



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS CRATEÚS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

EDUARDO RAIQUE SOARES COELHO

**ANÁLISE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO E DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE
VIGAS EM CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

**CRATEÚS
2025**

EDUARDO RAIQUE SOARES COELHO

ANÁLISE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO E DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGAS
EM CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Me. Leandro Soares Moreira.

CRATEÚS

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C615a Coelho, Eduardo Raique Soares.

Análise dos modos de vibração e de frequências naturais de vigas em concreto armado através do método dos elementos finitos / Eduardo Raique Soares Coelho. – 2025. 81 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Crateús, Curso de Engenharia Civil, Crateús, 2025.

Orientação: Prof. Me. Leandro Soares Moreira.

1. análise. 2. vigas. 3. vibrações. I. Título.

CDD 620

EDUARDO RAIQUE SOARES COELHO

**ANÁLISE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO E DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGAS
EM CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em: 06/03/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Leandro Soares Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Álvaro Martins Delgado Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Me. Carlos David Rodrigues Melo
Universidade Estadual do Ceará (UFC)

Ao Criador.

Aos meus pais, Elieuda e Raimundo.

AGRADECIMENTOS

Ao Criador pela vida e sua Graça que me alcançou.

Aos meus pais por sempre colaborar para finalizar o protocolo de duração da vida.

Ao meu irmão Bruno por me apresentar a Graça do Criador e meu irmão Eliardo por sempre me ajudar na minha formação.

Ao professor Leandro, pela orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Álvaro Martins Delgado Neto e Álvaro Martins Delgado Neto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores entrevistados, pelo tempo concedido nas entrevistas.

Aos colegas da turma de graduação, Wellington, Serafim, Júnior e Jonatas, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas.

“Uma vida simples e tranquila traz mais alegria
que a busca pelo sucesso em uma inquietação
constante.”

Albert Einstein

RESUMO

A análise dinâmica é crucial em projetos estruturais na construção civil. Nesse sentido, este trabalho teve como objetivo analisar, modelar e simular, no *software Ansys® 2019 R3*, o comportamento dinâmico de vigas biapoiadas. Utilizaram-se dados de normas, como NBR 6118:2014 e NBR 6118:2023, para definir as características mecânicas do modelo. A primeira etapa envolveu a análise modal e paramétrica de três vigas em concreto armado (isotrópico elástico) biapoiadas com um apoio de primeiro gênero e outro de segundo gênero, determinando os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais. Concluiu-se que a análise modal feita no Ansys para vigas apresentaram frequências modais com valores próximos a análise paramétrica feita através do Google Colab utilizando a linguagem de programação Python, na segunda etapa, foram comparados os resultados da análise modal das três vigas biapoiadas em concreto armado com a Tabela 23.1 da norma NBR 6118:2023. Os resultados foram satisfatórios para todos os modos de vibração e sua respectiva frequência natural, indicando assim, o cumprimento do parâmetro da tabela da Norma para o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração das três vigas, caso algumas dessas frequências naturais não estivessem de acordo com o parâmetro da Norma, as soluções encontradas seriam, o aumento da seção transversal, reforço com compósitos poliméricos e estruturas metálicas aplicadas em conjunto com o concreto armado. Todas as análises numéricas foram feitas com um estudo de malha de 1 cm. A validação da análise pelo Ansys® 2019 R3 abre caminho para aplicações em estruturas mais complexas. Essa análise é crucial para estruturas sob cargas dinâmicas, prevenindo ressonância. Ferramentas computacionais e ensaios não destrutivos são fundamentais para decisões de reabilitação. Os resultados obtidos são valiosos e satisfatórios, proporcionando um nível significativo de confiança nos estudos realizados.

Palavras-chave: análise; vigas; vibrações.

ABSTRACT

Dynamic analysis is crucial in structural projects in civil construction. In this sense, this work aimed to analyze, model, and simulate, in the Ansys® 2019 R3 software, the dynamic behavior of simply supported beams. Data from standards, such as NBR 6118:2014 and NBR 6118:2023, were used to define the mechanical characteristics of the model. The first stage involved the modal and parametric analysis of three reinforced concrete beams (isotropic elastic) simply supported with one support of the first kind and another of the second kind, determining the vibration modes and their respective natural frequencies. It was concluded that the modal analysis performed in Ansys for beams presented modal frequencies with values close to the parametric analysis performed through computer programming in Python. In the second stage, the results of the modal analysis of the three simply supported reinforced concrete beams were compared with Table 23.1 of the NBR 6118:2023 standard. The results were satisfactory for all vibration modes and their respective natural frequencies, thus indicating compliance with the parameters of the Standard table for the first, second and third vibration modes of the three beams. If some of these natural frequencies were not in accordance with the Standard parameters, the solutions found would be to increase the cross section, reinforce with polymer composites and apply metal structures together with reinforced concrete. All numerical analyses were performed with a 1 cm mesh study. Validation of the analysis by Ansys® 2019 R3 paves the way for applications in more complex structures. This analysis is crucial for structures under dynamic loads, preventing resonance. Computational tools and non-destructive testing are essential for rehabilitation decisions. The results obtained are valuable and satisfactory, providing a significant level of confidence in the studies performed.

Keywords: analysis; beams; vibrations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Concepção de oscilador simples não amortecido.....	22
Figura 2 – Movimentos livres com os amortecimentos: supercrítico, crítico e subcrítico	27
Figura 3 – Esquema da análise de um modelo de estrutura de multigraus de liberdade	28
Figura 4 – Curvas de tensão-deformação sob compressão biaxial	33
Figura 5 – Efeito no material inelástico com carga não monotônica	34
Figura 6 – Fator de amplificação dinâmica versus razão de frequências	35
Figura 7 – Ponte Tacoma Narrows em colapso	36
Figura 8 – Fluxograma da pesquisa	39
Figura 9 – Interface do Ansys® Workbench	40
Figura 10 – Interface do Ansys® SpaceClaim	41
Figura 11 – Elementos utilizados para a discretização do meio contínuo.....	42
Figura 12 – Propriedades dinâmicas de viga biapoiada	45
Figura 13 – Primeiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 1	47
Figura 14 – Segundo modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 1	47
Figura 15 – Terceiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 1.	48
Figura 16 – Resultados dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais	48
Figura 17 – Estudo de malha com as frequências naturais da viga 1 de concreto armado.....	49
Figura 18 – Primeiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 2	50
Figura 19 – Segundo modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 2	50
Figura 20 – Terceiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 2.	51
Figura 21 – Resultados dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais	51
Figura 22 – Estudo de malha com as frequências naturais da viga 2 de concreto armado.....	52
Figura 23 – Primeiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 3	53
Figura 24 – Segundo modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 3	53
Figura 25 – Terceiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 3.	54
Figura 26 – Resultados dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais	54
Figura 27 – Estudo de malha com as frequências naturais da viga 3 de concreto armado.....	55
Figura 28 – Deformação total 1 para a viga 1.....	61
Figura 29 – Deformação total 2 para a viga 1.....	61
Figura 30 – Deformação total 3 para a viga 1.....	61
Figura 31 – Deformação total 4 para a viga 1.....	62
Figura 32 – Deformação total 5 para a viga 1.....	62

Figura 33 – Deformação total 6 para a viga 1.....	62
Figura 34 – Deformação total 7 para a viga 1.....	63
Figura 35 – Deformação total 8 para a viga 1.....	63
Figura 36 – Deformação total 9 para a viga 1.....	63
Figura 37 – Deformação total 10 para a viga 1.....	64
Figura 38 – Deformação total 11 para a viga 1.....	64
Figura 39 – Deformação total 12 para a viga 1.....	64
Figura 40 – Deformação total 13 para a viga 1.....	65
Figura 41 – Deformação total 14 para a viga 1.....	65
Figura 42 – Deformação total 15 para a viga 1.....	65
Figura 43 – Deformação total 16 para a viga 1.....	66
Figura 44 – Deformação total 17 para a viga 1.....	66
Figura 45 – Deformação total 18 para a viga 1.....	66
Figura 46 – Deformação total 19 para a viga 1.....	67
Figura 47 – Deformação total 20 para a viga 1.....	67
Figura 48 – Deformação total 1 para a viga 2.....	67
Figura 49 – Deformação total 2 para a viga 2.....	68
Figura 50 – Deformação total 3 para a viga 2.....	68
Figura 51 – Deformação total 4 para a viga 2.....	68
Figura 52 – Deformação total 5 para a viga 2.....	69
Figura 53 – Deformação total 6 para a viga 2.....	69
Figura 54 – Deformação total 7 para a viga 2.....	69
Figura 55 – Deformação total 8 para a viga 2.....	70
Figura 56 – Deformação total 9 para a viga 2.....	70
Figura 57 – Deformação total 10 para a viga 2.....	70
Figura 58 – Deformação total 11 para a viga 2.....	71
Figura 59 – Deformação total 12 para a viga 2.....	71
Figura 60 – Deformação total 13 para a viga 2.....	71
Figura 61 – Deformação total 14 para a viga 2.....	72
Figura 62 – Deformação total 15 para a viga 2.....	72
Figura 63 – Deformação total 16 para a viga 2.....	72
Figura 64 – Deformação total 17 para a viga 2.....	73
Figura 65 – Deformação total 18 para a viga 2.....	73
Figura 66 – Deformação total 19 para a viga 2.....	73

Figura 67 – Deformação total 20 para a viga 2.....	74
Figura 68 – Deformação total 1 para a viga 3.....	74
Figura 69 – Deformação total 2 para a viga 3.....	74
Figura 70 – Deformação total 3 para a viga 3.....	75
Figura 71 – Deformação total 4 para a viga 3.....	75
Figura 72 – Deformação total 5 para a viga 3.....	75
Figura 73 – Deformação total 6 para a viga 3.....	76
Figura 74 – Deformação total 7 para a viga 3.....	76
Figura 75 – Deformação total 8 para a viga 3.....	76
Figura 76 – Deformação total 9 para a viga 3.....	77
Figura 77 – Deformação total 10 para a viga 3.....	77
Figura 78 – Deformação total 11 para a viga 3.....	77
Figura 79 – Deformação total 12 para a viga 3.....	78
Figura 80 – Deformação total 13 para a viga 3.....	79
Figura 81 – Deformação total 14 para a viga 3.....	79
Figura 82 – Deformação total 15 para a viga 3.....	79
Figura 83 – Deformação total 16 para a viga 3.....	80
Figura 84 – Deformação total 17 para a viga 3.....	80
Figura 85 – Deformação total 18 para a viga 3.....	80
Figura 86 – Deformação total 19 para a viga 3.....	81
Figura 87 – Deformação total 20 para a viga 3.....	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da viga 1 em concreto armado	42
Tabela 2 – Parâmetro da viga 2 em concreto armado.....	43
Tabela 3 – Parâmetro da viga 3 em concreto armado.....	43
Tabela 4 – Frequênci a crí tica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas	44
Tabela 5 – Valores do estudo de malha para a viga 1.....	48
Tabela 6 – Valores do estudo de malha para a viga 2.....	49
Tabela 7 – Valores do estudo de malha para a viga 3	50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AME	Análise Modal Experimental
AMO	Análise Modal Operacional
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Norma Brasileira Regulamentadora
PRFC	Polímero Reforçado de Fibra de Carbono
FRF	Função Resposta em Frequência
EIS-VE	Estado Limite de Vibrações Excessivas

LISTA DE SÍMBOLOS

\ddot{u}	Aceleração
g	Aceleração da gravidade
$\ddot{u}(t)$	Aceleração em função do tempo
$\ddot{u}'(t)$	Aceleração total
h	Altura
A	Área da seção transversal
c	Coeficiente de amortecimento do sistema de um grau de liberdade
ζ	Coeficientes de amortecimento
φ	Constante arbitrária real
γ	Constante de amortecimento
b_1, b_2	Constantes de integração
u_{est}	Deflexão estática
ρ	Densidade linear de massa
u	Deslocamento
$u(t)$	Deslocamento em função do tempo
$u'(t)$	deslocamento total
v	Deslocamento transversal
V	Energia potencial
$f(t)$	Forças externas em função do tempo
ω	Frequência angular
ω_0	Frequência angular natural não amortecida do sistema oscilatório
$f_{crít}$	Frequência crítica
δ	Grandeza virtual
b	Largura
m	Massa do sistema de um grau de liberdade
m'	Massa linear da viga
$[H(\omega)]$	Matriz de FRFs
N	Matriz de funções de interpolação
E	Módulo de elasticidade longitudinal
I	Momento de inércia da seção transversal
T_a	Período amortecido

k	Rigidez do sistema de um grau de liberdade
$P_{1,2}$	Soluções da equação característica
S_e	Superfície do elemento
t	Tempo
T	Variação integral da energia cinética
\dot{u}	velocidade
$\dot{u}(t)$	Velocidade em função do tempo
$\ddot{u}_L^{(e)}$	Vetor de aceleração nodal
$\{X(\omega)\}$	Vetor de deslocamento no domínio da frequência
f_a	Vetor de forças de amortecimento
f_{in}	Vetor de forças de inércia
q	Vetor de forças de superfície
p	Vetor de forças de volume
$f^{(e)}$	Vetor de forças nodais
$\dot{u}_L^{(e)}$	Vetor de velocidade nodal
$\{F(\omega)\}$	Vetor força excitadora no domínio da frequência
V_e	Volume do elemento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	Contextualização.....	18
1.2	Objetivos	19
1.2.1	<i>Objetivo geral</i>	19
1.2.2	<i>Objetivos específicos</i>	20
1.3	Justificativa	20
1.4	Roteiro temático.....	21
2	REFERENCIAL TEÓRICO	22
2.1	Equação de movimento para um sistema de um grau de liberdade	22
2.2	Vibrações livres para um sistema de um grau de liberdade.....	23
2.2.1	<i>Vibrações livres não amortecidas</i>	24
2.2.2	<i>Vibrações livres amortecidas</i>	25
2.3	Modelo para multigraus de liberdade.....	27
2.3.1	<i>MEF para elemento de barra</i>	28
2.4	Dinâmica das estruturas em concreto armado	32
2.4.1	<i>Ressonância</i>	34
2.5	Análise modal	36
3	METODOLOGIA.....	39
3.1	Interface e modelo do Ansys® 2019 R3	39
3.2	Parametrização das vigas biapoiadas em Concreto Armado	42
3.3	Modelo para as três vigas biapoiadas	44
4	RESULTADOS	46
4.1	Análise paramétrica feita no Google Colab	46
4.2	Análise modal feita no Ansys para a viga 1	46
4.3	Análise modal feita no Ansys para a viga 2	49
4.4	Análise modal feita no Ansys para a viga 3	52

5	CONCLUSÕES.....	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Segundo He e Fu (2001), a ocorrência de fenômenos vibratórios em estruturas pode induzir perturbação sonora nos ambientes ao redor, em virtude da vibração estrutural, na qual ocorre a transferência de energia do meio sólido para o meio fluido. Tal ocorrência pode provocar desconforto, contrariedades e até mesmo inquietações físicas e psicológicas nos indivíduos que estão expostos a tais sons indesejáveis. Dessa forma, tendo em conta o impacto adverso desses ruídos, é essencial sua avaliação e gerenciamento, a fim de assegurar o bem-estar das pessoas afetadas.

De acordo com Inman (2013), a atenuação de ruídos e vibrações é alcançada por meio da implementação de medidas de controle, que podem incluir técnicas de isolamento, absorção, amortecimento e redução da transmissão de energia vibratória. Essas medidas visam minimizar a propagação de vibrações e ruídos indesejados para o ambiente circundante. Nesse sentido, ao projetar uma estrutura, é preciso levar em consideração as características do ambiente em que ela estará inserida, bem como as fontes de excitação externas que podem gerar ruídos e vibrações. Além disso, é necessário avaliar a resposta dinâmica da estrutura, considerando sua frequência natural, ressonâncias e modos de vibração.

No decorrer do avanço tecnológico, a adição de referenciais normativos de projeto, sobre durabilidade e conforto humano, tem sido implantado sistematicamente, pois, tem-se a necessidade de se entender o comportamento estrutural mediante carregamentos dinâmicos ou cíclicos, como também entender como a estrutura suporta cargas estáticas. Nesse sentido, de acordo Almeida (2005), esta análise é de suma importância para a verificação da integridade e da segurança da estrutura, com isso, portanto, uma maneira de identificar deformação e localizar danos, como por exemplo, a fadiga estrutural.

Segundo Rosero (2018), os métodos computacionais têm sido amplamente aplicados em estudos devido às suas vantagens na resolução de problemas e equações complexas relacionadas ao comportamento mecânico do concreto armado, que são difíceis de resolver manualmente. Dentre esses métodos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca por sua ampla aplicação, versatilidade e eficácia na modelagem de geometrias complexas, tornando-se uma ferramenta essencial para análises precisas e detalhadas.

O presente trabalho realiza uma análise paramétrica de vigas de concreto armado, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) no *software* Ansys® 2019 R3. O objetivo

principal é determinar as frequências naturais e os modos de vibração de vigas biapoiadas, considerando a variação de diferentes seções transversais das vigas. A simulação foi realizada para três modos de vibração, com base na Tabela 23.1 da norma NBR 6118:2023, e uma análise paramétrica foi conduzida para três seções transversais, permitindo comparar os resultados obtidos com a análise modal realizada no Ansys®. O diferencial deste estudo é a comparação entre as frequências naturais e os modos de vibração das vigas de concreto armado, com foco na identificação da melhor configuração para essas vigas.

Trabalhos de cunho semelhantes foram desenvolvidos por Brandão (2018) e Pinto (2019) em que ferramentas computacionais foram utilizadas para obtenção de esforços e caracterização dinâmica de construções de modo a auxiliar na tomada de decisão, bem como a obtenção dos pontos de vulnerabilidade estrutural existentes. Trabalhos como o realizado por Diógenes (2010) demonstram a aplicação do MEF em estruturas pré-moldadas submetidas a carregamentos dinâmicos, indicando um grande avanço e uma percepção da importância do estudo deste tema.

Brandão e Pinto (2018), realizaram um ensaio de vibração ambiental em uma edificação histórica de Sobral- CE, para identificar as frequências naturais da estrutura utilizando o software Ansys®, foi aplicada a caracterização modal por meio do MEF, os resultados obtidos no estudo possibilitaram a análise do comportamento dinâmico da edificação, abrangendo a determinação das frequências naturais, modos de vibração e deslocamentos direcionais.

Diógenes (2010), apresentaram um estudo com normas e métodos analíticos para avaliar o conforto humano frente a vibrações em estruturas. Realizou-se uma comparação entre simulações numéricas de lajes alveolares e painéis duplo-T no software Ansys® com cálculos analíticos, com base no MEF, além disso, os resultados encontrados foram discutidos considerando o Estado Limite de Vibrações Excessivas (ELS-VE).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é realizar análise modal através do *software* Ansys® 2019 R3 na determinação dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais em estruturas como vigas de concreto armado, comparando os resultados entre si de diferentes dimensões se são capazes de satisfazer os resultados exigidos pela a norma NBR 6118:2023.

1.2.2 Objetivos específicos

- Realizar análise paramétrica por meio de programação computacional em python para três diferentes dimensões em vigas biapoiadas de concreto armado e obter os modos de vibração e frequências naturais;
- Determinar numericamente os modos de vibração e frequências naturais de vigas biapoiadas em concreto armado, através de análise modal facilitado pelo *software* Ansys® 2019 R3;
- Comparar os resultados da análise modal obtida do *software* Ansys® 2019 R3 com a análise paramétrica dos modos de vibração e frequências naturais do Modelo de Viga;
- Comparar as frequências naturais encontradas no Ansys® com as frequências críticas para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas, retirada da Tabela 23.1 da norma NBR 6118:2023.

1.3 Justificativa

É essencial que os engenheiros civis compreendam a vibração em estruturas, pois isso proporciona uma base sólida para o projeto, análise e manutenção de estruturas seguras e confiáveis. Diversos aspectos técnicos precisam ser avaliados, como no caso de um projeto de estruturas em concreto armado resistentes a vibrações. O conhecimento sobre vibração permite que os engenheiros projetem estruturas que suportem diferentes cargas dinâmicas, como ventos fortes, terremotos, tráfego e atividades humanas, cujos efeitos podem causar incômodos sonoros ou até danificar a estrutura. Nesse contexto, os estudantes de engenharia devem desenvolver a habilidade de projetar estruturas levando em consideração seu comportamento dinâmico.

A falta de conhecimento sobre vibrações na formação do engenheiro civil pode prejudicar os estudantes em vários aspectos técnicos, como não considerar os impactos ambientais e de conforto, a inabilidade de realizar análises sobre vibração, a falta de compreensão dos efeitos dinâmicos e a incapacidade de aplicar técnicas de monitoramento em estruturas.

Entender o comportamento vibracional de uma estrutura é crucial, especialmente quando ela é submetida a cargas dinâmicas, como carga de vento e vibrações de outras

estruturas externas. Se a excitação tiver uma frequência igual ou próxima da frequência natural da estrutura, pode ocorrer ressonância, um fenômeno que pode causar falha por fadiga ou até colapso.

A simulação, conforme a norma NBR 6118:2023, permite prever o comportamento das estruturas sob diferentes condições de carregamento, incluindo ações variáveis, permanentes, ambientais e acidentais. Com a simulação utilizando essa norma, é possível otimizar a quantidade de materiais, como concreto e aço, reduzindo custos, mas garantindo a durabilidade e resistência da estrutura. Além disso, essa abordagem permite avaliar o desempenho da estrutura ao longo do tempo, considerando efeitos como temperatura, deformação e fadiga, assegurando que a estrutura esteja preparada para condições extremas, como ventos fortes, terremotos e incêndios, e que esteja em conformidade com a norma NBR 6118:2023. Isso possibilita aos engenheiros projetar de maneira segura, seguindo as normas técnicas revisadas periodicamente.

1.4 Roteiro temático

Este trabalho está dividido em 5 seções.

A primeira seção apresenta a introdução ao tema, abordando trabalhos relacionados, os objetivos e o roteiro temático do estudo.

A segunda seção apresenta o referencial teórico, mostrando uma breve revisão bibliográfica sobre os temas pertinentes neste estudo. Nessa seção é abordado a equação de movimento para um sistema de um grau de liberdade, vibrações livres para um sistema de um grau de liberdade, a equação de vibração livre amortecida e não amortecida, além disso, também é abordado sobre o modelo para multigraus de liberdade, MEF para elemento de barra, dinâmica das estruturas em concreto armado, ressonância e análise modal.

A terceira seção é mostrada a metodologia para o desenvolvimento do presente trabalho, além disso, é decorrido sobre um estudo de viga biapoiada disponibilizado pela a biblioteca do Ansys® 19.3 R3 mostrando sua interface e os parâmetros das vigas em estudo.

Na quarta seção serão apresentados os resultados da análise paramétrica e da análise modal de três vigas biapoiadas em concreto armado com três diferentes seções transversais.

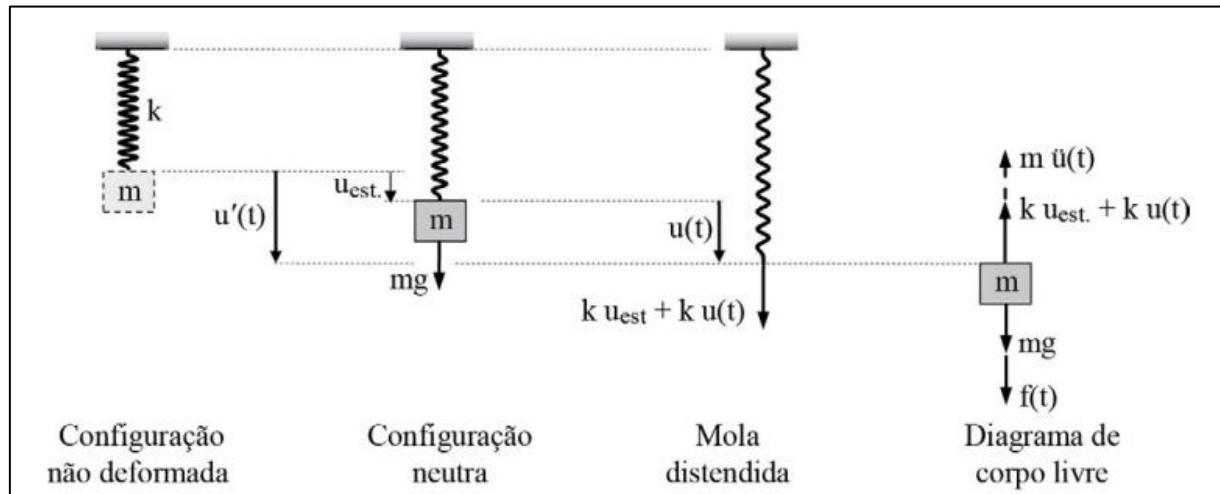
Na quinta seção são apresentadas as conclusões que foram obtidas pelas análises. Além disso, é abordado a importância de estudos na área em questão.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Equação de movimento para um sistema de um grau de liberdade

De acordo com Soriano (2014), um modelo formado por uma massa m , sustentado por uma mola de translação com coeficiente k e de massa desprezível, conforme representado na Figura 1, caracterizando um oscilador simples não amortecido. Nesse sistema, que não possui mecanismo de dissipação de energia, ocorre vibração translacional na direção vertical.

Figura 1 – Concepção de oscilador simples não amortecido



Fonte: Soriano (2014).

Segundo Soriano (2014), com um peso mg , o oscilador possui uma configuração de equilíbrio estático que se caracteriza por uma deflexão estática denotada por u_{est} , com uma configuração neutra, onde uma mola sustenta a massa com uma força de baixo para cima expressa pela a seguinte equação:

$$mg = ku_{est} \rightarrow u_{est} = mg/k \quad (1)$$

Onde, m é a massa, k é a constante elástica, g é a aceleração da gravidade, u_{est} é a deflexão elástica e u é o deslocamento.

