UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

DOUGLAS ELIAKIM LIMA DA SILVA LEITE

SOBRE A CONJECTURA DE YAU PARA ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPACTAS MERGULHADAS NA ESFERA

FORTALEZA
2024

DOUGLAS ELIAKIM LIMA DA SILVA LEITE

SOBRE A CONJECTURA DE YAU PARA ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPACTAS MERGULHADAS NA ESFERA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Leite, Douglas Eliakim Lima da Silva.
Sobre a conjectura de Yau para estimativa do primeiro autovalor de hipersuperfícies mínimas compactas mergulhadas na esfera / Douglas Eliakim Lima da Silva Leite. – 2024.
56 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Hipersuperfícies mínimas. 2. Autovalores. 3. Hessiano. I. Título.
CDD 510

DOUGLAS ELIAKIM LIMA DA SILVA LEITE

SOBRE A CONJECTURA DE YAU PARA ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPACTAS MERGULHADAS NA ESFERA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Aprovada em: 19/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo, à Deus pelo dom da vida que me permitiu estar aqui.

Agradeço, também, a minha família, que sempre me incentivaram e me apoiaram nos meus objetivos.

Aos professores que tive no meu percurso de vida, em especial ao meu professor e orientador Abdênago, por ter me orientado no presente trabalho.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática da UFC: professores, os quais auxiliaram no desenvolver do meu conhecimento; e servidores técnico-administrativos, que possibilitam o nível de excelência da instituição.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Um problema proposto por Yau (1982) é se o primeiro autolavor λ_1 do laplaciano de uma hipersuperfície mínima mergulhada na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ é igual a n. Neste trabalho demonstraremos um resultado de Takahashi (1966) o qual afirma que $\lambda_1 \leq n$. Além disso, ao desenvolvermos alguns tensores de curvatura aplicados na esfera, faremos um estudo, principalmente analítico, a citada conjectura. Temos, então, como principal objetivo apresentarmos resultados em duas direções ao problema: para a primera, seria propor condições que garantem a igualdade $\lambda_1 = n$; já a segunda, seria apresentar condições que asseguram uma cota inferior explícita para λ_1 melhor do que $n/2$, esta já provada por Choi-Wang (1983).

Palavras-chave: hipersuperfícies mínimas; autovalores; hessiano.

ABSTRACT

A problem proposed by Yau (1982) is whether the first eigenfunction λ_1 of a minimal hypersurface embedded in the sphere $\mathbb{S}^{n+1}$ is equal to n. In this work we will demonstrate a result from Takahashi (1966) which states that $\lambda_1 \leq n$. Furthermore, when we develop some curvature tensors applied to the sphere, we will carry out an analytical study mainly regarding the conjecture. Our main objective, then, is to present results in two areas specific to the problem: for the first, it would be to propose conditions to guarantee equality $\lambda_1 = n$; the second would be to present conditions that guarantee an explicit lower quota for λ_1 better than $n/2$, this proved by Choi-Wang (1983).

Keywords: minimal hypersurfaces; eigenvalue; hessian.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	7
2	**PRELIMINARES**	8
2.1	**Variedades riemannianas**	8
2.2	**Conexões afins**	9
2.3	**Curvatura**	11
2.4	**Imersões isométricas**	14
3	**DERIVADA COVARIANTE E DIVERGENTE**	19
3.1	**Derivada covariante**	19
3.2	**Divergente**	20
3.3	**Identidades diferenciais**	22
4	**ALGUMAS FÓRMULAS DIFERENCIAS PARA HIPERSUPERFÍCIES**	28
4.1	**Identidades preliminares**	28
4.2	**Laplaciano de uma imersão mínima na esfera**	30
4.3	**Fórmula de Reilly**	32
5	**PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO EM HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS MERGULHADAS NA ESFERA**	35
5.1	**Problema de Dirichlet**	35
5.2	**Quociente e estimativa**	38
5.3	**Estimativas trigonométricas**	42
5.4	**Desigualdade e extensão**	47
5.5	**Produto interno dos hessianos**	49
6	**CONCLUSÃO**	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

Um problema proposto por Yau (1982) é se o primeiro autolavor λ_1 do laplaciano de uma hipersuperfície mínima mergulhada na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ é igual a n. Dado M^n uma variedade Riemanniana orientada fechada e $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão mínima de M^n na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, Takahashi (1966) demonstra que $\Delta x + nx = 0$, onde Δ corresponde ao laplaciano de M na métrica induzida por x,, com iso demonstra que $\lambda_1 \leq n$. Por outro lado, Choi-Wang (1983) prova que $\lambda_1 \geq n/2$.

