarrow \delta = 2a - \rho.$$

Substituindo esta última equação na primeira, vem que

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4c^2 = 4a\rho - 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4(a^2 - c^2) = 4\rho(a - c \cos \theta)$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2) = \rho(a - c \cos \theta).$$

Da relação fundamental da elipse, tem-se que $b^2 = a^2 - c^2$.

Logo: $b^2 = \rho(a - c \cos \theta)$. Isolando-se ρ nessa equação,

$$\rho(a - c \cos \theta) = b^2 \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$$

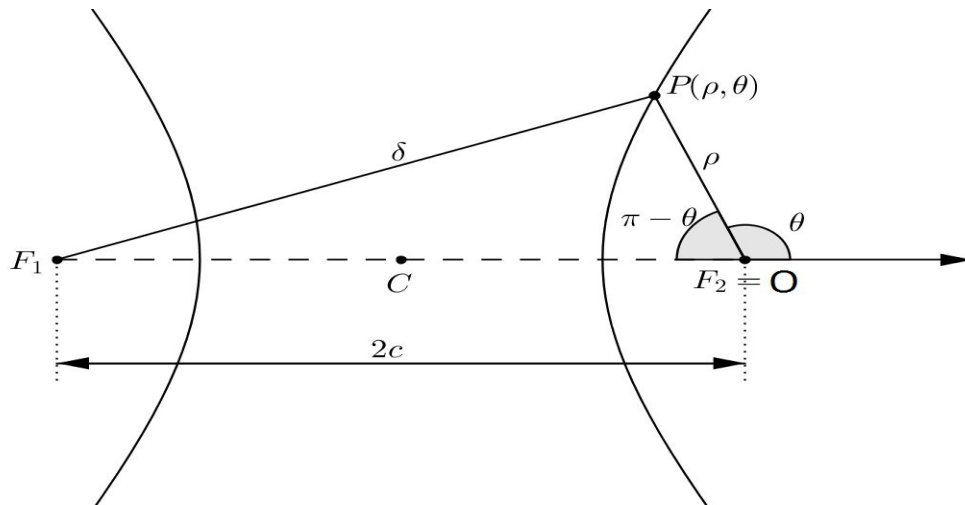
Tem-se a equação polar da elipse: $\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$.

Esta equação é bem sugestiva, pois relaciona a, b, c, ρ, θ . Assim sendo, conhecendo-se apenas os semieixos maior e menor e a distância do foco ao centro, podemos escrever facilmente a equação polar da elipse. Dividindo-se, porém, o

numerador e o denominador desta equação por a , vem que: $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$. Fazendo

nesta equação $p = \frac{b^2}{a}$ (chamado parâmetro) e $e = \frac{c}{a}$ (chamado excentricidade), a

equação polar da elipse passa a ter a seguinte configuração: $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$.



Fonte: César P. Martins-UFG(2013)

Figura.57: Hipérbole em Coordenadas Polares.

Considere agora uma CÔNICA HIPERBÓLICA de eixo focal horizontal $A_1A_2=2a$, eixo conjugado $B_1B_2=2b$, distância focal $F_1F_2=2c$, com o foco F_2 sobre o polo O e eixo polar fincado sobre o prolongamento do eixo real da hipérbole à direita de O , como na *Figura.57* acima. Seja o ponto $P(\rho, \theta)$ um ponto genérico da hipérbole. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo F_1F_2P a definição de hipérbole, obteremos as equações seguintes:

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos(\pi - \theta) \text{ e } \left| |F_1P| - |F_2P| \right| = 2a .$$

Sendo $\delta > \rho$, podemos escrever $\delta - \rho = 2a \Leftrightarrow \delta = 2a + \rho$.

Substituindo a segunda na primeira, vem que: $(2a + \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4c^2 = -4a\rho + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4(a^2 - c^2) = 4\rho(-a + c \cos \theta) \Rightarrow (a^2 - c^2) = \rho(-a + c \cos \theta) .$$

Da relação fundamental da hipérbole, tem-se que $-b^2 = a^2 - c^2$.

Logo $-b^2 = \rho(-a + c \cos \theta)$. Isolando-se ρ nessa equação,

$$\rho(a - c \cos \theta) = b^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta} .$$

Obtemos assim a equação polar da hipérbole: $\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$.