Soriano (2014) afirma que a aplicação da massa em força $f(t)$ de cima para baixo, ocorre um deslocamento adicional em função do tempo, com uma notação $u(t)$ denominado

deslocamento dinâmico, assim, com a suposição da força de inércia $m\ddot{u}(t)$ (em sentido contrário à aceleração), com isso, tem-se o diagrama de corpo livre mostrado na parte direita da figura anterior e que permite escrever a equação de equilíbrio dinâmico mostrado a seguir:

$$m\ddot{u}(t)k + k(u_{est} + u(t)) = mg + f(t) \quad (2)$$

A Equação 2 simplifica-se para uma forma independente da força gravitacional:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (3)$$

Com $u(t)$ sendo o deslocamento dinâmico, $\ddot{u}(t)$ a aceleração em função do tempo, $f(t)$ a força excitadora, $ku(t)$ é a força elástica e $m\ddot{u}(t)$ é a força de inércia.

Nesse sentido, Soriano (2014) afirma que a equação diferencial é de segunda ordem, não homogênea, característica de vibração não amortecida forçada. Além disso, como k e m são constantes, essa é uma equação linear. Alternativamente, tem-se, em relação à configuração não deformada, o deslocamento total:

$$u'(t) = u_{est} + u(t) \quad (4)$$

Com o qual se escreve a equação de movimento sob a nova forma:

$$m\ddot{u}'(t) + ku'(t) = mg + f(t) \quad (5)$$

Em que, $u'(t)$ é o deslocamento total e $\ddot{u}'(t)$ é a aceleração total.

2.2 Vibrações livres para um sistema de um grau de liberdade

De acordo com Mazzilli (2016, p. 49), as vibrações livres em sistemas de um grau de liberdade ocorrem quando se perturba a configuração de equilíbrio do sistema, seja pela imposição de deslocamentos e velocidades iniciais não simultaneamente nulas.

2.2.1 Vibrações livres não amortecidas

A aplicação da Segunda Lei de Newton, estabelece que a força resultante para estruturas com massa não variável com o tempo é igual ao produto da massa pela aceleração, conforme a Equação 6.

$$f(t) - m\ddot{u}(t) = 0 \quad (6)$$

Na Equação 6, a função $f(t)$ representa a força resultante dependente do tempo de diversas forças que atuam sobre essa massa, tais como forças elásticas, forças viscosas e cargas externas, que são definidas separadamente. Para um sistema sujeito às forças de amortecimento ($c\dot{u}(t)$), às forças elásticas ($ku(t)$) e outras forças externas dependente do tempo ($f(t)$), a equação de movimento unidimensional do sistema pode ser expressa da seguinte forma:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (7)$$

Onde, \dot{u} é a velocidade, \ddot{u} é a aceleração, $f(t)$ é a força externa, m é a massa, k é a constante da mola e c é o coeficiente de amortecimento do sistema de um grau de liberdade.

Desse modo, tem-se que:

- Forças de amortecimento ($c\dot{u}(t)$): são forças que estão atuando em sistemas vibratórios ou oscilatórios sujeitos à fenômenos capazes de reduzir e dissipar a amplitude das oscilações no decorrer do tempo, devido a sua atuação no sentido oposto à velocidade $\dot{u}(t)$;
- Forças elásticas ($ku(t)$): são forças de caráter elástico que atuam quando o sistema é exposto às deformações $u(t)$, restaurando-o para a sua posição original;
- Forças externas dependente do tempo ($f(t)$): são forças fundamentais presentes nas equações de movimento que retratam a interação da vizinhança com um sistema, em outras palavras, essas forças têm o poder de alterar a forma do sistema ou estado de movimento que afeta de forma direta com a sua própria dinâmica. Essas forças são, por exemplo, a força gravitacional e eletromagnética.

Para vibração livre, na Equação 7, a falta de amortecimento, torna o termo $c\dot{u}(t)$ nulo. Logo, em situações em que $f(t)$ é igual a zero, surge a equação abaixo:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (8)$$

A solução da equação anterior é dada por:

$$u(t) = u(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin(\omega t) \quad (9)$$

Onde ω é a frequência angular, que é dado pela equação $\omega^2 = k/m$. Além disso, $u(0)$ e $\dot{u}(0)$ são as condições iniciais do problema de velocidade e deslocamento de modo respectivo.

2.2.2 Vibrações livres amortecidas

Conforme Soriano (2014, p. 77), para o caso do oscilador simples amortecido em vibração (de translação) livre, a equação de movimento particulariza-se para a forma homogênea:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (10)$$

Onde:

$c\dot{u}(t)$ = forças de amortecimento.

Essa equação admite a solução:

$$u(t) = be^{pt} \quad (11)$$

Denominada resposta livre amortecida, em que b e p são constantes a serem determinadas. Logo, com a substituição dessa solução na equação anterior e o cancelamento dos fatores comuns, obtém-se a equação característica ($mp^2 + cp + k = 0$) de soluções:

$$P_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (12)$$

Onde $P_{1,2}$ são as soluções da equação característica. Essas soluções conduzem à seguinte forma de solução da equação diferencial:

$$u(t) + b_1 e^{p_1 t} + b_2 e^{p_2 t} \quad (13)$$

Em que b_1 e b_2 são constantes reais de integração. Quanto às soluções da equação característica, dependendo das propriedades do oscilador, pode-se ter um dos três seguintes casos:

- 1) O radicando na Equação 12 é nulo, diz-se amortecimento crítico e tem-se:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \rightarrow c_{crit} = 2\sqrt{km} \quad (14)$$

Em que c é o coeficiente de amortecimento viscoso. O valor limite do coeficiente de amortecimento viscoso que converte um estado oscilatório em não oscilatório é conhecido como amortecimento crítico. Nesse caso, o movimento do sistema não apresenta oscilações, com o deslocamento diminuindo de forma assintótica até atingir zero.

- 2) O radicando é maior que zero, diz-se amortecimento supercrítico e tem-se:

$$c > c_{crit} \quad (15)$$

O coeficiente de amortecimento viscoso é maior que o do amortecimento crítico. Isso faz com que o sistema também não apresente oscilações, mas o retorno à posição de equilíbrio ocorre mais lentamente.

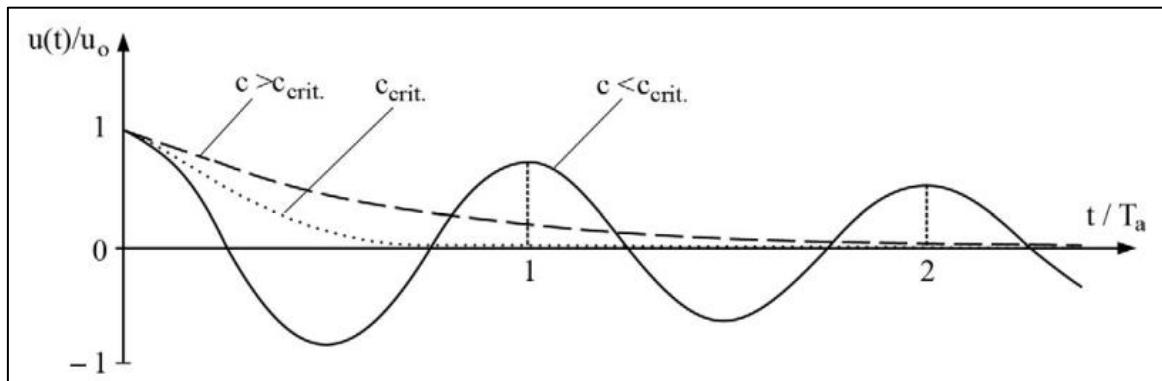
- 3) O radicando na Equação 12 é menor que zero, diz-se amortecimento subcrítico e tem-se:

$$0 < c < c_{crit} \quad (16)$$

O coeficiente de amortecimento é menor que o crítico, permitindo que o sistema oscile enquanto retorna gradualmente à posição de equilíbrio. O movimento é não periódico, com oscilações progressivamente diminuindo em amplitude até que o sistema atinja a posição neutra.

Para os três supracitados comportamentos, logo abaixo, se encontra a Figura 2, onde existe uma condição de velocidade inicial nula, em que T_a é o período amortecido, que é o espaçamento de tempo entre dois valores máximos da resposta de deslocamento em vibração subamortecida.

Figura 2 – Movimentos livres com os amortecimentos: supercrítico, crítico e subcrítico



Fonte: Soriano (2014).

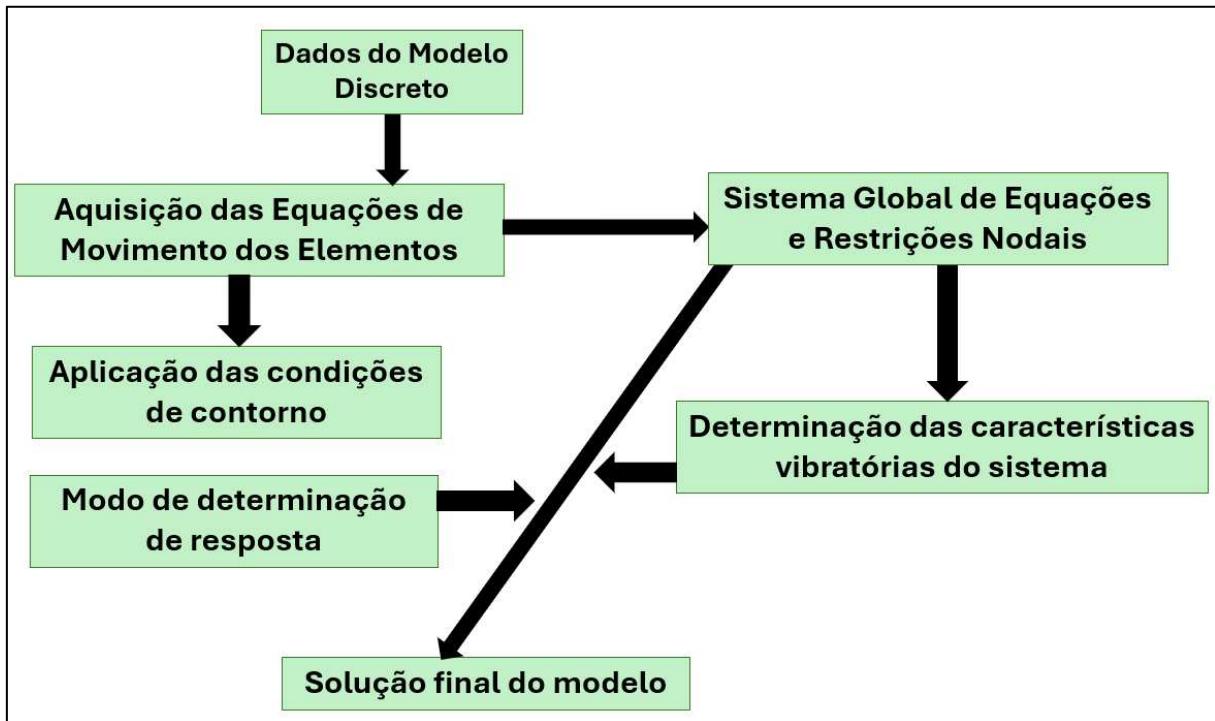
2.3 Modelo para multigraus de liberdade

De acordo com Soriano (2014), na aplicação do Método dos Elementos Finitos, inclusive em modelos compostos por estruturas de barras, as equações de movimento do sistema completo são obtidas pela agregação das equações individuais de cada elemento. Este processo consiste na soma das contribuições elementares referentes às forças de inércia, amortecimento, rigidez e forças externas associados a cada deslocamento nodal. Este procedimento é conhecido como agrupamento das equações de movimento dos elementos, resultando no sistema global que descreve o comportamento dinâmico da estrutura.

Ao estabelecer um problema, é fundamental estabelecer uma metodologia para sua resolução. No caso de uma análise estrutural de um sistema com múltiplos graus de liberdade, sujeito a ações dinâmicas, e considerando tanto o material como linear elástico quanto à

linearidade geométrica, Soriano (2014) propõe um esquema para obter a resposta do sistema, a Figura 3 expressa isso:

Figura 3 – Esquema da análise de um modelo de estrutura de multigraus de liberdade



Fonte: Autor (2025).

2.3.1 MEF para elemento de barra

Segundo Mendes (2012), o Método dos Elementos Finitos (MEF) surgiu no final da década de 1940 para desenvolver métodos matriciais para análise estrutural para a indústria aeroespacial dos EUA. Porém, seu uso só se difundiu na década de 1960, com o desenvolvimento de computadores mais robustos. Segundo Maciel (2006), o método dos elementos finitos (MEF) tem se mostrado uma das ferramentas mais difundidas para análise e resolução de problemas estruturais e geotécnicos, que tem sido extensivamente estudado e desenvolvido ao longo do último século. O MEF pode ser considerado uma evolução do conhecido método de deslocamento no cálculo matricial de estruturas.

Devido à sua ampla abrangência em comparação aos métodos analíticos, o MEF é uma ferramenta importante para resolução de problemas de interação solo-estrutura e por isso tem sido amplamente utilizado no estudo de interações complexas (Silva, 2006). Para problemas de interação solo-estrutura, o MEF pode ser aplicado tanto à modelagem de

superestruturas quanto à modelagem de solos de fundação, e os grandes graus de liberdade desses problemas envolvem o uso de computadores.

A formulação matemática do Método dos Elementos Finitos para um elemento de barra começa com a definição de um campo de deslocamentos para um ponto qualquer da estrutura. Esse campo de deslocamentos é descrito pela Equação 17, onde o subíndice L indica que a grandeza está no sistema de coordenadas locais, e o índice e refere-se ao comportamento do elemento. Nesta equação, N representa uma matriz de funções de interpolação, também conhecidas como funções de forma, que descrevem a variação dos deslocamentos ao longo do elemento.

$$u = Nu_L^{(e)} \quad (17)$$

Com o campo de deslocamentos pode-se calcular os campos de velocidade e de aceleração respectivamente pelas Equações 18 e 19:

$$\dot{u} = Nu_L^{(e)} \quad (18)$$

$$\ddot{u}(t) = N\ddot{u}_L^{(e)} \quad (19)$$

Onde:

$\dot{u}_L^{(e)}$ = vetor de velocidade nodal;

$\ddot{u}_L^{(e)}$ = vetor de aceleração nodal.

Nesse sentido para cada modelo matemático, existe relações entre os componentes de deformação e os componentes de deslocamento, o que se escreve:

$$\varepsilon(t) = Lu(t) = LN u^{(e)}(t) = Bu^{(e)}(t) \quad (20)$$

Em que:

L = é uma matriz de operadores diferenciais e em que se adota a notação ($B = LN$).

A seguir, utiliza-se o princípio dos deslocamentos virtuais, com a inclusão das forças de amortecimento, se escreve:

$$\begin{aligned} & \text{Trab. virtual das forças internas} + \text{Trab. virtual das forças de inércia} + \\ & \text{Trab. virtual das forças de amortecimento} = \text{Trab. virtual das forças externas} \end{aligned} \quad (21)$$

De forma explícita e com a presente notação, esse princípio se escreve:

$$\int_{V_e} \sigma^T \delta \varepsilon dV_e + \int_{V_e} f_{in}^T \delta u dV_e + \int_{V_e} f_a^T \delta u dV_e = \int_{V_e} p^T \delta u dV_e + \int_{S_e} q^T \delta u dS_e \quad (22)$$

Onde:

δ = representa uma grandeza virtual;

V_e = volume do elemento;

S_e = superfície do elemento;

f_{in} = vetor de forças de inércia;

f_a = vetor de forças de amortecimento;

p = vetor de forças de volume;

q = vetor de forças de superfície.

Em seguida, as componentes das forças de inércia e de amortecimento obtidas através do campo de deslocamento são dadas respectivamente:

$$f_{in}(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho N \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \quad (23)$$

$$f_a(t) = c \dot{\mathbf{u}} = \rho N \dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \quad (24)$$

Em que:

ρ = densidade de massa do elemento;

c = coeficiente de amortecimento viscoso.

Assim, obtém-se de forma semelhante, os campos virtuais de deslocamentos, de deformações e de tensões respectivamente expressados nas Equações 25, 26 e 27:

$$\delta u = N \delta u^{(e)} \quad (25)$$

$$\delta \varepsilon = B \delta u^{(e)} \quad (26)$$

$$\delta \sigma = EB \delta u^{(e)} \quad (27)$$

Substituindo agora as Equações de 23 à 27 na Equação 22 e fazendo manipulações chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V_e} N^T \rho N dV_e \right) \ddot{u}^{(e)} + \left(\int_{V_e} N^T c N dV_e \right) \dot{u}^{(e)} + \left(\int_{V_e} B^T E B dV_e \right) u^{(e)} \\ &= \left(\int_{V_e} N^T p dV_e \right) + \left(\int_{S_e} N^T q dS_e \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Seguindo com as notações:

$$M^{(e)} = \left(\int_{V_e} N^T \rho N dV_e \right) \quad (29)$$

$$C^{(e)} = \int_{V_e} N^T c N dV_e \quad (30)$$

$$f^{(e)} = \int_{V_e} B^T E B dV_e \quad (31)$$

$$K^{(e)} = \left(\int_{V_e} N^T p dV_e \right) + \left(\int_{S_e} N^T q dS_e \right) \quad (32)$$

Com as Equações de 29 a 33 substituindo na Equação 28, obtém-se a seguinte forma:

$$M^{(e)} \ddot{u}^{(e)} + C^{(e)} \dot{u}^{(e)} + K^{(e)} u^{(e)} = f^{(e)} \quad (33)$$

Onde:

$f^{(e)}$ = vetor de forças nodais equivalentes aplicadas ao elemento.

2.4 Dinâmica das estruturas em concreto armado

A análise dinâmica de estruturas desempenha um papel imprescindível na engenharia para obter uma compreensão mais completa do comportamento estrutural em resposta a cargas que variam com o tempo. Ao contrário da análise estática, que considera apenas o equilíbrio de forças, a análise dinâmica incorpora as forças iniciais criadas pela inclinação de um objeto em movimento. Para Mo (1994), ao analisar a resposta dinâmica de uma estrutura, tem-se como objetivo buscar quantidades físicas dependentes do tempo. Em outras palavras, cargas dinâmicas em uma estrutura e suas respostas estruturais (deformações, deslocamentos, tensões, forças internas) são quantidades que variam com o tempo.

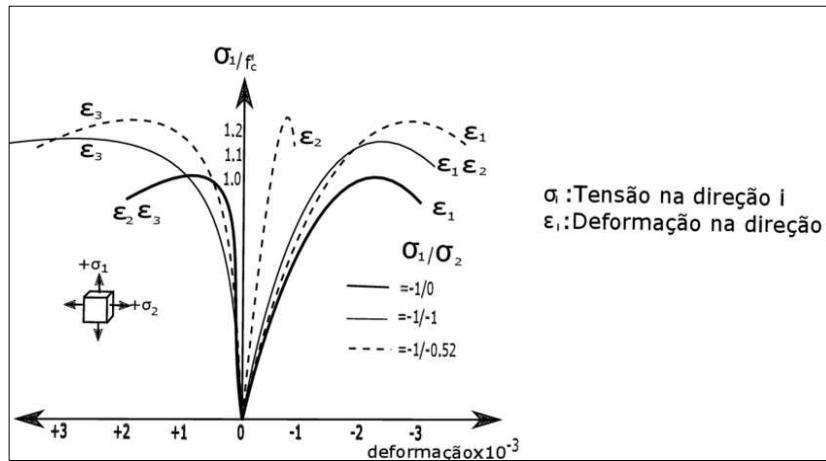
A resposta dinâmica é caracterizada por várias informações importantes como as frequências naturais das vibrações e os modos de vibração da estrutura. A consideração das forças iniciais é especialmente importante em situações em que as cargas variam ao longo do tempo, como eventos sísmicos, vento ou cargas móveis em pontes. Com isso, essas forças iniciais influenciam diretamente na distribuição de esforços e na resposta estrutural, sendo importantes para garantir a integridade e estabilidade da estrutura. Para melhor entendimento, as subseções a seguir apresentam as fundamentações conceituais necessárias.

Segundo Pantoja R, B. G. (2018), A principal característica mecânica do concreto é resistir altas tensões de compressão, no entanto sua resistência à tração é limitada. Dependendo das condições de carga, este material apresenta uma variação nas características de deformação, que pode ser observada na curva tensão-deformação, que para pequenas tensões, a resposta é um comportamento linear.

Com isso, para um determinado nível de carga, é iniciado um comportamento não linear, sendo mais próximo ao valor máximo (resistência de compressão). O amolecimento do concreto, acontece quando a tensão no material é aumentada, no entanto, a deformação presente não aumenta na mesma proporção, o que provoca uma rigidez diminuída, que é provocada por trincas ou falhas internas no material. Observa-se logo abaixo na Figura 4, onde a curva tensão-deformação começa a se nivelar ou decrescer, indicando um amolecimento estrutural do concreto, com o eixo x representando a deformação e o y representando o inverso da área ($\frac{\sigma_I}{f'_c}$),

com o pico da curva indicando o amolecimento do material, resultando na parte descendente da curva (Buyukozturk e Shareef, 1985).

Figura 4 – Curvas de tensão-deformação sob compressão biaxial



Fonte: Modificado de Buyukozturk e Shareef (1985).

Para Buyukozturk e Shareef (1985), o comportamento do concreto supracitado acima pode variar dependendo da situação de carga em que é aplicada. Por exemplo, testes experimentais de comportamento sob pressão biaxial (em duas direções) e triaxial (em três direções) mostram um aumento na resistência da compressão. Contudo, o concreto tem um comportamento frágil em tração com uma resistência de cerca de 10% da resistência à compressão.

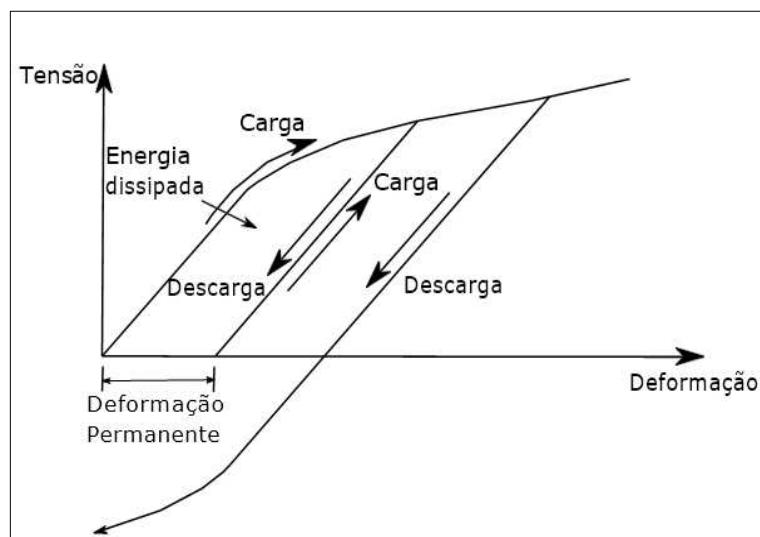
A baixa resistência à tração é uma desvantagem que o concreto possui, pois ele quebra facilmente devido a vários fatores, como o calor e a retração, além disso, é crucial observar que, quando o concreto é submetido a cargas cíclicas de um determinado nível, tanto a resistência à compressão, à tração e a rigidez podem ser reduzidas.

Segundo García Reyes (1988), o comportamento dinâmico do concreto armado, condiz com a resposta do material, quando é submetido com uma carga rápida ou dinâmica, como por exemplo, choques, carga cíclica, explosão e vibração. Nesse sentido, algumas características especiais devem ser levadas em consideração no processo de projeto e planejamento. O concreto armado quando submetido a uma carga dinâmica, apresenta um comportamento não linear em função de diversos fatores como a deformação aplicada e a presença de armadura de aço. Esses fatores dificultam a capacidade do material de resistir aos esforços, resistir e dissipar energia, ou seja, a capacidade do concreto absorver e suportar a energia aplicada sem sofrer deformações permanentes, o que provocaria a ruína, caso isso acontecesse.

Além disso, García Reyes (1988) destaca que o concreto armado também apresenta comportamento de fissuração sob cargas dinâmicas. A tensão cíclica pode abrir e alargar fissuras no concreto, reduzindo sua capacidade de carga e causando danos estruturais ao longo do tempo. A presença do aço pode ajudar a controlar a propagação de trincas, garantindo a integridade estrutural mesmo sob cargas pesadas. Em contrapartida, considerando a resposta dinâmica, tendo em conta sua capacidade limitada de absorver energia sob carga cíclica, pode ocorrer fadiga e corrosão na estrutura com o tempo.

De acordo com García Reyes (1988), os materiais inelásticos, como o concreto armado, apresentam comportamento não linear e possuem características diferentes quando uma carga crescente não monotônica (carga que não é aplicada de forma crescente, decrescente e contínua) é colocada até ocorrer uma ruptura, como é mostrado na Figura 5, que representa o comportamento tensão-deformação de um material sujeito a ciclos de carregamento e descarregamento em direções opostas, resultando em deformações permanentes na zona inelástica.

Figura 5 – Efeito no material inelástico com carga não monotônica



Fonte: Modificado de García Reyes (1988).

