UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

KAUÊ VICTORETTE LUZ

DECOMPOSIÇÃO DE HODGE-MORREY-FRIEDRICHS E APLICAÇÕES

FORTALEZA
2023

KAUÊ VICTORETTE LUZ

DECOMPOSIÇÃO DE HODGE-MORREY-FRIEDRICHS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L994d Luz, Kaue Victorette.
Decomposição de Hodge-Morrey-Friedrichs e aplicações / Kaue Victorette Luz. – 2023.
101 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru.

1. Decomposição de Hodge-Morrey-Friedrichs . 2. Variedades compactas. 3. Laplaciano de Hodge. I. Título.

CDD 510

KAUÊ VICTORETTE LUZ

DECOMPOSIÇÃO DE HODGE-MORREY-FRIEDRICHS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Aprovada em: 01/02/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Célio Luz e Lina Victorette, pelo apoio incondicional, amor e compreensão. Ao meu orientador, professor doutor Daniel Cibotaru, pela disposição, prestatividade e as muitas sugestões que deram forma a este trabalho. À Gabriela Bertoldo, pelo companheirismo, pelos momentos felizes e por me fazer evoluir em tantos aspectos. Aos meus amigos, pelas palavras de incentivo e bons momentos.

"Vim, vi, venci"(Júlio César).

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a decomposição de Hodge-Morrey-Friedrichs dos espaços de formas diferenciais L^2 sobre variedades compactas com fronteira e sua demonstração, juntamente com todas as ferramentas necessárias para tal, fazendo um paralelo direto com a decomposição clássica de Hodge em variedades compactas sem fronteira e, por fim, mostrar suas relações com a teoria de co-homologia e com a resolução de certos problemas de equações diferenciais parciais envolvendo formas diferenciais e campos de vetores com condições de fronteira prescritas.

Palavras-chave: decomposição de Hodge; variedades com fronteira; equações elípticas.

ABSTRACT

The aim of this work is to present the Hodge-Morrey-Friedrichs decomposition of the space of L^2 differential forms over a compact manifold with boundary and its proof together with all the necessary tools to do so, making a direct parallel with the classical Hodge decomposition on compact manifolds without boundary and showing its relations with cohomology theory and the solvability of certain partial differential equation problems involving differential forms and vector fields with prescribed boundary conditions.

Keywords: Hodge decomposition; manifolds with boundary; elliptic equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Existem múltiplos resultados denominados **decomposição de Hodge** na literatura matemática moderna. Os resultados primordiais de William V.D. Hodge concerniam variedades algébricas compactas (HODGE, 1989), posteriormente generalizados para variedades complexas compactas (KODAIRA, 1975). As decomposições abordadas neste trabalho remetem aos resultados (MORREY, 1956) e (FRIEDRICHS, 1955) e concernem aos espaços de formas diferenciais quadrado integráveis de variedades reais Riemannianas compactas com e sem fronteira. O espaço de k-formas quadrado integráveis sobre uma variedade Riemanniana compacta, M, pode ser entendido como o fecho do espaço de k-formas suaves, $\Omega^k(M)$ na norma

$$||\omega||_2 := \left(\int_M \langle \omega, \omega \rangle dM \right)^{1/2},$$

sendo $\langle -, - \rangle$ a métrica induzida pela métrica Riemanniana de M e dM seu elemento de volume. Este espaço é denotado por $L^2\Omega^k(M)$ e compreende um espaço de Hilbert com o produto interno L^2 determinado por

$$< \omega, \eta >:= \int_M \langle \omega, \eta \rangle dM \text{ para } \omega, \eta \in \Omega^k(M)$$

e estendido às formas L^2 por limite.

A decomposição de Hodge possui uma dualidade analítico-topológica. O ponto de vista deste trabalho é majoritariamente analítico, grandemente inspirado por (SCHWARZ, 1995). Neste espírito, a decomposição é enxergada como a separação de $L^2\Omega^k(M)$ em subespaços mutuamente ortogonais de soluções de problemas de equações diferenciais parciais com condições de fronteira prescritas.

Os operadores diferenciais presentes na decomposição são a derivada exterior, $d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$ e a derivada coexterior, $\delta = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$, sendo $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ o operador de Hodge. Estes operadores estão associados aos seguintes problemas com condições de fronteira:

1.

$$d\alpha = \xi \text{ em } M;$$

$$T(\alpha) = 0 \text{ em } \partial M.$$

2.

$$\delta\beta = \xi \text{ em } M;$$

$$N(\beta) = 0 \text{ em } \partial M.$$

3.

$$d\omega = 0 \text{ em } M;$$

$$\delta\omega = 0 \text{ em } M.$$

onde T e N representam as componentes cotangenciais e conormais na fronteira. Denotemos, respectivamente, por $\mathcal{E}^k(M)$, $\mathcal{C}^k(M)$ e $\mathcal{H}^k(M)$ os conjuntos soluções destes problemas para $\xi \in \Omega^k(M)$. Com isto, enunciamos a versão suave do resultado central desta exposição:

Teorema 1.1 (Decomposição de Hodge-Morrey-Friedrichs) *Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientada compacta com fronteira.*

- *Para cada $0 \leq k \leq n$, vale a seguinte decomposição ortogonal:*

$$\Omega^k(M) = \mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M) \oplus \mathcal{H}^k(M);$$

- *Para o espaço $\mathcal{H}^k(M)$, valem as seguintes decomposições ortongonais:*

$$\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \cap \ker T \oplus \mathcal{H}^k(M) \cap \delta(\Omega^{k+1}(M))$$

e

$$\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \cap \ker N \oplus \mathcal{H}^k(M) \cap d(\Omega^{k-1}(M)).$$

Para o caso em que $\partial M = \emptyset$, as condições de fronteira se trivializam. A decomposição adquire, portanto, o seguinte formato:

$$\Omega^k(M) = d\Big(\Omega^{k-1}(M)\Big) \oplus \delta\Big(\Omega^{k+1}(M)\Big) \oplus \mathcal{H}^k(M),$$

sendo $\mathcal{H}^k(M)$, neste caso, um espaço vetorial de dimensão finita. Ambas as versões da decomposição de Hodge estão intimamente ligadas às soluções dos problemas $\Delta\phi = \omega$ com condições de fronteira prescritas de tipo Neumann($N(\phi) = 0$) e Dirichlet($T(\phi) = 0$), sendo ω e ϕ k-formas diferenciais e $\Delta = (d\delta + \delta d)$ o Laplaciano de Hodge. As diferenciais exterior e coexterior estão correlacionadas de acordo com a seguinte fórmula:

Teorema 1.2 (Fórmula de Green)

$$\int_M \langle d\omega, \eta\rangle dM = \int_M \langle \omega, \delta\eta\rangle dM + \int_{\partial M} \mathrm{T}(\omega) \wedge \star\mathrm{N}(\eta).$$

A partir desta relação, fica claro que, se ϕ_D é solução do problema

$$\Delta\phi_D = \omega \text{ em } M$$

$$T(\phi_D) = 0 \text{ e } T(\delta\phi_D) = 0 \text{ em } \partial M,$$

então para cada $d\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$,

$$< \omega, d\alpha >=< d\delta\phi_D, d\alpha > .$$

Similarmente, se ϕ_N é solução do problema

$$\Delta\phi_N = \omega \text{ em } M$$

$$N(\phi_N) = 0 \text{ e } T(d\phi_N) = 0 \text{ em } \partial M,$$

então para cada $\delta\beta \in \mathcal{C}^k(M)$,

$$< \omega, \delta\beta >=< \delta d\phi_N, \delta\beta > .$$

Assim,

$$\omega = d(\delta\phi_D) + \delta(d\phi_N) + (\omega - d\delta\phi_D - \delta d\phi_N)$$

e um argumento de completude pode ser usado para mostrar que $(\omega - d\delta\phi_D - \delta d\phi_N) \in \mathcal{H}^k(M)$.

A estratégia para encontrar as soluções ϕ_D e ϕ_N dos problemas de Dirichlet e Neumann baseia-se numa adaptação do clássico método de energia: a priori, são estabelecidos os espaços de Hilbert de formas, $H^s\Omega^k(M)$, que podem ser compreendidos como o fecho métrico de $\Omega^k(M)$ munido com a norma

$$\|\omega\|_{H^s} = \left(\sum_{j=0}^{s} \|\nabla^j\omega\|_2^2\right)^{1/2},$$

sendo $\nabla^j\omega$ a j-ésima derivada covariante de ω. Após isto, mostra-se que a forma bilinear

$$\mathcal{D}(\omega, \eta) =< d\omega, d\eta > + < \delta\omega, \delta\eta >$$

satisfaz uma condição de elipticidade em um certo subespaço de $H^1\Omega^k(M)$ e evocamos o teorema de Lax-Milgram para garantir a existência de potenciais associados aos problemas de fronteira:

Teorema 1.3 (Lax-Milgram) *Seja H um espaço de Hilbert real e $B : H \times H \to \mathbb{R}$, uma forma bilinear. Se $\exists\ c, C > 0$ tal que $\forall u, v \in H$, $C||u||^2 \geq B(u,u) \geq c||u||^2$, então para cada $\varphi \in H^*$ $\exists!\ u \in H$ tal que $\varphi(v) = B(u,v), \forall v \in H$.*

Por conseguinte, mostramos que os potenciais obtidos pelo método de enregia possuem regularidade H^2 a partir da adaptação do clássico método do quociente de diferenças de Niremberg para o contexto de derivadas de Lie e lançamos mão da teoria elíptica de L.Hörmander (HÖRMANDER, 2007) para mostrar que os potenciais possuem regularidade H^{s+2}, sendo H^s a regularidade dos dados iniciais. A partir da existência e regularidade dos potenciais, pode-se usar a fórmula de Green para obter as projeções aos espaços de formas exatas e aos espaços de formas coexatas, satisfazendo as condições de fronteira dos problemas de Dirichlet e Neumann, respectivamente e, por fim, caracterizar o complemento L^2-ortogonal destes espaços de formas como a interseção dos núcleos dos operadores d e δ.

Estabelecidas as decomposições de Hodge nos contextos de variedades fechadas e com fronteira, são mostradas suas relações com a teoria de co-homologia de de Rham, estabelecendo identificações entre espaços $\mathcal{H}^k(M) \cap \ker T$ e $\mathcal{H}^k(M) \cap \ker N$ e os módulos de co-homologia de de Rham relativos e absolutos, mais precisamente,

$$\mathcal{H}^k(M) \cap \ker N \simeq H^k_{dR}(M);$$
$$\mathcal{H}^k(M) \cap \ker T \simeq H^k_{dR}(M, \partial M).$$

Como aplicação final, obtemos uma decomposição de campos vetoriais definidos em abertos limitados do $\mathbb{R}^3$, um resultado que precede a teoria de Hodge cronologicamente e tem vasta utilidade em múltiplas vertentes da física. A partir das identificações entre os operadores diferenciais clássicos do cálculo vetorial e os operadores presentes na decomposição de Hodge e entre campos de vetores e 1-formas na métrica canônica do espaço Euclidiano, vale o resultado

Teorema 1.4 *Se $U \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado simplesmente conexo com fronteira suave e F um campo de vetores em U, existe uma função $f \in C^\infty(\bar{U})$ e um campo $A \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ tal que*

$$F = \nabla \times A + \nabla f.$$

2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Começamos expondo as definições de nossos objetos de estudo e o ferramental técnico de geometria diferencial necessário para demonstrar os resultados aqui abordados.

2.1 Variedades topológicas diferenciáveis

Definição 2.1.1 *Dizemos que um espaço topológico M é uma* ***variedade diferenciável*** *de dimensão n se este é Hausdorff, com base enumerável e possui um atlas diferenciável, i.e. um conjunto $\mathscr{A}$ de abertos $U_\alpha \subset M$, com $\bigcup U_\alpha = M$ e homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ chamados cartas locais, tais que, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}$ é um difeomorfismo.*

Definição 2.1.2 *Um mapa entre variedades $f : M \to N$ é* ***suave*** *se para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta de p com uma carta local (U, φ) e uma carta local em $f(p)$, (V, ψ) com $f(U) \subset V$, tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é suave.*

Definição 2.1.3 *Uma variedade diferenciável com fronteira diferenciável, ou simplesmente* ***variedade com fronteira****, como a denotaremos, é igualmente um espaço M, Hausdorff de base enumerável com um conjunto de abertos $U_\alpha \subset M$, com $\bigcup U_\alpha = M$ e homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n |\ x_n \geq 0\}$ tais que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}$ é um difeomorfismo, formando um atlas. O conjunto $\partial M := \{p \in M |\ \forall \alpha\ \varphi_\alpha(p) \in \partial \mathbb{H}^n := \{x_n = 0\}\}$ é dito ser a fronteira de M e possui naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão n-1, assim como $\mathring{M} := M \backslash \partial M$, de dimensão n.*

De agora em diante, assumiremos que uma variedade M, se não explicitado o contrário, tem dimensão prescrita n.

Uma ferramenta crucial para o estudo das variedades é o uso das partições da unidade, cuja existência deve-se ao fato das variedades serem Hausdorff e de base enumerável.

Definição 2.1.4 *Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de uma variedade M, uma* ***partição suave da unidade*** *subordinada a $\mathcal{U}$ é um conjunto de funções suaves $\{\rho_\alpha : M \to [0,1]\}_{\alpha \in A}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset\subset U_\alpha$;
2. *Para cada $p \in M$ existe um aberto $V_p \ni p$ tal que $\rho_\alpha\big|_{V_p} \not\equiv 0$ apenas para um conjunto finito de índices α;*

3. $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(p) = 1, \forall p \in M.$

Proposição 2.1.1 *Toda cobertura aberta de uma variedade diferenciável admite uma partição da unidade subordinada a si.*

Este resultado preliminar é demonstrado em (CONLON, 2013).

2.2 Fibrados, campos de vetores e formas diferenciais

Definição 2.2.1 *Um **fibrado** de base M, fibra típica F e espaço total E é um mapa suave entre variedades* $\pi : E \to M$ *denominado projeção de fibrado, tal que para cada* $p \in M$*, a fibra* $E_p := \pi^{-1}(p)$ *é uma variedade difeomorfa a F e para cada* $q \in E$ *existem abertos* $V \ni q$*,* $U \ni \pi(q)$ *e uma carta de fibrado: um difeomorfismo* $\varphi : V \to F \times M$*, tal que se* $\varpi : F \times M \to M$ *é a projeção à segunda coordenada, comuta o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & F \times U \arrow[d, "\varpi"] \\ M \arrow[r, "Id_M"] & M \end{tikzcd}$$

Se F é um espaço vetorial real ou complexo de dimensão k, o fibrado é dito um fibrado vetorial(real ou complexo) de posto k.

Por abuso de notação, o fibrado é comumente representado pelo espaço total E, desde que a estrutura da projeção esteja bem estabelecida.

As variedades diferenciáveis originam naturalmente dois tipos de fibrados que, em nosso contexto, têm papel fundamental: os fibrados tangente e cotangente.

Proposição 2.2.1 *Sejam* $C^\infty(M)$ *o conjunto das funções suaves* $f : M \to \mathbb{R}$ *e* $C_p^\infty(M)$ *os germes de* $C^\infty(M)$ *em* $p \in M$ *i.e. é o quociente* $C^\infty(M)/\sim$*, onde* $f \sim g \iff \exists U \subset M$ *aberto tal que* $f|_U = g|_U$*. Sobre o conjunto das derivações lineares de* $C_p^\infty(M)$*,* $D_pM := \{D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid D([f][g]) = f(p)D([g]) + g(p)D([f])\}$ *vale o seguinte:*

- D_pM *é canonicamente identificado com o espaço de velocidades de curvas suaves passando por p no ponto 0,* $T_pM := \{\gamma'(0) : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid \gamma : \mathbb{R} \to M,\ \gamma(0) = p\}$*, onde*

$$\gamma'(0)[f] = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \gamma(t) - f \circ \gamma(0)}{t}.$$

- *T_pM é um espaço vetorial real de dimensão algébrica igual a dimensão da variedade M. T_pM é chamado o **espaço tangente a M em p**.*
- *A união disjunta dos espaços tangentes a M, $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$ forma um fibrado vetorial sobre M, denominado **fibrado tangente de M**.*

A prova destes resultados pode ser encontrada em (CONLON, 2013).

A partir do fibrado tangente, é estabelecida a diferencial de um mapa diferenciável entre variedades como um morfismo de fibrados vetoriais.

Definição 2.2.2 *Um **morfismo de fibrados vetoriais**, $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to N$, é um par de mapas diferenciáveis $\Xi : E \to F$ e $\xi : M \to N$ tal que o diagrama abaixo comuta e $\Xi\big|_{E_p} \in Hom_{\mathbb{R}}(E_p, F_{\xi(p)})$ em cada fibra.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Xi} & F \\ {\scriptstyle \pi_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ M & \xrightarrow{\xi} & N \end{array}$$

Dados E e F fibrados de mesma base, denotamos por $Hom(E, F)$, $End(E)$ e $Aut(E)$ o conjunto dos morfismos de fibrados que em cada fibra correspondem a morfismos de espaços vetoriais $Hom(E_p, F_p)$, $End(E_p)$ e $Aut(E_p)$, respectivamente.

***Definição 2.2.3** A **diferencial de um mapa diferenciável** entre variedades, $f : M \to N$, é um morfismo de fibrados vetoriais $f_* : TM \to TN$ determinado pela restrição nas fibras $f_{*p}\gamma'(0) = (f \circ \gamma)'(0)$.*

Proposição 2.2.2 (Regra da cadeia) *Para uma sequência de mapas diferenciáveis entre variedades $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ a diferencial do mapa $g \circ f$ é expressa por*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Definição 2.2.4 *Um fibrado vetorial $E \to M$ dá origem a outro fibrado de mesmo posto, $E^* \to M$, cujas fibras são determinadas por $E^*_p = Hom(E_p, \mathbb{R})$, chamado **fibrado dual** de E.*

No caso do fibrado tangente, seu dual, T^*M, é chamado fibrado cotangente e, assim como para TM, um mapa diferenciável entre variedades, $f : M \to N$ induz um morfismo de fibrados $f^* : TN \to TM$ determinado pela restrição em cada fibra $f_p^*\omega = \omega \circ f_{*p}$, chamado o **pullback** por f.

Definição 2.2.5 *Uma* ***seção*** *suave do fibrado E é um mapa suave $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$. Se E é um fibrado vetorial, o espaço de seções de E, $\Gamma(E)$, possui uma estrutura natural de $C^\infty(M)$-módulo.*

Uma seção do fibrado dual de E, ξ, define um mapa $C^\infty(M)-$linear, $\Gamma(E) \to C^\infty(M)$. A função $\xi(\sigma)$ é determinada ponto a ponto por $\xi_p(\sigma_p)$.

Devido à sua relevância, as seções dos fibrados tangente, cotangente e alguns de seus derivados recebem nomes e notações distintas:

- As seções do fibrado tangente são chamadas **campos de vetores**;
- As seções do fibrado cotangente são chamadas **1-formas diferenciais**;
- As seções do fibrado $\Lambda^k(T^*M)$ gerado pela união disjunta dos espaços de k-formas multilineares alternadas de T_p^*M em cada ponto p são chamadas **k-formas diferenciais**.

Denotamos

$$\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM)$$

$$\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k(T^*M)).$$

A partir de agora, dada uma carta local de uma variedade M de dimensão n, (φ, U), faremos a identificação

$$\partial_{x_i}|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p := \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}\right).$$

A propriedade de $C^\infty(M)$-linearidade nos permite escrever $X|_U = \sum_1^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ f_i \in C^\infty(U)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_1^n$ é dita uma base local de campos. Similarmente, estabelecemos a base dual $\{dx^i\}_1^n$ definida pontualmente.

$$dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right) = \delta_{ij}$$

como uma base local de $\Omega^1(M)$.

Definição 2.2.6 *Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$. O* ***produto wedge*** *entre ω e η é dado pela sua ação em $k+l$ campos $X_1, ..., X_{k+l}$:*

$$\omega \wedge \eta := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) \omega \otimes \eta(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k+l)}) = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

definindo assim uma $(k+l)$-forma.

O conjunto $\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ munido com o produto wedge forma uma $C^\infty(M)$-álgebra, a ***álgebra exterior*** *de formas diferenciais.*

Proposição 2.2.3 *Considere uma vizinhança U de uma variedade M, para a qual $\{dx^i\}_1^n$ é uma base local de $\Omega^1(M)$ em U. Escrevendo, para um k-multi-índice $I = (I_1, .., I_k)$, $I_j = 1, ..., n$, $dx^I := dx^{I_1} \wedge ... \wedge dx^{I_k}$, $\{dx^I\}_{I=(I_1,..,I_k)}$ forma uma base local de $\Omega^k(M)$.*

Proposição 2.2.4 *Existe um único operador linear na álgebra exterior $\Omega^\bullet(M)$, denotado por d, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$\forall f \in C^\infty(M)$, $df = f_*$;*
2. *$d^2 = 0$;*
3. *$d(\Omega^k) \subset \Omega^{k+1}(M)$;*
4. *$\forall \omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.*

d é chamada ***diferencial exterior*** *e possui a seguinte expressão agindo em campos de vetores: para $X_1, ..., X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$,*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, ..., X_{k+1}) = &\sum_j (-1)^j X_j(\omega(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., X_{k+1})) \\ &+ \sum_{l>j} (-1)^{j+l} \omega([X_j, X_l], X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \widehat{X_l}, ..., X_{k+1}). \end{aligned}$$

A verificação deste cálculo e da unicidade da derivada exterior pode ser encontrada em (NICOLAESCU, 2007).

Definição 2.2.7 *Se ω é tal que $d\omega = 0$, ω é dita uma forma* ***fechada*** *e se para alguma forma η, $\omega = d\eta$, ω é dita uma forma* ***exata****.*

Definição 2.2.8 *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, a* ***contração na direção*** *X é um operador linear $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ definido pela sua ação nas formas diferenciais: para $Y_1, ..., Y_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$,*

$$i_X \omega(Y_1, ..., Y_{k-1}) := \omega(X, Y_1, ..., Y_{k-1}).$$

Definição 2.2.9 *Seja $U \subset M$ um aberto de uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(U)$. Uma **curva integral** de X em um ponto $p \in U$ é um mapa diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to U$ tal que p está em sua imagem e*

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Definição 2.2.10 *O **fluxo do campo** X é uma família de difeomorfismos de U, $\{\Phi_t^X\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$, para algum ϵ positivo, tal que*

$$\Phi_s^X \circ \Phi_t^X = \Phi_{s+t}^X,$$

para quaisquer s, t, $|s|, |t|, |s+t| < \epsilon$ e, fixado $p \in U$, $t \mapsto \Phi_t^X(p)$ determina uma curva integral de X em p. Em particular,

$$\Phi_t^X{}_* X_p = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi_s^X \circ \Phi_t^X(p) =$$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Phi_{t+s}^X(p) = X_{\Phi_t^X(p)}.$$

Da teoria de equações diferenciais ordinárias, obtém-se o seguinte resultado.

Proposição 2.2.5 (Existência de soluções de EDOs) *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, $\exists p \in U \subset M$ um aberto tal que X admite um fluxo em U.*

Também pode ser mostrado que se X tem suporte compacto, admite um fluxo global, i.e. definido em toda a variedade M, como visto em (CONLON, 2013).

A partir da noção de fluxo, podemos convencionar uma maneira natural de derivar objetos tensoriais na direção de um campo de vetores.

Definição 2.2.11 *A forma bilinear $[-,-] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ determinada pela sua ação em $C^\infty(M)$,*

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

*$[X, Y]$ é chamada o **colchete de Lie** entre X e Y.*

Um cálculo direto mostra que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ e que $[X, Y] = [Y, X]$.

Definição 2.2.12 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A **derivada de Lie** na direção X é uma derivação, $\mathcal{L}_X$, definida da seguinte maneira:*

- *para um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{L}_X Y$ é um terceiro campo dado, num ponto p, pelo limite em T_pM,*
$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi^X_{-t*}(Y_{\Phi^X_t(p)}) - Y_p}{t}.$$

- *Para uma forma diferencial, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\mathcal{L}_X\omega$ é uma k-forma, dada pontualmente pelo limite*
$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi^{X*}_t(\omega_{\Phi^X_t(p)}) - \omega_p}{t}.$$

Proposição 2.2.6 *Para a derivada de Lie, valem as seguintes identidades:*

- $\mathcal{L}_X f = X(f)$, $\forall f \in C^\infty(M)$
- $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$
- $\mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega) + i_X(d\omega)$, $\forall \omega \in \Omega^\bullet(M)$*(Fórmula de Cartan).*

Uma descrição completa das propriedades da derivada de Lie pode ser encontrada em (KOLAR *et al.*, 2013).

Definição 2.2.13 *Uma **métrica Riemanniana** num fibrado vetorial $E \to M$ é um tensor $g \in \Gamma(E^*) \otimes \Gamma(E^*)$ tal que, para quaisquer $\sigma, \eta \in \Gamma(E)$, tem-se*

- $g(\sigma, \eta) = g(\eta, \sigma)$;
- $g(\sigma, \sigma) > 0$ $\forall p$ *tal que* $\sigma_p \neq 0$.

Em particular, dizemos que g é uma métrica em M, se é uma métrica no fibrado tangente.

*Se munido de uma métrica, E é dito um **fibrado Riemanniano**.*

Com uma construção simples via partição da unidade, é possível munir qualquer variedade com uma métrica Riemanniana, tornando-a assim uma **variedade Riemanniana**.

Note também que uma métrica em E determina um produto interno em cada E_p. Assim, quando não houver ambiguidade, escreveremos $g(\sigma, \eta) = \langle \sigma, \eta \rangle$.

No caso de uma variedade Riemanniana, (M, g), a métrica induz um isomorfismo de fibrados $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$, onde
$$X^\flat(Y) := \langle X, Y \rangle, \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$
O inverso deste isomorfismo, $\sharp : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$, é dado pela métrica induzida por g em $\Omega^1(M)$, a ser definida na próxima seção. A saber,
$$\eta(\omega^\sharp) := \langle \eta, \omega \rangle, \ \forall \omega, \eta \in \Omega^1(M).$$

Definição 2.2.14 *Dada uma variedade diferenciável M, uma* ***subvariedade de dimensão*** *$k \leq n$ é um subconjunto $N \subset M$ que é uma variedade diferenciável de dimensão k com a topologia induzida por M com a seguinte propriedade: para cada $p \in N$ existe uma carta (φ, U) de M com $p \in U$ e uma projeção $\mathbf{p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tal que*

$$(\mathbf{p} \circ \varphi|_{U \cap N}, U \cap N)$$

é uma carta de N.

Em particular, se M é uma variedade com fronteira, ∂M possui uma estrutura natural de subvariedade de dimensão $n-1$.

O mapa de inclusão $\iota : N \hookrightarrow M$ de uma subvariedade permite-nos enxergar a coleção dos subespaços complementares às fibras de TN como um novo fibrado.

Definição 2.2.15 *O* ***fibrado normal*** *de uma subvariedade $N \hookrightarrow M$ é um fibrado vetorial de base N cujas fibras são determinadas pontualmente por* coker ι_{*p}.