Esta equação também é bem sugestiva, pois relaciona a, b, c, ρ, θ . Assim sendo, conhecendo-se apenas os semieixos real e conjugado e o semieixo focal, podemos escrever facilmente a equação polar da hipérbole. Dividindo-se, todavia, o

numerador e o denominador desta equação por a , vem que:
$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a-c}{a} \cos \theta}.$$

Fazendo nesta equação $p = \frac{b^2}{a}$ (chamado parâmetro) e $e = \frac{c}{a}$ (chamado excentricidade), a equação polar da hipérbole passa a ter a seguinte configuração:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

E, finalmente, considere uma CÔNICA PARABÓLICA de eixo de simetria horizontal com vértice V , foco F e parâmetro $p = FR$, sendo R a intersecção do eixo de simetria com a diretriz d . Seja o ponto $P(\rho, \theta)$ um ponto genérico da parábola. Façamos coincidir o polo O com o foco F e o eixo polar com o eixo de simetria da parábola. Seja PQ perpendicular ao eixo de simetria e Q fincado entre V e F , estando o vértice V à direita da diretriz d . No triângulo retângulo PQF , assim construído, temos que $|PF| = |Pd| = \rho$ e que $\cos \angle P \hat{F} Q = \cos(\pi - \theta) = \frac{p - \rho}{\rho}$. Daí,

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

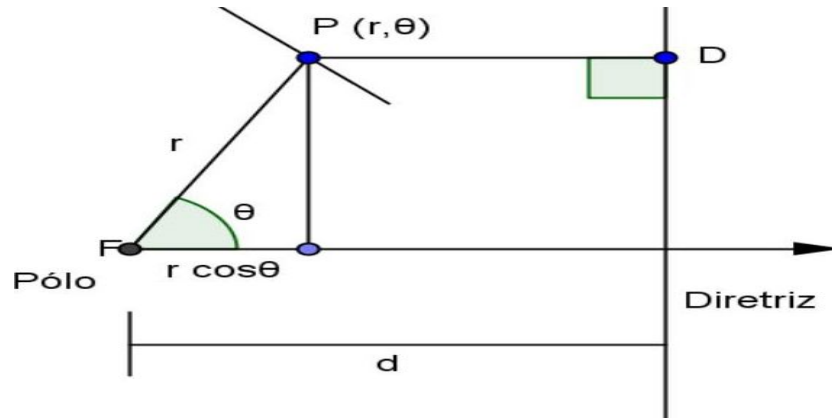
onde p foi aqui tomado, excepcionalmente, como parâmetro da parábola. Assim sendo, a equação da parábola é dada por
$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

9.2. Dedução da Equação Polar com Distância

Neste caso, faremos uma dedução simultânea das cônicas, as quais, curiosamente, gozam da mesma equação (que possui pequenas variações).

TEOREMA: Considere um ponto fixado F (chamado foco) e uma reta fixada ℓ (chamada diretriz) que não contém F . Seja e um número positivo também fixado (conhecido como excentricidade). O conjunto de todos os pontos $P(r, \theta)$ no plano

que satisfaz a relação $\frac{|PF|}{|P\ell|} = e$ ou $|PF| = e |P\ell|$ é uma secção cônica. A cônica pode ser uma elipse (se $0 < e < 1$), uma parábola (se $e = 1$) ou uma hipérbole (se $e > 1$).



Fonte: Adriana S.S.Melo-UFLA(2013)

Figura.58: Foco no Polo com Diretriz à Direita.

DEMONSTRAÇÃO: Se a excentricidade for $e=1$ então $|PR|=|P\ell|$ e, assim, a condição dada se torna simplesmente na definição de uma parábola. Coloquemos o foco F na origem e a diretriz paralela ao eixo y à d unidades para a direita. Então a diretriz terá a equação $x=d$ (ou $r \cos \theta = d$) e será perpendicular ao eixo polar. Consideremos o ponto $P(r, \theta)$ com suas coordenadas polares, então $|PF|=r$ e $|P\ell| = d - r \cos \theta$. Teremos $|PF| = e|P\ell| \Leftrightarrow r = e(d - r \cos \theta) \Leftrightarrow r = ed - er \cos \theta \Leftrightarrow r + er \cos \theta = ed \Leftrightarrow r(1 + e \cos \theta) = ed \Leftrightarrow r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$. Esta é a equação polar da cônica com r em função de e, d, θ . De forma análoga, podemos demonstrar as três outras formas correspondentes desta equação. Deixaremos, todavia, a demonstração de cada uma como atividade para o leitor. De modo geral temos que:

a) Se a diretriz estiver em $x = d$ à direita do foco no polo, então, tem-se

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \text{ e a equação da diretriz será } r \cos \theta = d.$$

b) Se a diretriz estiver em $x = -d$ à esquerda do foco no polo, então, tem-se

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \text{ e a equação da diretriz será } r \cos \theta = -d.$$

c) Se a diretriz estiver em $y = d$ paralela ao eixo polar e acima do foco no polo,

então, tem-se $r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$ e a equação da diretriz será $r \sin \theta = d$.

