



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA - CAEN**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ECONOMIA**

**GUILHERME DA SILVA CORREIA**

**ANÁLISE DA ESTRUTURA DE DEPENDÊNCIA ENTRE ETFs DE CRIPTOATIVOS E  
OUTROS ATIVOS FINANCEIROS**

**FORTALEZA**

**2024**

GUILHERME DA SILVA CORREIA

ANÁLISE DA ESTRUTURA DE DEPENDÊNCIA ENTRE ETFs DE CRIPTOATIVOS E  
OUTROS ATIVOS FINANCEIROS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia do Programa de Pós-Graduação em Economia - CAEN da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Economia. Área de Concentração: Economia Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Leandro de Almeida Rocco

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C847a Correia, Guilherme da Silva.  
Análise da Estrutura de Dependência entre ETFs de Criptoativos e Outros Ativos Financeiros /  
Guilherme da Silva Correia. – 2024.  
63 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração,  
Atuária e Contabilidade, Programa de Pós-Graduação em Economia, Fortaleza, 2024.  
Orientação: Prof. Dr. Leandro de Almeida Rocco.

1. Estrutura de dependência. 2. ETF. 3. Criptoativos. 4. Cópulas Vine. I. Título.

CDD 330

---

GUILHERME DA SILVA CORREIA

ANÁLISE DA ESTRUTURA DE DEPENDÊNCIA ENTRE ETFs DE CRIPTOATIVOS E  
OUTROS ATIVOS FINANCEIROS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia do Programa de Pós-Graduação em Economia - CAEN da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Economia. Área de Concentração: Economia Aplicada

Aprovada em: 09/02/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Leandro de Almeida Rocco (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Maurício Benegas  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Francis Carlo Petterini Lourenço  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Dedico este trabalho aos meus pais.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, sou grato ao Criador pelo dom da existência.

Aos meus pais, Geraldo e Dalcinete, por todo investimento e incentivo na minha formação ao longo de toda a minha vida e ao meu irmão, Danilo, pela sua amizade.

Aos amigos que fiz em Fortaleza, Victor, Yure, Yuri, Pamella, Kaique, Pacheco, Brysa, José Carlos, Wendel e Letícia, pelo acolhimento, suporte e companheirismo ao longo dos últimos dois anos.

À minha namorada Janylle pelo apoio, amor, parceria e carinho.

Ao Prof. Dr. Leandro de Almeida Rocco, pela sua orientação, conselhos e paciência durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores Dr. Maurício Benegas e Dr. Francis Carlo Petterini Lourenço por aceitarem compor a banca examinadora e pelas suas valiosas contribuições para esta dissertação.

Ao corpo técnico e docente do CAEN por todo o auxílio durante minha formação.

Aos meus amigos e família por todo o apoio à distância.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

O entendimento da dinâmica de dependência entre ativos financeiros é fundamental para a tomada de decisões no processo de alocação de ativos financeiros. O presente trabalho busca estimar a estrutura da dependência entre ETFs baseados em criptoativos (HASH11, QBTC11 e QETH11) e outros ativos de investimento tradicionais (BOVA11, GOLD11, IVVB11, EURP11, TIP e SHY). Busca-se entender, através de três modelos de cópulas *vine*, se a exposição ao mercado de criptomoedas proporciona uma estrutura de *hedging* ante os ativos convencionais. Os resultados apontam que esses ativos são fortemente relacionados entre si, moderadamente associados com o mercado americano e europeu e fracamente correlacionados com o Brasil, ouro e *bonds* americanos. Além disso, podem servir como *hedge* para o mercado europeu e americano e diversificação no caso do mercado chinês e brasileiro, ouro e títulos americanos de curto prazo e os indexados à inflação.

**Palavras-chave:** Estrutura de dependência, ETF, Criptoativos, Cópulas Vine.

## ABSTRACT

Understanding the dynamics of dependency among financial assets is crucial for decision-making in the process of financial asset allocation. This study aims to estimate the dependency structure between ETFs based on crypto-assets (HASH11, QBTC11, and QETH11) and other traditional investment assets (BOVA11, GOLD11, IVVB11, EURP11, TIP, and SHY). It seeks to understand, through three vine copula models, whether exposure to the cryptocurrency market provides a hedging structure against conventional assets. The results indicate that these assets are strongly related to each other, moderately associated with the American and European markets, and weakly correlated with Brazil, gold, and U.S. bonds. Furthermore, they can serve as a hedge for the European and American markets and as a diversification option for the Chinese and Brazilian markets, gold, and short-term U.S. and inflation-indexed bonds.

**Keywords:** Dependence structure, ETF, Criptoassets, Vine Copulas.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1 – Densidade de uma cópula de independência . . . . .	27
Figura 3.2 – Densidade de uma cópula gaussiana com $\tau = 0.5$ . . . . .	28
Figura 3.3 – Densidade de uma cópula t de <i>Student</i> com $\tau = 0.5$ . . . . .	29
Figura 3.4 – Densidade de uma cópula de Clayton com $\tau = 0.5$ . . . . .	31
Figura 3.5 – Densidade de uma cópula de Gumbel com $\tau = 0.5$ . . . . .	32
Figura 3.6 – Densidade de uma cópula de Frank com $\tau = 0.5$ . . . . .	33
Figura 3.7 – Densidade de uma cópula de Joe com $\tau = 0.5$ . . . . .	34
Figura 5.1 – Primeira árvore para R-Vine, C-Vine e D-Vine, respectivamente . . . . .	46
Figura C.1 – Log-retorno diário dos ETFs selecionados . . . . .	62

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – ETFs selecionados, seus índices de referência e gestora . . . . .	43
Tabela 4.2 – Estatística descritiva e testes de raiz unitária dos log-retornos dos ETFs selecionados . . . . .	44
Tabela 5.1 – Resultado da estimação do modelo EGARCH . . . . .	45
Tabela 5.2 – Síntese de resultados importantes encontrados na R-Vine . . . . .	48
Tabela 5.3 – Síntese de resultados importantes encontrados na C-Vine . . . . .	48
Tabela 5.4 – Síntese de resultados importantes encontrados na D-Vine . . . . .	48
Tabela 5.5 – Testes de comparação das <i>vines</i> estimadas . . . . .	49
Tabela B.1 – R-Vine Estimada . . . . .	59
Tabela B.2 – C-Vine Estimada . . . . .	60
Tabela B.3 – D-Vine Estimada . . . . .	61

## LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Método sequencial para selecionar um modelo R-vine baseado no tau de Kendall. . . . .	58
---	----

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	15
2.1	Panorama do Mercado de Criptoativos . . . . .	15
2.2	Estudos empíricos . . . . .	17
3	METODOLOGIA . . . . .	21
3.1	Modelagem das marginais . . . . .	21
3.1.1	<i>Modelo ARCH</i> . . . . .	21
3.1.2	<i>Modelo GARCH</i> . . . . .	22
3.1.3	<i>Modelo EGARCH</i> . . . . .	22
3.1.4	<i>Extração das Marginais</i> . . . . .	23
3.2	Teoria de Cópulas . . . . .	23
3.2.1	<i>Medidas de Dependência</i> . . . . .	25
3.2.2	<i>Famílias de Cópulas</i> . . . . .	27
3.2.2.1	<i>Cópulas Elípticas</i> . . . . .	27
3.2.2.2	<i>Cópulas Arquimedianas</i> . . . . .	30
3.3	Cópulas Vine . . . . .	34
3.3.1	<i>Pair-Copula Constructions</i> . . . . .	35
3.3.2	<i>Regular Vines</i> . . . . .	36
3.3.3	<i>Seleção da Estrutura e Família de uma Cópula Vine</i> . . . . .	38
3.3.4	<i>Estimação de Parâmetros</i> . . . . .	39
3.3.5	<i>Simulação com Cópulas Vine</i> . . . . .	39
3.3.6	<i>Teste de Ajuste e Seleção de Modelos</i> . . . . .	40
4	BASE DE DADOS . . . . .	43
5	RESULTADOS . . . . .	45
6	CONCLUSÃO . . . . .	50
	REFERÊNCIAS . . . . .	52
	APÊNDICES . . . . .	58
	APÊNDICE A – Algoritmos . . . . .	58
	APÊNDICE B – Tabelas . . . . .	59
	APÊNDICE C – Figuras . . . . .	62

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a introdução do Bitcoin, através do *white paper* publicado por Nakamoto (2008), o universo das criptomoedas expandiu significativamente com o surgimento de milhares de novas moedas digitais. Essa proliferação tem causado um impacto notável nos mercados financeiros globais. Estes ativos se tornaram muito atrativos devidos aos grandes retornos apresentados nos últimos anos e sua natureza propiciou a criação de um ecossistema novo de investimentos, que passou a fazer parte do portfólio de diversos agentes do mercado financeiro. Segundo dados de Statista (2023b), este mercado possui, em 2023, uma capitalização total de cerca de US\$ 1,7 trilhão.

Essa classe de ativos apresentou elevado retorno ao longo da última década, sendo utilizados como uma estratégia de *hedging* contra a volatilidade de ativos convencionais, moedas fiduciárias ou riscos geopolíticos e também como um instrumento de diversificação de portfólio. Conforme pontua Almeida e Gonçalves (2022), existem evidências que estes ativos podem ser uma boa opção de proteção nas carteiras contra riscos de mercado na literatura, contudo estas propriedades variam ao longo do tempo e das condições externas.

Investir diretamente nestes ativos nem sempre é tão simples, sendo necessário o entendimento do funcionamento das chamadas *wallets*, carteiras digitais que armazenam estas moedas digitais. Os investidores precisam garantir que suas carteiras estejam protegidas e em casos de perda do acesso, seja por esquecimento da senha ou da chave privada, o investidor perde totalmente o acesso às suas criptomoedas (SURATKAR *et al.*, 2020).

Dada a natureza destes ativos de serem anônimos, descentralizados, com livre acesso global, funcionarem intermitentemente e não possuírem uma regulação específica em muitos países, o mercado de criptomoedas tornou-se um terreno fértil para uma variedade de crimes cibernéticos. Muitas corretoras que distribuem essa classe de ativos sofrem ataques constantes de *hackers* que buscam roubar as moedas digitais, existe falta de transparência em relação à custódia dos fundos dos usuários nas *exchanges* e muitos cibercriminosos criam aplicativos e criptomoedas falsas para aplicação de golpes financeiros (XIA *et al.*, 2020).

Diante dessas dificuldades, uma nova maneira de se expor ao mercado de moedas digitais seria por meio de *exchange-traded funds* (ETFs). Por estar abarcado na estrutura da bolsa de valores, investir em um ETF apresenta algumas diferenças em relação a investir diretamente em uma criptomoeda, sendo uma opção mais segura diante da existência de uma estrutura regulatória que as instituições financeiras envolvidas devem seguir. Além disso, o investimento

é simplificado, sem a necessidade de lidar com *exchanges*, estas que podem apresentar preços bastante diferentes para o mesmo ativo (MAKAROV; SCHOAR, 2020), e seguro, pois reduz a necessidade de preocupação com a custódia do criptoativo.

Outra diferença decorre do fato que os ETFs são negociados em dias úteis e nos horários em que as bolsas de valores de valores estão operando, enquanto que no mercado de criptomoedas é possível operações a qualquer momento, o que permite que ocorram movimentos rápidos e imprevisíveis nos preços dos ativos fora do horário convencional.

Em fevereiro de 2021, o primeiro ETF de criptoativo foi lançado ao mercado no Canadá e, poucos meses depois, na bolsa de valores brasileira. A gestora de recursos *QR Asset Management* fez a oferta pública inicial do QBTC11, cujo índice de referência é o *CME CF Bitcoin Reference Rate* (GOEKING, 2021). A partir de então, outras gestoras lançaram novos ETFs relacionados ao ecossistema *crypto* em todo o mundo. Apesar do surgimento recente, em 2022 alguns destes ETFs de criptomoedas já estavam entres os 10 maiores pelo critério do número de cotistas no Brasil (ECONOMATICA, 2023), o que demonstra o interesse de muitos investidores em adicionar este tipo de ativo em suas carteiras como forma de diversificação e rentabilidade.

Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo analisar a estrutura de dependência entre os ETFs focados em criptoativos e dos voltados a ativos tradicionais de investimento tais como índices de ações e títulos públicos americanos de curto prazo e indexados à inflação. Embora exista na literatura trabalhos que analisam como as criptomoedas se relacionam com ativos convencionais (CHARFEDDINE; BENLAGHA, 2016; JERIBI; FAKHFEKH, 2021; OSMAN *et al.*, 2023), o diferencial deste trabalho reside no fato de analisar uma nova classe de ETFs que apresentam uma maneira alternativa e simplificada de se expor ao mercado *crypto*.

A análise busca entender se os novos ETFs são uma opção de diversificação de portfólio, agem como um porto seguro em tempos de turbulência do mercado ou se estão sincronizadas com movimentos de mercados consolidados, o que pode servir de auxílio para diferentes agentes interessados em investir nestes ativos, seja para proteção ou para especulação. Para atender tal objetivo, serão utilizados modelos baseados em cópulas *vine*, os quais são muito úteis na modelagem de dependência entre muitas variáveis.

O trabalho possui outras cinco seções além desta introdução. No referencial teórico são apresentados trabalhos sobre criptomoedas e análise de dependência entre ativos financeiros. Na terceira seção são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados nesta dissertação.

Na quarta seção apresenta-se a base de dados utilizada. Na quinta seção são discutidos os resultados encontrados. Por fim, as considerações finais do trabalho são realizadas na sexta seção.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção é apresentada uma contextualização histórica e funcional dos criptoativos, desde o surgimento do Bitcoin ao desenvolvimento de outras tecnologias que hoje compõem esse mercado, bem como os desafios enfrentados por estes ativos ao longo do tempo. Em seguida, são expostos alguns trabalhos empíricos que examinam as características e comportamentos destes instrumentos financeiros.

### 2.1 Panorama do Mercado de Criptoativos

O primeiro criptoativo, o Bitcoin, foi apresentado no trabalho de Nakamoto (2008), sendo lançado no ano seguinte e sua primeira taxa de conversão oficial foi de 1.006 *bitcoins* por dólar americano (BURNISKE; TATAR, 2017; JEEGERS, 2023). A ideia fundamental era criar um sistema de pagamentos *peer-to-peer* (P2P) descentralizado, cujas transações são registradas e validadas em um banco de dados público chamado de *blockchain*.

A geração do Bitcoin ocorre por meio da resolução de problemas matemáticos complexos através de um método chamado de *Proof-of-Work* (PoW), sendo este processo conhecido como mineração por blocos, o qual registra os Bitcoins gerados na *blockchain*. A cada quatro anos, a mineração de cada bloco se torna mais computacionalmente difícil. A oferta máxima da moeda é limitada em 21 milhões de unidades (JEEGERS, 2023). Além de pioneira, esta é a maior moeda em capitalização de mercado (COINMARKETCAP, 2024).

Desde então, outros criptoativos surgiram para atender diferentes propósitos. Burniske e Tatar (2017) divide estes ativos em três categorias, (i) criptomonedas, que são moedas digitais criptografadas que podem ser trocadas por meio de uma rede; (ii) *cryptocommodities*, recursos digitais que podem ser usados como insumo para um bem digital final; (iii) *tokens* (ou *cryptotokens*), bens ou serviços digitais finais.

Após o Bitcoin, o segundo maior criptoativo é o Ethereum, que foi lançado por Buterin (2013). Apesar de inspirado no seu predecessor, seu funcionamento é bem diferente. O Ethereum funciona como uma plataforma que permite aos usuários desenvolverem aplicativos descentralizados (dApps) e elaborem contratos inteligentes (*smart contracts*) (BURNISKE; TATAR, 2017). Dessa forma, pode-se enquadrá-lo na categoria de *cryptocommodity*. Além disso, o Ethereum possui uma criptomoneda, o Ether, que opera de modo similar ao Bitcoin.

Os contratos inteligentes do Ethereum representam uma forma avançada de acordos

contratuais, estruturados inteiramente em código. Neles, as partes envolvidas podem estabelecer condições pré-determinadas que, uma vez cumpridas, desencadeiam automaticamente a execução do contrato. Esta abordagem inovadora de contratos digitais oferece uma transparência e segurança excepcionais, eliminando a necessidade de intermediários para sua validação (KUSHWAHA *et al.*, 2022).

O Ethereum também pode ser utilizado para a produção de *cryptotokens*, tendo, em um período recente, ganhado popularidade a utilização de *Non-fungible tokens* (NFTs) ou *tokens* não fungíveis. NFTs são criptoativos que representam a propriedade e autenticidade de um bem, digital ou físico, por meio da *blockchain*. Diferente das criptomoedas, estes não são intercambiáveis, dessa forma, a posse de um NFT garante a exclusividade do bem (DOWLING, 2022). Em decorrência desta característica, se tornaram muito populares para o mercado de artes digitais, tais como imagens, vídeos e música (NOBANE; ELLILI, 2023).

Segundo Statista (2023a), atualmente, existem cerca de nove mil diferentes criptomoedas, cada uma com diferentes propósitos e funcionalidades. Contudo, muitos destes projetos acabam se mostrando fraudulentos, servindo para fins escusos como lavagem de dinheiro, chantagem ou são esquemas Ponzi (BARTOLETTI *et al.*, 2021).

Apesar da expansão destes mercados, as criptomoedas não conseguiram ao longo dos anos serem adotadas como moeda, pois muitas destas não conseguem atender as condições fundamentais para serem definidas como tal, isto é, servir como meio de troca, reserva de valor e unidade de conta. Conforme argumenta Ammous (2018), a maioria das moedas digitais são inadequadas para serem unidades de conta em decorrência da sua alta volatilidade e oferta rígida. Além disso, o autor ressalta que apenas o Bitcoin parece atrair uma demanda suficiente para que este funcione como uma reserva de valor e meio de troca. Diante disso, algumas regulações que foram surgindo ao redor do mundo, tratam as criptomoedas apenas como um ativo e não como uma moeda de fato (HU *et al.*, 2021).

Ademais, um dos grandes desafios enfrentados por estes ativos é o de escalabilidade, isto é, a capacidade para suportar eficientemente um número crescente de transações dentro de sua rede, pois existem limites de transferências dentro dos blocos, o que impede que a adoção das criptomoedas seja ainda mais difundida, entretanto muitos dos usuários trabalham em melhorias para minimizar e resolver este problema (KHAN; STATE, 2019).