Uma seção do fibrado normal é dita um ***campo normal****.*

Se M possui uma métrica Riemanniana, podemos identificar, em cada fibra, o subespaço coker ι_{*p} como $T_p^{\perp}N := \{\nu \in T_pM \mid \langle \nu, v \rangle = 0, \forall v \in \iota_{*p}(T_pN)\}$, i.e. o complemento ortogonal de $\iota_{*p}(T_pN)$, dando origem à decomposição ortogonal $T_pM = \iota_{*p}(T_pN) \oplus T_p^{\perp}N \approx T_pN \oplus T_p^{\perp}N$.

Proposição 2.2.7 *Se M tem fronteira e $X \in \mathfrak{X}(M)$, a restrição de X a ∂M admite a decomposição*

$$X|_{\partial M} = T(X) + N(X)$$

onde $T(X)$ é dado pontualmente pela projeção ortogonal ao subespaço im ι_{*p} *e denominada a componente tangencial de X. A componente normal de X é determinada por*

$$N(X) = X|_{\partial M} - T(X).$$

Similarmente, para $\omega \in \Omega^k(M)$, $\omega|_{\partial M}$ possui uma componente cotangencial determinada pela ação em campos:

$$T(\omega)(X_1, ..., X_k) := \omega(T(X_1), ..., T(X_k))$$

e uma componente conormal,

$$N(\omega) = \omega|_{\partial M} - T(\omega).$$

Fazendo a identificação entre campos tangentes a ∂M e sua imagem por ι_*, tem-se $T(\omega) = \iota^*\omega$.

Demonstração. Óbvia. □

2.3 Geometria Riemanniana

Definição 2.3.1 *Uma* ***conexão afim*** *num fibrado vetorial $E \to M$ é um mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$; $(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\forall a, b \in \mathbb{R},\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \sigma, \eta \in \Gamma(E),\ \nabla_{(X+aY)}(\sigma + b\eta) = \nabla_X\sigma + a\nabla_Y\sigma + b\nabla_X\eta + ab\nabla_Y\eta$ (Linearidade);*
2. *$\forall X \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M),\ \sigma \in \Gamma(E),\ \nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$ (Tensorialidade em $\mathfrak{X}$);*
3. *$\forall X \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M),\ \sigma \in \Gamma(E),\ \nabla_X f\sigma = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma$ (Regra de Leibniz).*

Dizemos que a seção $\nabla\sigma \in \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$ definida por $\nabla\sigma(X) = \nabla_X\sigma$ é a ***derivada covariante*** *de σ.*

As propriedades das conexões nos permitem estabelecer a seguinte expressão local: seja $\{\sigma_\alpha\}$ a base de uma trivialização local de E e $\{\partial_{x_i}\}$ uma base local de $\mathfrak{X}(M)$. Pondo $\sigma = \sum f^\alpha \sigma_\alpha$,

$$\nabla_{\partial_{x_i}}\sigma = \sum_\alpha (\partial_{x_i} f^\alpha)\sigma_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} f^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta \sigma_\beta,$$

onde as funções $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ correspondem aos respectivos coeficientes de $\nabla_{\partial x_i}\sigma_\alpha$ na base $\{\sigma_\alpha\}$ e são denominadas os **símbolos de Christoffel** de ∇ para esta trivialização.

A conexão ∇ em E induz uma conexão no fibrado dual E^*, também denotada por ∇, e definida por

$$\nabla_X \xi(\sigma) = X(\xi(\sigma)) - \xi(\nabla_X\sigma).$$

Consequentemente, a partir de ∇ podemos induzir uma conexão em qualquer fibrado gerado por produtos tensoriais de E e E^* simplesmente impondo que a conexão seja uma derivaçâo na álgebra tensorial gerada por $\Gamma(E)$ e $\Gamma(E^*)$, ou seja, para quaisquer elementos dessa álgebra, σ e ξ,

$$\nabla_X(\sigma \otimes \xi) := \nabla_X\sigma \otimes \xi + \sigma \otimes \nabla_X\xi.$$

Proposição 2.3.1 *Dada uma variedade Riemanniana (M,g), existe uma única conexão ∇ no fibrado tangente satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. *(Sem torção)*
2. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $Z(\langle X, Y\rangle) = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$. *(Compatível com a métrica)*

*Neste caso, ∇ é chamada **conexão de Levi-Civita**.*

As derivadas covariantes são o "modelo padrão" de operadores diferenciais de primeira ordem agindo em seções de um fibrado, assim como as derivadas direcionais o são em $\mathbb{R}^n$. Elas serão o ponto de partida para posteriormente formalizar a diferenciabilidade de seções no sentido fraco e, por esta razão, estabeleceremos relações diretas entre as conexões e os demais operadores diferenciais apresentados neste trabalho.

Proposição 2.3.2 *A derivada exterior pode ser obtida a partir da antissimetrização da derivada covariante induzida pela conexão de Levi-Civita em $\Lambda^k(T^*M)$. Para $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X_1, ..., X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$, a expressão da antissimetrização é dada por*

$$\begin{aligned} A(\nabla)\omega(X_1, ..., X_{k+1}) &:= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j}\omega)(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., X_{k+1}) \\ &= \sum_j (-1)^j \Bigg(X_j(\omega(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \omega(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \nabla_{X_j} X_l, ..., X_{k+1}) \Bigg). \end{aligned}$$

Demonstração. *Veja que podemos escrever o segundo termo como*

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq j} \omega(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \nabla_{X_j} X_l, ..., X_{k+1}) = \\ \sum_{l>j} (-1)^{j+l} \omega(\nabla_{X_j} X_l, X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \widehat{X_l}, ..., X_{k+1}) \\ + \sum_{l<j} (-1)^{j+l-1} \omega(\nabla_{X_j} X_l, X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \widehat{X_l}, ..., X_{k+1}) \end{aligned}$$

trocando os índices do segundo membro e somando-o ao primeiro, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq j} \omega(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \nabla_{X_j} X_l, ..., X_{k+1}) = \\ = \sum_{l>j} (-1)^{j+l} \omega(\nabla_{X_j} X_l - \nabla_{X_l} X_j, X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \widehat{X_l}, ..., X_{k+1}). \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão da antissimetrização e valendo-se do fato de que $\nabla_{X_j} X_l - \nabla_{X_l} X_j = [X_j, X_l]$, *obtemos*

$$\begin{aligned} A(\nabla)\omega(X_1,...,X_{k+1}) =& \sum_j (-1)^j X_j(\omega(X_1,...,\widehat{X_j},...,X_{k+1}) \\ &+ \sum_{l>j} (-1)^{j+l} \omega([X_j, X_l], X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., \widehat{X_l}, ..., X_{k+1}). \end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.3.2 *A partir da noção da diferencial de uma função* $f \in C^\infty(M)$ *como uma 1-forma, definimos, na presença de uma métrica, o* ***campo gradiente*** *de* f *como*

$$\nabla f := df^\sharp.$$

Para evitar ambiguidade, denotaremos a derivada covariante de uma função f por df, visto que nesse caso as definições coincidem e reservaremos a notação ∇f para o gradiente.

Definição 2.3.3 *O* ***tensor de curvatura*** *de uma conexão* ∇ *é um mapa suave* $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \to End(E)$ *determinado por*

$$\mathcal{R}(X,Y)\sigma := \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma.$$

Definição 2.3.4 *Uma variedade diz-se* ***orientável*** *se admite um atlas* $\mathscr{A}$ *tal que o determinante da diferencial de qualquer mudança de carta de* $\mathscr{A}$ *é positivo ou negativo. Se escolhido e fixado um atlas desta maneira,* M *diz-se* ***orientada****.*

Para os próximos resultados e definições, considere M uma variedade Riemanniana orientada munida de uma métrica g e ∇ a conexão de Levi-Civita.

Proposição 2.3.3 *Valem os seguintes fatos sobre M.*

1. *Cada ponto de M admite, numa vizinhança local, uma base ortonormal positiva de campos de vetores, i.e. um conjunto de n de campos* $\{E_i\}_1^n \subset \mathfrak{X}(U)$, *com* $p \in U$ *tais que* $\langle E_i(p), E_j(p)\rangle = \delta_{ij}$ *e* $\det(E_1(p), ..., E_n(p)) > 0$, $\forall p \in M$;
2. *M admite uma única forma,* $dM \in \Omega^n(M)$ *tal que para qualquer base ortonormal positiva local* $\{E_i\}_1^n$, $dM(E_1, ..., E_n) \equiv 1$ *chamada forma de volume de (M,g);*
3. *Se M possui fronteira,* ∂M *admite um campo normal unitário* $\mathcal{N}$ *e a forma de volume de* ∂M *é dada por* $i_{\mathcal{N}} dM|_{\partial M}$.

Demonstrações destas propriedades são encontradas em (CONLON, 2013; NICOLAESCU, 2007).

Para cada $k \geq 0$ a métrica g induz uma métrica no espaço de k-formas. Dadas $\omega, \eta \in \Omega^k(M),\ p \in M$ escolha uma base ortonormal de T_pM, $\{E_1, ..., E_n\}$ positivamente orientada e defina o produto interno pontualmente por

$$\langle \omega, \eta \rangle_p := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)})\eta(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)}).$$

Esta métrica não depende da escolha da base. De fato, veja que, se $\xi^1, ..., \xi^k, \zeta^1, ..., \zeta^k$ são 1-formas, pode-se facilmente obter a identidade

$$\langle \xi^1 \wedge ... \wedge \xi^k, \zeta^1 \wedge ... \wedge \zeta^k \rangle = \det[\langle \xi^i, \zeta^j \rangle].$$

Como $\langle \xi^i, \zeta^i \rangle$ não depende da escolha da base, o produto interno das formas goza da mesma propriedade, portanto, pode ser globalmente definido de maneira única e suave.

Proposição 2.3.4 *A conexão induzida em $\Lambda^k(T^*M)$ por ∇ é compatível com a métrica.*

Demonstração. É suficiente mostrar que para um quadro ortonormal local de campos $\{E_j\}_1^n$ definidos sobre um aberto $U \subset M$,

$$E_j(\langle \omega, \eta \rangle) = \langle \nabla_{E_j}\omega, \eta \rangle + \langle \omega, \nabla_{E_j}\eta \rangle.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} E_j(\langle \omega, \eta \rangle) = &\sum_{\sigma \in S_k} E_j(\omega(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)}))\eta(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)}) \\ &+ \sum_{\sigma \in S_k} \omega(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)})E_j(\eta(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)})). \end{aligned}$$

Evocando a expressão da conexão induzida,

$$\begin{aligned} E_j(\omega(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)})) =& (\nabla_{E_j}\omega)(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(k)})) \\ &+ \sum_l \omega(E_{\sigma(1)}, ..., \nabla_{E_j}E_{\sigma(l)}, ..., E_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Agora veja que, como $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$,

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{j\sigma(l)} =& \langle \nabla_{E_j}E_{\sigma(l)}, E_r \rangle \\ =& -\langle E_{\sigma(l)}, \nabla_{E_j}E_r \rangle \\ =& -\Gamma^{\sigma(l)}_{jr}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\sum_{l}\omega(E_{\sigma(1)},...,\nabla_{E_j}E_{\sigma(l)},...,E_{\sigma(k)}) =&\sum_{l,r}\Gamma^{r}_{j,\sigma(l)}\omega(E_{\sigma(1)},...,\widehat{E}_{\sigma(l)},E_r,...,E_{\sigma(k)})\\ =&-\sum_{l,r}\Gamma^{\sigma(l)}_{jr}\omega(E_{\sigma(1)},...,\widehat{E}_{\sigma(l)},E_r,...,E_{\sigma(k)})\\ =&0.\end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos

$$\sum_{l}\eta(E_{\sigma(1)},...,\nabla_{E_j}E_{\sigma(l)},...,E_{\sigma(k)}) = 0.$$

Assim,

$$E_j(\omega(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})) = (\nabla_{E_j}\omega)(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)}))$$

e

$$E_j(\eta(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})) = (\nabla_{E_j}\eta)(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})).$$

Logo,

$$\begin{aligned}E_j(\langle\omega,\eta\rangle) = &\sum_{\sigma\in S_k}(\nabla_{E_j}\omega)(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})\eta(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})\\ &+\sum_{\sigma\in S_k}\omega(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})(\nabla_{E_j}\eta)(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})\\ =&\langle\nabla_{E_j}\omega,\eta\rangle+\langle\omega,\nabla_{E_j}\eta\rangle.\end{aligned}$$

□

Corolário 2.3.1 *A forma de volume dM é paralela com respeito à conexão de Levi-Civita, i.e., $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\nabla_X dM = 0.$$

Demonstração. Da compatibilidade,

$$\begin{aligned}X(\langle dM,dM\rangle) =&2\langle\nabla_X dM,dM\rangle\\ =&2\nabla_X dM(E_1,...,E_n)dM(E_1,...,E_n)\\ =&2\nabla_X dM(E_1,...,E_n).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$X(\langle dM,dM\rangle) = X(1) = 0.$$

□

Definição 2.3.5 *O **operador de Hodge** associado a uma base ortonormal local em $U \subset M$ de formas, $\xi^1, ..., \xi^n$, é o mapa $C^\infty(U)$-linear $\star : \Omega^k(U) \to \Omega^{n-k}(U)$ posto da seguinte maneira.*

- $$\star 1 = dM$$

- $$\star \xi^{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \xi^{\sigma(k)} = sgn(\sigma)\xi^{\sigma(k+1)} \wedge ... \wedge \xi^{\sigma(n)}$$

  para toda permutação $\sigma \in S_n$ e todo $k > 0$.

Note que, por construção, o operador de Hodge dá origem a uma correspondência local entre $\Omega^k(U)$ e $\Omega^{n-k}(U)$ e, consequentemente à forma $C^\infty(U)$-bilinear não degenerada definida em $\Omega^k(U)$ dada por $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \star\eta \in \Omega^n(U)$. O próximo resultado o explicita a correlação entre esta forma não degenerada e a métrica anteriormente definida em $\Omega^k(M)$, justificando a existência deste operador.

Proposição 2.3.5 *Sejam $\omega, \eta \in \Omega^k(U)$. Então,*

$$\omega \wedge \star\eta = \langle \omega, \eta \rangle dM.$$

Demonstração. Se $k = 0$ ou $k = n$, é óbvio. Do contrário, considere I como um k-multi-índice, de modo que

$$\omega = \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}} \xi^{\mathrm{I}}$$

e

$$\eta = \sum_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}} \xi^{\mathrm{I}},$$

onde $\xi^I := \xi^{i_1} \wedge ... \wedge \xi^{I_k}$.

Um índice complementar de I é um $(n-k)-$multi-índice I^C tal que $(\mathrm{I}, \mathrm{I}^C) \in S_n$ e $\mathrm{sgn}(I, I^C) = 1$. Note que os $(n-k)-$multi-índices complementares também formam uma base local de $\Omega^{n-k}(U)$, tal que $\xi^{\mathrm{I}} \wedge \xi^{\mathrm{J}} = 0$, se $\mathrm{I}^C \neq \mathrm{J}$, a menos de permutação. Portanto,

$$\star\Big(\sum_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}} \xi^{\mathrm{I}}\Big) = \sum_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}} \xi^{\mathrm{I}^C}$$

e

$$\begin{aligned}\omega \wedge \star\eta =& \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}} \xi^{\mathrm{I}} \wedge \xi^{\mathrm{I}^C}\\ =& \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}} dM\\ =& \sum_{\mathrm{I}} \omega(E_{\mathrm{I}(1)}, ..., E_{\mathrm{I}(k)})\eta(E_{\mathrm{I}(1)}, ..., E_{\mathrm{I}(k)})dM\\ =& \langle\omega, \eta\rangle dM,\end{aligned}$$

onde $\{E_j\}$ é a base dual de $\{\xi^j\}$. □

Corolário 2.3.2 *O operador de Hodge não depende da escolha de bases ortonormais, portanto está globalmente definido como um operador $\Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ não degenerado.*

Exemplo 2.3.1 *Considere $\mathbb{R}^3$ com a métrica canônica $g = \sum \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ e a orientação canônica. Das propriedades do operador $\star$, obtem-se*

- $$\star 1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3;$$

- $$\star dx^i = \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k;$$

- $$\star dx^i \wedge dx^j = \epsilon_{ijk} dx^k;$$

- $$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon_{ijk},$$

onde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \textit{se (i,j,k) é cíclica}\\ -1 & \textit{se (i,j,k) é acíclica}\\ 0 & \textit{se } i = j, i = k \textit{ ou } j = k.\end{cases}$$

Proposição 2.3.6 *O operador de Hodge é uma isometria pontual, i.e.*

$$\langle\star\omega, \star\eta\rangle = \langle\omega, \eta\rangle.$$

Demonstração. *Veja que se* $\xi^I(E_{I_1}, ..., E_{I_k}) = 1$*, então*

$$\xi^{I^C}(E_{I_{k+1}}, ..., E_{I_n}) = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle \star\omega, \star\eta\rangle =& \langle \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}}\xi^{\mathrm{I}^C}, \sum_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}}\xi^{\mathrm{I}^C}\rangle \\ =& \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}}.\end{aligned}$$

□

Corolário 2.3.3 *O operador de Hodge é uma involução a menos de um sinal:*

$$\star\star = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{Id}.$$

Demonstração. *Da proposição anterior,*

$$\begin{aligned}\star\omega \wedge \star\star\,\eta =& \langle \star\omega, \star\eta\rangle dM \\ =& \langle \omega, \eta\rangle dM \\ =& \eta \wedge \star\omega,\end{aligned}$$

então,

$$\star\omega \wedge (\star\star\,\eta - (-1)^{k(n-k)}\eta) = 0.$$

□

Corolário 2.3.4 *O operador de Hodge comuta com as derivadas covariantes, i.e.*

$$\nabla_X \star \omega = \star\nabla_X\omega, \ \forall X \in \mathfrak{X}(M), \omega \in \Omega^k(M).$$

Demonstração. *Dados* $\omega \in \Omega^k(M)$ *e* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, fixemos um aberto* $U \subset M$ *para o qual* $\{\xi^j\}_j$ *é uma base local de* $\Omega^k(U)$*. Note que, sendo* $(-) \wedge \star(-)$ *não degenerada,*

$$\nabla_X \star \omega|_U = \star\nabla_X\omega|_U \iff \xi^j \wedge \star\nabla_X\omega = \xi^j \wedge \nabla_X \star \omega, \forall j.$$

Tem-se

$$\xi^j \wedge \star\nabla_X\omega = \langle \xi^j, \nabla_X\omega\rangle dM$$

e, valendo-se da compatibilidade da conexão com a métrica,

$$\begin{aligned}\nabla_X(\langle\xi^j,\omega\rangle dM) &= \nabla_X(\langle\xi^j,\omega\rangle)dM + \langle\xi^j,\omega\rangle\nabla_X dM\\ &= \langle\xi^j,\nabla_X\omega\rangle dM + \langle\nabla_X\xi^j,\omega\rangle dM\\ &\quad + \langle\xi^j,\omega\rangle\nabla_X dM.\end{aligned}$$

Como $\nabla_X dM = 0$,

$$\begin{aligned}\xi^j\wedge\star\nabla_X\omega =&\nabla_X(\langle\xi^j,\omega\rangle dM) - \langle\nabla_X\xi^j,\omega\rangle dM\\ =&\nabla_X(\xi^j\wedge\star\omega) - \nabla_X\xi^j\wedge\star\omega\\ =&\xi^j\wedge\nabla_X\star\omega.\end{aligned}$$

Como $\nabla_X\star\omega|_U = \star\nabla_X\omega|_U$ *para qualquer aberto coordenado* U, *o resultado segue.*

□

Proposição 2.3.7 (Operador de Hodge em coordenadas gerais) *Seja* $\{dx^1,...,dx^n\}$ *uma base local de 1-formas de uma variedade Riemanniana* (M,g). *Pondo* $g^{ij} := \langle dx^i, dx^j\rangle$ *e* $[g_{ij}] := [g^{ij}]^{-1}$, *para um k-multi-índice* I,

$$\star dx^I = \det[g^{I_iI_j}]\sqrt{\det[g_{ij}]}dx^{I^C}$$

Demonstração. Seja $\{\xi^1,...,\xi^n\}$ *uma base ortonormal local. Existem funções* A^i_j *suaves definidas localmente tais que*

$$dx^i = \sum_j A^i_j\xi^j.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}dM =&(\sum_j A^1_j\xi^j)\wedge...\wedge(\sum_j A^n_j\xi^j)\\ =&\det[A^i_j]^{-1}dx^1\wedge...\wedge dx^n.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle dx^i, dx^k\rangle = \langle\sum_j A^i_j\xi^j, \sum_l A^k_l\xi^l\rangle = g^{ik} \Rightarrow$$

$$\sum_{j,l} A^i_jA^k_l\delta^{jl} = \sum_j A^i_jA^k_j = g^{ik} \Rightarrow$$

$$\det[A^i_j]^2 = \det[g^{ik}].$$

Logo,

$$dM = \sqrt{\det[g_{ij}]}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n.$$

Segue que

$$dx^I \wedge \star dx^I = \langle dx^I, dx^I \rangle \sqrt{\det[g_{ij}]} dx^I \wedge dx^{I^C} =$$

$$\det[g^{I_iI_j}]\sqrt{\det[g_{ij}]}dx^I \wedge dx^{I^C}.$$

Além disso, $dx^J \wedge \star dx^I = 0$ *se* $I \neq J$ *a menos de permutações.*

Segue da não degeneração da forma $(-) \wedge \star(-)$ *que*

$$\star dx^I = \det[g^{I_iI_j}]\sqrt{\det[g_{ij}]}dx^{I^C}$$

□

Proposição 2.3.8 *Seja* M *uma variedade Riemanniana orientada com fronteira e* $\omega \in \Omega^k(M)$. *Valem as seguintes identidades relacionando os operadores* T, N *e* $\star$*:*

- $\star T(\omega) = N(\star\omega)$*;*
- $\star N(\omega) = T(\star\omega)$.

Demonstração. Se $\{E_1, ..., E_n\}$ é uma base ortonormal positiva local tal que $E_1|_{\partial M} = \mathcal{N}$ é um campo normal a ∂M e $\{\xi^1, ..., \xi^n\}$ é sua base dual, para um multi-índice I, $1 \in I \iff 1 \notin I^C$. Portanto, vale que

$$\star T(\xi^I) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \in I \\ \xi^{I^C} & \text{se } 1 \notin I \end{cases}$$

e

$$T(\star\xi^I) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \notin I \\ \xi^{I^C} & \text{se } 1 \in I \end{cases}$$

com isto, para $\omega = \sum_I f_I d\xi^I$,

$$\begin{aligned} \star T(\omega) =& \sum_{1 \notin I} f_I \xi^{I^C} \\ =& \star\, \omega - \sum_{1 \in I} f_I \xi^{I^C} \\ =& \star\, \omega - T(\star\omega) \\ =& N(\star\omega). \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento, vale que $\star N(\omega) = T(\star\omega)$. $\square$

A última e fundamental parte deste capítulo tem por objetivo apresentar classe de operadores que generalizam o familiar operador de Laplace de funções em $\mathbb{R}^n$, dado por $\Delta f = -\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ e a relação entre estes e o tensor de curvatura.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e E um fibrado vetorial de base M munido de uma métrica e da conexão ∇. Denotando por $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita, podemos derivar covariantemente um tensor do tipo $\omega \otimes \sigma \in \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$ segundo a seguinte fórmula:

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) := \tilde{\nabla}\omega \otimes \sigma + \omega \otimes \nabla\sigma.$$

Em particular, podemos tomar a derivada covariante de $\nabla\sigma$, que, abusando da notação, denotaremos por $\nabla^2\sigma$.

Definição 2.3.6 *O **Laplaciano da conexão** ∇ é o operador $\Delta^\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, dado por*

$$\Delta^\nabla \sigma := -tr(\nabla^2)\sigma = -\sum_j \nabla_{E_j}\nabla_{E_j}\sigma + \nabla_{\tilde{\nabla}_{E_j}E_j}\sigma.$$

Note que no caso em que $\Gamma(E) = C^\infty(M)$, a expressão do Laplaciano torna-se $\Delta^\nabla f = -\sum_j E_j(E_j(f))$ e, se $M = U \subset \mathbb{R}^n$, esta coincide com o operador de Laplace usual.

A álgebra exterior da variedade (M, g) também possui uma extensão natural do operador de Laplace. Para defini-la, é necessário introduzir outro operador de fundamental importância na teoria de Hodge.

Definição 2.3.7 *A **derivada coexterior** é o operador $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ determinado por*

$$\omega \mapsto (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star \omega.$$

Se ω é tal que

$$\delta\omega = 0,$$

*ω é dita uma forma **cofechada** e se para alguma forma η,*

$$\omega = \delta\eta,$$

*ω é dita uma forma **coexata**.*

Proposição 2.3.9 *A derivada coexterior de uma k-forma ω possui a seguinte expressão agindo em $k-1$ campos $\{X_1, ..., X_{k-1}\}$: escolhendo uma base ortonormal local positiva $\{E_1, ..., E_n\}$,*

$$\delta\omega(X_1, ..., X_{k-1}) = -\sum_j \nabla_{E_j}\omega(E_j, X_1, ..., X_{k-1}).$$

Demonstração. Veja que, pela tensorialidade, podemos nos restringir ao caso em que $X_j = E_{I_j}$, sendo I um $(k-1)$-multi-índice.

Da definição de δ e das propriedades de $\star$, vale que

$$\begin{aligned}\delta\omega(E_{I_1}..., E_{I_{k-1}}) =&(-1)^{n(k+1)+1} \star d \star \omega(E_{I_1}..., E_{I_{k-1}})\\ =&(-1)^{n(k+1)+1} d \star \omega(E_{I_1^C}..., E_{I_{n-k+1}^C}).\end{aligned}$$

Escrevendo a derivada exterior em termos da conexão ∇ e sabendo que $\star$ comuta com as derivadas covariantes,

$$\begin{aligned}d \star \omega(E_{I_1^C}..., E_{I_{n-k+1}^C}) =& \sum_j (-1)^j \nabla_{E_{I_j^C}}(\star\omega)(E_{I_1^C}..., \hat{E}_{I_j^C}..., E_{I_{n-k+1}^C})\\ =& \sum_j (-1)^j \star (\nabla_{E_{I_j^C}}\omega)(E_{I_1^C}..., \hat{E}_{I_j^C}..., E_{I_{n-k+1}^C}).\end{aligned}$$

Agora note que, sendo $\{\xi^j\}$ a base dual de $\{E_j\}$,

$$\begin{aligned}(\xi^{I_1^C} \wedge ...\widehat{\xi^{I_j^C}} ... \wedge \xi^{I_{n-k+1}^C}) \wedge (\xi^{I_j^C} \wedge \xi^{I_1} \wedge ... \wedge \xi^{I_{k-1}}) =&\\ =&(-1)^{n-k+1-j+(n-k)(k)} \xi^I \wedge \xi^{I^C}\\ =&(-1)^{nk+n-j+1} dM.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_j (-1)^j \star (\nabla_{E_{I_j^C}}\omega)(E_{I_1^C}..., \hat{E}_{I_j^C}..., E_{I_{n-k+1}^C}) =&\\ = \sum_j (-1)^j (-1)^{nk+n-j+1} \nabla_{E_{I_j^C}}\omega(E_{I_j^C}, E_{I_1}, ..., E_{I_{k-1}}).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\delta\omega(E_{I_1}..., E_{I_{k-1}}) =& \sum_j (-1)^{n(k+1)+1}(-1)^{nk+n+1} \nabla_{E_{I_j^C}}\omega(E_{I_j^C}, E_{I_1}, ..., E_{I_{k-1}})\\ =& -\sum_j \nabla_{E_{I_j^C}}\omega(E_{I_j^C}, E_{I_1}, ..., E_{I_{k-1}}).\end{aligned}$$

Por fim, notando que $\nabla_{E_j}\omega(E_j, E_{I_1}, ..., E_{I_{k-1}}) = 0$ sempre que $j = I_l$, $1 \leq l \leq k-1$ e fazendo a troca e índices $I_j^C \mapsto j$ o resultado segue. $\square$

Definição 2.3.8 *Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, o* ***divergente*** *de X é a função definida pontualmente, a partir de uma base ortonormal local, $\{E_1, ..., E_n\}$,*

$$\nabla \cdot X := \sum \nabla_{E_j} \langle X, E_j \rangle.$$

Note que é imediato que $\nabla \cdot X = -\delta X^\flat$.

