



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

KEULIANE DA SILVA NOGUEIRA

ESTUDO DA POLARIZAÇÃO QUÂNTICA E DO
EMARANHAMENTO DE ESTADOS COERENTES
DE FÓTONS ADICIONADOS

FORTALEZA - CE

2012

KEULIANE DA SILVA NOGUEIRA

ESTUDO DA POLARIZAÇÃO QUÂNTICA E DO
EMARANHAMENTO DE ESTADOS COERENTES
DE FÓTONS ADICIONADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientadora: Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos

FORTALEZA - CE

2012

*Dedico esta dissertação à minha querida mãe, Neide Nogueira,
e à minha irmã, Kelci Nogueira, por serem meu alicerce.*

AGRADECIMENTOS

Este espaço é dedicado àqueles que deram a sua contribuição para que esta dissertação fosse realizada. A todos deixo aqui o meu agradecimento sincero.

Agradeço a minha orientadora Profa. Hilma Vasconcelos pela compreensão, orientação e confiança necessárias para a realização deste trabalho. Agradeço também ao Prof. João Batista Silva pela colaboração na realização deste trabalho, competência, disponibilidade e troca de experiência. Ao Prof. Rubens, agradeço por todas as importantes contribuições e discussões e também pela convivência harmoniosa durante esses anos.

Meus mais sinceros agradecimentos aos membros da banca desta dissertação, que com suas mais diversas sugestões, contribuíram para a melhoria deste trabalho.

Agradeço aos servidores técnicos-administrativos por todo o apoio prestado, especialmente ao secretário da pós-graduação, Renato Vasconcelos. E agradeço também a todos que participam do Grupo de Informação Quântica, em especial Emanoela, Socorro, Fátima, Daniel e Paulo Vinícius, pelas importantes discussões durante esses anos.

Agradeço o apoio da agência de fomento FUNCAP.

Reconheço os esforços e agradeço a minha mãe, Neide Nogueira, por ser minha força, meu apoio, meu exemplo de vida e por seu amor incondicional. A minha querida irmã, Kelci Nogueira, por ser minha amiga fiel e companheira, pelo seu amor e pela ajuda com a matemática. Ao Raphael, pelo seu amor verdadeiro, pelo companheirismo e por não ter medido esforços para me incentivar e apoiar.

Agradeço com toda minha força ao Senhor meu Deus pelas maravilhas que faz em minha vida.

RESUMO

Polarização quântica tem sido usada extensivamente no processo da informação quântica e emaranhamento quântico é essencial para muitas áreas de pesquisas, incluindo computação quântica. Nesse trabalho foi realizada uma investigação do grau de polarização e do emaranhamento de uma família de estados quânticos conhecidos como estados coerentes de fótons adicionados. Tais estados podem ser úteis na distribuição quântica de chaves e distribuição de emaranhamento. Usamos os parâmetro de Stokes e a função Q para demonstrar que, de uma forma geral, a polarização de uma superposição de dois estados coerentes bimodais de fótons adicionados aumenta significativamente com o número de fótons adicionados. Também utilizamos a concorrência para mostrar que a quantidade de emaranhamento nas superposições citadas apresenta um comportamento que depende se o número de fótons adicionados em cada modo são iguais ou diferentes.

ABSTRACT

Polarization has been used extensively in quantum information processing, and quantum entanglement is essential to many areas of research, including quantum computing. Here we investigate the degree of polarization and the entanglement of a family of quantum states known as photon-added entangled coherent states. Such states could serve as means of entanglement distribution and quantum key distribution. Using the quantum Stokes parameters and the Q function, we demonstrated that, in general, the polarization of a superposition of two two-mode photon-added coherent states increases significantly with the number of added photons. And using the concurrence, we showed that the amount of entanglement in this kind of superposition presents a behavior that is dependent on whether or not the number of added photons on each mode is the same.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação do estado coerente no espaço de fase.	8
3.1	Representação dos parâmetros de Stokes na esfera de Poincaré.	20
3.2	Representação dos parâmetros de Stokes na esfera de Poincaré: (a) clássico, (b) quântico	23
4.1	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$	36
4.2	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$	37
4.3	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$	37
4.4	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$	38
4.5	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado, com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$	38
4.6	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado, com $\phi = 0$ e $\alpha = 1$	39
4.7	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado, com $\phi = 0$ e $\alpha = 0$	39
4.8	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$	40
4.9	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, com $\phi = 0$ e $\alpha = 1$	40
4.10	Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, com $\phi = 0$ e $\alpha = 0$	41
4.11	Variação do grau de polarização com $ \alpha ^2 + \beta ^2$ é analisada em dois casos: (1) uma superposição de dois estados coerentes bimodais com um fóton adicionado e (2) uma superposição de dois estados coerentes bimodais.	53
4.12	Grau de polarização quântico em função de $ \alpha ^2 + \beta ^2$ para superposições com diferentes números de fótons adicionados.	54
4.13	Variação da concorrência com $ \alpha ^2 + \beta ^2$ é analisada em dois casos: (1) uma superposição de dois estados coerentes bimodais com um fóton adicionado e (2) uma superposição de dois estados coerentes bimodais.	56
4.14	Quantidade de emaranhamento, dado pela concorrência C , em função de $ \alpha ^2 + \beta ^2$ para superposições com diferentes números de fótons adicionados.	57

LISTA DE TABELAS

4.1	Valores dos parâmetros α e ϕ para superposição de dois estados coerentes e para superposições de dois estados coerentes de fótons adicionados. . . .	35
4.2	Diferentes valores de α para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado.	35
4.3	Diferentes valores de α para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados.	36

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. ESTADOS QUÂNTICOS DO OSCILADOR HARMÔNICO	4
2.1 Eletrodinâmica Quântica	4
2.1.1 Oscilador Harmônico Quântico	4
2.1.2 Estados de Fock	5
2.1.3 Estados Coerentes	7
2.1.4 Estados Coerentes de Fótons Adicionados	11
2.1.5 Estados Gato de Schrödinger	14
2.1.6 Estados de Quadratura	15
3. FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	17
3.1 Função de Wigner	17
3.2 Parâmetros de Stokes	19
3.3 Função Q	24
3.4 Emaranhamento	26
3.5 Concorrência	28
3.6 Fidelidade	29
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	31
4.1 Função de Wigner Para Superposição de Estados Coerentes de Fótons Adicionados	31
4.2 Polarização Quântica de Estados Coerentes de Fótons Adicionados Bimodais	41
4.3 Polarização Quântica de Superposição de Dois Estados Coerentes de Fótons Adicionados Bimodais	49
4.4 Emaranhamento de Superposição de Dois Estados Coerentes de Fótons Adicionados	54
5. CONCLUSÃO	58
REFERÊNCIAS	60

1. INTRODUÇÃO

A informação clássica pode ser codificada dentro de um estado associado a certo sistema de interesse. Um *bit* de informação corresponde à magnetização de um determinado setor de um disco rígido ou à carga de um capacitor, por exemplo. A informação quântica, por sua vez, pode ser codificada usando qualquer sistema quântico no qual existe uma base com, no mínimo, dois estados e onde seja possível criar superposições dos elementos dessa base: o spin nuclear, o spin eletrônico em nanoestruturas, fótons com dois tipos de polarização, estados atômicos hiperfinos e estados coerentes, entre outros. Este análogo quântico do bit clássico é denominado *qubit*. Enquanto um bit clássico tem um caráter binário, já que seu valor pode ser 0 ou 1, um qubit pode tomar os valores $|0\rangle$, $|1\rangle$ ou ser uma superposição de ambos os estados: $a|0\rangle + b|1\rangle$, onde a e b são quaisquer números complexos [Nielsen e Chuang 2000].

A possibilidade de que efeitos quânticos poderiam oferecer algo verdadeiramente novo foi apontada pela primeira vez em 1982 por Richard Feynman, que mostrou que nenhuma máquina de Turing (clássica) poderia simular certos fenômenos quânticos sem introduzir um fator exponencial em seu desempenho [Feynman 1982]. Em 1994, Peter Shor, dos laboratórios da AT&T Bell, demonstrou uma vantagem efetiva do computador quântico sobre o computador clássico ao escrever um algoritmo que utiliza propriedades do computador quântico para fatorar números de forma mais eficiente [Shor 1994].

A publicação do algoritmo de Shor desencadeou uma avalanche de novas pesquisas e experiências em informação e computação quânticas [Benett *et al.* 1993, Bouwmeester *et al.* 1997, Ekert e Jozsa 1996, Furusawa *et al.* 1998, Gisin *et al.* 2002, Knill *et al.* 2001, Pellizzari 1997]. Desde então, pesquisadores de áreas como computação, engenharia, física e matemática desenvolvem pesquisas em como representar e comunicar a informação usando estados quânticos, como processos de decoerência podem mudar ou

até destruir essa informação e como construir portas, circuitos lógicos e algoritmos para tarefas computacionais.

Assim, o estudo dos estados quânticos da luz tornou-se um importante tópico nos últimos anos. Dentre eles, os estados coerentes, que são definidos como o autoestado do operador de aniquilação do oscilador harmônico, tem um importante papel em óptica quântica. A superposição de dois estados coerentes com fases opostas, a qual é definida como estado gato de Schrödinger, tem sido usada como a base de qubit lógico em duas propostas para computadores quânticos de variáveis contínuas [Glancy *et al.* 2004, Jeong *et al.* 2001, Ralph *et al.* 2003]. Estados coerentes emaranhados foram propostos para teletransportar um qubit codificado em um estado gato de Schrödinger [Wang 2001]. Em [Cochrane *et al.* 1999] mostrou-se como a informação quântica pode ser codificada usando a superposição de estados coerentes pares e ímpares. O uso dos estados coerentes levou a um novo interesse na geração e manipulação dos estados gatos.

Juntamente com os estudos feitos sobre estados coerentes, introduziu-se os estados coerentes de fótons adicionados, que tem atraído a atenção de diversos pesquisadores por serem úteis para computação quântica, comunicação quântica e metrologia quântica. Os estados coerentes de um único fóton adicionado podem ser aplicados em protocolos de informação quântica [Wenger *et al.* 2004]. Em [Dakna *et al.* 1998, Hong e Guang-Can 1999] foram feitas algumas propostas para geração desses estados, que foram gerados experimentalmente em laboratório, como demonstrado em [Zavatta *et al.* 2005].

Entre as várias propriedades da mecânica quântica, o emaranhamento tem atraído consideravelmente o interesse dos pesquisadores na última década [Bell 1964]. Emaranhamento é o ingrediente chave para realização de diversas tarefas, tais como teletransporte de estados quânticos [Benett *et al.* 1993], codificação densa [Bennett e Wiesner 1992] e correções quânticas de erros [Gottesman 1997]. Notou-se também o crescente uso da polarização quântica no processo de informação quântica. Por exemplo, a polarização de estados coerentes tem sido usada para propor esquemas de distribuição quântica de chaves [Kye *et al.* 2005, Vidiella-Barranco e Borelli 2006, Yin *et al.* 2007].

Nosso objetivo é analisar a polarização quântica de estados coerentes de fótons adi-

cionados e a polarização quântica e o emaranhamento da superposição desses estados. Para tanto, este trabalho foi organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 é feita uma revisão de alguns estados quânticos da radiação eletromagnética; no capítulo 3 é apresentado o suporte matemático necessário ao melhor entendimento do trabalho; no capítulo 4 são calculados e analisados o emaranhamento e a polarização quântica da superposição de estados coerentes de fótons adicionados; e por fim, concluímos este trabalho em 5, apresentando observações a respeito dos resultados obtidos.

2. ESTADOS QUÂNTICOS DO OSCILADOR HARMÔNICO

2.1 Eletrodinâmica Quântica

A teoria quântica do campo eletromagnético no vácuo foi formulada por Born, Heisenberg e Jordan em 1926 e em 1927 Dirac tratou da emissão e da absorção da radiação [Milonni 1994]. Atualmente, essa teoria é a mais bem sucedida e desenvolvida da física, pois é capaz de tratar com precisão uma vasta gama de fenômenos naturais.

Para uma melhor compreensão do assunto, nesse capítulo será apresentado o oscilador harmônico quântico e os estados quânticos da luz.

2.1.1 Oscilador Harmônico Quântico

O oscilador harmônico é descrito pelo Hamiltoniano da seguinte forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{m} + m \omega^2 \hat{q}^2 \right), \quad (2.1)$$

onde \hat{p} e \hat{q} são os operadores momento e posição, respectivamente, pertencentes ao espaço de Hilbert.

Definindo-se o operador não-Hermitiano:

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (\hat{p} - im\omega\hat{q}) \quad (2.2)$$

e o seu adjunto:

$$\hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (\hat{p} + im\omega\hat{q}), \quad (2.3)$$

podemos representar os operadores \hat{p} e \hat{q} em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger como:

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.4)$$

$$\hat{q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (2.5)$$

Sabendo que:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (2.6)$$

podemos facilmente perceber que:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.7)$$

Utilizando (2.2) - (2.7) é possível reescrever o Hamiltoniano da seguinte maneira:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

onde $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ é o operador número que será detalhado na próxima sessão.

2.1.2 Estados de Fock

Os estados de Fock $|n\rangle$ são os autoestados do operador número:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.9)$$

A geração dos estados de Fock não é uma tarefa relativamente fácil para ser realizada em laboratório devido ao aparecimento de efeitos de decoerência [Zurek 1991]. No entanto, já existem resultados experimentais para alguns casos [Lvovsky *et al.* 2001, Noguees *et al.* 1999, Varcoe *et al.* 2000]. Esses estados são úteis para o desenvolvimento de diversas linhas de pesquisas tais como comunicação quântica segura [Zbinden *et al.* 2000], criptografia quântica [Tittel *et al.* 2000], interferometria quântica de alta precisão [Holland

e Burnett 1993], dentre outras. Estudos mais detalhados do estado número podem ser vistos em: [Neergaard-Nielsen *et al.* 2006, Zou *et al.* 2004].

É possível mostrar que se $|n\rangle$ é um autoestado do operador \hat{n} , então $\hat{a}|n\rangle$ também será um autoestado desse operador com autovalor igual a $(n - 1)$ [Mandel e Wolf 1995].

Em termos do estado vácuo, o estado número é expresso da seguinte forma:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.10)$$

Sabendo que o estado vácuo é definido como:

$$\hat{a}|0\rangle \equiv 0, \quad (2.11)$$

e aplicando os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger na equação (2.10), obtemos:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \hat{a}^\dagger \left[\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle = \sqrt{n+1} \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} |0\rangle = \sqrt{(n+1)} |n+1\rangle, \quad (2.12)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \hat{a} \left[\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle = \frac{n (\hat{a}^\dagger)^{n-1}}{\sqrt{n!}} |0\rangle + \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \hat{a} |0\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.13)$$

Para chegar nesses resultados usou-se a definição (2.11) e a relação de comutação $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$.

A partir da equação (2.12) percebemos que o operador \hat{a}^\dagger cria um fóton, por esse motivo é chamado de operador de criação. Enquanto, analisando (2.13) verifica-se que o operador \hat{a} destrói um fóton, sendo assim chamado operador de aniquilação.

As propriedades estatísticas da luz permitem determinar se um estado é perfeitamente clássico ou se apresenta algum efeito quântico. Podemos estudar essas propriedades através do parâmetro Q_n de Mandel [Mandel e Wolf 1995]:

$$Q_n = \frac{(\Delta n)^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (2.14)$$

onde $(\Delta n)^2$ é a variância e $\langle n \rangle$ é o número médio de fótons. Usando (2.14), podemos

definir as seguintes relações:

- Se $Q_n < 0$ ($(\Delta n)^2 < \langle n \rangle$) \implies Estatística Sub-Poissoniana;
- Se $Q_n = 0$ ($(\Delta n)^2 = \langle n \rangle$) \implies Estatística Poissoniana;
- Se $Q_n > 0$ ($(\Delta n)^2 > \langle n \rangle$) \implies Estatística Super-Poissoniana.

No caso dos estados números, $Q_n = -1$, caracterizando uma estatística sub-poissoniana e, conseqüentemente, um estado não-clássico.

As propriedades acima trabalhadas serão de grande relevância para o estudo dos estados coerentes, os quais serão apresentados no próximo tópico.

2.1.3 Estados Coerentes

As primeiras evidências para a existência de correlações entre as saídas de dois detectores fotoelétricos iluminados por ondas luminosas parcialmente correlacionadas foram obtidas em experimentos realizados por Brown e Twiss na década de 1950 [Brown 1974]. Em 1961 a Companhia Americana de Óptica solicitou ao físico Roy J. Glauber que explorasse a relação entre o laser e o efeito Hanbury Brown-Twiss e em 1963 Glauber apresentou uma teoria generalizada de coerência que lhe rendeu o prêmio Nobel de Física em 2005. Com o objetivo de mostrar uma descrição consistente para a teoria quântica da coerência óptica, Glauber introduziu os estados coerentes e por essas e outras contribuições ele é considerado o pai da óptica quântica.

Os estados coerentes são os autoestados do operador de aniquilação do oscilador harmônico [Mandel e Wolf 1995]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.15)$$

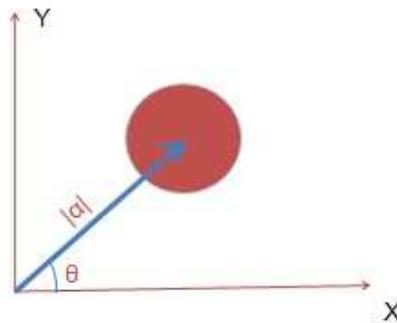
Analisando a equação acima, percebemos uma notável característica: ela torna-se a equação (2.11) quando fazemos $\alpha = 0$. Ou seja, o vácuo é um estado coerente com amplitude zero.

O valor esperado da energia de um estado coerente é dado por:

$$\langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

Fica claro que a energia do estado coerente é a soma da intensidade da onda clássica, $|\alpha|^2$, com a energia do vácuo, $\frac{1}{2}$.

