



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

VÍCTOR CAVALCANTE BEZERRA DE CARVALHO

RESISTÊNCIA DE REDES DE BARABÁSI-ALBERT SOB ATAQUES INTENCIONAIS

FORTALEZA

2024

VÍCTOR CAVALCANTE BEZERRA DE CARVALHO

RESISTÊNCIA DE REDES DE BARABÁSI-ALBERT SOB ATAQUES INTENCIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C329r Carvalho, Víctor Cavalcante Bezerra.
Resistência de redes de Barabási-Albert sob ataques intencionais / Víctor Cavalcante Bezerra
Carvalho. – 2024.
35 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona.
1. Percolação. 2. Redes complexas. 3. Modelo de Barabási-Albert. I. Título.

CDD 530

VÍCTOR CAVALCANTE BEZERRA DE CARVALHO

RESISTÊNCIA DE REDES DE BARABÁSI-ALBERT SOB ATAQUES INTENCIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 26/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Humberto de Andrade
Carmona (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. César Ivan Nunes Soares Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

“Acredito que o próximo século será o século da complexidade” (Hawking, 2000)

RESUMO

Ao longo deste trabalho, foram utilizadas técnicas físicas e matemáticas necessárias para se estudar um algoritmo capaz de identificar e classificar os elementos mais importantes para a conectividade de redes complexas, em particular, as redes de Barabási-Albert, que apresentam comportamentos como a existência de *hubs*, auto-organização, distribuição de graus em leis de potência, etc. Ao final, é comprovada a eficiência de tal método por meio de uma comparação direta na forma como uma rede de BA se comporta ao sofrer ataques separados de diferentes técnicas. Isso foi atingido explorando conceitos de percolação ideal aplicados a redes complexas, nos levando à métrica da influência coletiva. Tal modo de classificação leva em conta muito mais a qualidade das conexões do que a quantidade de conexões que esse nó faz. Essa abordagem nos permite compreender elementos que antes seriam ignorados em uma análise superficial para tentar identificar os componentes mais influentes de um sistema. Além de sua funcionalidade na neutralização ou proteção de redes complexas, a influência coletiva também pode ser utilizada para o estudo do sistema em si, ao se analisar o conjunto de nós mais importantes de acordo com essa ferramenta.

Palavras-chave: percolação; redes complexas; modelo de Barabási-Albert.

ABSTRACT

Throughout this work, physical and mathematical techniques were employed to study an algorithm capable of identifying and classifying the most important elements for the connectivity of complex networks, particularly Barabási-Albert networks, which exhibit behaviors such as the existence of hubs, self-organization, degree distributions following power laws, and more. In the end, the efficiency of this method is demonstrated through a direct comparison of how a BA network behaves when subjected to separate attacks using different techniques. This was achieved by exploring concepts of ideal percolation applied to complex networks, leading us to the metric of collective influence. This classification method takes into account the quality of connections rather than just the number of connections a node has. Such an approach allows us to identify elements that would otherwise be overlooked in a superficial analysis when attempting to determine the most influential components of a system. Beyond its functionality in neutralizing or protecting complex networks, collective influence can also be used to study the system itself by analyzing the set of most important nodes according to this tool.

Keywords: percolation; complex networks; Barabási-Albert model.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – A esquerda: representação de uma pedra perfeitamente maciça, que não permite percolação. A direita: uma pedra com uma cavidade que a percorre de uma ponta a outra, permitindo percolação (Elaborado pelo autor). 11
- Figura 2 – A esquerda: representação de uma pedra pouco porosa com $p < 0.2$. A direita: uma pedra bastante porosa com $p > 0.6$ (Elaborado pelo autor). 12
- Figura 3 – Gráfico ilustrando o comportamento da probabilidade de percolação em função de p quando o valor de L para uma rede quadrada bidimensional vai para infinito (Elaborado pelo autor). 13
- Figura 4 – Mapa conceitual da cidade de Königsberg em 1736 (Silva, 2013) [1] 17
- Figura 5 – Grafo da cidade de Königsberg em 1736 (Rossini, 2023) [11] 18
- Figura 6 – Cada curva representa a fração cumulativa de sistemas percolantes para cada valor de p em uma rede quadrada de sítios bidimensional. Os valores de L utilizados foram: 32, 64, 128, 256. 25
- Figura 7 – Os pontos azuis representam os valores médios das listas que contem os p s percolantes, como foi feito um mínimo de 100 mil repetições para cada ponto, suas barras de erro são desprezíveis e foram desconsideradas. A linha pontilhada representa a curva obtida com esses pontos através de uma regressão não linear à função $f(x) = a + bL^{-c}$. Os valores de L utilizados foram: 32, 64, 96, 128, 192 e 256 (Elaborado pelo autor). 26
- Figura 8 – Função de densidade de probabilidade de um nó aleatório da rede possuir um valor de k dentro do intervalo referente em escala log log. Os pontos são as médias das 20 variações da rede original de $N = 2 \times 10^7$ e $m = 2$, e os erros são os desvios padrões divididos pela raiz do número de amostras (20). As finas linhas cinzas são regressões à lei de potência usando cada um dos conjuntos de dados obtidos através da análise estatística, o valor médio dos seus coeficientes angulares é de 2.999 e o desvio padrão dividido pela raiz quadrada do número de amostras é de 0.004 (Elaborado pelo autor). 29

Figura 9 – Fração do maior *cluster* em relação ao tamanho da rede original em função da quantidade de nós removidos através dos métodos: *collective influence* com $\ell = 2$, *high-degree* e *high-degree adaptative*. Cada ponto é o valor médio de um total de cinco tentativas para diferentes redes de Barabási-Albert com $N = 2 \times 10^5$ e $m = 2$, as barras de erro são os desvios padrão referêntes a cada média divididos pela raiz do número de amostras (5) (Elaborado pelo autor). 31

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	10
2.1	Teoria da Percolação	10
2.1.1	<i>O papel do meio e sua dependência com o parâmetro de controle</i>	10
2.1.2	<i>O papel de p na percolação e a existência da probabilidade crítica</i>	12
2.1.3	<i>Clusters (aglomerados) e expoentes críticos</i>	14
2.1.4	<i>Percolação de ligação</i>	15
2.2	Grafos	17
2.2.1	<i>Principais métricas</i>	18
2.2.1.1	<i>Mais alto grau e mais alto grau adaptativo</i>	19
2.2.1.2	<i>Influência coletiva</i>	19
2.3	Redes de Barabasi-Albert	20
2.3.1	<i>Crescimento e anexação preferencial</i>	20
2.3.2	<i>Distribuição dos graus em uma rede de Barabási-Albert</i>	21
3	METODOLOGIA	24
3.1	Determinação de transição de fase e cálculo do ponto crítico	24
3.2	Gráfico apontando a mudança de fase	25
3.3	Melhores estimativas para as contantes da percolação de sítio em duas dimensões	26
3.4	Criação de uma rede de Barabási-Albert	27
3.5	Ataque à rede de Barabási-Albert	27
4	RESULTADOS	29
4.1	Gráfico gerado para a lei de potência de uma rede de Barabási-Albert	29
4.2	Gráfico da eficiência dos métodos de ataque à redes de Barabási-Albert	31
5	CONCLUSÕES	33
	REFERÊNCIAS	34

1 INTRODUÇÃO

Redes sociais, redes metabólicas, redes de distribuição de energia e redes de comércio são apenas alguns dentre os muitos exemplos do que chamamos de redes complexas. Estas são malhas formadas por diversos elementos interagentes que, apesar das aparentes distinções, compartilham várias características interessantes [15, 17]. Grande parte delas pode ser explorada a fim de se ter um controle maior sobre esses inúmeros sistemas.

Uma representação para esses sistemas foi desenvolvida na forma de um modelo matemático em 1999 pela dupla de cientistas: Albert-László Barabási e Réka Albert. Os dois utilizaram o enorme poder de generalização que a teoria dos grafos oferece para criar uma forma de representar alguns dos fenômenos observados nas diferentes redes que podemos encontrar no mundo real [16].

Como todo sistema real, as redes complexas também estão sujeitas a ataques e falhas. Devido à grande quantidade de sistemas que podem ser representados por esse modelo, faz-se importante entender qual é a resistência de tais redes a estas casualidades [18]. Graças a estudos anteriores, foi observado que a resistência de tais redes complexas a falhas e ataques aleatórios, ou seja, sua capacidade de manter um grande componente conectado no sistema mesmo com falhas randômicas, é bastante alta, apesar da remoção de vários de seus constituintes.

Particularmente, para sistemas similares ao modelo de Barabási-Albert, com expoente crítico $\gamma \leq 3$, a rede é bastante resistente frente a tal abordagem [6]. Com isso em mente, é mais interessante voltarmos nossa atenção apenas a ataques que sejam direcionados de alguma forma a pontos estratégicos desses sistemas.