Definição 2.3.9 *O* ***Laplaciano de Hodge*** *é o operador $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ dado por*

$$\Delta\omega = (d\delta + \delta d)\omega.$$

Fazendo novamente um paralelo com o laplaciano clássico, se $k = 0$,

$$\Delta f = \delta df = -\sum_j \nabla_{E_j} df(E_j) =$$

$$-\sum_j E_j(E_j(f)) = \Delta^\nabla f.$$

Até então, definimos duas extensões do operador de Laplace, que coincidem agindo sobre as funções diferenciáveis. Nosso objetivo agora é estabelecer uma correlação entre Δ e Δ^∇ agindo em formas de grau arbitrário.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Revisitemos a expressão do tensor de curvatura, agora para o caso do fibrado $\Lambda^k(T^*M)$ munido da conexão ∇ induzida pela conexão de Levi-Civita de (M, g). Para $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$\mathcal{R}(X, Y)\omega = \nabla_X \nabla_Y \omega - \nabla_Y \nabla_X \omega - \nabla_{[X,Y]}\omega.$$

Podemos relacionar diretamente a curvatura da conexão induzida em $\Lambda^k(T^*M)$ com a curvatura da própria conexão de Levi-Civita em TM,

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})Z,$$

como explicitado na proposição a seguir.

Proposição 2.3.10 *A curvatura da conexão induzida no fibrado $\Lambda^k(T^*M)$ pode ser expressa em termos da curvatura de TM da seguinte maneira: para $\omega \in \Omega^k(M)$ e $Z_1, ..., Z_k \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\mathcal{R}(X, Y)\omega(Z_1, ..., Z_k) = -\sum_j \omega(Z_1, ..., \mathcal{R}(X, Y)Z_j, ..., Z_k).$$

Demonstração. Tome $\theta = \omega(Z_1, ..., Z_k)$ e $\theta^j_T = \omega(Z_1, ..., \nabla_T Z_j, ..., Z_k)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y \omega(Z_1, ..., Z_k) =& \nabla_X (Y(\theta) - \sum_j \theta^j_Y) \\
& - \sum_j \nabla_Y \omega(Z_1, ..., \nabla_X Z_j, ..., Z_k) \\
=& X(Y(\theta)) - \sum_j X(\theta^j_Y) \\
& - \sum_j \nabla_Y \omega(Z_1, ..., \nabla_X Z_j, ..., Z_k)
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
X(\theta^j_Y) =& \nabla_X \omega(Z_1, ..., \nabla_Y Z_j, ..., Z_k) + \omega(Z_1, ..., \nabla_X \nabla_Y Z_j, ..., Z_k) \\
& + \sum_{l \neq j} \omega(Z_1, ..., \nabla_X Z_l, ..., \nabla_Y Z_j, ..., Z_k).
\end{aligned}$$

A expressão de $-\nabla_Y \nabla_X \omega(Z_1, ..., Z_k)$ é análoga, trocando as posições de X e Y e o sinal.

Para o terceiro membro,

$$-\nabla_{[X,Y]} \omega(Z_1, ..., Z_k) = -[X, Y](\theta) + \sum_j \theta^j_{[X,Y]}.$$

Somando os três membros, é imediato que os termos da forma

$\omega(Z_1, ..., \nabla_X Z_l, ..., \nabla_Y Z_j, ..., Z_k)$, $\nabla_Y \omega(Z_1, ..., \nabla_X Z_j, ..., Z_k)$ e $\nabla_X \omega(Z_1, ..., \nabla_Y Z_j, ..., Z_k)$ são somados aos seus opostos, restando

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X, Y)\omega(Z_1, ..., Z_k) =& X(Y(\theta)) - Y(X(\theta)) - [X, Y](\theta) \\
& - \sum_j \omega(Z_1, ..., (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z_j, ..., Z_k) \\
=& - \sum_j \omega(Z_1, ..., \mathcal{R}(X, Y)Z_j, ..., Z_k).
\end{aligned}$$

□

Definição 2.3.10 *Fixando uma base ortonormal local em TM, $\{E_1, ..., E_n\}$, o* ***operador de Weitzenböck*** *agindo em ω é dado por*

$$\mathrm{Ric}(\omega)(Z_1, ..., Z_k) := - \sum_{i,j} \mathcal{R}(E_j, Z_i)\omega(Z_1, ..., E_j, \hat{Z}_i, ..., Z_k).$$

A notação usada é justificada pelo seguinte caso particular: se $\omega \in \Omega^1(M)$*,*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\omega)(Z) &= -\sum_j \mathcal{R}(E_j, Z)\omega(E_j)\\ &= \sum_j \omega(\mathcal{R}(E_j, Z)E_j)\\ &= \sum_j \langle \mathcal{R}(E_j, Z)E_j, \omega^\sharp\rangle.\end{aligned}$$

Esta última expressão coincide com o ***tensor de Ricci****,* $\mathrm{Ric}(Z, \omega^\sharp)$*, um objeto central no contexto da geometria Riemanniana.*

Note que a definição de Ric não depende da ecolha de $\{E_1, ..., E_n\}$. Com efeito, se $\{F_1, ..., F_n\}$ é outra base ortonormal local de campos, satisfazendo $F_j = \sum A_j^k E_k$ para algum $A = [A_j^k] : M \to O(n)$, tem-se

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j} \mathcal{R}(F_j, Z_i)\omega(Z_1, ..., F_j, \hat{Z}_i, ..., Z_k) &= -\sum_{i,j} \mathcal{R}(\sum_k A_j^k E_k, Z_i)\omega(Z_1, ..., \sum_l A_j^l E_l, \hat{Z}_i, ..., Z_k)\\ &= -\sum_{i,j}\sum_{k,l} A_j^k A_j^l \mathcal{R}(E_k, Z_i)\omega(Z_1, ..., E_l, \hat{Z}_i, ..., Z_k)\\ &= -\sum_i \sum_k \mathcal{R}(E_k, Z_i)\omega(Z_1, ..., E_k, \hat{Z}_i, ..., Z_k),\end{aligned}$$

pois $\sum_j A_j^k A_j^l = (AA^T)_k^l = \delta_k^l$. Desse modo, Ric pode ser globalmente definido de maneira suave.

Teorema 2.3.1 (Weitzenböck) *Seja* $\omega \in \Omega^k(M)$*. Os Laplacianos de Hodge e da conexão induzida pela conexão de Levi-Civita relacionam-se pela seguinte fórmula:*

$$\Delta\omega = \Delta^\nabla \omega + \mathrm{Ric}(\omega). \tag{2.1}$$

Demonstração. Para $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
d\delta\omega(X_1,...,X_k) =& \sum_j (-1)^j \nabla_{X_j}(\delta\omega)(X_1,...,\widehat{X_j},...,X_k) \\
=& \sum_j (-1)^j \Big(X_j\big((\delta\omega)(X_1,...,\widehat{X_j},...,X_k)\big) \\
&- \sum_{l\neq j} (\delta\omega)(X_1,...,\nabla_{X_j}X_l,...,\widehat{X_j},...,X_k)\Big) \\
=& -\sum_j (-1)^j \Big(X_j\Big(\sum_i \nabla_{E_i}\omega(E_i,X_1,...,\widehat{X_j},...,X_k)\Big) \\
&+ \sum_{l\neq j}\sum_i \nabla_{E_i}\omega(E_i,X_1,...,\nabla_{X_j}X_l,...,\widehat{X_j},...,X_k) \\
=& -(-1)^j \sum_{i,j} \nabla^2_{X_j,E_i}\omega(E_i,X_1,...,\widehat{X_j},...,X_k) \\
=& -\sum_{i,j} \nabla^2_{X_j,E_i}\omega(X_1,...,E_i,\widehat{X_j},...,X_k).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\delta d\omega(X_1,...,X_k) =& -\sum_i \nabla_{E_i}(d\omega)(E_i,X_1,...,X_k) \\
=& -\sum_i \Big(E_i\big(d\omega(E_i,X_1,...,X_k)\big) - \sum_l d\omega(X_1,...,\nabla_{E_i}X_l,...,X_k)\Big) \\
=& -\sum_i\sum_j (-1)^{j+1} \Big(E_i\big((\nabla_{X_j}\omega)(E_i,X_1,...,\widehat{X_j},...,X_k)\big) \\
&- \sum_l (\nabla_{X_j}\omega)(E_i,X_1,...,\nabla_{E_i}X_l,...\widehat{X_j},...,X_k)\Big) \\
&- \sum_i \Big(E_i\big(\nabla_{E_i}\omega(X_1,...,X_k)) - \sum_l \nabla_{E_i}\omega(X_1,...,\nabla_{E_i}X_l,...,X_k)\Big) \\
=& \sum_{i,j} \nabla^2_{X_j,E_i}\omega(X_1,...,E_i,\widehat{X_j},...,X_k) + \Delta^{\nabla}\omega(X_1,...,X_k).
\end{aligned}$$

□

Por fim,

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{X_j,E_i} - \nabla^2_{E_i,X_j} =& \nabla_{X_j}\nabla_{E_i} - \nabla_{E_i}\nabla_{X_j} - \nabla_{(\nabla_{X_j}E_i - \nabla_{E_i}X_j)} \\
=& -\mathcal{R}(E_i,X_j).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(d\delta + \delta d)\omega(X_1,...,X_k) =& -\sum_{i,j} \mathcal{R}(E_i,X_j)\omega(X_1,...,E_i,\widehat{X_j},...,X_k) \\
&+ \Delta^{\nabla}\omega(X_1,...,X_k).
\end{aligned}$$

2.4 Integração

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e ω uma n-forma suave em U. A forma ω pode ser escrita como $f(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$, onde $f \in C^\infty(U)$. Então, define-se a integral de ω em U como

$$\int_U \omega := \int_U f(x)dx^1...dx^n = \int_U f(x)dx.$$

No caso de uma vizinhança coordenada (φ, U) de uma variedade M e $\omega \in \Omega^n(M)$, define-se a integral de ω em U, como

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

e, se M está orientada, tomando uma cobertura de vizinhanças coordenadas de M, $\{(U_i, \varphi_i)\}$ e $\{\rho_i\}$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura, define-se

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} \rho_i \omega.$$

Definição 2.4.1 *Seja $E \to M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade Riemanniana orientada munido de uma métrica. O produto L^2 entre duas seções de E é a forma bilinear simétrica determinada por*

$$< \sigma, \eta >:= \int_M \langle \sigma, \eta \rangle dM,$$

sendo $\langle -, - \rangle$ a métrica em E.

Esta forma determina um produto interno no subespaço de seções tais que $< \sigma, \sigma > < \infty$. Neste caso, o produto L^2 pode ser expresso pela fórmula da polarização:

$$< \sigma, \eta >= \frac{1}{2}(< \sigma + \eta, \sigma + \eta > - < \sigma, \sigma > - < \eta, \eta >)$$

e é claramente finito.

Seja $\iota : N \hookrightarrow M$ o mapa de inclusão de uma subvariedade N. Definimos a integral de uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ em N como

$$\int_N \omega := \int_N \iota^* \omega.$$

Com isto, enunciamos um resultado clássico da teoria de variedades.

Teorema 2.4.1 (Stokes) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, orientada e com fronteira orientada. Dada $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ de suporte compacto, vale*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (CONLON, 2013).

Como consequência direta do teorema de Stokes, obtemos o

Teorema 2.4.2 (Fórmula de Green) *Se M é uma variedade Riemanniana, nas condições anteriores, para $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, $\eta \in \Omega^k(M)$, vale*

$$\int_M \langle d\omega, \eta \rangle dM = \int_M \langle \omega, \delta\eta \rangle dM + \int_{\partial M} \mathrm{T}(\omega) \wedge \star\mathrm{N}(\eta). \tag{2.2}$$

Demonstração. Temos

$$d(\omega \wedge \star\eta) = d\omega \wedge \star\eta + (-1)^{k-1}\omega \wedge d \star \eta.$$

Valendo-se da idempotência do operador de Hodge,

$$\begin{aligned} \omega \wedge d \star \eta =& (-1)^{(k-1)(n-k+1)}\omega \wedge \star(\star d \star \eta) \\ =& (-1)^{nk+n+k+1}\omega \wedge \star(\star d \star \eta). \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão de $d(\omega \wedge \star\eta)$, tem-se

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \star\eta) =& d\omega \wedge \star\eta + (-1)^{k-1}(-1)^{nk+n+k+1}\omega \wedge \star(\star d \star \eta) \\ =& d\omega \wedge \star\eta - (-1)^{nk+n+1}\omega \wedge \star(\star d \star \eta) \\ =& d\omega \wedge \star\eta - \omega \wedge \star\delta\eta. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_M d(\omega \wedge \star\eta) &= \int_M d\omega \wedge \star\eta - \int_M \omega \wedge \star\delta\eta \\ &= \int_{\partial M} \iota^*(\omega \wedge \star\eta). \end{aligned}$$

Ademais, é óbvio que

$$\int_{\partial M} \iota^*(\omega \wedge \star\eta) = \int_{\partial M} T(\omega \wedge \star\eta) = \int_{\partial M} T(\omega) \wedge T(\star\eta)$$

e como $T\star = \star N$, segue o resultado. □

Outra implicação deste poderoso resultado é o

Teorema 2.4.3 (Divergência) *Sob as condições da fórmula de Green, denotando $\partial M = S$, vale*

$$\int_M \nabla \cdot X dM = \int_S \langle X, \mathcal{N} \rangle dS$$

Demonstração. Veja que $d(i_X dM) = \nabla \cdot X dM$.

De fato, escrevendo X localmente numa base ortonormal positiva $\{E_j\}$, com base dual $\{\xi^j\}$, como $\sum_j f_j E_j$, temos

$$i_X dM = \sum_j (-1)^j f_j \xi^1 \wedge ... \wedge \widehat{\xi^j} ... \wedge \xi^n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d(i_X dM) =& \sum_j (-1)^j E_j(f_j) \xi^j \wedge \xi^1 \wedge ... \wedge \widehat{\xi^j} ... \wedge \xi^n \\ =& \sum_j (-1)^{2j} E_j(f_j) \xi^1 \wedge ... \wedge \xi^j \wedge ... \wedge d\xi^n = \sum_j E_j(f_j) dM \\ =& \sum_j E_j(\langle X, E_j \rangle) dM \\ =& \nabla \cdot X dM. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_M \nabla \cdot X dM = \int_M d(i_X dM) = \int_S \iota^*(i_X dM).$$

Agora note que $dS = i_{\mathcal{N}} dM$ e, portanto, podemos escrever

$$dM|_S = \mathcal{N}^\flat \wedge dS.$$

Daí,

$$i_X dM|_S = \mathcal{N}^\flat(X) dS - \mathcal{N}^\flat \wedge i_X dS.$$

É imediato que, por conter a componente $\mathcal{N}^\flat$, $\iota^*(\mathcal{N}^\flat \wedge i_X dS) = 0$. Assim, temos

$$\int_S \iota^*(i_X dM) = \int_S \mathcal{N}^\flat(X) dS = \int_S \langle \mathcal{N}, X \rangle dS.$$

□

Corolário 2.4.1 *Para $f \in C^\infty(M)$, tem-se*

$$\int_M \Delta f dM = -\int_M \nabla \cdot \nabla f dM = -\int_S \mathcal{N}(f) dS.$$

3 ELEMENTOS DE ANÁLISE EM VARIEDADES

Este capítulo é dedicado à apresentação das ferramentas da teoria da medida e de equações diferenciais parciais que serão necessárias adiante.

3.1 Teoria da medida e espaços de Sobolev

Proposição 3.1.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada. A função $U \mapsto \int_U dM$ determina uma medida de Radon na σ-álgebra de Borel de M. Demonstração. Escrevendo a métrica g numa representação local de uma carta positiva (φ, U), como $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, tem-se a representação local da forma de volume $dM = \sqrt{\det[g_{ij}]}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$. Assim, para um conjunto mensurável $V \subset U$,*

$$\int_V dM = \int_{\varphi(V)} \sqrt{\det[g_{ij}]} \circ \varphi^{-1} dx$$

sendo $\sqrt{\det[g_{ij}]} \circ \varphi^{-1}$ uma função contínua positiva e dx a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Disto segue que

- *$\int_V dM \geq 0$.*
- *$\int_V dM = 0$, se $V = \emptyset$.*
- *$\int_V dM < \infty$, se V é compacto.*
- *Existe uma sequência encadeada de compactos $V_k \nearrow V$ tal que $\lim_{k\to\infty} \int_{V_k} dM = \int_V dM$.*
- *Existe uma sequência encadeada de abertos $U_k \searrow V$ tal que $\lim_{k\to\infty} \int_{U_k} dM = \int_V dM$.*

Com o uso de partições da unidade é possível generalizar estas propriedades para qualquer Boreliano $V \subset M$. □

Com isto, estabelecemos os espaços L^p com respeito à medida dM.

Definição 3.1.1 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ mensurável. Defina para $p \geq 1$,* ***a norma*** *L^p de f como*

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f|^p dM \right)^{1/p}$$

e os espaços vetoriais

$$L^p(M) := \{f \text{ mensurável} \mid \|f\|_p < \infty\}/\{\|f\|_p = 0\}.$$

Teorema 3.1.1 (Riesz-Fischer) *Os espaços $L^p(M)$ são espaços de Banach com a respectiva norma L^p.*

Os espaços L^p podem ser definidos para seções de fibrados munidos de uma métrica Riemanniana e cuja base é uma variedade Riemanniana.

Definição 3.1.2 *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de rank k sobre a variedade Riemanniana M. Uma **seção Borel-mensurável** de E é um mapa $\sigma : E \to M$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$ e para qualquer conjunto $U \subset E$ pertencente à σ-álgebra de Borel do espaço total E, $\sigma^{-1}(U)$ pertence à σ-álgebra de Borel de M.*

Se o fibrado é está munido de uma métrica Riemanniana e σ e η são seções mensuráveis, é claro que $\langle \sigma, \eta \rangle$ é uma função mensurável.

Definição 3.1.3 *A **norma** $\mathbf{L^p}$, $\forall p \geq 1$ de uma seção mensurável σ do fibrado E, é dada por*

$$||\sigma||_{L^p} := \left(\int_M \langle \sigma, \sigma \rangle^{p/2} dM \right)^{1/p}.$$

O **espaço de seções** $\mathbf{L^p}$ de E pode ser definido equivalentemente de duas maneiras

1. Como o fecho do conjunto $\{\sigma \in \Gamma(E) |\ \|\sigma\|_p < \infty\}$ nesta norma quocientado pela relação $\sigma \sim \eta \iff \sigma - \eta = 0$ em dM-q.t.p.
2. De maneira análoga aos espaços de funções reais,

$$\{\sigma \text{ mensurável} \mid \|\sigma\|_p < \infty\} / \{\|\sigma\|_p = 0\}.$$

Denotamos este espaço por $L^p\Gamma(E)$, que torna-se um espaço vetorial normado com a norma anteriormente definida.

Definição 3.1.4 *Uma seção é dita localmente L^p se para cada compacto $K \subset M$, $\|\chi_K \sigma\|_p < \infty$, sendo χ_K a característica do conjunto K. O conjunto das seções localmente L^p é denotado $L^p_{loc}\Gamma(E)$.*

Como veremos adiante, as versões da decomposição de Hodge aqui abordadas serão demonstradas a partir da resolução de uma certa equação diferencial parcial linear envolvendo formas diferenciais.

Assim como a teoria padrão de EDPs em $\mathbb{R}^n$, desejamos estabelecer o conceito de solução fraca para um operador diferencial linear agindo em seções de um fibrado, bem como os espaços de Banach que naturalmente contém estas soluções, os espaços de Sobolev. Para tal, é necesário definir a derivação de seções no sentido fraco. Espelhando-se na teoria das distribuições, isto será feito a partir de um certo espaço de funções teste e de uma versão do teorema de integração por partes.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado munido de uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e de uma conexão ∇ compatível com a métrica. A compatibilidade da conexão permite escrever, para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seções suaves σ e ρ,

$$\int_M X(\langle \sigma, \rho \rangle) dM = \int_M \langle \nabla_X \sigma, \rho \rangle dM + \int_M \langle \sigma, \nabla_X \rho \rangle dM.$$

Concentrando-nos no lado esquerdo, temos $X(\langle \sigma, \rho \rangle) = \mathcal{L}_X \langle \sigma, \rho \rangle$, daí,

$$\int_M \mathcal{L}_X \langle \sigma, \rho \rangle dM = \int_M \mathcal{L}_X (\langle \sigma, \rho \rangle dM) - \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM$$

Como $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ e $\langle \sigma, \rho \rangle dM$ tem grau máximo $\Rightarrow d(\langle \sigma, \rho \rangle dM) = 0$,

$$\int_M \mathcal{L}_X \langle \sigma, \rho \rangle dM = \int_M d(\langle \sigma, \rho_X dM) - \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM$$

e, pelo teorema de Stokes,

$$\int_M d(\langle \sigma, \rho \rangle i_X dM) = \int_{\partial M} \langle \sigma, \rho \rangle i_X dM.$$

Logo,

$$\int_M \mathcal{L}_X \langle \sigma, \rho \rangle dM = \int_{\partial M} \langle \sigma, \rho \rangle i_X dM - \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM.$$

Assim, obtemos

$$\int_{\partial M} \langle \sigma, \rho \rangle i_X dM - \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM = \int_M \langle \nabla_X \sigma, \rho \rangle dM + \int_M \langle \sigma, \nabla_X \rho \rangle dM.$$

O cálculo acima nos permite expressar a integral de $\langle \nabla_X \sigma, \rho \rangle$ em função de termos que não dependem explicitamente de $\nabla_X \sigma$. Em particular, se $\rho \in \Gamma_c(E) := \{\rho \in \Gamma(E) \mid \text{supp } \sigma \subset\subset M\}$, $\rho|_{\partial M} = 0$, então,

$$\int_M \langle \nabla_X \sigma, \rho \rangle dM = - \int_M \langle \sigma, \nabla_X \rho \rangle dM - \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM.$$

Com isto, convencionamos a derivação covariante no sentido fraco.

Definição 3.1.5 *Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seções $\sigma, \eta \in L^1_{loc}\Gamma(E)$, dizemos que η é a derivada covariante fraca de σ na direção X, com respeito a conexão ∇, se $\forall \rho \in \Gamma_c(E)$, vale*

$$\int_M \langle \eta, \rho \rangle dM = -\int_M \langle \sigma, \nabla_X \rho \rangle dM - \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM.$$

Neste caso, escrevemos $\nabla_X \sigma := \eta$.

Desejamos obter as derivadas fracas de uma seção L^p(caso existam) é através de um limite de seções suaves numa norma adequada.

Para prosseguir com esta discussão, suponha que uma seção $\sigma \in L^p\Gamma(E)$ possua derivada covariante fraca na direção de qualquer campo e que todas estas são $L^p\Gamma(E)$.

Observe que, dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos tomar uma sequência $\{\sigma_j\} \subset \Gamma(E)$ com $\sigma_j \xrightarrow{L^p} \sigma$ e o candidato natural para $\nabla_X \sigma$ torna-se $\lim \nabla_X \sigma_j$. Para que isto seja coerente, faz-se necessário definir em que sentido converge a sequência $\{\nabla_X \sigma_j\}$, de modo a garantir que o candidato a derivada fraca seja de fato $L^p\Gamma(E)$. Para tal, assuma que possamos tomar $\{\sigma_j\}$ tal que $\{\nabla_X \sigma_j\} \subset L^p\Gamma(E)$ e que convirja no sentido L^p para η. Agora veja que pela desigualdade de Schwarz,

$$\langle \sigma, \rho \rangle \leq \sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle} \cdot \sqrt{\langle \rho, \rho \rangle} = |\sigma| \cdot |\rho|$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$\int_M |\sigma| \cdot |\rho| dM \leq \|\sigma\|_p \|\rho\|_{p^*},$$

sendo $p^* = \frac{p-1}{p}$ daí,

$$\left| \int_M \langle \eta - \nabla_X \sigma_j, \rho \rangle dM \right| \leq \|\eta - \nabla_X \sigma_j\|_p \|\rho\|_{p^*} \longrightarrow 0.$$

Similarmente,

$$\left| \int_M \langle \sigma - \sigma_j, \nabla_X \rho \rangle dM \right| \longrightarrow 0.$$

Por fim, tomando $C = \sup_{supp\ \rho} | \star \mathcal{L}_X dM|$,

$$\left| \int_M \langle \sigma - \sigma_j, \rho \rangle \mathcal{L}_X dM \right| \leq C \left| \int_M \langle \sigma - \sigma_j, \rho \rangle dM \right| \longrightarrow 0.$$

Logo, $\nabla_X \sigma = \eta$.

O tipo de seção para o qual acabamos de investigar a obtenção de derivadas fracas forma um chamado *espaço de Sobolev*, que indicamos por

$$W^{1,p}\Gamma(E) := \{\sigma \in L^p\Gamma(E) |\ \exists \nabla_X \sigma \in L^p\Gamma(E)\ \forall X\}$$

e o critério de convergência que foi exigido é equivalente à convergência na norma que definiremos da seguinte maneira: escolha $\{U_\alpha\}$, uma cobertura de cartas locais de M, com uma partição da unidade, $\{\rho_\alpha\}$, subordinada a esta e, para cada α, um quadro ortonormal $\{E_j^\alpha\}$, em U_α. Para um multi-índice $\mathrm{I} = (\mathrm{I}_1, ..., \mathrm{I}_k)$, ponha $\nabla_\mathrm{I} := \nabla_{E^\alpha_{\mathrm{I}_k}} ... \nabla_{E^\alpha_{\mathrm{I}_1}}$. A norma $W^{k,p}$ de uma seção σ é dada por

$$\|\sigma\|_{W^{k,p}} = \left(\int_M \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{|\mathrm{I}|=0}^{k} \langle \nabla_\mathrm{I}\sigma, \nabla_\mathrm{I}\sigma\rangle^{p/2} dM \right)^{1/p}.$$

Quando a variedade base M é Riemanniana, podemos definir uma norma $W^{s,p}$ equivalente a partir das normas L^p das k derivadas covariantes de uma seção: $\|\sigma\|^p_{W^{k,p}} = \sum_{j=0}^k \|\nabla^j\sigma\|_p$.

Em paralelo com a teoria clássica de funções de Sobolev em $\mathbb{R}^n$, a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ depende, em geral, da escolha da conexão e dos quadros ortonormais, entretanto, no caso em que M é compacta, as topologias induzidas pelas normas construidas a partir de diferentes escolhas de quadros ortonormais e conexões são equivalentes. Daqui em diante, assumiremos, sem mencionar, a escolha fixa de trivializações e quadros ortonormais para a obtenção da norma.