d) Se a diretriz estiver em $y = -d$ paralela ao eixo polar e abaixo do foco no polo,

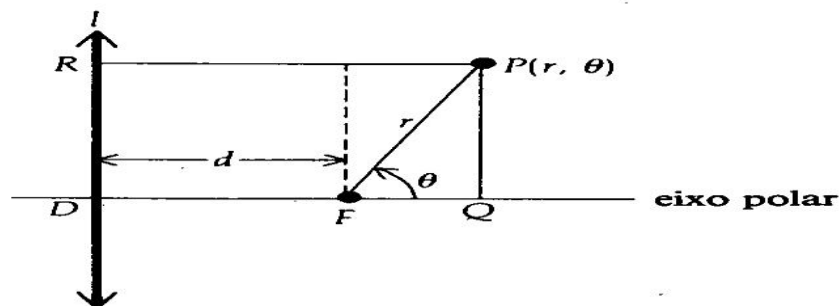
então, tem-se $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$ e a equação da diretriz será $r \sin \theta = -d$.

RESUMINDO: A equação polar em uma das formas $r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$ ou

$r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ representa uma secção cônica com excentricidade e . A cônica é uma

elipse (se $0 < e < 1$) ou uma parábola (se $e = 1$) ou uma hipérbole (se $e > 1$).

No caso particular de uma elipse, podemos estabelecer os pares foco-diretriz correspondente da seguinte forma: diretriz à esquerda do foco esquerdo no polo ou diretriz à direita do foco direito no polo (para elipse com eixo horizontal); diretriz acima do foco superior no polo ou diretriz abaixo do foco inferior no polo (para elipse com eixo vertical).



Fonte: Hari Kishan(2006.)

Figura.59: Foco no Polo com Diretriz à Esquerda.

NOTA: Em coordenadas polares, os três tipos de cônicas não degeneradas (com exceção da circunferência) apresentam equações idênticas. O que difere uma das outras é o valor da excentricidade $e = c/a$ que pode ser menor, maior ou igual à unidade, respectivamente, para a elipse, a hipérbole e a parábola. O parâmetro $p = b^2/a$ das duas cônicas com centro (elipse e hipérbole) também têm representação algébrica idêntica, mas os termos a e b na definição das equações reduzidas das referidas cônicas em coordenadas cartesianas têm significados geométricos diferentes. Enquanto na elipse os segmentos que tem comprimento $2a$ e $2b$ são internos à curva, na hipérbole, são externos aos dois ramos desta. A

relação fundamental de ambas revela essa diferença de significados ($c^2 = a^2 - b^2$ para a elipse e $c^2 = a^2 + b^2$ para a hipérbole). Além do mais, podemos notar que os parâmetros dessas duas cônicas cêntricas nada têm em comum com o parâmetro da definição de parábola. Na seção 8 vimos como descrever a circunferência em coordenadas polares.

Exemplo 9.1. *Encontre a equação da elipse que tem um foco no polo e seus vértices em $(5,0)$ e $(2,\pi)$.*

SOLUÇÃO: Como os vértices estão em $(5,0)$ e $(2,\pi)$, o eixo polar e sua extensão estão ao longo do eixo principal da elipse. A diretriz correspondente ao foco no polo está à esquerda do foco, pois o vértice mais próximo a este foco está em $(2,\pi)$.

Portanto, a equação desejada é da forma $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$. Como os vértices estão em

$(5,0)$ e $(2,\pi)$, segue que $\frac{ed}{1 - e \cos 0} = 5$ e $\frac{ed}{1 - e \cos \pi} = 2$, ou $\frac{ed}{1 - e} = 5$ e $\frac{ed}{1 + e} = 2$, donde

se obtém $e = \frac{3}{7}$ e $d = \frac{20}{3}$. Então temos a equação: $r = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{20}{3}}{1 - \frac{3}{7} \cos \theta} \Leftrightarrow r = \frac{20}{7 - 3 \cos \theta}$.

Exemplo 9.2. *A equação de uma cônica é $r = \frac{5}{3 + 2 \operatorname{sen} \theta}$. Encontre a excentricidade,*

o tipo de cônica, seu parâmetro, a equação da diretriz correspondente ao foco no polo e os vértices.