2.4.1 Ressonância

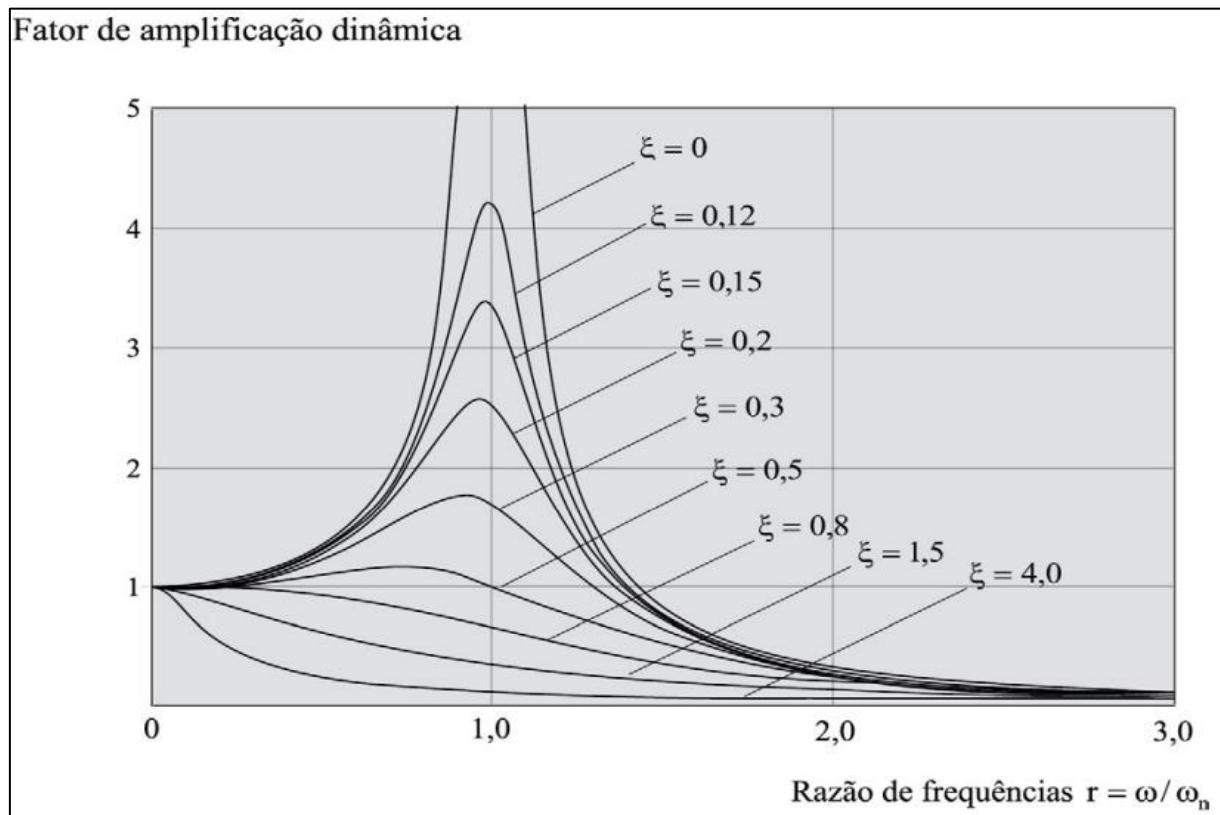
Segundo Walker, Halliday e Resnick (2009), quando a frequência da força externa se aproxima da frequência natural não amortecida do sistema (denotada por ω_0), ocorre um fenômeno conhecido como ressonância. Nesse contexto, o corpo entra em um estado em que

há um aumento progressivo na energia do sistema, resultando em um aumento na amplitude de vibração. Na prática, especialmente em estruturas civis, a ressonância pode ser problemática, pois pequenas forças externas podem provocar deslocamentos significativos. Isso é perceptível e pode causar desconforto aos usuários, como explicado por Diógenes (2010).

Percebe-se que, em um modelo de sistema mecânico, quando uma força dinâmica é aplicada com uma determinada frequência, o deslocamento do sistema pode aumentar significativamente, mesmo sob uma pequena ação. Isso acontece quando a frequência da força aplicada se aproxima ou coincide com a frequência natural do sistema, fenômeno conhecido como ressonância, resultando na chamada frequência de ressonância (Martins et al., 2018).

A Figura 6 ilustra esse efeito, apresentando a amplitude de vibração do sistema em frequências próximas à frequência natural ou de excitação, considerando diferentes valores de amortecimento (ξ). Essa representação visual mostra como a ressonância pode ocorrer e afetar o comportamento vibratório do sistema, à medida que o valor de amortecimento aumenta, a amplitude máxima diminui e a curva se torna menos acentuada, ou seja, a amplitude é maior quando o amortecimento é menor (inversamente proporcional).

Figura 6 – Fator de amplificação dinâmica versus razão de frequências



Fonte: Soriano (2014).

No ramo da engenharia civil, a análise da ressonância em estruturas é essencial para prever ou prevenir o risco de desabamento. Um exemplo paradigmático desse fenômeno ocorreu na Ponte Tacoma, como relatado por Fuller (1994). Sob a influência de ventos de baixa intensidade, a ponte sofreu oscilações significativas que levaram eventualmente ao seu desmoronamento completo, em um dia com condições climáticas atípicas. Esse incidente destaca a importância de compreender e considerar a ressonância no projeto e na manutenção de estruturas, especialmente em locais suscetíveis a forças externas, como ventos. A Figura 7, apresentada abaixo, ilustra o colapso da ponte, destacando os efeitos da ressonância na integridade estrutural.

Figura 7 – Ponte Tacoma Narrows em colapso



Fonte: Zambotto (2015).

2.5 Análise modal

Para (Johansson, 2009), um dos conceitos mais importantes na Dinâmica das Estruturas é o da frequência natural. Quando uma estrutura é perturbada, retirada da sua posição de equilíbrio, e lhe é permitido oscilar sem qualquer excitação dinâmica externa, de forma livre ela vibrará em certas frequências denominadas de frequências naturais. Uma estrutura possui um número ilimitado de frequências naturais e, para cada uma dessas, está associado um perfil de movimento da estrutura chamado de modo de vibração.

Observa-se que as frequências e os modos naturais estão diretamente relacionados à distribuição de rigidez e massa da estrutura. Eles são essenciais para a análise dinâmica, já que, em geral, as estruturas possuem um amortecimento baixo, permitindo prever seu

comportamento mesmo antes de conhecer as forças atuantes. Além disso, há métodos de cálculo que utilizam diretamente os modos e frequências naturais para determinar a resposta da estrutura.

Existem duas etapas principais na verificação do comportamento da estrutura de concreto armado sob cargas dinâmicas. Para determinar as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura, uma análise modal é realizada, na primeira etapa, usando métodos analíticos ou experimentais para entender como a estrutura responde às cargas. Na segunda etapa, é realizada uma análise dinâmica na resposta da estrutura, considerando o comportamento no domínio do tempo ou da frequência. Nesta fase são aplicadas ações dinâmicas relevantes à estrutura avaliando tensões, deslocamentos, velocidades e acelerações.

Quanto à análise modal, o conhecimento das frequências naturais é crucial para verificar possíveis ocorrência do fenômeno de ressonância que pode ter um impacto significativo no comportamento dinâmico de estruturas e sistemas. Nesse sentido, a análise modal é uma etapa importante para complementar os modelos experimentais usados para estudar o comportamento dinâmico de uma estrutura. Essa análise procura identificar as características modais da estrutura, ou seja, a sua frequência de vibração refere-se a uma taxa de oscilação do sistema durante a vibração e o modo de vibração padrão específico de vibração que um sistema pode assumir correspondente a cada um destes fatores.

Para realizar a análise modal, é necessário realizar um conjunto de medidas experimentais que envolvem a excitação controlada da estrutura e a medição das respostas vibratórias em pontos estratégicamente selecionados. Essas respostas podem ser obtidas por meio de sensores, como extensômetros ou acelerômetros, que capturam as vibrações em diferentes locais da estrutura.

Na análise experimental da vibração estrutural, surgiram dois métodos: a Análise Modal Experimental (AME) e a Análise Modal Operacional (AMO). Segundo o trabalho de Allemand, R. J. Brown, D. L (1982), a principal diferença entre esses métodos é baseada na forma como o estímulo é usado durante o experimento. Na AME, os estímulos são aplicados de forma controlada e deliberada, geralmente por meio de martelo de impacto ou agitador, o que permite medir com precisão a resposta da estrutura. Esses estímulos são medidos de maneira artificial (isto se refere ao uso proposital do estímulo e ao controle preciso). No entanto, na AMO, o estímulo é provocado no ambiente e não é conhecido.

Para imersas estruturas, a AMO é mais usual, porque não é prático adquirir ou inventar equipamentos que gerem vibrações em grandes edificações como pontes, prédios ou aviões. Nesta análise, cada modo operacional possui características distintas, como seu estilo

de movimento e como a energia é distribuída pela estrutura. A compreensão dos modos operacionais é fundamental para o entendimento do comportamento dinâmico de sistemas e estruturas, o que possibilita a detecção de problemas, a garantia da integridade estrutural e a otimização de projetos.

Em termos metodológicos, na análise modal operacional, as técnicas de avaliação da condição operacional requerem medições simultâneas em dois canais e o uso de uma Função Resposta em Frequência (FRF). Essa avaliação fornece informações sobre a amplitude e a fase de cada sinal da sonda, associadas às mudanças na velocidade, aceleração ou deslocamento decorrentes de forças de impulso. O sistema é calculado comparando a resposta relativa à intensidade do estímulo.

Conforme Schwarz e Richardson (1999), as condições de contorno, forças e cargas externas do sistema passaram por todos esses modos juntamente com as características prováveis e físicas do sistema. Em termos da FRF, os modos operacionais podem ser estimados pela seguinte equação:

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)] \cdot \{F(\omega)\} \quad (34)$$

Em que:

ω = frequência angular;

$\{X(\omega)\}$ = vetor de deslocamento no domínio da frequência;

$[H(\omega)]$ = matriz de FRFs;

$\{F(\omega)\}$ = vetor força excitadora no domínio da frequência.

Quando existe uma frequência natural ω_0 , o modo operacional é:

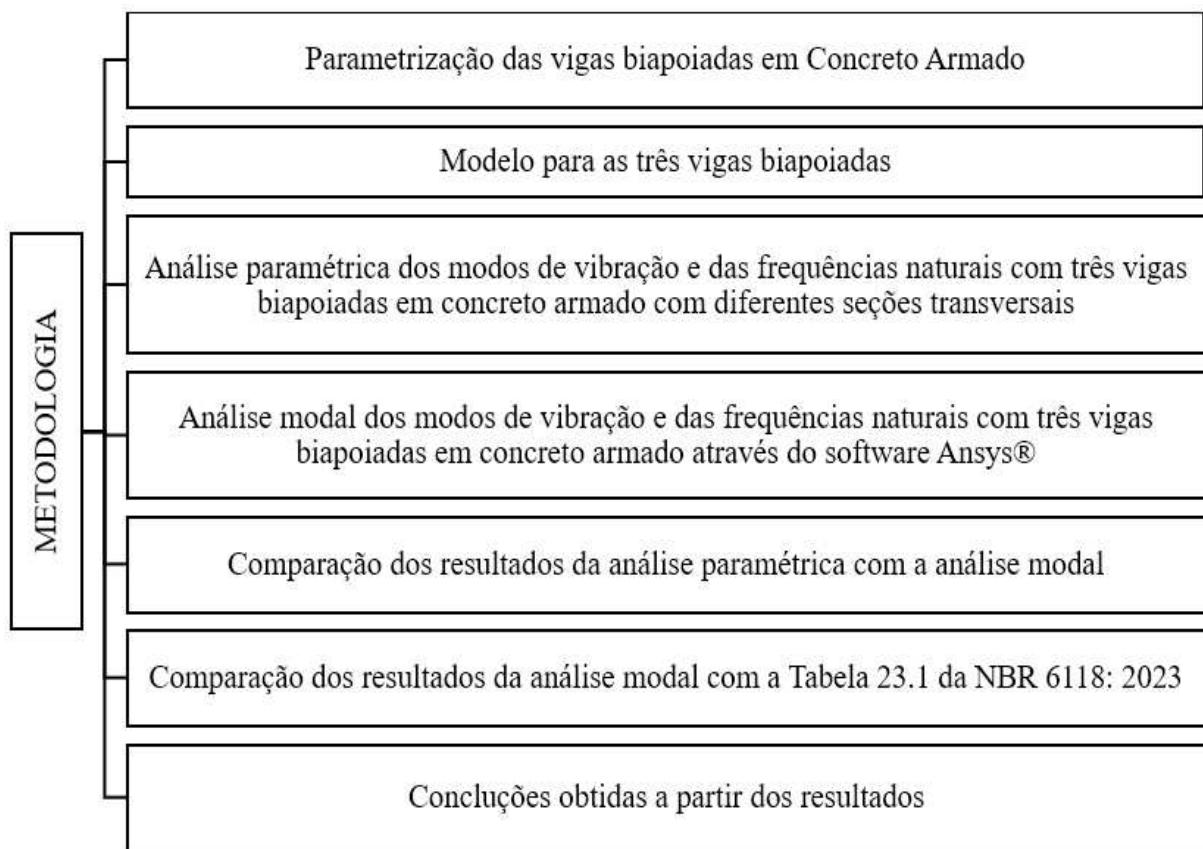
$$\{X(\omega_0)\} = [H(\omega_0)] \cdot \{F(\omega_0)\} \quad (35)$$

Conforme Peeters, B. (2001), as características modais de um sistema são inferidas a partir de curvas FRF iniciadas experimentalmente. Em geral, o objetivo da análise modal experimental é criar uma representação matemática do sistema que está sendo estudado, a fim de aproximar o mais possível de como uma estrutura se comporta dinamicamente em termos modais. Denomina-se análise modal a determinação dos modos de vibração e suas frequências naturais.

3 METODOLOGIA

Antes de discorrer sobre o *software* Ansys® utilizado no presente trabalho, a seguir é mostrado na Figura 8 com passo a passo desta pesquisa:

Figura 8 – Fluxograma da pesquisa



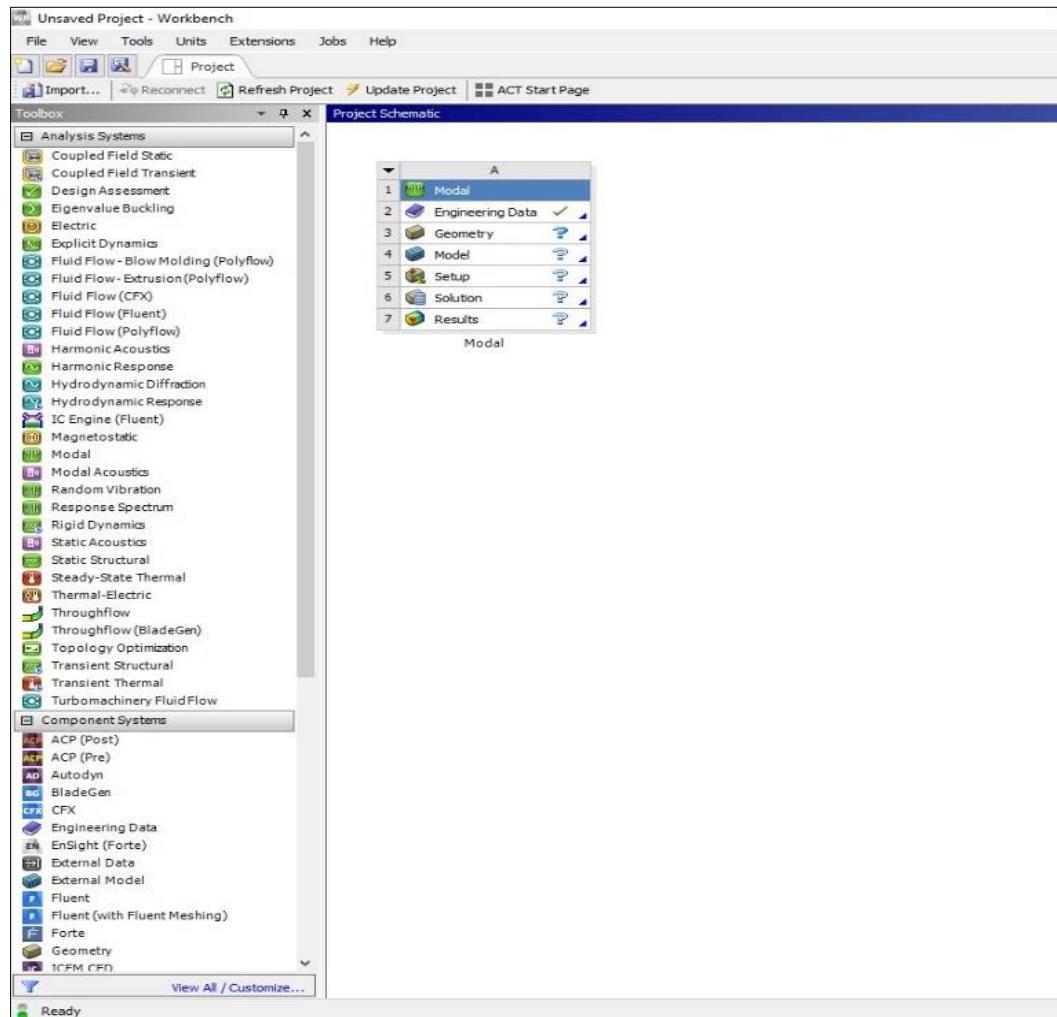
Fonte: Autor (2025).

3.1 Interface e modelo do Ansys® 2019 R3

O ANSYS é um pacote de *software* de simulação de engenharia amplamente utilizado em diversos setores industriais para análise e projeto de sistemas complexos, ele oferece uma variedade de ferramentas para simulação em diversas áreas, como análise modal, análise estrutural, fluidodinâmica computacional, eletromagnetismo, otimização, acústica, entre outras. Além disso, o Ansys permite a criação de modelos 3D detalhados de componentes e sistemas complexos, incluindo geometrias, tem a capacidade para avaliar o comportamento modal e estrutural de peças e conjuntos, incluindo análises de tensão, deformação, fadiga, frequências naturais, modos de vibração e outros critérios, possui também ferramentas de

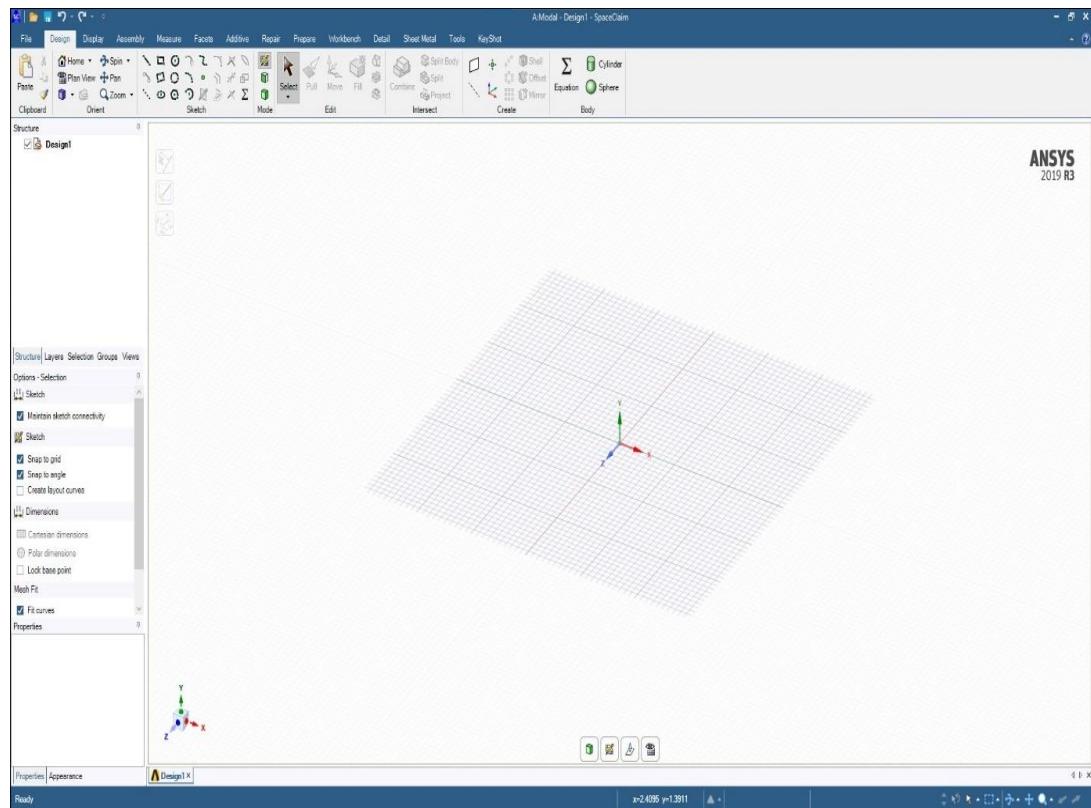
otimização integradas para aprimorar projetos automaticamente, minimizando ou maximizando variáveis de desempenho. Logo abaixo, é mostrado na Figura 9 e 10, algumas imagens retiradas da interface do Ansys® 2019 R3:

Figura 9 – Interface do Ansys® Workbench



Fonte: Autor (2025).

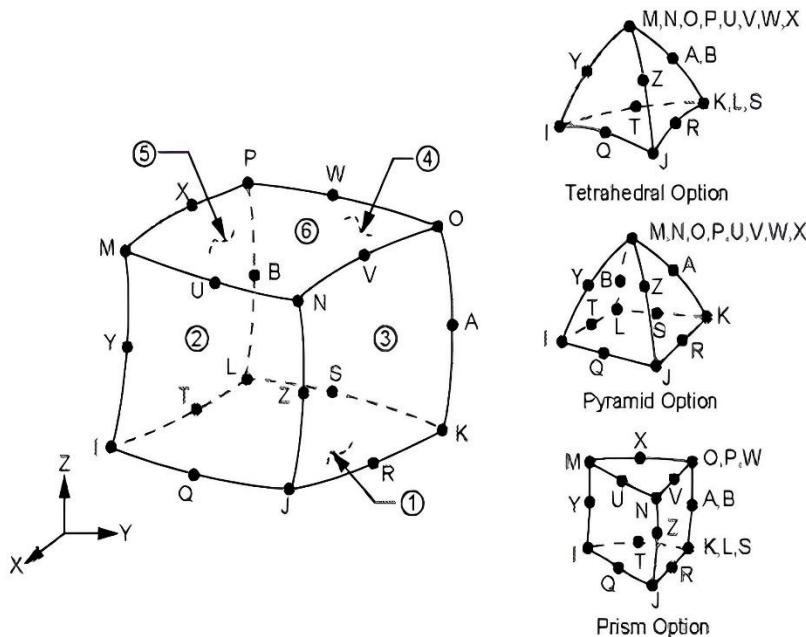
Figura 10 – Interface do Ansys® SpaceClaim



Fonte: Autor (2025).

Além disso, o estudo de malha de elementos finitos empregados no *software* Ansys será de 5, 4, 3, 2 e 1 cm para o presente trabalho. O Ansys utiliza um modelo com geometria de elemento sólido e tipo de malha com elementos tetraédricos para discretização do meio contínuo como é visto na figura a seguir:

Figura 11 – Elementos utilizados para a discretização do meio contínuo



Fonte: Biblioteca do Ansys (2019).

3.2 Parametrização das vigas biapoiadas em Concreto Armado

O material utilizado nas vigas biapoiadas com um apoio de primeiro gênero e outro apoio de segundo gênero será o Concreto Armado: isotrópico elástico que consiste em concreto reforçado com barras de aço. Ele é considerado isotrópico elástico no sentido de que suas propriedades mecânicas como elasticidade e resistência são uniformes em todas as direções sob condições ideais, a seguir, será mostrado a Tabela 1, 2 e 3 contendo todas as informações necessárias para realizar a análise paramétrica e modal da viga:

Tabela 1 – Parâmetros da viga 1 em concreto armado

Seção transversal	
Tipo	retangular
Altura (h)	0,40 m
Largura (b)	0,15 m
Massa linear da viga (m')	138,00 kg/m
Área da seção transversal (A)	0,060 m ²

Momento de inércia (I) $8,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Material	
Descrição	concreto armado: isotrópico elástico
Densidade	2300 kg/m ³
Módulo de elasticidade (E)	30000 MPa
Viga	
Comprimento L	4,0 m

Fonte: Autor (2025).

Tabela 2 – Parâmetro da viga 2 em concreto armado

Seção transversal	
Tipo	retangular
Altura (h)	0,40 m
Largura (b)	0,12 m
Massa linear da viga (m')	110,40 kg/m
Área da seção transversal (A)	0,048 m ²
Momento de inércia (I)	$6,40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
Material	
Descrição	concreto armado: isotrópico elástico
Densidade	2300 kg/m ³
Módulo de elasticidade (E)	30000 MPa
Viga	
Comprimento L	5,0 m

Fonte: Autor (2025).

Tabela 3 – Parâmetro da viga 3 em concreto armado

Seção transversal	
Tipo	retangular
Altura (h)	0,40 m
Largura (b)	0,10 m
Massa linear da viga (m')	92,00 kg/m
Área da seção transversal (A)	0,040 m ²
Momento de inércia (I)	$5,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Material	
Descrição	concreto armado: isotrópico elástico
Densidade	2300 kg/m ³
Módulo de elasticidade (E)	30000 MPa
Viga	
Comprimento L	6,0 m

Fonte: Autor (2025).

A seguir se encontra a tabela atualizada da NBR 6118/2023 (Projeto de estruturas de concreto) com a frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas, esta tabela é necessária para identificar frequências que podem causar instabilidade ou insegurança aos usuários e compará-las com os valores de frequência crítica:

Tabela 4 – Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas

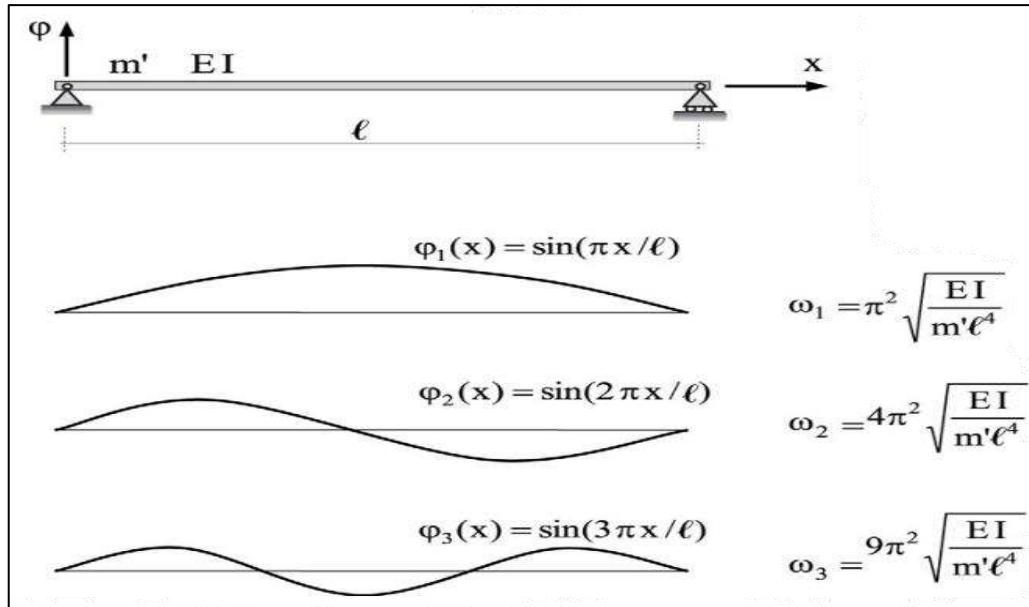
Caso	$f_{crít}$ (Hz)
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concreto sem cadeiras fixas	7,0
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concreto com cadeiras fixas	3,5

Fonte: NBR 6118/2023 (2023).