Apesar do crescente interesse e adoção dos criptoativos nos últimos anos, estes ainda possuem dificuldades para que sejam utilizados de forma mais generalizada, além disso, fazer

a valoração destes ativos pode ser um desafio para investidores (HU *et al.*, 2021). Liu (2022) apresenta algumas possíveis maneiras para realização do *valuation* destes ativos por meio de diferentes abordagens, sendo estas, (i) pela ótica monetária, sendo similar à realização de um fluxo de caixa descontado; (ii) pela ótica do mercado, ou seja, analisar estas criptomoedas por meio de múltiplos, tais como razão entre valor da rede e volume de transações e razão do preço e utilidade da moeda; (iii) com base nos custos de geração e mineração.

## 2.2 Estudos empíricos

Alguns trabalhos foram realizados para analisar o comportamento e as características distintas desses instrumentos financeiros. Essas análises focaram não apenas nas singularidades desta classe de ativos, mas também em como eles se alinham ou divergem de opções de investimento mais tradicionais do mercado.

Nos trabalhos de Gebka e Wohar (2013), Zhang *et al.* (2018), Bouri *et al.* (2019), analisam-se as características dos retornos das criptomoedas. Em geral, são leptocúrticos, suas autocorrelações decaem rapidamente, existem *clusters* de volatilidade e fortes efeitos de alavancagem, além de dependência de longo alcance tanto para volatilidade quanto para os retornos e uma correlação entre preço e volume.

Liu e Tsyvinski (2021) analisa como fatores de rede (a adoção de novos usuários às moedas digitais) e de produção (os custos de mineração, tais como eletricidade e poder computacional) influenciam e podem prever os retornos das criptomoedas. Os resultados revelam que fatores de rede são significativos na explicação dos retornos, enquanto os fatores de produção não. Além disso, aspectos como a tendência do mercado e a atenção dos investidores a estes ativos são importantes para prever retornos, mas há pouca evidência de que ativos tradicionais, como ações, moedas e *commodities*, influenciam significativamente nos rendimentos desta classe ativos.

Gadi e Sicilia (2022) analisam as propriedades de *hedge* e diversificação de várias criptomoedas em relação aos principais índices de mercado globais. Abrangendo o período de 2018 a 2022, o estudo utiliza o modelo de Baur e McDermott (2010) para avaliar o comportamento desses ativos ante os mercados do G7 e BRICS, com foco nas mudanças causadas pela pandemia da COVID-19. O estudo revela que, durante a pandemia, o ouro perdeu suas propriedades de *hedging*, enquanto algumas *stablecoins*<sup>1</sup> se mantiveram eficazes para a maioria dos

---

<sup>1</sup> São criptomoedas com mecanismos de estabilização de preços (MITA *et al.*, 2019).

mercados. O Bitcoin, que antes era um instrumento de *hedge*, passou a ser um diversificador após a crise. Outras criptomoedas como Ethereum, Litecoin e BitcoinCash também se apresentaram como diversificadores.

Nos trabalhos de Yi *et al.* (2018) e Charfeddine *et al.* (2022) são analisadas conexões das volatilidades no mercado de criptoativos. No primeiro artigo, aponta-se que nem sempre as criptomoedas com maior capitalização são propagadores de volatilidade, enquanto as menores são receptoras. No segundo, a análise se baseia nas diferentes classes desses ativos, sendo estes divididos em três tipos: moedas mineradas, moedas não mineradas e *tokens*. Os autores demonstram que existe uma forte dependência em geral neste mercado e que as moedas mineradas possuem efeito de contágio nas outras duas classes, sendo o Ethereum uma moeda que afeta todas as outras. As moedas não mineradas e os *tokens* apresentam baixa relação entre si, o que pode indicar que investir nestes dois mercados é uma possível forma de diversificação.

A modelagem da dependência entre ativos financeiros é extremamente importante para uma melhor gestão de risco e alocações no portfólio de investidores, sendo possível criar estratégias de investimento que ofereçam uma maior proteção diante de eventos de cauda. Em geral, muitos trabalhos e modelos desenvolvidos utilizam o coeficiente correlação de Pearson como forma de medir a associação entre diferentes instrumentos financeiros. Contudo, esta medida captura apenas a relação linear entre as variáveis, o que pode ser um fator limitante dado que séries financeiras, usualmente, apresentam associações não lineares devido a serem leptocúrticas e assimétricas (POON *et al.*, 2004; HU, 2006; HUANG *et al.*, 2009).

Diante disso, faz-se necessário a utilização de outras abordagens que possam ser mais flexíveis e melhor ajustadas para lidar com dados financeiros; uma destas metodologias, é a teoria de cópula que será adotada neste trabalho.

No trabalho de You e Daigler (2010) analisa-se os efeitos da diversificação em investimentos em índices de ações interacionais utilizando a correlação condicional como método de avaliação. Utilizando dados de mercados nos anos 1990 e 2000, o artigo conclui que os benefícios da diversificação variam conforme o tempo, são afetados pela não normalidade e dependem do *benchmark* utilizado.

Reboredo (2012) analisa a relação entre os preços do petróleo e os preços das *commodities* agrícolas milho, soja e trigo. Utiliza-se um modelo ARMA-TGARCH para extração das marginais e um modelo de cópulas variantes no tempo para análise de dependência. São utilizados dados semanais de janeiro de 1998 a abril de 2011, obtidos da *Food and Agriculture*

*Organization's International Commodity Price Database e International Energy Agency*. Os resultados mostram uma fraca dependência entre os preços de alimentos e petróleo, sem evidência de dependência em eventos extremos.

Righi e Ceretta (2013) analisam a estrutura de dependência entre os log-retornos dos índices de sete setores da BM&F/Bovespa, de janeiro de 2007 a dezembro de 2011 por meio de modelos de cópulas *vine*. É montado um portfólio com pesos iguais para os índices setoriais e feita a previsão de seu VaR para as últimas 100 observações. Os resultados mostraram que há uma considerável dependência entre os setores analisados, especialmente entre o setor de industrial (INDX) e de materiais básicos (IMAT).