Definição 3.1.6 *Os **espaços de Sobolev de seções** são os conjuntos dados por*

$$W^{k,p}\Gamma(E) := \{\sigma \mid \forall \alpha, \mathrm{I} = (\mathrm{I}_1, ..., \mathrm{I}_k)\ \exists \nabla_\mathrm{I}(\sigma|_{U_\alpha})\ e\ \|\sigma\|_{W^{k,p}} < \infty\}/\{\|\sigma\|_{W^{k,p}} = 0\}.$$

À partir da construção dos espaços de Sobolev, podemos recuperar teoremas clássicos da teoria para funções escalares em $\mathbb{R}^n$. Os próximos resultados referentes aos espaços de Sobolev são adaptações de suas versões originais para o contexto de fibrados e serão apenas enunciados neste trabalho. Uma exposição detalhada da teoria clássica em $\mathbb{R}^n$ destes resultados pode ser encontrada em (ADAMS; FOURNIER, 2003).

Teorema 3.1.2 *Os espaços de Sobolev de seções são espaços de Banach com a norma $W^{k,p}$ e os espaços $H^k\Gamma(E) := W^{k,2}\Gamma(E)$ são espaços de Hilbert com o produto interno de duas seções σ e ρ dado por*

$$< \sigma, \rho >= \tfrac{1}{2}(\|\sigma + \rho\|^2_{W^{k,2}} - \|\sigma\|^2_{W^{k,2}} - \|\rho\|^2_{W^{k,2}}).$$

Teorema 3.1.3 (Meyers-Serrin) *Os espaços de Sobolev de seções são equivalentemente definidos como o fecho de $\Gamma_c(E)$ na norma $W^{k,p}$.*

Teorema 3.1.4 (Mergulho de Sobolev) *Para k, l inteiros positivos, são contínuos os seguintes mergulhos*

$$W^{k+l,p}\Gamma(E) \hookrightarrow W^{k,q}\Gamma(E),$$

se $1 \leq p \leq q \leq \frac{np}{n-lp}$,

$$W^{k+l,p}\Gamma(E) \hookrightarrow \Gamma_0^k(\overline{M}),$$

se $p > \frac{n}{l}$,

sendo $\Gamma_0^k(\overline{M})$ as seções de classe C^k limitadas cujas k derivadas são também limitadas.

Teorema 3.1.5 (Rellich-Kondrachov) *Se M é compacta, os mergulhos de Sobolev são compactos, i.e. a imagem de um conjunto limitado pelo mergulho de Sobolev é totalmente limitada.*

Teorema 3.1.6 (Exisência do traço de seções de Sobolev) *Para espaços de Sobolev de seções de fibrados sobre variedades compactas com fronteira, são válidas as seguinte propriedades:*

1. *O mapa de restrição ao bordo $\sigma \mapsto \sigma|_{\partial M}$; $W^{k+1,p}\Gamma(E) \to W^{k,p}\Gamma(E|_{\partial M})$ é contínuo e compacto.*
2. *Existe um mapa contínuo $W^{k,p}\Gamma(E|_{\partial M}) \to W^{k,p}\Gamma(E)$; $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ tal que $\tilde{\sigma}|_{\partial M} = \sigma$.*

Agora nos voltamos ao caso em que $E = \Lambda^k(T^*M)$ e a conexão é aquela induzida pela conexão de Levi-Civita.

Desejamos estender os operadores da teoria de Hodge para as classes de Sobolev como operadores Lineares contínuos.

Proposição 3.1.2 *Os operadores $d, \star, \delta$ e Δ se estendem continuamente às formas da classe de Sobolev:*

$$\star : W^{s,p}\Omega^k(M) \to W^{s,p}\Omega^{n-k}(M);$$

$$d : W^{s,p}\Omega^k(M) \to W^{s-1,p}\Omega^{k+1}(M);$$

$$\delta : W^{s,p}\Omega^k(M) \to W^{s-1,p}\Omega^{k-1}(M);$$

$$\Delta : W^{s,p}\Omega^k(M) \to W^{s-2,p}\Omega^k(M).$$

Demonstração. Pelo teroema de Meyers-Serrin, a extensão de um operador linear L á classe de Sobolev $W^{s,p}$ pode ser feita a partir de limites de sequências na norma correspondente, i.e. se $\omega \in W^{s,p}\Omega^k(M)$ e $\{\omega_j\} \subset \Omega_c^k(M)$ é tal que $\omega_j \xrightarrow{W^{s,p}} \omega$, então $L\omega := \lim L\omega_j$. Agora resta mostrar que estes são contínuos. Veja que para $\omega \in \Omega_c^k(M)$ a comutatividade entre ∇_X e $\star$ e o fato de que $\langle \star -, \star - \rangle = \langle -, - \rangle$ garantem que

$$\|\omega\|_{W^{k,p}} = \| \star \omega\|_{W^{k,p}}.$$

Portanto, o teorema de Meyers-Serrin garante que a extensão do operador de Hodge é uma isometria, logo contínua.

Para as derivadas exterior e coexterior, a continuidade segue da manipulação de suas expressões em termos da conexão para formas de suporte compacto e sua extensão pela norma $W^{s,p}$.

Por fim, o Laplaciano de Hodge é, neste caso, nada mais que a soma de duas composições de operadores contínuos, logo, contínuo. □

O produto wedge também pode ser estendido a uma forma bilinear contínua $\wedge : L^p\Omega^k(M) \times L^q\Omega^l(M) \to L^1\Omega^{k+l}(M)$, desde que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definição 3.1.7 *Sejam $\omega \in L^p\Omega^k(M), \eta \in L^q\Omega^l(M)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Escolha $\{\omega_j\} \subset \Omega_c^k(M)$ e $\{\eta_j\} \subset \Omega_c^l(M)$ tais que $\{\omega_j\} \xrightarrow{L^p} \omega$ e $\{\eta_j\} \xrightarrow{L^q} \eta$. O produto wedge entre ω e η é dado por*

$$\omega \wedge \eta := \lim_{j\to\infty} \omega_j \wedge \eta_j.$$

Isto determina uma $(k+l)$-forma da classe L^1, como será visto no próximo teorema.

Teorema 3.1.7 (Desigualdade de Hölder para o produto wedge) *Se $\omega \in L^p\Omega^k(M)$, $\eta \in L^q\Omega^k(M)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $\omega \wedge \eta \in L^1\Omega^k(M)$, valendo que*

$$\|\omega \wedge \eta\|_1 \leq \|\omega\|_p \|\eta\|_q.$$

Demonstração. Localmente, escrevemos $\omega = \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}} dx^{\mathrm{I}}, \eta = \sum_{\mathrm{J}} g_{\mathrm{J}} dx^{\mathrm{J}}$. *Daí,*

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset} f_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{J}} dx^{\mathrm{I}} \wedge dx^{\mathrm{J}} \Rightarrow$$

$$\langle \omega \wedge \eta, \omega \wedge \eta \rangle = \sum_{\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset} f_{\mathrm{I}}^2 g_{\mathrm{J}}^2 \leq \sum_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}}^2 \sum_{\mathrm{J}} g_{\mathrm{J}}^2 = \langle \omega, \omega \rangle \cdot \langle \eta, \eta \rangle$$

Disto segue que $|\omega \wedge \eta| \leq |\omega| \cdot |\eta|$ *e, portanto,*

$$\|\omega \wedge \eta\|_{L^1} \leq \|(|\omega| \cdot |\eta|)\|_{L^1}.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder para as funções $|\omega|$ *e* $|\eta|$, *obtemos*

$$\|\omega \wedge \eta\|_{L^1} \leq \|\omega\|_{L^p} \cdot \|\eta\|_{L^q}$$

□

Corolário 3.1.1 *Se* $\omega_j \xrightarrow{L^p} \omega$ *e* $\eta_j \xrightarrow{L^{p^*}} \eta$, *então*

$$\omega_j \wedge \eta_j \xrightarrow{L^1} \omega \wedge \eta.$$

De modo semelhante, o produto wedge de duas formas de respectivas classes de Sobolev $W^{s,p}$ e $W^{r,q}$, ω e η notando que ∇_X determina uma derivação na álgebra exterior, qualquer que seja o campo X. Escolhendo sequências de seções suaves de suporte compacto $\{\omega_j\} \xrightarrow{W^{s,p}} \omega$ e $\{\eta_j\} \xrightarrow{W^{r,q}} \eta$ e avaliando o limite,

$$\omega \wedge \eta := \lim_{j \to \infty} \omega_j \wedge \eta_j.$$

Veja que $\nabla_X(\omega_j \wedge \eta_j) = \nabla_X \omega_j \wedge \eta_j + \omega_j \wedge \nabla_X \eta_j$. Este fato somado à desigualdade de Hölder garante que $\nabla_X(\omega \wedge \eta)$ existe e é integrável, desde que $\omega \in W^{1,p}\Omega^k, \eta \in W^{1,q}\Omega^l$. Assim, $\omega \wedge \eta \in W^{m,1}\Omega^{k+l}$ e $\omega_j \wedge \eta_j \xrightarrow{W^{m,1}} \omega \wedge \eta$, sendo $m := Min\{r, s\}$.

Agora, desejamos estabelecer a integração de formas da classe $L^1\Omega^n$ em M. A maneira óbvia é escolher uma sequência $\{\omega_j\} \subset \Omega_c(M)$ convergindo para ω no sentido L^p e definir

$$\int_M \omega := \lim \int_M \omega_j.$$

Esta definição é coerente. De fato, podemos estimar

$$\left| \int_M \omega - \omega_j \right| = \left| \int_M (\star\omega - \star\omega_j) dM \right| \leq \int_M |\star\omega - \star\omega_j| dM = \|\omega - \omega_j\|_{L^1}$$

Com isto, generalizamos o

Teorema 3.1.8 (Stokes) *Seja M uma variedade orientada com fronteira compacta e $\iota : \partial M \to M$ o mapa de inclusão. $\forall \omega \in W^{1,1}\Omega^{n-1}$ vale*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega$$

Demonstração. Basta escolher uma sequência de $(n-1)$-formas de suporte compacto, $\{\omega_j\} \xrightarrow{W^{1,1}} \omega$. A continuidade da derivada exterior e do traço na norma Sobolev garantem que

$$\int_M d\omega_j \longrightarrow \int_M d\omega$$

e

$$\int_{\partial M} \iota^* \omega_j \longrightarrow \int_{\partial M} \iota^* \omega$$

e o teorema de Stokes para formas suaves garante a igualdade. □

Corolário 3.1.2 (Fórmula de Green) *Para $\omega \in W^{1,p}\Omega^{k-1}(M)$, $\eta \in W^{1,q}\Omega^k(M)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\int_M \langle d\omega, \eta \rangle dM = \int_M \langle \omega, \delta\eta \rangle dM + \int_{\partial M} \mathrm{T}(\omega) \wedge \star \mathrm{N}(\eta).$$

Aqui, a existência e integrabilidade das componentes cotangencial e conormal é assegurada pelo teorema do traço: temos $\omega|_{\partial M}, \eta|_{\partial M} \in L^p\Gamma(\Lambda^k T^*M|_{\partial M})$ e é claro que $\|T(\omega)\|_p \leq \|\omega\|_p$ e $\|N(\eta)\|_q \leq \|\eta\|_q$, sendo $\|\mathrm{T}(\omega) \wedge \star\mathrm{N}(\eta)\|_1 < \infty$, pela desigualdade de Hölder.

3.2 Operadores diferenciais lineares

Seja M uma variedade diferenciável, $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to M$ fibrados vetoriais sobre $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. A fim de estabelecermos recursivamente a definição de operadores diferenciais, são úteis as seguintes definições preliminares:

Definição 3.2.1 *Um operador diferencial de ordem 0 entre E e F é simplesmente um morfismo $L \in Hom(E, F)$.*

Definição 3.2.2 *Um operador diferencial de ordem 1, $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ é uma derivação, no sentido de que, $\forall f \in C^\infty(M), u \in \Gamma(E)$,*

$$L(fu) = fLu + \sigma_L(f)u,$$

onde $\sigma_L : C^\infty(M) \to Hom(E,F)$ *é tal que* $\exists f \in C^\infty(M)$ *com* $\sigma_L(f) \neq 0$ *e* $\forall f, g \in C^\infty(M)$,

$$\sigma_L(fg) = g\sigma_L(f) + f\sigma_L(g).$$

Note que se definirmos a ação adjunta da multiplicação de uma função f pelo operador L, $ad(f)L = [L, f] : u \mapsto L(fu) - fLu$, tem-se $ad(f)L = \sigma_L(f)$ e que se $L \in Hom(E,F)$, $\forall f$ $\sigma_L(f) = 0$, i.e., $L \in \ker(ad)$. Reciprocamente, $L \in \ker(ad) \Rightarrow L \in Hom(E,F)$.

Por conseguinte, se L é um operador diferencial de ordem 1,

$$\begin{aligned} ad(g)ad(f)Lu =& L(gfu) - fL(gu) - gL(fu) + gfLu \\ =& fgLu + \sigma_L(fg)u - fgLu - f\sigma_L(g)u - gfLu - g\sigma_L(f)u + fgLu \\ =& [\sigma_L(fg) - f\sigma_L(g) - g\sigma_L(f)]u \\ =& 0. \end{aligned}$$

Portanto, $L \in \ker(ad^2)$. Em particular, $ad(f)L \in Hom(E,F)$.

Podemos definir os operadores diferenciais de ordem k entre E e F recursivamente como $\mathscr{D}^k := \ker ad^{k+1} \backslash \ker ad^k$. Note que se $L \in \mathscr{D}^k, T \in \mathscr{D}^j$, então $L + T \in \mathscr{D}^{\max\{k,j\}}$, tornando $\mathscr{D} := \bigcup_0^\infty \mathscr{D}^k$ um $C^\infty(M)$-módulo.

Exemplo 3.2.1 *Dada* M *uma variedade diferenciável e* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *podemos enxergar uma função diferenciável,* f, *como uma seção do fibrado trivial* $M \times \mathbb{R} \to M$ *e assim,* X *torna-se um operador diferencial de ordem 1 agindo em* $C^\infty(M)$. *De fato,*

$$X(fg) = X(f)g + X(g)f,$$

mostrando que $\sigma_X = X$. *Mais do que isso,* $\mathfrak{X}(M)$ *e* $\mathscr{D}^1(C^\infty(M), C^\infty(M))$ *estão canonicamente identificados, como consequência da proposição 3.2.*

Proposição 3.2.1 *Os operadores diferenciais são de natureza local, i.e.*

$$\text{supp } Lu \subset \text{supp } u.$$

Demonstração. Para $L \in \mathscr{D}^0$ é imediato. Prosseguindo indutivamente, se $\forall L \in \mathscr{D}^k$, supp $Lu \subset$ supp u, tem-se para $L \in \mathscr{D}^{k+1}$ e $p \notin$ supp u, $\exists \rho \in C^\infty(M)$, com supp $\rho \subset M \backslash \{p\}$ tal que $\rho \equiv 1$ em supp u e, portanto,

$$Lu(p) = L(\rho u)(p) = \rho(p)Lu(p) + [L, \rho]u(p) = 0$$

pois $\rho(p) = 0$ e $[L, \rho] \in \mathscr{D}^k$. ∎

A natureza local dos operadores diferenciais os permite serem compreendidos a partir do estudo de operadores diferenciais entre fibrados triviais , já que dado $L \in \mathscr{D}(E,F)$, ao redor de cada $p \in M$ existem trivializações locais de E e F, $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{K}^r$ e $\psi : F|_U \to U \times \mathbb{K}^s$, respectivamente, tornando $\psi \circ L \circ \varphi^{-1}$ um operador diferencial entre $\Gamma(U \times \mathbb{K}^r)$ e $\Gamma(U \times \mathbb{K}^s)$ que determina completamente o comportamento de L em U.

Como um operador entre fibrados triviais como acima pode ser visto como uma matriz $(s \times r)$ de operadores $L_{ij} \in \mathscr{D}^k(C^\infty, C^\infty)$, é fundamental caracterizar os operadores diferenciais de funções suaves.

Proposição 3.2.2 *Seja $L \in \mathscr{D}^1(C^\infty(M), C^\infty(M))$ e (U,φ) uma carta local de M, então existem $\{f_j\}_0^n \subset C^\infty(U)$ tais que, em U,*

$$L = f_0 + \sum_1^n f_j \partial x_j,$$

onde f_0 representa a multiplicação por f_0.

Demonstração. para $u \in C^\infty(U)$, tem-se,

$$L(u \cdot 1) = [L,u] + L(1)u,$$

sendo $u \mapsto [L,u]$, uma derivação, i.e., $[L,\cdot] \in \mathfrak{X}(U)$, logo, existem $\{f_j\}_1^n \subset C^\infty(U)$ tais que $\forall u,\ [L,u] = \sum_1^n f_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Pondo $f_0 := L(1)$, o resultado segue. $\square$

Corolário 3.2.1 *Sejam E e F fibrados de rank r e s, resp. Um operador $L \in \mathscr{D}^1(E,F)$ se escreve localmente como uma matriz $(s \times r)$ de operadores $L_{ij} = X_{ij} + f_{ij}$, onde $X_{ij} \in \mathfrak{X}, f_{ij} \in C^\infty$, i.e. numa carta local $U \subset M$ em que $E|_U$ e $F|_U$ são trivializáveis, vale que*

$$\mathscr{D}^1(E|_U, F|_U) \simeq Hom(E|_U, F|_U) \oplus \mathfrak{X}(U) \otimes Hom(E|_U, F|_U).$$

Utilizando partições da unidade e a natureza local dos operadores diferenciais, essa representação pode ser globalizada, i.e.

$$\mathscr{D}^1(E,F) \simeq Hom(E,F) \oplus \mathfrak{X}(M) \otimes Hom(E,F).$$

Corolário 3.2.2 *Dado $L \in \mathscr{D}^k(E,F), \{f_j\}_1^k \subset C^\infty(M)$ o mapa $\sigma_L^k(f_1,...,f_k) := (ad\ f_1)...(ad\ f_k)L$ depende exclusivamente das 1-formas $df_1,...,df_k$.*

Demonstração. Um cálculo direto nos dá que $\forall f, g \in C^{\infty}(M)$,

$$(ad\ f)(ad\ g)L = (ad\ g)(ad\ f)L.$$

Portanto, dado j, defina

$$(ad\ f_1)...\widehat{(ad\ f_j)}...(ad\ f_k)L = X_j + T_j,$$

$X_j \in \mathfrak{X}(M) \otimes Hom(E, F), T_j \in Hom(E, F)$. De onde

$$(ad\ f_j)(X_j + T_j) = f_j X_j + df_j(X_j) + f_j T_j - f_j(X_j + T_j) = df_j(X_j).$$

□

Quando não houver ambiguidade, ocultaremos o "k", escrevendo apenas σ_L.

A dependência exclusiva dos diferenciais das funções de σ_L permite escrever para um ponto p,

$$\sigma_L(\xi_1, ..., \xi_k) : E_p \to F_p,$$

onde $\xi^i := (df_i)_p$. Isto é, σ_L pode ser visto como um mapa k-linear de T_p^*M com valores em $Hom(E_p, F_p)$. Este, por sua vez, é completamente determinado pelo vetor $\xi := \sum t_i \xi^i$, notando que

$$\sigma_L(\xi^1, ..., \xi^k) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t_1 ... \partial t_k} \sigma_L(\xi, ..., \xi).$$

Assim, faz sentido escrever $\sigma_L : T_p^*M \to Hom(E_p, F_p)$

Definição 3.2.3 *O mapa σ_L associado ao operador L é denominado o* ***símbolo principal*** *de L.*

Note que, como os k-tensores simétricos de T_p^*M são canonicamente identificados com os polinômios homogêneos de grau k e que os morfismos de fibrado admitem pontualmente uma representação de transformações lineares, trataremos $(\sigma_L)_p$ como um elemento de $\mathbb{K}[\xi] \otimes Hom(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$

Proposição 3.2.3 *Defina $\mathscr{D}^k/\mathscr{D}^{k-1}$ o espaço vetorial das classes de equivalência da relação $L \sim T \iff L - T \in \mathscr{D}^j,\ j < k$.*

O mapa $\sigma^k : L \mapsto \sigma_L^k$ é um monomorfismo $\mathscr{D}^k/\mathscr{D}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{K}[\xi] \otimes Hom(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s)$.

Demonstração. Segue imediatamente da definição de $\mathscr{D}^k$ que se $\sigma_{L-T}^k = 0 = \sigma_L^k - \sigma_T^k$, então $L - T \in \bigcup_0^{k-1} \mathscr{D}^j$. Portanto σ^k é injetivo. □

A partir da construção do símbolo, podemos dar uma caracterização definitiva dos operadores diferenciais lineares.

Teorema 3.2.1 *Todo operador $L \in \mathscr{D}^k(E,F)$ admite uma representação em coordenadas locais de um aberto U como*

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{\alpha_1}...\partial x_{\alpha_k}},$$

$A_\alpha \in C^\infty(U, Hom(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^s))$.

Demonstração. Seja $\{dx^j\}$ uma base local de T^*M em U. Tomando por ξ^j a representação polinomial de dx^j em $\mathbb{K}[\xi]$, temos

$$\sigma_L(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha,$$

onde $\xi^\alpha := \xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}...\xi^{\alpha_k}$. Fazendo

$$L_1 = L - \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{\alpha_1}...\partial x_{\alpha_k}},$$

obtemos um operador diferencial de ordem menor que k, já que, por construção, $\sigma^k_{L_1} = 0$. Podemos repetir esse processo calculando $\sigma^{k-1}_{L_1}$ construir um operador L_2, de ordem necessariamente menor que $k-1$ e prosseguir recursivamente até a construção do morfismo L_k, tomando este por A, temos

$$L = A + \sum_{j=1}^{k}(L_{k-j} - L_{k-j+1}),$$

sendo

$$L_{k-j} - L_{k-j+1} = \sum_{|\alpha|=j} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{\alpha_1}...\partial x_{\alpha_k}},$$

por construção. □

Definição 3.2.4 *Dado um operador diferencial L de representação local*

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{\alpha_1}...\partial x_{\alpha_k}},$$

o ***símbolo total*** *de L é o tensor*

$$\Sigma_L(\xi) := \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} A_\alpha \xi^\alpha$$

Proposição 3.2.4 *Sejam $E_1 \to M$, $E_2 \to M$ e $E_3 \to M$ fibrados vetoriais e $L_1 \in \mathscr{D}(E_1, E_2)$, $L_2 \in \mathscr{D}(E_2, E_3)$. Então $\sigma_{L_1 \circ L_2} = \sigma_{L_1} \otimes \sigma_{L_2}$. Demonstração. Basta escrever a representação local dos operadores em coordenadas.* □

Calculemos agora o símbolo principal dos principais operadores no contexto de decomposição de Hodge.

Exemplo 3.2.2 *A diferencial exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ satisfaz, para $f \in C^\infty(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$,*

$$d(f\omega) = fd\omega + df \wedge \omega.$$

Assim,

$$ad(f)d\omega = df \wedge \omega$$

e

$$\sigma_d(df) = df \wedge (-).$$

Exemplo 3.2.3 *Para a derivada coexterior, $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ vale que*

$$\begin{aligned}
\delta f\omega =& (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star f\omega \\
=& (-1)^{n(k+1)+1} \star d(f \star \omega) \\
=& (-1)^{n(k+1)+1} \star (df \wedge \star\omega) \\
&+ (-1)^{n(k+1)+1} f \star d \star \omega.
\end{aligned}$$

Assim,

$$ad(f)\delta\omega = (-1)^{n(k+1)+1} \star (df \wedge \star\omega).$$

Considere $\{E_j\}$ uma base ortonormal local de $\mathfrak{X}(M)$, com base dual $\{\xi^j\}$. Escrevendo $df = \sum E_j(f)\xi^j$,

$$\star(df \wedge \star\xi^I) = \star(df \wedge \xi^{I^C}) = \sum E_j(f) \star (\xi^j \wedge \xi^{I^C}).$$

Se $j \in I^C$, $\xi^j \wedge \xi^{I^C} = 0$. Se $j \notin I^C$,

$$\begin{aligned}
\star(\xi^j \wedge \xi^{I^C}) =& (-1)^{n-k+I_i+k(n-k)} \xi^{I_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^{I_i}} \wedge ... \wedge \xi^{I_k} \\
=& (-1)^{I_i+kn+n} \xi^{I_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^{I_i}} \wedge ... \wedge \xi^{I_k},
\end{aligned}$$

onde $I_i = j$. Podemos escrever, portanto,

$$\begin{aligned}\star(\xi^j \wedge \xi^{I^C}) =&(-1)^{kn+n}(-1)^{I_i}\xi^{I_1} \wedge ... \wedge \widehat{\xi^{I_i}} \wedge ... \wedge \xi^{I_k}\\ =&(-1)^{kn+n} i_{E_j}\xi^I\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\star(df \wedge \star\xi^I) =&(-1)^{nk+k}\sum E_j(f) i_{E_j}\xi^I\\ =&(-1)^{nk+k} i_{\nabla f}\xi^I.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sigma_\delta(df) =&(-1)^{2nk+2n+1} i_{(df)^\sharp}(-)\\ =&- i_{(df)^\sharp}(-).\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.4 *Para uma conexão ∇ num fibrado $E \to M$ e $\xi \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$,*

$$ad(f)\nabla\xi = \nabla f\xi - f\nabla\xi.$$

Veja que, se $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$ad(f)\nabla_X\xi = X(f)\xi + f\nabla_X\xi - f\nabla_X\xi = X(f)\xi,$$

portanto,

$$ad(f)\nabla\xi = df \otimes \xi$$

e

$$\sigma_\nabla(df) = df \otimes (-).$$

Com isto, podemos facilmente obter o símbolo principal para o Laplaciano de uma conexão: como $\Delta^\nabla = tr(\nabla^2)$,

$$\sigma_{\Delta^\nabla}(df) = -tr(\sigma_{\nabla^2}(df)) =$$

$$-tr(df \otimes df) \otimes (-) = -|df|^2 Id.$$

Para o Laplaciano de Hodge, a fórmula de Weitzenböck nos fornece diretamente que

$$\sigma_\Delta(df) = \sigma_{\Delta^\nabla}(df) = -|df|^2 Id. \tag{3.1}$$

Definição 3.2.5 *Seja $E \to M$ um fibrado sobre uma variedade Riemanniana. Um operador diferencial $L : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ é um **Laplaciano generalizado** se $\forall \xi \in \Omega^1(M)$,*

$$\sigma_L(\xi) = -|\xi|^2 Id.$$

Definição 3.2.6 *Um operador $L \in \mathscr{D}(E, F)$ é **elíptico** se $\sigma_L(\xi)$ é um isomorfismo entre as fibras sempre que $\xi \neq 0$. Em particular, todo Laplaciano generalizado é elíptico.*

Definição 3.2.7 *Seja M uma variedade com fronteira e L um operador diferencial de ordem k de seções de um fibrado vetorial $E \to M$. Dado $p \in \partial M$ $U \ni p$, um aberto e $\xi \in \Omega^1(M)$, tome por $\{\xi^j\}$ uma base de $\Omega^1(U)$ com ξ^1 sendo o dual de um campo normal em $\partial M \cap U$ e $\tilde{\xi}$ a projeção de ξ em $T^*\partial M$. O **símbolo parcial** de L na direção ξ^1 é o operador diferencial ordinário $\sigma_L(\tilde{\xi})$ definido em $\Gamma(E)|_{\partial M}$ posto da seguinte maneira: se α é um multi-índice tal que $\alpha_{ij} = 1$ $\forall j$, defina $\tilde{\alpha} := (..., \alpha_l, ...\widehat{\alpha}_{ij}, ...)$, i.e. o multi-índice que contém apenas os índices diferentes de 1.*

$$\sigma_L(\tilde{\xi}) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^{\tilde{\alpha}} (\xi_1)^{|\alpha|-|\tilde{\alpha}|},$$

onde $\xi_1 = (\xi^1)^\sharp$. Em cada ponto da fronteira, $\sigma_L(\tilde{\xi})\gamma = 0$ é uma equação diferencial ordinária para curvas γ com valores na fibra típica de E.