Uma abordagem mais eficiente para esse problema é a de focalizar os ataques em nós que apresentam um papel maior na conectividade da rede [5]. Para tal, foram estudadas algumas estratégias nesse trabalho visando a um ataque às redes de Barabási-Albert. Em particular, foi utilizada uma métrica chamada influência coletiva, que apresenta resultados satisfatórios e possui um baixo custo computacional, inclusive em sistemas com número de constituintes bastante elevado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao longo das seções deste capítulo, desenvolveremos a teoria da identificação dos componentes mais importantes de uma rede complexa através da teoria da percolação ideal, assim como grande parte da base teórica necessária para a sua obtenção. Buscando sempre deduzir a maior parte das informações apresentadas, mantendo o foco do trabalho. A começar por uma formulação da teoria da percolação em redes físicas, passando pela definição de grafos e chegando à criação do modelo de redes de Barabási-Albert.

2.1 Teoria da Percolação

O estudo da percolação, inicialmente, surge como uma tentativa de responder à seguinte questão: quais são as condições necessárias para que um fluido consiga atravessar um meio poroso. Após uma breve análise, observa-se que a resposta para tal questionamento nos leva a considerar muito mais o meio em que o fluido percola do que este em si. O ponto principal é que esse sofre uma transição de fase [12], entre um modo que não permite percolação e outro que permite, através da modificação de suas características estruturais pela variação de algo que chamamos de parâmetro de controle.

Tal relação nos permite pegar emprestado diversas ferramentas físicas e matemáticas que foram desenvolvidas no ramo das transições de fase para podermos analisar com mais clareza os sistemas, aqui, abordados. Uma vez que, abstraindo um pouco, poderemos extrapolar os conceitos iniciais de fluido para qualquer tipo de evento ou grandeza que percorre um meio, e este para todo tipo de rede, física ou não, que conecte diferentes indivíduos.

2.1.1 *O papel do meio e sua dependência com o parâmetro de controle*

Primeiramente, vamos provar o protagonismo do meio na tarefa da percolação. Para isso, vamos imaginar uma seção quadrada de um corpo rígido qualquer dividida em pequenos quadrados idênticos, um do lado do outro (tal descrição serve como exemplo de um *Lattice*, onde temos uma região no espaço dividida de forma regular entre pequenas outras partes iguais): se a seção escolhida for perfeitamente maciça, é evidente que não ocorrerá nenhum tipo de permeação, independentemente do fluido escolhido; entretanto, se existir uma região oca que conecte uma ponta à outra da rede, é fácil ver que o fluido poderá atravessá-la, como mostra a Figura 1.

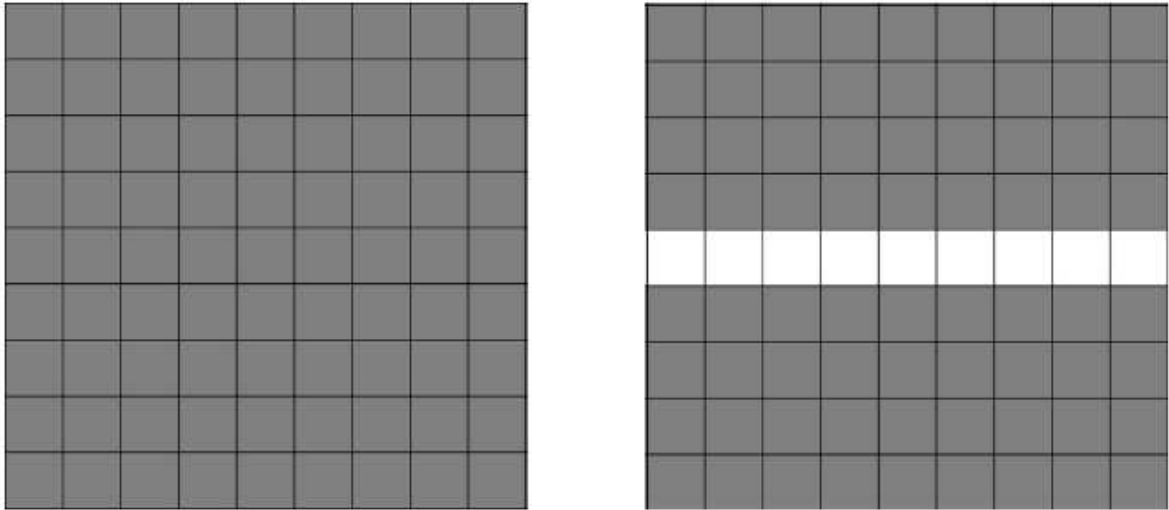


Figura 1 – A esquerda: representação de uma pedra perfeitamente maciça, que não permite percolação. A direita: uma pedra com uma cavidade que a percorre de uma ponta a outra, permitindo percolação (Elaborado pelo autor).

Apesar da clareza da ilustração acima, não será proveitoso nos limitarmos à análise de meios com tamanho grau de organização. De modo geral, a natureza tende à desordem, sendo bem mais provável encontrarmos configurações de cavidades em formatos bem mais aleatórios do que o da figura 1.

Um exemplo mais realista seria o de uma rocha porosa, que possui diversas cavidades aparentemente desordenadas em seu interior. Ao calcularmos o volume desocupado nessa pedra e dividirmos pelo volume total (definido como o volume na ausência de buracos), encontraremos a fração de espaços que se encontram vazios em relação ao total dos que constituem o objeto, valor este que chamaremos de p , nosso parâmetro de controle.

Tal definição nos permite caracterizar diferentes redes em função da sua fração de ocupação (como é comumente chamada a porcentagem de espaços que permitem a percolação, no nosso caso, os espaços vazios). Assim, podemos esperar uma relação entre o comportamento do sistema e o seu valor de p . De fato, é o que ocorre, como fica evidente na Figura 2.

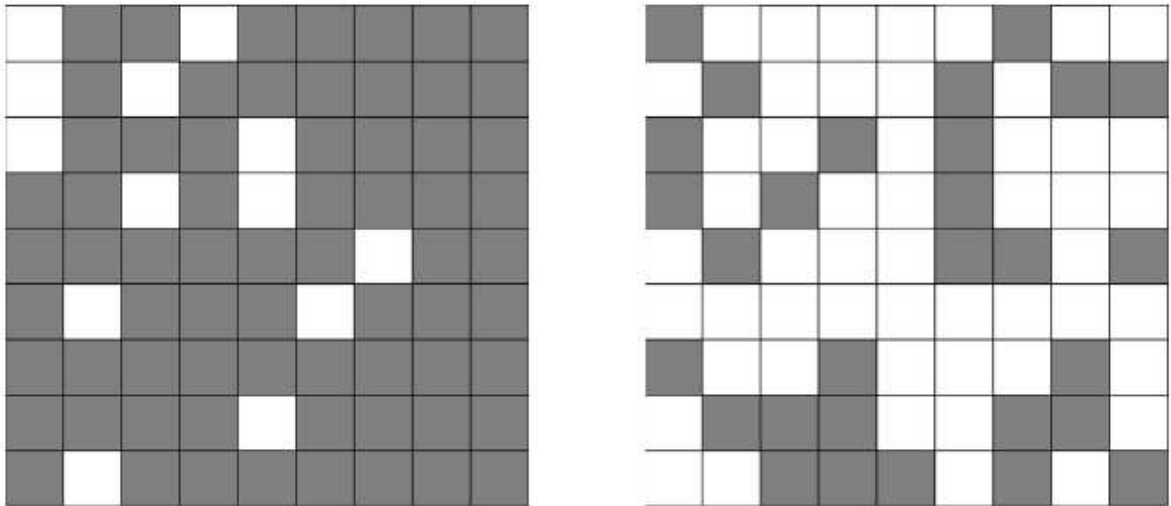


Figura 2 – A esquerda: representação de uma pedra pouco porosa com $p < 0.2$. A direita: uma pedra bastante porosa com $p > 0.6$ (Elaborado pelo autor).

2.1.2 O papel de p na percolação e a existência da probabilidade crítica

Como pudemos ver na figura anterior, a pedra mais porosa apresentou percolação entre os quatro lados da rede, enquanto a menos porosa não. Entretanto, se trocarmos um dos espaços vazios próximos às laterais por um espaço não vazio do centro, encontraremos outra possível configuração da rede para o mesmo valor de p ; contudo, se a escolha for certa, poderemos impedir a percolação. Da mesma forma, para alguns sistemas não percolantes, podemos achar várias outras configurações percolantes à distância de uma permutação de sítios.

Tal operação nos faz pensar que existe um certo nível de aleatoriedade atrelado à possibilidade de percolação, e que tal probabilidade de percolação pode ser obtida a partir de uma função $f(p, \dots)$. Tudo isso é realmente verdade para redes **finitas**, mas, à medida que aumentamos o tamanho da mesma, aumentamos também a quantidade de trocas possíveis entre dois pontos distintos, fazendo com que uma escolha de bloqueio (ou desbloqueio) como a que fizemos no exemplo anterior seja acompanhada de diversas outras possibilidades que não mudariam o caráter do sistema. Portanto, nossa função f deve possuir também a variável L , o tamanho da rede.

Dessa forma, podemos imaginar que, pelas razões já discutidas, à medida que L cresce, a probabilidade de percolação para ps pequenos deve diminuir, enquanto a probabilidade de percolação para ps grandes deve aumentar. Assim, não existindo nenhum outro fator que

modifique a taxa de variação de $f(p, L)$, quando o valor de L tender ao infinito, teremos uma divisão perfeita entre os valores de p pequenos, com $f(p, L \rightarrow \infty) = 0$, e $f(p, L \rightarrow \infty) = 1$ para p s grandes. Fazendo com que $f(p, L \rightarrow \infty)$ se torne a função degrau, como ilustra a Figura 3.