Riccetti (2013) conduz uma análise de alocação de ativos macro para um portfólio com *commodities*. Os ativos escolhidos são o índice de *commodity New York CRB*, o índice de ações *Dow Jones Industrial*, o índice de títulos do tesouro americano *Merrill Lynch US Treasury 1–10 years* e a taxa de câmbio entre o Dólar e o Euro. Realiza-se uma análise de previsão de carteira hipotética e compara-se o resultado com diferentes modelos de otimização do portfólio. Os resultados apontam que o modelo de cópulas apresentou melhor performance que o de média-variância, porém outros modelos mais simples apresentam desempenhos similares.

Numa análise para criptomoedas, Boako *et al.* (2019) examinam as relações de dependência e o *value-at-risk* (VaR) de um portfólio composto por cinco criptomoedas Bitcoin, Dash, Ethereum, Litecoin, Ripple, e Stellar utilizando cópulas *regular vines* (R-Vine). Segundo os autores, o Ethereum oferece o melhor *trade-off* de risco-retorno. Além disso, foi encontrado forte dependência entre Bitcoin e Ethereum, já os outros criptoativos tinham baixa associação entre si, mas um pouco mais elevada com o Bitcoin.

Tiwari *et al.* (2020) analisa o efeito de contágio e a dependência entre o Bitcoin, Litecoin e Ripple por meio de um modelo de cópulas não paramétrico entre agosto de 2013 a junho de 2018. As marginais foram extraídas por meio de um modelo GAS (*Generalized Autoregressive Score*). Os resultados apontam forte dependência entre os ativos analisados tanto em momentos de alta do mercado quanto de baixa, além disso, existe alto risco de contágio em eventos extremos.

Jeribi e Fakhfekh (2021) analisam a relação entre cinco criptomoedas, Bitcoin, Dash, Monero, Ethereum e Ripple, os preços do petróleo (WTI) e os índices S&P500 e NASDAQ. O objetivo é identificar a melhor estratégia de *hedging* de um portfólio composto por estes ativos a partir dos resultados encontrados por meio da estimação de um modelo FIEGARCH, um modelo

de cópulas para valores extremos e análise de razões de *hedge*. Os dados são de janeiro de 2016 a novembro de 2019. Os resultados mostram um efeito de alavancagem negativo e significativo nos retornos dos índices americanos e WTI, enquanto os mercados de criptomoedas exibem um efeito de volatilidade assimétrica positiva. Além disso, a dependência da cópulas bivariadas é muito fraca. Os autores sugerem que os investidores devem manter mais ativos financeiros convencionais no seu portfólio do que digitais.

Em Osman *et al.* (2023) é feita uma análise sobre estratégias de diversificação com ativos tradicionais e de criptomoedas por meio da utilização do modelo de R-Vine em conjunto com o modelo de otimização de portfólio *Mean-CVaR*. Os resultados apontam que as criptomoedas podem atuar como um *hedge* fraco ou como um porto seguro contra os índices de mercado em algumas situações. Além disso, sugere que ao incluir o Bitcoin e o Ethereum em um portfólio, adicionar o S&P500 pode não ser muito interessante do ponto de vista do risco.

A seção a seguir apresenta a metodologia utilizada nesse trabalho.

### 3 METODOLOGIA

Neste trabalho parte-se de duas metodologias para a modelagem da estrutura de dependência entre os ativos financeiros selecionados. A primeira diz respeito às estimações das distribuições marginais e a segunda se refere à estimação de modelos de cópulas *vine*.

Para a primeira parte, utiliza-se um modelo de heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (GARCH), sendo esta família de modelos escolhida para que possa ser realizada uma inferência das funções marginais dos ativos financeiros de maneira filtrada. Para a segunda parte, utiliza-se da abordagem de *Pair-Copula Construction*, desenvolvida por Bedford e Cooke (2002).

#### 3.1 Modelagem das marginais

##### 3.1.1 Modelo ARCH

O modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) foi proposto por Engle (1982) para descrever a variância condicional dos retornos de séries temporais. A principal diferença deste modelo para os da classe ARIMA é que permitem que esta volatilidade varie no tempo com base numa função quadrática dos retornos passados (BUENO, 2018).

Seja  $r_t$  uma série temporal estacionária que representa o retorno de um ativo, com média  $\mu$ , então esta pode ser expressa da seguinte forma:

$$r_t = \mu + \xi_t \quad (3.1)$$

O modelo ARCH(q) é então definido como:

$$\xi_t = \sigma u_t, \quad u_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} (0, 1) \quad (3.2)$$

$$\sigma^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \xi_{t-i}^2 \quad (3.3)$$

onde  $\xi_t$  são os termos do erro e  $u_t$  é um ruído branco. Neste modelo impõe-se as restrições  $\omega > 0$  e  $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$  para que a variância condicional seja positiva.  $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$  é uma condição necessária para que a série seja estacionária.

### 3.1.2 Modelo GARCH

Um característica do modelo ARCH é que este pode ser pouco parcimonioso, sendo necessário muitos parâmetros de defasagem para que estes possam ser devidamente ajustados. Diante disto, Bollerslev (1986) propõe uma generalização que possibilita uma memória mais longa na variância e uma estrutura de *lags* mais flexível. Partindo da série definida na equação 3.1. O modelo GARCH(p,q) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\xi_t = \sigma u_t, \quad u_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} (0, 1) \quad (3.4)$$

$$\sigma^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \xi_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.5)$$

onde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$  e  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$  para que a variância condicional seja positiva é essencial que  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  para que esta possa existir.

No geral, para análise de séries financeiras utiliza-se um GARCH(1,1), pois este apresenta um desempenho satisfatório comparado com outras especificações mais elevadas para (p,q), mesmo sendo mais parcimonioso (HANSEN; LUNDE, 2005; JAFARI *et al.*, 2007).

### 3.1.3 Modelo EGARCH

O modelo GARCH possui algumas limitações, entre elas, retornos positivos e negativos são tratados de forma simétrica em termos da volatilidade, entretanto séries financeiras tendem a responder de forma mais acentuada a choques negativos do que a positivos. Além disso, seus parâmetros precisam ser sempre positivos para garantir que a volatilidade condicionada também o seja, esta condição pode dificultar a estimação do modelo (NELSON, 1991).