A fim de tanto introduzir conceitos para leitores não acostumados com geometria Riemanniana, como para esclarecer as notações escolhidas, começamos introduzindo brevemente e expondo alguns resultados básicos. Em seguida exploramos mais profundamente conceitos diferenciais com foco em identidades. Principalmente aplicaremos estas identidades ao demonstrarmos uma fórmula devida à Reilly (1977). Encerraremos o estudo focando então acerca do problema de Yau (1982).

Para isso, após desenvolvermos alguns tensores de curvatura aplicados na esfera, vamos fazer um estudo principalmente analítico. Temos, então, como principal objetivo apresentarmos resultados em duas direções ao problema: para a primera, seria propor condições que garantem a igualdade $\lambda_1 = n$; já a segunda, seria apresentar condições que asseguram uma cota inferior explícita para λ_1 melhor do que $n/2$.

Mais precisamente, como a imersão divide a esfera em duas componentes Ω_1 e Ω_2 iremos considerar uma delas de modo vantojoso para nossas equações observando que ambas componentes possuem $x(M)$ como seu bordo. Assim, usaremos u e v soluções de problemas de dirichlet a fim de obtermos resultados relacionando o primeiro autovalor através de condições acerca essas funções, seus gradientes e suas hessianas.

Dito isso, é pressuposto que o leitor tenha algumas noções de variedades diferenciáveis. Ademais, daremos uma abordagem com enfoques geométrico e analítico.

2 PRELIMINARES

A fim de apresentar os conceitos, notações e resultados básicos presentes neste trabalho, utilizaremos esta seção introdutória. É assumido conhecimento prévio acerca de variedades diferenciáveis para podermos dissertar sobre variedades Riemannianas, conexões afins, curvatura e imersões isométricas.

2.1 Variedades riemannianas

Aqui, fazemos uma breve explanação sobre variedades Riemannianas.

Definição 2.1 *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana g em M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno g_p do seu espaço tangente T_pM, variando diferencialmente, isto é, dada uma carta (U, ψ) de M com funções coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, as funções $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ são diferenciáveis, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Neste caso, a variedade M munida da métrica g é chamada de uma variedade Riemanniana.*

Essa definição é de grande importância, pois tudo que faremos aqui terá ligação com a métrica escolhida.

Exemplo 2.1 *Podemos munir o $\mathbb{R}^n$ com uma métrica natural $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para isso, utilizemos a aplicação identidade $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como carta com funções coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Dados, $p \in \mathbb{R}^n$ e $u, v \in T_p\mathbb{R}^n$, digamos $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ e $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$, então pomos:*

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i.$$

É fácil verificarmos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ assim definido é de fato uma métrica Riemanniana.

Além disso, variedades munidas de métricas admitem campos vetoriais associados a funções diferenciáveis e suas derivadas.

Definição 2.2 *O gradiente ∇f de uma função $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ o vetor $\nabla f(p)$ definido por:*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \forall v \in T_pM.$$

Afirmamos que o gradiente assim posto está bem definido e varia diferencialmente. Com efeito, uma vez que podemos localmente tomar uma carta com funções coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, escrevendo $\nabla f = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^j} &= g(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= g\Big(f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = f^i g_{ij} \end{aligned}$$

Desse modo, denotando por (g^{ij}) a matriz inversa de (g_{ij}), temos que $f^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$, ou seja, o gradiente é unicamente determinado e diferenciável.