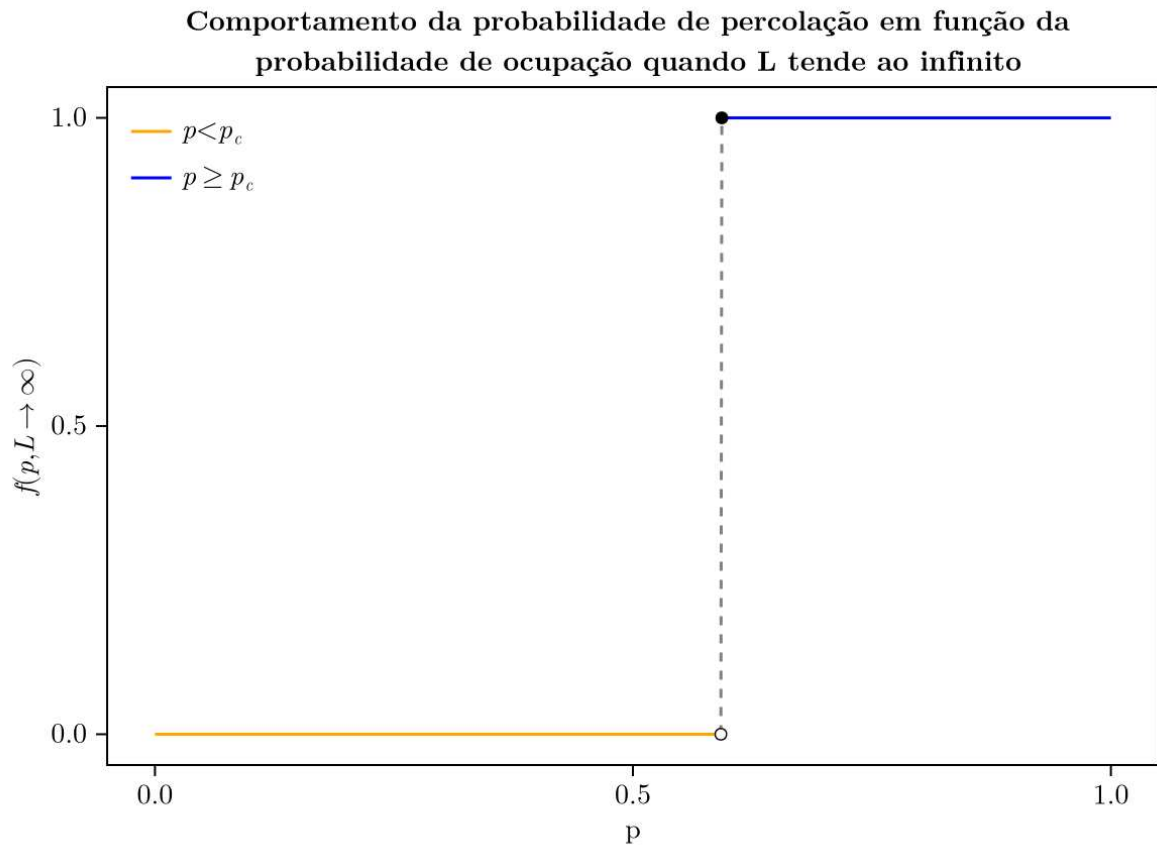


Figura 3 – Gráfico ilustrando o comportamento da probabilidade de percolação em função de p quando o valor de L para uma rede quadrada bidimensional vai para infinito (Elaborado pelo autor).

O valor de p que separa os sistemas percolantes dos não percolantes é chamado de probabilidade crítica, ou p_c . É importante notar que, apenas quando o valor de L tende ao infinito, podemos utilizar $p \geq p_c$ como condição necessária e suficiente para ocorrer uma percolação.

Tal mudança abrupta no comportamento da rede é o que foi chamado de mudança de fase, uma categoria de fenômenos em que, a partir de um certo limiar do seu parâmetro de controle, o sistema adquire um caráter totalmente diferente do seu anterior. Existem diversos exemplos de mudanças de fase na natureza, e a percolação é um dos modelos mais simples que compartilham dessa propriedade.

2.1.3 Clusters (aglomerados) e expoentes críticos

Nos últimos parágrafos, definimos o conceito de probabilidade crítica como sendo o valor do parâmetro de controle de um sistema infinito que separa duas fases de um sistema, e essas fases foram definidas através da possibilidade ou não de ocorrer percolação de um fluido. Vamos, novamente, tentar trazer o protagonismo para a rede, em vez do fluido; seria totalmente equivalente definir as fases do nosso sistema como sendo uma fase em que existe um caminho contínuo (*cluster*) que se estende indefinidamente (dentro dos limites da rede) em todas as direções do *lattice*, e uma fase em que tal aglomerado, que chamaremos de aglomerado infinito, não existe.

Com essa perspectiva de percolação, podemos estudar as propriedades da rede a partir das características de seus agregados, e encontrar resultados antes inalcançáveis [9, 13]. Um exemplo destes surge quando nos preocupamos em saber qual a probabilidade de dois sítios diferentes pertencerem a um mesmo aglomerado. Tal questionamento nos leva à definição da função de correlação $G(r)$, que nos diz qual a probabilidade de dois sítios separados por uma distância r estarem conectados através de outros sítios ocupados e vizinhos.

Para redes com $p \ll p_c$, os aglomerados são pequenos e distantes, fazendo com que o valor de $G(r)$ caia rapidamente. Assim, uma forma plausível da função de correlação seria um decaimento exponencial:

$$G(r) = e^{-\frac{r}{\xi}}. \quad (2.1)$$

Onde ξ é o chamado comprimento de correlação. Ele representa a distância padrão do sistema, em que dois pontos com $r \ll \xi$ possuem uma grande chance de estarem relacionados. Para p próximo de p_c , um aglomerado infinito começa a se formar, permitindo que pontos muito distantes possam pertencer a um mesmo *cluster*, fazendo o valor de ξ divergir da seguinte forma:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (2.2)$$

Tal equação é característica da teoria das transições de fase, onde determinadas propriedades do sistema estão relacionadas com a distância do parâmetro de controle de seu ponto crítico elevada a algum "expoente crítico" [7]. Nesse caso, ν diz o quão rápido o valor de ξ diverge nas proximidades de p_c . Entretanto, para redes finitas, o comprimento de correlação

deve ser limitado de alguma forma pelo tamanho do próprio sistema, apresentando um valor máximo para que as equações continuem fazendo sentido. De fato, quando L não tende ao infinito, podemos escrever que

$$L \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (2.3)$$

Invertendo a equação acima para p , obtemos

$$p = p_c + aL^{-\frac{1}{\nu}}. \quad (2.4)$$

Ao substituir o valor de ξ por L para obter a equação acima, assumimos que o sistema está no limite da percolação. Nos fazendo chegar à conclusão de que, para redes de tamanho finito, podemos esperar um deslocamento em relação a p_c para o ponto em que a percolação se torna mais provável.

2.1.4 Percolação de ligação

A Figura 3, apesar de ilustrar bem (de forma qualitativa) o comportamento de qualquer sistema percolante em um lattice regular, está quantitativamente mais inclinada a representar a percolação de sítios em uma rede quadrada bidimensional. Inclusive, toda a análise que fizemos desde a definição do *lattice* até as propriedades de p_c utilizou esse formalismo. Entretanto, existe uma outra categoria de percolação: a de ligação, que, a primeiro momento, não vai apresentar muitas diferenças nos resultados ou na análise, mas que será uma ferramenta muito útil para podermos trabalhar com os tópicos de redes complexas mais adiante.

A principal diferença entre esses dois tipos de percolação é a forma como definimos e modificamos o meio que está sendo estudado. Nos parágrafos anteriores, enquanto focávamos nos sítios, trabalhávamos o *lattice* como um corpo rígido maciço que, conforme o valor de p ia aumentando, buracos eram formados, permitindo a passagem de um fluido qualquer. Agora, precisamos de um outro exemplo: um pomar de maçãs em que cada árvore está fisicamente localizada nas interseções do lattice quadrado que utilizamos anteriormente.

Desse modo, precisamos definir também o "fluido" percolante de outra forma: ele será um incêndio que irá começar em uma ou mais árvores de uma determinada borda; se as árvores estiverem próximas o bastante, o vento será suficiente para fazer com que o fogo percole

a nossa rede florestal. Entretanto, espaçaremos as nossas plantas de modo que o fogo precisará de um meio intermediário entre elas para poder se alastrar.

Esse meio pode ser uma certa vegetação nativa da região que pode ou não estar presente entre duas árvores vizinhas (uma árvore só é vizinha de suas 4 árvores mais próximas). Agora, o esquema está todo montado: o fogo só irá percolar a nossa rede se existir um caminho contínuo de mata ligando as árvores das bordas da nossa plantação. Nesse caso, o fogo (nosso fluido) pode existir em qualquer sítio (árvore) da nossa rede; entretanto, ele precisa de um caminho para poder se locomover de um ponto ao outro. A abordagem de percolação que estuda os caminhos, ao invés dos nós em um sistema, recebe o nome de percolação de ligação [8].