Figura 2.1: Representação do estado coerente no espaço de fase.



Fonte: próprio autor.

Um espaço de fase quântico pode ser estabelecido a partir de uma base de operadores, como por exemplo \hat{q} e \hat{p} . O conjunto de valores originados pelo par de variáveis constituirá a rede que representará o espaço de fase quântico. A representação do estado vácuo no espaço de fase é simplesmente um círculo de raio unitário centrado na origem do sistema. Já os estados coerentes são representados nesse mesmo espaço por um círculo posicionado a uma distância dada por $|\alpha|$ que é a amplitude do estado (ver figura 2.1).

Vimos que no caso particular em que $\alpha = 0$ o vácuo é um estado coerente, dessa forma, juntamente com a análise da figura 2.1, podemos concluir que o estado coerente é o estado vácuo deslocado da origem para um ponto qualquer do espaço de fase. Matematicamente, isso pode ser expresso através do operador deslocamento:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.17)$$

onde o operador deslocamento é definido como:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}). \quad (2.18)$$

A partir da equação (2.17), podemos interpretar o operador deslocamento como um gerador do estado coerente ao ser aplicado no estado vácuo.

Verifiquemos o efeito do operador $\hat{D}(\beta)$ sobre um estado coerente $|\alpha\rangle$:

$$\hat{D}(\beta)|\alpha\rangle = \hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle = e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)}|\beta + \alpha\rangle, \quad (2.19)$$

onde utilizamos o seguinte teorema:

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right). \quad (2.20)$$

Verificamos dessa forma que o deslocamento de um estado coerente leva a outro estado coerente.

Representemos agora o estado coerente em termos do estado de Fock:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad (2.21)$$

onde foi utilizado a equação (2.20) e o fato que

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\exp(-\alpha^*\hat{a}). \quad (2.22)$$

Listaremos a seguir outras propriedades dos estados coerentes:

1. A probabilidade de se encontrar n fótons no estado coerente $|\alpha\rangle$, é dada por:

$$p_n = \langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\exp(-|\alpha|^2), \quad (2.23)$$

o valor do número médio de fótons é dado por

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.24)$$

e a variância por

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^2, \quad (2.25)$$

onde: $\langle n^2 \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4$.

De acordo com (2.14), temos que $Q_n = 0$, caracterizando assim uma distribuição Poissoniana.

2. Completeza

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1. \quad (2.26)$$

Os estados coerentes satisfazem a relação de completeza dada pela equação (2.26), formando assim uma base para a representação de outros estados.

3. Não-ortogonalidade:

Sejam $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ dois estados coerentes dados por

$$|\alpha\rangle = e^{(-|\alpha|^2/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.27)$$

e

$$|\beta\rangle = e^{(-|\beta|^2/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle. \quad (2.28)$$

Fazendo o produto interno entre eles, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= e^{(-|\alpha|^2/2)} e^{(-|\beta|^2/2)} \sum_{n,k} \frac{\beta^{*k}}{\sqrt{k!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \delta_{kn} \\ &= e^{(-|\beta-\alpha|^2/2)} e^{(\alpha^* \beta - \alpha \beta^*)/2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Percebemos assim que dois estados coerentes não são ortogonais entre si. Este fato, juntamente com a propriedade de completeza, significa que a decomposição de um estado na base de estado coerente não é única.

4. Incerteza mínima:

Utilizando as equações (2.4) e (2.5) obtemos:

$$\langle \alpha | \Delta \hat{q} | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (2.30)$$

e

$$\langle \alpha | \Delta \hat{p} | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \quad (2.31)$$

o que nos permite concluir que:

$$\langle \Delta \hat{q} \rangle \langle \Delta \hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.32)$$

O princípio de incerteza de Heisenberg nos diz que $\langle \Delta \hat{q} \rangle \langle \Delta \hat{p} \rangle \geq \frac{\hbar}{2}$, significando assim que não é possível medir essas duas grandezas simultaneamente e obtermos certeza nas medidas. Analisando a equação (2.32) percebemos que os estados coerentes apresentam mínima incerteza, por isso eles são os que mais se aproximam de um estado clássico, sendo assim chamados de estados quase-clássicos.

2.1.4 Estados Coerentes de Fótons Adicionados

Os estados coerentes de fótons adicionados foram primeiramente introduzidos por Agarwal e Tara, em 1991. Esses estados são o resultado de sucessivas aplicações do operador criação de fótons no estado coerente e ocupam uma posição intermediária entre o estado de Fock e o estado coerente [Agarwal e Tara 1991].

Os estados coerentes de fótons adicionados são introduzidos como:

$$|\alpha^{+m}\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle}{(\langle\alpha|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.33)$$

onde $|\alpha\rangle$ é o estado coerente e m é um número inteiro. Quando $\alpha \rightarrow 0$ o estado $|\alpha, m\rangle$ torna-se um estado de Fock e quando $m \rightarrow 0$ torna-se um estado coerente.

Podemos representar o estado $|\alpha^{+m}\rangle$ em termos do estado número como:

$$|\alpha^{+m}\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{[L_m(-|\alpha|^2)m!]^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \sqrt{(n+m)!}}{n!} |n+m\rangle, \quad (2.34)$$

onde $L_m(x)$ é o polinômio de Laguerre de ordem m definido por:

$$L_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^n m!}{(n!)^2 (m-n)!}. \quad (2.35)$$

O produto escalar de dois estados coerentes de fótons adicionados diferentes é dado por:

$$\langle\beta^{+m}|\alpha^{+m}\rangle = \frac{L_m(-\beta^*\alpha)}{[L_m(-|\beta|^2)L_m(-|\alpha|^2)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.36)$$

Calculando a probabilidade de encontrar n fótons no estado $|\alpha^{+m}\rangle$, obtemos:

$$p_n = \frac{n!|\alpha|^{2(n-m)}e^{-|\alpha|^2}}{[(n-m)!]^2 L_m(-|\alpha|^2)m!}. \quad (2.37)$$

A equação (2.37) representa uma distribuição sub-Poissoniana, o que caracteriza um estado não-clássico.

O número médio de fótons do estado $|\alpha^{+m}\rangle$ pode ser facilmente calculado e é dado por:

$$\langle n \rangle = \frac{(m+1)L_{m+1}(-|\alpha|^2)}{L_m(-|\alpha|^2)} - 1. \quad (2.38)$$

Analisando a equação (2.38), podemos notar que o número médio de fótons de um estado coerente de fótons adicionados é sempre maior do que um.

O estado coerente de fótons adicionados, como já foi mencionado, é a excitação sucessiva de fótons no estado quase-clássico. Sendo assim, a aplicação do operador criação \hat{a}^\dagger uma única vez no estado coerente $|\alpha\rangle$ caracteriza um estado coerente adicionado de um único fóton. De fato, utilizando a equação (2.33) e fazendo $m = 1$, temos:

$$|\alpha^{+1}\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle}{(\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.39)$$

sabendo que:

$$\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = 1 + |\alpha|^2, \quad (2.40)$$

então, obtemos:

$$|\alpha^{+1}\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}. \quad (2.41)$$

Uma outra maneira de interpretar os estados coerentes de fótons adicionados é dado em [Sivakumar 1999], onde foram tratados como autoestados de $f(\hat{n}, m)\hat{a}$, sendo $f(\hat{n}, m)$ uma função não-linear do operador número \hat{n} . Ou seja, os estados coerentes de fótons adicionados são um caso particular dos estados coerentes não-lineares.

É crescente o número de pesquisas envolvendo estados coerentes de fótons adicionados, uma vez que eles apresentam importantes aplicações nos processos de informação quântica e computação quântica [Dodonov e Marchioli 1998, Kalamidas *et al.* 2008, Li *et al.* 2002]. Em [Pinheiro 2011] é apresentada uma maneira de teleportação quântica utilizando os estados coerentes de fótons adicionados e propõe-se, ainda, um protocolo de Distribuição Quântica de Chaves (QKD) utilizando os estados coerentes adicionados e estados térmicos adicionados. A preparação e a caracterização de estados coerentes de um fóton adicionado são discutidas em [Zavatta *et al.* 2004].

2.1.5 Estados Gato de Schrödinger

Os estados gatos de Schrödinger, inicialmente chamados de estados coerentes pares e ímpares, foram introduzidos por Dodonov, Malkin e Man'ko em 1974 [Dodonov *et al.* 1974]. Esses estados receberam esse nome devido ao famoso experimento idealizado por Schrödinger. Resumidamente, este experimento revela a possibilidade de um gato existir em dois estados macroscopicamente distinguíveis, os quais foram denominados vivo e morto. Os estados gatos de Schrödinger são então definidos como uma superposição de dois estados coerentes com fases opostas descritos da seguinte forma:

$$|\alpha; \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos(\theta)]^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle), \quad (2.42)$$

onde θ assume valores específicos.

Podemos representar os estados gatos de Schrödinger na base dos estados de Fock, da seguinte forma:

$$|\alpha; \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n e^{i\theta}] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.43)$$

Analisando a equação (2.43), quando $\theta = 0$ obtém-se um estado denominado estado de gato par (cujo número médio de fótons é sempre um número par), enquanto que para $\theta = \pi$ obtém-se um estado gato ímpar (cujo número médio de fótons é sempre um número ímpar).

A distribuição de probabilidade do número de fótons desse estado é dada por:

$$p_n(\alpha; \theta) = |\langle n|\alpha; \theta\rangle|^2 = \frac{1 + (-1)^n \cos(\theta) |\alpha|^{2n}}{1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos(\theta) n!}. \quad (2.44)$$

Estados de superposição, como é o caso dos estados gatos de Schrödinger, apresentam propriedades tanto de uma mistura estatística simples quanto de interferência e apresentam ainda a característica de serem sensíveis a decoerência. Esses são alguns dos motivos que faz a realização experimental desses estados ser uma tarefa nada trivial. Recentemente tem sido propostas várias formas de realização desses estados [Dakna *et al.* 1996,

Guo e Zheng 1996] e em [Leibfried *et al.* 2005, Ourjoumtsev *et al.* 2007] conseguiu-se a realização experimental dos mesmos.

2.1.6 Estados de Quadratura

Os estados de quadratura são definidos como sendo os autoestados dos operadores de quadratura \hat{p} e \hat{q} , respectivamente:

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad (2.45)$$

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle. \quad (2.46)$$

Os operadores de quadratura obedecem uma relação de comutação canônica e seu espectro é ilimitado e contínuo [Missori 2003]. Os autoestados satisfazem a relação de completeza:

$$\int |p\rangle\langle p|dp = 1, \quad (2.47)$$

$$\int |q\rangle\langle q|dq = 1, \quad (2.48)$$

e ortogonalidade,

$$\langle p|\tilde{p}\rangle = \delta(p - \tilde{p}), \quad (2.49)$$

$$\langle q|\tilde{q}\rangle = \delta(q - \tilde{q}). \quad (2.50)$$

Os autoestados de quadratura se relacionam através da transformada de Fourier da seguinte maneira:

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iqp} |q\rangle dq, \quad (2.51)$$

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-iap} |p\rangle dp. \quad (2.52)$$

Um artifício matemático utilizado para obtermos informações sobre os estados de quadratura é a função de onda que é dada por [Gea-Banacloche 2002]:

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle, \quad (2.53)$$

$$\psi(q) = \langle q|\psi\rangle. \quad (2.54)$$

O módulo ao quadrado das funções de onda de quadratura, $|\psi(p)|^2$ e $|\psi(q)|^2$, tem significado físico, elas dão a distribuição marginal de probabilidade do estado puro $|\psi\rangle$.

O interesse por variáveis contínuas como as quadraturas do campo eletromagnético, dentre elas amplitude e fase, tem se tornado crescente, pois através das mesmas é possível, dentre outras aplicações, aumentar relativamente taxas de processamento [Cerf e Grangier 2007].

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre alguns estados quânticos do campo eletromagnético que será de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre os estados quânticos foram mencionados os estados coerentes que são autoestados do operador de aniquilação do oscilador harmônico. Abordamos os estados coerentes de fótons adicionados que é obtido através de sucessivas aplicações do operador criação de fótons no estado coerente. Falamos também sobre os estados gatos de Schrödinger que são a superposição de dois estados coerente de fases opostas e por fim, foi feita uma breve análise sobre os estados de quadraturas, que são os autoestados dos operadores de quadratura.

3. FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo apresentaremos o ferramental matemático necessário para o desenvolvimento deste trabalho. Discutiremos a princípio sobre a função de Wigner, em seguida falaremos sobre a função Q e sobre os parâmetros de Stokes e por fim, abordaremos o emaranhamento.

3.1 Função de Wigner

As previsões da mecânica quântica para uma partícula são probabilísticas e só podem ser relacionadas com a mecânica clássica através das probabilidades geradas por um *ensemble* de partículas [Souza 2007]. A descrição clássica desses *ensembles* é feita através dos conceitos da mecânica estatística, em particular da distribuição no espaço de fase. Dessa forma, é necessário descrever a mecânica quântica dentro do espaço de fase, a fim de que possamos aproximá-la de uma descrição clássica mais intuitiva. No entanto, por causa do princípio da incerteza no momento e posição [Peres 1995], não podemos definir uma genuína distribuição de probabilidade no espaço de fase para uma partícula em um sistema quântico. Podemos somente definir funções que apresentem algumas propriedades destas distribuições.

Essas funções, denominadas de funções de distribuição de quase-probabilidade, são úteis para calcular médias em sistemas quânticos, as quais apresentam uma forma bastante similar com sistemas clássicos. Várias destas distribuições foram formuladas, cada qual para um estudo específico. A função de Wigner, por exemplo, tem como objetivo fazer uma descrição correspondente entre a mecânica quântica e a mecânica estatística clássica [Wigner 1932].

A função de Wigner apresenta a mesma informação que o estado quântico mas com a vantagem de trabalhar com valores reais. No entanto, ela apresenta a peculiaridade de

poder assumir valores negativos, o qual caracteriza um comportamento não clássico [Donov e Man'ko 2003].

Suponhamos que um determinado sistema quântico seja descrito por um operador densidade ρ . Podemos definir uma distribuição de quase-probabilidade $W_\rho(q, p)$ tal que as distribuições marginais

$$\langle q|\hat{\rho}|q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_\rho(q, p) dp, \quad (3.1)$$

$$\langle p|\hat{\rho}|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_\rho(q, p) dq, \quad (3.2)$$

retornem como resultado a distribuição da posição ou do momento [Ulf 2005].

Se realizamos um deslocamento θ na fase, as amplitudes complexas sofrem um deslocamento e, conseqüentemente, as componentes q e p são rotacionadas de θ no espaço bidimensional (q, p) . Nesse caso, podemos generalizar a função $W_\rho(q, p)$ através da definição do operador unitário:

$$\hat{U}(\theta) = e^{(-i\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\theta)}. \quad (3.3)$$

Os operadores \hat{q} e \hat{p} são transformados pelo operador $\hat{U}(\theta)$ da seguinte maneira:

$$\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{q}\hat{U}(\theta) = \hat{q}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta, \quad (3.4)$$

$$\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{p}\hat{U}(\theta) = -\hat{q}\sin\theta + \hat{p}\cos\theta. \quad (3.5)$$

Usando as equações (3.4) e (3.5), podemos reescrever (3.1) e (3.2) como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(q\cos\theta - p\sin\theta, -q\sin\theta + p\cos\theta) dp = \langle q|\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger|q\rangle. \quad (3.6)$$

No caso particular em que $\theta = 0$, a equação (3.6) se reduz a $\langle q|\hat{\rho}|q\rangle$ e no caso em que $\theta = \frac{\pi}{2}$, ela se reduz a $\langle p|\hat{\rho}|p\rangle$.

Finalmente, a função de Wigner na distribuição do espaço-fase é descrita como [Ulf

2005]:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx. \quad (3.7)$$

A função de Wigner para o vácuo é [Ulf 2005]:

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)}, \quad (3.8)$$

ou seja, uma Gaussiana. Como o estado coerente é o estado vácuo deslocado, é esperado que a função de Wigner para um estado coerente $|\alpha\rangle$ seja a função de Wigner para o vácuo deslocado, com amplitude $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + ip_0)$, a qual é complexa. De fato, calculando a função de Wigner para um estado coerente com essa amplitude, encontramos:

$$\begin{aligned} W_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \alpha \right\rangle \langle \alpha \left| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \left| D(\alpha) |0\rangle \langle 0| D^\dagger(\alpha) \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \Rightarrow \\ W_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(q, p) &= \frac{1}{\pi} e^{[-(q - q_0)^2 - (p - p_0)^2]}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se compararmos as equações (3.8) e (3.9) notamos que a função de Wigner para o estado coerente está deslocada na quadratura q de q_0 e na quadratura p de p_0 .

3.2 Parâmetros de Stokes

Os parâmetros de Stokes são utilizados para descrever o estado de polarização de um feixe de luz. Consideremos uma luz quase monocromática com frequência ω que está se propagando na direção positiva do eixo z . As componentes do campo elétrico nas direções x e y são, respectivamente, dadas por:

$$E_x(t) = \hat{i} E_{0x}(t) \cos[kz - \omega t + \epsilon_x(t)], \quad (3.10)$$

$$E_y(t) = \hat{j} E_{0y}(t) \cos[kz - \omega t + \epsilon_y(t)]. \quad (3.11)$$

Através de alguns cálculos, os parâmetros de Stokes ficam definidos como [Hecht 1987]:

$$S_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle + \langle E_{0y}^2 \rangle, \quad (3.12)$$

$$S_1 = \langle E_{0x}^2 \rangle - \langle E_{0y}^2 \rangle, \quad (3.13)$$

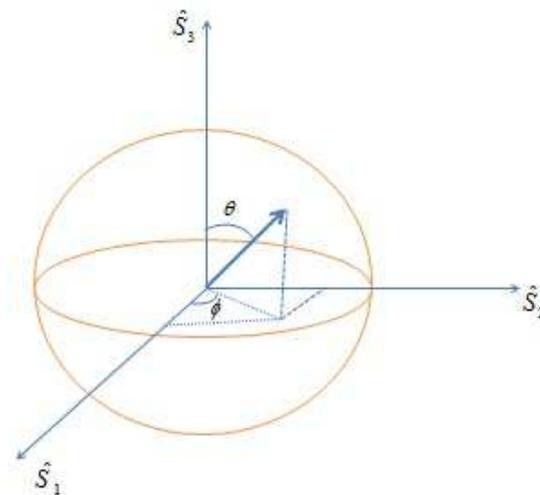
$$S_2 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \cos \epsilon \rangle, \quad (3.14)$$

$$S_3 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \sin \epsilon \rangle, \quad (3.15)$$

onde $\epsilon = \epsilon_y - \epsilon_x$.