Para seguirmos adiante, uma pergunta natural quando tivermos duas variedades, sendo uma munida de uma métrica e outra não, é se é possível induzir a partir da métrica da primeira uma métrica para a segunda variedade. Um contexto possível é no caso de termos (M^{n+k}, g) e N^n e uma imersão $\varphi : N \longrightarrow M$. Conseguimos definir uma métrica $\overline{g}$ da seguinte forma:

$$\overline{g}_p(u, v) = g_p(\varphi_* u, \varphi_* v).$$

Para facilitar a notação, utilizaremos o mesmo símbolo para indicar a métrica para ambos os casos em caso de métrica induzida.

Exemplo 2.2 *Consideraremos a inclusão $i : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Temos que i é uma imersão, daí através da métrica definida em $\mathbb{R}^{n+1}$ induzimos uma métrica para a esfera como anteriormente.*

2.2 Conexões afins

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Usaremos $\mathscr{X}(M)$ para denotar o conjunto dos campos vetoriais de M. Para o que segue na próxima definição, será também $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ e $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Definição 2.3 *Uma conexão afim ∇ em M, é uma aplicação $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathscr{X}(M)$, a qual escrevemos $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + g\nabla_X Z$;
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

A ideia de conexão afim é uma forma de derivar campos vetoriais numa superfície, no entanto em uma variedade é possível definirmos conexões diferentes. Porém podemos analisar alguns tipos específicos de conexões. A fim de indicar o seu valor em um ponto $p \in M$, usaremos a notação $\nabla_{X_p} Y$.

Definição 2.4 *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana e $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathscr{X}(M)$ uma conexão afim. Diremos que ∇ é compatível com a métrica quando para todo $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ vale:*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Definição 2.5 *Seja $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathscr{X}(M)$ uma conexão afim, numa variedade diferenciável M. Diremos que ∇ é simétrica quando $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \forall X, Y \in \mathscr{X}(M)$.*

Definição 2.6 *Uma conexão afim $\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathscr{X}(M)$ em uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dita conexão Riemanniana (ou conexão de Levi-Civita) quando é simétrica e compatível com a métrica.*

Essa definição de conexão Riemanniana restringe a que conexões discutiremos, mas até então não foi exposto existência de tais conexões e nem se, de fato, reduz o conjunto das possíveis conexões de uma variedade Riemanniana. O próximo teorema esclarece isso.

Teorema 2.1 *Toda variedade Riemanniana (M^n, g) admite uma única conexão de Levi-Civita.*

Com isso, daqui para frente, ao tratarmos de uma variedade Riemanniana com uma conexão estaremos falando da conexão de Levi-Civita associada.

Surge nesse contexto um tensor importante associado a funções chamado hesssiana.

Definição 2.7 *A hessiana $\nabla^2 f$ de uma função $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ é o (0,2)-tensor dado por*

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

É importante ressaltar que também é utilizado a notação para o (1,1)-tensor $\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f$.

Proposição 2.1 *Se $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ então (0,2)-tensor $\nabla^2 f$ é simétrico.*

Sejam $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ campos vetoriais arbitrários. Temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla_Y \nabla f, X\rangle \\
&= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle - \big(Y\langle \nabla f, X\rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle\big) \\
&= \big(X(Y(f)) - Y(X(f))\big) - \big(\langle \nabla f, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle\big) \\
&= [X,Y](f) - [X,Y](f) = 0,
\end{aligned}$$

Desse modo, garantimos a simetria.

2.3 Curvatura

Esta subseção tem intuito de introduzir os conceitos dos tensores clássicos de curvatura, além de apresentar algumas proposições básicas.

Definição 2.8 *O tensor curvatura R de uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma correspondência que associa a cada par de campos vetoriais $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ a aplicação $R : \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathscr{X}(M)$ de modo que:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \ \forall Z \in \mathscr{X}(M).$$

Embora, até então, não tenhamos uma motivação forte para essa definição, vale destacar que ela está ligada à comutatividade ou não da derivação. Além disso, possui propriedades algébricas importantes.