Então, o problema análogo ao da rocha porosa estudado anteriormente é o de um pomar de maçãs que pode ou não ter uma vegetação presente entre uma árvore e suas vizinhas. Podemos definir nosso parâmetro de controle p como sendo a quantidade de ligações ocupadas pela vegetação nativa dividida pela quantidade total de ligações possíveis da rede.

A partir daí, podemos seguir com as mesmas análises que fizemos anteriormente. Inclusive, em casos de *lattices* regulares, podemos mapear o problema da percolação de ligações em um problema de percolação de sítio; basta fazer com que os sítios do nosso sistema ocupem o espaço de das ligações. Por causa disso, a parte conceitual de percolação foi tratada apenas no formalismo dos sítios, como geralmente é feita. A vantagem da percolação de ligações virá quando estivermos tratando de redes não regulares, como uma rede social, em que cada nó representa uma pessoa e as ligações não obedecem mais às regras de vizinhos mais próximos fisicamente: qualquer pessoa pode se ligar a outra; basta que sejam amigos. Em casos como esse, onde os pontos não estão mais separados por uma distância física bem definida, a percolação de sítios se torna inviável e a percolação de ligações surge como uma boa alternativa.

2.2 Grafos

Teoria dos grafos é uma grande área da matemática que veio ganhando destaque para os físicos nas últimas décadas devido às suas aplicações no estudo de redes complexas. Sua utilidade é muito bem exemplificada por sua pontual história de origem: quando Euler, em 1736, resolveu o problema das pontes de Königsberg usando o simples formalismo dos grafos para facilitar a questão. Tratava-se de uma cidade dividida por um rio que bifurcava; logo antes da bifurcação existia uma ilha que também fazia parte da cidade. 7 pontes haviam sido construídas para conectar os 4 pedaços de terra da região, e era um desafio da época pensar na melhor forma de percorrer toda a cidade no menor caminho possível (atravessando cada ponte apenas uma vez, como era acreditado na época). Segue a Figura 4 ilustrando a região.

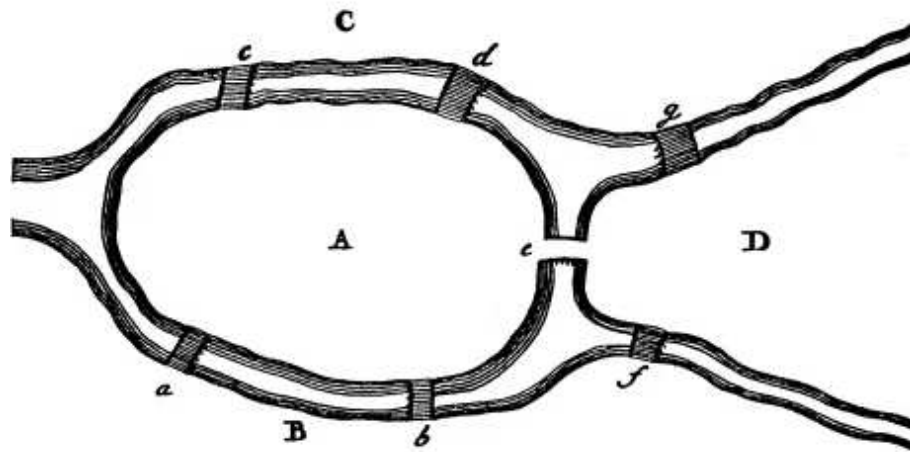


Figura 4 – Mapa conceitual da cidade de Königsberg em 1736 (Silva, 2013) [1]

Apesar de parecer algo simples, seguindo a abordagem direta de contar todas as formas possíveis de se atravessar as pontes, chegaríamos a um número de possibilidades incrivelmente alto, tornando essa estratégia inviável em uma época em que a invenção dos computadores ainda estava distante. A esperta solução encontrada por Euler envolvia simplificar o problema o máximo possível, mantendo apenas as partes fundamentais à análise. Ele, então, decidiu reduzir cada um dos quatro pedaços de terra a algo chamado nó, e cada uma das pontes a algo chamado de aresta. E assim surgiu o primeiro grafo da história, representado pela Figura 5.

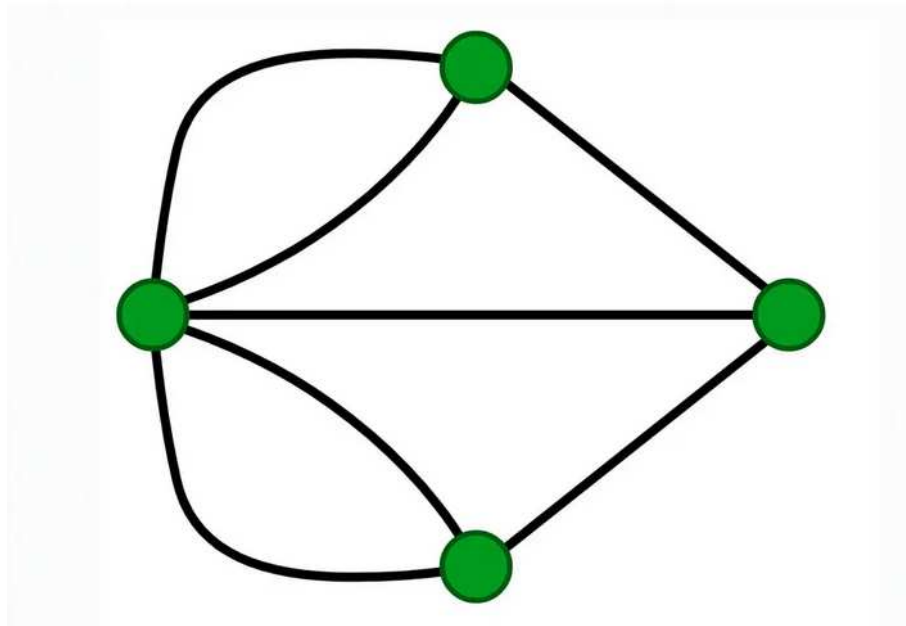


Figura 5 – Grafo da cidade de Königsberg em 1736 (Rossini, 2023) [11]

Esta figura abstrata contém apenas as informações necessárias para se estudar o problema, e nada mais. Inclusive, sua solução é bem simples a partir desse ponto: basta observarmos que, se desejamos percorrer cada aresta exatamente uma vez, nós com um número ímpar de arestas só podem servir como ponto de partida ou de chegada, pois tentar atravessar um desses no meio do caminho deixaria uma das arestas não visitada, ou encerraria a viagem. Em posse desse conhecimento, Euler sabiamente verificou que o grafo que representava Königsberg possuía quatro nós com número ímpar de arestas, e, através de um raciocínio simples, declarou o problema como impossível.

Como vimos pelo exemplo acima, os grafos têm a importante funcionalidade de capturar apenas o âmago dos problemas, nos permitindo uma visão muito mais clara e objetiva da questão, através de uma generalização sobre nós e arestas [3,4]. Além disso, também nos oferecem a possibilidade de desenvolver teorias mais gerais, que se aplicam a diversos casos, como as que veremos a seguir.

2.2.1 Principais métricas

No contexto de redes complexas, grafos são a representação natural das nossas estruturas: cada sítio se torna um nó, e cada ligação uma aresta. Dessa forma, podemos, inicialmente, imaginar que as partes mais importantes de nossa rede são aqueles sítios que possuem mais ligações, ou nós que possuem mais arestas. A métrica em teoria dos grafos para

essa quantidade é chamada de grau e é representada pela letra k .

2.2.1.1 *Mais alto grau e mais alto grau adaptativo*

Sendo assim, cada nó da nossa rede possui um grau (k_i) e a estratégia mais simples que podemos montar é a de construir uma relação dos nós de mais alto grau de uma determinada rede e considerá-los os mais importantes e, portanto, os alvos do nosso ataque. Esta é a estratégia denominada de mais alto grau ou high-degree (HD).

Entretanto, ao removermos um nó do grafo, suas ligações também são perdidas, alterando o grau dos nós que compartilhavam essas ligações. Embora possamos manter a lista de nós mais importantes inalterada durante o ataque, atualizar essa lista a cada remoção para garantirmos que o ataque sempre seja direcionado ao nó de maior grau em qualquer instante também se mostra interessante. E essa variação do *high-degree* é chamada de mais alto grau adaptativo, ou *high-degree adaptive* (HDA).

2.2.1.2 *Influência coletiva*

Apesar das estratégias acima serem válidas, em uma rede complexa, a modificação de um nó pode afetar a rede de outras formas que apenas a redução no grau dos nós vizinhos ao removido. Um exemplo dessa propriedade seria uma falha no sistema de transmissão de energia de uma cidade; caso um componente importante da rede apresente defeito, um apagão pode surgir em diversas regiões, não apenas na que teve o componente danificado. Uma métrica que captura bem essa essência, e nos dá a capacidade de identificar nós aparentemente fracos, mas que, se removidos, podem causar grandes prejuízos a toda a rede, é a *collective influence* (CI) [10], ou influência coletiva.