Definição 3.2.8 *Considere $E \to M$ um fibrado Riemanniano sobre uma variedade Riemanniana compacta com fronteira, uma coleção $\{E_j\}_1^l$ de fibrados Riemannianos de fibras típicas F_j sobre ∂M e operadores diferenciais $L : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $L_j : \Gamma(E) \to \Gamma(E_j)$, $1 \leq j \leq l$.*

O problema com condições de fronteira

$$L\zeta = \eta \text{ em } M$$

$$L_j\zeta = \theta_j \text{ em } \partial M$$

*é **elíptico no sentido de Lopatinskij-Shapiro** se:*

1. *O operador L é elíptico*
2. *Dado um ponto p de ∂M, o mapa*

$$\mathcal{M}_{\tilde{\xi},p} \to \bigoplus_1^l F_j$$

$$\gamma \mapsto (\sigma_{L_1}(\tilde{\xi})\gamma(0), ..., \sigma_{L_l}(\tilde{\xi})\gamma(0))$$

é bijetivo, sendo $\mathcal{M}_{\tilde{\xi},p}$ *o conjunto de soluções limitadas definidas em* $\mathbb{H}^1$ *de* $\sigma_L(\tilde{\xi})\gamma = 0$.

Teorema 3.2.2 *Seja* $\mathbf{L} = (L, L_1, ..., L_l) \in \mathscr{D}(\bigoplus_0^l E, E \oplus \bigoplus_1^l E_j)$ *um operador diferencial de ordem* $k \leq s$ *associado ao problema elíptico no sentido Lopatinskij-Shapiro:*

$$L\zeta = \eta \text{ em } M$$

$$L_j\zeta = \theta_j \text{ em } \partial M.$$

Vale que

1. $\dim \ker \mathbf{L}, \dim \operatorname{coker} \mathbf{L} < \infty$.
2. *Para cada* $l \geq 1$, *existe uma constante* C_l *para a qual vale a seguinte estimativa a priori:*

$$\|\zeta\|_{H^l(M)} \leq C_l\Big(\|\zeta\|_{L^2(M)} + \|L\zeta\|_{H^{l-k}(M)} + \sum_j \|L_j\sigma\|_{H^{l-k_j-1/2}}\Big),$$

   sendo k_j *a ordem de* L_j.
3. *Se* $\zeta \in W^{s,p}\Gamma(E)$ *é uma solução e* $\eta, \theta_1, ..., \theta_l$ *são suaves,* ζ *é suave.*

A demonstração deste resultado envolve a construção de uma **pseudoinversa** para o operador $\mathbf{L}$ por meio da teoria de operadores pseudodiferenciais, como visto em (HÖRMANDER, 2007) e foge ao escopo deste trabalho, portanto não será apresentada. Para uma discussão mais elaborada sobre operadores pseudodiferenciais, veja o apêndice A

4 DECOMPOSIÇÃO EM VARIEDADES SEM FRONTEIRA

O objetivo deste capítulo é enunciar a decomposição de Hodge para variedades compactas fechadas(sem fronteira) e demonstrá-la via resolução de um certo problema de EDP pelo chamado método de energia. O motivo da escolha dessa abordagem é a possibilidade de estendê-la ao caso com fronteira, como veremos no terceiro capítulo.

4.1 Decomposição clássica de Hodge

Definição 4.1.1 *Uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita um* ***campo harmônico*** *se é fechada e cofechada. Denotamos o conjunto de k-formas que são campos harmônicos por $\mathcal{H}^k(M)$.*

Definição 4.1.2 *Uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $\Delta\omega = 0$ é dita* ***harmônica****.*

Teorema 4.1.1 (Hodge) *Seja M uma variedade Riemanniana orientada compacta e fechada. Para cada $1 \leq k \leq \dim M$, o conjunto $\mathcal{H}^k(M)$ é um espaço vetorial real de dimensão finita e para cada $\omega \in \mathcal{H}^k(M)^\perp$, $\exists \phi \in \Omega^k(M)$ tal que $\Delta\phi = \omega$. Além disso, vale a decomposição L^2-ortogonal*

$$\Omega^k(M) = d\Big(\Omega^{k-1}(M)\Big) \oplus \delta\Big(\Omega^{k+1}(M)\Big) \oplus \mathcal{H}^k(M),$$

i.e. dada $\omega \in \Omega^k(M)$, existem formas $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$ e $\lambda \in \mathcal{H}^k(M)$, tais que

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \lambda.$$

Podemos separar o teorema de Hodge em dois resultados. O primeiro estabelece a decomposição ortogonal

$$\mathcal{H}^k(M)^\perp \oplus \mathcal{H}^k(M),$$

sendo $\mathcal{H}^k(M)$ um subespaço de dimensão finita.

O segundo caracteriza $\mathcal{H}^k(M)^\perp$ como a imagem do Laplaciano de Hodge, i.e.

$$\mathcal{H}^k(M)^\perp = \Delta\Big(\Omega^k(M)\Big)$$

e estabelece uma segunda decomposição,

$$\Delta\Big(\Omega^k(M)\Big) = d\Big(\Omega^{k-1}(M)\Big) \oplus \delta\Big(\Omega^{k+1}(M)\Big).$$

O primeiro resultado está ligado diretamente às condições de existência de soluções do problema $\Delta\phi = \omega$ e à caracterização das soluções do problema $\Delta\omega = 0$. Procederemos, portanto, estudando o problema associado ao laplaciano de Hodge.

4.2 Formulação fraca do problema $\Delta\phi = \omega$

Proposição 4.2.1 *Seja M uma variedade Riemanniana orientada compacta e fechada. Os operadores d e δ são adjuntos com respeito ao produto interno L^2 em Ω^k, i.e. $\forall \omega, \eta \in \Omega^k(M)$,*

$$< d\omega, \eta >=< \omega, \delta\eta > .$$

Demonstração. *Basta escrever a fórmula de Green 2.2, notando que $\partial M = \emptyset$.* □ □

Corolário 4.2.1 $\forall \omega \in \Omega^k(M)$,

$$\Delta\omega = 0 \iff d\omega = 0, \delta\omega = 0 \iff |d\omega|^2 + |\delta\omega|^2 = 0,$$

portanto, $\mathcal{H}^k(M) = \ker\Delta \cap \Omega^k(M)$. Demonstração. De fato,

$$\Delta\omega = 0 \Rightarrow < \Delta\omega, \omega >= 0 =< (d\delta + \delta d)\omega, \omega >=$$

$$< d\delta\omega, \omega > + < \delta d\omega, \omega >= |d\omega|^2 + |\delta\omega|^2.$$

As outras equivalências são imediatas. □

Definição 4.2.1 *A **forma de Dirichlet** é a forma bilinear $\mathcal{D} : H^1\Omega^k(M) \times H^1\Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ determinada por*

$$\mathcal{D}(\omega, \eta) :=< d\omega, d\eta > + < \delta\omega, \delta\eta > .$$

A proposição anterior nos diz que o Laplaciano está diretamente ligado à forma de Dirichlet. Veja que se $\phi, \omega \in \Omega^k(M)$ são tais que

$$< \Delta\phi, \xi >=< \omega, \xi >, \ \forall \xi \in \Omega^k(M),$$

a não degeneração do produto L^2 implica que $\Delta\phi = \omega$. Assim, pela proposição 4.2.1, $< \Delta\phi, \xi >= \mathcal{D}(\phi, \xi)$ e temos a equivalência

$$\mathcal{D}(\phi, \xi) =< \omega, \xi >, \ \forall \xi \in \Omega^k(M) \iff \Delta\phi = \omega.$$

Definição 4.2.2 *Dizemos que uma forma $\phi \in H^1\Omega^k(M)$ resolve fracamente o problema do Laplaciano se*

$$\mathcal{D}(\phi, \xi) =< \omega, \xi >, \ \forall \xi \in H^1\Omega^k(M).$$

*Neste caso, ϕ é dito um **potencial fraco** para ω.*

4.3 Campos harmônicos

Começamos o estudo do problema do Laplaciano em variedades compactas fechadas pelo caso simplificado $\Delta\omega = 0$.

Definição 4.3.1 *Um campo harmônico H^1 é um elemento do conjunto*

$$H^1\mathcal{H}^k(M) := \{\omega \in H^1\Omega^k(M) \mid d\omega = 0, \delta\omega = 0\},$$

que coincide com o fecho de $\mathcal{H}^k(M)$ na norma H^1.

Perceba que, para $f \in H^1\mathcal{H}^0(M)$, tem-se

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(f, f) = \|f\|_{L^2}^2,$$

i.e. a norma H^1 de f é totalmente determinada por sua norma L^2. Isto nos fornece uma poderosa ferramenta para a compreensão das funções harmônicas no sentido fraco.

desejamos obter o mesmo tipo de propriedade para uma forma $\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)$, para qualquer k. Neste caso, é claro que a forma de Dirichlet não nos dá, a priori, informação sobre o comportamento de $\|f\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}^2$. Contornamos isto com a estimativa seguinte.

Teorema 4.3.1 (Desigualdade de Gaffney) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e fechada. Dada $\omega \in H^1\Omega^k(M)$, existe uma constante C_g, que depende exclusivamente da métrica, tal que*

$$\|\omega\|_{H^1}^2 \leq C_g\Big(\|\omega\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(\omega, \omega)\Big). \tag{4.1}$$

Demonstração. Considere ∇ a conexão induzida pela conexão de Levi-Civita de (M, g) e $\omega \in \Omega^k(M)$. Tem-se, localmente, pela compatibilidade com a métrica,

$$-\Delta\langle\omega, \omega\rangle = -\Delta^\nabla\langle\omega, \omega\rangle = \sum_j E_j\left(E_j\langle\omega, \omega\rangle\right) = \sum_j 2E_j\left(\langle\nabla_{E_j}\omega, \omega\rangle\right) =$$

$$-2\langle\Delta^\nabla\omega, \omega\rangle + 2\sum_j\langle\nabla_{E_j}\omega, \nabla_{E_j}\omega\rangle.$$

A quantidade $\sum_j\langle\nabla_{E_j}\omega, \nabla_{E_j}\omega\rangle$ corresponde exatamente à parte da norma H^1 que desejamos mensurar.

Pela fórmula de Weitzenböck, podemos escrever

$$\sum_j \langle \nabla_{E_j}\omega, \nabla_{E_j}\omega\rangle = -\frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle + \langle\Delta\omega,\omega\rangle - \langle \mathrm{Ric}(\omega),\omega\rangle =$$

$$\mathcal{D}(\omega,\omega) - \frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle - \langle \mathrm{Ric}(\omega),\omega\rangle.$$

Escolhendo um conjunto de bases ortonormais locais, $\{E_j^\alpha\}$ *de trvializações* U_α *cobrindo* M *e* ρ_α*, uma partição da unidade subordinada à respectiva cobertura de trivializações, a norma* H^1 *de* ω *escreve-se como*

$$\|\omega\|_{H^1}^2 = \int_M \sum_\alpha \rho_\alpha \Big(\langle\omega,\omega\rangle + \sum_j \langle \nabla_{E_j^\alpha}\omega, \nabla_{E_j^\alpha}\omega\rangle \Big) dM =$$

$$\int_M \sum_\alpha \rho_\alpha \Big(\langle\omega,\omega\rangle + \mathcal{D}(\omega,\omega) - \frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle - \langle \mathrm{Ric}(\omega),\omega\rangle \Big) dM.$$

Note que o integrando é um objeto global, sendo assim, a soma das partições da unidade trivializa-se e podemos escrever simplesmente

$$\|\omega\|_{H^1}^2 = \int_M \Big(\langle\omega,\omega\rangle + \mathcal{D}(\omega,\omega) - \frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle - \langle \mathrm{Ric}(\omega),\omega\rangle \Big) dM.$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_M \Delta\langle\omega,\omega\rangle dM = \int_{\partial M=\emptyset} -\mathcal{N}(|\omega|^2) i_{\mathcal{N}} dM = 0.$$

Resta-nos limitar $\mathrm{Ric}(\omega)$*.*

Seja $\{\xi_\alpha^J\}$ *uma base ortonormal local de* $\Omega^k(M)$*, com respeito ao aberto* U_α*. Assim, podemos escrever* $\omega|_{U_\alpha} = \sum_J f_J^\alpha \xi_\alpha^J$*. Sendo* M *compacta, assumamos que há apenas uma quantidade finita de índices* α*. Para a norma* L^2 *de* ω*, tem-se*

$$\|\omega\|_{L^2}^2 = \int_M |\omega|^2 dM = \int_M \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_J (f_J^\alpha)^2 dM.$$

Para $\mathrm{Ric}(\omega)$*,*

$$\|\mathrm{Ric}(\omega)\|_{L^2}^2 = \int_M |\mathrm{Ric}(\omega)|^2 dM = \int_M \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_J (f_J^\alpha)^2 |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)|^2 dM.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder por duas vezes, obtemos a sequência de desigualdades

$$\int_M \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_J (f_J^\alpha)^2 |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)|^2 dM \leq \left(\sum_\alpha \sum_J \int_M \sqrt{\rho_\alpha} f_J^\alpha |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)| dM \right)^2 \leq$$

$$\left(\sum_\alpha\sum_J\left(\int_M \rho_\alpha (f_J^\alpha)^2 dM\right)^{1/2}\left(\int_M |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)|^2 dM\right)^{1/2}\right)^2 \leq$$

$$\left(\int_M \sum_\alpha\sum_J \rho_\alpha (f_J^\alpha)^2 dM\right)\left(\int_M \sum_\alpha\sum_J |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)|^2 dM\right) =$$

$$\|\omega\|_{L^2}^2 \int_M \sum_\alpha\sum_J |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)|^2 dM,$$

sendo a grandeza $\int_M \sum_\alpha \sum_J |\mathrm{Ric}(\xi_\alpha^J)|^2 dM$ *uma constante. Isto mostra que o operador de Weitzenböck é limitado, visto como um operador linear* $L^2\Omega^k(M) \to L^2\Omega^k(M)$*. Denotaremos por* $C_{Ric} := \sup_{\{\|\omega\|_{L^2}=1\}} \|\mathrm{Ric}(\omega)\|_{L^2}$*. Consequentemente,*

$$\left|\int_M \langle \mathrm{Ric}(\omega), \omega\rangle dM\right| \leq \int_M |\mathrm{Ric}(\omega)| \cdot |\omega| dM \leq$$

$$\|\omega\|_{L^2} \cdot \|\mathrm{Ric}(\omega)\|_{L^2} \leq C_{Ric}\|\omega\|_{L^2}^2.$$

Por fim, temos

$$\|\omega\|_{H^1}^2 = \|\omega\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(\omega,\omega) - \int_M \langle \mathrm{Ric}(\omega), \omega\rangle dM \leq$$

$$(1+C_{Ric})\|\omega\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(\omega,\omega) \leq (1+C_{Ric})\Big(\|\omega\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(\omega,\omega)\Big).$$

Veja que C_{Ric} *depende apenas da fórmula do operador de Weitzenböck, que por sua vez depende da conexão de Levi-Civita e da estrutura de ortogonalidade de bases locais de campos, ambos determinados pela métrica* g*. Tome* $C_g = 1 + C_{Ric}$*. Para* $\omega \in H^1\Omega^k(M)$*, podemos escolher uma sequência de formas suaves* $\{\omega_j\} \xrightarrow{H^1} \omega$*, para as quais* $\|\omega_j\|_{H^1}^2 \leq C_g\Big(\|\omega_j\|_2^2 + \mathcal{D}(\omega_j,\omega_j)\Big)$ *e a propriedade se estende ao limite.* □ □

Com a desigualdade de Gaffney, temos, para $\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)$,

$$\|\omega\|_2^2 \leq \|\omega\|_{H^1}^2 \leq C_g\|\omega\|_2^2,$$

i.e. as normas L^2 e H^1 são topologicamente equivalentes em $H^1\mathcal{H}^k(M)$, culminando no

Teorema 4.3.2 *Sobre o espaço de campos harmônicos,*

- $\dim H^1\mathcal{H}^k(M) < \infty$;

- *$L^2\Omega^k(M)$ admite uma decomposição ortogonal em subespaços fechados dada por*

$$L^2\Omega^k(M) = H^1\mathcal{H}^k(M) \oplus H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp, \tag{4.2}$$

sendo $H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$ o conjunto de formas L^2 ortogonal a $H^1\mathcal{H}^k(M)$.

Demonstração. Seja $\tilde{B}$ imagem da bola unitária de $H^1\mathcal{H}^k(M)$, $B = \{\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M) \mid \|\omega\|_{H^1} \leq 1\}$ pelo mergulho de Sobolev, $H^1\Omega^k(M) \hookrightarrow L^2\Omega^k(M)$. $\tilde{B}$ é totalmente limitada, pelo teorema de Rellich-Kondrachov. Ademais, qualquer elemento ω no fecho de $\tilde{B}$ admite uma sequência $\{\omega_j\} \subset \tilde{B}$ que converge no sentido L^1 para ω e a desigualdade de Gaffney implica que $\omega_j \xrightarrow{H^1} \omega$. Sendo assim, $\tilde{B}$ é fechado, portanto compacto, o que implica na compacidade de B. Agora evocamos um resultado de análise funcional: a bola unitária de um espaço vetorial normado é compacta se e somente se este espaço tem dimensão finita. Com isto, temos que $\dim H^1\mathcal{H}^k(M) < \infty$.

Para a segunda parte, assumamos que $\dim H^1\mathcal{H}^k(M) = m$ e fixemos $\{\xi_j\}_1^m$ uma base ortonormal. Para $\omega \in L^2\Omega^k(M)$, defina

$$\omega^{||} := \sum_1^m \langle \omega, \xi_j \rangle \xi_j$$

e

$$\omega^\perp := \omega - \omega^{||}.$$

Então, temos

$$\omega = \omega^{||} + \omega^\perp,$$

com $\omega^{||} \in H^1\mathcal{H}^k(M)$ e $\omega^\perp \in H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$. Resta mostrar que $H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$ é fechado. De fato, se $\{\omega_i\} \subset H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$ é uma sequência convergente, tem-se $\langle \omega_i, \xi_j \rangle = 0,\ \forall i, j$. Logo, $\lim_{i\to\infty} \langle \omega_i, \xi_j \rangle = 0,\ \forall j$, o que nos dá $\lim \omega_i \in H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$.

$\square$ Até então, fomos capazes de mostrar o primeiro tipo de decomposição no espaço de formas diferenciais da classe L^2 a partir do estudo dos campos harmônicos. O estudo de potenciais fracos, por conseguinte, nos dará mais informações sobre a projeção de $L^2\Omega^k(M)$ em $H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$, culminando no teorema central deste capítulo.

4.4 Método de energia

Para mostrar a existência de um potencial fraco para uma forma $\omega \in L^2\Omega^k(M)$, lançaremos mão do **método de energia**, comumente usado na teoria do potencial clássica para funções em abertos de $\mathbb{R}^n$ e que apresentaremos brevemente nesta seção.

Definição 4.4.1 *Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ é dita coerciva se $\exists\ c > 0$ tal que $\forall u, v \in H,\ B(u,u) \geq c||u||^2$.*

Teorema 4.4.1 (Lax-Milgram) *Se uma forma bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ é contínua e coerciva, dado $\varphi \in H^*$ $\exists!\ u \in H$ tal que $\varphi(v) = B(u,v), \forall v \in H$.*

O método de energia consiste em encontrar uma forma bilinear coerciva associada a um operador diferencial L definido em algum espaço de Hilbert e usar o teorema de Lax-Milgram para mostrar a existência de soluções para um problema do tipo $Lu = v$. A denominação origina-se do fato de que a forma bilinear associada ao Laplaciano escalar em $\mathbb{R}^n$, é o funcional conhecido como a **energia de Dirichlet**

$$J(u) := \int_U |\nabla u|^2 dx,$$

sendo $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in H^1(U)$. Para uma descrição completa do método de energia, incluindo a demonstração do lema de Lax-Milgram, veja (BREZIS, 2010).

Em nosso caso, o substituto para o funcional de energia é a forma de Dirichlet, que generaliza o conceito de energia para k-formas.

Teorema 4.4.2 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e fechada. A forma de Dirichlet é coerciva no espaço*

$H^1\mathcal{H}^k(M)^{\textcircled{\perp}} := H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp} \cap H^1\Omega^k(M)$. Demonstração. Seja $S := \{\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\textcircled{\perp}} \mid \|\omega\|_2 = 1\}$. Tomando uma sequência $\{\omega_j\}$ em S tal que

$$\lim \mathcal{D}(\omega_j, \omega_j) = \inf \mathcal{D}(\omega, \omega).$$

Pela desigualdade 4.1,

$$\|\omega_j\|_{H^1} \leq C_g\Big(1 + \mathcal{D}(\omega_j, \omega_j)\Big),$$

portanto, a sequência $\{\omega_j\}$ é limitada na norma H^1.

Sendo $H^1\mathcal{H}^k(M)^{\textcircled{\perp}}$ um espaço de Hilbert, evocamos o seguinte

Lema 4.4.1 *Para H, um espaço de Hilbert, toda sequência limitada $\{v_j\} \subset H$ admite uma subsequência que converge fracamente para $v \in H$, i.e. uma sequência $\{v_{j_i}\}$ tal que $\forall \varphi \in Hom(H, \mathbb{R})$ contínuo, $\varphi(v_{j_i} - v) \to 0$.*

A convergência fraca é comumente denotada por $v_{j_i} \rightharpoonup v$.

Assim, existe uma subsequência $\omega_{j_i} \rightharpoonup \omega_0$, cuja imagem pelo mergulho de Sobolev em $L^2\Omega^k(M)$ é totalmente limitada, pelo teorema de Rellich-Kondrachov e, portanto, admite uma subsequência $\omega_{j_{il}} \xrightarrow{L^2} \omega_0$. Como $\omega \notin H^1\mathcal{H}^k(M)$, $\mathcal{D}(\omega_0, \omega_0) > 0$. Pondo $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(\omega_0, \omega_0)$, para $\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}$,

$$\|\omega\|_{H^1}^2 \leq C_g\Big(\|\omega\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(\omega,\omega)\Big) \leq C_g\left(\frac{1}{\mathcal{D}_0} + 1\right)\mathcal{D}(\omega,\omega).$$

□

Teorema 4.4.3 *Toda forma $\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}$ admite um potencial fraco $\phi \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}$.*

Demonstração. A coercividade da forma de Dirichlet implicia que $\exists \phi \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}$ tal que

$$\mathcal{D}(\phi, \xi) =< \omega, \xi >, \ \forall \xi \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}.$$

Agora note que, pelo teorema 4.3.2, para $\xi \in H^1\Omega^k(M)$, temos $\xi = \xi^{\parallel} + \xi^{\perp}$, com $\xi^{\parallel} \in H^1\mathcal{H}^k(M)$, $\xi^{\perp} \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}$. Então, é claro que

$$< \omega, \xi >=< \omega, \xi^{\perp} >$$

e

$$\mathcal{D}(\phi, \xi) = \mathcal{D}(\phi, \xi^{\perp}),$$

mostrando que ϕ é, de fato, um potencial fraco para ω. □

4.5 Regularidade do potencial

Assumamos que $\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)^{\perp}$ admita um potencial $\phi \in H^2\Omega^k(M)$. Pela fórmula de Green,

$$\mathcal{D}(\phi, \xi) =< \Delta\phi, \xi >=< \omega, \xi >, \ \forall \xi \in H^1\Omega^k(M).$$

Disto segue que $\Delta\phi = \omega$, em particular,

$$\omega = d\delta\phi + \delta d\phi$$

e, para $\xi \in H^1\Omega^{k-1}(M)$, *podemos tomar uma sequência* $\{\xi_j\}_1^\infty \subset \Omega^{k-1}(M)$ *tal que* $\xi_j \xrightarrow{H^1} \xi$. *Com isso,*

$$< \omega, d\xi >=< d\delta\phi + \delta d\phi, d\xi >= \lim_{j\to\infty} < d\delta\phi + \delta d\phi, d\xi_j > .$$

Veja que

$$< \delta d\phi, d\xi_j >=< d\phi, d^2\xi_j >= 0.$$

Então,

$$\lim_{j\to\infty} < d\delta\phi + \delta d\phi, d\xi_j >=< d\delta\phi, \xi > .$$

Similarmente, para $\xi \in H^1\Omega^{k+1}(M)$,

$$< \omega, \delta\xi >=< \delta d\phi, \delta\xi > .$$

A regularidade H^2 do potencial garante que a forma ω pertence ao conjunto imagem do Laplaciano de Hodge e, pelo resultado acima, estão estabelecidas as projeções ortogonais de ω no conjunto das formas exatas e coexatas. O resultado a seguir é a última peça fundamental para provar a decomposição de Hodge.

Teorema 4.5.1 (Regularidade do potencial) *Seja* $\omega \in H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$. *Existe uma forma* $\phi \in H^2\Omega^k(M)$, *tal que* $\Delta\phi = \omega$.

Procederemos mostrando que, dado um potencial ϕ e um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{L}_X\phi \in H^1\Omega^k(M)$. Isto é equivalente a mostrar que $\phi \in H^2\Omega$ no interior de M, como explicitado no lema a seguir.

Lema 4.5.1 *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta,* $\omega \in H^1\Omega^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, *então*

$$\nabla_X\omega \in H^1\Omega^k(M) \iff \mathcal{L}_X\omega \in H^1\Omega^k(M).$$

Demonstração. Defina o operador $P_X = \nabla_X - \mathcal{L}_X \in \mathscr{D}(\Lambda^kT^*M, \Lambda^kT^*M)$. *Note que é suficiente mostrar o operador* P_X *é contínuo na norma* H^1. *Para* $f \in C^\infty(M)$ *e* $\omega \in \Omega^k(M)$, *podemos calcular*

$$\begin{aligned}
ad(f)P_X\omega =&\nabla_X(f\omega) - \mathcal{L}_X(f\omega) - fP_X\omega\\
=&\nabla_X(f)\omega - \mathcal{L}_X(f)\omega + f\nabla_X\omega - f\mathcal{L}_X\omega - fP_X\omega\\
=&X(f)\omega - X(f)\omega + fP_X\omega - fP_X\omega\\
=&0.
\end{aligned}$$

Disto, segue que $P_X \in End(\Lambda^k T^* M)$. *Numa vizinhança* U *de uma carta local de* $\overset{\circ}{M}$, *podemos fixar uma base ortonormal,* $\{\xi^j\}$, *de* $\Omega^k(U)$, *para a qual* $P_X|_U$ *admite uma representação como uma matriz de funções* $P_{ij} \in C^\infty(U)$, *para a qual*

$$P_X\xi^i = \sum P_{ij}\xi^j.$$

Com isto, temos

$$\|P_X\xi^i\|^2_{L^2(U)} = \sum_j \|P_{ij}\xi^j\|^2_{L^2(U)} \leq \mathrm{Max}_{i,j}\{\sup(P_{ij})^2\} \sum_j \|\xi^j\|^2_{L^2(U)}.$$

Como

$$\|\xi^j\|^2_2 = \int_U \langle \xi^j, \xi^j\rangle dM = \mathrm{Vol}(U),\ \forall j,$$

está claro que

$$\|P_X\omega\|_2 \leq k_1\|\omega\|_2,\ \forall \omega \in \Omega^k(U),$$

sendo $k_1 := \sqrt{\mathrm{Max}_{i,j}\{\sup(P_{ij})^2\} \dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)}$.