Proposição 2.2 *Sejam $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z \in \mathscr{X}(M)$ e $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$. A curvatura R de M, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\mathscr{C}^\infty(M)$-Bilinearidade:*

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + X_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + R(X_2, Y_1) \text{ e} \\
R(X_1, gY_1 + Y_2) &= gR(X_1, Y_1) + R(X_1, Y_2);
\end{aligned}$$

2. *$\mathscr{C}^\infty(M)$-Linearidade:*

$$\begin{aligned}
R(X_1, X_2)(Y_1 + Y_2) &= R(X_1, X_2)Y_1 + R(X_1, X_2)Y_2 \text{ e} \\
R(X_1, X_2)fZ &= fR(X_1, X_2)Z;
\end{aligned}$$

3. *Antissimetria nos dois primeiros argumentos:*

$$R(X_1, X_2) = -R(X_2, X_1).$$

Proposição 2.3 *Dados $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ quaisquer, vale:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Essa equação é chamada de primeira identidade de Bianchi.

Agora, sabemos bem que a curvatura é um (1,3)-tensor em M. Através, então, da métrica podemos definir o (0,4)-tensor *Rm*, ou simplesmente *R*, em M.

Definição 2.9 *Sejam $X, Y, Z, W \in \mathscr{X}(M)$ arbitrários, definimos:*

$$Rm(X,Y,Z,W) = -\langle R(X,Y)Z, W \rangle.$$

Naturalmente, algumas das propriedades algébricas da curvatura R tem equivalentes em *Rm*, porém são também integradas novas relações.

Proposição 2.4 *Dados $X, Y, Z, W \in \mathscr{X}(M)$, tem-se que:*

1. $Rm(X,Y,Z,W) + Rm(Y,Z,X,W) + Rm(Z,X,Y,W) = 0$;
2. $Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Y,X,Z,W)$;
3. $Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(X,Y,W,Z)$;
4. $Rm(X,Y,Z,W) = Rm(Z,W,X,Y)$.

A primeira equação da proposição anterior, por vezes, também é chamada de primeira identidade de Bianchi.

Outro tensor diretamente relacionado com o tensor de curvatura é o tensor de Ricci.

Definição 2.10 *O tensor de Ricci, denotado por Ric, é o (0,2)-tensor definido por:*

$$Ric(X,Y) = tr\big(U \longmapsto R(U,X)Y\big).$$

Neste sentido, dado $p \in M$ e campos ortonormais $\{E_1, \dots, E_n\}$ definidos numa vizinhança de p, teremos que

$$Ric_p(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i,X)Y, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} Rm(E_i,X,E_i,Y) = \sum_{i=1}^{n} Rm(E_i,Y,E_i,X) = Ric_p(Y,X).$$

Com isso, temos que o tensor de Ricci é simétrico. Para o que iremos definir a seguir, dados $u, v \in T_pM$, usaremos a notação

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

Definição 2.11 *Sejam $p \in M$ e $x, y \in T_pM$ vetores linearmente independentes. Definimos a curvatura seccional em relação aos vetores x, y como:*

$$K(x,y) = \frac{Rm_p(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

É possível verificar que duas bases de um mesmo subespaço bidimensional (subespaço de T_pM de dimensão 2) resultam em um mesmo valor da curvatura seccional. Desse modo, sendo σ subespaço bidimensional determinado por x, y, colocamos $K(\sigma) = K(x,y)$.

Sabemos que sempre é possível tomar localmente campos vetoriais ortonormais, digamos $E_1, \ldots, E_n$, basta usarmos uma carta e usar o processo de Gram-Schmidt. Com isso, como a curvatura seccional $K(\sigma)$ depende apenas da escolha de uma base de σ, considerando bases ortonormais, muitas vezes, facilitarão os cálculos, pois $|E_i \wedge E_j| = 1$ quando $i \neq j$.