A influência coletiva surge como uma forma de catalogar nós não apenas pelo valor de seus graus, mas também pela forma como podem influenciar nós que estão em suas redondezas. Existe um exemplo crítico: duas redes inicialmente separadas se tornam conectadas a partir da inserção de um único nó e da criação de duas ligações. Apesar do grau baixo ($k = 2$), a importância desse vértice é gigante, pois a ausência do mesmo leva a uma fragmentação da rede.

A maneira como identificamos esses nós fracos é através da equação de influência coletiva para um determinado nó i :

$$CI_\ell(i) = (k_i - 1) \sum_{j \in \partial B(i, \ell)} (k_j - 1). \quad (2.5)$$

Em que o somatório é feito ao longo de todos os nós na borda da bola de raio ℓ centrada no nó de índice i . Ou seja, para $\ell = 2$, buscamos todos os nós cuja menor distância ao nó inicial vale 2, para podermos calcular a $CI_2(i)$, como mostra a figura abaixo:

A derivação da Equação 2.1 pode ser feita a partir da consideração de que toda rede complexa possui um menor conjunto de nós que, se for removido, pode transformar uma rede conectada em pequenos aglomerados de nós desconexos. Esse menor conjunto, então, é aquele que permite a estabilidade do maior agregado, ou seja, que permite a percolação da rede. Assim, a estratégia da *collective influence* busca encontrar esse conjunto mínimo de nós fundamentais e eliminá-los para minimizar o tamanho do maior agregado.

2.3 Redes de Barabasi-Albert

As redes complexas que encontramos no mundo real, apesar de possuírem origens diversas, muitas vezes compartilham características muito bem definidas, como uma grande quantidade de nós com poucas ligações e poucos nós com um número muito grande de ligações. Estes possuem tanta relevância que recebem um nome próprio: *hubs*, alguns exemplos são: grandes capitais metropolitanas na rede de cidades e habitantes, influenciadores e famosos nas redes sociais, grandes sites de busca, como o *Google*, na rede de arquivos da internet, etc. Diversas vezes, parece ser a forma como a natureza prefere organizar os seus sistemas [14], em vez de uma distribuição grande de nós com números de ligações semelhantes e conexões totalmente aleatórias.

Albert-László Barabási e Réka Albert foram os cientistas que propuseram um modelo capaz de reproduzir o fenômeno dos Hubs e obter de forma quantitativa diversos valores observados em redes complexas [2]. Esses mostraram que tais propriedades residem em dois conceitos que, juntos, se tornam os fundamentos para a construção de uma rede com essas características.

2.3.1 Crescimento e anexação preferencial

Começando pelo crescimento, essa propriedade é fundamental para o desenvolvimento da rede em si. Não basta iniciar um modelo com N nós já dispostos no seu sistema,

o modelo de BA diz que cada nó precisa ser adicionado individualmente, de forma que uma rede estática que sempre teve o mesmo número de nós não poderá apresentar as propriedades discutidas em questão. Exemplos de redes em constante crescimento são a quantidade de cidades ao redor do mundo, a quantidade de genes em determinadas espécies, a quantidade de empresas em um determinado país, etc. Todos esses sistemas estão em constante evolução, sempre tendo novos nós adicionados a eles.

Além de possuir crescimento, este precisa ser feito de uma certa forma: o crescimento deve obedecer à regra de anexação preferencial. A grosso modo, significa dizer que todo elemento novo em um conjunto irá ter uma chance maior de se conectar com os nós que já possuem muitas conexões. De fato, quando um nó novo surge, ele precisa se conectar a outros nós, e considerando que ele tenha a probabilidade de se conectar com outros nós como sendo $P(k_i) = \frac{k_i}{K}$, onde K é o número total de graus da rede, teremos uma anexação preferencial.

Este último não é tão difícil de se justificar quanto parece, imagine uma rede social em que os usuários usufruem dos conteúdos gerados por outros usuários. Quanto maior a quantidade de ligações com outras pessoas um indivíduo tiver, maiores são as chances de se deparar com algo produzido por ele, possibilitando uma conexão.

Foram através dessas definições simples que Barabási e Albert explicaram o fenômeno dos *hubs*. Estes não são nada mais, nada menos que nós que surgiram no início da rede e que, por acaso, acabaram recebendo algumas ligações a mais ao longo dos primeiros estágios de desenvolvimento, gerando um efeito bola de neve.

2.3.2 Distribuição dos graus em uma rede de Barabási-Albert

Um outro trunfo do modelo de Barabási-Albert foi o de possibilitar uma representação matemática para as redes complexas que existem no mundo real. Tal representação possui bastante importância quando buscamos analisar a distribuição de graus ao longo dos nós da rede. Para isso, começamos considerando um nó individual e observamos a variação do seu grau ao longo das novas adições de elementos ao sistema. Utilizando um formalismo contínuo, que pode ser considerado como o valor esperado para as grandezas ao longo da consideração de diversas redes distintas, assim, a variação do grau de um nó no tempo deve se comportar da seguinte forma:

$$\frac{dk_i}{dt} = mP(k_i). \quad (2.6)$$

Em que $P(k_i)$ é a probabilidade do elemento i ser selecionado através de uma anexação preferencial de um novo indivíduo, e m é a quantidade de novas ligações que um novo nó realiza quando é inserido no sistema. Ou seja:

$$\frac{dk_i}{dt} = m \frac{k_i}{K}. \quad (2.7)$$

Com K sendo o número total de nós no sistema no instante da t -ésima inserção: $2mt - m$. O 2 surge pois cada ligação contribui com 2 graus para o sistema. Assim:

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{k_i}{2t - 1}. \quad (2.8)$$

Para grandes valores de t , o -1 se torna negligenciável. Portanto:

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{k_i}{2t}. \quad (2.9)$$

Ou:

$$\frac{dk_i}{k_i} = \frac{dt}{2t}. \quad (2.10)$$

Integrando a equação anterior, usando o fato de que $k_i(t_i) = m$. Uma vez que o nó i entra no sistema no tempo t_i com m ligações. Chegamos no seguinte resultado:

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Que nos diz o grau médio que um nó adicionado na iteração t_i terá na iteração t . A partir desse resultado, podemos montar a probabilidade de que um nó escolhido aleatoriamente tenha um grau maior que um certo valor de k :

$$P(k) = 1 - \frac{Q(k)}{N}. \quad (2.12)$$

Com $Q(k)$ sendo a quantidade de nós existentes com grau menor que k . Podemos utilizar a Equação 2.11 para chegar ao resultado de que:

$$Q(k) = t \left(\frac{m}{k} \right)^2. \quad (2.13)$$

E, ao considerarmos, novamente, um valor de t grande o suficiente, $N \approx t$. Fazendo com que nossa probabilidade assuma a forma:

$$P(k) = 1 - \left(\frac{m}{k} \right)^2. \quad (2.14)$$

Finalmente, derivando a probabilidade $P(k)$ em relação a k , achamos que a distribuição de graus deve ser:

$$p(k) = 2m^2 k^{-3}. \quad (2.15)$$

Uma lei de potência com expoente (γ) igual a 3.

Então, de acordo com o modelo de Barabási-Albert para redes complexas reais, as distribuições dos graus das diversas redes que encontramos no mundo seguem uma lei de potência cujo expoente crítico, comumente chamado de γ , vale 3. Tal distribuição explicaria a existência de poucos nós com um valor de grau muito elevado, e uma enorme quantidade de nós com valor de grau baixo. Além disso, por obedecer a uma lei de potência, isso faz com que os fenômenos típicos das redes representadas pelo modelo de Barabási-Albert não possuam uma escala característica (*scale-free*), sendo observáveis em qualquer comprimento.

3 METODOLOGIA

Ao longo da seção de fundamentação teórica, nos limitamos a tratar apenas sobre como o comportamento dos sistemas deve ser. Agora, vamos começar a discutir as técnicas utilizadas neste trabalho para obter os resultados que serão apresentados mais adiante.

3.1 Determinação de transição de fase e cálculo do ponto crítico

Para confirmar as análises que fizemos na seção referente à percolação, vamos precisar, primeiramente, desenvolver um método para replicar uma rede de percolação para, então, manipular os resultados obtidos de forma que estes se tornem úteis para testarmos nossas ideias.

Tal método vem na forma de um algoritmo: definimos uma rede quadrada regular de tamanho L e atribuímos a cada um de seus nós um número real entre 0 e 1; os pontos das bordas são também armazenados em uma lista por ordem crescente. Então, os valores da borda são tomados um a um, do menor ao maior através de um laço. Partindo do ponto da borda em questão e seguindo através de seus vizinhos por uma busca em largura, todos os sítios cujo número atribuído tiver o valor menor ou igual em relação ao ponto da borda onde foi iniciada a busca são povoados (permitindo a percolação). Caso um vizinho tenha valor maior que o ponto da borda, esse é tomado como parte da mesma, devendo ser alocado à lista na posição correta, e a caminhada é interrompida para aquele ponto.