S_0 caracteriza a potência total da luz tanto polarizada quanto despolarizada, S_1 é a diferença entre as potências da luz polarizada na vertical e na horizontal, S_2 é a diferença entre as potências da luz polarizada a -45° e a 45° e finalmente, S_3 representa a diferença entre as potências da luz polarizada circular a direita e circular a esquerda. A representação geométrica desses parâmetros é feita através de vetores na esfera de Poincaré como mostrado na figura 3.1.

Figura 3.1: Representação dos parâmetros de Stokes na esfera de Poincaré.



Fonte: próprio autor.

O grau de polarização da luz na visão clássica é definido como:

$$P_c = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}. \quad (3.16)$$

Classicamente, quando o grau de polarização é igual a zero, $P_c = 0$, significa que a luz é totalmente despolarizada, no entanto, quando estamos analisando um sistema quântico essa condição é necessária mas não suficiente. Ou seja, mesmo quando o grau de polarização é zero não significa que a luz é totalmente despolarizada. Isso ocorre por causa das correlações de quarta ordem que contribuem para o grau de polarização quântico.

Para um sistema quântico, os parâmetros de Stokes são os operadores correspondentes aos parâmetros de Stokes clássicos [Luis 2002]:

$$\hat{S}_0 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \quad (3.17)$$

$$\hat{S}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \quad (3.18)$$

$$\hat{S}_2 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \quad (3.19)$$

$$\hat{S}_3 = i(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2). \quad (3.20)$$

Nas equações (3.17)-(3.20), \hat{a}_1^\dagger e \hat{a}_1 são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, aplicados ao primeiro modo do estado, enquanto \hat{a}_2^\dagger e \hat{a}_2 são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, aplicados ao segundo modo do estado.

Os operadores \hat{S}_1 , \hat{S}_2 e \hat{S}_3 não comutam, ou seja, não podemos medir qualquer dois desses valores simultaneamente e obtermos certeza absoluta em seus valores:

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i 2 \epsilon_{jkm} \hat{S}_m. \quad (3.21)$$

Os valores médios dos operadores quânticos de Stokes para um estado coerente $|\psi\rangle =$

$|\alpha\rangle|\beta\rangle$, são dados por [Silva 2008]:

$$\langle \hat{S}_0 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2, \quad (3.22)$$

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = |\alpha|^2 - |\beta|^2, \quad (3.23)$$

$$\langle \hat{S}_2 \rangle = (\alpha^* \beta + \alpha \beta^*), \quad (3.24)$$

$$\langle \hat{S}_3 \rangle = i(\alpha \beta^* - \alpha^* \beta). \quad (3.25)$$

Os resultados (3.22)-(3.25) são iguais aos valores obtidos classicamente. No entanto, esses operadores apresentam variâncias, as quais são definidas como [Vidiella-Barranco e Borelli 2006]:

$$V_i \equiv \langle \hat{S}_i^2 \rangle - \langle \hat{S}_i \rangle^2, \quad i = \{0, 1, 2, 3\}. \quad (3.26)$$

Utilizando (3.26) para os resultados (3.22)-(3.25), obtemos:

$$V_1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2, \quad (3.27)$$

$$V_2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2, \quad (3.28)$$

$$V_3 = |\alpha|^2 + |\beta|^2. \quad (3.29)$$

Essas variâncias significam que um estado coerente em vez de ser representado por um ponto na esfera de Poincaré é definido por uma distribuição de probabilidade de estados sobre essa esfera (ver figura 3.2).

Os valores médios e quadrados dos parâmetros de Stokes para a superposição de es-

tados coerentes bimodais, $|\psi\rangle = N(|\alpha, \beta\rangle + |\epsilon, \lambda\rangle)$, são dados por [Silva 2008]:

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = |N|^2 \{ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) + (|\epsilon|^2 - |\lambda|^2) + [(\alpha^* \epsilon - \beta^* \lambda) + (\alpha \epsilon^* - \beta \lambda^*)] \delta \}, \quad (3.30)$$

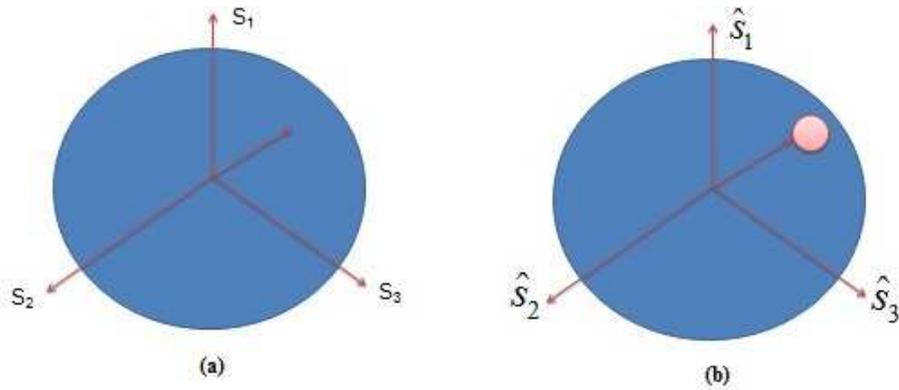
$$\langle \hat{S}_2 \rangle = |N|^2 \{ (\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) + (\epsilon^* \lambda + \epsilon \lambda^*) + [(\alpha^* \lambda + \epsilon \beta^*) + (\epsilon^* \beta + \alpha \lambda^*)] \delta \}, \quad (3.31)$$

$$\langle \hat{S}_3 \rangle = i|N|^2 \{ (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) + (\epsilon \lambda^* - \epsilon^* \lambda) + [(\epsilon \beta^* - \alpha^* \lambda) + (\alpha \lambda^* - \epsilon^* \beta)] \delta \}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_1^2 \rangle &= |N|^2 \left\{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\epsilon|^2 + |\lambda|^2 + (|\epsilon|^2 - |\lambda|^2)^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. [\alpha^* \epsilon + \beta^* \lambda + \alpha \epsilon^* + \beta \lambda^* + (\alpha^* \epsilon - \beta^* \lambda)^2 + (\alpha \epsilon^* - \beta \lambda^*)^2] \delta \right\}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_2^2 \rangle &= |N|^2 \left\{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\epsilon|^2 + |\lambda|^2 + 2(|\alpha|^2 |\beta|^2 + |\epsilon|^2 |\lambda|^2) + \right. \\ &\quad (\alpha^* \beta)^2 + (\alpha \beta^*)^2 + (\epsilon^* \lambda)^2 + (\epsilon \lambda^*)^2 + [\alpha^* \epsilon + \beta^* \lambda + \\ &\quad \left. \alpha \epsilon^* + \beta \lambda^* + (\alpha^* \lambda + \epsilon \beta^*)^2 + (\epsilon^* \beta + \alpha \lambda^*)^2 \right] \delta \}, \quad (3.34) \end{aligned}$$

Figura 3.2: Representação dos parâmetros de Stokes na esfera de Poincaré: (a) clássico, (b) quântico



Fonte: próprio autor.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_3^2 \rangle = & |N|^2 \{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\epsilon|^2 + |\lambda|^2 + 2(|\alpha|^2|\beta|^2 + |\epsilon|^2|\lambda|^2) - \\
& (\alpha^*\beta)^2 - (\alpha\beta^*) - (\epsilon^*\lambda)^2 - (\epsilon\lambda^*)^2 + [\alpha^*\epsilon + \beta^*\lambda + \\
& \alpha\epsilon^* + \beta\lambda^* - (\alpha^*\lambda - \epsilon\beta^*)^2 - (\epsilon^*\beta - \alpha\lambda^*)^2 \} \delta, \tag{3.35}
\end{aligned}$$

onde

$$|N|^2 = \left\{ 2 + [e^{(\alpha^*\epsilon + \beta^*\lambda)} + e^{(\alpha\epsilon^* + \beta\lambda^*)}] e^{(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\epsilon|^2 + |\lambda|^2)/2} \right\}^{-1}$$

e

$$\delta = e^{[\alpha^*\epsilon + \beta^*\lambda - (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\epsilon|^2 + |\lambda|^2)/2]}. \tag{3.36}$$

Das equações (3.30)-(3.35) percebemos que os parâmetros de Stokes para a superposição de estados coerentes bimodais apresentam diferentes variâncias, fato que não é observado quando trabalhamos com estados coerentes bimodais, como visto anteriormente. Isto significa que a superposição de dois estados coerentes bimodais mesmo que apresentem a mesma potência óptica, não obrigatoriamente apresentarão as mesmas variâncias dos operadores de Stokes [Silva 2008].

Note que, fazendo $\epsilon = \beta$ e $\gamma = \alpha$ nas equações (3.30)-(3.32) teremos que $\langle \hat{S}_1 \rangle = \langle \hat{S}_3 \rangle = 0$ e $\langle \hat{S}_2 \rangle \neq 0$, o que corresponde a uma polarização diagonal.

3.3 Função Q

A polarização é uma propriedade fundamental da luz tanto no aspecto quântico, quanto no clássico. É possível, através da mesma, demonstrar experimentalmente algumas propriedades quânticas e fazer aplicações como emaranhamento, criptografia quântica e teletransporte.

A polarização é descrita em termos de uma distribuição de probabilidade na superfície da esfera de Poincaré. Algumas maneiras de medir o grau de polarização quântico da luz são propostos em [Luis 2002] e [Klimov *et al.* 2005]. No entanto, será apresentado para

esse fim a função Q pois é uma função não-negativa [Luis 2003]:

$$Q(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4\pi} \langle n, \theta, \phi | \rho | n, \theta, \phi \rangle, \quad (3.37)$$

onde ρ é a matriz densidade e $|n, \theta, \phi\rangle$ são os estados coerentes em $SU(2)$ ¹

$$|n, \theta, \phi\rangle = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{n-m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^m e^{-im\phi} |m, n-m\rangle, \quad (3.38)$$

onde θ e ϕ são, respectivamente, os ângulos polar e azimutal da esfera de Poincaré e $|m, n-m\rangle$ são estados número de fótons.

O grau de polarização P é calculado usando-se a função $Q(\theta, \phi)$, através das relações:

$$D = 4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[Q(\theta, \phi) - \frac{1}{4\pi} \right]^2 \sin(\theta) d\theta d\phi, \quad (3.39)$$

$$P = \frac{D}{D+1}, \quad (3.40)$$

onde $0 \leq P \leq 1$. Quando $P = 0$, tem-se um estado não-polarizado. Utilizamos a função Q , pois ela é sempre não-negativa para todos os estados analisados. As definições (3.39) e (3.40) são invariantes sob as transformações $SU(2)$ aplicadas no estado coerente. Dessa maneira, o grau de polarização depende da forma da função $Q(\theta, \phi)$, mas não de sua posição sobre a esfera de Poincaré.

A função $Q(\theta, \phi)$ para o estado coerente de dois modos $||\alpha|e^{i\phi_\alpha}, |\beta|e^{i\phi_\beta}\rangle$ é dada por [Silva 2008]:

$$Q(\theta, \phi) = \frac{e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}}{4\pi} (1+z)e^z, \quad (3.41)$$

¹O grupo unitário especial de grau n , conhecido como $SU(n)$, é um grupo $n \times n$ de matrizes unitárias com determinante 1. Para uma análise mais detalhada, ver [Pfeifer 2003]

onde:

$$z = \left[|\alpha| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\phi_\alpha + \phi) + |\beta| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\phi_\beta) \right]^2 + \left[|\alpha| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\phi_\alpha + \phi) + |\beta| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\phi_\beta) \right]^2. \quad (3.42)$$

Substituindo a equação (3.41) nas equações (3.39) e (3.40), obtém-se:

$$P = 1 - \frac{4(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{1 + 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)[1 + (|\alpha|^2 + |\beta|^2)] - e^{-2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}}. \quad (3.43)$$

A partir da equação (3.43) é possível notar que dois estados coerentes bimodais quaisquer tendo a mesma potência óptica terão o mesmo grau de polarização quântico. E no caso particular em que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \gg 1$ a equação (3.43) fica dada por [Silva 2008]:

$$P \approx 1 - \frac{2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \quad (3.44)$$

Isto significa que quanto maior a potência óptica maior o grau de polarização quântico.

3.4 Emaranhamento

“A Física deve representar uma realidade no tempo e no espaço, livres de ações fantasmagóricas à distância”. Essa frase foi dita por Albert Einstein a Max Born em referência à estranheza que lhe causava duas partículas, após interagirem, continuarem “ligadas” [Villar 2007]. Essa propriedade, que mais tarde Schrödinger denominou de emaranhamento, possibilita a transmissão de informação sem que haja troca de energia ou matéria.

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) escreveram um artigo onde propuseram um experimento idealizado baseado nos postulados da teoria quântica e verificaram que em certos casos seria possível fazer previsões sobre um certo sistema S_1 fazendo medidas sobre um outro sistema S_2 , mesmo se esses sistemas estivessem espacialmente separados, que é o fenômeno da não-localidade [Einstein *et al.* 1935].

O físico austríaco Erwin Schrödinger no mesmo ano, 1935, escreveu um artigo sobre o fenômeno da não-localidade. Percebeu que o responsável por essa característica não-local

da mecânica quântica é o emaranhamento, um tipo de correlação entre sistemas. Quando duas ou mais partículas encontram-se emaranhadas, elas comportam-se como se fossem um único objeto indissociável, mesmo quando distantes umas das outras [Missori 2009] .

A partir da década de 1990, verificou-se que o emaranhamento é um importante recurso na computação e comunicação quântica [Bouwmeester *et al.* 2000, Nielsen e Chuang 2000], pois possibilita a realização de diversas tarefas como o teletransporte de estados quânticos, codificação densa, correção quântica de erros e distribuição quântica de chaves criptográficas [Wootters 1998]. Esse fenômeno é ainda um recurso computacional responsável pelo aumento da velocidade no processamento dos computadores quânticos.

Analiseemos, inicialmente, o emaranhamento de sistemas bipartidos para estados puros. Sejam dois sistemas quânticos A e B pertencentes aos espaços de Hilbert H_A e H_B , respectivamente, sendo $H_A \otimes H_B = H$. O estado do sistema composto será descrito por:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j}^{d_A, d_B} c_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle, \quad (3.45)$$

onde d_A e d_B são as dimensões dos sistemas A e B, respectivamente, e $|\psi_{AB}\rangle$ pertence ao espaço de Hilbert H .

O estado puro $|\psi_{AB}\rangle$ é separável se podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (3.46)$$

sendo $|\psi_A\rangle \in H_A$ e $|\psi_B\rangle \in H_B$. Caso isso não seja possível, o estado é dito emaranhado.

Consideremos agora, sistemas de duas partes para estados mistos. Seja ρ uma matriz densidade expressa da seguinte forma:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (3.47)$$

sendo ρ pertencente ao espaço de Hilbert com $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$. O estado, é dito separável quando pode ser expresso como uma soma convexa de estados produtos $\rho_i^A \otimes \rho_i^B$,

ou seja [Vilar 2007],

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B. \quad (3.48)$$

Caso isso não ocorra, o estado é emaranhado.

Exemplos de estados emaranhados são os estados de Bell [Peres 1995]:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (3.49)$$

e

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (3.50)$$

3.5 Concorrência

Existem diversas maneiras de quantificar o emaranhamento presente em um sistema quântico [Bennett *et al.* 1996, Wootters 1998], mas utilizaremos a concorrência [Eisert 2001] em nosso trabalho, pois compararemos nossos resultados aos resultados encontrados em [Silva 2008], que utilizou a concorrência em todos os seus cálculos. No caso de um sistema de dois qubits esta medida dá a fronteira entre os domínios separáveis e emaranhados [Bulnes 2005].

Sendo ρ a matriz densidade, $S = \sigma_y \otimes \sigma_y$ e R a matriz dada por $R = \rho S \rho^* S$, a concorrência é calculada como

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (3.51)$$

onde λ_i é a raiz quadrada dos autovalores da matriz R e σ_y é a matriz y de Pauli. Quando $C \neq 0$ significa que os dois qubits estão emaranhados e quando $C = 1$ corresponde a estados maximamente emaranhados.

Como exemplo, vamos calcular o emaranhamento para o estado de Bell dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.52)$$

Sabendo que a matriz y de Pauli é escrita na forma

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

e que o operador densidade é dado por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (3.54)$$

encontramos os autovalores da matriz R : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Substituindo esses resultados na equação (3.51) obtemos:

$$C = \max(0, 1) = 1, \quad (3.55)$$

ou seja, o estado de Bell é maximamente emaranhado, como já tínhamos comentado.

3.6 Fidelidade

A fidelidade de emaranhamento é definida como [Moura 2010]:

$$F_e(\rho, \varepsilon) = \frac{\sum_i |\text{Tr}(A_i \rho)|^2}{\text{Tr}(\varepsilon(\rho))}, \quad (3.56)$$

onde $\varepsilon(\rho)$ são operações quânticas que servem para descrever a evolução de sistemas quânticos:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_k A_k \rho A_k^\dagger, \quad (3.57)$$

sendo A_k os elementos de operação de ε .

Quando a fidelidade de emaranhamento se aproxima de 1, indica que o processo conserva bem o seu estado, ou seja, o emaranhamento é bem preservado. No entanto, quando $F_e(\rho, \varepsilon)$ fica próximo de zero significa dizer que o estado e seu emaranhamento não foram preservados pela operação ε .