SOLUÇÃO: Dividindo numerador e denominador por 3: $r = \frac{5/3}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta} \Leftrightarrow r = \frac{5/3}{1 + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta}$

Nessa equação temos parâmetro $p = \frac{5}{3}$, excentricidade $e = \frac{2}{3} < 1$, a Cônica é uma

elipse, $ed = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}d = \frac{5}{3} \Leftrightarrow d = \frac{5}{2}$. O eixo principal está sobre $\frac{\pi}{2}$ e a diretriz

correspondente ao foco no polo está acima do foco e sua equação é $r \operatorname{sen} \theta = \frac{5}{2}$.

Quando $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1$ e quando $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 5$, portanto, os vértices estão em $(1, \frac{\pi}{2})$

e $(5, \frac{3\pi}{2})$.

Exemplo 9.3. Encontre a equação polar da hipérbole que tem a reta $r \cos \theta = 4$ como diretriz correspondente ao foco no polo e $e = \frac{3}{2}$.

SOLUÇÃO: A diretriz dada é perpendicular ao eixo polar e está 4 unidades à direita do foco no polo. Portanto, a equação da hipérbole é do tipo $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$. Como $d=4$

e $e = \frac{3}{2}$, a equação se transforma em $r = \frac{\frac{3}{2} \cdot 4}{1 + \frac{3}{2} \cos \theta} \Leftrightarrow r = \frac{12}{2 + 3 \cos \theta}$.

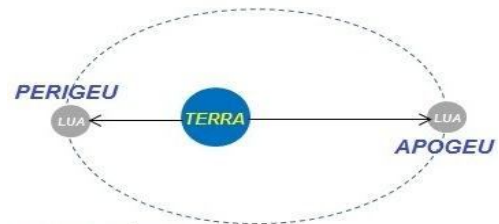
9.3. Distâncias de um Foco aos Vértices da Elipse.

As posições de um planeta que estão mais próximas e mais distantes do Sol são chamadas: *periélio* e *afélio*, respectivamente, e correspondem aos vértices da elipse. As distâncias do Sol ao periélio e afélio são chamadas *distância do periélio* e *distância do afélio*, respectivamente. Já para uma órbita elíptica de um satélite com a Lua em um dos focos, tem-se o *perilúnio* e o *apolúnio* correspondentes ao periélio e afélio do Sol, respectivamente. Para a Terra tem-se o *perigeu* e o *apogeu* com correspondência de significados.



Fonte: <http://dinamicogeo.blogspot.com.br> (2011)

Figura.60: Periélio e Afélio do Sol.



Fonte: <http://www.vaztolentino.com.br>(2011)

Figura.61: Perigeu e Apogeu da Terra.

O matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler, em 1609, publicou suas três leis do movimento planetário, sendo que uma delas afirma que um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos. Embora Kepler tenha formulado suas leis em termos dos movimentos dos planetas em torno do Sol,

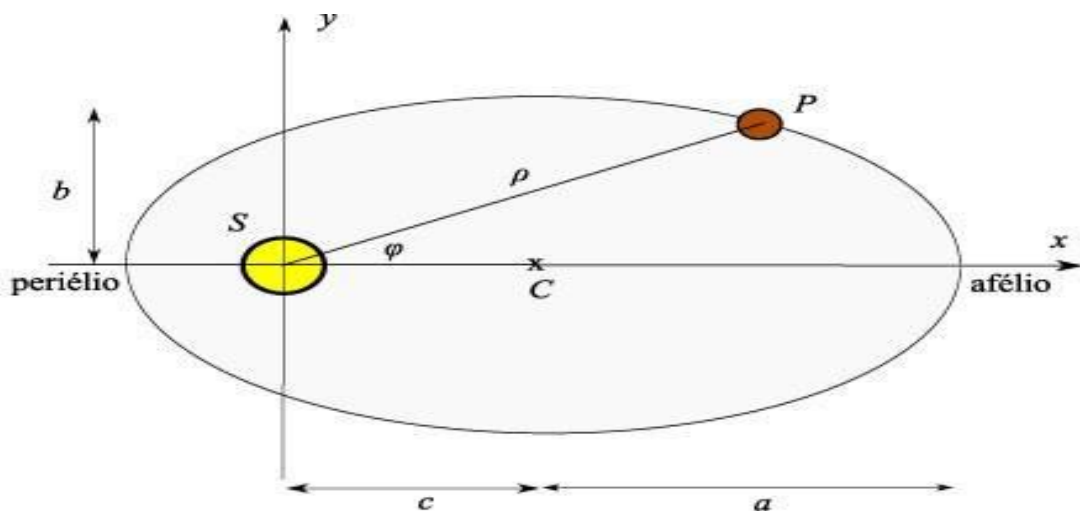
elas se aplicam também ao movimento de satélites, luas, cometas e outros corpos sujeitos a uma única força gravitacional.