Similarmente, para norma da derivada covariante,

$$\nabla P_X\xi^i = \sum_j dP_{ij} \otimes \xi^j + \sum_j P_{ij}\nabla\xi^j,$$

logo,

$$\|\nabla P_X\xi^i\|_{L^2(U)} \leq \|\sum_j dP_{ij} \otimes \xi^j\|_{L^2(U)} + \|\sum_j P_{ij}\nabla\xi^j\|_{L^2(U)}.$$

Como

$$\langle dP_{ij} \otimes \xi^j, dP_{lm} \otimes \xi^m\rangle = \langle dP_{ij}, dP_{lm}\rangle\delta_{jm} = \langle dP_{ij}, dP_{lj}\rangle,$$

$$\|\sum_j dP_{ij} \otimes \xi^j\|^2_{L^2(U)} = \sum_{il} \|dP_{ij}dP_{lj}\|_{L^1(U)} \leq$$

$$\sum_{il} \|dP_{ij}\|_{L^2(U)} \|dP_{lj}\|_{L^2(U)} \leq \mathrm{Max}_{i,j}\{\sup \|P_{ij}\|^2_{L^2(U)}\} \dim \Omega^k(M).$$

Para $\|\sum_j P_{ij} \nabla \xi^j\|_{L^2(U)}$*, analogamemente à norma de* $P_X \xi^j$*,*

$$\|\sum_j P_{ij} \nabla \xi^j\|_{L^2(U)} \leq k_1 \|\nabla \xi^j\|_{L^2(U)}.$$

Pondo $k_2 := \sqrt{\mathrm{Max}_{i,j}\{\sup \|P_{ij}\|^2_{L^2(U)}\} \dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)}$*,*

$$\|\nabla P_X \omega\|_2 \leq k_1 \|\nabla \omega\|_2 + k_2 \|\omega\|_2 \leq k_3 \|\omega\|_{H^1(U)}, \ \forall \omega \in \Omega^k(U),$$

para alguma constante k_3*.*

Assim,

$$\|P_X \omega\|_{H^1(U)} \leq 2\mathrm{Max}\{k_1, k_3\} \|\omega\|_{H^1(U)}$$

Sendo M *compacta, podemos globalizar este resultado via partições da unidade, escolhendo uma cobertura finita de cartas locais de* M*, obtendo*

$$\|P_X \omega\|_{H^1} \leq \kappa \|\omega\|_{H^1},$$

Para alguma constante κ*.* □

Nosso objetivo agora é, portanto, mensurar a norma H^1 da derivada de Lie de um potencial. Considere para um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seu fluxo Φ_t^X, o operador de aproximação da derivada de Lie na direção X,

$$L_t^X : L^2\Omega^k(M) \to L^2\Omega^k(M)$$

$$\omega \mapsto \frac{1}{t}(\Phi_t^{X*}\omega - \omega),$$

Para o qual,

$$\lim_{t \to 0} L_t^X \omega = \mathcal{L}_X \omega.$$

A chave para mostrar a regularidade será majorar a sequência de aproximações da derivada de Lie do potencial na norma H^1. Para isto, far-se-hão necessárias algumas construções técnicas expostas a seguir.

Definição 4.5.1 *Dados uma variedade diferenciável M, uma variedade Riemanniana (N,g) e um mapa diferenciável, $f : M \to (N,g)$, com f_* injetiva em cada fibra. O pullback da métrica g é a métrica f^*g dada por*

$$f^*g(X,Y) := g(f_*X, f_*Y),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Sejam Φ_t^X o fluxo de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $g_t = g(t) = \Phi_t^{X*}g$ e $\star_t$ o operador de hodge com respeito à métrica $g(t)$. Tomando por $\{E_j(t)\}$ uma família de quadros ortonormais com relação à família de métricas $g(t)$,

$$g_t(E_i(t), E_j(t)) = g({\Phi_t^X}_* E_i(t), {\Phi_t^X}_* E_j(t)) = \delta_{ij}.$$

Assim, sendo $\{\xi^j(t)\}$ a base dual de $\{E_j(t)\}$, $\{\Phi_t^{X*}\xi^j(t)\}$ é uma base g-ortonormal, logo,

$$dM_{g(t)} = \Phi_t^{X*}\xi^1(t) \wedge ... \wedge \Phi_t^{X*}\xi^n(t)$$

e, se $\sigma \in \mathrm{S}_n$,

$$\begin{aligned}
\Phi_t^{X*} \star (\xi^{\sigma(1)}(t) \wedge ... \wedge \xi^{\sigma(k)}(t)) =& sgn(\sigma)\Phi_t^{X*}\xi^{\sigma(k+1)}(t) \wedge ... \wedge \Phi_t^{X*}\xi^{\sigma(n)}(t) \\
=& \star_t (\Phi_t^{X*}\xi^{\sigma(1)}(t) \wedge ... \wedge \Phi_t^{X*}\xi^{\sigma(k)}(t)) \\
=& \star_t \Phi_t^{X*}(\xi^{\sigma(1)}(t) \wedge ... \wedge \xi^{\sigma(k)}(t)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Phi_t^{X*}\star = \star_t \Phi_t^{X*}.$$

Considere agora o endomorfismo de deformação do operador de Hodge, dado por

$$\Xi_t^X := \frac{1}{t}((-1)^{n(n-k)} \star \star_t - Id),$$

para o qual,

$$\star_t = \star + t \star \Xi_t^X.$$

Similar ao caso do operador $\nabla_X - \mathcal{L}_X$ podemos encontrar uma constante c_1 tal que

$$\|\Xi_t^X \omega\|_{H^1} \leq c_1 \|\omega\|_{H^1}, \ \forall \omega \in H^1\Omega^k(M).$$

Com isto, temos o próximo resultado.

Lema 4.5.2 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Valem as seguintes afirmações sobre L_t^X.*

1. *Existe uma constante C_1 tal que*

$$\|L_t^X \omega\|_{L^2} \leq C_1 \|\omega\|_{H^1}.$$

2. *Se $\phi, \xi \in H^1\Omega^k(M)$, existe uma constante C_2 tal que*

$$\left|\mathcal{D}(L_t^X \phi, \xi)\right| \leq \left|\mathcal{D}(\phi, L_{-t}^X \xi)\right| + C_2 \|\phi\|_{H^1} \|\xi\|_{H^1}.$$

3. *Se ϕ é um potencial fraco de uma forma ω, existe uma constante C_ϕ tal que*

$$\|L_t^X \phi\|_{H^1} \leq C_\phi.$$

Demonstração.

1. Podemos escrever a aproximação da derivada de Lie como

$$L_t^X \omega = \int_0^1 \mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega) ds.$$

Com isto,

$$\|L_t^X \omega\|_2^2 = \int_M \left| \int_0^1 \mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega) ds \right|^2 dM \leq$$

$$\int_M \left(\int_0^1 \left| \mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega) \right|^2 ds \right) dM.$$

Pelo teorema de Fubini,

$$\int_M \left(\int_0^1 \left| \mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega) \right|^2 ds \right) dM = \int_0^1 \left(\int_M \left| \mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega) \right|^2 dM \right) ds =$$

$$\int_0^1 \|\mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega)\|_2^2 ds.$$

Veja que

$$\|\mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega)\|_2 \leq \|\nabla_X(\Phi_{st}^{X*}\omega)\|_2 + \|P_X(\Phi_{st}^{X*}\omega)\|_2 \leq$$

$$(\kappa + 1)\|\Phi_{st}^{X*}\omega\|_{H^1},$$

assim,

$$\int_0^1 \|\mathcal{L}_X(\Phi_{st}^{X*}\omega)\|_2^2 ds \leq (\kappa+1)^2 \int_0^1 \|\Phi_{st}^{X*}\omega\|_{H^1}^2 ds \leq$$

$$(\kappa+1)^2\mathrm{Max}_{s,t\in[0,1]}\|\Phi_{st}^{X*}\omega\|_{H^1}^2.$$

Fixemos s_0 e t_0 tal que $\|\Phi_{s_0t_0}^{X*}\omega\|_{H^1} = \mathrm{Max}_{s,t\in[0,1]}\|\Phi_{st}^{X*}\omega\|_{H^1}$. Sendo $\Phi_{s_0t_0}^{X*} \in Aut(\Lambda^kT^*M)$, podemos encontrar de maneira análoga ao endomorfismo P_X, uma constante $\tilde{C}_1$ tal que

$$\|\Phi_{s_0t_0}^{X*}\omega\|_{H^1} \leq \tilde{C}_1\|\omega\|_{H^1}.$$

Pondo $C_1 := (\kappa+1)\tilde{C}_1$, tem-se

$$\|L_t^X\omega\|_2 \leq (\kappa+1)\bigg(\int_0^1 \|\Phi_{st}^{X*}\omega\|_{H^1}^2 ds\bigg)^{1/2} =$$

$$\|L_t^X\omega\|_2 \leq (\kappa+1)\bigg(\int_0^1 \tilde{C}_1^2\|\omega\|_{H^1}^2 ds\bigg)^{1/2} \leq$$

$$(\kappa+1)\tilde{C}_1\|\omega\|_{H^1}\bigg(\int_0^1 ds\bigg)^{1/2} = C_1\|\omega\|_{H^1}.$$

2. Sejam $\omega, \eta \in L^2\Omega^k(M)$. Vale que

$$L_t^X(\omega\wedge\star\eta) = \frac{1}{t}(\Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\eta) - \omega\wedge\star\eta) =$$

$$\frac{1}{t}(\Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\eta) - \Phi_t^{X*}\omega\wedge\star\eta + \Phi_t^{X*}\omega\wedge\star\eta - \omega\wedge\star\eta) =$$

$$\frac{1}{t}(\Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\eta) - \Phi_t^{X*}(\omega\wedge\Phi_{-t}^{X}{}^*\star\eta)) + L_t^X\omega\wedge\star\eta =$$

$$\frac{1}{t}(\Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\eta) - \Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\Phi_{-t}^{X}{}^*\eta) + t\Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\Xi_{-t}^{X}{}^*\eta)) + L_t^X\omega\wedge\star\eta =$$

$$\Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star L_{-t}^X\eta + \Phi_t^{X*}(\omega\wedge\star\Xi_{-t}^X\eta) + L_t^X\omega\wedge\star\eta.$$

Sendo Φ_t^X um difeomorfismo, $\int_M \Phi_t^X\zeta = \int_M \zeta,\ \forall\zeta\in L^2\Omega^n(M)$. Assim,

$$0 = \int_M L_t^X(\omega\wedge\star\eta) =<\omega, L_{-t}^X\eta> + <\omega, \Xi_{-t}^X\eta> + <L_t^X\omega, \eta>.$$

Agora podemos tomar $\omega = d\phi$ e $\eta = d\xi$, obtendo

$$< d\phi, dL^X_{-t}\xi > + < d\phi, \Xi^X_{-t} d\xi > + < dL^X_t \phi, d\xi >= 0$$

como também, $\omega = d \star \phi$ e $\eta = d \star \xi$, obtendo

$$< d \star \phi, dL^X_{-t} \star \xi > + < d \star \phi, \Xi^X_{-t} d \star \xi > + < dL^X_t \star \phi, d \star \xi >= 0,$$

que é equivalente a

$$< d \star \phi, d \star L^X_{-t}\xi > + < d \star L^X_t \phi, d \star \xi >=$$

$$- < d \star \Xi^X_t \phi, d \star \xi > - < d \star \phi, d \star \Xi^X_{-t}\xi > - < d \star \phi, \Xi^X_{-t} d \star \xi > .$$

Note que a quantidade $< d \star \phi, d \star L^X_{-t}\xi > + < d \star L^X_t \phi, d \star \xi >$ é igual a

$$< \delta\phi, \delta L^X_{-t}\xi > + < \delta L^X_t \phi, \delta\xi >$$

e podemos somá-la à quantidade $< d\phi, dL^X_{-t}\xi > + < dL^X_t \phi, d\xi >$, obtendo a igualdade

$$\mathcal{D}(L^X_t \phi, \xi) + \mathcal{D}(\phi, L^X_{-t}\xi) =$$

$$-(< d\phi, \Xi^X_{-t} d\xi > + < d \star \Xi^X_t \phi, d \star \xi > + < d \star \phi, d \star \Xi^X_{-t}\xi > + < d \star \phi, \Xi^X_{-t} d \star \xi >).$$

Valendo-se do fato de Ξ^X_t ser um endomorfismo de fibrado e da desigualdade de Hölder, podemos encontrar $C_2 > 0$ tal que o segundo membro desta igualdade é limitado por

$$C_2 \|\phi\|_{H^1} \|\xi\|_{H^1},$$

logo,

$$\left|\mathcal{D}(L^X_t \phi, \xi)\right| - \left|\mathcal{D}(\phi, L^X_{-t}\xi)\right| \leq$$

$$\left|\mathcal{D}(L^X_t \phi, \xi) + \mathcal{D}(\phi, L^X_{-t}\xi)\right| \leq C_2 \|\phi\|_{H^1} \|\xi\|_{H^1},$$

como desejado.

3. Seja $\xi \in H^1\Omega^k(M)$. Tem-se

$$\Big|\mathcal{D}(\phi, L^X_{-t}\xi)\Big| = | < \omega, L^X_{-t}\xi > | \leq$$

$$\|\omega\|_2 \|L^X_{-t}\xi\|_2$$

Pelo item 1,

$$\|L^X_{-t}\xi\|_2 \leq C_1 \|\xi\|_{H^1}.$$

Agora, pelo item 2,

$$\Big|\mathcal{D}(L^X_t\phi, \xi)\Big| \leq \Big|\mathcal{D}(\phi, L^X_{-t}\xi)\Big| + C_2\|\phi\|_{H^1}\|\xi\|_{H^1} \leq$$

$$C_1\|\omega\|_2\|\xi\|_{H^1} + C_2\|\phi\|_{H^1}\|\xi\|_{H^1}.$$

Em particular,

$$\Big|\mathcal{D}(L^X_t\phi, L^X_t\phi)\Big| \leq$$

$$C_1\|\omega\|_2\|L^X_t\phi\|_{H^1} + C_2\|\phi\|_{H^1}\|L^X_t\phi\|_{H^1}.$$

Por fim, lançando mão da desigualdade de Gaffney, temos

$$\|L^X_t\phi\|^2_{H^1} \leq C_g\bigg(\Big|\mathcal{D}(L^X_t\phi, L^X_t\phi)\Big| + \|L^X_t\phi\|^2_2\bigg) \leq$$

$$C_g\bigg(C_1\|\omega\|_2\|L^X_t\phi\|_{H^1} + C_2\|\phi\|_{H^1}\|L^X_t\phi\|_{H^1} + \|L^X_t\phi\|_2\|L^X_t\phi\|_{H^1}\bigg) \leq$$

$$C_g\bigg(C_1\|\omega\|_2\|L^X_t\phi\|_{H^1} + C_2\|\phi\|_{H^1}\|L^X_t\phi\|_{H^1} + C_1\|\omega\|_{H^1}\|L^X_t\phi\|_{H^1}\bigg).$$

Agora basta por

$$C_\phi := C_g\bigg(C_1\|\omega\|_2 + C_2\|\phi\|_{H^1} + C_1\|\omega\|_{H^1}\bigg).$$

$\square$

Agora obtivemos todas as ferramentas para mostrar a regularidade do potencial.

Demonstração. Para ϕ um potencial de $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, considere uma sequência $t_j \to 0$, para a qual

$$L^X_{t_j}\phi \to \mathcal{L}_X\phi.$$

Considere uma cobertura finita de vizinhanças coordenadas $\{U_\alpha\}$ com uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta e um conjunto de quadros ortonormais locais $\{E^\alpha_i\}$ associados a estas vizinhanças. Escolhendo a convenção da norma H^1 para

$$\|L^X_{t_j}\phi\|^2_{H^1} = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\Big(|L^X_{t_j}\phi|^2 + \sum_i |\nabla_{E^\alpha_i} L^X_{t_j}\phi|^2\Big)dM$$

A condição $\|L^X_{t_j}\phi\|_{H^1} \leq C_\phi$ nos permite evocar o teorema da convergência dominada, que garante que

$$\lim_{t_j\to 0}\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\Big(|L^X_{t_j}\phi|^2 + \sum_i |\nabla_{E^\alpha_i} L^X_{t_j}\phi|^2\Big)dM =$$

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\Big(|\mathcal{L}_X\phi|^2 + \sum_i |\nabla_{E^\alpha_i} \mathcal{L}_X\phi|^2\Big)dM = \|\mathcal{L}_X\phi\|^2_{H^1} \leq (C_\phi)^2.$$

Disto segue que $\mathcal{L}_X\phi \in H^1\Omega^k(M) \Rightarrow \nabla_X\phi \in H^1\Omega^k(M)$. Em particular, $\nabla_X\phi$ existe $\forall X$ e tem norma H^1 finita, assim, $\phi \in H^2\Omega^k(M)$. $\square$

Para estabelecer a decomposição em $\Omega^k(M)$, devemos estender o resultado de regularidade: para uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$, precisamos mostrar que o potencial ϕ associado a ω é de classe C^∞. Mais geralmente, temos o

Teorema 4.5.2 *Se $\omega \in H^1\Omega^k(M)^\perp \cap H^s\Omega^k(M)$, o potencial ϕ associado a ω é de classe H^{s+2}. Em particular, se $\omega \in \Omega^k(M)$, $\phi \in \Omega^k(M)$.*

Demonstração. Para provar este resultado, lançaremos mão do maquinário discutido no apêndice A, em especial, o teorema A.2.

Sendo o Laplaciano de Hodge elíptico, admite a existência de uma paramétrica associada a si. Seja P uma paramétrica para Δ, então

$$P\omega = \phi + K\phi,$$

sendo K um operador infinitamente suavizante. Com isto, obtemos a estimativa elíptica *a priori*:

$$\|\phi\|_{H^{s+2}} \leq \|P\omega\|_{H^{s+2}} + \|K\phi\|_{H^{s+2}} \leq C\Big(\|\omega\|_{H^s} + \|\phi\|_{H^s}\Big)$$

□

4.6 Decomposição de Hodge-Morrey para o caso sem fronteira

Teorema 4.6.1 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira. Para $1 \leq k \leq \dim M$, vale a seguinte decomposição L^2-ortogonal:*

$$L^2\Omega^k(M) = d\Big(H^1\Omega^{k-1}(M)\Big) \oplus \delta\Big(H^1\Omega^{k+1}(M)\Big) \oplus H^1\mathcal{H}^k(M).$$

Demonstração. Para $\omega \in L^2\Omega^k(M)$, o teorema 4.3.2 garante que

$$\omega = (\omega - \lambda) + \lambda,$$

sendo $\lambda \in H^1\mathcal{H}^k(M)$ e $(\omega - \lambda) \in H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$. Pelo teorema 4.5.1, existe um potencial $\phi \in H^2\Omega^k(M)$ tal que $\Delta\phi = (\omega - \lambda)$. Assim, podemos escrever

$$\omega = d(\delta\phi) + \delta(d\phi) + \lambda.$$

A ortogonalidade desta decomposição segue da fórmula de Green. □

Corolário 4.6.1 (Decomposição de formas suaves) *Sobre o espaço de formas diferenciais suaves, vale a decomposição L^2-ortogonal*

$$\Omega^k(M) = d\Big(\Omega^{k-1}(M)\Big) \oplus \delta\Big(\Omega^{k+1}(M)\Big) \oplus \mathcal{H}^k(M).$$

Demonstração. Seja $\omega \in \Omega^k(M)$. O campo harmônico λ associado a ω é solução fraca do problema

$$\Delta\lambda = 0,$$

em particular, possui regularidade H^{s+2}, $\forall s$. Neste caso, o teorema do mergulho de Sobolev garante que $\lambda \in \Omega^k(M)$ e, portanto, pertence ao conjunto $\mathcal{H}^k(M)$. Consequentemente, $(\omega - \lambda) \in \Omega^k(M)$ e o potencial ϕ associado a esta forma também possui regularidade H^{s+2}, $\forall s \Rightarrow \phi \in \Omega^k(M)$. □

5 DECOMPOSIÇÕES DE MORREY E FRIEDRICHS

Nosso objetivo agora é estender a decomposição discutida no capítulo anterior para o caso de uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Reproduziremos a demonstração do caso sem fronteira com as devidas adaptações para a nova versão; aqui, as condições de fronteira terão um papel fundamental para que se estabeleça a decomposição.

5.1 Decomposição de Hodge em variedades com fronteira

Teorema 5.1.1 (Morrey) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada compacta com fronteira. Para cada $\Omega^k(M)$, $0 \leq k \leq n$, valem as seguintes decomposições ortogonais:*

$$\Omega^k(M) = \mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M) \oplus \mathcal{H}^k(M)$$

onde

$$\mathcal{E}^k(M) := \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{k-1}(M),\ \mathrm{T}\alpha = 0\}$$

$$\mathcal{C}^k(M) := \{\delta\beta \mid \beta \in \Omega^{k+1}(M),\ \mathrm{N}\beta = 0\}$$

$$\mathcal{H}^k(M) := \{\gamma \in \Omega^k(M) \mid d\gamma = 0, \delta\gamma = 0\}.$$

Teorema 5.1.2 (Friedrichs) *Valem as seguintes decomposições dos campos harmônicos*

$$\mathcal{H}^k(M) = \ker \mathrm{N} \cap \mathcal{H}^k(M) \oplus \mathrm{im}(d) \cap \mathcal{H}^k(M)$$

$$\mathcal{H}^k(M) = \ker \mathrm{T} \cap \mathcal{H}^k(M) \oplus \mathrm{im}(\delta) \cap \mathcal{H}^k(M).$$

Para demonstrar a decomposição de Morrey, faremos uma adaptação da demonstração no caso sem fronteira. Para isto, revisitaremos o problema do Laplaciano e o método de energia, agora no contexto de fronteira não vazia.

Seguindo o roteiro do caso sem fronteira, desejamos estabelecer uma decomposição ortogonal do conjunto de formas L^2 em um subespaço de dimensão finita e seu complemento ortogonal, sendo este último o conjunto de formas que admitem um potencial. Neste caso não podemos utilizar a decomposição $H^1\mathcal{H}^k(M) \oplus H^1\mathcal{H}^k(M)^\perp$, pois não vale, em geral, que a dimensão de $H^1\mathcal{H}^k(M)$ é finita.

Exemplo 5.1.1 *Consideremos o disco unitário de* $\mathbb{C}$*,* D*, que é trivialmente uma variedade diferenciável com fronteira de dimensão real 2. Munindo* D *da métrica canônica de* $\mathbb{R}^2$*,* $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$*, tem-se*

$$udx + vdy = \omega \in \mathcal{H}^1(M) \iff$$

$$\begin{cases} d\omega = (\partial_x v - \partial_y u) dx \wedge dy = 0. \\ \delta\omega = \partial_x u + \partial_y v = 0. \end{cases}$$

É sabido da teoria de variáveis complexas, como visto em (AHLFORS; COLLECTION, 1979), que a função $f : D \to \mathbb{C}$ *dada por* $u + \mathrm{i}v$ *é analítica e somente se satisfaz os critérios de Cauchy-Riemann,*

$$\begin{cases} \partial_x u = -\partial_y v. \\ \partial_x v = \partial_y u. \end{cases}$$

Em particular, todo polinômio $P(z) = \sum a_j z^j, a_j \in \mathbb{C}$*, é analítico e determina uma 1-forma* $Re(P(z))dx + Im(P(z))dy$*, que é claramente fechada e cofechada.*

Com isto, obtivemos um subconjunto infinito linearmente independente de $\mathcal{H}^1(M)$. Devemos, portanto, encontrar outro subespaço de dimensão finita para recuperar uma decomposição nos moldes do caso sem fronteira.

5.2 Campos de Dirichlet e Neumann

Definição 5.2.1 *Um* ***campo de Dirichlet*** *é um elemento do conjunto*

$$\mathcal{H}^k_D(M) := \{\omega \in H^1\Omega^k(M) \mid d\omega = 0, \delta\omega = 0, T(\omega) = 0\}.$$

Respectivamente, um ***campo de Neumann*** *é um elemento do conjunto*

$$\mathcal{H}^k_D(M) := \{\omega \in H^1\Omega^k(M) \mid d\omega = 0, \delta\omega = 0, N(\omega) = 0\}.$$

Desejamos recuperar um resultado de decomposição similar ao teorema 4.3.2. Para isto, é necessário que estendamos a desigualdade de Gaffney para o contexto de fronteira não vazia.

Teorema 5.2.1 (Desigualdade de Gaffney) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Dada $\omega \in H^1\Omega^k(M)$ com $T(\omega)$ ou $N(\omega)$, existe uma constante C_g, que depende exclusivamente da métrica, tal que*

$$\|\omega\|_{H^1}^2 \leq C_g\Big(\|\omega\|_{L^2}^2 + \mathcal{D}(\omega, \omega)\Big).$$

Demonstração. Assumamos por um momento que $\omega \in \Omega^k(M)$. Pela fórmula de Weitzenböck 2.1,

$$\|\omega\|_{H^2}^2 - \|\omega\|_{L^2}^2 = \int_M \Big(-\frac{1}{2}\Delta\langle\omega, \omega\rangle + \langle\Delta\omega, \omega\rangle - \langle \mathrm{Ric}(\omega), \omega\rangle\Big) dM.$$

A fórmula de Green 2.2 garante que

$$\int_M \langle (d\delta + \delta d)\omega, \omega\rangle dM = \mathcal{D}(\omega, \omega) + \int_{\partial M} \Big(T(\delta\omega) \wedge \star N(\omega) - T(\omega) \wedge \star N(d\omega)\Big).$$

Assumamos a condição $T(\omega) = 0$, que implica que

$$T(\omega) \wedge \star N(d\omega) = 0.$$

Para contabilizar, $T(\delta\omega) \wedge \star N(\omega)$ é útil o seguinte lema.