3.3 Modelo para as três vigas biapoiadas

A seguir será considerada uma viga biapoiada mostrada na Figura 12, com as equações necessárias para encontrar os três primeiros modos naturais de vibração e das correspondentes frequências naturais. A viga possui um apoio de primeiro gênero e outro de segundo gênero.

Figura 12 – Propriedades dinâmicas de viga biapoiada



Fonte: Soriano (2014).

Os modos de vibração de um sistema estão diretamente relacionados com as suas frequências naturais de vibração. As equações $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ se referem aos modos de vibração relacionados com as frequências angulares ω_1 , ω_2 , ω_3 , que logo após são transformadas em frequências naturais, por meio da mudança de radiano para hertz.

4 RESULTADOS

4.1 Análise paramétrica feita no Google Colab

Na análise paramétrica feita através da linguagem de programação em Python, foi encontrado os três modos de vibração e suas respectivas frequências naturais para a viga biapoiada, logo abaixo se encontram os resultados encontrados para a viga em concreto biapoiada com um apoio de primeiro gênero e outro apoio de segundo gênero. Para análise paramétrica computacional em Python da viga 1 temos resultados então em rad/s, por meio de conversão para hertz, temos:

$$f1 = 40.94 \text{ Hz}$$

$$f2 = 173.76 \text{ Hz}$$

$$f3 = 368.47 \text{ Hz}$$

Para análise paramétrica computacional em Python da viga 2 temos resultados então em rad/s, por meio de conversão para hertz, temos:

$$f1 = 26.20 \text{ Hz}$$

$$f2 = 104.80 \text{ Hz}$$

$$f3 = 235.82 \text{ Hz}$$

Para análise paramétrica computacional em Python da viga 3 temos resultados então em rad/s, por meio de conversão para hertz, temos:

$$f1 = 18.18 \text{ Hz}$$

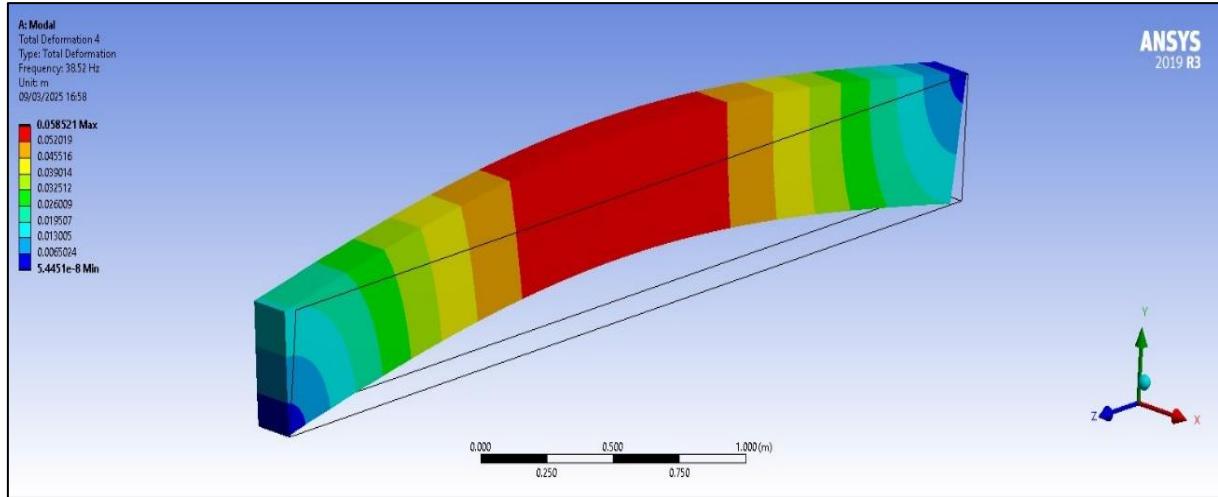
$$f2 = 72.76 \text{ Hz}$$

$$f3 = 163.71 \text{ Hz}$$

4.2 Análise modal feita no Ansys para a viga 1

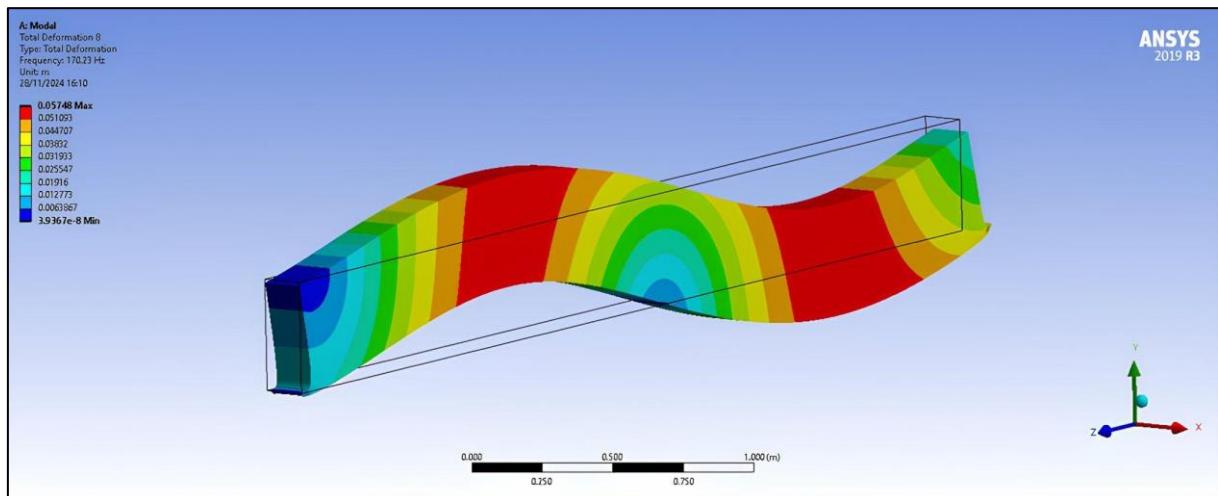
Nessa seção, será mostrado os resultados da viga biapoiada em concreto armado de número 1 para os três primeiros modos de vibração e suas respectivas frequências naturais:

Figura 13 – Primeiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 1



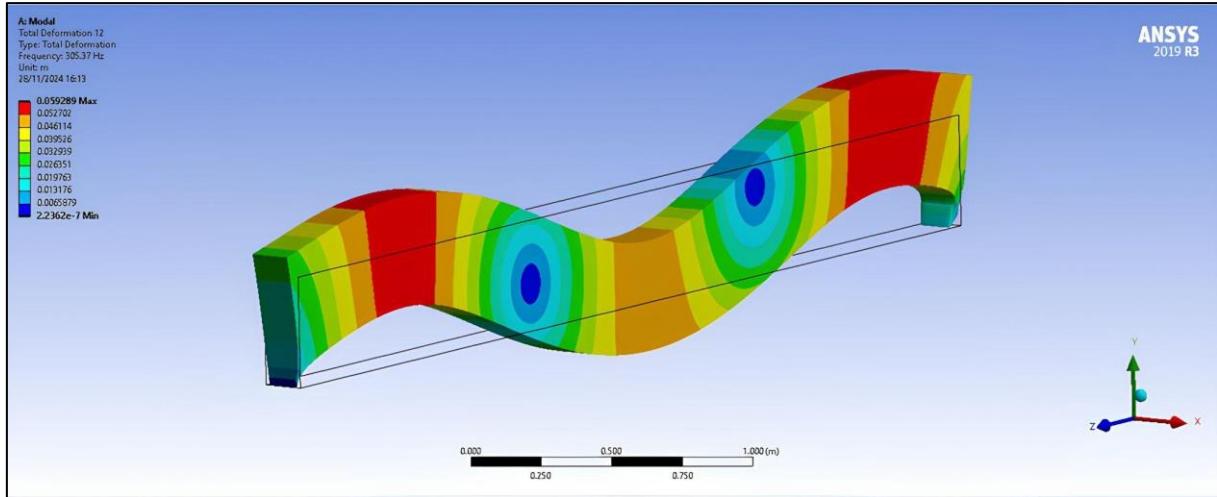
Fonte: Autor (2025).

Figura 14 – Segundo modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 1



Fonte: Autor (2025).

Figura 15 – Terceiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 1



Fonte: Autor (2025).

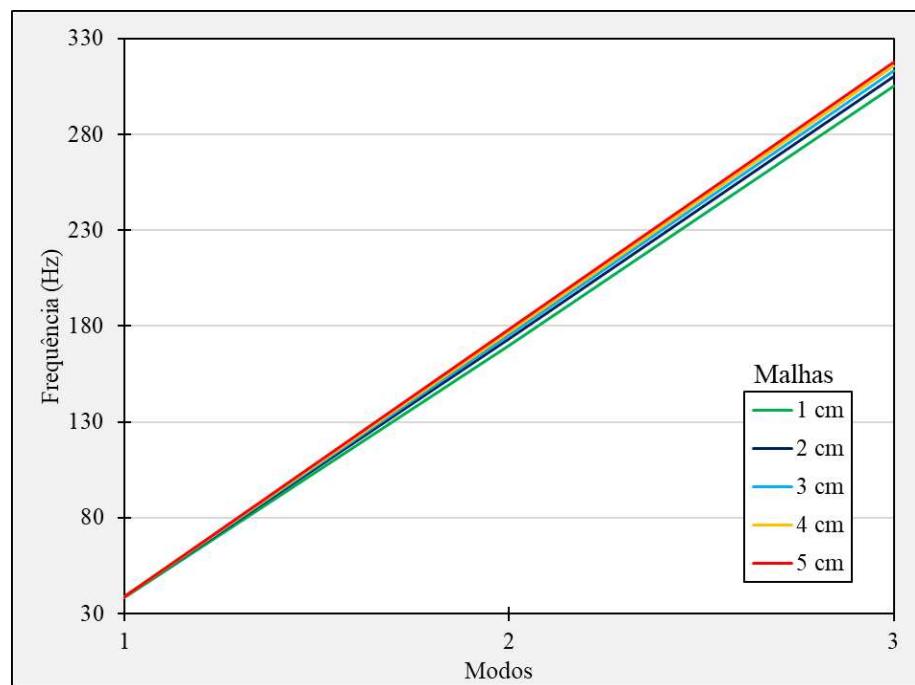
Figura 16 – Resultados dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais

Tabular Data		
	Mode	Frequency [Hz]
1	1.	4.9282e-004
2	2.	4.9648
3	3.	37.389
4	4.	38.52
5	5.	74.3
6	6.	98.989
7	7.	108.87
8	8.	170.23
9	9.	186.71
10	10.	212.1
11	11.	302.59
12	12.	305.37

Fonte: Autor (2025).

O estudo de malha para a viga 1 será mostrado no gráfico abaixo:

Figura 17 – Estudo de malha com as frequências naturais da viga 1 de concreto armado



Fonte: Autor (2025).

Os valores deste gráfico se encontram logo abaixo:

Tabela 5 – Valores do estudo de malha para a viga 1

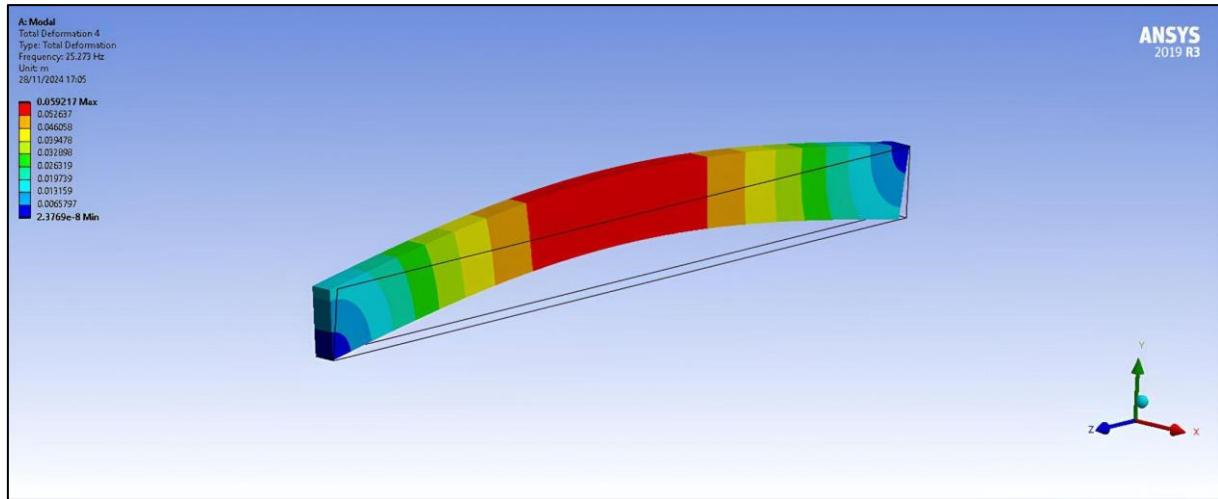
VIGA	MALHAS (cm)	MODO 1 (Hz)	MODO 2 (Hz)	MODO 3 (Hz)
1	1	38.52	170.23	305.37
	2	38.63	173.4	310.39
	3	38.7	175.41	313.39
	4	38.75	177.1	315.89
	5	38.79	178.43	317.61

Fonte: Autor (2025).

4.3 Análise modal feita no Ansys para a viga 2

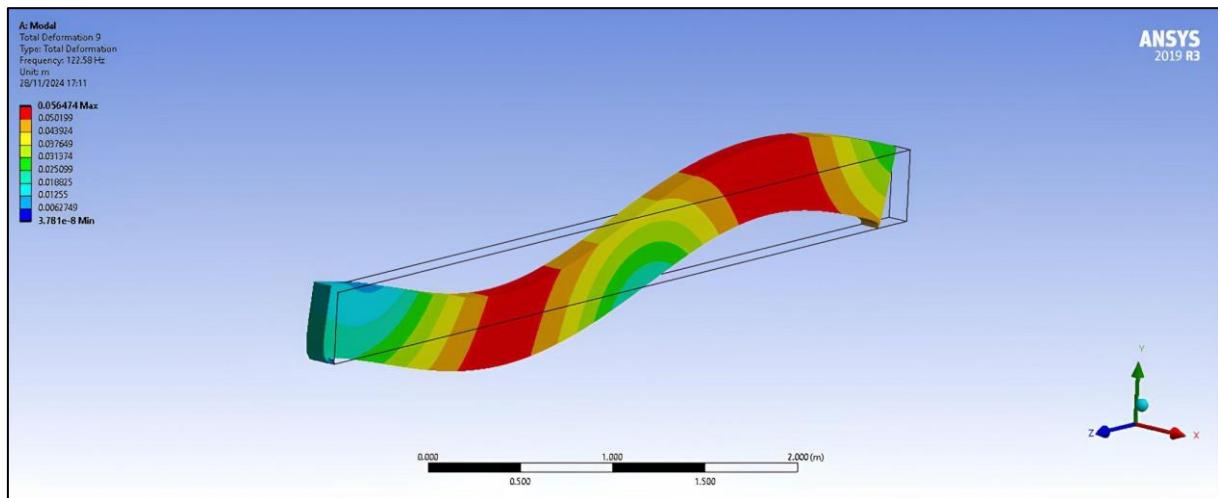
Em seguida, será mostrado os resultados da viga biapoiada em concreto armado de número 2 para os três primeiros modos de vibração e suas respectivas frequências naturais:

Figura 18 – Primeiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 2



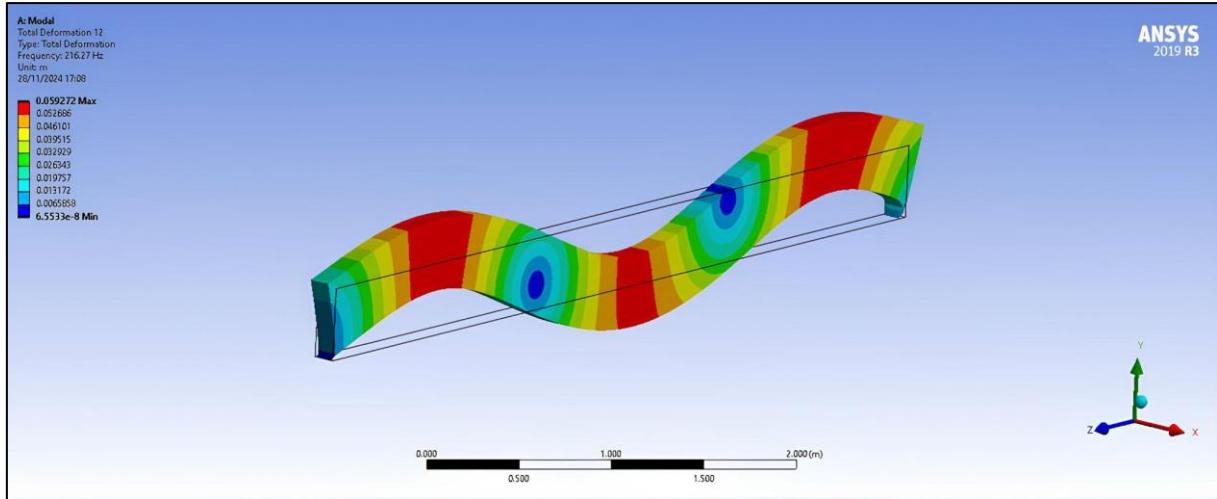
Fonte: Autor (2025).

Figura 19 – Segundo modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 2



Fonte: Autor (2025).

Figura 20 – Terceiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 2



Fonte: Autor (2025).

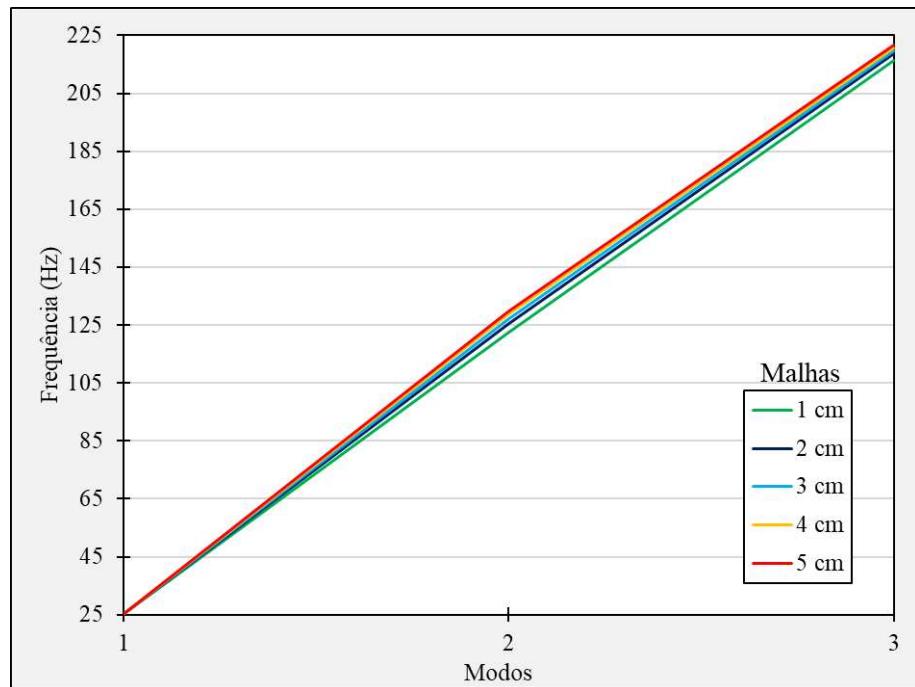
Figura 21 – Resultados dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais

Tabular Data		
	Mode	<input checked="" type="checkbox"/> Frequency [Hz]
1	1.	7.0803e-004
2	2.	2.757
3	3.	19.54
4	4.	25.273
5	5.	49.666
6	6.	55.909
7	7.	83.283
8	8.	97.801
9	9.	122.58
10	10.	145.6
11	11.	159.73
12	12.	216.27

Fonte: Autor (2025).

O estudo de malha para a viga 1 será mostrado no gráfico abaixo:

Figura 22 – Estudo de malha com as frequências naturais da viga 2 de concreto armado



Fonte: Autor (2025).

Os valores deste gráfico se encontram logo abaixo:

Tabela 6 – Valores do estudo de malha para a viga 2

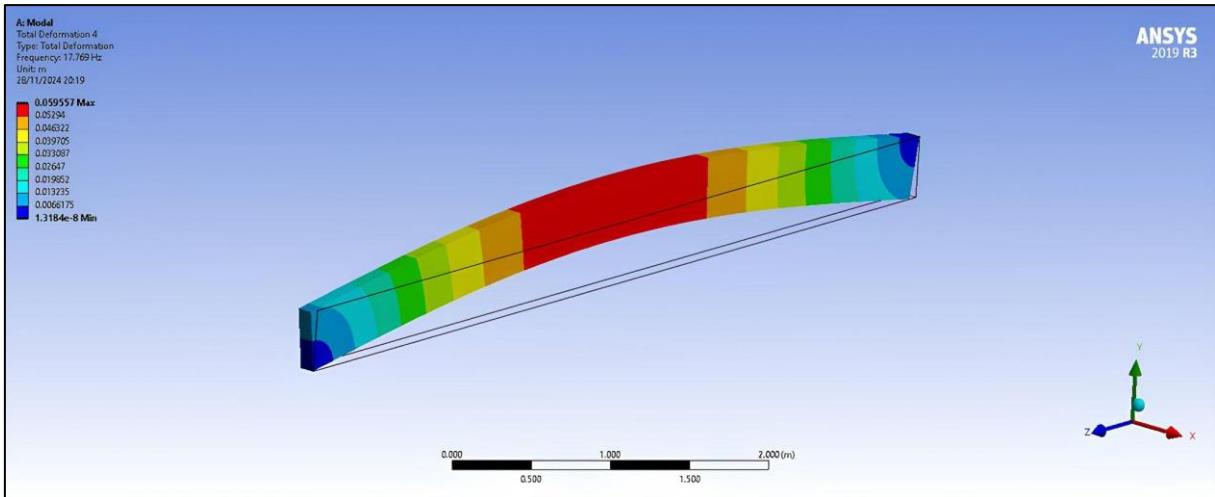
VIGA	MALHAS (cm)	MODO 1 (Hz)	MODO 2 (Hz)	MODO 3 (Hz)
2	1	25.27	122.58	216.27
	2	25.31	125.44	218.48
	3	25.33	127.28	219.71
	4	25.34	128.78	220.77
	5	25.36	129.97	221.52

Fonte: Autor (2025).

4.4 Análise modal feita no Ansys para a viga 3

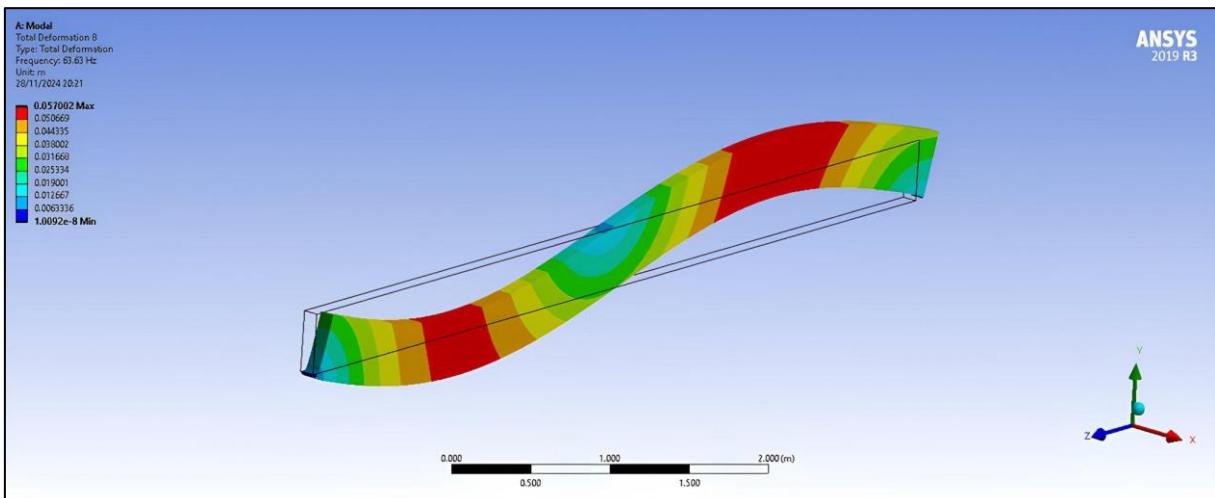
Por fim, será mostrado os resultados da viga biapoiada em concreto armado de número 3 para os três primeiros modos de vibração e suas respectivas frequências naturais:

Figura 23 – Primeiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 3



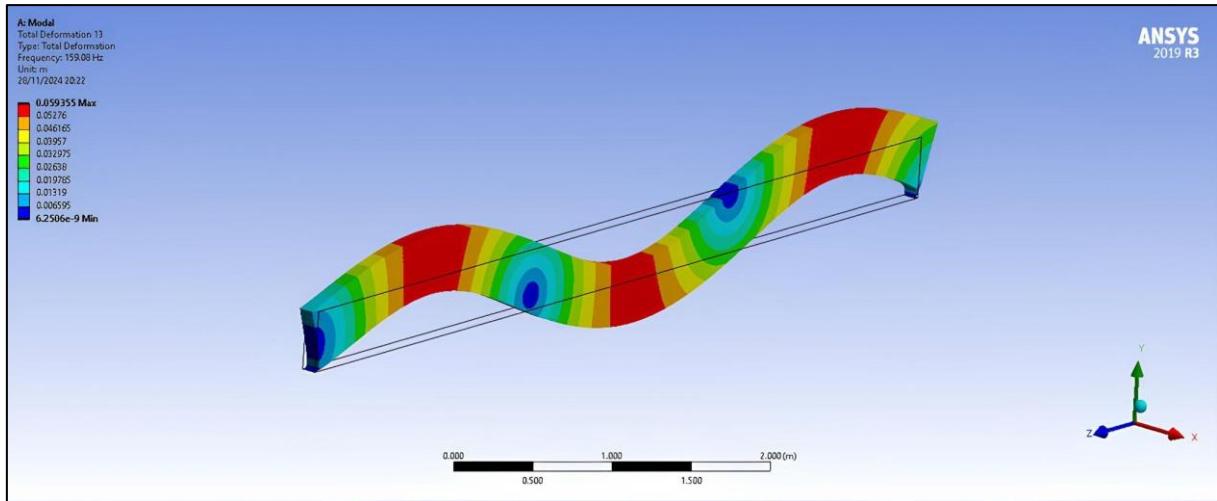
Fonte: Autor (2025).