Diante desta problemática, Nelson (1991) propôs um modelo que pode contornar estas limitações, o *exponential* GARCH (EGARCH). Partindo das equação 3.1 e 3.2, o modelo EGARCH (p,q) pode ser definido da seguinte forma:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{j=1}^q (\alpha_j u_{t-j} + \gamma_j (|u_{t-j}| - \mathbb{E}|u_{t-j}|)) \quad (3.6)$$

O parâmetro  $\gamma$  permite encontrar a magnitude dos choques. Quando  $\gamma = 0$ , choques positivos e negativos possuem o mesmo impacto na volatilidade. Como a variância é avaliada por um logaritmo, os parâmetros podem ser não positivos.

### 3.1.4 *Extração das Marginais*

A estimação do modelo GARCH é utilizado como um método para inferência das funções marginais, conforme proposto nos trabalhos de Shih e Louis (1995) e Joe e Xu (1996). Nesta abordagem, os parâmetros das distribuições marginais são estimados separadamente e então uma função cópula é estimada de forma condicionada às estimações do modelo de volatilidade (LIU; LUGER, 2009). Além disso, o modelo GARCH é utilizado como uma filtragem que remove a dependência serial para que o modelo de cópulas possa ser estimado com base nos resíduos independentes e identicamente distribuídos após esta filtragem (BRECHMANN; JOE, 2015).

Após a estimação dos modelos univariados, extrai-se os resíduos e os padroniza, isto é:

$$\xi_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}^2} \quad (3.7)$$

então transforma-se esta matriz de resíduos padronizados em pseudo-observações conforme proposto em Berg e Aas (2009), a qual será utilizada para a modelagem da estrutura de dependência com o modelo de cópulas.

Realizou-se os teste ponderados de Ljung-Box e ARCH-LM propostos por Fisher e Gallagher (2012) nos resíduos padronizados dos modelos estimados, sendo uma reformulação dos teste originais de Ljung e Box (1978) e Li e Mak (1994), baseando-se no quadrado do traço da matriz de autocorrelação, o que resulta em uma estatística de teste mais estável numericamente, mesmo com muitas defasagens. A hipótese nula do teste Q de Ljung-Box ponderado é de que a série temporal não apresenta autocorrelação. O teste ponderado ARCH-LM avalia se o processo ARCH escolhido é adequado.

## 3.2 Teoria de Cópulas

Para analisar a estrutura de dependência entre os ativos financeiros selecionados utiliza-se do conceito de cópulas, as quais são funções que conectam distribuições marginais

univariadas às suas distribuições multivariadas. Segundo Kolev *et al.* (2006) a definição formal de cópulas é:

**Definição 3.2.1 (Definição Formal de Cópulas)** *Uma cópula  $n$ -dimensional é uma função  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Groundedness: para todo  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$ ,  $C(\mathbf{s}) = 0$  se ao menos uma coordenada  $s_i = 0$ .*
2.  *$C(s_1, \dots, s_n)$  é  $n$ -crescente.*
3.  *$C(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1) = s_i \forall s_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$ .*

Outra definição informal de cópula dada por Mai e Scherer (2014) é a seguinte:

**Definição 3.2.2 (Definição Informal de Cópulas)** *Uma função  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  é chamada de cópula se existe um vetor aleatório  $(S_1, \dots, S_N)$  tal que cada componente  $S_k$  possui distribuição marginal uniforme em  $[0, 1]$ , onde  $k = 1, \dots, n$  e  $C(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{P}(S_1 \leq s_1, \dots, S_n \leq s_n), s_1, \dots, s_n \in [0, 1]$ .*

Neste estudo, o vetor aleatório  $S = (S_1, \dots, S_N)$  é definido como os vetores de resíduos padronizados derivados dos modelos GARCH univariados aplicados aos ativos financeiros selecionados para análise. Esses resíduos são então transformados em pseudo-observações que se distribuem uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ . A definição de cópula parte do teorema de Sklar (1959), o qual é marco inicial da teoria das cópulas.

**Teorema 3.2.1 (Teorema de Sklar)** *Seja  $S$  um vetor aleatório  $n$ -dimensional com uma função de distribuição conjunta  $H$  e funções de distribuição marginais  $H_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , então a função de distribuição conjunta pode ser expressa da seguinte maneira*

$$H(s_1, \dots, s_n) = C(H_1(s_1), \dots, H_n(s_n)) \quad (3.8)$$

*onde  $C$  é uma cópula  $n$ -dimensional. Para distribuições absolutamente contínuas, tem-se que a cópula  $C$  é única.*

**Prova:** Ver Nelsen (2006) ou McNeil *et al.* (2015).

Segundo Czado (2019), do teorema 3.2.1, tem-se a função densidade de probabilidade ou função massa de probabilidade dada por

$$h(s_1, \dots, s_n) = c(H_1(s_1), \dots, H_n(s_n)) h_1(s_1) \cdots h_n(s_n) \quad (3.9)$$

para alguma cópula  $n$ -dimensional  $C$  com densidade de cópula  $c$ .

O inverso também é verdadeiro, a cópula correspondente a uma distribuição multivariada  $H$  com distribuição marginal  $H_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , pode ser representada como

$$C(s_1, \dots, s_n) = H(H_1^{-1}(s_1), \dots, H_n^{-1}(s_n)) \quad (3.10)$$

e sua densidade de cópula ou função massa de probabilidade é determinada por

$$c(s_1, \dots, s_n) = \frac{h(H_1^{-1}(s_1), \dots, H_n^{-1}(s_n))}{h_1(H_1^{-1}(s_1)) \cdots h_n(H_n^{-1}(s_n))}. \quad (3.11)$$

As principais aplicações do teorema de Sklar são a estimação da dependência entre variáveis padronizadas e a construção de distribuições multivariadas (KOLEV *et al.*, 2006; MCNEIL *et al.*, 2015; CZADO, 2019).

Outro conceito importante para se estabelecer ao falar sobre cópulas são os limites de Fréchet–Hoeffding.

**Teorema 3.2.2 (Limites de Fréchet–Hoeffding)** *Toda cópula  $C(s_1, \dots, s_n)$  satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$W^n(\mathbf{s}) \leq C(\mathbf{s}) \leq M^n(\mathbf{s}) \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $W^n(\mathbf{s}) = \max(\sum_{i=1}^n s_i + 1 - n, 0)$  e  $M^n(\mathbf{s}) = \min(s_1, \dots, s_n)$ .