Exemplo 2.3 *Suponhamos que a variedade Riemanniana $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenha curvatura seccional constante k, i.e., $K(x,y) = k \; \forall p \in M$ e $\forall \; \sigma$ subespaço bidimensional de T_pM. Afirmemos, então, que o Ric é um múltiplo da métrica.*

Com efeito, sejam $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ quaisquer. Temos que

$$Ric(E_j, E_j) = \sum_{i=1}^{n} Rm(E_i, E_j, E_i, E_j) = \sum_{i=1}^{n} k(1 - \delta_{ij}) = (n-1)k$$

Notando que $\langle E_j, E_j \rangle = 1$, teremos $Ric(E_j, E_j) = (n-1)k\langle E_j, E_j \rangle$. Dado um vetor $X_p \in T_pM$ podemos considerar, a menos de uma rotação, que $X_p = |X_p| \cdot E_{1p}$, daí teríamos

$$Ric_p(X,X) = Ric_p(|X_p|E_1, |X_p|E_1) = |X_p|^2(n-1)k = (n-1)k\langle X_p, X_p \rangle$$

Note que $Ric(X+Y, X+Y) = Ric(X,X) + Ric(Y,Y) + 2Ric(X,Y)$, portanto

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(Ric(X+Y, X+Y) - Ric(X,X) - Ric(Y,Y)\big) \\ &= (n-1)k \cdot \frac{\langle X+Y, X+Y \rangle - \langle X,X \rangle - \langle Y,Y \rangle}{2} \\ &= (n-1)k\langle X,Y \rangle. \end{aligned}$$

Concluímos disso não só que o Ric é múltiplo da métrica, como também o valor dessa constante em relação à curvatura seccional.

Para encerrar a discursão sobre os tensores de curvatura básicos, introduzamos a curvatura escalar.

Definição 2.12 *Seja $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana. O tensor de curvatura escalar, é a função S dada por*

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric_p(E_i, E_i),$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal definido numa vizinhança de p.

Exemplo 2.4 *Se $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ possuir curvatura seccional constante k, então $S = n(n-1)k$.*

De fato, podemos usar o exemplo anterior, daí

$$S = \sum_{i=1}^{n} Ric(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-1)k\langle E_i, E_i \rangle = n(n-1)k.$$

Assim, conseguimos a identidade buscada.

O exemplo mais simples de variedade com curvatura seccional constante é o $\mathbb{R}^n$ com métrica e derivada usual D. Nestas condições é fácil verificar que a curvatura seccional é nula. De fato, basta utilizarmos campos constantes e ortonormais para ver que ela se anula.

2.4 Imersões isométricas

Definição 2.13 *Uma imersão $\psi : \overline{M} \longrightarrow M$ entre variedades Riemanianas (M^{n+k}, g) e $(\overline{M}^n, \overline{g})$ é dita uma imersão isométrica quando $\overline{g}_p(u, v) = g_{\psi(p)}(\psi_{*p}u, \psi_{*p}v)$, $\forall p \in \overline{M}$ e $\forall u, v \in T_p\overline{M}$.*

Neste caso, pelo teorema da aplicação inversa temos que localmente f é um difeomorfismo, daí, como tudo que definimos de curvatura e conexão é calculado localmente, podemos considerar $\overline{M} \subseteq M$, assim podemos só usar a mesma notação g para a métrica de ambos.

Com isso, $T_p\overline{M} \subseteq T_pM$ permitindo escrevermos a soma direta $T_pM = T_p\overline{M} \oplus (T_p\overline{M})^{\perp}$. Assim, cada $v \in T_p\overline{M}$ é da forma $v = v^{\top} + v^{\perp}$, onde $v^{\top} \in T_P\overline{M}$ e $v^{\perp} \in (T_p\overline{M})^{\perp}$.