Para o propósito de cálculos astronômicos, é útil expressar a equação de uma elipse em termos de sua excentricidade e e de seu semieixo maior a . Já sabemos que na equação de uma elipse com foco esquerdo na origem e equação da diretriz $x = -d$,

semieixo maior a e excentricidade e ($0 < e < 1$), tem-se que $d = \frac{a(1-e^2)}{e}$, então

$de = a(1-e^2)$. Substituindo essa expressão na equação polar $r = \frac{ed}{1-e \cos \varphi}$, obtemos

a equação polar de uma elipse escrita na forma: $r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi}$.



Fonte: [http://www.scielo.br/scielo.php?\(2011\)](http://www.scielo.br/scielo.php?(2011))

Figura.62: Sol no Foco Esquerdo da Elipse.

Na Figura, o Sol está no foco esquerdo F, de modo que no afélio temos $\varphi = 0$ e no

periélio temos $\varphi = \pi$. Então no afélio $r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos 0} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1-e} \Leftrightarrow r = a(1+e)$ e no

periélio $r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \pi} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} \Leftrightarrow r = a(1-e)$.

CONCLUSÃO: A distância do periélio de um planeta ao Sol é $a(1-e)$ e a distância do afélio é $a(1+e)$.

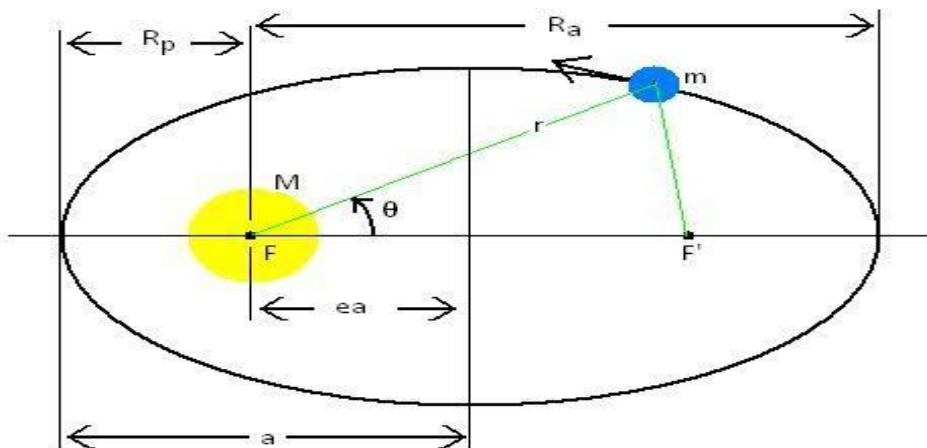
Em particular, podemos observar que numa elipse com foco direito na origem e diretriz $x = d$, temos as seguintes diferentes formas para expressar sua equação em

coordenadas polares: $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \frac{ed}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$. Tomando

$$p = a(1 - e^2) \Leftrightarrow \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \Leftrightarrow b^2 = a^2(1 - e^2) \Leftrightarrow b^2 = a^2 - a^2 e^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - a^2 \frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$, que é a relação fundamental da elipse. Conclusão: o parâmetro da elipse é igual ao produto da excentricidade pela distância do foco à sua diretriz correspondente: $p = ed$.

Para finalizar esta subseção vejamos agora algumas relações diretas entre a, b, c e as distâncias entre um foco e os vértices das cônicas cêntricas. Começemos analisando a relação desses elementos numa elipse, conforme a Figura.63 seguinte.



Fonte: <http://luznafisica.wikidot.com/uma-nova-visao-do-sistema-solar>

Figura.63: Distâncias Entre Foco e Vértices da elipse.

Consideremos a distância R_a de medida $m = F_2 A_1 = F_1 A_2$ como sendo a MAIOR distância entre um foco e um vértice e a distância R_p de medida $n = F_1 A_1 = F_2 A_2$ como sendo a MENOR distância entre um foco e um vértice. E ainda os semieixos $a = \frac{1}{2} A_1 A_2$; $b = \frac{1}{2} B_1 B_2$ e $c = ea = \frac{1}{2} F_1 F_2$. (Seja $M = \text{Sol}$ e $m = \text{Terra}$).