O limite inferior é dado por  $W(s_1, \dots, s_n)$  e o superior por  $M(s_1, \dots, s_n)$ , respectivamente.

### 3.2.1 Medidas de Dependência

Como cópulas são formas de medir a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias, nesta subsubção será discutido algumas medidas de associação importantes para realização da análise presente neste trabalho.

**Definição 3.2.3 (Coeficiente de Pearson)** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias quaisquer, seu coeficiente de correlação é dado por:*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} \quad (3.13)$$

O coeficiente de correlação,  $\rho$  varia entre  $[-1, 1]$ . Valores mais próximos de zero indicam baixa relação entre as variáveis. Quando  $\rho > 0$ , a correlação é positiva, por outro lado, se este for negativo, indica correlação negativa. Importante ressaltar que este coeficiente mede apenas relações lineares, o que pode ser um problema ao modelar séries financeiras, pois estas, normalmente, são leptocúrticas e assimétricas, o que pode indicar que se relacionam não linearmente (HUANG *et al.*, 2009).

Uma outra medida de associação é o tau de Kendall, o qual é baseado no número de concordâncias e discordâncias entre os pares de observações. Considere um vetor aleatório  $(X_1, Y_1)$  e um segundo vetor com mesma distribuição, porém independente do primeiro  $(\dot{X}_1, \dot{Y}_1)$ , estes vetores são concordantes se  $(X_1 - \dot{X}_1)(Y_1 - \dot{Y}_1) > 0$  e discordantes quando  $(X_1 - \dot{X}_1)(Y_1 - \dot{Y}_1) < 0$  (NELSEN, 2006; CZADO, 2019).

**Definição 3.2.4 (Tau de Kendall)** O  $\tau$  de Kendall entre os vetores aleatórios  $(X_1, Y_1)$  e  $(\dot{X}_1, \dot{Y}_1)$  é definido da seguinte forma

$$\tau(X_1, Y_1) = P\{(X_1 - \dot{X}_1)(Y_1 - \dot{Y}_1) > 0\} - P\{(X_1 - \dot{X}_1)(Y_1 - \dot{Y}_1) < 0\}. \quad (3.14)$$

Por fim, apresenta-se aqui o conceito de dependência de cauda, a qual mede a dependência entre pares de variáveis aleatórias com base em suas distribuições marginais contínuas. É medida por dois coeficientes, um superior e outro inferior, os quais focam especificamente na dependência nas caudas das distribuições bivariadas, oferecendo uma visão da intensidade dessa relação em eventos extremos. Além disso, estes coeficientes são definidos em termos de probabilidades condicionais que ultrapassam quantis elevados (MCNEIL *et al.*, 2015).

**Definição 3.2.5 (Coeficientes de Dependência Caudal)** O coeficiente de dependência cauda superior de uma distribuição bivariada com cópula  $C$  é definido como:

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(X_2 > H_2^{-1}(q) | X_1 > H_1^{-1}(q)) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q}, \quad (3.15)$$

Por outro lado, o coeficiente de dependência cauda inferior é:

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq H_2^{-1}(q) | X_1 \leq H_1^{-1}(q)) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q} \quad (3.16)$$

Neste trabalho, são seguidas as definições presentes nos trabalhos de Talbi *et al.* (2021) e Osman *et al.* (2023), um ativo é considerado um *hedge* forte quando a associação, medida pelo  $\tau$  de Kendall, entre estes é negativa, fraco quando igual ou próxima de zero. E é um porto seguro fraco quando o coeficiente de dependência caudal inferior,  $\lambda_l$ , é zero e é um porto seguro forte quando  $\lambda_l = 0$  e  $\tau < 0$ .

### 3.2.2 Famílias de Cópulas

Partindo do Teorema 3.2.1, pode-se modelar diferentes cópulas para representar a relação entre conjuntos de variáveis. Abaixo são apresentadas algumas utilizadas neste trabalho.

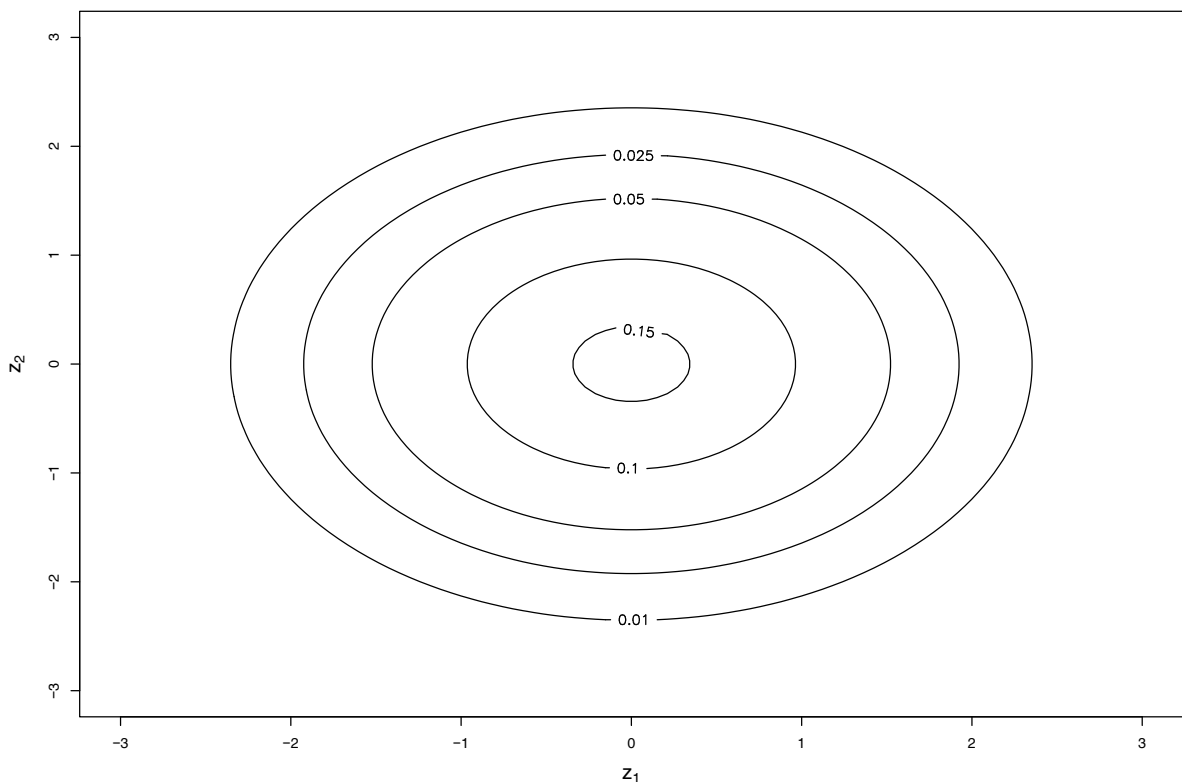
#### Cópula de Independência

Seja um vetor aleatório  $S = (s_1, \dots, s_n)$ . Então, este é dito independente se e somente se a cópula que descreve sua dependência é

$$\prod (s_1, \dots, s_n) = \prod_{i=1}^n s_i \quad (3.17)$$

Na figura 3.1 encontra-se a representação visual da densidade desta cópula para o caso bivariado.