Exemplo 2.5 *Se $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathscr{X}(\overline{M})$ possuem extensões $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ numa vizinhança em M do ponto $p \in \overline{M}$, então $([X,Y]_p)^{\perp} = 0$ e, portanto, $[X,Y]_p = [\overline{X}, \overline{Y}]_p$.*

De fato, para $f \in \mathscr{C}^{\infty}(M)$, basta provarmos que $\langle [X,Y]_p, \nabla f(p) \rangle = 0$, sempre que $(\nabla f(x)) \in (T_xM)^{\perp}$ para todo x pertencente a uma vizinhança de p.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(p), [X,Y]_p \rangle &= \langle \nabla f(p), \nabla_{X_p} Y - \nabla_{Y_p} X \rangle \\
&= \langle \nabla f(p), \nabla_{X_p} Y \rangle - \langle \nabla f(p), \nabla_{Y_p} X \rangle \\
&= \big(X_p \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla_{X_p} \nabla f, Y \rangle \big) - \big(Y_p \langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla_{Y_p} \nabla f, X \rangle \big) \\
&= \nabla^2 f(X_p, Y_p) - \nabla^2 f(Y_p, X_p) = 0
\end{aligned}$$

Conseguintemente, $[X,Y]_p = [\overline{X},\overline{Y}]_p$.

Proposição 2.5 *Na notação, até então, utilizada, se* ∇ *é a conexão Riemannnina de M, então a conexão Riemanniana* $\overline{\nabla}$ *de* $\overline{M}$ *é dada por* $\overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{Y} = (\nabla_{X_p}Y)^{\top}$*, onde* $p \in \overline{M}$ *e* $\overline{X},\overline{Y} \in \mathscr{X}(\overline{M})$ *e* X,Y *são, respectivamente, extensões em uma vizinhança de p em M dos campos* $\overline{X}$ *e* $\overline{Y}$.

Para isso, uma vez conferida as propriedades para garantir que $\overline{\nabla}$ é uma conexão, basta então provarmos que é simétrica e compatível com a métrica.

Acerca a simetria, temos que

$$
\begin{aligned}
[\overline{X},\overline{Y}]_p &= \big([\overline{X},\overline{Y}]_p\big)^{\top} \\
&= \big([X,Y]_p\big)^{\top} \\
&= (\nabla_{X_p}Y - \nabla_{Y_p}X)^{\top} \\
&= (\nabla_{X_p}Y)^{\top} - (\nabla_{Y_p}X)^{\top} \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X_p}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y_p}}\overline{X}.
\end{aligned}
$$

Além disso, teremos a compatibilidade pela métrica pois

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_p\big(g(\overline{Y},\overline{Z})\big) &= X_p\big(g(Y,Z)\big) \\
&= g(\nabla_{X_p}Y, Z_p) + g(Y_p, \nabla_{X_p}Z) \\
&= g((\nabla_{X_p}Y)^{\top} + (\nabla_{X_p}Y)^{\perp}, Z_p) + g(Y_p, (\nabla_{X_p}Z)^{\top}) + (\nabla_{X_p}Z)^{\perp}) \\
&= g((\nabla_{X_p}Y)^{\top}, Z_p) + g(Y_p, (\nabla_{X_p}Z)^{\top})) \\
&= g(\overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{Y}, \overline{Z}_p) + g(\overline{Y}_p, \overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{Z}).
\end{aligned}
$$

Conseguintemente, como tomamos um ponto $p \in \overline{M}$ arbitrário, $\overline{\nabla}$ definida como na proposição é a conexão de Levi-Civita de $(\overline{M}, g)$.

Para o que se segue, denotaremos $\mathscr{X}(\overline{M})^{\perp}$ o conjunto dos campos $\eta \in \mathscr{X}(\overline{M})$ tais que $\eta_p \in (T_p\overline{M})^{\perp}$, para todo $p \in \overline{M}$.

Definição 2.14 *Relativamente à imersão* $\psi : \overline{M} \longrightarrow M$*, podemos definir a aplicação*

$$B : \mathscr{X}(\overline{M}) \times \mathscr{X}(\overline{M}) \longrightarrow \mathscr{X}(\overline{M})^{\perp},$$

que localmente pode ser determinada por $B(\overline{X},\overline{Y}) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = -(\nabla_X Y)^{\perp}$.. *Ademais, chamaremos esta aplicação de segunda forma.*

Proposição 2.6 *A aplicação B, definida como anteriormente é bilinear simétrica.*

Utilizando as propriedades das conexões só restaria provar que $B(\overline{X},\overline{fY}) = \overline{f}B(\overline{X},\overline{Y})$, no entanto quando provarmos a simetria essa sai de imediato pois teríamos $B(\overline{X},\overline{fY}) = B(\overline{fY},\overline{X}) = \overline{f}B(\overline{Y},\overline{X})$, onde $\overline{f} \in \mathscr{C}^{\infty}(\overline{M})$.