Neste capítulo fizemos uma breve revisão sobre a função de Wigner, que é uma distribuição de quase-probabilidade. Falamos ainda sobre os parâmetros de Stokes, os quais descrevem o estado de polarização de um feixe de luz. Mencionamos a função Q , a qual mede o grau de polarização quântico da luz e por fim, fizemos um estudo sobre o emaranhamento que é um tipo de correlação entre sistemas. Essas informações apresentadas neste tópico foram de grande utilidade para o desenvolvimento dos resultados apresentados no próximo capítulo.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Função de Wigner Para Superposição de Estados Coerentes de Fótons Adicionados

Nesta seção iremos descrever a função de Wigner para uma superposição de estados coerentes adicionados da forma:

$$|\psi\rangle = N_m(|-\alpha^{+m}\rangle + e^{i\phi}|\alpha^{+m}\rangle), \quad (4.1)$$

onde N_m é a constante de normalização dada por:

$$N_m = \left\{ 2 + \frac{e^{-\alpha^2} m! {}_1F_1(1+m; 1; -\alpha^2)}{L_m(-\alpha^2) m!} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

$L_m(-\alpha^2)$ é o polinômio de Laguerre definido pela equação (2.35), m é o número de fótons adicionados e α é considerado real.

De acordo com a equação (3.7), a função de Wigner para o estado representado por (4.1) é dada por:

$$\begin{aligned} W(q, p) = & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} N_m^2 \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{L_m(-\alpha^2) m!}} \\ & \left\{ \left[\sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{l-m} H_l(q - \frac{x}{2})}{\sqrt{2^l} (l-m)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] + \right. \\ & e^{i\phi} \left[\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\alpha)^{k-m} H_k(q - \frac{x}{2})}{\sqrt{2^k} (k-m)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] \left. \right\} \\ & \left\{ \left[\sum_{r=m}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{r-m} H_r(q + \frac{x}{2})}{\sqrt{2^r} (r-m)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q + \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] + \right. \\ & e^{-i\phi} \left[\sum_{s=m}^{\infty} \frac{(\alpha)^{s-m} H_s(q + \frac{x}{2})}{\sqrt{2^s} (s-m)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q + \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] \left. \right\} dx, \quad (4.3) \end{aligned}$$

onde $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite.

Analisaremos agora a função de Wigner para a superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado. Na equação (4.1), fazendo $m = 1$, temos:

$$|\psi\rangle = N_1(|-\alpha^{+1}\rangle + e^{i\phi}|\alpha^{+1}\rangle), \quad (4.4)$$

e utilizando (4.2), temos que $N_1 = \left\{2 + e^{-2\alpha^2} \left[\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right] (e^{i\phi} + e^{-i\phi})\right\}^{-\frac{1}{2}}$. Logo, a função de Wigner para o caso (4.4) é dada por:

$$\begin{aligned} W(q, p) = & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} N_1^2 \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{L_1(-\alpha^2)}} \\ & \left\{ \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{l-1} H_l(q - \frac{x}{2})}{\sqrt{2^l} (l-1)!} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(q - \frac{x}{2}\right)^2\right] \right] + \right. \\ & \left. e^{i\phi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)^{k-1} H_k(q - \frac{x}{2})}{\sqrt{2^k} (k-1)!} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(q - \frac{x}{2}\right)^2\right] \right] \right\} \\ & \left\{ \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{r-1} H_r(q + \frac{x}{2})}{\sqrt{2^r} (r-1)!} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(q + \frac{x}{2}\right)^2\right] \right] + \right. \\ & \left. e^{-i\phi} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\alpha)^{s-1} H_s(q + \frac{x}{2})}{\sqrt{2^s} (s-1)!} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(q + \frac{x}{2}\right)^2\right] \right] \right\} dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(q, p) = & \left\{ e^{-(p-iq)(p+i(q+2\alpha\sqrt{2}))} \left[e^{2(q\alpha\sqrt{2}+\alpha^2+i\phi)} (1 - 2p^2 - 2q^2 - 2i\sqrt{2}p\alpha + \alpha^2) + \right. \right. \\ & \left. e^{2\alpha(\sqrt{2}(2ip+q)+\alpha)} (1 - 2p^2 - 2q^2 - 2i\sqrt{2}p\alpha + \alpha^2) - 2e^{2\sqrt{2}(ip+q)\alpha+i\phi} \right. \\ & \left. \left. \left((-1 + 2p^2 + 2q^2 + \alpha^2) \cosh(2\sqrt{2}q\alpha) - 2\sqrt{2}q\alpha \sinh(2\sqrt{2}q\alpha) \right) \right] \right\} / \\ & \left[\pi \left(-1 + \alpha^2 + e^{2i\phi} (-1 + \alpha^2) - 2e^{2\alpha^2+i\phi} (1 + \alpha^2) \right) \right], \quad (4.5) \end{aligned}$$

onde foram utilizados os seguintes artifícios matemáticos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1} H_n(x)}{\sqrt{2^n} (n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{n-1} H_n(x)}{\sqrt{2^n} n!} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n H_n(x)}{\sqrt{2^n} n!} \right\} = \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n H_n(x)}{\sqrt{2^n} n!} - H_0(x) \right\} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \exp\left[\frac{-\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}}\right] - 1 \right\} = \\ \left(-\alpha + \frac{2x}{\sqrt{2}} \right) \exp\left[\frac{-\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}}\right], \quad (4.6) \end{aligned}$$

sendo $n = \{k, s\}$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{n-1} H_n(x)}{\sqrt{2^n} (n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-\alpha)^{n-1} H_n(x)}{\sqrt{2^n} n!} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n H_n(x)}{\sqrt{2^n} n!} \right\} = \\ &-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n H_n(x)}{\sqrt{2^n} n!} - H_0(x) \right\} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right] - 1 \right\} = \\ &\left(\alpha + \frac{2x}{\sqrt{2}} \right) \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $n = \{l, r\}$.

Calcularemos agora a função de Wigner para a superposição de dois estados coerentes adicionados de dois fótons. Fazendo $m = 2$ em (4.1), temos que:

$$|\psi\rangle = N_2(|-\alpha^{+2}\rangle + e^{i\phi}|\alpha^{+2}\rangle), \quad (4.8)$$

e utilizando a equação (4.2), temos $N_2 = \left\{ 2 + e^{-2\alpha^2} \left[\frac{2-4\alpha^2+\alpha^4}{2+4\alpha^2+\alpha^4} \right] (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \right\}^{-\frac{1}{2}}$. Então a função de Wigner é dada por:

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} N_2^2 \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2L_2(-\alpha^2)}} \\ &\left\{ \left[\sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{l-2} H_l(q - \frac{x}{2})}{\sqrt{2^l} (l-2)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] + \right. \\ &e^{i\phi} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\alpha)^{k-2} H_k(q - \frac{x}{2})}{\sqrt{2^k} (k-2)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q - \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] \left. \right\} \\ &\left\{ \left[\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{r-2} H_r(q + \frac{x}{2})}{\sqrt{2^r} (r-2)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q + \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] + \right. \\ &e^{-i\phi} \left[\sum_{s=2}^{\infty} \frac{(\alpha)^{s-2} H_s(q + \frac{x}{2})}{\sqrt{2^s} (s-2)!} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(q + \frac{x}{2} \right)^2 \right] \right] \left. \right\} dx \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
W(p, q) = & \left\{ e^{(-p+iq)(p+i(q+2\sqrt{2}\alpha))+i\phi} (2 + 4\alpha^2 + \alpha^4) \left[e^{2\alpha(\sqrt{2}(ip+q)+\alpha)} \left(-p^2 - 2i\sqrt{2}p\alpha + 2\alpha^2 \right) \right. \right. \\
& (2 - 8q^2 + 4(p^4 + q^4 + 2p^2(-1 + q^2))) - 4(-1 + 3p^2 + q^2)\alpha^2 + \alpha^4) \\
& \cos(2\sqrt{2}p\alpha - \phi) + e^{2\sqrt{2}(ip+q)\alpha} \left[\left(p^2 + 2i\sqrt{2}p\alpha - 2\alpha^2 \right) (2 - 8q^2 + 4(p^4 + q^4 + 2p^2 \right. \\
& (-1 + q^2)) + 4(-1 + p^2 + 3q^2)\alpha^2 + \alpha^4) \cosh(2\sqrt{2}q\alpha) + 4\alpha \left(-\sqrt{2}p^2 - 4ip\alpha + \right. \\
& \left. \left. 2\sqrt{2}\alpha^2 \right) \left(e^{2\alpha^2 p} (-2(-1 + p^2 + q^2) + \alpha^2) \sin(2\sqrt{2}p\alpha - \phi) + q(2(-1 + p^2 + q^2) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha^2) \sinh(2\sqrt{2}q\alpha) \right) \right] \left. \right\} / \left\{ \pi(p^2 + 2i\sqrt{2}p\alpha - 2\alpha^2)(2 - 4\alpha^2 + \alpha^4) \right. \\
& \left. \left[2 - 4\alpha^2 + \alpha^4 + e^{2i\phi}(2 - 4\alpha^2 + \alpha^4) + 2e^{2\alpha^2+i\phi}(2 + 4\alpha^2 + \alpha^4) \right] \right\}, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

onde utilizamos os seguintes artifícios matemáticos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n-2} H_n(x)}{\sqrt{2^n}(n-2)!} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)\alpha^{n-2} H_n(x)}{\sqrt{2^n}n!} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^n H_n(x)}{\sqrt{2^n}n!} \right\} = \\
\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n H_n(x)}{\sqrt{2^n}n!} - \frac{\alpha H_1(x)}{\sqrt{2}} - H_0(x) \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left\{ \exp \left[\frac{-\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right] - \frac{2x\alpha}{\sqrt{2}} - 1 \right\} = \\
-\exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right] + \left(-\alpha + \frac{2x}{\sqrt{2}} \right)^2 &\exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.11)
\end{aligned}$$

sendo $n = \{k, s\}$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{n-2} H_n(x)}{\sqrt{2^n}(n-2)!} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-\alpha)^{n-2} H_n(x)}{\sqrt{2^n}n!} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n H_n(x)}{\sqrt{2^n}n!} \right\} = \\
\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n H_n(x)}{\sqrt{2^n}n!} + \frac{\alpha H_1(x)}{\sqrt{2}} - H_0(x) \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left\{ \exp \left[\frac{-\alpha^2}{2} - \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right] + \frac{2x\alpha}{\sqrt{2}} - 1 \right\} = \\
-\exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right] + \left(-\alpha - \frac{2x}{\sqrt{2}} \right)^2 &\exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\alpha x}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.12)
\end{aligned}$$

sendo $n = \{l, r\}$.

Para uma melhor análise e compreensão das funções de Wigner traçamos gráficos onde comparamos o comportamento entre as equações (4.5), (4.10) e a função de wigner para superposição de dois estados coerentes, que é dada por:

$$\begin{aligned}
W(p, q) = & \left(e^{-(p-iq)(p+i(q+2\sqrt{2}\alpha))} \left(e^{2\alpha(2i\sqrt{2}p+\sqrt{2}q+\alpha)} + e^{2i\sqrt{2}p\alpha+4\sqrt{2}q\alpha+i\phi} + \right. \right. \\
& \left. \left. e^{2(\sqrt{2}q\alpha+\alpha^2+i\phi)} + e^{i(2\sqrt{2}p\alpha+\phi)} \right) \right) / \left(\pi \left(1 + 2e^{2\alpha^2+i\phi} + e^{2i\phi} \right) \right). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Na construção dos gráficos para explorar os resultados dessa seção, utilizamos valores diferentes dos parâmetros considerados. As tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 mostram todos os valores utilizados em todos os gráficos que analisaremos posteriormente.

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros α e ϕ para superposição de dois estados coerentes e para superposições de dois estados coerentes de fótons adicionados.

$ \psi\rangle$	α	ϕ
$ -\alpha\rangle + \alpha\rangle$	2	0
$ -\alpha^{+1}\rangle + \alpha^{+1}\rangle$	2	0
$ -\alpha^{+2}\rangle + \alpha^{+2}\rangle$	2	0

Fonte: próprio autor.

Tabela 4.2: Diferentes valores de α para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado.

$ \psi\rangle$	α	ϕ
$ -\alpha^{+1}\rangle + \alpha^{+1}\rangle$	2	0
$ -\alpha^{+1}\rangle + \alpha^{+1}\rangle$	1	0
$ -\alpha^{+1}\rangle + \alpha^{+1}\rangle$	0	0

Fonte: próprio autor.

As figuras 4.1, 4.2 e 4.3 foram traçadas utilizando os valores encontrados na tabela 4.1. Fazendo uma análise detalhada dos gráficos percebemos que na figura 4.1, que representa a superposição de estados coerentes, há três picos, enquanto as figuras 4.2 e 4.3 apresentam quatro e cinco picos, respectivamente. Ou seja, o aumento no número de fótons adicionados aumenta a quantidade de franjas de interferência.

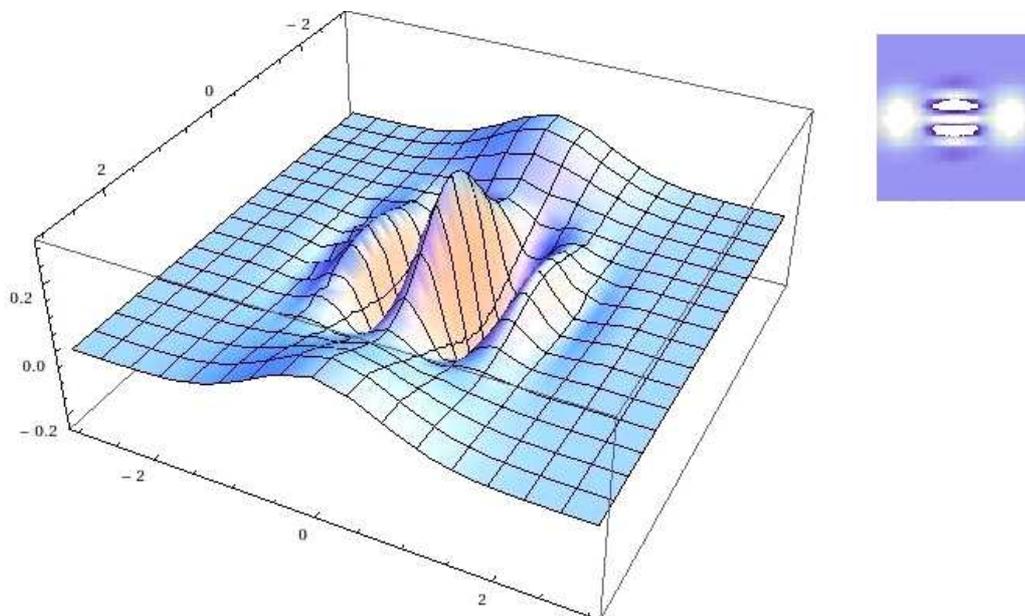
Na figura 4.4 fizemos um estudo da equação (4.5) para os casos em que $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, o valor de α continua o mesmo da análise anterior. Constatamos na primeira figura

Tabela 4.3: Diferentes valores de α para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados.

$ \psi\rangle$	α	ϕ
$ -\alpha^{+2}\rangle + \alpha^{+2}\rangle$	2	0
$ -\alpha^{+2}\rangle + \alpha^{+2}\rangle$	1	0
$ -\alpha^{+2}\rangle + \alpha^{+2}\rangle$	0	0

Fonte: próprio autor.

Figura 4.1: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$.

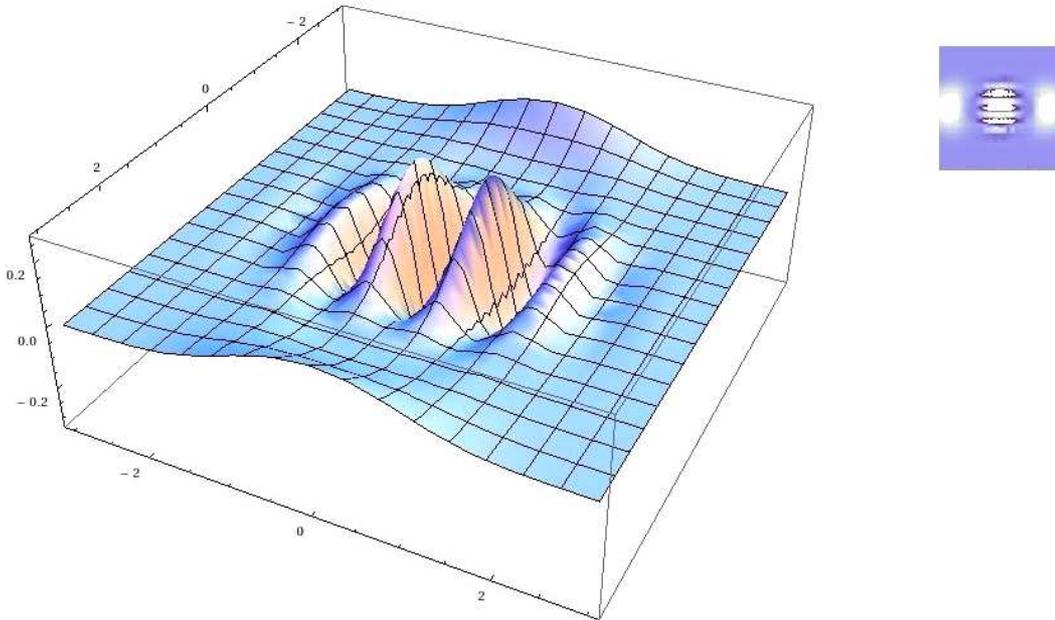


Fonte: próprio autor.

a presença de três franjas na parte superior e duas na parte inferior, enquanto que na segunda figura presenciamos duas franjas na parte superior e três na inferior. Percebemos dessa maneira que houve uma inversão da função de Wigner e isso é referente aos termos de interferência possuírem sinais opostos.