Na elipse temos as seguintes relações $\begin{cases} m = a + c \\ n = a - c \end{cases}$. Somando, subtraindo e

multiplicando esses valores obtemos:

$$\begin{cases} m+n=2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(m+n) \\ m-n=2c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(m-n) \\ mn = (a^2 - c^2) = b^2 \end{cases} \quad \text{Logo } b = \sqrt{mn}.$$

Se considerarmos as mesmas distâncias como definidas anteriormente para a elipse, agora entre os

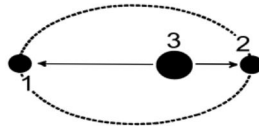
focos e os vértices de uma hipérbole, teremos as seguintes relações: $\begin{cases} m = c + a \\ n = c - a \end{cases}$.

Somando, subtraindo e multiplicando esses valores obtemos:

$$\begin{cases} m+n=2c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(m+n) \\ m-n=2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(m-n) \\ mn = (c^2 - a^2) = b^2 \end{cases} \quad \text{Logo } b = \sqrt{mn}$$

Como podemos notar, numa cônica com centro (elipse ou hipérbole), o semieixo b é a média geométrica das distâncias de um foco aos vértices. Assim, no caso da elipse que descreve a órbita de um planeta em torno do Sol, o semieixo menor é a média geométrica entre a *distância do afélio* (R_a) e a *distância do periélio* (R_p). No caso de um satélite orbitando a Lua, sua órbita elíptica tem semieixo menor igual à média geométrica entre a *distância do perilúnio* e a *distância do apolúnio*. Em qualquer desses casos $b = \sqrt{R_a R_p}$.

Exemplo 9.4. *Determine uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra em torno do Sol, com o Sol em um dos focos, considerando a excentricidade de 0,017 e o comprimento do eixo maior $2,99 \times 10^8$ km. (Considere o Sol em 3, foco direito da elipse, e a Terra no apolúnio 1 e no periélio 2, conforme a ilustração abaixo).*



SOLUÇÃO: Temos que $2a = 2,99 \times 10^8 \Leftrightarrow a = 1,495 \times 10^8$ e temos que $e = 0,017$. Pela

$$\text{equação } r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \quad \text{Então } r = \frac{(1,495 \times 10^8)(1-0,017^2)}{1+0,017 \cos \theta} \Leftrightarrow r = \frac{1,49 \times 10^8}{1+0,017 \cos \theta}$$

Exemplo 9.5. Considerando os mesmos dados do exemplo anterior, determine a distância da Terra ao Sol no afélio e no periélio.

SOLUÇÃO: A distância do periélio da Terra ao Sol é:

$$a(1-e) \approx (1,495 \times 10^8)(1-0,017) \approx 1,47 \times 10^8 \text{ km}.$$

E a distância do afélio da Terra ao Sol é:

$$a(1+e) \approx (1,495 \times 10^8)(1+0,017) \approx 1,52 \times 10^8 \text{ km}$$

9.4. Sugestão de Atividades

1) Escreva uma equação polar de uma cônica com foco na origem e com os dados fornecidos em cada caso:

a) Hipérbole com excentricidade $e = 7/4$ e diretriz $y=6$.

b) Elipse com excentricidade $e = 3/4$ e diretriz $x=-5$.

c) Parábola com vértice em $(4, \frac{3\pi}{2})$.

d) Elipse com excentricidade $e = 1/2$ e diretriz $r = 4 \sec \theta$.

2) Determinar a excentricidade, o tipo de cônica e uma equação da diretriz:

a) $r = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$.

b) $r = \frac{12}{4 - \operatorname{sen} \theta}$.

c) $r = \frac{9}{6 + 2 \operatorname{cos} \theta}$.

d) $r = \frac{3}{4 - 8 \operatorname{cos} \theta}$.

3) Encontre a excentricidade e a diretriz da cônica $r = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}$ e a nova equação

dessa cônica se ela girar no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo $3\pi/4$.

4) A órbita de Marte em torno do Sol é uma elipse com excentricidade 0,093 e semieixo maior $2,28 \times 10^8$ km. Encontre uma equação polar da órbita.

5) A órbita do cometa Halley, vista pela última vez em 1986 e com retorno esperado para 2062, é uma elipse com excentricidade 0,97 e com um foco no Sol. O

comprimento do eixo maior é 36,18 AU [AU=unidade astronômica que equivale à distância média entre a Terra e o Sol, cerca de $1,5 \times 10^8$ km]. Encontre uma equação polar para a órbita do cometa Halley. Qual é a distância máxima do cometa até o Sol?

6) O planeta Mercúrio percorre uma órbita elíptica com excentricidade 0,206. Sua distância mínima ao sol é de $4,6 \times 10^7$ km. Encontre sua distância máxima ao Sol.