Figura 24 – Segundo modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 3



Fonte: Autor (2025).

Figura 25 – Terceiro modo de vibração com sua respectiva frequência natural para a viga 3



Fonte: Autor (2025).

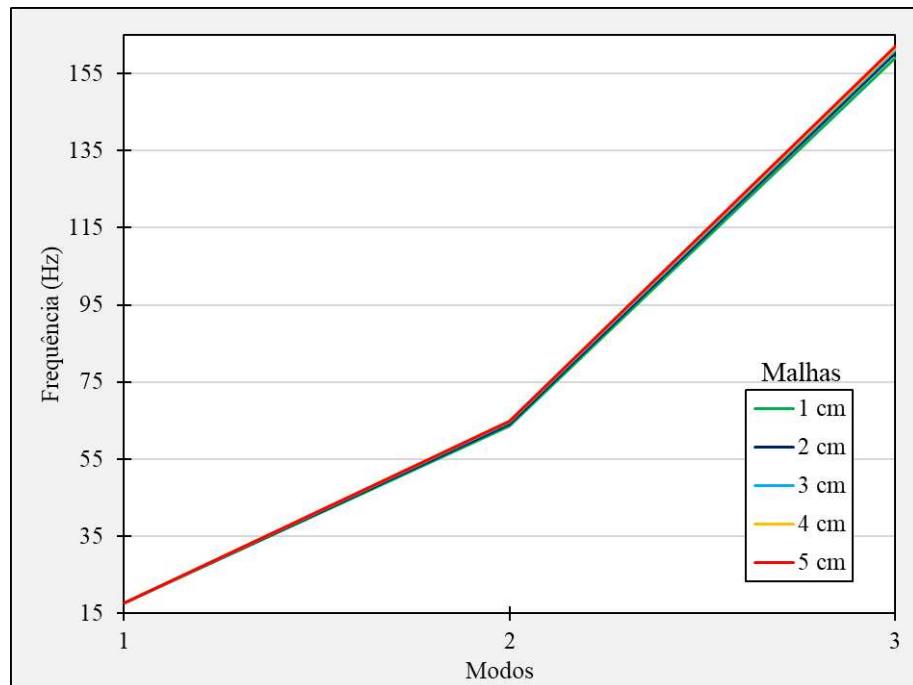
Figura 26 – Resultados dos modos de vibração e suas respectivas frequências naturais

Tabular Data		
	Mode	Frequency [Hz]
2	2.	1.696
3	3.	11.487
4	4.	17.769
5	5.	29.613
6	6.	41.825
7	7.	57.3
8	8.	63.63
9	9.	92.955
10	10.	96.873
11	11.	107.31
12	12.	137.98
13	13.	159.08

Fonte: Autor (2025).

O estudo de malha para a viga 1 será mostrado no gráfico abaixo:

Figura 27 – Estudo de malha com as frequências naturais da viga 3 de concreto armado



Fonte: Autor (2025).

Os valores deste gráfico se encontram logo abaixo:

Tabela 7 – Valores do estudo de malha para a viga 3

VIGA	MALHAS (cm)	MODO 1 (Hz)	MODO 2 (Hz)	MODO 3 (Hz)
3	1	17.76	63.63	159.08
	2	17.78	64.2	160.35
	3	17.79	64.52	161.09
	4	17.79	64.77	161.72
	5	17.8	64.94	162.19

Fonte: Autor (2025).

Constatou-se que através da simulação foi possível verificar na viga 1, que o valor do primeiro modo de vibração teve uma frequência natural de 38,52 Hz, o segundo modo de vibração também cumpriu o parâmetro da Norma, pois foi 170,23 Hz, assim como o terceiro modo de vibração da viga 1 proposta que foi de 305,37 Hz satisfazendo o parâmetro da norma que prevê que a frequência natural (f_n) da estrutura deve se afastar da frequência crítica (f_{crit}) em proporção de 20%, ou seja, conforme a NBR 6118/2023, para assegurar o comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível da frequência natural (própria) da estrutura da frequência crítica, que depende da destinação da respectiva

edificação, pois a condição a seguir deve ser atendida: $f_n > 1,2 f_{crit}$. Realizando o comparativo com a Tabela 4 que mostra a frequência crítica provocada por pessoas nas estruturas (variando entre 3,5 e 8 Hz), constatar-se que a frequência natural (f_n) para a estrutura se afastar dessas ações deve ser ($2,9 \text{ Hz} > f_n$ ou $f_n > 9,6 \text{ Hz}$). Os valores encontrados no presente trabalho satisfizeram as condições da NBR 6118/2023, ou seja, os resultados estão dentro da faixa crítica em que a norma orienta se afastar em até 20% mostrado na Tabela 4. Para a viga 2 e 3, os resultados também satisfizeram o parâmetro da Norma, onde que para a viga 2, o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração foi respectivamente de 25,27 Hz, 122,58 Hz e 216,27 Hz, para a viga 3 foi respectivamente 17,76 Hz, 63,63 Hz e 159,08 Hz.

5 CONCLUSÕES

Esse trabalho foi desenvolvido com objetivo de analisar, modelar e simular mediante as ações dinâmicas para vigas biapoiadas. Foi feito uma análise paramétrica por meio de programação computacional em Python e análise modal no *software Ansys® 2019 R3*, visto que a análise dinâmica é imprescindível na execução de projetos estruturais dentro da construção civil.

Recorreu-se a informações retiradas da atual norma NBR 6118:2023 para a definição das características mecânicas do modelo. Esta análise foi dividida em 2 etapas, foi feito uma análise paramétrica facilitado por meio de programação computacional em Python em vigas biapoidas em concreto armado (isotrópico elástico), cuja função foi a determinação das três modos de vibração e suas respectivas frequências naturais, além disso teve a análise modal facilitado pelo *software Ansys* dessas mesmas vigas, na qual foram obtidos os três modos de vibração se suas respectivas frequências naturais e comparados os resultados com a Tabela 23.1 da NBR 6118:2023.

Na primeira etapa envolveu a análise modal e paramétrica de três vigas em concreto armado biapoiadas com um apoio de primeiro gênero e outro de segundo gênero, determinando os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais. Concluiu-se que a análise modal feita no Ansys para vigas apresentaram frequências modais aproximadas com a análise paramétrica feita através de programação computacional em Python.

Na segunda etapa, foi feita a análise modal nas três vigas biapoiadas utilizando o software Ansys, os resultados demonstraram plena conformidade com os parâmetros estabelecidos pela NBR 6118:2023. Os primeiros três modos de vibração das estruturas apresentaram frequências naturais significativamente superiores ao limite mínimo de 9,6 Hz recomendado pela norma, confirmando a segurança estrutural contra vibrações críticas. A viga 1 obteve frequências de 38,52 Hz, 170,23 Hz e 305,37 Hz, enquanto as vigas 2 e 3 também apresentaram resultados satisfatórios, com todas as frequências naturais mantendo-se bem acima do intervalo crítico de 3,5 a 8 Hz estabelecido para vibrações causadas por pessoas.

Os resultados obtidos através da simulação computacional com malha de 1 cm validam o parâmetro da norma NBR 6118:2023 (23.3 Estado-limite de vibrações excessivas), demonstrando que as vigas atendem aos requisitos de desempenho dinâmico sem necessidade de intervenções adicionais. Caso alguma das frequências naturais tivesse se aproximado do intervalo crítico, o estudo já contemplava possíveis soluções corretivas, como o encamisamento para aumento da seção transversal, aplicação de reforços com compósitos PRFC ou

implementação de estruturas metálicas complementares - alternativas importantes para situações em que o comportamento dinâmico se mostra insatisfatório segundo os critérios normativos.

Os resultados demonstraram-se satisfatórios, validando a análise com utilização da simulação numérica pelo Ansys® 2019 R3, possibilitando assim, a aplicação e o estudo em estruturas mais complexas. Este tipo de análise se faz muito importante, pois estruturas sujeitas a cargas dinâmicas, principalmente de turbinas ou motores podem sofrer o fenômeno de ressonância. A utilização de ferramentas computacionais e ensaios não destrutivos auxilia nessa tomada de decisão sobre como proceder para a reabilitação da estrutura. Portanto os resultados obtidos foram de grande valia e de significativo nível de satisfação.

Por fim, como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a exploração de técnicas avançadas de análise modal em estruturas complexas, como aeronaves e edifícios inteligentes, com o objetivo de otimizar o desempenho e a segurança. Além disso, a integração de métodos baseados em inteligência artificial para a predição de frequências naturais e a identificação de padrões de falha configura uma área promissora de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- BABU, R. R.; BENIPAL, G. S.; SINGH, A. K. CONSTITUTIVE MODELLING OF CONCRETE: AN OVERVIEW. [s.d.].
- BRANDÃO, F. et al. Dynamic characterization of a heritage construction from 19th century. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, n. 1, p. 52–75, fev. 2018.
- BUYUKOZTURK, O.; SHAREEF, S. S. Constitutive modeling of concrete in finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 21, n. 3, p. 581–610, 1985.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- Curso de física básica 2: fluidos, oscilações e ondas, calor.** [s.l.] Editora Edgard Blucher, 2022.
- FARIA, I. B. S.; POGGIALI, F. S. J. Vibrações em estruturas no Brasil: uma revisão bibliográfica da literatura. **Engenharia Civil UM**, n. 60, p. 54–60, 23 set. 2022.
- GARCÍA REYES, L. E. **Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico**. Bogotá: Universidad de los Andes, 1998.
- GROSFOGUEL, R. A estrutura do conhecimento nas universidades ocidentalizadas: racismo/sexismo epistêmico e os quatro genocídios/epistemicídios do longo século XVI. **Sociedade e Estado**, v. 31, n. 1, p. 25–49, abr. 2016.
- IMPERIANO GOMES DE MELO, W.; COUTINHO FREIRE DA FONSECA, C. Análise modal e estabilidade em pilares de paredes finas: abordagens com a Técnica do Meio Contínuo e o Método dos Elementos Finitos. **Acústica e Vibrações**, v. 39, n. 56, 28 dez. 2024.
- LEPPÄNEN, J. Dynamic Behaviour of Concrete Structures subjected to Blast and Fragment Impacts. [s.d.].
- MALVEIRA, S. et al. ESTUDO PROSPECTIVO DA APLICAÇÃO DE DISSIPADORES METÁLICOS NO CONTROLE DE VIBRAÇÕES NA CONSTRUÇÃO CIVIL. **Cadernos de Prospecção**, v. 10, n. 3, p. 533, 30 set. 2017.
- MARTINS, C. A. P. et al. Alívio de tensões por vibrações sub-resonantes: análise e parametrização. **Matéria (Rio de Janeiro)**, v. 23, n. 1, 5 mar. 2018.
- MCNEILL, S. A Modal Identification Algorithm Combining Blind Source Separation and State Space Realization. **Journal of Signal and Information Processing**, v. 04, n. 02, p. 173–185, 2013.
- MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. Boston: McGraw-Hill, 2001.
- MELLO, G. N. D. A. et al. Análise de uma Estrutura de Concreto Armado e proposição de reforço para correção de falhas estruturais: Estudo de Caso. **Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**, v. 1, n. 43, p. 140, 20 nov. 2018.

MENÃO, M. C. CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM VIGAS UTILIZANDO CONTROLE FEEDFORWARD E ELEMENTOS ESPECTRAIS. [s.d.].

PADARATZ, I. J. **46º Congresso Brasileiro Do Concreto.** [s.l.] Ibracon, 2005.

PEETERS, B. Proefschrift voorgedragen tot het behalen van het doctoraat in de toegepaste wetenschappen door. [s.d.].

PEETERS, B.; DE ROECK, G. Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 123, n. 4, p. 659–667, 1 dez. 2001.

PINTO, M. F. UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS RUSSAS CURSO DE ENGENHARIA CIVIL. 2019.

PRAZZO, C. E. Análise Modal de uma Estrutura do Tipo Viga Utilizando Materiais Piezelétricos (PVDF) como Sensores. [s.d.].

RIBEIRO, P. I. D. S. et al. Uma revisão sobre vibrações em sistemas de piso em aço induzidas por carregamentos oriundos de atividades humanas. **Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural**, v. 15, n. 1, 24 abr. 2018.

RODRIGUES, R. D. O. **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado.** Doutorado em Estruturas—São Carlos: Universidade de São Paulo, 21 mar. 2018.

ROSERO, B. G. P.; FARFAN, R. D. D. **Analise dinâmica de estruturas de concreto armado via elementos finitos.** . Em: XXXVIII IBERIAN-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Florianopolis, Brazil: 2017a. Disponível em: <<http://www.swge.inf.br/proceedings/paper/?P=CILAMCE2017-0479>>. Acesso em: 01 mar. 2025

SINGH, T.; KATIYAR, S. K. Honokiol inhibits non-small cell lung cancer cell migration by targeting PGE₂-mediated activation of β-catenin signaling. **PloS One**, v. 8, n. 4, p. e60749, 2013.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos: Formulação Na Estática E Dinâmica Das Estruturas.** [s.l.] Editora Ciência Moderna, 2009a.

SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas.** [s.l.] Elsevier, 2015.

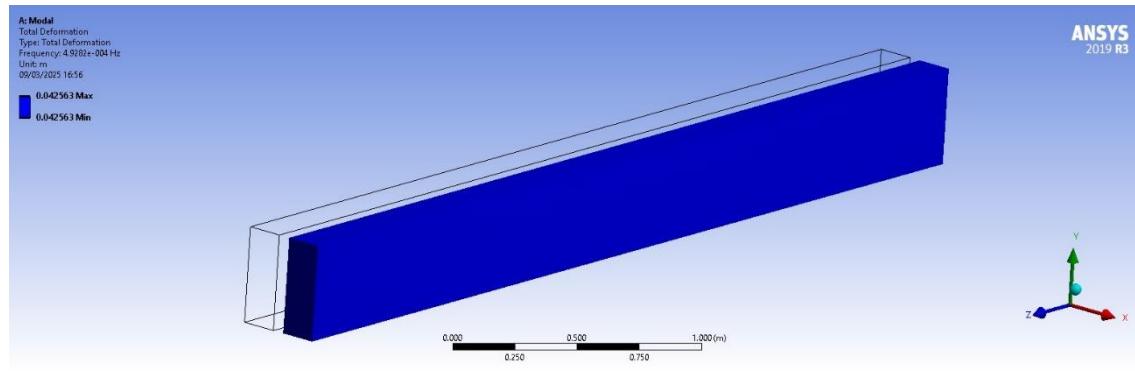
SOUZA, L. A. F. D. Modelo numérico-computacional para a análise modal e transiente de shear building utilizando o programa Scilab. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 46, p. e20240014, 2024.

TEBALDI, A.; COELHO, L. D. S.; LOPES JUNIOR, V. Detecção de falhas em estruturas inteligentes usando otimização por nuvem de partículas: fundamentos e estudo de casos. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 17, n. 3, p. 312–330, set. 2006.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method.** 5th ed ed. Oxford ; Boston: Butterworth-Heinemann, 2000.

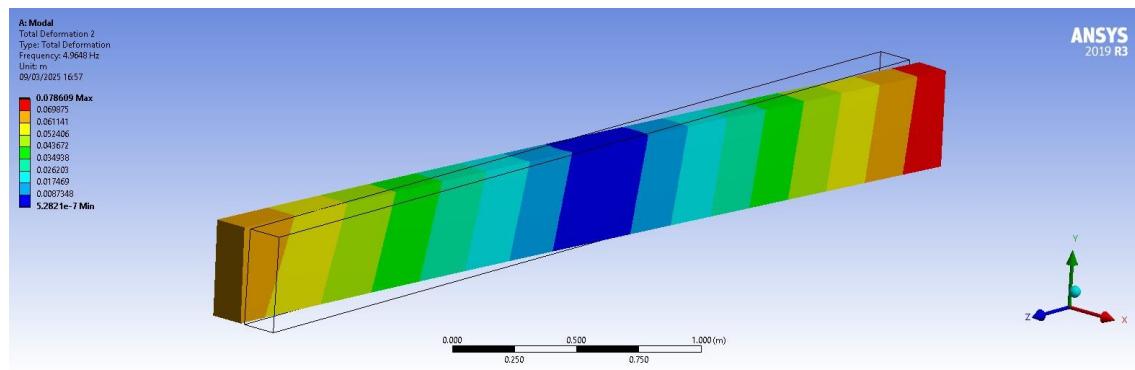
APÊNDICE A - Deformações totais com suas respectivas frequências naturais das três vigas analisadas no presente estudo

Figura 28 – Deformação total 1 para a viga 1



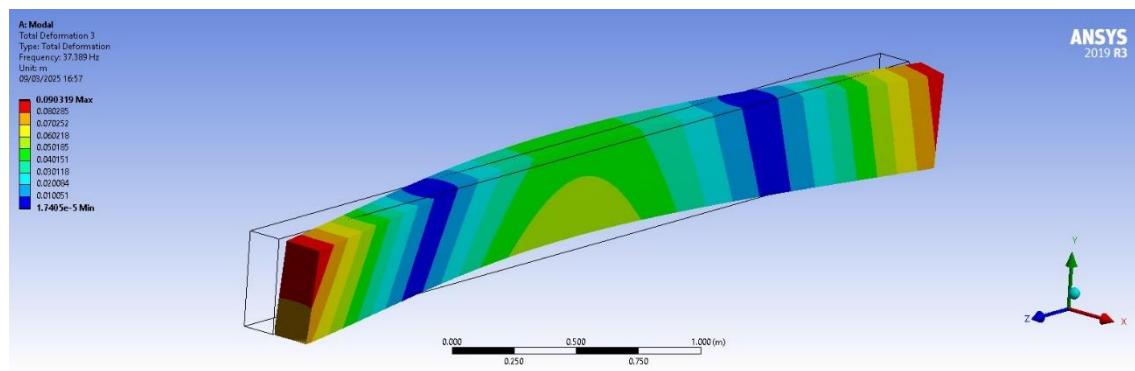
Fonte: Autor (2025).

Figura 29 – Deformação total 2 para a viga 1



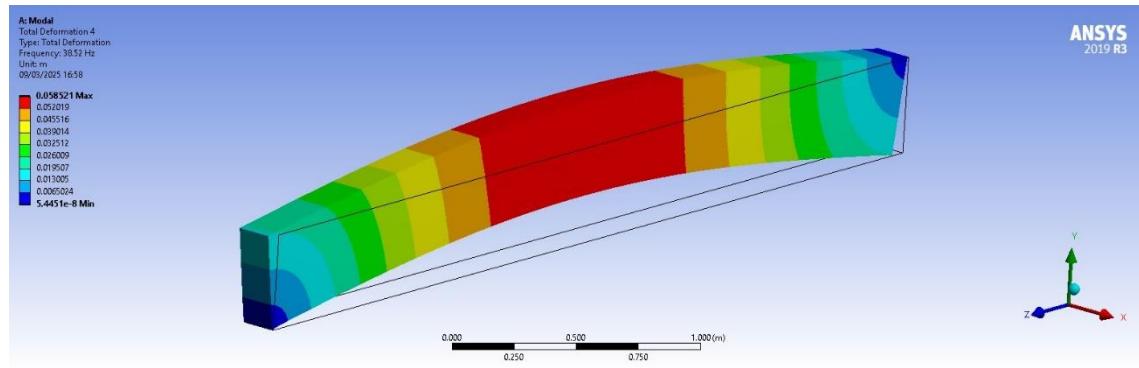
Fonte: Autor (2025).

Figura 30 – Deformação total 3 para a viga 1



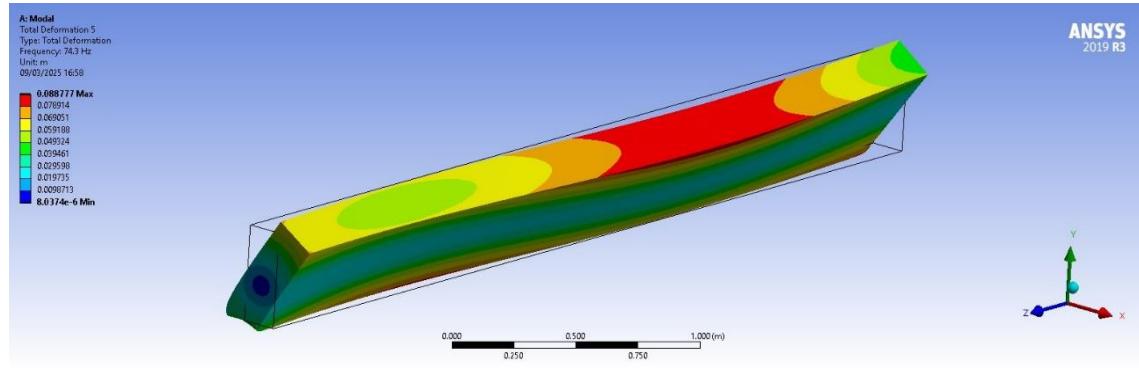
Fonte: Autor (2025).

Figura 31 – Deformação total 4 para a viga 1



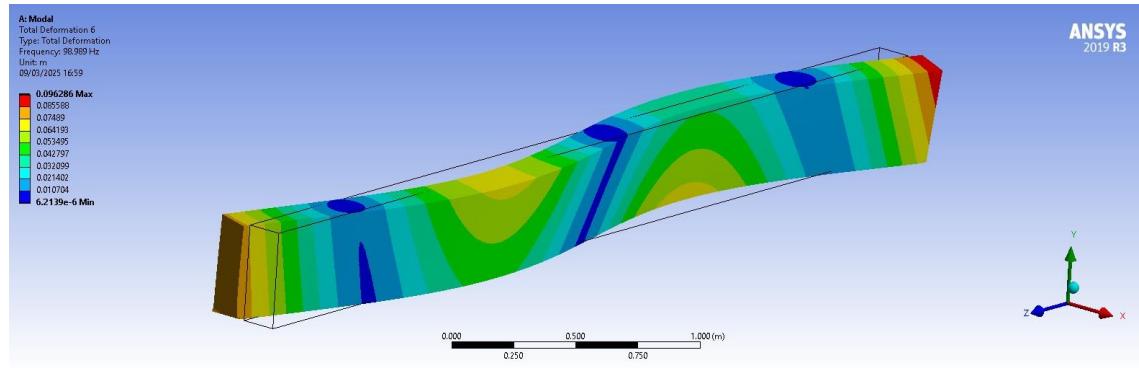
Fonte: Autor (2025).

Figura 32 – Deformação total 5 para a viga 1



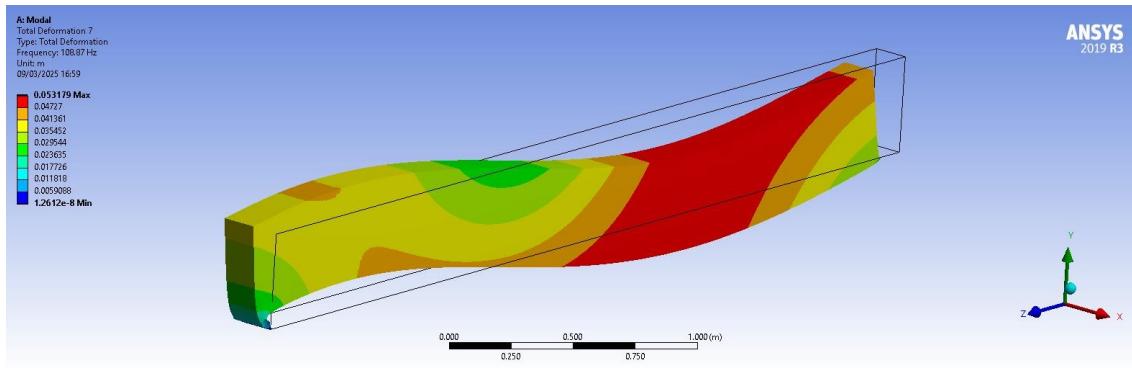
Fonte: Autor (2025).

Figura 33 – Deformação total 6 para a viga 1



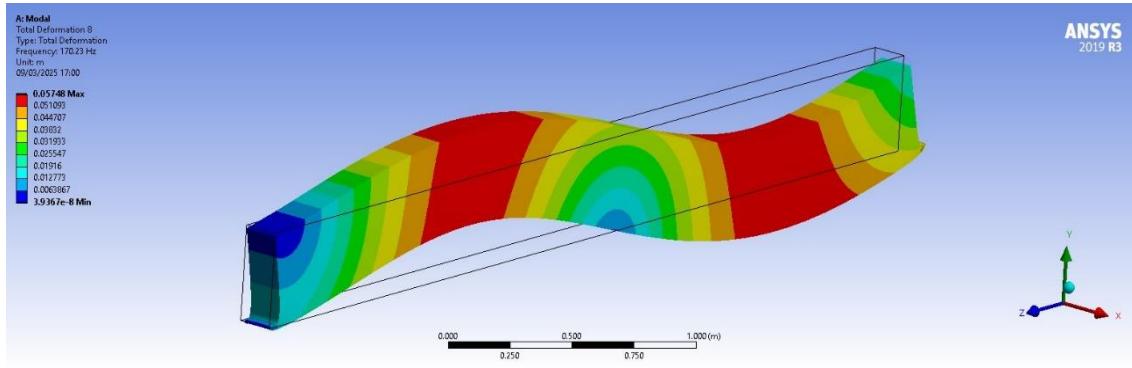
Fonte: Autor (2025).