Lema 5.2.1 *Considerando um quadro ortonormal local $\{\mathcal{N} = E_1, E_2, ..., E_n\}$ em ∂M, para $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$,*

$$T(\omega) \wedge \star N(\eta) = \langle \omega, i_{\mathcal{N}}\eta\rangle i_{\mathcal{N}} dM.$$

Valendo-se de que $\star N = T\star$,

$$\Big(T(\omega) \wedge T(\star\eta)\Big)(E_2, ..., E_n) = \sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(1)=1} \omega(E_{\sigma(2)}, ..., E_{\sigma(k)}) \star \eta(E_{\sigma(k+1)}, ..., E_{\sigma(n)}) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(1)=1} \omega(E_{\sigma(2)}, ..., E_{\sigma(k)}) \eta(\mathcal{N}, E_{\sigma(2)}, ..., E_{\sigma(k+1)}) = \langle \omega, i_{\mathcal{N}}\eta\rangle =$$

$$\langle \omega, i_{\mathcal{N}}\eta\rangle i_{\mathcal{N}} dM(E_2, ..., E_n).$$

Assim,

$$T(\delta\omega) \wedge \star N(\omega) = \langle \delta\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle i_{\mathcal{N}} dM =$$

$$\langle -\sum_j i_{E_j} \nabla_{E_j}\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle i_{\mathcal{N}} dM.$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_M -\frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle dM = \int_{\partial M}\frac{1}{2}\mathcal{N}(|\omega|^2)i_{\mathcal{N}}dM = \int_{\partial M}\langle\nabla_{\mathcal{N}}\omega,\omega\rangle i_{\mathcal{N}}dM.$$

a expressão local de $\langle\nabla_{\mathcal{N}}\omega,\omega\rangle$ é dada por

$$\sum_{\sigma\in S_n}\nabla_{\mathcal{N}}\omega(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)})\omega(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k)}).$$

Como, $T(\omega)=0$, as parcelas desta soma em que $\sigma(1),...,\sigma(k)\neq 1$ são nulas. Isto permite escrever

$$\langle\nabla_{\mathcal{N}}\omega,\omega\rangle = \langle i_{\mathcal{N}}\nabla_{\mathcal{N}}\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle.$$

Aglutinando todos os termos, obtemos

$$\|\omega\|^2_{H^1}-\|\omega\|^2_{L^2} = \mathcal{D}(\omega,\omega)+\int_{\partial M}\Big(\langle-\sum_j i_{E_j}\nabla_{E_j}\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle + \langle i_{\mathcal{N}}\nabla_{\mathcal{N}}\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle\Big)i_{\mathcal{N}}dM =$$

$$\mathcal{D}(\omega,\omega)+\int_{\partial M}\langle-\sum_{j\neq 1} i_{E_j}\nabla_{E_j}\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle i_{\mathcal{N}}dM.$$

Agora veja que

$$-\sum_{j\neq 1} i_{E_j}\nabla_{E_j}\omega(E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k-1)}) =$$

$$-\sum_{j\neq 1}\Bigg[E_j\Big(\omega(E_j,E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k-1)})\Big)-\sum_l \omega(E_j,E_{\sigma(1)},...,\nabla_{E_j}E_{\sigma(l)},...,E_{\sigma(k-1)})\Bigg].$$

Ademais, $T(\omega)=0\Rightarrow \omega(E_j,E_{\sigma(1)},...,E_{\sigma(k-1)})=0$ e

$$\omega(E_j,E_{\sigma(1)},...,\nabla_{E_j}E_{\sigma(l)},...,E_{\sigma(k-1)}) =$$

$$\omega(E_j,E_{\sigma(1)},...,\langle\nabla_{E_j}E_{\sigma(l)},\mathcal{N}\rangle\mathcal{N},...,E_{\sigma(k-1)}) =$$

$$-\omega(E_j,E_{\sigma(1)},...,\langle E_{\sigma(l)},\nabla_{E_j}\mathcal{N}\rangle\mathcal{N},...,E_{\sigma(k-1)}),$$

pela compatibilidade da conexão.

Com isto, fica explícito a tensorialidade do operador $\omega\mapsto -\sum_{j\neq 1} i_{E_j}\nabla_{E_j}\omega$ quando $T(\omega)=0$, portanto, similarmente ao operador de Weitzenböck, é possível encontrar uma constante C_∂ tal que

$$\left|\int_{\partial M}\langle-\sum_{j\neq 1} i_{E_j}\nabla_{E_j}\omega, i_{\mathcal{N}}\omega\rangle i_{\mathcal{N}}dM\right| \leq C_\partial\int_{\partial M}\langle\omega,\omega\rangle i_{\mathcal{N}}dM = C_\partial\|\omega\|^2_{L^2(\partial M)}.$$

Resta limitar $\|\omega\|^2_{L^2(\partial M)}$. Para isto, faz-se necessário o uso do seguinte

Lema 5.2.2 (Lions) *Seja $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ uma sequência de espaços de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$ é um mergulho compacto e $Y \hookrightarrow Z$ é um mergulho contínuo. Para qualquer $\epsilon > 0$, $\exists C_\epsilon \geq 0$ tal que $\forall u \in X$,*

$$\|u\|_Y \leq \epsilon \|u\|_X + C_\epsilon \|u\|_Z.$$

Pelos teoremas do traço e de Rellich-Kondrachov, a sequência de mergulhos $H^1\Omega^k(M) \hookrightarrow L^2\Omega^k(\partial M) \hookrightarrow L^2\Omega^k(M)$ satisfaz as condições do lema de Lions, portanto,

$$\|\omega\|_{L^2(\partial M)} \leq \frac{1}{2C_\partial}\|\omega\|_{H^1(M)} + C_{1/2C_\partial}\|\omega\|_{L^2(M)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|\omega\|^2_{H^1} \leq \|\omega\|^2_{L^2} + \mathcal{D}(\omega,\omega) + C_\partial C_{1/2C_\partial}\|\omega\|_{L^2(M)}.$$

Por fim, para o caso de $N(\omega) = 0$, $T(\star\omega) = 0$ e, sendo o operador de hodge uma isometria, a desigualdade pode ser obtida a partir de $\star\omega$. Para $\omega \in H^1\Omega^k(M)$, basta tomar uma sequência em $\Omega^k(M)$, $\omega_j \xrightarrow{H^1} \omega$ para obter a desigualdade. *symbol* □

Em posse da desigualdade de Gaffney, apresentamos a primeira decomposição para variedades com fronteira.

Teorema 5.2.2 *O espaço dos campos de Dirichlet(respectivamente Neumann) tem dimensão finita e valem as decomposições L^2-ortogonais em subespaços fechados:*

$$L^2\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k_D(M) \oplus \mathcal{H}^k_D(M)^\perp$$

$$L^2\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k_N(M) \oplus \mathcal{H}^k_N(M)^\perp.$$

Demonstração. Dado um campo de Dirichlet ω, a condição $T(\omega)$ nos permite usar a desigualdade de Gaffney, que nos dá

$$\|\omega\|^2_{H^1} \leq C_g\|\omega\|^2_{L^2}.$$

A partir disto, podemos repetir a demonstração do teorema 4.3.2 O mesmo vale para um campo de Neumann. □

Obtivemos, portanto, duas decomposições de $L^2\Omega(M)$. Seguindo os passos do capítulo 2, devemos caracterizar os subespaços $\mathcal{H}^k_D(M)^\perp$ e $\mathcal{H}^k_N(M)^\perp$ como conjuntos imagem do Laplaciano de Hodge lançando mão do método de energia.

5.3 Potenciais de Dirichlet e Neumann

Proposição 5.3.1 *A forma de Dirichlet é coerciva nos espaços*

$$\mathcal{H}^k_D(M)^{\perp} := \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp} \cap H^1\Omega^k(M)$$

$$\mathcal{H}^k_N(M)^{\perp} := \mathcal{H}^k_N(M)^{\perp} \cap H^1\Omega^k(M).$$

Demonstração. Em posse da desigualdade de Gaffney, a demonstração é inteiramente análoga a do teorema 4.4.2. □

Teorema 5.3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Para cada $\omega \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$ existe uma única forma $\phi_D \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$ tal que $\forall \xi \in H^1\Omega^k(M) \cap \ker T$,*

$$\mathcal{D}(\phi_D, \xi) =< \omega, \xi > .$$

De maneira análoga, para cada $\omega \in \mathcal{H}^k_N(M)^{\perp}$ existe uma única forma $\phi_N \in \mathcal{H}^k_N(M)^{\perp}$ tal que $\forall \xi \in H^1\Omega^k(M) \cap \ker N$,

$$\mathcal{D}(\phi_N, \xi) =< \omega, \xi > .$$

As formas ϕ_D e ϕ_N são denominadas potenciais de Dirichlet e Neumann para ω, respectivamente.

Demonstração. Como $\mathcal{D}$ é coerciva em $\mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$, o teorema de Lax-Milgram assegura a existência de uma forma ϕ_D tal que

$$\mathcal{D}(\phi_D, \xi) =< \omega, \xi >, \ \forall \xi \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$$

À luz da decomposição do teorema 5.2.2 e do fato de que se $\xi \in \mathcal{H}^k_D(M)$,

$$\mathcal{D}(\phi_D, \xi) = 0,$$

tem-se que para $\xi \in H^1\Omega^k(M) \cap \ker T$,

$$\mathcal{D}(\phi_D, \xi) = \mathcal{D}(\phi_D, \xi - \xi_{\mathcal{H}_D}),$$

onde $\xi - \xi_{\mathcal{H}_D} \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$ e o resultado segue.

Se ϕ'_D é outro potencial de Dirichlet, $(\phi_D - \phi'_D) \in \mathcal{H}^k_D$. De fato,

$$\mathcal{D}((\phi_D - \phi'_D), \xi) = 0, \ \forall \xi \in H^1\Omega^k(M) \cap \ker T,$$

em particular,

$$\mathcal{D}((\phi_D - \phi'_D), (\phi_D - \phi'_D)) = 0.$$

Logo, $(\phi_D - \phi'_D) \in \mathcal{H}_D^k(M)^{\perp} \cap \mathcal{H}_D^k(M) \Rightarrow (\phi_D - \phi'_D) = 0$. A existência e unicidade de ϕ_N é inteiramente análoga. □

5.4 Regularidade

Teorema 5.4.1 (Regularidade do potencial) *Nas condições do teorema anterior, os potenciais de Dirichlet e Neumann possuem regularidade H^2.*

Demonstração. Seja ϕ_D o potencial de Dirichlet de uma forma $\omega \in L^2\Omega^k(M)$. A regularidade H^2 de ϕ_D no interior de M pode ser obtida de maneira idêntica ao caso de fronteira vazia. Na fronteira de M, se considerarmos um quadro ortonormal $(\mathcal{N} = E_1, E_2, ..., E_n)$ de uma vizinhança U ao redor de um ponto $p \in \partial M$, o mesmo argumento pode ser repetido para garantir a existência e L^2-integrablidade das derivadas covarientes dos potenciais nas direções $E_j,\ 1 < j$. resta-nos, portanto, estudar a derivação na direção normal a ∂M. Note que a regularidade interior garante que

$$\Delta\phi_D = \omega \text{ em } \overset{\circ}{M}.$$

Tomemos uma sequência $\phi_j \xrightarrow{H^2(M \backslash \partial M)} \phi_D$ tal que cada ϕ_j possui suporte compacto, o que implica que $\Delta\phi_j \in L^2\Omega^k(M),\ \forall j$ e $\Delta\phi_j \xrightarrow{L^2(M)} \Delta\phi_D$. Em particular, $\Delta\phi_D \in L^2\Omega^k(M)$.

Pela fórmula de Weitzenböck, podemos escrever

$$\Delta\phi = -\sum_j \nabla_{E_j}\nabla_{E_j}\phi + \sum_j \nabla_{\nabla_{E_j}E_j}\phi + \mathrm{Ric}(\phi).$$

Sendo $\phi \in H^1\Omega^k(M)$, vale que $\nabla_{\nabla_{E_j}E_j}\phi \in L^2\Omega^k(M),\ \forall j$. Além disso, pela regularidade interior, $\nabla_{E_j}\nabla_{E_j}\phi \in L^2\Omega^k(M),\ \forall j > 1$. Assim,

$$\Delta\phi + \sum_j \nabla_{E_j}\nabla_{E_j}\phi - \sum_j \nabla_{\nabla_{E_j}E_j}\phi - \mathrm{Ric}(\phi) =$$

$$\nabla_{\mathcal{N}}\nabla_{\mathcal{N}}\phi \in L^2\Omega^k(M).$$

Resta mostrar que $\nabla_{\mathcal{N}}\nabla_{E_j}\phi,\ \nabla_{E_j}\nabla_{\mathcal{N}}\phi \in L^2\Omega^k(M)$. A regularidade interior mostra que

$$\nabla_{E_j}\nabla_{\mathcal{N}}\phi \in L^2\Omega^k(M),\ \forall j > 1.$$

Ademais,

$$\nabla_{\mathcal{N}}\nabla_{E_j}\phi = \mathcal{R}(\mathcal{N}, E_j)\phi + \nabla_{E_j}\nabla_{\mathcal{N}}\phi + \nabla_{[\mathcal{N},E_j]}\phi \in L^2\Omega^k(M).$$

Para o potencial de Neumann, a demonstração é repetida ipsis literis. $\square$

Em posse da regularidade, podemos utilizar a fórmula de Green para obter a seguinte identidade:

$$< \omega, \xi >= \mathcal{D}(\phi_D, \xi) =< \Delta\phi_D, \xi > - \int_{\partial M} T(\delta\phi_D) \wedge \star N(\xi),$$

resultando na

Proposição 5.4.1 *O potencial de Dirichlet de ω é uma solução do problema*

$$\Delta\phi_D = \omega \ \text{em } M$$

$$T(\phi_D) = 0 \ \text{em } \partial M$$

$$T(\delta\phi_D) = 0 \ \text{em } \partial M$$

Corolário 5.4.1 *Para qualquer $\alpha \in H^1\Omega^{k-1}(M)$, vale*

$$< \omega, d\alpha >=< d\delta\omega, d\alpha > .$$

Demonstração. Tomando uma sequência $\{\alpha_j\} \subset \Omega^k(M)$, $\alpha_j \xrightarrow{H^1} \alpha$, temos, pela fórmula de Green,

$$< \delta d\phi_D, d\alpha_j >=< d\phi_D, d^2\alpha_j > - \int_{\partial M} T(d\phi_D) \wedge \star N(\xi) = 0,$$

pois, $d^2 = 0$ e $T(d\phi_D) = dT(\phi_D) = 0$. $\square$

Teorema 5.4.2 *Os potenciais de Neumann e Dirichlet que solucionam os seguintes problemas possuem regularidade H^{s+2}.*

1.

$$\Delta\phi_D = \omega \in H^s\Omega^k(M) \ \text{em } M$$

$$T(\phi_D) = 0 \ \text{e } T(\delta\phi_D) = 0 \ \text{em } \partial M$$

2.

$$\Delta\phi_N = \omega \in H^s\Omega^k(M) \ \textit{em}\ M$$

$$N(\phi_N) = 0 \ \textit{e}\ N(d\phi_N) = 0 \ \textit{em}\ \partial M$$

Demonstração. Mostraremos que estes problemas são elípticos no sentido Lopatinskij-Shapiro e portanto, valem as estimativas elípticas *a priori* para as normas dos potenciais.

Como mostrado anteriormente em 3.1, o Laplaciano de Hodge é elíptico e seu símbolo principal é dado por

$$\sigma_\Delta(\xi) = -|\xi|^2\mathrm{Id} = -\sum_j \xi^j\xi^j\mathrm{Id}$$

numa vizinhança com base ortonormal, $(E_1, ..., E_n)$, onde $\xi^j := \xi(E_j)$. Tomando um quadro ortonormal $(\partial_\nu = E_1, ...E_n)$ ao redor de um ponto na fronteira de M, onde ∂_ν representa a derivação na direção normal, tem-se

$$\sigma_\Delta(\tilde{\xi}) = -(|\tilde{\xi}|^2 + \partial_\nu\partial_\nu)\mathrm{Id}.$$

Isto determina a equação diferencial ordinária de curvas com valores em $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma + |\tilde{\xi}|^2\gamma = 0,$$

cujas soluções são do tipo

$$\gamma(t) = \exp\left(-t|\tilde{\xi}|\right)\gamma(0),$$

para um dado inicial prescrito $\gamma(0)$.

Resta mostrar que o mapa definido pelas condições de Lopatinskij-Shapiro, é injetivo, i.e. tem núcleo trivial.

$$\sigma_T(\xi) = \sigma_T(\tilde{\xi}) = T$$

$$\sigma_\delta(\xi) = -\sum_j \xi^j i_{E_j} \Rightarrow$$

$$\sigma_\delta(\tilde{\xi}) = -\sum_j \tilde{\xi}^j i_{E_j} - \partial_\nu i_{\partial_\nu}.$$

Fazendo $\gamma_0 := \gamma(0)$,

$$\sigma_{T\circ\delta}(\tilde{\xi})\gamma_0 = |\tilde{\xi}|T(i_{\partial_\nu}\gamma_0) - \sum_j \tilde{\xi}^j T(i_{E_j}\gamma_0).$$

Utilizando as condições de fronteira, obtemos

$$T(\gamma_0) = 0$$

$$|\tilde{\xi}|T(i_{\partial_\nu}\gamma_0) - \sum_j \tilde{\xi}^j T(i_{E_j}\gamma_0) = 0.$$

Veja que $T \circ i_{E_j} = i_{E_j} \circ T$, sempre que $j \neq 1$. Com isto obtemos

$$T(i_{\partial_\nu}\gamma_0) = 0 \to i_{\partial_\nu}\gamma_0 = 0.$$

Assim, fica claro que

$$T(\gamma_0) = N(\gamma_0) = \gamma_0\Big|_{\partial M} = 0$$

e, portanto, $\gamma_0 \equiv 0$.

□

5.5 Decomposição de Hodge-Morrey-Friedrichs

Teorema 5.5.1 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta com fronteira. Para cada $0 \leq k \leq n$, vale a seguinte decomposição ortogonal:*

$$L^2\Omega^k(M) = L^2\mathcal{E}^k(M) \oplus L^2\mathcal{C}^k(M) \oplus L^2\mathcal{H}^k(M)$$

onde

$$L^2\mathcal{E}^k(M) := \{d\alpha \mid \alpha \in H^1\Omega^{k-1}(M),\ \mathrm{T}\alpha = 0\}$$

$$L^2\mathcal{C}^k(M) := \{\delta\beta \mid \beta \in H^1\Omega^{k+1}(M),\ \mathrm{N}\beta = 0\}$$

$$L^2\mathcal{H}^k(M) := \overline{\mathcal{H}^k(M)}$$

Demonstração. Seja $\omega \in L^2\Omega^k(M)$. Pelo teorema 5.2.2, temos

$$\omega = (\omega - \omega^D) + \omega^D,$$

com $\omega^D \in \mathcal{H}^k_D(M)$ e $(\omega - \omega^D) \in \mathcal{H}^k_D(M)^\perp$. Seja ϕ_D um potencial de Dirichlet para $(\omega - \omega^D)$. Tomando $\alpha = \delta\phi_D$, vale que, $\forall d\eta \in L^2\mathcal{E}^k(M)$,

$$< \omega, \eta > = < d\alpha, d\eta > + < \omega^D, d\eta > =$$

$$< d\alpha, d\eta > + < \delta\omega^D, \eta > - \int_{\partial M} T(\omega^D) \wedge \star N(\eta) =$$

$$< d\alpha, d\eta > .$$

Utilizando a segunda decomposição do teorema 5.2.2, podemos escrever

$$\omega = (\omega - \omega^N) + \omega^N,$$

com $\omega^N \in \mathcal{H}^k_N(M)$ e tomar por ϕ_N o potencial de Neumann de $(\omega - \omega^N)$ e $\beta := d\phi_N$. Com isto, com uma computação análoga à anterior, obtemos $\forall \delta\eta \in L^2\mathcal{C}^k(M)$,

$$< \omega, \delta\eta > = < \delta\beta, \delta\eta > .$$

Note que, tomando sequências de formas suaves $d\alpha_j \xrightarrow{L^2} d\alpha$ e $\delta\beta_j \xrightarrow{L^2} \delta\beta$, pela fórmula de Green, $< d\alpha_j, \delta\beta_j > = 0, \ \forall j$, logo,

$$< d\alpha, \delta\beta > = 0$$

e fica claro que, tomando $\gamma := \omega - d\alpha - \delta\beta$,

$$\gamma \perp d\alpha \perp \delta\beta$$

e, com isto, estabelecemos a decomposição ortogonal

$$L^2\mathcal{E}^k(M) \oplus L^2\mathcal{C}^k(M) \oplus (L^2\mathcal{E}^k(M) \oplus L^2\mathcal{C}^k(M))^\perp.$$

Note que a ortogonalidade garante que $L^2\mathcal{E}^k(M)$ e $L^2\mathcal{C}^k(M)$ são fechados: tem-se

$$L^2\mathcal{E}^k(M)^\perp = L^2\mathcal{C}^k(M) \oplus (L^2\mathcal{E}^k(M) \oplus L^2\mathcal{C}^k(M))^\perp$$

e dada uma sequência de Cauchy $\{d\alpha_j\} \subset L^2\mathcal{E}^k(M)$, cujo limite é $\eta \in L^2\Omega^k(M)$ e $\xi \in L^2\mathcal{C}^k(M) \oplus (L^2\mathcal{E}^k(M) \oplus L^2\mathcal{C}^k(M))^\perp$. Vale que

$$< \eta, \xi > = \lim_{j \to 0} < d\alpha_j, \xi > = 0 \Rightarrow$$

$$\eta \in L^2\mathcal{E}^k(M).$$

O análogo vale para $L^2\mathcal{C}^k(M)$ e $(L^2\mathcal{E}^k(M) \oplus L^2\mathcal{C}^k(M))^{\perp}$.

Encontramos, portanto, as projeções de ω em $L^2\mathcal{E}^k(M)$ e $L^2\mathcal{C}^k(M)$. Resta mostrar que $\gamma \in L^2\mathcal{H}^k(M)$.

Tome uma sequência $\{\omega_j\} \subset \Omega^k(M)$ tal que $\omega_j \xrightarrow{L^2} \omega$. A regularidade do potencial garante que $\mathcal{H}^k_D(M), \mathcal{H}^k_N(M) \subset \Omega^k(M)$. Assim, ω_j^D e ω_j^N são suaves, consequentemente, $(\omega_j - \omega_j^D), (\omega_j - \omega_j^N), (\phi_D)_j, (\phi_N)_j$ e γ_j o são.

Pela fórmula de Green,

$$< \delta\gamma_j, \xi >=< \gamma_j, d\xi >= 0,\ \forall \xi \in \Omega^{k-1}_D(M)$$

e

$$< d\gamma_j, \xi >=< \gamma_j, \delta\xi >= 0,\ \forall \xi \in \Omega^{k+1}_N(M),$$

onde $\Omega^k_D(M) := \{\xi \in \Omega^k(M)|\ T(\xi) = 0\}$ e $\Omega^k_N(M) := \{\xi \in \Omega^k(M)|\ N(\xi) = 0\}$. Sendo $\Omega^{k-1}_D(M)$ e $\Omega^{k+1}_N(M)$ densos em $\Omega^{k-1}(M)$ e $\Omega^{k+1}(M)$, respectivamente, fica claro que $\gamma_j \in \mathcal{H}^k(M)$, $\forall j$. Por fim, tem-se $\lim \gamma_j = \gamma$ pela continuidade do operador de projeção em $\mathcal{H}^k(M)$.

$\square$

Corolário 5.5.1 (Decomposição suave) *A decomposição se restringe naturalmente ao espaço de formas suaves:*

$$\Omega^k(M) = \mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M) \oplus \mathcal{H}^k(M).$$

Teorema 5.5.2 (Friedrichs) *Para o espaço de campos harmônicos vale a seguinte decomposição ortongonal*

$$H^1\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k_D(M) \oplus \mathcal{H}_{co}(M)$$

e

$$H^1\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k_N(M) \oplus \mathcal{H}_{ex}(M),$$

sendo

$$\mathcal{H}_{ex}(M) := H^1\mathcal{H}(M) \cap d(H^1\Omega^{k-1}(M))$$

e

$$\mathcal{H}_{co}(M) := H^1\mathcal{H}(M) \cap \delta(H^1\Omega^{k+1}(M)).$$

Demonstração. Seja $\kappa \in H^1\mathcal{H}^k(M)$. Pelo teorema 5.2.2, podemos encontrar uma forma $\kappa^D \in \mathcal{H}_D^k(M)$ tal que $(\kappa - \kappa^D) \in \mathcal{H}_D^k(M)^\perp$. Note que $(\kappa - \kappa^D) \in H^1\mathcal{H}^k(M)$, pois κ_D é um campo harmônico.

Sendo $(\kappa - \kappa^D)$ um elemento de $\mathcal{H}_D^k(M)^\perp$, existe $\phi_\kappa \in H^3\Omega^k(M)$ tal que

$$\Delta\phi_\kappa = (\kappa - \kappa^D).$$

Para $\xi \in \mathcal{H}_D^k(M)$, vale que

$$< \Delta\phi_\kappa, \xi >= 0 \Rightarrow$$

$$< d\delta\phi_\kappa, \xi >= - < \delta d\phi_\kappa, \xi >=$$

$$- < d\phi_\kappa, d\xi > + \int_{\partial M} T(\xi) \wedge \star N(d\phi_\kappa) = 0,$$

pois, $d\xi = 0$, $T(\xi) = 0$.

Disto segue que $d\delta\phi_\kappa \in \mathcal{H}_D^k(M)^\perp$. Ademais, tem-se

$$T(d\delta\phi_\kappa) = dT(\delta\phi_\kappa) = 0\delta\phi_\kappa \in \mathcal{H}_D^k(M)$$

e, portanto, tem-se $d\delta\phi_\kappa = 0$ e

$$\kappa = \delta d\phi_\kappa + \kappa^D,$$

com $\delta d\phi_\kappa \in \mathcal{H}_{co}(M)$ e $\kappa^D \in \mathcal{H}_D^k(M)$.

A decomposição dual segue de maneira análoga. $\square$

6 APLICAÇÕES

6.1 cohomologia de variedades fechadas

Nesta seção mostraremos o poder da decomposição de Hodge como ferramenta para o cálculo dos grupos de cohomologia real de variedades.

Definição 6.1.1 *Seja M uma variedade diferenciável. O* ***complexo de de Rham*** *é a sequência de espaços de formas diferenciais*

$$0 \hookrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \dots \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots \Omega^n(M) \to 0$$

Proposição 6.1.1 *O complexo de de Rham é um complexo de cocadeias reais, i.e. uma sequência de espaços vetoriais reais $\{V^j\}$ e morfismos $\varphi^j : V^j \to V^{j+1}$ tais que $\varphi^{j+1} \circ \varphi^j = 0, \ \forall j$.*

Demonstração. A prova é imediata: basta tomar $\varphi^j := d|_{\Omega^j(M)}$. □ Sendo um complexo de cocadeias, o complexo de de Rham possui grupos de cohomologia.

Definição 6.1.2 *A* ***k-ésima cohomologia de deRham*** *é o espaço quociente*

$$H^k_{dR} := \frac{\ker\ d|_{\Omega^k(M)}}{\mathrm{im}\ d|_{\Omega^{k-1}(M)}}.$$

É sabido da teoria de variedades diferenciáveis que os grupos de cohomologia de de Rham são isomorfos aos grupos de cohomologia e homologia singular real de mesmo grau, como visto em (CONLON, 2013). Assim, pode-se obter toda a informação topológica a nível de homologia real via formas diferenciais. A decomposição de Hodge permite que nos restrinjamos apenas aos campos harmônicos para obter a cohomologia de variedades Riemannianas.