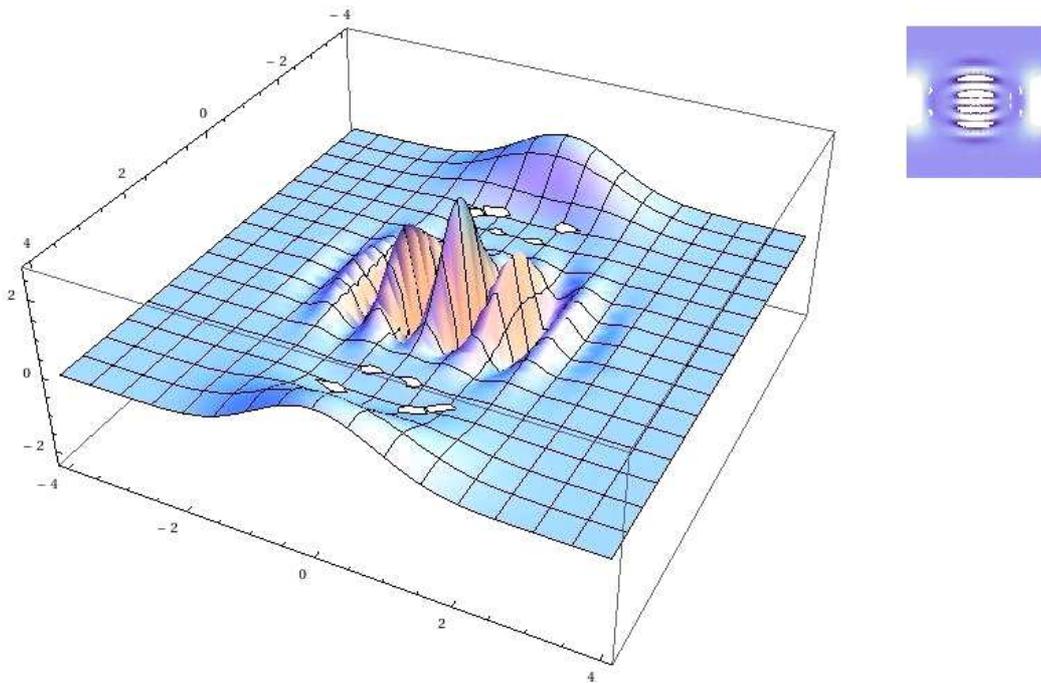
Fizemos uma análise da função de Wigner para a superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado variando o valor de α em 2, 1 e 0 e considerando $\phi = 0$ (ver tabela 4.2). A medida que diminuimos o valor de α notamos um decréscimo no número de picos, consequência de uma menor interferência (figuras 4.5 e 4.6) e para o caso em que $\alpha = 0$ a função de Wigner é a de um estado número $n = 1$ (figura 4.7), como era

Figura 4.2: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$.



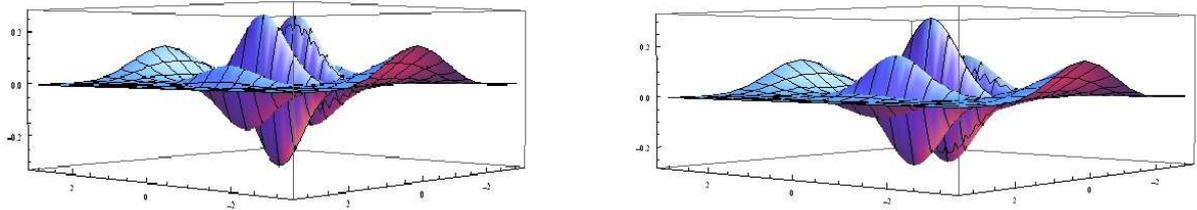
Fonte: próprio autor.

Figura 4.3: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$.



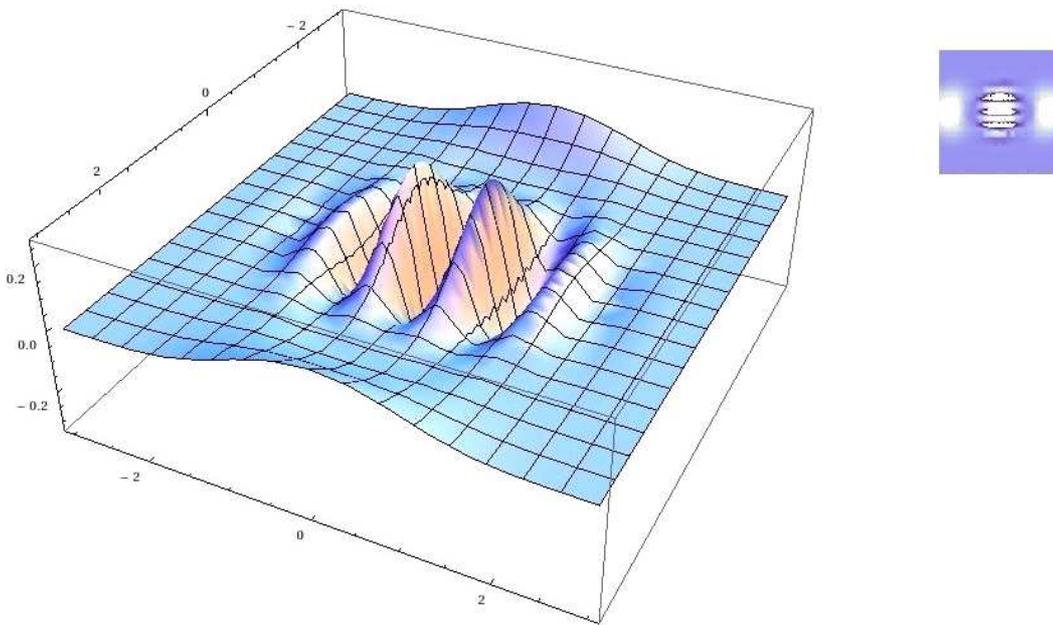
Fonte: próprio autor.

Figura 4.4: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$.



Fonte: próprio autor.

Figura 4.5: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado, com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$.

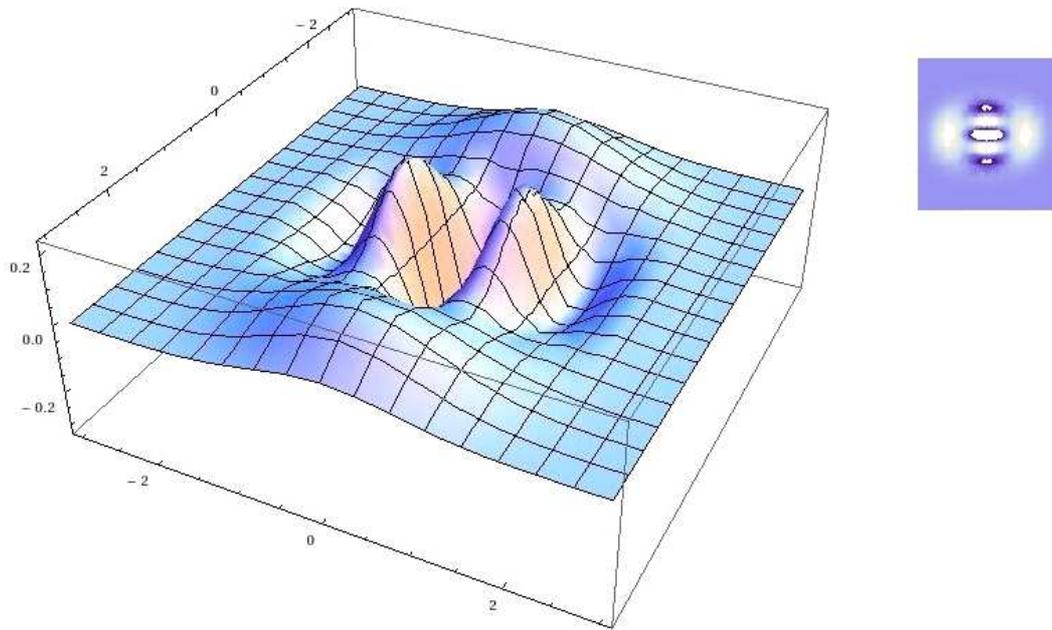


Fonte: próprio autor.

esperado.

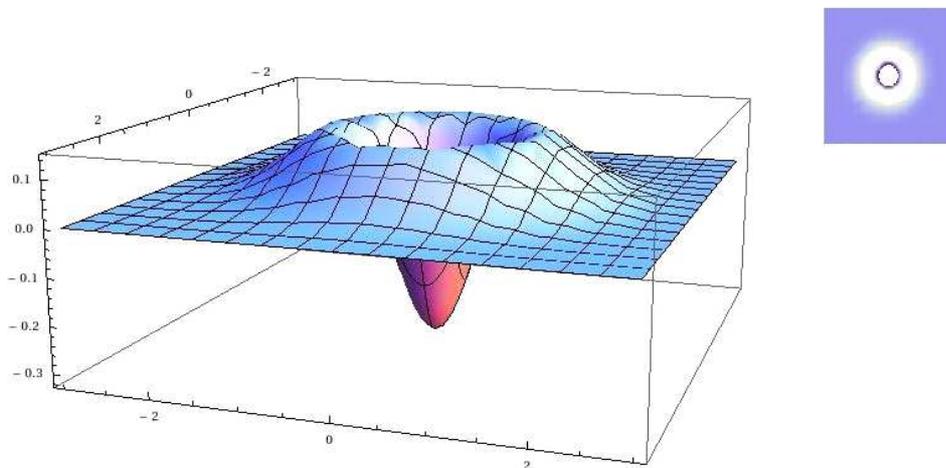
Essa mesma análise foi feita para a superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, como mostram as figuras 4.8, 4.9 e 4.10. A tabela 4.3 mostra de forma clara os valores de α e ϕ que foram utilizados para fazermos o estudo. Percebemos que, assim como para o caso anterior, ao diminuirmos o valor de α , há um decréscimo no número de picos e quando $\alpha = 0$, a função de Wigner é a função de Wigner de um estado número $n = 2$.

Figura 4.6: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado, com $\phi = 0$ e $\alpha = 1$.



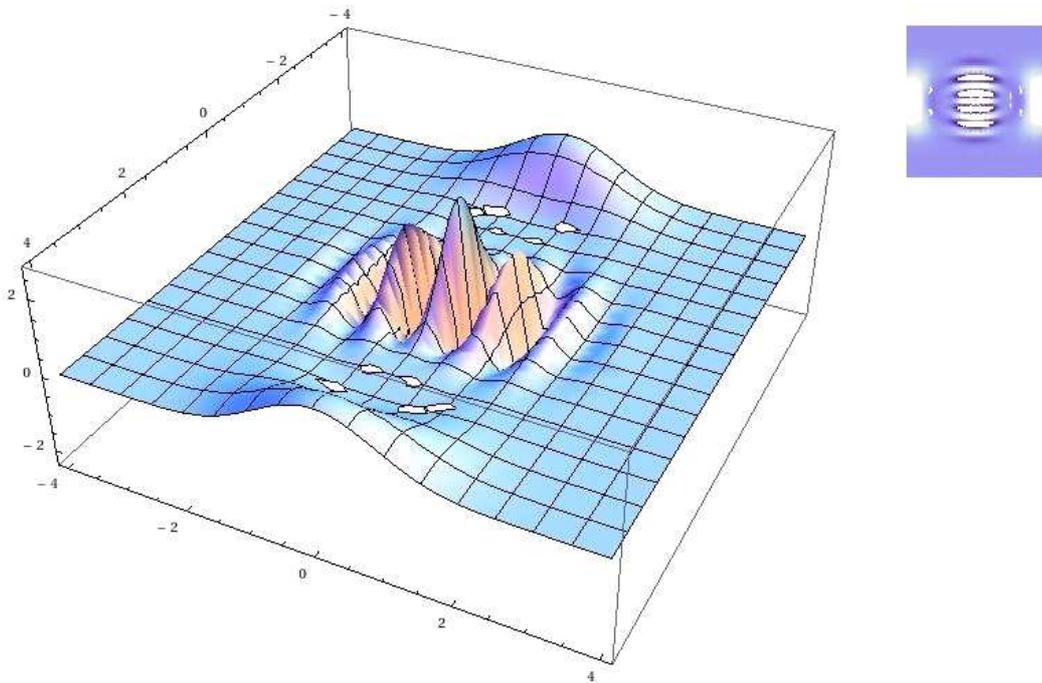
Fonte: próprio autor.

Figura 4.7: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado, com $\phi = 0$ e $\alpha = 0$.



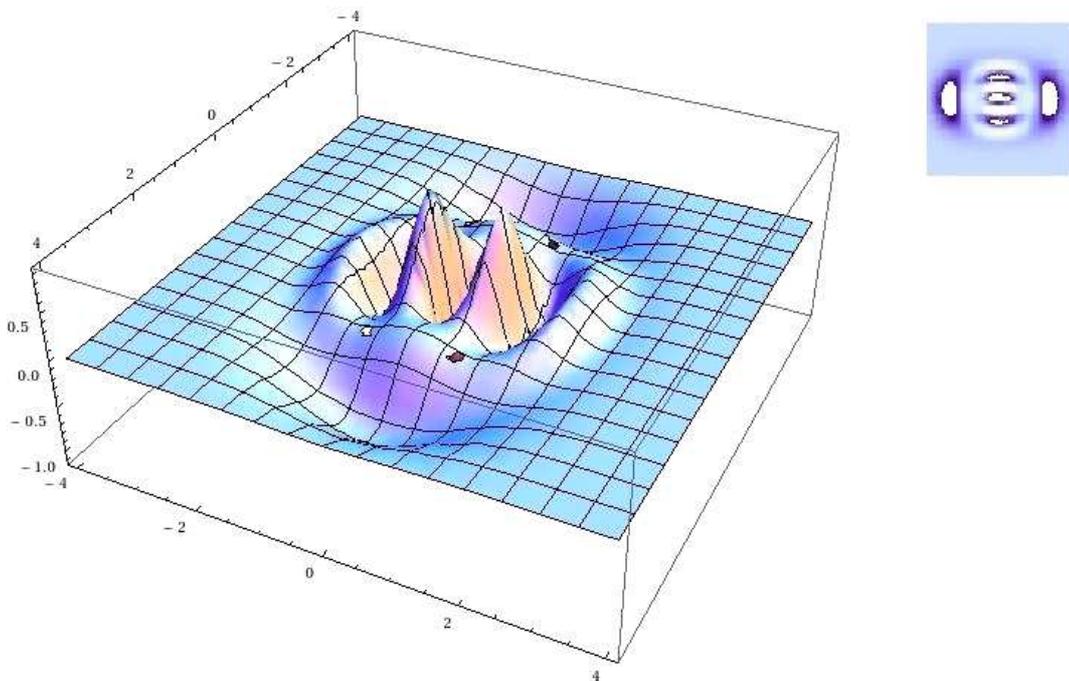
Fonte: próprio autor.

Figura 4.8: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, com $\phi = 0$ e $\alpha = 2$.



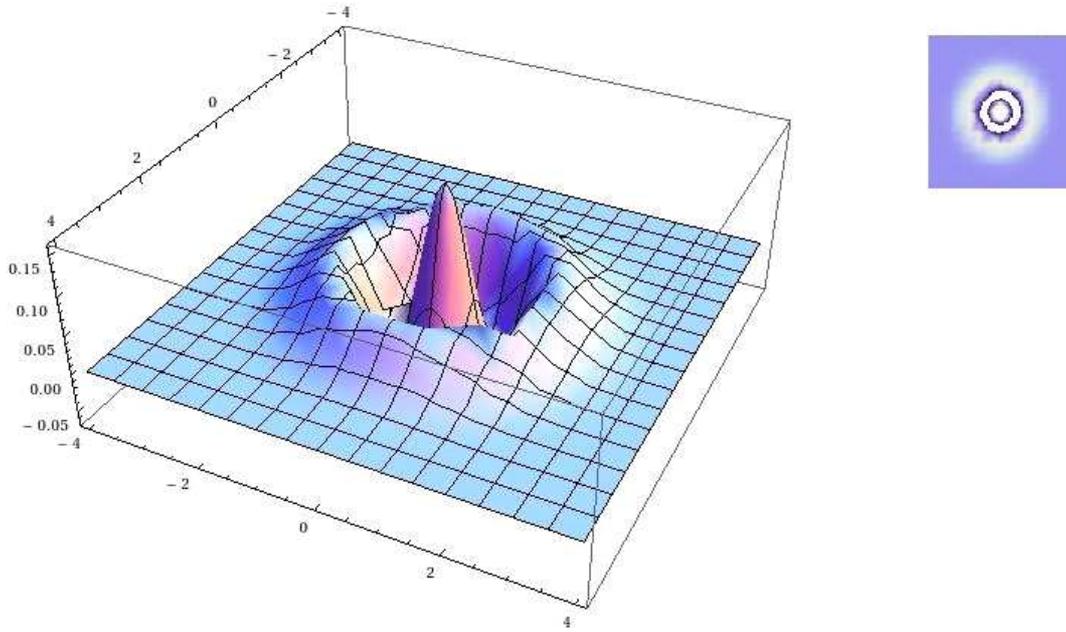
Fonte: próprio autor.

Figura 4.9: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, com $\phi = 0$ e $\alpha = 1$.



Fonte: próprio autor.

Figura 4.10: Função de Wigner para superposição de dois estados coerentes com dois fótons adicionados, com $\phi = 0$ e $\alpha = 0$.



Fonte: próprio autor.