Figura 34 – Deformação total 7 para a viga 1



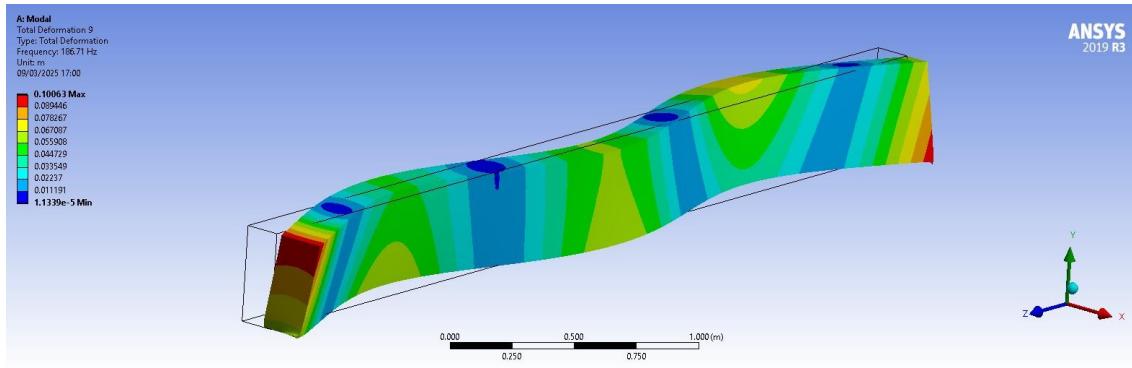
Fonte: Autor (2025).

Figura 35 – Deformação total 8 para a viga 1



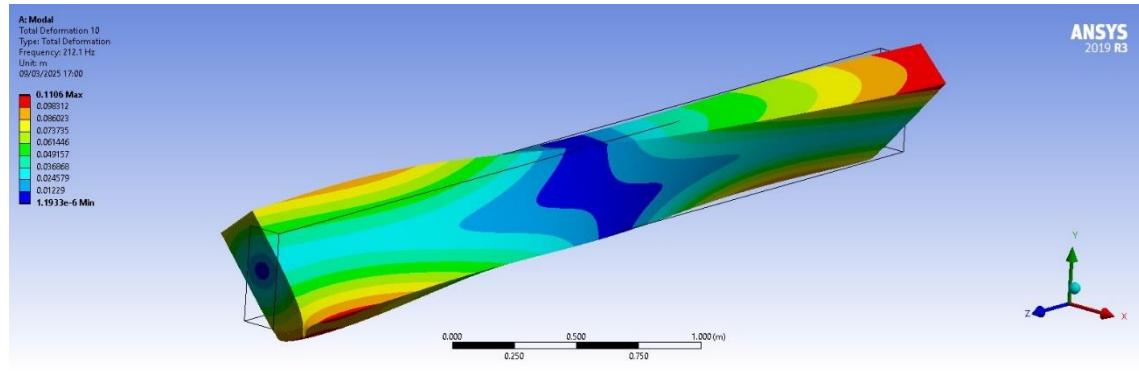
Fonte: Autor (2025).

Figura 36 – Deformação total 9 para a viga 1



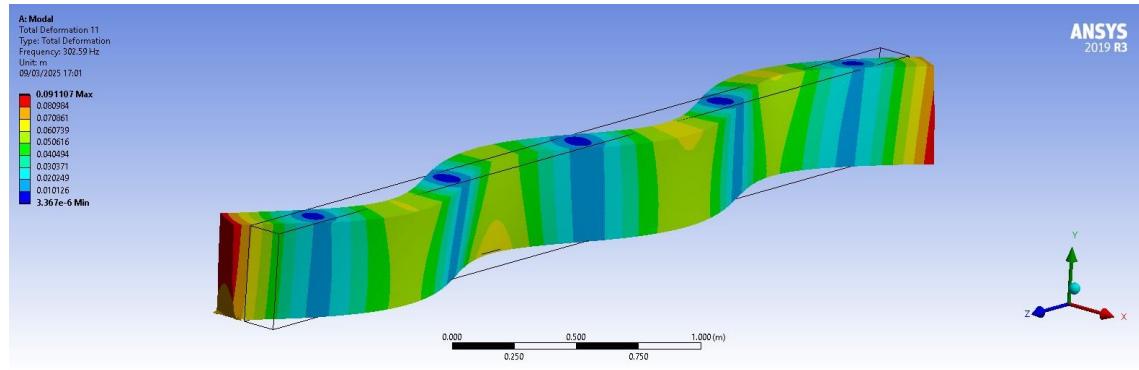
Fonte: Autor (2025).

Figura 37 – Deformação total 10 para a viga 1



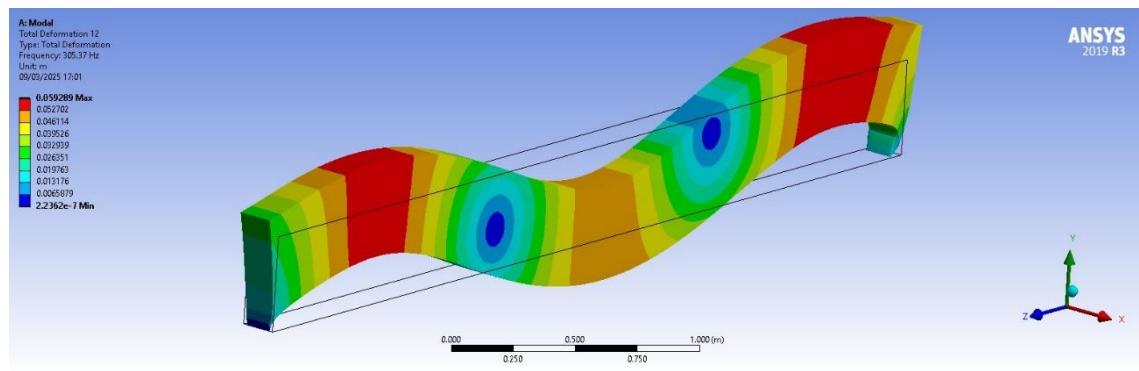
Fonte: Autor (2025).

Figura 38 – Deformação total 11 para a viga 1



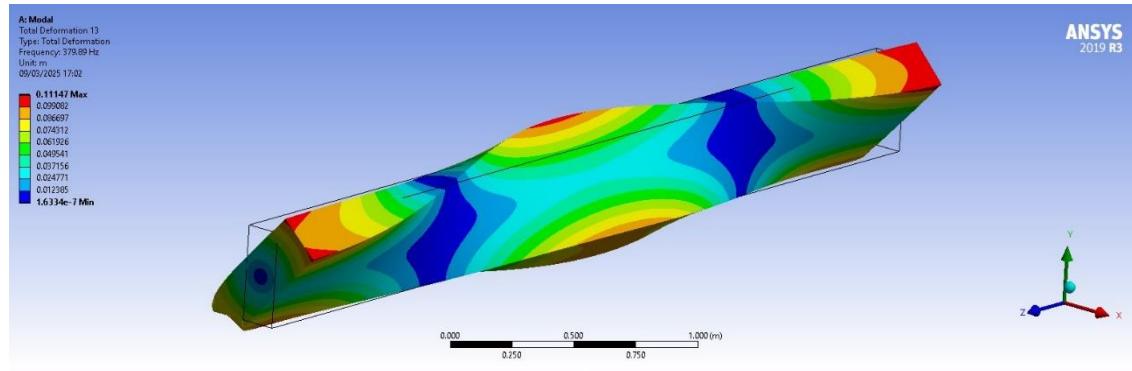
Fonte: Autor (2025).

Figura 39 – Deformação total 12 para a viga 1



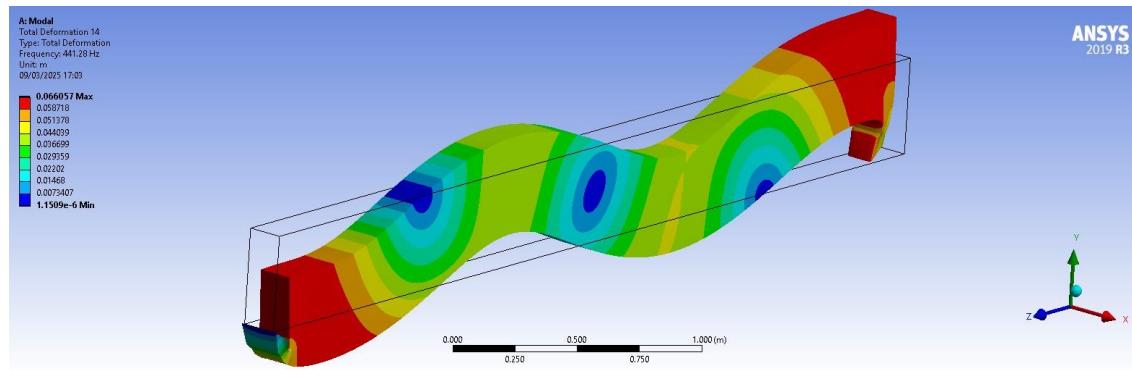
Fonte: Autor (2025).

Figura 40 – Deformação total 13 para a viga 1



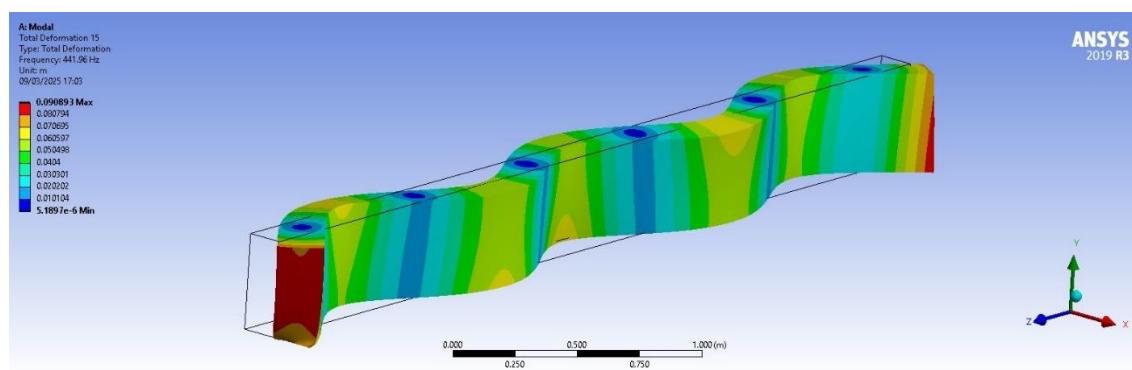
Fonte: Autor (2025).

Figura 41 – Deformação total 14 para a viga 1



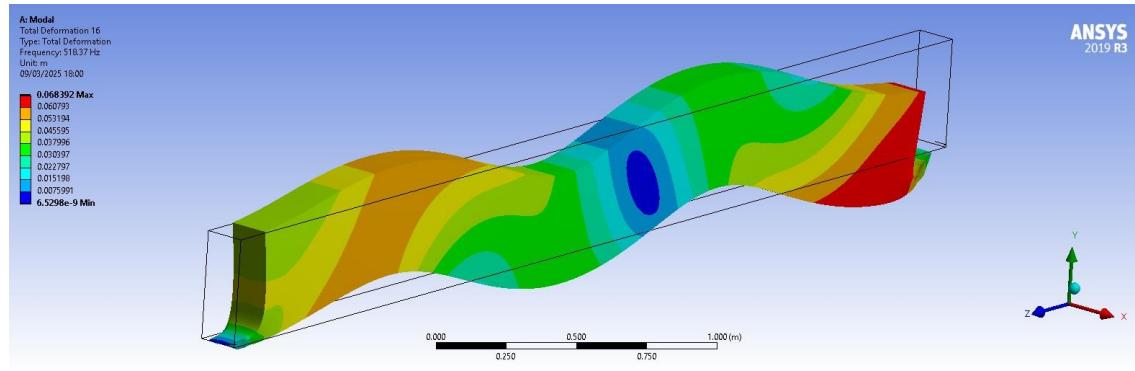
Fonte: Autor (2025).

Figura 42 – Deformação total 15 para a viga 1



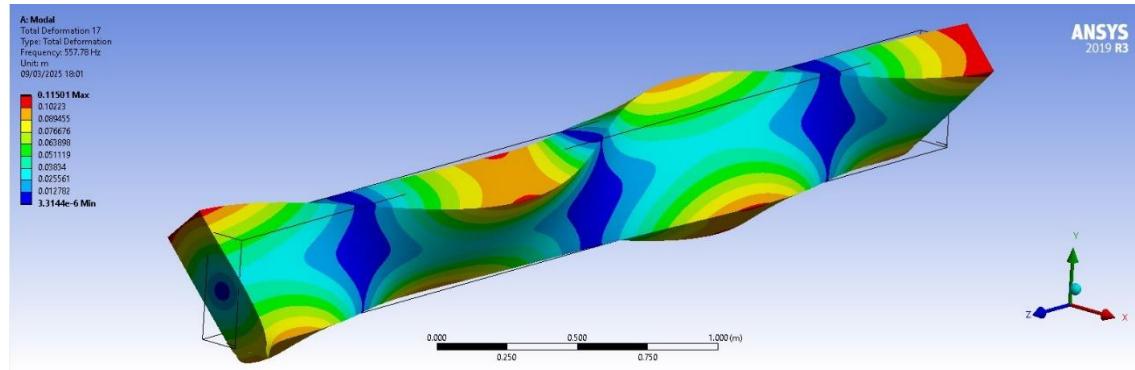
Fonte: Autor (2025).

Figura 43 – Deformação total 16 para a viga 1



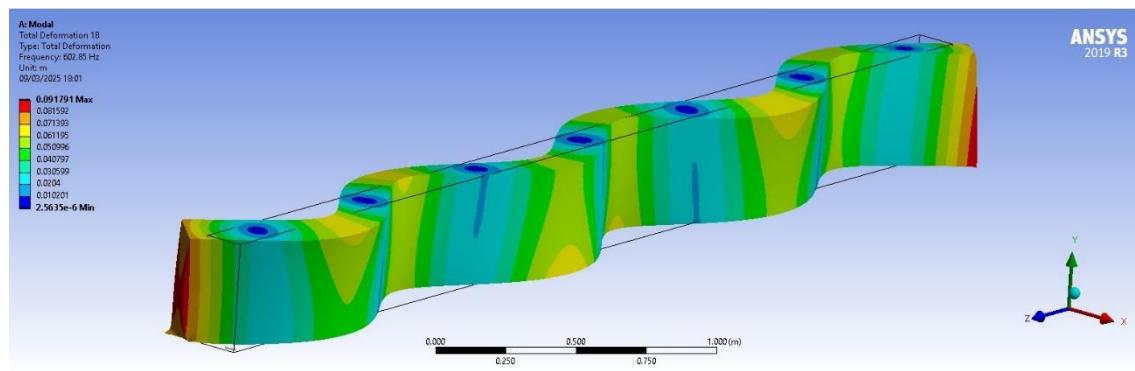
Fonte: Autor (2025).

Figura 44 – Deformação total 17 para a viga 1



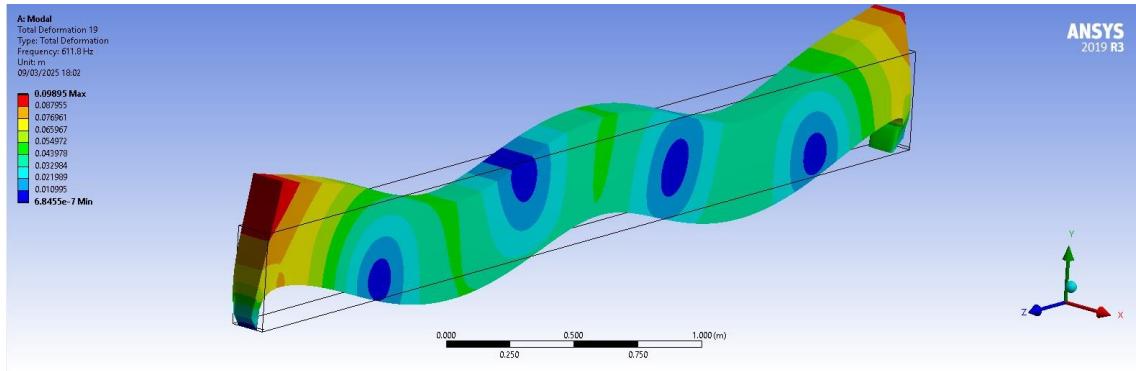
Fonte: Autor (2025).

Figura 45 – Deformação total 18 para a viga 1



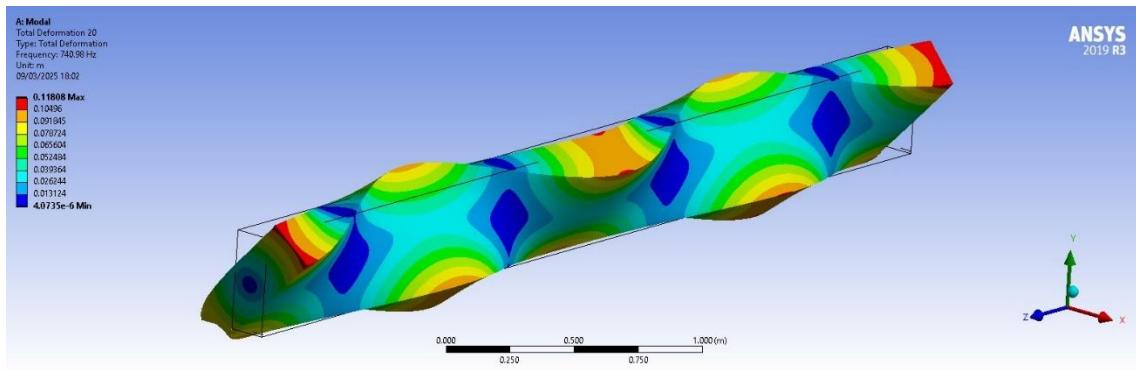
Fonte: Autor (2025).

Figura 46 – Deformação total 19 para a viga 1



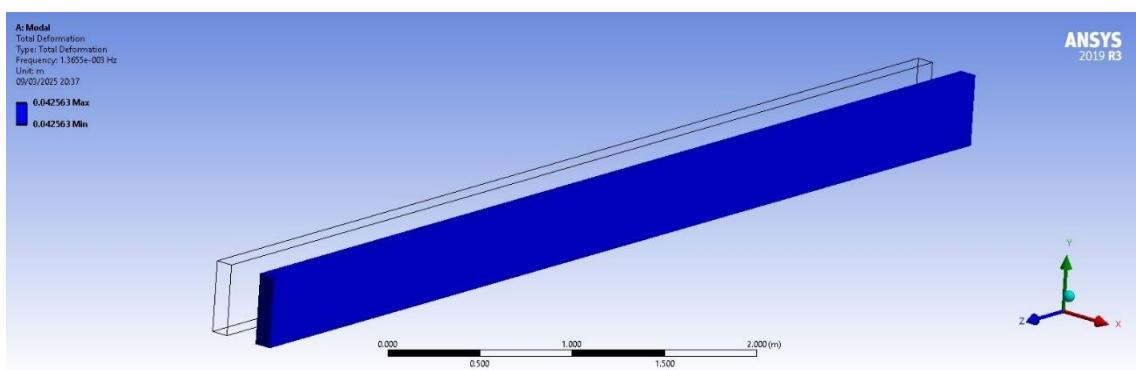
Fonte: Autor (2025).

Figura 47 – Deformação total 20 para a viga 1



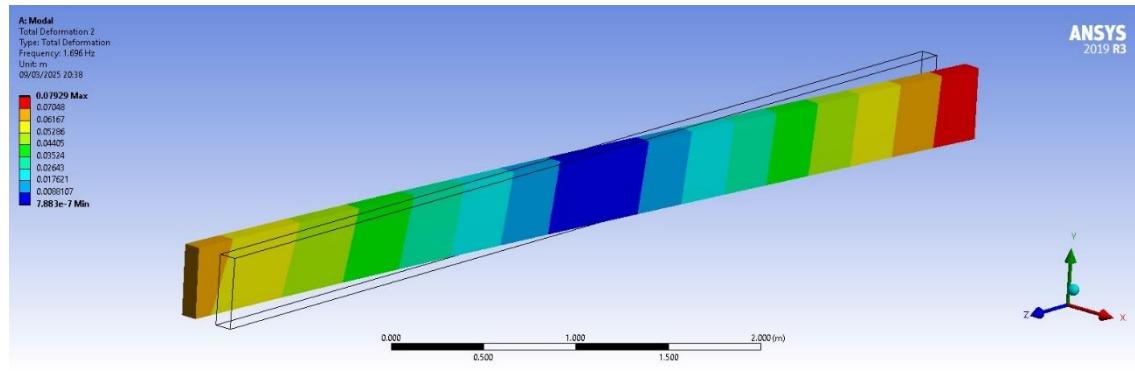
Fonte: Autor (2025).

Figura 48 – Deformação total 1 para a viga 2



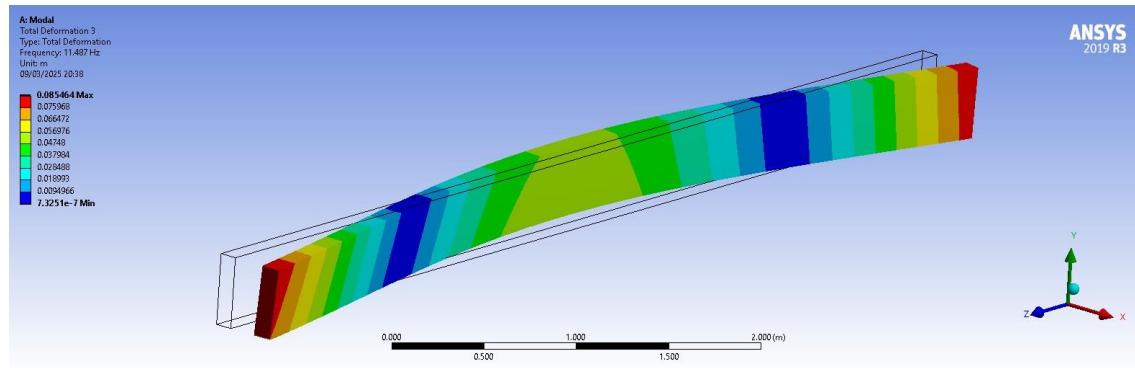
Fonte: Autor (2025).

Figura 49 – Deformação total 2 para a viga 2



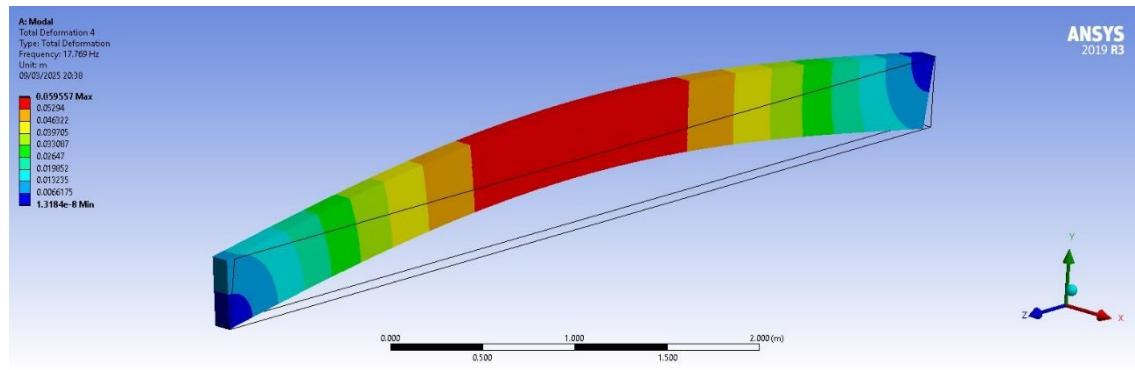
Fonte: Autor (2025).

Figura 50 – Deformação total 3 para a viga 2



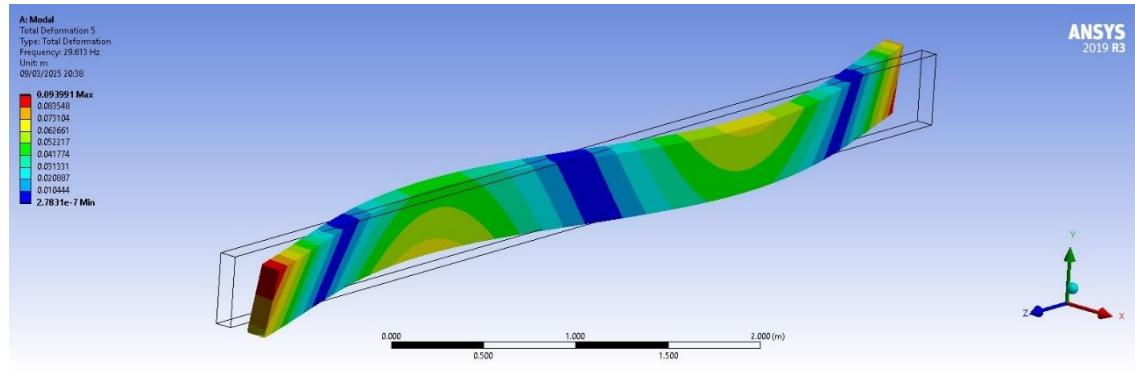
Fonte: Autor (2025).