Teorema 6.1.1 (Isomorfismo de Hodge *I*) *Seja M uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira. Os espaços vetoriais $\mathcal{H}^k(M)$ e $H^k_{dR}(M)$ são canonicamente isomorfos.*

Demonstração. Considere o mapa que leva cada forma fechada ω em sua classe de cohomologia $[\omega]$. Sendo ω fechada, podemos utilizar a decomposição de Hodge para escrever

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

sendo estas, respectivamente, as componentes exata, coexata e harmônica, para obter

$$0 = d\omega = d^2\alpha + d\delta\beta + d\gamma = d\delta\beta.$$

Disto segue que $\delta\beta$ é harmônica, portanto nula, pela ortogonalidade de decomposição. Com isto,

$$[\omega] = [d\alpha + \gamma] = [\gamma]$$

e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\ker d|_{\Omega^k(M)} \arrow[r, "\pi_{H^k_{dR}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{H}^k}"'] & H^k_{dR}(M) \\
\mathcal{H}^k(M) \arrow[ur, "\tilde{\pi}_{H^k_{dR}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Está claro que o mapa $\tilde{\pi}_{H^k_{dR}}$ é bijetivo, visto que cada forma fechada ω é da mesma classe de cohomologia de sua componente harmônica e se ω e η são da mesma classe de cohomologia, $\omega - \eta$ é exata, portanto, possui componente harmônica nula.

□

Corolário 6.1.1 *Os grupos de cohomologia de uma variedade compacta sem fronteira tem dimensão finita.*

Demonstração. Seja M compacta e sem fronteira; munindo-a de uma métrica Riemanniana, podemos obter seus respectivos espaços de formas harmônicas e o isomorfismo de Hodge, juntamente com o teorema 4.3.2 garantem que

$$\dim H^k_{dR}(M) = \dim \mathcal{H}^k(M) < \infty.$$

□

De agora em diante não faremos distinção entre as formas harmônicas e sua classe de cohomologia.

A teoria de Hodge também nos permite provar de maneira simples um resultado clássico e profundo da topologia algébrica para o caso de variedades sem fronteira: a dualidade de Poincaré.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira, $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^{n-k}(M)$ formas fechadas. Considere a forma bilinear $H^k_{dR}(M) \times H^{n-k}_{dR}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\wp([\omega],[\eta]) \mapsto \int_M [\omega] \wedge [\eta] := \int_M \omega \wedge \eta,$$

Esta forma está bem definida. De fato, dadas formas exatas $d\xi \in \Omega^k(M)$ e $d\zeta \in \Omega^{n-k}(M)$, tem-se

$$\int_M (\omega + d\xi) \wedge (\eta + d\zeta) =$$

$$\int_M (\omega) \wedge (\eta + d\zeta) + \int_M (d\xi) \wedge (\eta + d\zeta) =$$

$$\int_M (\omega) \wedge (\eta + d\zeta) + \int_M d(\xi \wedge (\eta + d\zeta)) =$$

$$\int_M (\omega) \wedge (\eta + d\zeta),$$

pelo teorema de Stokes. De maneira análoga, prova-se que

$$\int_M \omega \wedge (\eta + d\zeta) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Veja que forma $\wp$ determina para cada classe de cohomologia de grau k, $[\omega]$ um funcional linear em $H^{n-k}_{dR}(M)$ dado por $\wp([\omega], -)$, estabelecendo um homomorfismo entre $H^k_{dR}(M)$ e $H^{n-k}_{dR}(M)^*$. O resultado de Poincaré mostra que este homomorfismo caracteriza totalmente os duais de cohomologia de de Rham.

Teorema 6.1.2 (Dualidade de Poincaré) *O mapa linear definido por*

$$[\omega] \mapsto \int_M [\omega] \wedge (-)$$

é bijetivo. Em particular, $H^k_{dR}(M) \simeq H^{n-k}_{dR}(M)^*$. *Demonstração. Pelo isomorfismo de Hodge, podemos considerar o mapa acima como uma forma bilinear com entradas em* $\mathcal{H}^k(M) \times \mathcal{H}^{n-k}(M)$ *simplesmente avaliando cada par de formas harmônicas pela sua classe de cohomologia. Além disso, vale o seguinte*

Lema 6.1.1 *O operador de Hodge é um isomorfismo entre* $\mathcal{H}^k(M)$ *e* $\mathcal{H}^{n-k}(M)$. *Demonstração. Um cálculo direto mostra que*

- $d\star = \star\delta$;

- $\delta\star = \star d$;
- $\Delta\star = \star\Delta$.

Com isto, fica claro que o operador de Hodge é um mapa linear $\mathcal{H}^k(M) \to \mathcal{H}^{n-k}(M)$ *com inversa dada por* $(-1)^{k(n-k)}\star$.

□

Utilizaremos o operador de Hodge para construir uma bijeção entre bases de $H^k_{dR}(M)$ *e* $H^{n-k}_{dR}(M)^*$. *Seja* $\{\kappa_j\}$ *uma base ortonormal de* $\mathcal{H}^{n-k}(M)$ *com respeito ao produto* L^2. *Pelas propriedades do operador de Hodge, fica claro que* $\{\star\kappa_j\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathcal{H}^k(M)$ *e* $\{\int_M \star\kappa_j \wedge (-)\}$ *é a base dual de* $\{\kappa_j\}$. *De fato,*

$$\int_M \star\kappa_i \wedge \kappa_j = \int_M \langle \kappa_i, \kappa_j \rangle dM =$$

$$< \kappa_i, \kappa_j >= \delta_{ij}.$$

Tomando $\{[\star\kappa_j]\}$ *e* $\{\int_M [\star\kappa_j] \wedge (-)\}$ *como bases de* $H^k_{dR}(M)$ *e* $H^{n-k}_{dR}(M)^*$, *respectivamente, fica explícito o resultado.* □

Corolário 6.1.2 *Para* M, *uma variedade compacta sem fronteira,*

$$H^k_{dR}(M) \simeq H^{n-k}_{dR}(M).$$

6.2 Cohomologia de variedades com fronteira

Agora faremos uso da decomposição de Hodge-Morrey-Friedrichs para obter resultados sobre a cohomologia de variedades com fronteira.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Diferentemente do caso sem fronteira, o espaço de campos harmônicos não se identifica com a cohomologia da mesma maneira. É sabido que a dimensão de $\mathcal{H}^k(M)$, em geral, não possui dimensão finita, diferentemente dos grupos de cohomologia. Neste caso, faremos uso dos subespaços de dimensão finita de campos harmônicos com condições de fronteira de Neumann e Dirichlet para caracterizar a cohomologia de de Rham.

Devido à natureza local da diferencial exterior, podemos considerar o complexo de de Rham de formas de com condição de Dirichlet:

$$0 \hookrightarrow \Omega^0_D(M) \xrightarrow{d} \dots \Omega^{k-1}_D(M) \xrightarrow{d} \Omega^k_D(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}_D(M) \xrightarrow{d} \dots \Omega^n_D(M) \xrightarrow{d} 0$$

e sua cohomologia é definida de maneira análoga e denominada a cohomologia relativa de de Rham,

$$H^k_{dR}(M,\partial M) := \frac{\ker\, d|_{\Omega^k_D(M)}}{\mathrm{im}\, d|_{\Omega^{k-1}_D(M)}}.$$

Com isto, temos duas identificações entre campos harmônicos e classes de cohomologia.

Teorema 6.2.1 (Isomorfismo de Hodge *II*) *Seja M uma variedade Riemanniana orientada compacta com fronteira. Valem os seguintes isomorfismos canônicos:*

1. $\mathcal{H}^k_N(M) \simeq H^k_{dR}(M)$.
2. $\mathcal{H}^k_D(M) \simeq H^k_{dR}(M,\partial M)$.

Demonstração.

1. *Seja ω uma k-forma fechada. A decomposição de Hodge-Morrey nos permite escrever*

$$\omega = d\alpha + \gamma,$$

com $d\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$ e $\gamma \in \mathcal{H}^k(M)$. Por outro lado, a decomposição de Friedrichs nos permite escrever

$$\gamma = \kappa + d\xi,$$

com $\kappa \in \mathcal{H}^k_N(M)$ e $d\xi \in \mathcal{H}^k_{ex}(M)$. Com isto, $[\omega] = [\kappa]$.

O mapa $\kappa \mapsto [\kappa]$ é evidentemente sobrejetivo, visto que, pela decomposição, para cada forma fechada, há um campo de Neumann de mesma classe de cohomologia. Ademais, se $[\kappa_1] = [\kappa_2]$,

$$\kappa_1 - \kappa_2 = d\xi \in \mathcal{H}^k_{ex}(M) \cap \mathcal{H}^k_N(M),$$

i.e. $d\xi = 0$, pela ortogonalidade da decomposição de Friedrichs, provando a injetividade.

2. *Seja $\omega \in \ker\, d|_{\Omega^k_D(M)}$. Pela decomposição de Hodge-Morrey, temos*

$$\omega = d\alpha + \gamma$$

e pela decomposição de Friedrichs,

$$\gamma = \kappa + \delta\zeta,$$

com $\kappa \in \mathcal{H}^k_D(M)$ e $\delta\zeta \in \mathcal{H}^k_{co}(M)$. Como $T(\omega) = T(\gamma) = T(\kappa) = 0$, é claro que $T(\delta\zeta) = 0$ e a condição de ortogonalidade implica que $\delta\zeta = 0$, portanto $[\omega] = [\kappa]$.

A decomposição deixa claro que o mapa $\kappa \mapsto [\kappa]$ é sobrejetivo por analogia ao caso anterior e, se $[\kappa_1] = [\kappa_2]$,

$$\kappa_1 - \kappa_2 = d\eta \in \mathcal{E}^k(M) \cap \mathcal{H}^k(M).$$

Pela ortogonalidade da decomposição de Hodge-Morrey, $d\eta = 0$, mostrando a injetividade.

$\square$

A segunda versão do isomorfismo de Hodge possibilita o correspondente da dualidade de Poincaré para variedades com fronteira.

Teorema 6.2.2 (Dualidade de Lefschetz) *O operador de Hodge determina um isomorfismo entre $\mathcal{H}_N^k(M)$ e $\mathcal{H}_D^{n-k}(M)$ e, consequentemente,*

$$H_{dR}^k(M) \simeq H_{dR}^{n-k}(M, \partial M).$$

Corolário 6.2.1 *O mapa da dualidade de Poincaré determina um isomorfismo entre $H_{dR}^k(M)$ e $H_{dR}^k(M)^*$ de maneira análoga ao caso sem fronteira:*

$$[\kappa] \longmapsto \int_M [\kappa] \wedge (-).$$

6.3 Decomposição de Helmoltz

A decomposição de Hodge implica num resultado particular que a antecede cronologicamente: a decomposição de Helmholtz, que será apresentada nesta seção. Este resultado concerne a campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ e exerceu papéis fundamentais na mecânica dos flúidos e na teoria eletromagnética.

Recordemos, a priori, que o **rotacional** de um campo vetorial diferenciável $F = (f_1, f_2, f_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o campo

$$\nabla \times F := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

e que podemos tomar $\{\partial_{x_j}\}_1^3$ como a base global de campos tangentes a U, obtendo a identificação $\mathfrak{X}(U) \simeq C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ sob a qual,

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \partial_{x_1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \partial_{x_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \partial_{x_3}.$$

Teorema 6.3.1 (Helmholtz I) *Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado com fronteira suave e $F \in \mathfrak{X}(\bar{U})$. Existem campos $A, B \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ tais que*

$$F = \nabla \times A + B,$$

onde $T(A) = T(\nabla \times A) = 0$ e $\nabla \times B = 0$.

Para derivar este resultado a partir da decomposição de Hodge, são necessárias algumas identificações.

Assumamos que U está munido da métrica canônica de $\mathbb{R}^3$, $\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle = \delta_{ij}$ e que $\{dx^j\}_1^3$ é a base dual de $\{\partial_{x_j}\}_1^3$. Nestas condições, a forma de volume é dada por $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ e o operador de Hodge está bem definido.

Considere agora $\omega \in \Omega^1(U)$. Escrevendo $\omega = \sum_j f_j dx^j$,

$$d\omega = \sum_j df_j \wedge dx^j =$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^2 + ... =$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

Aplicando o operador de Hodge, obtemos

$$\star d\omega = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx^1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx^3 =$$

$$(\nabla \times \omega^\sharp)^\flat.$$

Assim, para um campo F, vale que

$$\nabla \times F = (\star dF^\flat)^\sharp.$$

Agora temos ferramentas suficientes para mostrar a decomposição de Helmholtz. *Demonstração.* Tomando $\omega := \star F^\flat$, podemos, pela decomposição de Hodge-Morrey, escrever

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma,$$

com $d\alpha \in \mathcal{E}^k(\bar{U})$, $\delta\beta \in \mathcal{C}^k(\bar{U})$ e $\gamma \in \mathcal{H}^k(\bar{U})$.

Com isto,

$$F = \star\omega^\sharp = \star d\alpha^\sharp + \star(\delta\beta + \gamma)^\sharp.$$

Tomando $A := \alpha^\sharp$ e $B := \star(\delta\beta + \gamma)^\sharp$, vale que

$$F = \star d(A^\flat)^\sharp + B = \nabla \times A + B,$$

com $T(A) = T(\alpha)^\sharp = 0$ e

$$\nabla \times B = \star d \star (\delta\beta + \gamma)^\sharp = (\delta^2\beta + \delta\gamma)^\sharp = 0$$

$\square$

Corolário 6.3.1 (Helmholtz II) *Nas condições do teorema 6.3.1, se U é simplesmente conexo, existe uma função $f \in C^\infty(\bar{U})$ e um campo $A \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ tal que*

$$F = \nabla \times A + \nabla f.$$

Demonstração. Pela decomposição de Helmholtz, tem-se

$$F = \nabla \times A + B.$$

Agora veja que a condição $\nabla \times B = 0$ é equivalente a $dB^\flat = 0$. Isto nos permite fazer uso de uma versão simplificada do resultado conhecido como **lema de Poincaré**, cuja prova pode ser encontrada em (CONLON, 2013)

Lema 6.3.1 (Poincaré) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto simplesmente conexo com fronteira suave, então*

$$H^1(U) = 0,$$

i.e. uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$ é fechada se e somente se é a diferencial de uma função $f \in \Omega^0(U)$.

Em posse do lema de Poincaré, podemos tomar f tal que $df = B^\flat$. Em particular,

$$\nabla f = B,$$

provando o resultado. $\square$

REFERÊNCIAS

ADAMS, R.; FOURNIER, J. **Sobolev spaces**. 1st. ed. Amsterdam: Elsevier Science, 2003. (ISSN). ISBN 9780080541297. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=R5A65Koh-EoC. Acesso em: 21 jan. 2022.

AHLFORS, L.; COLLECTION, K. M. R. **Complex analysis**: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 1st. ed. New York: McGraw-Hill Education, 1979. (International series in pure and applied mathematics). ISBN 9780070006577. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=2MRuus-5GGoC. Acesso em: 21 jan. 2022.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. 1st. ed. Alemanha: Springer New York, 2010. (Universitext). ISBN 9780387709130. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=GAA2XqOIIGoC. Acesso em: 21 jan. 2022.

CONLON, L. **Differentiable Manifolds: A First Course**. 1st. ed. Alemanha: Birkhäuser Boston, 2013. (Modern Birkhäuser Classics). ISBN 9780817647667. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=VpIpuX4OnssC. Acesso em: 21 jan. 2022.

EVANS, L. **Partial differential equations**. 2nd. ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2022. (Graduate Studies in Mathematics). ISBN 9781470469429. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=Ott1EAAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

FOLLAND, G. **Real analysis**: Modern techniques and their applications. 1st. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts). ISBN 9781118626399. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=wI4fAwAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

FRIEDRICHS, K. O. Differential forms on riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 8, p. 551–590, 1955. Disponível em: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121655895. Acesso em: 21 jan. 2022.

GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. **Principles of algebraic geometry**. 1st. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2014. (Wiley Classics Library). ISBN 9781118626320. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=-01YBAAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

HATCHER, A. **Algebraic topology**. 1st. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 2002. (Algebraic Topology). ISBN 9780521795401. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=BjKs86kosqgC. Acesso em: 21 jan. 2022.

HODGE, W. **The theory and applications of harmonic integrals**. 1st. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. (Cambridge mathematical library). ISBN 9780521358811. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=-8k8AAAAIAAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

HÖRMANDER, L. **The analysis of linear partial differential operators III**: pseudo-differential operators. 1st. ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2007. (Classics in Mathematics). ISBN 9783540499374. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=b55IBO0FaOYC. Acesso em: 21 jan. 2022.

KODAIRA, K. **Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory)**. Princeton: Princeton University Press, 1975. 172–250 p. ISBN 978-1-4008-6985-5. Disponível em: https://doi.org/10.1515/9781400869855-018. Acesso em: 21 jan. 2022.

KOLAR, I.; MICHOR, P.; SLOVAK, J. **Natural operations in differential geometry**. 1st. ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Online access: EMIS: Electronic Library of Mathematics). ISBN 9783662029503. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=YQXtCAAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

LAWSON, H.; MICHELSOHN, M. **Spin geometry**. 1st. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2016. (Princeton Mathematical Series). ISBN 9781400883912. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=xfgbDAAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

LEE, J. **Introduction to smooth manifolds**. 1st. ed. New York: Springer, 2003. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387954486. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=eqfgZtjQceYC. Acesso em: 21 jan. 2022.

LEE, J. **Riemannian manifolds**: an introduction to curvature. 1st. ed. New York: Springer New York, 2006. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387227269. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=92PgBwAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

MORREY, C. B. A variational method in the theory of harmonic integrals, ii. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins University Press, United States, v. 78, n. 1, p. 137–170, 1956. ISSN 00029327, 10806377. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2372488. Acesso em: 21 jan. 2022.

NICOLAESCU, L. **Lectures on the geometry of manifolds**. 1st. ed. Hackensack, NJ: World Scientific, 2007. (Lectures on the Geometry of Manifolds). ISBN 9789812708533. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=b40FmqneFVMC. Acesso em: 21 jan. 2022.

PETERSEN, P. **Riemannian geometry**. 2nd. ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9783319266527. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=FrJxjgEACAAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

RHAM, G. de. **Differential manifolds. Forms, currents, harmonic Forms**. 1st. ed. Berlin: Springer, 1984. (Grundlehren der mathematischen wissenschaften, 266). ISBN 9783540400732. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=o6_hngEACAAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

SCHWARZ, G. **Hodge decomposition**: a method for solving boundary value problems. 1st. ed. Berlin: Springer, 1995. (Hodge decomposition: a method for solving boundary value problems). ISBN 9783540600169. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=V9IZAQAAIAAJ. Acesso em: 21 jan. 2022.

WARNER, F. **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups**. 1st. ed. Alemanha: Springer, 1983. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387908946. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=iaeUqc2yQVQC. Acesso em: 21 jan. 2022.

APÊNDICE A – OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS

Este apêndice tem por objetivo expor brevemente parte da teoria de operadores pseudodiferenciais que está por trás da regularidade elíptica no contexto de variedades. Os resultados e técnicas desta teoria são, em geral, profundos e de alta complexidade; seu aprofundamento foge ao escopo deste trabalho.

O símbolo total de um operador diferencial pode ser obtido de maneira alternativa à da seção 3.2 via transformada de Fourier.

Consideremos, a priori, o caso $M = \mathbb{R}^n$. Se $E \to \mathbb{R}^n$ é um fibrado vetorial de *rank* k, vale que $\Gamma(E) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^k)$. Dada $u \in \Gamma_c(E)$, a transformada de Fourier de u é dada por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} dx.$$

Observe que a fórmula de integração por partes fornece

$$\widehat{\partial_{x_j} u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} u(x) e^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} dx =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathrm{i}\xi_j e^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} dx = \mathrm{i}\Sigma_{\partial_{x_j}}(\xi)\hat{u}(\xi).$$

Esse processo pode ser repetido e reiterado para uma derivada múltipla, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_l}}$, obtém-se

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\Sigma_{D^\alpha}(\xi)\hat{u}(\xi) = \Sigma_{D^\alpha}(\mathrm{i}\xi)\hat{u}(\xi)$$

e, em geral, para um operador diferencial L de coeficientes limitados,

$$\widehat{Lu}(\xi) = \Sigma_L(\mathrm{i}\xi)\hat{u}(\xi).$$

Note que, utilizando a fórmula de inversão da transformada, podemos recuperar a ação de L em u a partir do seu símbolo total, $\Sigma_L(\xi)$:

$$Lu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Sigma_L(\mathrm{i}\xi)\hat{u}(\xi) e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} d\xi.$$

Esta maneira de enxergar a ação de operadores diferenciais nos permite obter uma classe maior de operadores, generalizando o conceito de símbolo.

Definição A.1 *Um **símbolo de ordem** m é uma matriz de funções suaves com valores em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*,* $\Sigma(x,\xi)$*, tal que, para cada par de multi-índices* α, β*, existe uma constante* $C_{\alpha,\beta}$ *tal que*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \Sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Proposição A.1 *Seja* $L \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{K}^k, \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}^l)$ *de coeficientes limitados. O símbolo total de* L *é um símbolo de ordem* m*. Escrevendo*

$$\Sigma_L(x,\xi) = \sum_{0\leq|\gamma|\leq m} A_\gamma(x)\xi^\gamma,$$

tem-se

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta \Sigma_L(x,\xi) = \sum_{0\leq|\gamma|\leq m} D_x^\alpha A_\gamma(x) D_\xi^\beta \xi^\gamma \leq \sup_\gamma |D_x^{|\alpha|} A_\gamma(x)| \sum_{0\leq|\gamma|\leq m} |D_\xi^\beta \xi^\gamma|.$$

Agora note que $D_\xi^\beta \xi^\gamma$ *tem grau, no máximo, igual a* $m - |\beta|$ *e que pelas regras usuais de derivação, os coeficientes desse polinômio são menores do que* $m^{|\beta|}$*. Assim,*

$$\sup_\gamma |D_x^{|\alpha|} A_\gamma(x)| \sum_{0\leq|\gamma|\leq m} |D_\xi^\beta \xi^\gamma| \leq \sup_\gamma |D_x^{|\alpha|} A_\gamma(x)| \sum_{0\leq|\gamma|\leq m} k^{|\beta|}|\xi|^{|\gamma|-|\beta|} \leq$$
$$\sup_\gamma |D_x^{|\alpha|} A_\gamma(x)| m^{|\beta|}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Tomando $C_{\alpha,\beta} = \sup_\gamma |D_x^{|\alpha|} A_\gamma(x)| m^{|\beta|}$*, tem-se o resultado.*

Definição A.2 *Um mapa* $P : C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^k) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^l)$ *é dito **operador pseudodiferencial de ordem** m se é da forma*

$$Pu = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Sigma(x, \mathrm{i}\xi)\hat{u}(\xi) e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} d\xi,$$

onde $\Sigma(x,\xi)$ *é um símbolo de ordem* m*.*

A proposição anterior garante que a classe de operadores diferenciais está contida na classe de operadores pseudodiferenciais. O principal motivo para apresentar esta classe de operadores ficará claro quando estendermos a ação destes às funções da classe de Sobolev.

Teorema A.1 *Os operadores pseudodiferenciais se estendem às funções da classe de Sobolev como*

$$P : H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l),$$

sendo m *a ordem de* P*.*

Lema A.1 *A norma H^s de uma função de Sobolev pode ser equivalentemente definida pela norma expressa via transformada de Fourier,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{2s}|\hat{u}|^2 d\xi.$$

Lançando mão da identidade de Plancherel,

$$<\hat{u},\hat{v}>=<u,v>,$$

computamos a norma H^s de u

$$\|u\|_{H^s}^2=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{0\le|\alpha|\le s}|\widehat{D^\alpha u}|^2 d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{0\le|\alpha|\le s}|\xi^\alpha\hat{u}|^2 d\xi\le$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{0\le|\alpha|\le s}|\xi|^{2|\alpha|}|\hat{u}|^2 d\xi\le\int_{\mathbb{R}^n}(s+1)n^s(1+|\xi|)^{2s}|\hat{u}|^2 d\xi.$$

Por outro lado, $(1+|\xi|)^{2s}$ é um polinômio com entradas em $|\xi|$ de grau $2s$, cujo maior coeficiente não excede $(2s)!$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{2s}|\hat{u}|^2 d\xi\le(2s)!\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{s}|\xi|^{2j}|\hat{u}|^2 d\xi=$$

$$(2s)!\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{s}(\sum_i(\xi^i)^2)^j|\hat{u}|^2 d\xi$$

Usando novamente a identidade de Plancherel, a grandeza acima corresponde ao quadrado da norma L^2 de um operador diferencial agindo em u, que é contínuo na norma H^s, provando a afirmação.

Retornando ao teorema, temos

$$\|Pu\|_{H^{s-m}}^2\le C_1\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{s-m}|\widehat{Pu}|d\xi\le$$

$$C_2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{s}|\hat{u}|d\xi\le C_3\|u\|_{H^s}^2.$$

Note que um operador pseudodiferencial pode ter ordem negativa $-m$. Neste caso, ele é dito um **suavizante de ordem** m.

Definição A.3 *Um* ***operador infinitamente suavizante*** *é um mapa $\mathcal{K}:C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)\to C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^l)$ que se estende continuamente às funções das classes de Sobolev:*

$$\mathcal{K}:H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)\to H^{s+m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^l),\ \forall s,m.$$

Em particular, os mergulhos de Sobolev garantem que a imagem de qualquer função H^s pelo operador $\mathcal{K}$ é infinitamente diferenciável.

Definição A.4 *Dois operadores Pseudodiferenciais P_1 e P_2 são ditos **equivalentes** se $P_1 - P_2$ é um operador infinitamente suavizante.*

Definição A.5 *Dado um operador pseudodiferencial $P : C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ de ordem m, uma **paramétrica** para P é um operador pseudodiferencial $Q : C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ de ordem $-m$ tal que $P \circ Q$ e $Q \circ P$ são equivalentes à identidade.*

Naturalmente, desejamos estender os conceitos acima ao contexto de variedades Riemannianas.

Definição A.6 *Sejam $E \to M$ e $F \to M$ fibrados vetoriais sobre uma variedade Riemanniana compacta.*

- *Um mapa $\mathcal{K} : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ é dito um operador infinitamente suavizante se estende-se continuamente às seções da classes de Sobolev:*

$$\mathcal{K} : H^s\Gamma(E) \to H^{s+m}\Gamma(F), \ \forall s, m.$$

- *Um mapa $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ é dito um operador pseudodiferencial de ordem m se, a menos de operadores infinitamente suavizantes, pode ser escrito como uma soma finita, $\sum P_j$, onde cada P_j pode ser expresso em uma carta local trivializante como um operador pseudodiferencial de ordem m de suporte compacto.*
- *Dado um operador pseudodiferencial $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ de ordem m, uma paramétrica para P é um operador pseudodiferencial $Q : \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ de ordem $-m$ tal que $P \circ Q$ e $Q \circ P$ são equivalentes à identidade.*

A ideia por trás de generalizar a classe de operadores diferenciais é encontrar uma maneira de inverter um operador diferencial, i.e., encontrar uma paramétrica e, com esta, obter estimativas da norma das derivadas de soluções de um problema de equações diferenciais parciais. Como é esperado, não é possível garantir a existência de uma paramétrica para qualquer operador pseudodiferencial. Entretanto, há uma classe de operadores(na qual se inclui o Laplaciano de Hodge) que admite paramétricas. Enunciamos sem demonstrar este, que talvez seja o resultado mais importante da teoria de operadores pseudodiferenciais em variedades sem fronteira a seguir. A demonstração pode ser encontrada em (LAWSON; MICHELSOHN, 2016).

Teorema A.2 *Seja $L \in \mathscr{D}^k(E, F)$ um operador elíptico entre seções de fibrados Riemannianos sobre uma variedade Riemanniana compacta, então L admite uma paramétrica.*