4.2 Polarização Quântica de Estados Coerentes de Fótons Adicionados Bimodais

Nesta seção analisamos os parâmetros de Stokes e o grau de polarização quântico para o estado coerente de fótons adicionados do tipo

$$|\psi\rangle = N_{pq} |\alpha^{+p}, \beta^{+q}\rangle, \quad (4.14)$$

onde N_{pq} é o fator de normalização dado por:

$$N_{pq} = \{p!q! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2)\}^{-1/2} \quad (4.15)$$

e p e q são os números de fótons adicionados. Para o estado (4.14), os valores médios dos parâmetros de Stokes são dados por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_0 \rangle &= |N_{pq}|^2 e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \{ [p p! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) + \\ &\quad |\alpha|^2 \Gamma(p+2) {}_1F_1(p+2; 2; |\alpha|^2)] \\ &\quad [q! {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2)] + [q q! {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2) + \\ &\quad |\beta|^2 \Gamma(q+2) {}_1F_1(q+2; 2; |\beta|^2)] [p! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2)] \}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_1 \rangle &= |N_{pq}|^2 e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \{ [p p! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) + \\ &\quad |\alpha|^2 \Gamma(p+2) {}_1F_1(p+2; 2; |\alpha|^2)] \\ &\quad [q! {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2)] - [q q! {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2) + \\ &\quad |\alpha|^2 \Gamma(q+2) {}_1F_1(q+2; 2; |\beta|^2)] [p! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2)] \}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_2 \rangle &= \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{|N_{pq}|^{-2}} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} [|\alpha|^2 p! ({}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) + p {}_1F_1(p+1; 2; |\alpha|^2))] \right. \\ &\quad \left[\frac{\Gamma(q+2)}{2} (|\beta|^2 {}_1F_1(q+2; 3; |\beta|^2) + 2 {}_1F_1(q+1; 2; |\beta|^2)) \right] + \\ &\quad \frac{\alpha}{\beta} [|\beta|^2 q! ({}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2) + q {}_1F_1(q+1; 2; |\beta|^2))] \\ &\quad \left. \left[\frac{\Gamma(p+2)}{2} (|\alpha|^2 {}_1F_1(p+2; 3; |\alpha|^2) + 2 {}_1F_1(p+1; 2; |\alpha|^2)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_3 \rangle &= \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{|N_{pq}|^{-2}} i \left\{ \frac{\beta}{\alpha} [|\alpha|^2 p! ({}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) + p {}_1F_1(p+1; 2; |\alpha|^2))] \right. \\ &\quad \left[\frac{\Gamma(q+2)}{2} (|\beta|^2 {}_1F_1(q+2; 3; |\beta|^2) + 2 {}_1F_1(q+1; 2; |\beta|^2)) \right] - \\ &\quad \frac{\alpha}{\beta} [|\beta|^2 q! ({}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2) + q {}_1F_1(q+1; 2; |\beta|^2))] \\ &\quad \left. \left[\frac{\Gamma(p+2)}{2} (|\alpha|^2 {}_1F_1(p+2; 3; |\alpha|^2) + 2 {}_1F_1(p+1; 2; |\alpha|^2)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde ${}_1F_1(a; b; z)$ é a função hipergeométrica confluyente de primeira ordem.

Usando as equações (3.37) e (3.38), podemos calcular a forma geral da função Q para o estado (4.14). Para esse caso, ou seja, para um estado coerente de fóton adicionado de dois modos, encontramos:

$$Q_{p,q} = \frac{|N_{pq}|^2 |B|^{2p}}{4\pi |\alpha|^{2p} |\beta|^{2q} C^{p+q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! \delta^n}{[(n-p-q)!]^2}, \quad (4.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\alpha}{\beta} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi), \\ A &= \beta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ C &= (B+1)(B^*+1), \\ \delta &= |A|^2 C. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nesta seção, serão considerados os seguintes casos particulares para $|\psi\rangle$:

$$|\psi_{01}\rangle = N_{01} |\alpha^{+0}, \beta^{+1}\rangle, \quad (4.22)$$

$$|\psi_{11}\rangle = N_{11} |\alpha^{+1}, \beta^{+1}\rangle, \quad (4.23)$$

$$|\psi_{12}\rangle = N_{12} |\alpha^{+1}, \beta^{+2}\rangle, \quad (4.24)$$

sendo as constantes de normalização dadas, respectivamente, por:

$$|N_{01}|^2 = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} (1+|\beta|^2)^{-1}, \quad (4.25)$$

$$|N_{11}|^2 = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} [(1+|\beta|^2)(1+|\alpha|^2)]^{-1}, \quad (4.26)$$

$$|N_{12}|^2 = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} [(1+|\alpha|^2)(|\beta|^4+4|\beta|^2+2)]^{-1}. \quad (4.27)$$

Utilizando as equações (4.16)-(4.19), para $|\psi_{01}\rangle$ dado por (4.22), os valores médios dos parâmetros de Stokes são:

$$\langle \hat{S}_0 \rangle = (1+|\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} [|\alpha|^2(1+|\beta|^2) + (1+|\beta|^2) + |\beta|^2(2+|\beta|^2)], \quad (4.28)$$

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = (1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [|\alpha|^2(1 + |\beta|^2) - (1 + |\beta|^2) - |\beta|^2(2 + |\beta|^2)], \quad (4.29)$$

$$\langle \hat{S}_2 \rangle = (1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [2\alpha^* \beta(1 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*(1 + |\beta|^2) + \alpha\beta^{-1}] \quad (4.30)$$

e

$$\langle \hat{S}_3 \rangle = i(1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [2\alpha^* \beta(1 + |\beta|^2) - \alpha\beta^*(1 + |\beta|^2) - \alpha\beta^{-1}]. \quad (4.31)$$

Os valores médios dos parâmetros de Stokes ao quadrado, por sua vez, são dados por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_0^2 \rangle &= (1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [|\alpha|^2(1 + |\beta|^2) + (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) + \\ &|\alpha|^4(1 + |\beta|^2) + (|\beta|^6 + 5|\beta|^4 + 4|\beta|^2) + 2|\alpha|^2(|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1)], \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_1^2 \rangle &= (1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [|\alpha|^2(1 + |\beta|^2) + (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) + \\ &|\alpha|^4(1 + |\beta|^2) + (|\beta|^6 + 5|\beta|^4 + 4|\beta|^2) - 2|\alpha|^2(|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1)], \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_2^2 \rangle &= (1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [\alpha^{-2}\beta^2|\alpha|^4(3 + |\beta|^2) + \alpha^2\beta^{-2}|\beta|^2(3 + |\beta|^2) + \\ &|\alpha|^2(1 + |\beta|^2) + (1 + 3|\beta|^2 + |\beta|^4) + 2|\alpha|^2(1 + 3|\beta|^2 + |\beta|^4)] \quad (4.34) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_3^2 \rangle &= (1 + |\beta|^2)^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [-\alpha^{-2}\beta^2|\alpha|^4(3 + |\beta|^2) - \alpha^2\beta^{-2}|\beta|^2(3 + |\beta|^2) + \\ &|\alpha|^2(1 + |\beta|^2) + (1 + 3|\beta|^2 + |\beta|^4) + 2|\alpha|^2(1 + 3|\beta|^2 + |\beta|^4)]. \quad (4.35) \end{aligned}$$

Para o segundo caso, dado por (4.23), ou seja $|\psi_{11}\rangle$, os valores médios dos parâmetros

de Stokes são:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_0 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ [(1 + |\alpha|^2) + |\alpha|^2(2 + |\alpha|^2)] \\ &\quad (1 + |\beta|^2) + [(1 + |\beta|^2) + |\beta|^2(2 + |\beta|^2)](1 + |\alpha|^2) \}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_1 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ [(1 + |\alpha|^2) + |\alpha|^2(2 + |\alpha|^2)] \\ &\quad (1 + |\beta|^2) - [(1 + |\beta|^2) + |\beta|^2(2 + |\beta|^2)](1 + |\alpha|^2) \}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_2 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [\beta\alpha^*(2 + |\alpha|^2)(2 + |\beta|^2) + \\ &\quad \beta^*\alpha(2 + |\beta|^2)(2 + |\alpha|^2)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_3 \rangle &= i[(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [\beta\alpha^*|\alpha|^2(2 + |\alpha|^2)(2 + |\beta|^2) - \\ &\quad \beta^*\alpha|\beta|^2(2 + |\beta|^2)(2 + |\alpha|^2)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Os valores médios dos parâmetros de Stokes ao quadrado são dados por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_0^2 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ (1 + |\beta|^2)(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) + \\ &\quad (1 + |\alpha|^2)(|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) + (|\alpha|^6 + 5|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2)(1 + |\beta|^2) + \\ &\quad (|\beta|^6 + 5|\beta|^4 + 4|\beta|^2)(1 + |\alpha|^2) + 2(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\ &\quad (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) \}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_1^2 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ (1 + |\beta|^2)(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) + \\ &\quad (1 + |\alpha|^2)(|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) + (|\alpha|^6 + 5|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2)(1 + |\beta|^2) + \\ &\quad (|\beta|^6 + 5|\beta|^4 + 4|\beta|^2)(1 + |\alpha|^2) - 2(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\ &\quad (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) \}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_2^2 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ \alpha^{-2} \beta^2 [|\alpha|^4 (3 + |\alpha|^2)(3 + |\beta|^2)] \\
&\quad \alpha^2 \beta^{-2} [|\beta|^4 (3 + |\beta|^2)(3 + |\alpha|^2)] + (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1)(1 + |\beta|^2) \\
&\quad (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1)(1 + |\alpha|^2) + 2(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) \} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_3^2 \rangle &= [(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ -\alpha^{-2} \beta^2 [|\alpha|^4 (3 + |\alpha|^2)(3 + |\beta|^2)] \\
&\quad -\alpha^2 \beta^{-2} [|\beta|^4 (3 + |\beta|^2)(3 + |\alpha|^2)] + (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1)(1 + |\beta|^2) \\
&\quad (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1)(1 + |\alpha|^2) + 2(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 1) \}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Finalmente, para $|\psi_{12}\rangle$, dado pela equação (4.24), os valores médios dos parâmetros de Stokes são:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_0 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\beta|^6 + 7|\beta|^4 + 10|\beta|^2 + 2)(1 + |\alpha|^2) \}, \tag{4.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_1 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) - (|\beta|^6 + 7|\beta|^4 + 10|\beta|^2 + 2)(1 + |\alpha|^2) \}, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_2 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ \beta \alpha^{-1} (|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2) \\
&\quad (4|\beta|^4 + 9|\beta|^2) + \alpha \beta^{-1} (|\beta|^6 + 4|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 2)(2 + |\alpha|^2) \} \tag{4.46}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_3 \rangle &= i[(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ \beta \alpha^{-1} (|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2) \\
&\quad (4|\beta|^4 + 9|\beta|^2) - \alpha \beta^{-1} (|\beta|^6 + 4|\beta|^4 + 3|\beta|^2 + 2)(2 + |\alpha|^2) \}. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Ainda para esse caso, quando calculamos os valores médios dos quadrados dos parâmetros de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_0^2 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4)(|\alpha|^2 + 1) + \\
&\quad (|\alpha|^6 + 5|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2)(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^8 + 12|\beta|^6 + 38|\beta|^4 + 32|\beta|^2 + 4) + 2(|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4) \\
&\quad (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1)], \tag{4.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_1^2 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} [(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4)(|\alpha|^2 + 1) + \\
&\quad (|\alpha|^6 + 5|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2)(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\alpha|^2 + 1) \\
&\quad (|\beta|^8 + 12|\beta|^6 + 38|\beta|^4 + 32|\beta|^2 + 4) - 2(|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4) \\
&\quad (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1)], \tag{4.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_2^2 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ \alpha^2 \beta^{-2} [|\alpha|^4 (|\alpha|^2 + 3) \\
&\quad (|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 12)] + \alpha^2 \beta^{-2} [|\beta|^4 (|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 12) (|\alpha|^2 + 3)] \\
&\quad (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) (|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4) \\
&\quad (|\alpha|^2 + 1) + 2 (|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4) (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \} \tag{4.50}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_3^2 \rangle &= [(2 + 4|\beta|^2 + |\beta|^4)(1 + |\alpha|^2)]^{-1} e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \{ -\alpha^2 \beta^{-2} [|\alpha|^4 (|\alpha|^2 + 3) \\
&\quad (|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 12)] - \alpha^2 \beta^{-2} [|\beta|^4 (|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 12) (|\alpha|^2 + 3)] \\
&\quad (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) (|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2) + (|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4) \\
&\quad (|\alpha|^2 + 1) + 2 (|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4) (|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1) \} . \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Analisando as expressões (4.28)-(4.51), observamos que os parâmetros de Stokes apresentam flutuações para todos os três estados analisados ($|\psi_{01}\rangle$, $|\psi_{11}\rangle$ e $|\psi_{12}\rangle$). No entanto, diferentemente do que ocorre em (3.27)-(3.29) as variâncias dos parâmetros de Stokes não são iguais, fato que pode ser facilmente comprovado utilizando a equação (3.26). Logo abaixo são apresentadas as variâncias para o primeiro caso considerado, $|\psi_{01}\rangle$:

$$V_0 = \frac{e^{-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{(1+|\beta|^2)^2} \left\{ - [1 + |\alpha|^2 + (3 + |\alpha|^2)|\beta|^2 + |\beta|^4]^2 + e^{(|\alpha|^2+|\beta|^2)} [1 + 3|\alpha|^2 + |\alpha|^4 + (7 + 7|\alpha|^2 + |\alpha|^4)|\beta|^2 + 2(3 + |\alpha|^2)|\beta|^4 + |\beta|^6] \right\}, \quad (4.52)$$

$$V_1 = \frac{e^{-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{(1+|\beta|^2)^2} \left\{ - [1 + 3|\beta|^2 + |\beta|^4 - |\alpha|^2(1 + |\beta|^2)]^2 + e^{(|\alpha|^2+|\beta|^2)} [1 - |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + (7 - 5|\alpha|^2 + |\alpha|^4)|\beta|^2 - 2(-3|\alpha|^2|\beta|^4 + |\beta|^6)] \right\}, \quad (4.53)$$

$$V_2 = \frac{e^{-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{(1+|\beta|^2)^2} \left\{ -4|\alpha|^2(1 + 2|\beta|^2 + 2|\beta|^4 + |\beta|^6) - (\alpha^*)^2 [(1 + |\beta|^2 + |\beta|^4)^2] + 4 [1 + 3|\beta|^4(\beta^*)^2] + e^{(|\alpha|^2+|\beta|^2)} (1 + |\beta|^2) [|\alpha|^2(3 + 7|\beta|^2 + 2|\beta|^4) + \alpha^2(\beta^*)^2(3 + |\beta|^2) + \frac{\beta^* + \beta(3 + |\beta|^2)((\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2)}{\beta^*}] \right\} \quad (4.54)$$

e

$$V_3 = \frac{e^{-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}{(1+|\beta|^2)^2} \left\{ 4|\alpha|^2(1 + 2|\beta|^2 + 2|\beta|^4 + |\beta|^6) - (\alpha^*)^2 [(1 + |\beta|^2 + |\beta|^4)^2] + 4 [1 + 3|\beta|^4(\beta^*)^2] + e^{(|\alpha|^2+|\beta|^2)} [1 + 3|\beta|^2 + |\beta|^4 + |\alpha|^2(3 + 7|\beta|^2 + 2|\beta|^4) - \alpha^2(\beta^*)^2(3 + |\beta|^2) - \frac{\beta(\alpha^*)^2(3 + |\beta|^2)}{\beta^*}] \right\}. \quad (4.55)$$

Utilizando a equação (4.20) e particularizando para os casos já mencionados, ou seja: $p = 0$ e $q = 1$, $p = 1$ e $q = 1$ e $p = 1$ e $q = 2$, obtemos os seguintes resultados para a função Q :

$$Q_{01} = \frac{e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} e^\delta \delta (\delta^2 + 4\delta + 2)}{(1 + |\beta|^2) 4\pi |\beta|^2 C}, \quad (4.56)$$

$$Q_{11} = \frac{|B|^2 e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^\delta \delta^2 (\delta^3 + 9\delta^2 + 18\delta + 6)}{(1 + |\beta|^2)(1 + |\alpha|^2) 4\pi |\alpha|^2 |\beta|^2 C^2} \quad (4.57)$$

e

$$Q_{12} = \frac{|B|^2 e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^\delta \delta^3 (\delta^4 + 16\delta^3 + 72\delta^2 + 96\delta + 24)}{(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2)(1 + |\alpha|^2) 4\pi |\alpha|^2 |\beta|^4 C^3}, \quad (4.58)$$

onde B , C e δ são definidos em (4.21).