7) Encontre uma equação polar para a elipse com foco na origem, excentricidade $1/3$ e diretriz com equação $r = 4 \sec \theta$.

8) Uma parábola tem vértice em $(4, \pi)$ e foco no polo. Encontre a equação da parábola e da diretriz.

9) A cônica de equação $r = \frac{9}{5 - 6 \sin \theta}$ tem um foco no polo. Encontre a excentricidade, identifique a cônica, escreva a equação da diretriz correspondente ao foco no polo e determine seu parâmetro.

10) A cônica de equação $r = \frac{6}{3 - 2 \cos \theta}$ tem um foco no polo. Encontre a excentricidade, identifique a cônica, escreva a equação da diretriz correspondente ao foco no polo e determine seu parâmetro.

RESPOSTAS

1) a) $r = \frac{42}{4 + 7 \sin \theta}$; b) $r = \frac{15}{4 - 3 \cos \theta}$;

c) $r = \frac{8}{1 - \sin \theta}$; d) $r = \frac{4}{2 + \cos \theta}$.

2) a) $e = 1$, parábola, $y = 1$;

b) $e = 1/4$, elipse, $y = -12$;

c) $e = 1/3$, elipse, $x = 9/2$;

d) $e = 2$, hipérbole, $x = -3/8$.

3) $e = 2$, $y = -1/2$, $r = \frac{1}{1 - 2 \sin(\theta - 3\pi/4)}$.

4) $r = \frac{2,26 \times 10^8}{1 + 0,093 \cos \theta}$

5) 35,64 AU.

6) $7,0 \times 10^7$ km.

7) $r = \frac{4}{3 + \cos \theta}$.

8) $r = \frac{8}{1 - \cos \theta}$; $r \cos \theta = -8$.

.

9) $e = 6/5$; hipérbole; $2r \sin \theta = -3$;

$p = 9/5$.

10) $e = 2/3$; elipse; $r \cos \theta = -3$; $p = 2$.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho esperamos ter otimizado o ensino das secções cônicas de uma maneira inovadora no Ensino Médio, por meio da representação unificada destas numa única equação em coordenadas polares, a qual se apresenta como uma ferramenta poderosa, porém, bastante simplificada e de fácil manipulação algébrica. Igualmente, esperamos poder encorajar o professor de matemática a abordar este tema cheio de sutilezas e aplicações práticas ainda não muito exploradas em sala de aula.

Desde os tempos mais remotos de sua história, época de Apolônio, Euclides e Arquimedes, até os dias atuais, na era das tecnologias da informática e da informação, as cônicas têm despertado sobremaneira a curiosidade de cientistas e aguçado o interesse de matemáticos quanto ao estudo e compreensão das suas propriedades características e aplicações diversas. Houve um tempo em que pareciam desprovidas de sentido de natureza prática, suas equações e representações geométricas eram tidas como devaneios de seu mais ilustre estudioso, o grande geômetra Apolônio, não despertando nos leigos um interesse por seus significados. Todavia, tempos mais tarde, revelaram-se algo intrigante, de beleza ímpar e com forte apelo matemático.

Nos dias hodiernos têm sido a base de aplicações em diversos ramos do conhecimento, tais como na Arquitetura, na Engenharia (Civil, Elétrica ou Mecânica), na Óptica, na Acústica, na Astronomia e na Astronáutica, etc. Assim sendo, esperamos e desejamos veementemente que o professor da Educação Básica não sinta receio em trabalhar com seus alunos esse tópico magnífico da matemática, rico em belezas peculiares e que agrega inúmeros conceitos de álgebra e geometria elementar, dentre outros, tão úteis e necessários para uma boa e sólida formação acadêmica. Adentrar no âmbito das cônicas é um momento azado de se rever e aprimorar conceitos básicos e mitigar até certo ponto a ignorância dos nossos alunos oriunda de um ensino fundamental deficiente.

Ressaltamos aqui que há décadas, conforme atestamos pela prática e vivência com diversos profissionais da área de ensino, o estudo das cônicas na educação básica, em geral, não tem recebido a atenção necessária que deve ser

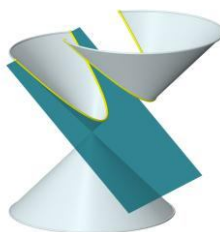
dispensada a uma série de conteúdos com o potencial de abstração que o mesmo concentra em si. Por ser facultada a escolha desse e dos demais conteúdos para compor a grade curricular do ano letivo nas séries do Ensino Médio nas escolas públicas e porque o tema que trata das seções cônicas apresenta sobremaneira uma gama de conceitos, equações e interpretações de gráficos, muitos professores optam pela exclusão de tal conteúdo para facilitar sua lida em sala, alegando a carência de base teórica oriunda do ensino fundamental apresentada cada vez mais por uma grande demanda do público alvo. Abordam-se exaustivamente outros temas de geometria euclidiana analítica e/ou espacial em detrimento do mesmo que acaba sendo relegado ao segundo ou ao terceiro plano devido à sua “complexidade” de compreensão e assimilação por parte da maioria dos discentes.