Uma vez que os sítios povoados formarem um cluster percolante, o valor do último ponto que foi utilizado como começo da busca é tomado como p percolante e é salvo em uma lista referente ao seu valor de L . Assim, este algoritmo é totalmente direcionado à busca de valores de p que permitem a percolação em uma rede aleatória de tamanho L .

Agora que podemos obter um valor de p que gerou uma percolação em uma determinada rede, após, no mínimo, 100 mil repetições para cada valor de L , podemos montar uma curva para cada tamanho da rede com a fração cumulativa em função do valor de p percolante. Desse modo, podemos esperar confirmar nosso argumento de que a possibilidade de se modificar o caráter de uma rede apenas permutando dois de seus sítios deve diminuir à medida que o tamanho do sistema aumenta. Em tal gráfico, o valor de um ponto $p = 0.5$ é a razão entre todos os sistemas que apresentaram percolação com $p \leq 0.5$ e o número total de redes testadas com aquele L .

Em mãos dessas distribuições de valores, também é possível achar o valor de p_c para o *lattice* quadrado em duas dimensões: basta fazer uma regressão de mínimos quadrados não lineares utilizando os valores das melhores estimativas de p de diversos tamanhos de rede para encontrar os melhores valores para as constantes da Equação 2.4.

3.2 Gráfico apontando a mudança de fase

Após organizarmos todos os valores de p s percolantes em frações cumulativas referentes aos seus respectivos L s, obtemos a figura abaixo próxima do ponto crítico:

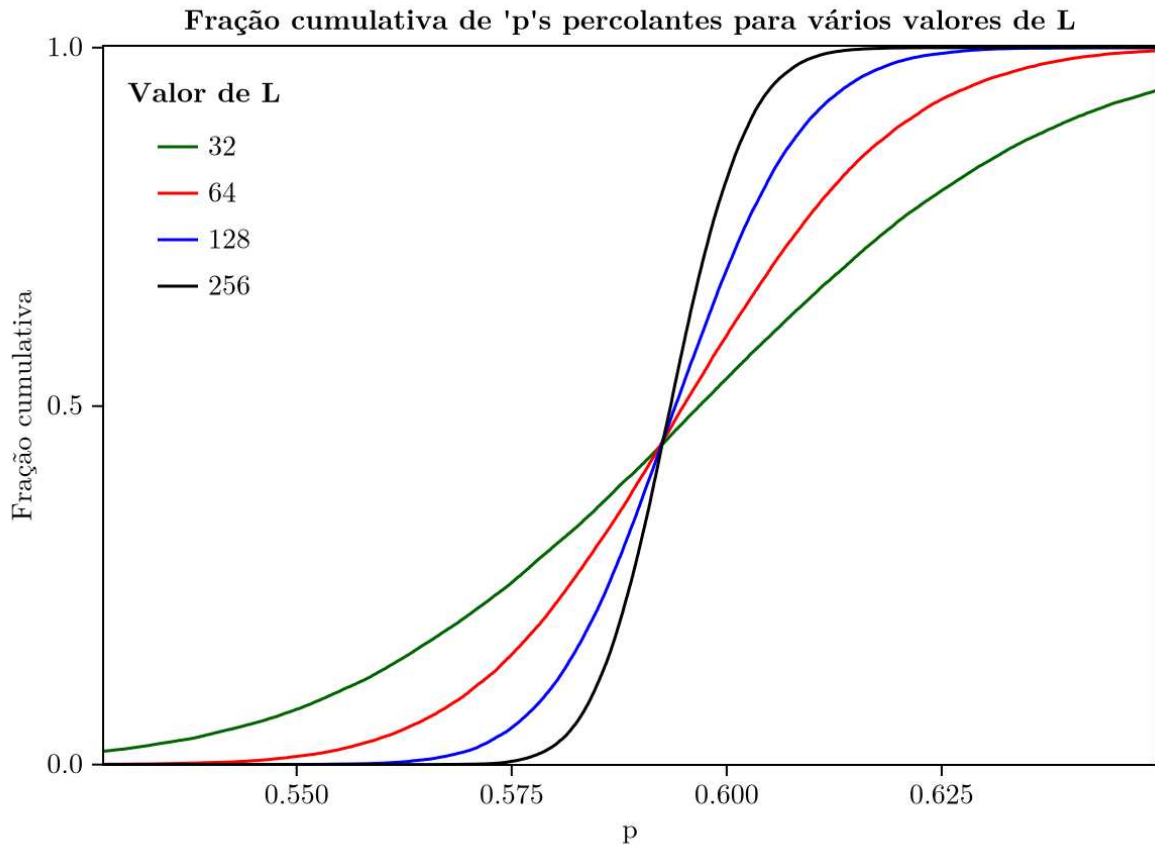


Figura 6 – Cada curva representa a fração cumulativa de sistemas percolantes para cada valor de p em uma rede quadrada de sítios bidimensional. Os valores de L utilizados foram: 32, 64, 128, 256.

A figura acima mostra uma clara tendência da nossa rede de assumir o comportamento teórico das transições de fase da Figura 3, com uma mudança abrupta do caráter do sistema. Entretanto, isso só se concretiza para tamanhos grandes de L , pois, em *lattices* pequenos, as imprecisões estatísticas geram muitas margens de erro para o valor da probabilidade percolante.

3.3 Melhores estimativas para as contantes da percolação de sítio em duas dimensões

Ao realizarmos a regressão não linear à Equação 2.4 com os valores médios das listas de p_s percolantes, encontramos a curva apresentada na figura abaixo:

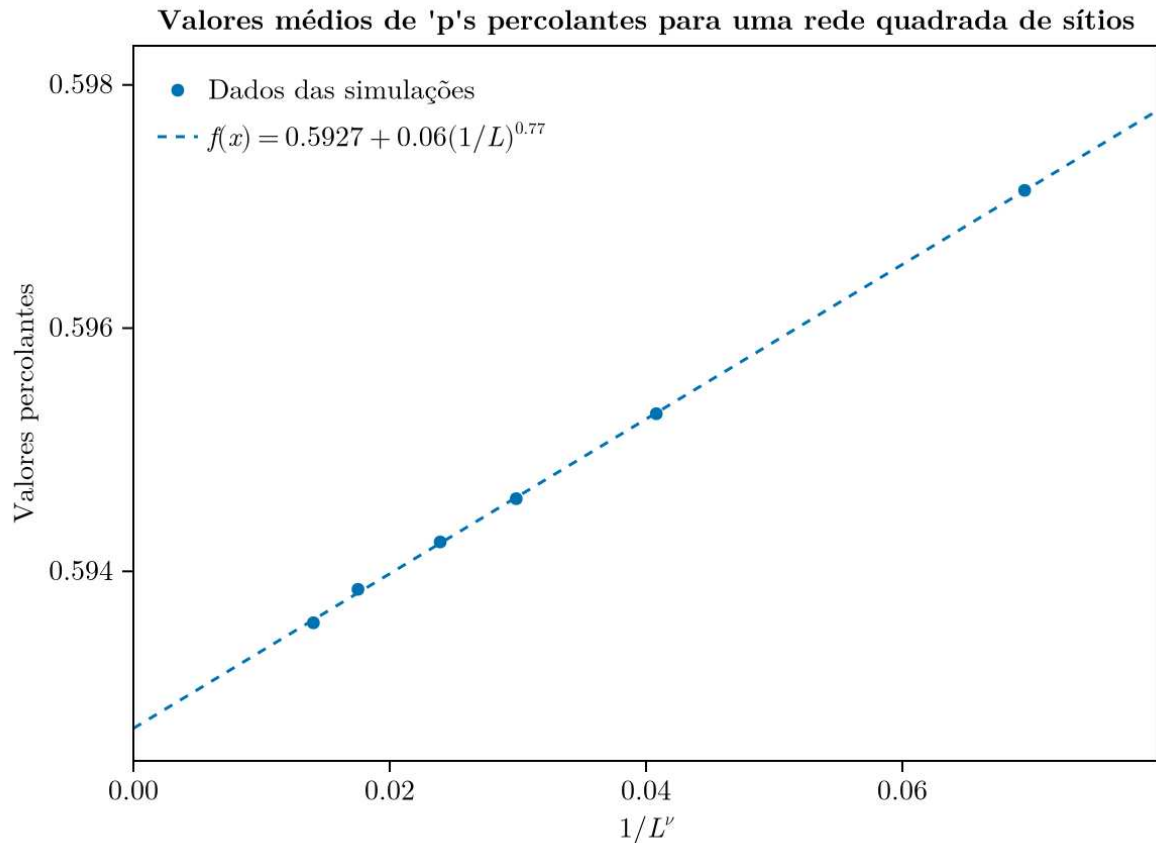


Figura 7 – Os pontos azuis representam os valores médios das listas que contem os p_s percolantes, como foi feito um mínimo de 100 mil repetições para cada ponto, suas barras de erro são desprezíveis e foram desconsideradas. A linha pontilhada representa a curva obtida com esses pontos através de uma regressão não linear à função $f(x) = a + bL^{-c}$. Os valores de L utilizados foram: 32, 64, 96, 128, 192 e 256 (Elaborado pelo autor).