4.3 Polarização Quântica de Superposição de Dois Estados Coerentes de Fótons Adicionados Bimodais

Nesta seção são feitos os mesmos cálculos da seção anterior, mas agora consideramos uma superposição de dois estados coerentes de fótons adicionados bimodais, escrito da seguinte forma:

$$|\psi^S\rangle = N_{pq}^s (|\alpha^{+p}, \beta^{+q}\rangle + |\beta^{+q}, \alpha^{+p}\rangle). \quad (4.59)$$

N_{pq}^s é o fator de normalização dado por:

$$N_{pq}^s = \left\{ 2 + |N_{pq}|^2 |\alpha|^{2(q-p)} (\xi_{pq} + \xi_{pq}^*) \right\}^{-1/2}, \quad (4.60)$$

onde

$$\xi_{pq} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta^*)^m (\alpha^*\beta)^n (m+q)!(n+q)!}{m!n!(m+q-p)!(n+q-p)!}. \quad (4.61)$$

Para esse estado específico, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_0 \rangle = & |N_{pq}|^2 e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \{ [p p! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) + \\
& |\alpha|^2 \Gamma(p+2) {}_1F_1(p+2; 2; |\alpha|^2)] [q! {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2)] + \\
& \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^q \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*}\right)^p \left[\Gamma(q+1) \left(q {}_1\tilde{F}_1(q+1; q-p+1; \alpha^*\beta) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha^*\beta(q+1) {}_1\tilde{F}_1(q+2; q-p+2; \alpha^*\beta) \right) \right] \\
& \left[\Gamma(p+1) {}_1\tilde{F}_1(p+1; p-q+1; \alpha\beta^*) \right] + [q q! {}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2) + \\
& |\beta|^2 \Gamma(q+2) {}_1F_1(q+2; 2; |\beta|^2)] [p! {}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2)] + \\
& \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^q \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*}\right)^p \left[\Gamma(p+1) \left(p {}_1\tilde{F}_1(p+1; p-q+1; \alpha\beta^*) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha\beta^*(p+1) {}_1\tilde{F}_1(p+2; p-q+2; \alpha\beta^*) \right) \right] \\
& \left. \left[\Gamma(q+1) {}_1\tilde{F}_1(q+1; q-p+1; \alpha^*\beta) \right] \right\}, \tag{4.62}
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = \langle \hat{S}_3 \rangle = 0 \tag{4.63}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_2 \rangle = & 2 |N_{pq}^s|^2 e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} [|\alpha|^2 p! ({}_1F_1(p+1; 1; |\alpha|^2) + p {}_1F_1(p+1; 2; |\alpha|^2))] \right. \\
& \left. \left[\frac{\Gamma(q+2)}{2} (|\beta|^2 {}_1F_1(q+2; 3; |\beta|^2) + 2 {}_1F_1(q+1; 2; |\beta|^2)) \right] + \right. \\
& \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^q \left[\Gamma(p+1) \left({}_1\tilde{F}_1(p; p-q; \alpha^*\beta) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha^*\beta {}_1\tilde{F}_1(p+1; p-q+1; \alpha^*\beta) \right) \right] \left[\Gamma(q+2) \left({}_1\tilde{F}_1(q+1; q-p+2; \alpha\beta^*) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha\beta^* {}_1\tilde{F}_1(q+2; q-p+3; \alpha\beta^*) \right) \right] + \frac{\alpha}{\beta} [|\beta|^2 q! ({}_1F_1(q+1; 1; |\beta|^2) + \\
& q {}_1F_1(q+1; 2; |\beta|^2))] \left[\frac{\Gamma(p+2)}{2} (|\alpha|^2 {}_1F_1(p+2; 3; |\alpha|^2) + \right. \\
& \left. 2 {}_1F_1(p+1; 2; |\alpha|^2)) \right] + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^q \left[\Gamma(q+1) \left({}_1\tilde{F}_1(q; q-p; \beta^*\alpha) + \right. \right. \\
& \left. \left. \beta^*\alpha {}_1\tilde{F}_1(q+1; q-p+1; \beta^*\alpha) \right) \right] \left[\Gamma(p+2) \left({}_1\tilde{F}_1(p+1; p-q+2; \alpha^*\beta) + \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha^*\beta {}_1\tilde{F}_1(p+2; p-q+3; \alpha^*\beta) \right) \right], \tag{4.64}
\end{aligned}$$

onde ${}_1\tilde{F}_1(a; b; z)$ é a função hipergeométrica confluyente regularizada, dada por

$${}_1F_1(a; b; z)/\Gamma(b),$$

e $|N_{pq}^s|^2$ é o fator de normalização para a superposição de estados coerentes de fótons adicionados de dois modos, dado por (4.60).

Da mesma forma como ocorre com a superposição de dois estados coerentes bimodais, os valores médios de \hat{S}_1 e \hat{S}_3 para o estado (4.59) são nulos. Significando assim que as potências médias nas polarizações vertical e horizontal são iguais para esses estados analisados.

Utilizamos as equações (3.37) e (3.38) para o cálculo da forma geral da função Q para a superposição de estados coerentes adicionados de fótons bimodais, dada por (4.59). O resultado obtido foi o seguinte:

$$Q_{pq}^s = \frac{|N_{pq}^s|^2 |N_{pq}|^2}{4\pi |\alpha|^{2p} |\beta|^{2q}} \left[\frac{|B|^2}{C^{p+q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! \delta^n}{[(n-p-q)!]^2} + \frac{|B'|^2}{(C')^{p+q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! (\delta')^n}{[(n-p-q)!]^2} + \frac{B^p [(B')^*]^q}{C_x^{p+q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! \delta_x^n}{[(n-q-p)!]^2} + \frac{(B^*)^p (B')^q}{(C_x^{p+q})^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! (\delta_x^n)^*}{[(n-q-p)!]^2} \right], \quad (4.65)$$

onde:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\alpha}{\beta} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi), \\ A &= \beta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ C &= (B+1)(B^*+1), \\ \delta &= |A|^2 C \\ B' &= \frac{\beta}{\alpha} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\phi), \\ A' &= \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ C' &= (B'+1)[(B')^*+1], \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
\delta' &= |A'|^2 C', \\
C_x &= (B + 1)(B^* + 1), \\
\delta_x &= |A|^2 C_x.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

A partir da equação (4.65), podemos calcular a função D , dada por (3.39), e o grau de polarização quântico P , dado por (3.40), de uma superposição de estados coerentes de fótons adicionados, $|\psi^S\rangle$, descrito por (4.59). Os resultados são mostrados nas figuras 4.11 e 4.12.

Na figura 4.11, comparamos o comportamento do grau de polarização quântico para dois casos particulares: uma superposição de dois estados coerentes bimodais e uma superposição de dois estados coerentes bimodais com um fóton adicionado. Os estados analisados estão descritos logo abaixo:

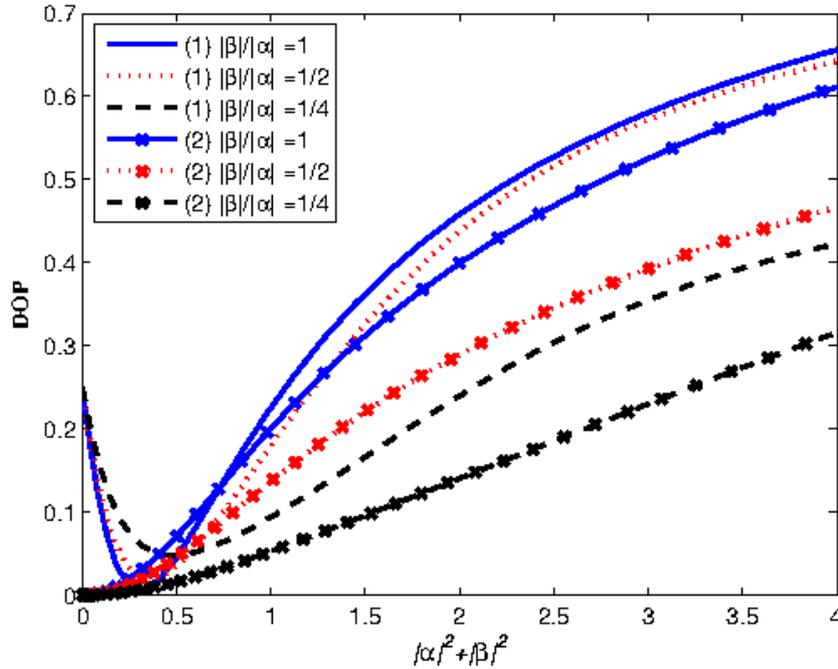
$$|\psi_{00}\rangle = N_{00}^s (|\alpha^{+0}, -\beta^{+0}\rangle + |-\beta^{+0}, \alpha^{+0}\rangle), \tag{4.68}$$

$$|\psi_{01}\rangle = N_{01}^s (|\alpha^{+0}, -\beta^{+1}\rangle + |-\beta^{+1}, \alpha^{+0}\rangle). \tag{4.69}$$

Analisamos o grau de polarização quântico dos dois estados como uma função de $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ e variando a separação entre as amplitudes dos estados coerentes.

Percebemos, ao analisar a figura 4.11, que quando $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ aumenta, o grau de polarização também aumenta. Característica presente em ambos os estados acima considerados. A única exceção para esse comportamento é na região de transição entre um estado Fock puro ($\alpha = \beta = 0$) e um estado coerente de fóton adicionado, quando temos uma superposição com um fóton adicionado (curvas (1) na figura). A região de transição termina em torno do ponto $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0.3$. Desse ponto em diante, o grau de polarização aumenta com $|\alpha|^2 + |\beta|^2$. Se comparamos o conjunto de curvas sinalizadas por (2), notamos que quanto maior for a distância entre os estados coerentes (1/4, 1/2 e 1), maior será o grau de polarização. Esse resultado tinha sido mostrado em [Silva e Ramos 2008]. Notamos que, após a região de transição, o mesmo acontece para o conjunto de curvas sinalizadas por (2) - estados coerentes com um fóton adicionado. Algo ainda de

Figura 4.11: Variação do grau de polarização com $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ é analisada em dois casos: (1) uma superposição de dois estados coerentes bimodais com um fóton adicionado e (2) uma superposição de dois estados coerentes bimodais.



Fonte: próprio autor.

notável importância é o fato de que o acréscimo de um único fóton no estado coerente faz com que o grau de polarização quântico aumente consideravelmente, como pode ser visto ao compararmos pares de curva da mesma cor. Por exemplo, se tomarmos as duas curvas vermelhas, para $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 3$, a superposição sem adição de fótons (curva vermelha (2)) apresenta um grau de polarização um pouco menor que 0,4, enquanto a superposição com um fóton adicionado (curva vermelha (1)) apresenta um grau de polarização de quase 0,6.

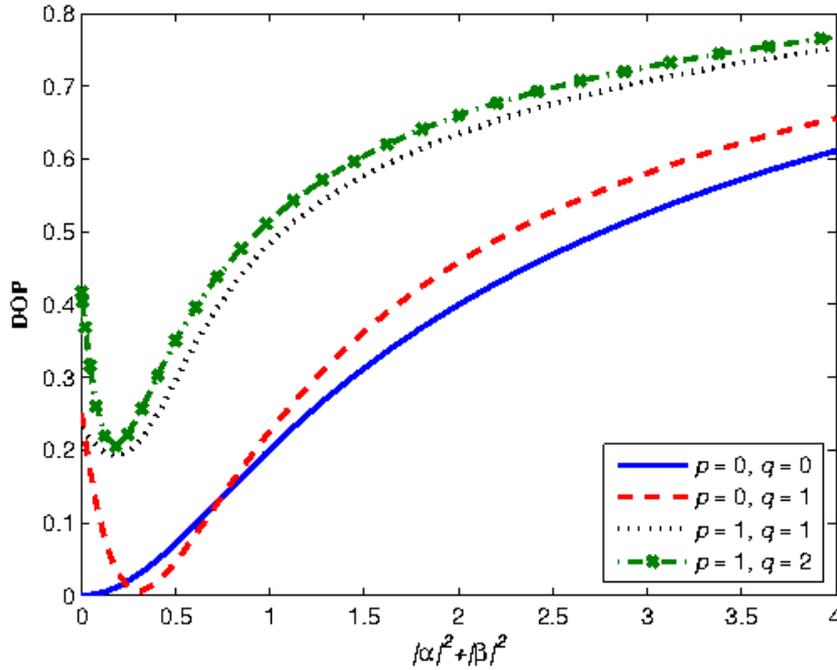
Na figura 4.12, comparamos o grau de polarização quântico entre a superposição de dois estados coerentes de dois modos, dado por (4.68), e três casos particulares da superposição de dois estados coerentes de fótons adicionados bimodais, um dos quais é dado pela equação (4.69) e os demais são dados por:

$$|\psi_{11}\rangle = N_{11}^s (|\alpha^{+1}, -\beta^{+1}\rangle + |-\beta^{+1}, \alpha^{+1}\rangle), \quad (4.70)$$

$$|\psi_{12}\rangle = N_{12}^s (|\alpha^{+1}, -\beta^{+2}\rangle + |-\beta^{+2}, \alpha^{+1}\rangle). \quad (4.71)$$

Analisando a figura 4.12, percebemos que o grau de polarização aumenta com o au-

Figura 4.12: Grau de polarização quântico em função de $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ para superposições com diferentes números de fótons adicionados.



Fonte: próprio autor.

mento de $|\alpha|^2 + |\beta|^2$, como é esperado. Vale lembrar que tal comportamento é visto para estados coerentes de fótons adicionados após a região de transição. O grau de polarização também aumenta com a adição de fótons. O resultado encontrado para o caso da superposição de estados coerentes bimodais, ou seja, sem fótons adicionados, concorda com o resultado encontrado na literatura [Silva e Ramos 2008]. Quando $\alpha = \beta = 0$ para os estados (4.69)-(4.71), o grau de polarização não começa em zero, como ocorre para o estado (4.68). Isso acontece por conta dos fótons adicionados. O grau de polarização quântico para superposição de dois estados coerentes de fótons adicionados onde $\alpha = \beta = 0$ são consistentes com os resultados encontrados em [Luis 2002].

4.4 Emaranhamento de Superposição de Dois Estados Coerentes de Fótons Adicionados

Utilizando a equação (3.51) para o estado

$$|\psi^S\rangle = N_{pq}^s (|\alpha^{+p}, \beta^{+q}\rangle + |\beta^{+q}, \alpha^{+p}\rangle), \quad (4.72)$$

onde a constante de normalização é dada por (4.60), encontramos a seguinte expressão para a concorrência [Kuang e Zhou 2003]:

$$C = \frac{1 - |\langle \alpha^{+p} | \beta^{+q} \rangle|^2}{1 + \text{Re}\{|\langle \alpha^{+p} | \beta^{+q} \rangle|^2\}}. \quad (4.73)$$

Para os casos particulares listados em (4.68)-(4.71), usando (4.73), obtemos:

$$C_{00} = \frac{1 - e^{-(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}{1 + e^{-(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}, \quad (4.74)$$

$$C_{01} = \frac{|\beta|^2 + 1 - |\alpha|^2 e^{-(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}{|\beta|^2 + 1 + |\alpha|^2 e^{-(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}, \quad (4.75)$$

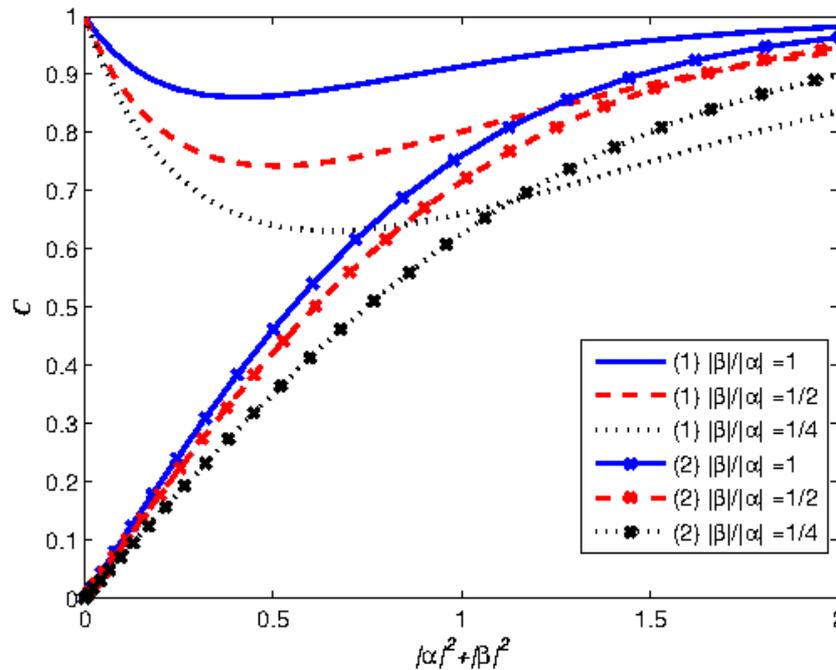
$$C_{11} = \frac{\frac{(1+|\alpha|^2)}{(1+|\beta|^2)^{-1}} - (1 - \alpha^* \beta)(1 - \alpha \beta^*) e^{-(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}{\frac{(1+|\alpha|^2)}{(1+|\beta|^2)^{-1}} + (1 - \alpha^* \beta)(1 - \alpha \beta^*) e^{-(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}, \quad (4.76)$$

$$C_{12} = \frac{\frac{(1+|\alpha|^2)}{(|\beta|^4 + 2|\beta|^2 + 2)^{-1}} - |\beta|^2 |\alpha|^2 (\alpha^* \beta - 2)(\alpha \beta^* - 2) e^{(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}{\frac{(1+|\alpha|^2)}{(|\beta|^4 + 2|\beta|^2 + 2)^{-1}} + |\beta|^2 |\alpha|^2 (\alpha^* \beta - 2)(\alpha \beta^* - 2) e^{(\alpha^* \beta + \alpha \beta^* + |\alpha|^2 + |\beta|^2)}}}. \quad (4.77)$$

A figura 4.13 mostra a concorrência para uma superposição de dois estados coerentes bimodais, (4.68), e uma superposição de dois estados coerentes bimodais com um fóton adicionado, (4.69). Em ambos os casos, quanto maior for a distância entre os estados coerentes (1/4, 1/2 e 1), maior será o grau de emaranhamento. A adição de um único fóton aumenta consideravelmente o grau de emaranhamento, como podemos perceber ao comparar pares de curvas de mesma cor.

Para avaliar melhor o impacto da adição de fótons, analisamos na figura 4.14 a concorrência em função de $|\alpha|^2 + |\beta|^2$, para os quatro estados em (4.69)-(4.71). Para traçar esse gráfico, utilizamos as expressões (4.74)-(4.77). Os estados $|\psi_{00}\rangle$ e $|\psi_{11}\rangle$, que apresentam o mesmo número de fótons adicionados, tem uma concorrência inicial igual a zero e aumenta com $|\alpha|^2 + |\beta|^2$. Isso acontece porque, inicialmente, quando $\alpha = \beta = 0$, os estados se reduzem, respectivamente, a $(|0, 0\rangle + |0, 0\rangle)$ e $(|1, 1\rangle + |1, 1\rangle)$, que são estados não emaranhados. Considerando agora os estados onde os números de fótons adicionados são diferentes, ou seja, $|\psi_{10}\rangle$ e $|\psi_{12}\rangle$, o emaranhamento começa com o valor máximo,

Figura 4.13: Variação da concorrência com $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ é analisada em dois casos: (1) uma superposição de dois estados coerentes bimodais com um fóton adicionado e (2) uma superposição de dois estados coerentes bimodais.