Nosso trabalho tem a pretensão de se contrapor a esta prática pouco desafiadora que se instalou nas escolas. Um tema como as seções cônicas que, a princípio pode parecer laborioso para se lidar com alunos nesse nível de ensino, poderá também se revelar, dependendo da dinâmica de condução e da criatividade do professor, uma experiência prazerosa e incitar a curiosidade e a descoberta, fato vivenciado por diversos matemáticos ao longo da história. Uma boa sugestão para agilizar o processo de ensino-aprendizagem das cônicas e torná-lo uma prática exitosa dentro da práxis pedagógica é fazer uso planejado de materiais concretos para construção, manipulação e visualização das mesmas e explorá-las exaustivamente através de aplicativos eletrônicos, como um bom software de geometria dinâmica no laboratório escolar de matemática. O Geogebra, por exemplo, cumpre bem essa função. É de uso livre e fácil de ser manipulado por qualquer pessoa.

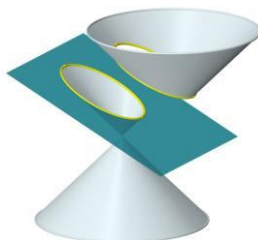
Sugerimos, pois, que o trabalho com as cônicas comece naturalmente com sua abordagem tradicional em coordenadas cartesianas e que se explorem a contento suas equações na forma reduzida (ou canônica) e na forma desenvolvida (geral ou normal), ampliando o conhecimento dos alunos com as possíveis transformações de eixos coordenados (por meio de translações e rotações). Em seguida, para um estudo suplementar mais requintado e desafiador, propomos que se enfatize as noções de coordenadas polares, culminando com a equação unificada das cônicas no referido sistema de coordenadas. O enfoque dado a este estudo pode vir a despertar a curiosidade do aluno para a sutileza de detalhes que unem

numa só equação um conjunto de lugares geométricos tão distintos e ao mesmo tempo tão semelhantes em nuances algébricas.

Neste ponto, voltamos a reiterar nossa convicção de que o ensino das secções cônicas pode e deve ser abordado no Ensino Médio de maneira imprescindível para a boa formação cognitiva dos discentes nesse nível de formação escolar. E que sua unificação em coordenadas polares traduz de forma simplificada um dos mais belos e encantadores tópicos da matemática clássica. Uma verdadeira quintessência da Geometria Analítica.



Fonte: Jorge Delgado- Geometria Analítica-PROFMAT (2012)
Figura.64: Cônica Regular - PARÁBOLA



Fonte: Jorge Delgado - Geometria Analítica-PROFMAT(2012)
Figura.65: Cônica Regular - ELIPSE.



Fonte: Jorge Delgado - Geometria Analítica-PROFMAT(2012)
Figura.66: Cônica Regular - HIPÉRBOLE.

REFERÊNCIAS

KISHAN, Hari. *Coordinate geometry of two dimensions*. New Delhi : Atlantic Publishers , 2006.

<http://www.dsato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html> . Acesso em: 10 fev. 2014.

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm33/historia.htm>. Acesso em: 10 fev. 2014.

LEITHOLD, Louis. *Cálculo com geometria analítica*. 2.ed. São Paulo : Harbra, 1986. v. 1

MENDONÇA, João M. M. *Módulo de análise matemática*. 2008. Dissertação (Mestrado Integrado de Engenharia Química) – Portugal : FEUP, 2008.

PAIVA, M. et al. *Matemática*. São Paulo : Moderna, 2010.

SMOLE, K. C. S. ; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática : ensino médio : 3ª série*. 5.ed. São Paulo : Saraiva, 2015.

STEINBRUCH, ; WINTERLE. *Geometria analítica*. 2.ed. São Paulo : Pearson Makron Books, 2006.

STEWART, James. *Cálculo*. 6.ed. São Paulo : Cengage Learning, 2011. v. 2

VENTURI, Jacir J. *Cônicas e quádras*. 5.ed. Curitiba : Unificado, 1949.