Apresentando uma enorme concordância com as análises que fizemos na seção sobre percolação, o valor de p_c encontrado, representado pelo primeiro termo de $f(x)$, foi de 0.5927 ± 0.0003 , bastante próximo do teórico $p_c = 0.592746\dots$. Já o valor do expoente crítico ν foi de 1.30 ± 0.18 , concordando, embora com menos precisão, com a teoria, onde $\nu = 1.333\dots$. As margens de erro foram obtidas a partir do intervalo de confiança da regressão não linear para 95% de certeza.

As duas figuras anteriores, além de apresentarem boas estimativas para os valores teóricos discutidos neste trabalho, também nos trazem várias confirmações sobre o comporta-

mento de sistemas finitos. Começando pela fragilidade da existência do *cluster* percolante em redes pequenas, pois este está sujeito a diversas variações da rede que modificam o caráter do sistema. Assim como o deslocamento do valor de p que apresenta maiores chances de a rede percolar, obedecendo à relação estabelecida para o comprimento de correlação e à sua limitação de acordo com o tamanho de L .

3.4 Criação de uma rede de Barabási-Albert

Para criar uma rede de BA, iniciamos um grafo com uma quantidade de nós igual ao valor do fator de crescimento m (quantidade de ligações que um nó novo irá fazer) e, em seguida, vamos adicionando outros nós à nossa rede. Cada novo nó tem uma probabilidade $P(k_i) = \frac{k_i}{K}$ de se conectar a um nó já existente, em que k_i é o grau deste nó, e K é a soma de todos os graus da rede, de forma que, repetindo esse processo simples até o sistema atingir o tamanho desejado, obteremos uma rede de BA.

Para confirmar as previsões teóricas sobre a organização da distribuição de graus deste modelo, foi montada uma rede de Barabási-Albert com $N = 2 \times 10^7$, então, obtivemos um histograma em bins logarítmicas com $\frac{N}{2}$ valores aleatórios de k_s do sistema; cada ponto do histograma foi também dividido pelo tamanho de sua bin, a fim de obtermos a densidade de probabilidade para aqueles valores de k . O processo foi repetido mais 9 vezes para a mesma rede (totalizando 10 iterações), onde as médias desses valores da função densidade de probabilidade foram utilizadas para uma regressão não linear em uma lei de potência e plotadas em um gráfico em escala log-log.

3.5 Ataque à rede de Barabási-Albert

A fim de testar a eficiência da influência coletiva em causar a desconexão de um sistema, partimos de uma rede de BA com $N = 2 \times 10^5$ e $m = 2$, e começamos a retirar os seus nós que possuíam maior influência coletiva. Para termos um comparativo, replicamos a rede e aplicamos outras estratégias de ataque: *high-degree* e *high-degree adaptive*. A todo momento, acompanhamos a fração do tamanho do maior aglomerado do sistema em relação ao seu tamanho original, como medida do sucesso do método em gerar uma desconexão global. Tais aglomerados são obtidos por uma busca em largura em cada um dos nós do nosso sistema; se é possível chegar em um determinado nó j partindo de uma busca em largura a partir do nó i , dizemos que

esses dois nós pertencem a um mesmo aglomerado. Esse processo foi feito 5 vezes, com redes diferentes. E, assim, foi possível montar um gráfico com os valores médios da fração do maior agregado ($G(q)$) à medida que a fração de nós removidos q crescia.

4 RESULTADOS

4.1 Gráfico gerado para a lei de potência de uma rede de Barabási-Albert

Após organizar os histogramas dos graus da rede de BA para cada uma das amostras, normalizar suas caixas e realizar as regressões à lei de potência, chegamos a seguinte função de densidade de probabilidade em escala log-log:

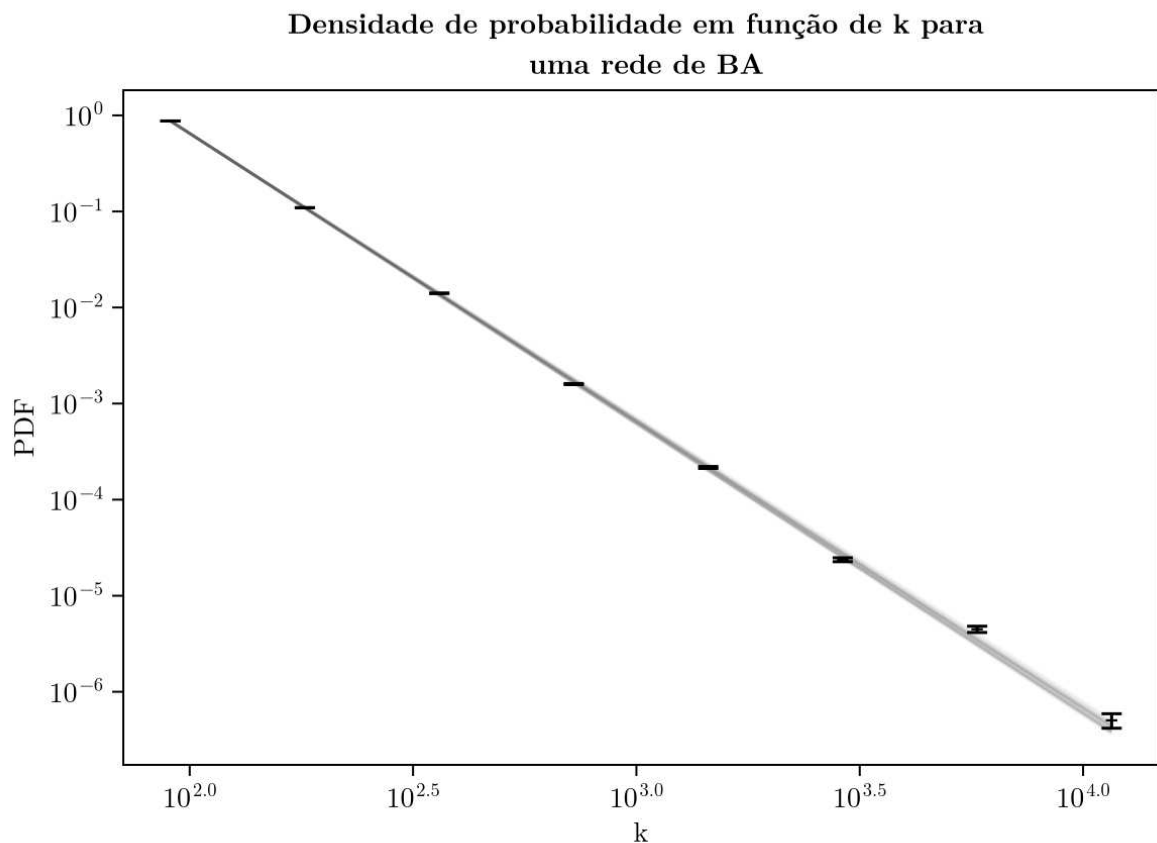


Figura 8 – Função de densidade de probabilidade de um nó aleatório da rede possuir um valor de k dentro do intervalo referente em escala log log. Os pontos são as médias das 20 variações da rede original de $N = 2 \times 10^7$ e $m = 2$, e os erros são os desvios padrões divididos pela raiz do número de amostras (20). As finas linhas cinzas são regressões à lei de potência usando cada um dos conjuntos de dados obtidos através da análise estatística, o valor médio dos seus coeficientes angulares é de 2.999 e o desvio padrão dividido pela raiz quadrada do número de amostras é de 0.004 (Elaborado pelo autor).

O primeiro ponto interessante na figura acima é a correta reprodução do valor teórico do coeficiente angular para uma rede de Barabási-Albert: $\gamma = 2.999 \pm 0.004$, onde o esperado é de $\gamma = 3$. Confirmando também a previsão que fizemos de que a distribuição dos graus dos nós da nossa rede seria em uma lei de potência. Como visto antes, isso nos permite representar

diversos sistemas reais através desse modelo, dando uma maior validade às estratégias de ataque abordadas aqui.

Outro ponto interessante é o próprio intervalo que permitiu a obtenção de $\gamma \approx 3$ com tamanha precisão: enquanto todos os *hubs* estão contidos nele, os pontos com $k < 2^4$ foram cortados da análise. Isso sugere que os erros estatísticos do modelo de Barabási-Albert estejam concentrados nos nós de menor grau. Uma explicação plausível para tal fenômeno é a de que tais pontos surgiram muito recentemente no processo de crescimento em relação aos nós de grau maior, significando dizer que esses participaram de poucas iterações da anexação preferencial, provocando uma maior suscetibilidade a erros estatísticos, justificando as aproximações feitas durante a obtenção da Equação 2.15.