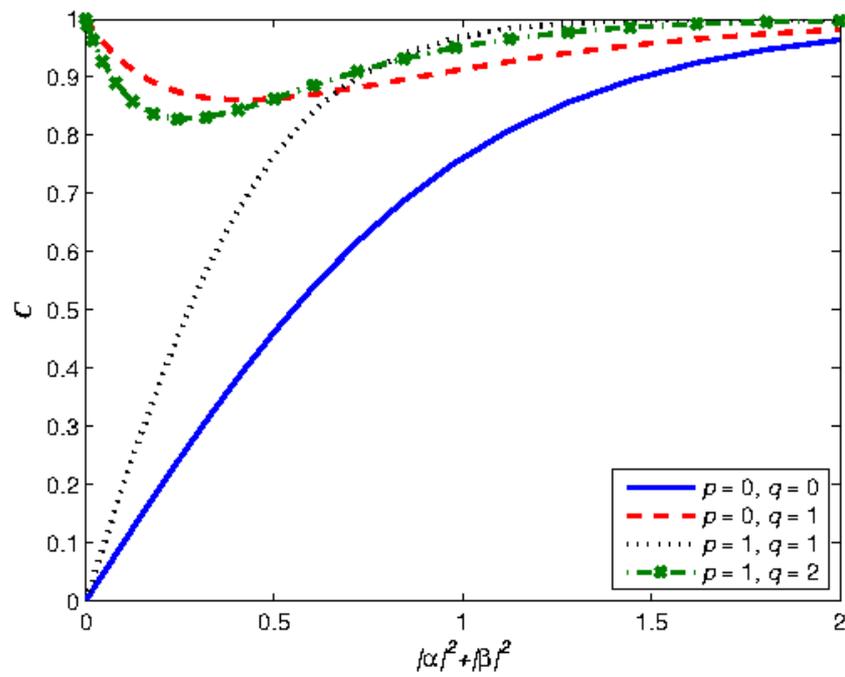


Fonte: próprio autor.

depois decresce e em seguida, aumenta novamente. Neste caso, quando $\alpha = \beta = 0$, os estados se reduzem a $(|0, 1\rangle + |1, 0\rangle)$ e $(|1, 2\rangle + |2, 1\rangle)$, respectivamente, os quais são estados emaranhados.

Neste capítulo fizemos uma análise detalhada sobre a função de Wigner para a superposição de dois estados coerentes com um e dois fótons adicionados. Estudamos a polarização quântica dos estados coerentes de fótons adicionados bimodais e analisamos o emaranhamento quântico e a polarização quântica da superposição desses estados.

Figura 4.14: Quantidade de emaranhamento, dado pela concorrência C , em função de $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ para superposições com diferentes números de fótons adicionados.



Fonte: próprio autor.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho encontramos uma equação geral para a função de Wigner de superposições de dois estados coerentes com um e dois fótons adicionados. Comparamos a função de Wigner para as superposições de estados coerentes e de estados coerentes com um e dois fótons adicionados, onde constatamos que o estado com maior número de fótons adicionados apresenta a maior quantidade de picos, devido ao aumento da interferência quântica.

Analisamos a função de Wigner para a superposição de dois estados coerentes com um fóton adicionado variando o valor de ϕ e percebemos que quando $\phi = 0$ a função de Wigner é oposta ao caso em que $\phi = \pi$, como era esperado. Estudamos ainda a função de Wigner para diferentes valores da amplitude ($\alpha = 2, 1, 0$), constatando que quanto menor a amplitude, menor o número de franjas. Percebemos que quando $\alpha = 0$, as funções de Wigner para superposições de dois estados coerentes com um e dois fótons adicionados tornam-se as funções de Wigner, encontradas na literatura, para os estados número de um e dois fótons, respectivamente.

Em seguida encontramos uma equação geral para o cálculo dos valores médios dos parâmetros de Stokes para estados coerentes de fótons adicionados. Aplicamos a equação encontrada para casos particulares e calculamos a variância para o estado $|\psi_{01}\rangle$. Obtemos uma fórmula detalhada para os valores médios dos parâmetros de Stokes para superposição de dois estados coerentes de fótons adicionados. Usando uma forma geral para a função Q para esse tipo de superposição, conseguimos estudar o comportamento do grau de polarização quântico. O resultado mostrou que o aumento de $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ aumenta o grau de polarização quântico e que a adição de um único fóton no estado coerente aumenta significativamente o grau de polarização. Mostramos ainda, que quando $\alpha = \beta = 0$, o grau de polarização não é nulo, devido a contribuição dos fótons adicionados.

Por fim, utilizamos a concorrência para medirmos o grau de emaranhamento da superposição de dois estados coerentes de fótons adicionados. Os resultados mostraram que quando o número de fótons adicionados no estado são iguais, a concorrência começa em zero e aumenta com $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ e que para estados onde os números de fótons adicionados são diferentes, a quantidade de emaranhamento começa com seu valor máximo, depois decresce um pouco e começa a aumentar novamente.

REFERÊNCIAS

- [Agarwal e Tara 1991]. G. S. AGARWAL E K. TARA. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state. *Phys. Rev. A*, **43**, 492–497 (1991)
- [Bell 1964]. J. S. BELL. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, **1**, 195 (1964)
- [Benett *et al.* 1993]. C. H. BENETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES E W. K. WOOTTERS. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895–1899 (1993)
- [Bennett e Wiesner 1992]. C. H. BENNETT E S. J. WIESNER. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2881–2884 (1992)
- [Bennett *et al.* 1996]. C. H. BENNETT, D. P. DIVINCENZO, J. A. SMOLIN E W. K. WOOTTERS. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, **54**, 3824–3851 (1996)
- [Bouwmeester *et al.* 1997]. D. BOUWMEESTER, J. PAN, K. MATTLE, M. EIBL, H. WEINFURTER E A. ZEILINGER. Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390**, 575–579 (1997)
- [Bouwmeester *et al.* 2000]. D. BOUWMEESTER, A. K. EKERT E A. ZEILINGER. *The Physics of Quantum Information*. Springer (2000)
- [Brown 1974]. R. H. BROWN. *The Intensity Interferometer*. Taylor and Francis (1974)
- [Bulnes 2005]. J. J. D. BULNES. *Emaranhamento e Separabilidade de Estados em Computação Quântica por Ressonância Magnética Linear*. Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ (2005)

- [Cerf e Grangier 2007]. N. J. CERF E P. GRANGIER. From quantum cloning to quantum key distribution with continuous variables: a review. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**, 324 (2007)
- [Cochrane *et al.* 1999]. P. T. COCHRANE, G. J. MILBURN E W. J. MUNRO. Macroscopically distinct quantum-superposition states as a bosonic code for amplitude damping. *Phys. Rev. A*, **59**, 2631–2634 (1999)
- [Dakna *et al.* 1996]. M. DAKNA, T. ANHUT, T. OPATRYNY, L. KNOLL E D. G. WELSCH. Generating Schrödinger-cat-like states by means of conditional measurements on a beam splitter. *pra*, **55**, 54 (1996)
- [Dakna *et al.* 1998]. M. DAKNA, L. KNÖLL E D. G. WELSCH. Photon added states preparation via conditional measurement on a beam splitter. *Opt. Commun.*, **145**, 309–321 (1998)
- [Dodonov e Man’ko 2003]. V. V. DODONOV E V. I. MAN’KO. *Theory of Nonclassical States of Light*. CRC Press (2003)
- [Dodonov e Marchiolli 1998]. V. V. DODONOV E M. A. MARCHIOLLI. Dynamical squeezing of photon-added coherent states. *Phys. Rev. A*, **58**, 4087–4094 (1998)
- [Dodonov *et al.* 1974]. V. V. DODONOV, I. A. MALKIN E V. I. MAN’KO. Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. *Physica*, **72**, 597 (1974)
- [Einstein *et al.* 1935]. A. EINSTEIN, B. PODOLSKY E N. ROSEN. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **47**, 777–780 (1935)
- [Eisert 2001]. J. EISERT. *Entanglement in Quantum Information Theory*. Tese de Doutorado, University of Potsdam, Potsdam, Alemanha (2001)
- [Ekert e Jozsa 1996]. A. EKERT E R. JOZSA. Quantum computation and Shor’s factoring algorithm. *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 733–753 (1996)
- [Feynman 1982]. R. P. FEYNMAN. Simulating physics with computers. *Int. J. of Theor. Phys.*, **21**, 467 (1982)

- [Furusawa *et al.* 1998]. A. FURUSAWA, J. L. SORENSEN, S. L. BRAUNSTEIN, C. A. FUCHS, H. J. KIMBLE E E. S. POLZIK. Unconditional quantum teleportation. *Science*, **282**, 706–709 (1998)
- [Gea-Banacloche 2002]. J. GEA-BANACLOCHE. Some implications of the quantum nature of laser fields for quantum computation. *Phys. Rev. A*, **65**, 022308 (2002)
- [Gisin *et al.* 2002]. N. GISIN, G. RIBORDY, W. TITTEL E H. ZBINDEN. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 145 (2002)
- [Glancy *et al.* 2004]. S. C. GLANCY, H. M. VASCONCELOS E T. C. RALPH. Transmission of optical coherent-state qubits. *Phys. Rev. A*, **70**, 22317 (2004)
- [Gottesman 1997]. D. GOTTESMAN. *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*. Tese de Doutorado, California Institute of Technology, Pasadena, EUA (1997)
- [Guo e Zheng 1996]. GUANG-CAN GUO E SHI-BIAO ZHENG. Generation of Schrödinger cat states via the Jaynes-Cummings model with large detuning. *pra*, **223**, 332–336 (1996)
- [Hecht 1987]. E. HECHT. *Optics*. Addison-Wesley (1987)
- [Holland e Burnett 1993]. M. J. HOLLAND E K. BURNETT. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1355 (1993)
- [Hong e Guang-Can 1999]. L. HONG E G. GUANG-CAN. Nonclassical properties of photon-added pair coherent states. *Acta Phys. Sin.*, **8**, 577 (1999)
- [Jeong *et al.* 2001]. H. JEONG, M. S. KIM E J. LEE. Quantum information processing for a coherent superposition state via a mixed entangled coherent channel. *Phys. Rev. A*, **64**, 052308 (2001)
- [Kalamidas *et al.* 2008]. D. KALAMIDAS, C. C. GERRY E A. BENMOUSSA. Proposal for generation a two-photon added coherent states via down-conversion with a single crystal. *Phys. Lett. A*, **372**, 1937–1940 (2008)

- [Klimov *et al.* 2005]. A. B. KLIMOV, L. L. SÁNCHEZ-SOTO, E. C. YUSTAS, J. SÖDERHOLM E G. BJÖRK. Distance-based degrees of polarization for a quantum field. *Phys. Rev. A*, **72**, 033813 (2005)
- [Knill *et al.* 2001]. E. KNILL, R. LAFLAMME E G. J. MILBURN. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, **409**, 46–52 (2001)
- [Kuang e Zhou 2003]. L. M. KUANG E L. ZHOU. Generation of atom-photon entangled states in atomic Bose-Einstein condensate via electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. A*, **68**, 043606 (2003)
- [Kye *et al.* 2005]. W. KYE, C. KIM, M. S. KIM E Y. PARK. Quantum key distribution with blind polarization bases. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 040501 (2005)
- [Leibfried *et al.* 2005]. D. LEIBFRIED, E. KNILL, S. SEIDELIN, J. BRITTON, R. B. BLAKESTAD, J. CHIAVERINI, D. B. HUME, W. M. ITANO, J. D. JOST, C. LANGER, R. OZERI, R. REICHL E D. J. WINELAND. Creation of a six-atom 'Schrödinger cat' state. *Nature*, **438**, 639–642 (2005)
- [Li *et al.* 2002]. G. LI, S. WU E G. HUANG. Generation of two-mode photon-added SU(2) coherent states and its quantum nonlocality property. *Phys. Lett. A*, **303**, 11–19 (2002)
- [Luis 2002]. A. LUIS. Degree of polarization in quantum optics. *Phys. Rev. A*, **66**, 013806 (2002)
- [Luis 2003]. A. LUIS. Polarization correlations in quantum optics. *Opt. Commun.*, **216**, 165–172 (2003)
- [Lvovsky *et al.* 2001]. A. I. LVOVSKY, H. HANSEN, T. AICHELE, O. BENSON, J. MLYNEK E S. SCHILLER. Quantum state reconstruction of the single-photon Fock state. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 050402 (2001)
- [Mandel e Wolf 1995]. L. MANDEL E E. WOLF. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press (1995)

- [Milonni 1994]. P. W. MILONNI. *The Quantum Vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press Limited (1994)
- [Missori 2003]. R. J. MISSORI. *Aspectos Qualitativos de Emaranhamento no Modelo de Jaynes-Cummings com um Campo Externo Quântico*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP (2003)
- [Missori 2009]. R. J. MISSORI. *Análise e Geração de Emaranhamento em Sistemas de Variáveis Discretas e Contínuas via Átomos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP (2009)
- [Moura 2010]. A. G. C. MOURA. *Propriedades Espaciais e de Frequência e um Estudo da Pureza e Fidelidade do Estado Quântico Gerado na Conversão Paramétrica Descendente em Criatais Uniaxiais*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG (2010)
- [Neergaard-Nielsen *et al.* 2006]. J. S. NEERGAARD-NIELSEN, B. MELHOLT-NIELSEN, C. HETTICH, K. MOLMER E E. S. POLZIK. Generation of a superposition of odd photon photon number states for quantum information networks. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 083604 (2006)
- [Nielsen e Chuang 2000]. M. A. NIELSEN E I. L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000)
- [Nogues *et al.* 1999]. G. NOGUES, A. RAUSCHENBEUTEL, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J. M. RAIMOND E S. HAROCHE. Seeing a single photon without destroying it. *Nature*, **400**, 239 (1999)
- [Ourjoumtsev *et al.* 2007]. A. OURJOUNTSEV, H. JEONG, R. TUALLE-BROURI E P. GRANGIER. Generation of optical 'Schrödinger cats' from photon number states. *Nature*, **448**, 784–786 (2007)
- [Pellizzari 1997]. T. PELLIZZARI. Quantum networking with optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 5242–5245 (1997)

- [Peres 1995]. A. PERES. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Springer (1995)
- [Pfeifer 2003]. W. PFEIFER. *The Lie Algebras $SU(n)$: An Introduction*. Birkhäuser Basel (2003)
- [Pinheiro 2011]. P. V. P. PINHEIRO. *Contribuições às Comunicações Quânticas: Distribuição Quântica de Chaves de Sentido Único no Domínio da Frequência e Estados Coerentes Adicionados*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE (2011)
- [Ralph *et al.* 2003]. T. C. RALPH, A. GILCHRIST, G. J. MILBURN, W. J. MUNRO E S. GLANCY. Quantum computation with optical coherent states. *Phys. Rev. A*, **68**, 042319 (2003)
- [Shor 1994]. P. SHOR. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring. *35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, **IEEE Computer Society Press** (1994)
- [Silva 2008]. J. B. R. SILVA. *Sistemas Ópticos para Comunicação e Computação Quânticas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE (2008)
- [Silva e Ramos 2008]. J. B. R. SILVA E R. V. RAMOS. On the quantum polarization and entanglement of superpositions of two two-mode coherent states. *Opt. Commun.*, **281**, 6034–6039 (2008)
- [Sivakumar 1999]. S. SIVAKUMAR. Photon-added coherent states as nonlinear coherent states. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 3441 (1999)
- [Souza 2007]. L. A. SOUZA. *Descoerência de Superposições Quânticas Complexas*. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, DF (2007)
- [Tittel *et al.* 2000]. W. TITTEL, J. BRENDL, H. ZBINDEN E N. GISIN. Quantum Cryptography Using Entangled Photons in Energy- Time Bell States. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 4737 (2000)

- [Ulf 2005]. L. ULF. *Measuring the Quantum States of Light*. Cambridge University Press (2005)
- [Varcoe *et al.* 2000]. B. T. H. VARCOE, S. BRATTKE, M. WEINDINGER E H. WALTHER. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature*, **403**, 743 (2000)
- [Vidiella-Barranco e Borelli 2006]. A. VIDIELLA-BARRANCO E L. F. M. BORELLI. Continuous variable quantum key distribution using polarized coherent states. *Int. J. Modern Phys. B*, **20**, 1287–1296 (2006)
- [Vilar 2007]. A. S. VILAR. *Emaranhamento Multicolor entre Feixes Intensos de Luz*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP (2007)
- [Wang 2001]. X. WANG. Quantum teleportation of entangled coherent states. *Phys. Rev. A*, **64**, 022302 (2001)
- [Wenger *et al.* 2004]. J. WENGER, R. TUALLE-BROURI E P. GRANGIER. Non-Gaussian statistics from individual pulses of squeezed light. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 153601 (2004)
- [Wigner 1932]. E. WIGNER. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, **40**, 749–759 (1932)
- [Wootters 1998]. W. K. WOOTTERS. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245–2248 (1998)
- [Yin *et al.* 2007]. Z. YIN, Z. HAN, F. SUN E G. GUO. Decoy state quantum key distribution with modified coherent state. *Phys. Rev. A*, **76**, 014304 (2007)
- [Zavatta *et al.* 2004]. A. ZAVATTA, S. VICIANI E M. BELLINI. Quantum-to-classical transition with single-photon-added coherent states of light. *Science*, **306**, 660–662 (2004)
- [Zavatta *et al.* 2005]. A. ZAVATTA, S. VICIANI E M. BELLINI. Single-photons excitation of a coherent state: catching the elementary step of stimulated light emission. *Phys. Rev. A*, **72**, 023820 (2005)

- [Zbinden *et al.* 2000]. H. ZBINDEN, N. GISIN, B. HUTTNER, A. MULLER E W. TITTEL. Practical Aspects of Quantum Cryptographic Key Distribution. *J. Cryptology*, **13**, 207 (2000)
- [Zou *et al.* 2004]. X. ZOU, K. PAHLKE E W. MATHIS. Phase measurement and generation of arbitrary superposition of Fock states. *Phys. Lett. A*, **323**, 329–338 (2004)
- [Zurek 1991]. W. H. ZUREK. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Phys. Today*, 36 (1991)