Figura 3.1 – Densidade de uma cópula de independência



Fonte: Elaboração própria.

#### 3.2.2.1 Cópulas Elípticas

Cópulas elípticas são geradas a partir de distribuições elípticas, como a distribuição normal multivariada e a distribuição t de Student. Este tipo de cópula é muito utilizada na

modelagem de séries financeiras, porém são ineficientes em capturar estruturas de dependência assimétricas (JOE; KUROWICKA, 2011).

### Cópula Gaussiana

Uma cópula gaussiana n-dimensional é a cópula obtida pelo Teorema 3.2.1 a partir da distribuição normal multivariada  $N(0, R)$ , onde  $R$  é uma matriz de correlação. Esta cópula é gerada por:

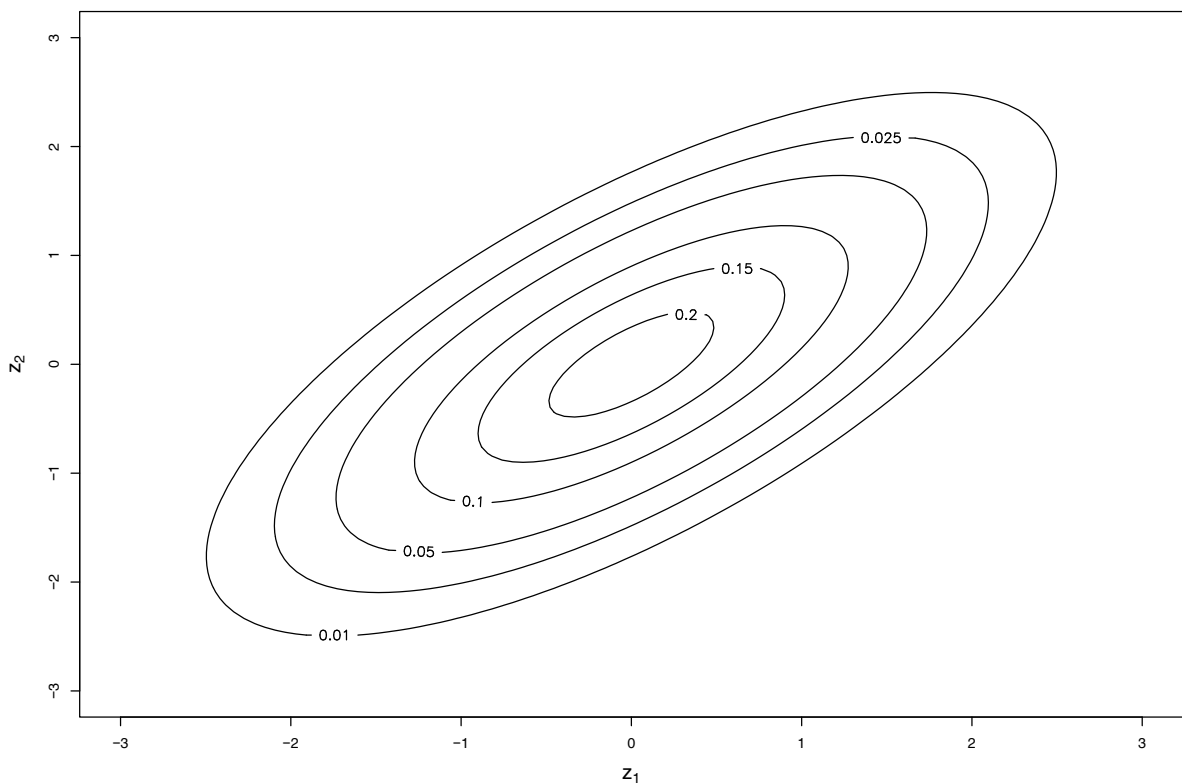
$$C_R^N(s_1, \dots, s_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(s_1), \dots, \Phi^{-1}(s_n)) \quad (3.18)$$

E sua densidade é dada por:

$$c_R^N(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{\sqrt{\det R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'(I_n - R^{-1})x\right\}, \quad (3.19)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , com  $x_i = \Phi^{-1}(s_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Na figura 3.2 é possível visualizar esta densidade para duas variáveis.

Figura 3.2 – Densidade de uma cópula gaussiana com  $\tau = 0.5$



Fonte: Elaboração própria.

### Cópula t de Student

Seja  $T_{R,v}$  uma distribuição t de Student multivariada, com  $v$  graus de liberdade e matriz de correlação  $R$ . A cópula associada a esta distribuição é dada por:

$$C_{R,v}^t(s_1, \dots, s_n) = T_n(T_v^{-1}(s_1), \dots, T_v^{-1}(s_n)) \quad (3.20)$$

E sua densidade:

$$c_{R,v}^t(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{\sqrt{\det R}} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2}) [\Gamma(\frac{v}{2})]^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x_k^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}{[\Gamma(\frac{v+1}{2})]^n \left(1 + \frac{x'R^{-1}x}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}} \quad (3.21)$$

Onde  $x' = (T_v^{-1}(s_1), \dots, T_v^{-1}(s_n))$ . A representação desta densidade no caso de duas variáveis encontra-se na figura 3.3. Esta cópula apresenta dois parâmetros a serem estimados, a matriz de correlação,  $R$  e os graus de liberdade,  $v$ .

Figura 3.3 – Densidade de uma cópula t de Student com  $\tau = 0.5$