4.2 Gráfico da eficiência dos métodos de ataque à redes de Barabási-Albert

Ao acompanharmos a conectividade das redes de BA através do tamanho do seu maior agregado em relação ao número original de nós durante os ataques direcionados pelos métodos abordados, obtemos a figura mais importante deste trabalho:

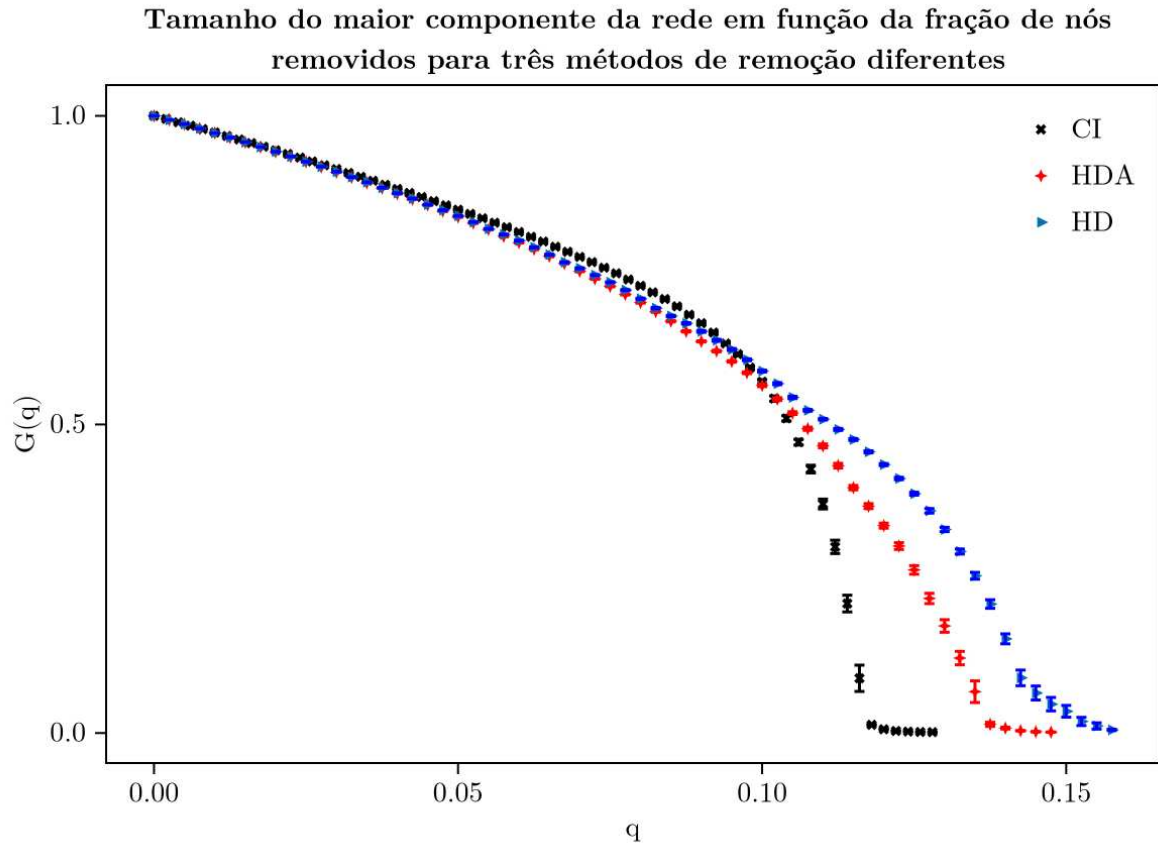


Figura 9 – Fração do maior *cluster* em relação ao tamanho da rede original em função da quantidade de nós removidos através dos métodos: *collective influence* com $\ell = 2$, *high-degree* e *high-degree adaptative*. Cada ponto é o valor médio de um total de cinco tentativas para diferentes redes de Barabási-Albert com $N = 2 \times 10^5$ e $m = 2$, as barras de erro são os desvios padrão referentes a cada média divididos pela raiz do número de amostras (5) (Elaborado pelo autor).

Ao observá-la, é possível verificar que a *collective influence*, apesar de ter sido aplicada com um raio pequeno ($\ell = 2$) apresentou uma eficiência muito maior em relação aos outros métodos heurísticos no papel de neutralizar a conectividade da rede. Uma vez que, para valores próximos da fração de nós removidos $q = 0.12$, a rede já se torna composta apenas por pequenos grupos isolados e sem comunicação entre si, enquanto para os outros métodos ainda resta um grande agregado com tamanho entre 40% e 50% do total do sistema inicial.

Também é possível observar as diferenças entre as formas de atuação dos diferentes tipos de métodos; inicialmente, todas as remoções parecem causar o mesmo efeito na conectividade global da rede, seguindo de forma satisfatória uma linha reta. Entretanto, à medida que o valor de q cresce, as técnicas mais diretas tendem a manter esse caráter por mais tempo, até que a rede ceda por falta de ligações, enquanto a *collective influence* começa a remover nós que não afetam tanto de forma imediata a conectividade do sistema, mas que logo se mostram essenciais para sustentar as conexões como um todo.

5 CONCLUSÕES

Desse modo, com os formalismos da percolação e das mudanças de fase aplicados ao modelo de Barabási-Albert, foi possível desenvolver o conceito e a métrica da influência coletiva. Uma forma de classificação dos nós de um grafo que leva em conta não apenas a importância local daquele ponto para a rede, mas também o seu papel na conexão de seus vizinhos de uma forma global.

Tal método apresentou bons resultados na destruição das redes de Barabasi-Albert, em comparação com abordagens focadas no valor individual do grau de cada vértice. Mostrando que, em diversos casos, *hubs* acabam sendo menos influentes que certos elementos que possuem uma boa centralidade na rede.

Essa disrupção na forma de classificar os indivíduos nos permite, com maior precisão, neutralizar ou proteger vários grupos de interesse que encontramos no mundo real, como conjuntos de locais públicos no papel de controle de epidemias, e redes elétricas ou de computadores na transmissão de eletricidade e informações importantes. Além disso, foi possível utilizar a influência coletiva em grafos com um número alto de nós, se mostrando bastante replicável nos enormes conjuntos de dados que temos atualmente, demonstrando uma superioridade também em relação a métricas que demandam um poder computacional maior.

REFERÊNCIAS

- [1] SILVA, Tarcízio. *Pontos, linhas e métricas 05: o grafo de konigsberg*. Disponível em <https://tarciziosilva.com.br/blog/pontos-linhas-e-metricas-05-o-grafo-de-konigsberg/>. Acesso em: 14 fev. 2025.
- [2] BARABÁSI, Albert-László. *Network Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [3] CHAPELA, Victor *et al.* Mathematical foundations: complex networks and graphs (a review). In: CHAPELA, Victor *et al.* *Intentional Risk Management through Complex Networks Analysis*. [S. l.]: Springer, 2015. p. 9-36.
- [4] CHRISTENSEN, Claire Christensen; ALBERT, Réka. Using graph concepts to understand the organization of complex systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*, [S. l.], v. 17, n. 07, p. 2201–2214, 2006.
- [5] COHEN, Reuven *et al.* Breakdown of the internet under intentional attack. *Physical Review Letters*, [S. l.], v. 86, n. 16 p. 3682–3685, 2000.
- [6] COHEN, Reuven *et al.* Resilience of the internet to random breakdowns. *Physical Review Letters*, [S. l.], v. 85, n. 2, p. 4626–4628, 2000.
- [7] FUCITO, Francesco; MARINARI, Enzo. Computation of the critical exponents of percolation. *Journal of Physics A*, [S. l.], v. 14, 1981.
- [8] GAUNT, D. S.; RUSKIN, Heather J. Bond percolation processes in d dimensions. *Journal of Physics A*, [S. l.], v. 11, p. 1369–1380, 1978.
- [9] HAVLIN, Shlomo; NOSSAL, Ralph J. Topological properties of percolation clusters. *Journal of Physics A*, [S. l.], v. 17, 1984.
- [10] MORONE, Flaminio; MAKSE, Hernán A. Influence maximization in complex networks through optimal percolation. *Nature*, [S. l.], v. 524, n. 7563, p. 65–68, 2015.
- [11] ROSSINI, Maria Clara. *O problema urbanístico que deu origem à teoria dos grafos*. Disponível em <https://super.abril.com.br/historia/o-problema-urbanistico-que-deu-origem-a-teoria-dos-grafos>. Acesso em: 14 fev. 2025.
- [12] STANLEY, Harry Eugene; AHLERS, Guenter. Introduction to phase transitions and critical phenomena. *American Journal of Physics*, [S. l.], v. 40, n. 927–928, 1972.

- [13] STAUFFER, Dietrich. Scaling theory of percolation clusters. *Complex Media and Percolation Theory*. [S. l.]: North-Holland Published, 1979.
- [14] STEPHEN, Andrew T.; TOUBIA, Olivier. Explaining the power-law degree distribution in a social commerce network. *Quantitative Marketing*, [S. l.], 2009.
- [15] WANG, Xiaofan; CHEN, Guanrong. Complex networks: small-world, scale-free and beyond. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, [S. l.], v. 3, n. 6, p. 20, 2003.
- [16] BARABÁSI, Albert László. *Linked - how everything is connected to everything else and what it means for business, science, and everyday life*. New York: Plume Books, 2003.
- [17] BARABÁSI, Albert László *et al.* Scale-free and hierarchical structures in complex networks. *Modeling of complex systems: seventh granada lectures*, Granada, v. 661, n. 1, p. 1–16. 2003.
- [18] ARTIME, Oriol *et al.* Robustness and resilience of complex networks. *Nature Reviews Physics*, [S. l.], v.6, n.1, p. 114-131, 2024.