Figura 51 – Deformação total 4 para a viga 2



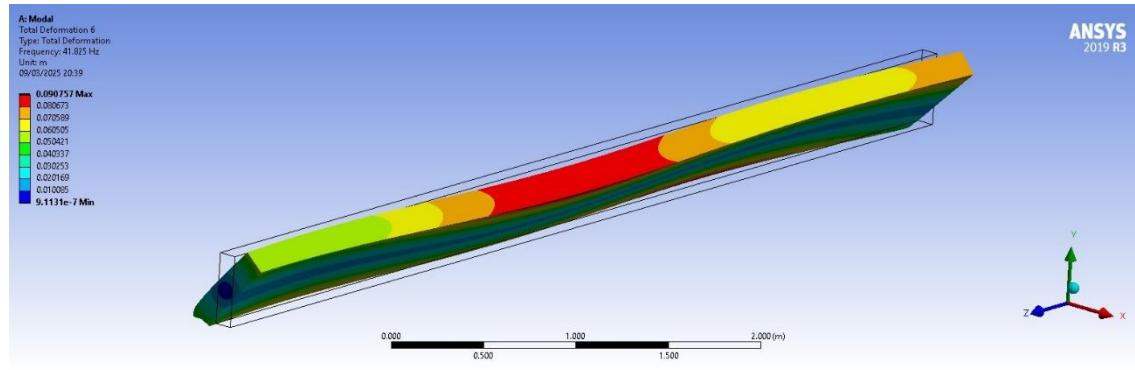
Fonte: Autor (2025).

Figura 52 – Deformação total 5 para a viga 2



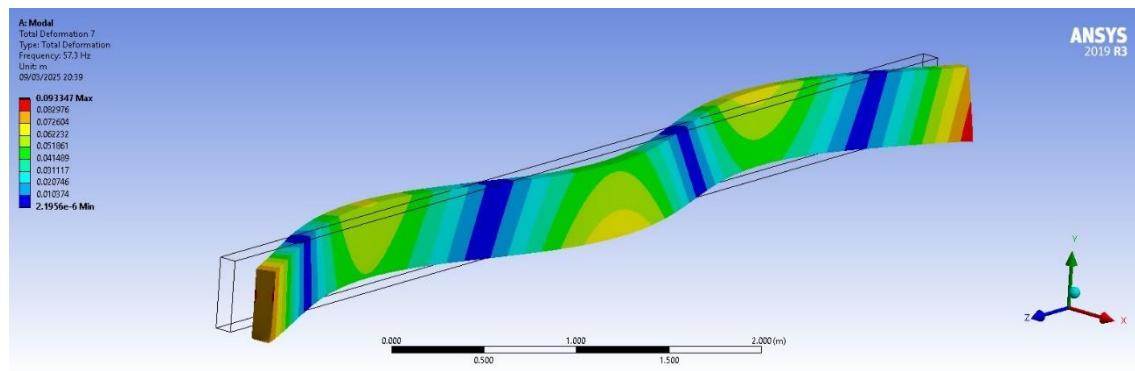
Fonte: Autor (2025).

Figura 53 – Deformação total 6 para a viga 2



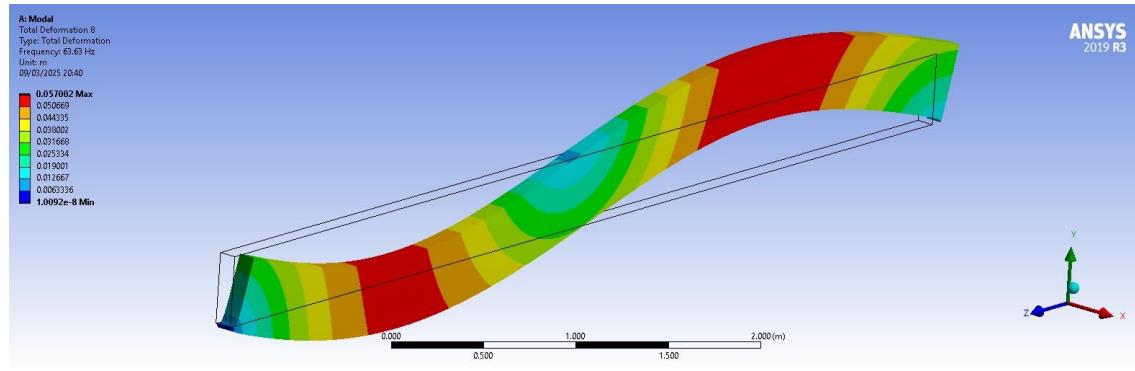
Fonte: Autor (2025).

Figura 54 – Deformação total 7 para a viga 2



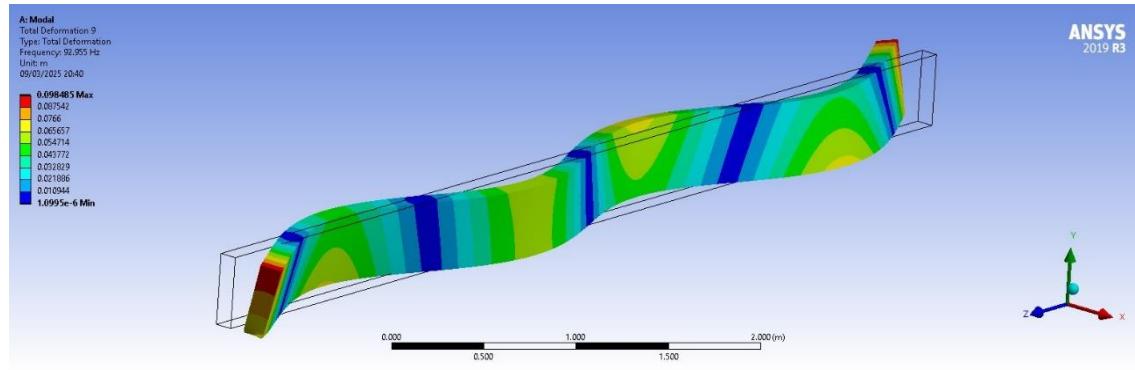
Fonte: Autor (2025).

Figura 55 – Deformação total 8 para a viga 2



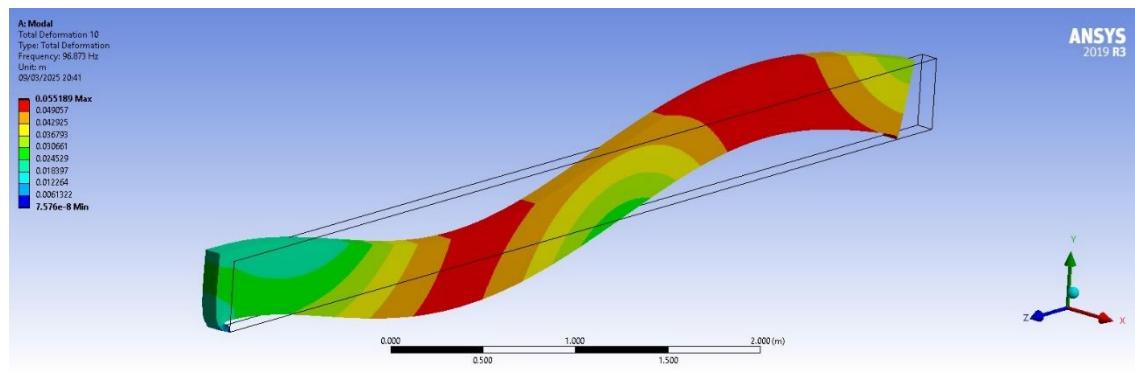
Fonte: Autor (2025).

Figura 56 – Deformação total 9 para a viga 2



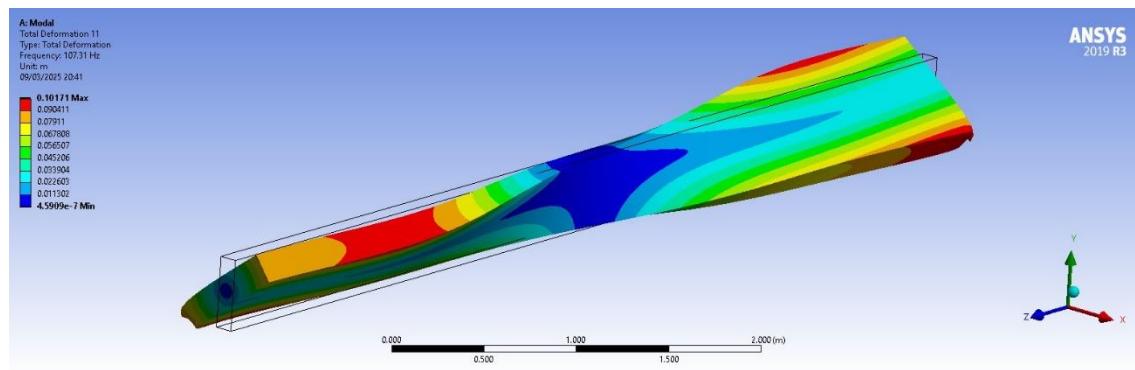
Fonte: Autor (2025).

Figura 57 – Deformação total 10 para a viga 2



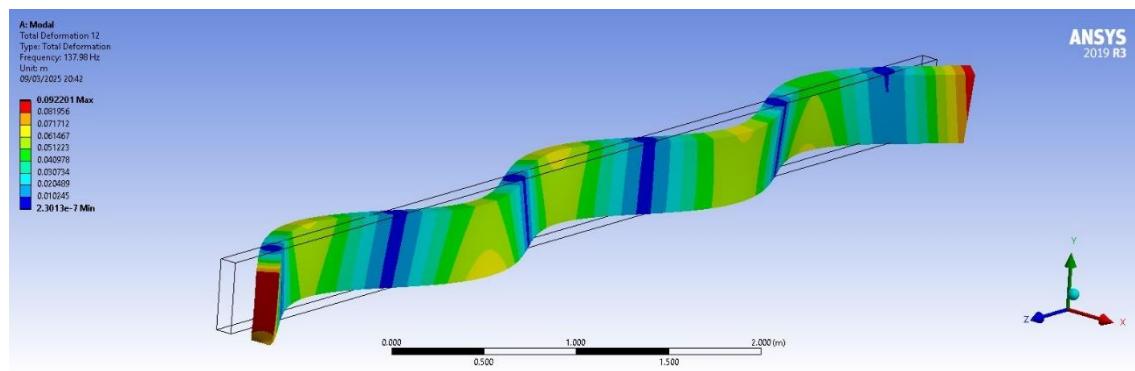
Fonte: Autor (2025).

Figura 58 – Deformação total 11 para a viga 2



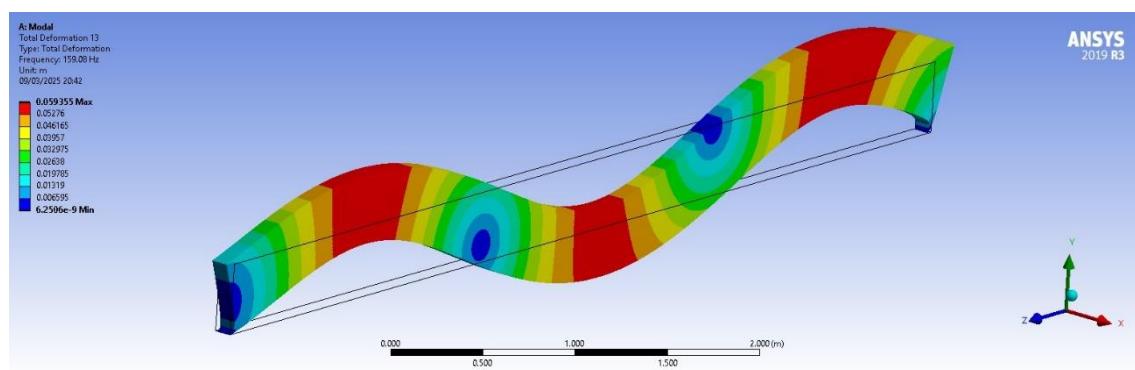
Fonte: Autor (2025).

Figura 59 – Deformação total 12 para a viga 2



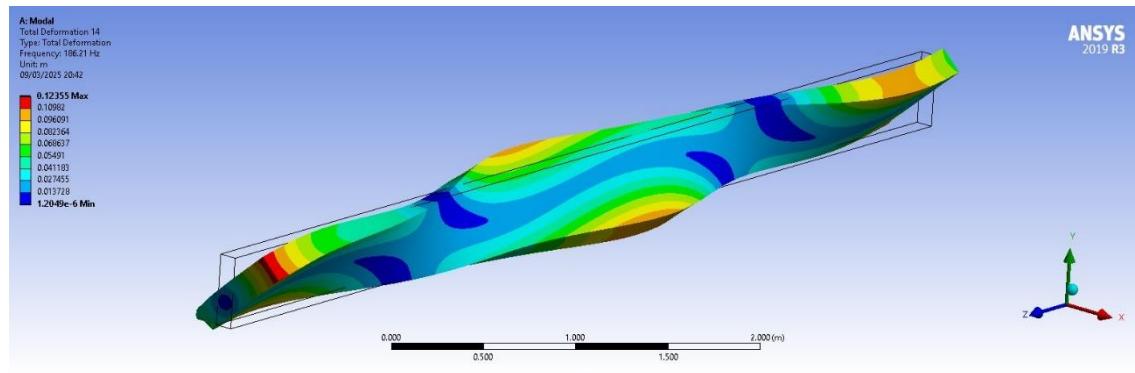
Fonte: Autor (2025).

Figura 60 – Deformação total 13 para a viga 2



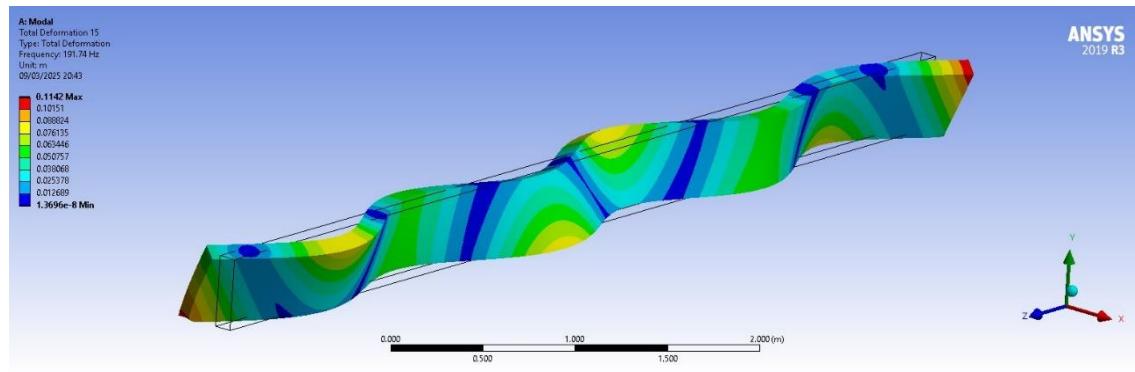
Fonte: Autor (2025).

Figura 61 – Deformação total 14 para a viga 2



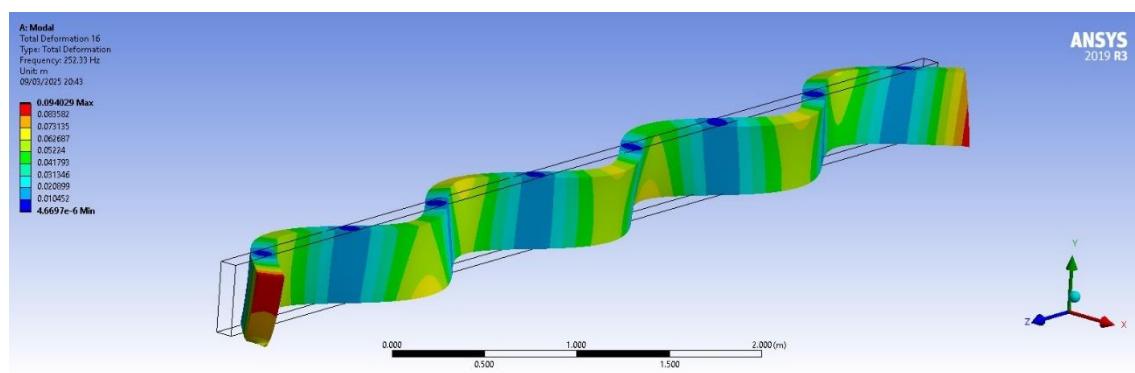
Fonte: Autor (2025).

Figura 62 – Deformação total 15 para a viga 2



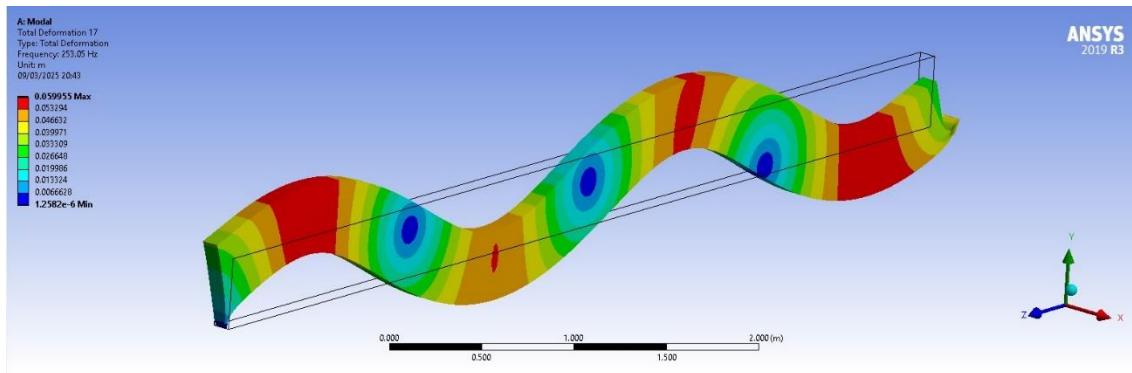
Fonte: Autor (2025).

Figura 63 – Deformação total 16 para a viga 2



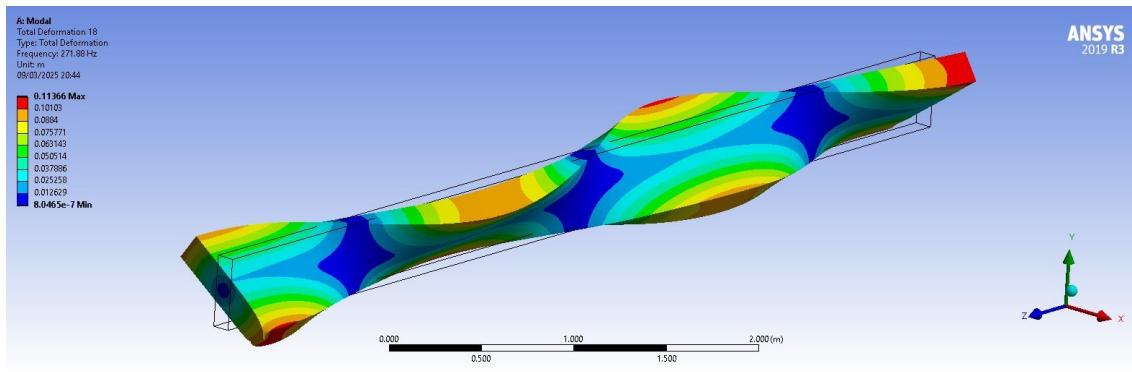
Fonte: Autor (2025).

Figura 64 – Deformação total 17 para a viga 2



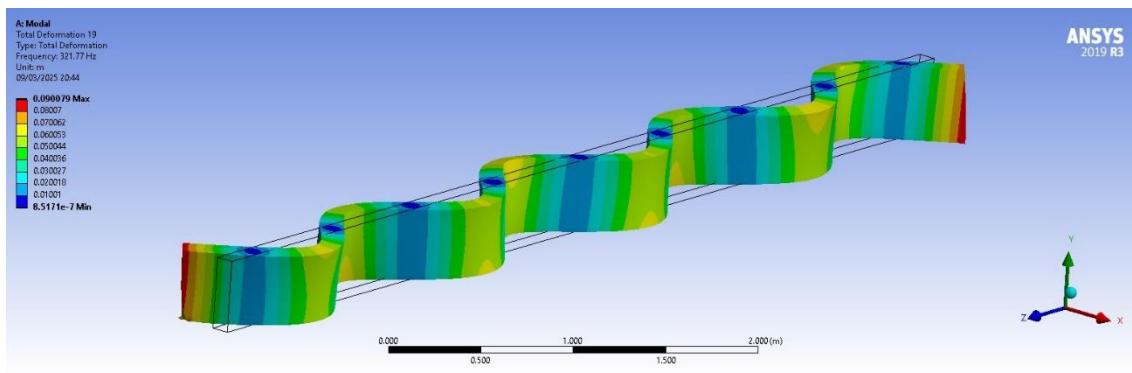
Fonte: Autor (2025).

Figura 65 – Deformação total 18 para a viga 2



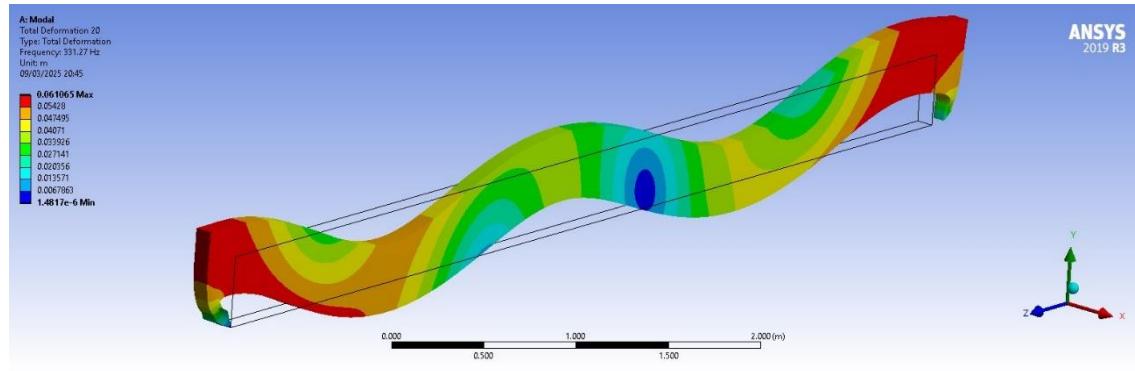
Fonte: Autor (2025).

Figura 66 – Deformação total 19 para a viga 2



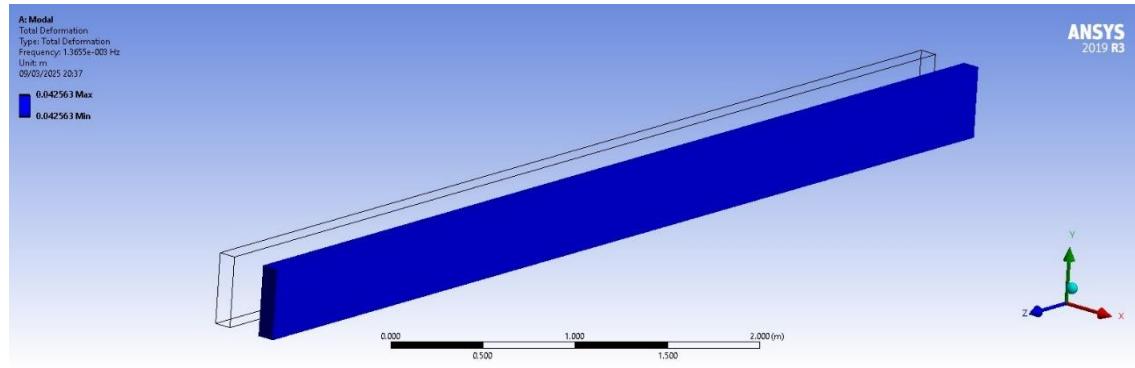
Fonte: Autor (2025).

Figura 67 – Deformação total 20 para a viga 2



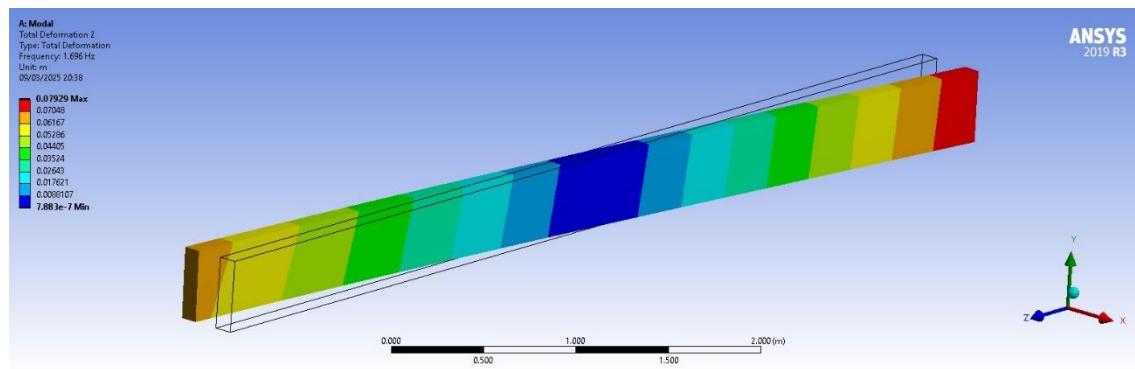
Fonte: Autor (2025).

Figura 68 – Deformação total 1 para a viga 3



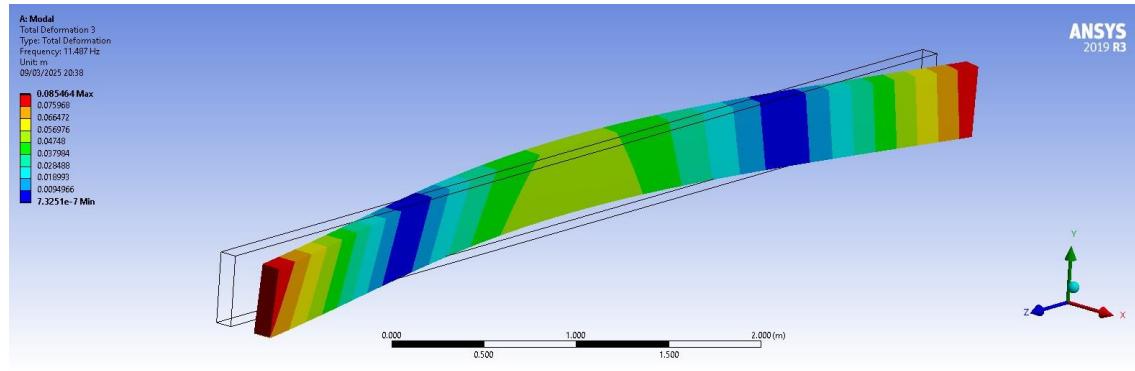
Fonte: Autor (2025).

Figura 69 – Deformação total 2 para a viga 3



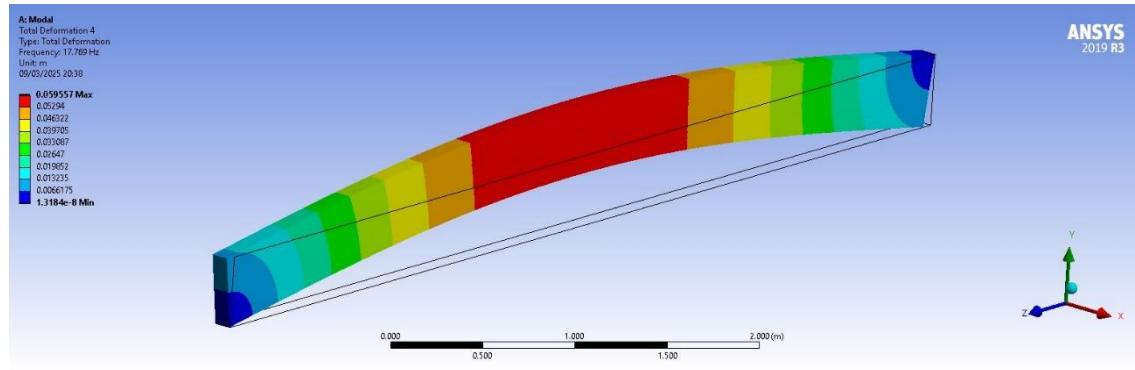
Fonte: Autor (2025).

Figura 70 – Deformação total 3 para a viga 2



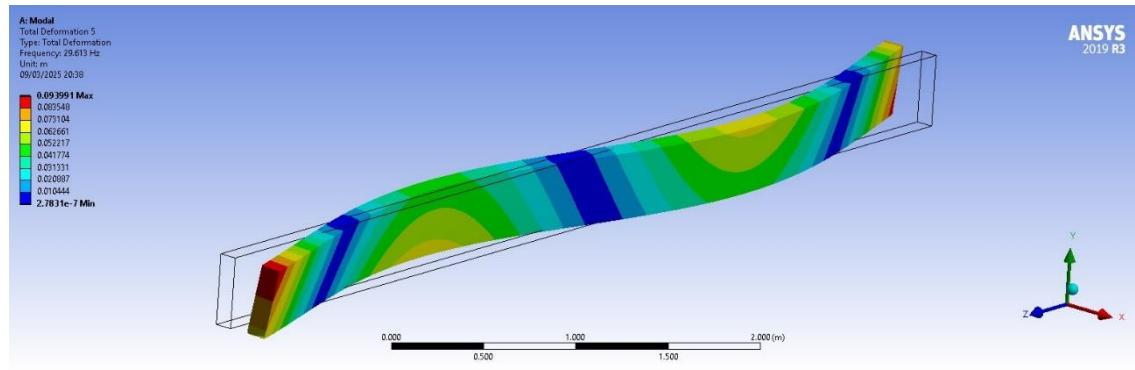
Fonte: Autor (2025).

Figura 71 – Deformação total 4 para a viga 3



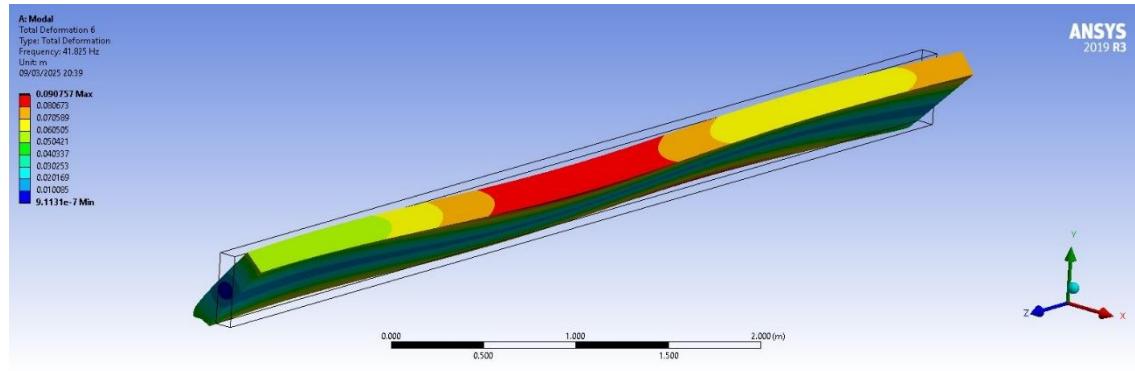
Fonte: Autor (2025).

Figura 72 – Deformação total 5 para a viga 3



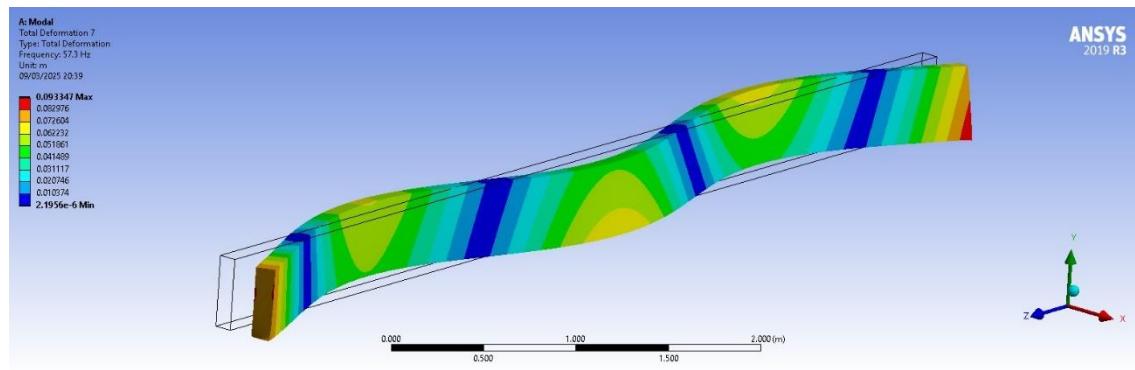
Fonte: Autor (2025).

Figura 73 – Deformação total 6 para a viga 3



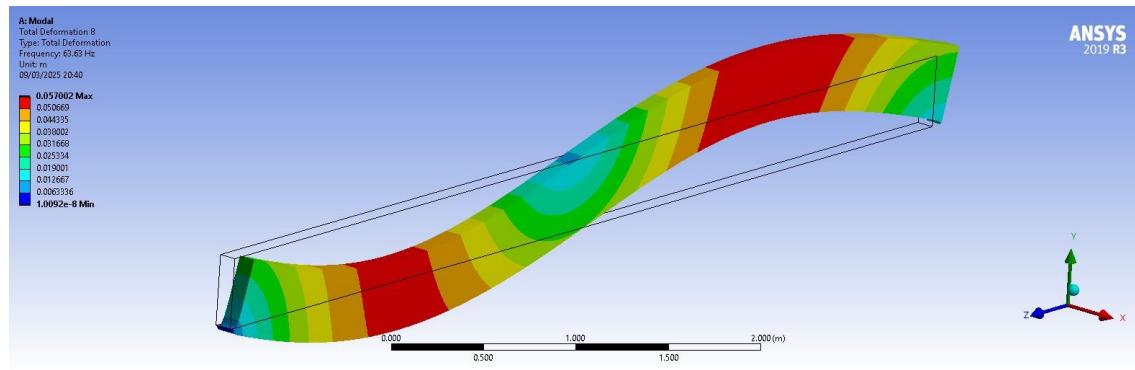
Fonte: Autor (2025).

Figura 74 – Deformação total 7 para a viga 3



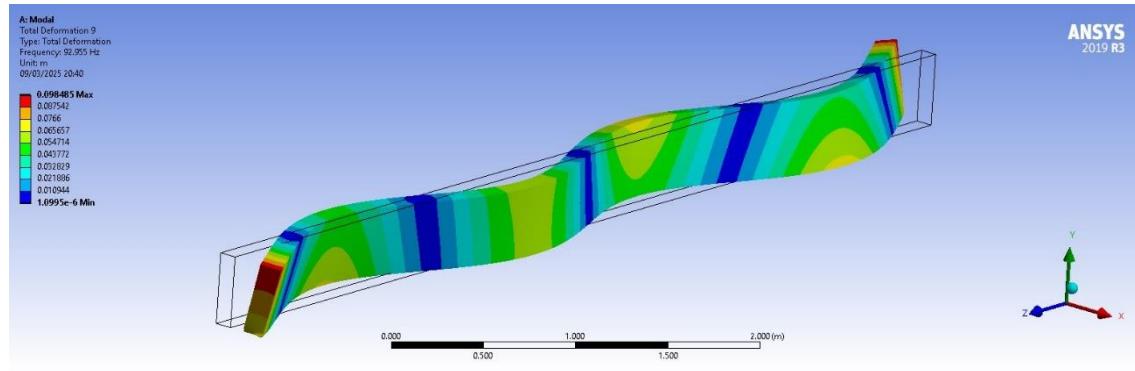
Fonte: Autor (2025).

Figura 75 – Deformação total 8 para a viga 3



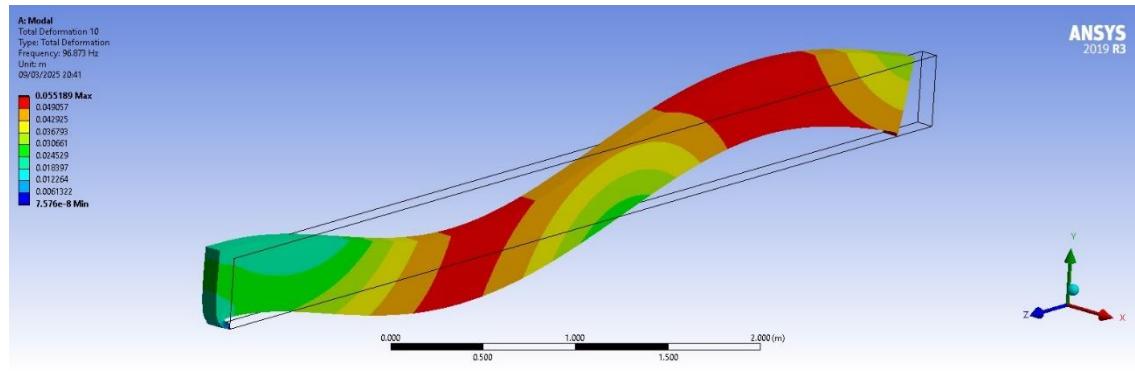
Fonte: Autor (2025).

Figura 76 – Deformação total 9 para a viga 3



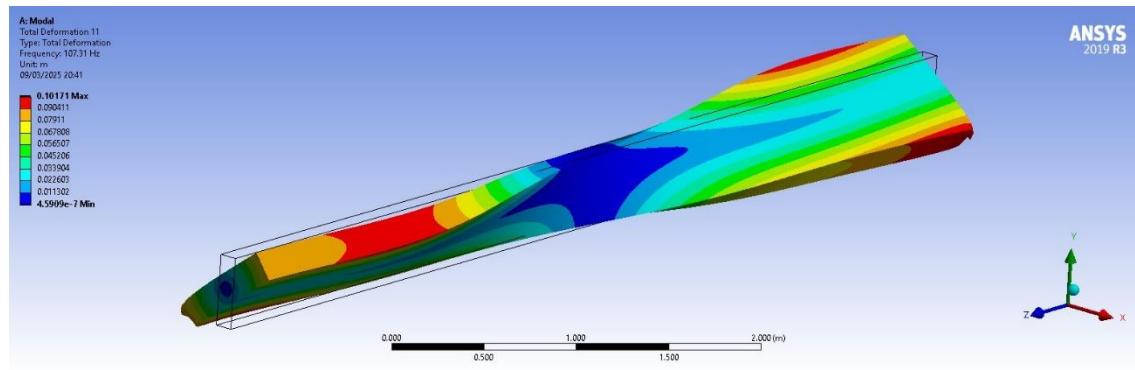
Fonte: Autor (2025).

Figura 77 – Deformação total 10 para a viga 3



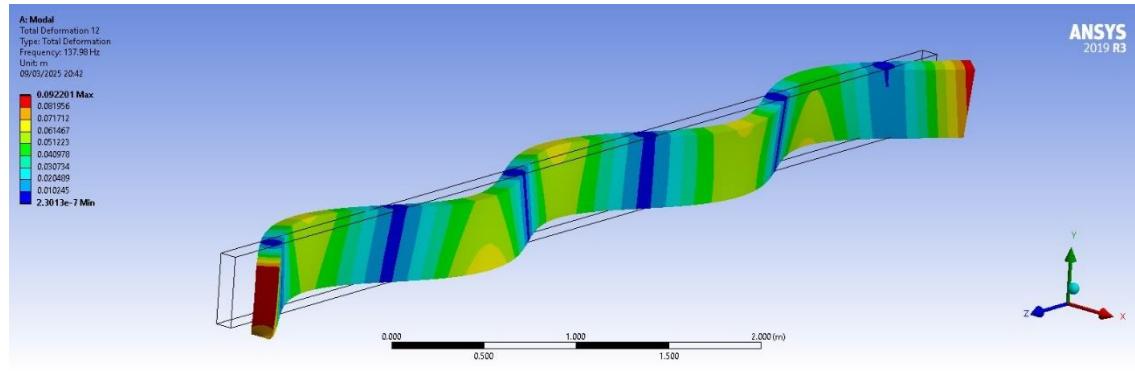
Fonte: Autor (2025).

Figura 78 – Deformação total 11 para a viga 3



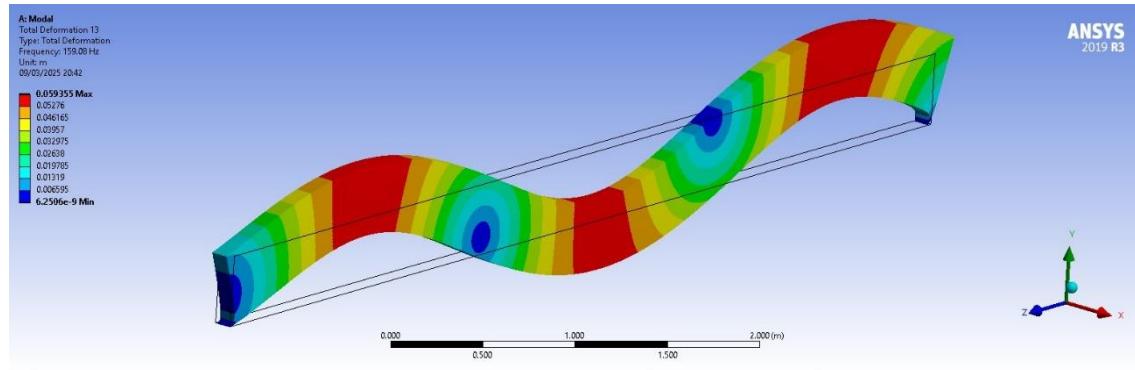
Fonte: Autor (2025).

Figura 79 – Deformação total 12 para a viga 3



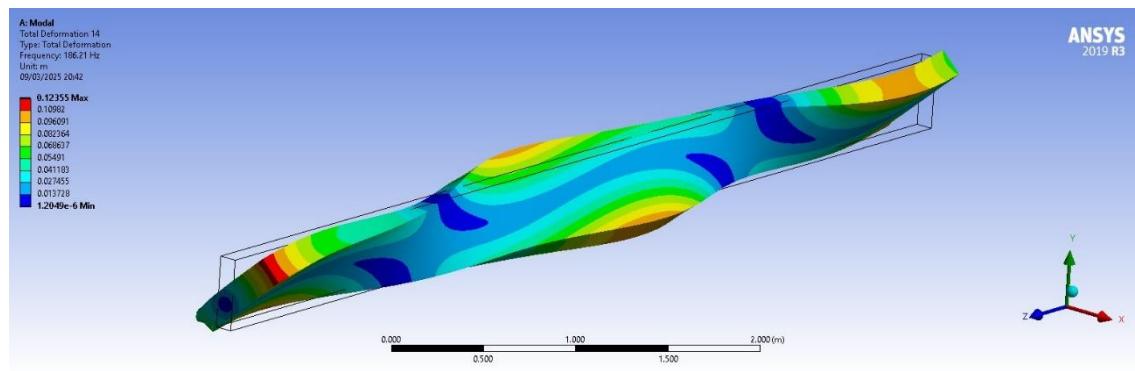
Fonte: Autor (2025).

Figura 80 – Deformação total 13 para a viga 3



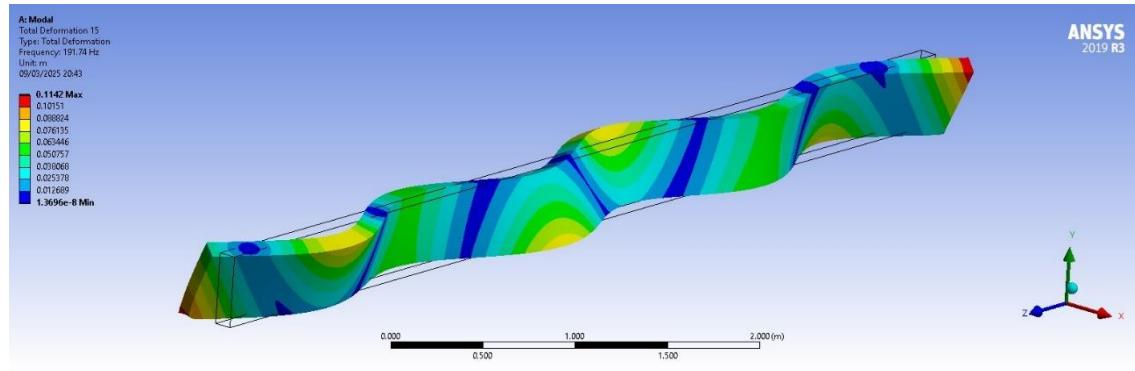
Fonte: Autor (2025).

Figura 81 – Deformação total 14 para a viga 3



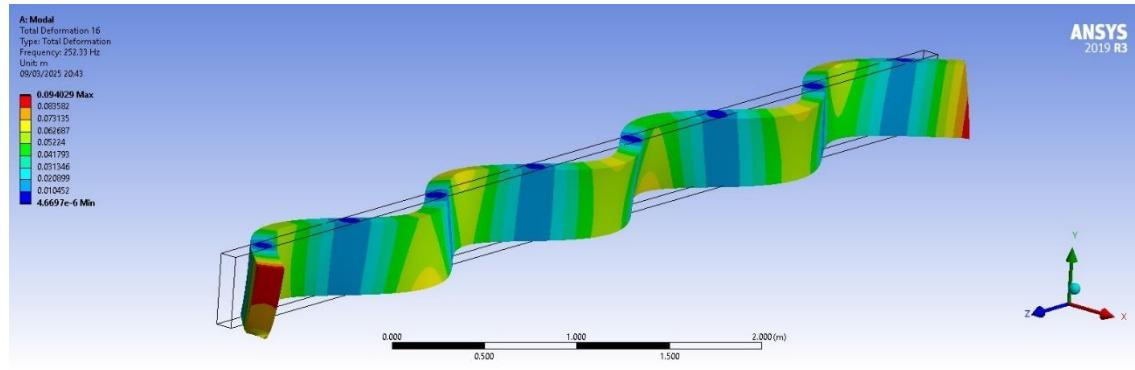
Fonte: Autor (2025).

Figura 82 – Deformação total 15 para a viga 3



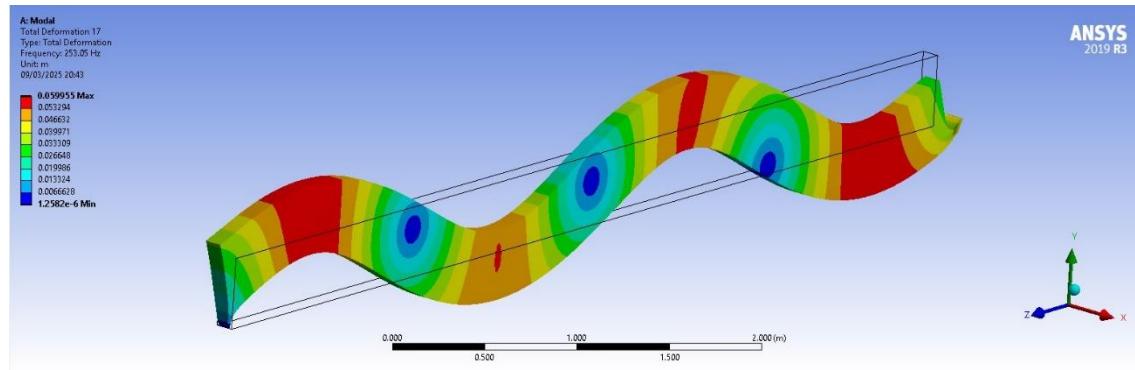
Fonte: Autor (2025).

Figura 83 – Deformação total 16 para a viga 3



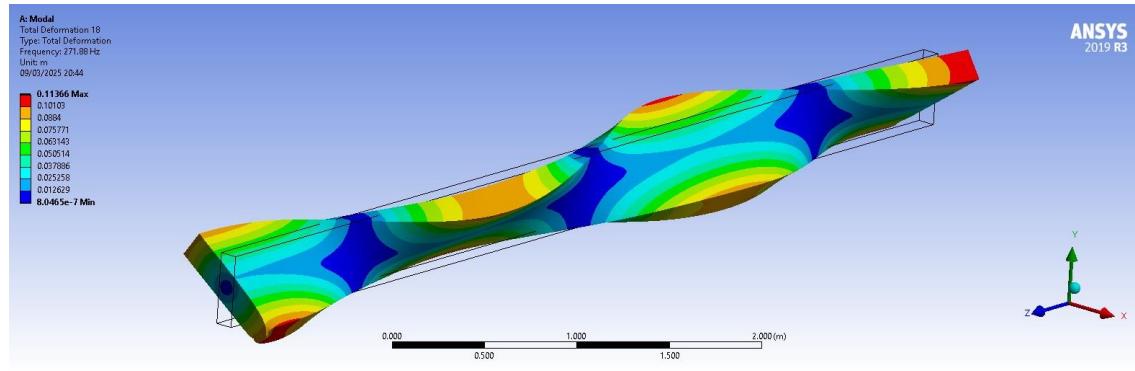
Fonte: Autor (2025).

Figura 84 – Deformação total 17 para a viga 3



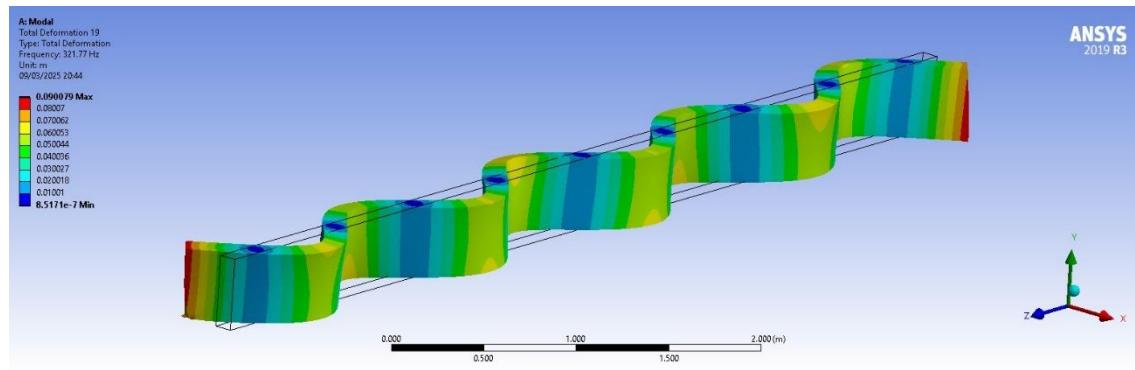
Fonte: Autor (2025).

Figura 85 – Deformação total 18 para a viga 3



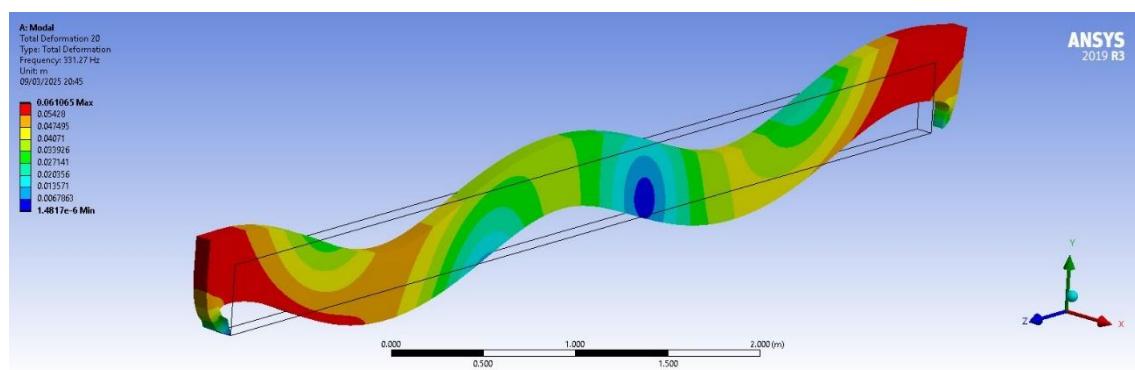
Fonte: Autor (2025).

Figura 86 – Deformação total 19 para a viga 3



Fonte: Autor (2025).

Figura 87 – Deformação total 20 para a viga 3



Fonte: Autor (2025).