Provemos, então, a simetria. Note que

$$\begin{aligned} B(\overline{X},\overline{Y}) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \\ &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}) + (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= B(\overline{Y},\overline{X}) + [\overline{X},\overline{Y}] - [X,Y] = B(\overline{Y},\overline{X}). \end{aligned}$$

Com isso, encerramos a proposição.

Exemplo 2.6 *Consideremos a esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^n$ subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$, cada uma com sua respectiva conexão Riemanniana ∇ e D. Dado $p \in \mathbb{S}^n$ afirmemos que*

$$\nabla_{X_p} Y = D_{X_p} Y + \langle X_p, Y_p \rangle p, \forall X, Y \in \mathscr{X}(\mathbb{S}^n).$$

Com efeito, a derivada covariante pode ser calculada apenas com o valor de X no ponto p e de Y ao longo de uma curva contida na variedade que passa no ponto p com derivada igual à X_p. Uma curva que tem essas propriedades é $\gamma(t) = cos(t)p + sen(t)X_p$, pois veja que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X_p$. Note, então, que

$$\begin{aligned} & \langle D_{X_{\gamma(t)}} Y, \gamma(t) \rangle = X\langle Y, \gamma(t) \rangle - \langle Y, \gamma'(t) \rangle \\ \Rightarrow\ & \langle D_{X_{\gamma(0)}} Y, \gamma(0) \rangle = -\langle \gamma'(o), Y \rangle \\ \Rightarrow\ & \langle D_{X_p} Y, p \rangle = -\langle X, Y \rangle_p. \end{aligned}$$

Desse modo, como o ponto p é normal ao seu espaço tangente, segue que

$$\begin{aligned} D_{X_p} Y &= \nabla_{X_p} Y + \langle D_{X_p} Y, p \rangle p \\ &= \nabla_{X_p} Y - \langle X, Y \rangle_p. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$B(X,Y)_p = \langle X_p, Y_p \rangle p,$$

onde B é a segunda forma fundamental da esfera $\mathbb{S}^n$ imersa em R^{n+1}.

Definição 2.15 *Sejam $p \in \overline{M}$ e $\eta \in (T_p\overline{M})^{\perp}$. A segunda forma fundamental da imersão $\psi : \overline{M} \longrightarrow M$ em p na direção η é a aplicação $h_\eta : T_p\overline{M} \times T_p\overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_\eta(u,v) = \langle B(u,v), \eta \rangle$, $\forall u,v \in T_p\overline{M}$.*

Observação 2.1 *Para o caso de hipersuperfícies orientáveis, isto é, quando a variedade mergulhada possuir codimensão 1 e com um campo normal ν, identificaremos h_ν e B.*

Definição 2.16 *Seja $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ uma base ortonormal de $(T_p\overline{M})^{\perp}$, definimos o vetor de curvatura média da imersão no ponto p como*

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} tr(h_{\eta_i})\eta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} h_{\eta_i}(E_j, E_j)\eta_i$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p\overline{M}$.

Definição 2.17 *A imersão $\psi : \overline{M} \longrightarrow M$ é dita uma imersão mínima se $H \equiv 0$.*

Observação 2.2 *Novamente podemos especificarmos para o caso de hipersuperfícies orientáveis, pois como a base do espaço ortogonal constituirá de um único vetor ν fará sentido identificarmos a curvatura média com o escalar $\overline{H}$ tal que $H = \overline{H}\nu$. Assim podemos utilizar a mesma notação H para ambos, porém vale ressaltar que esta muda de sinal ao trocarmos a orientação.*

Exemplo 2.7 *Consideremos $\mathbb{S}^n$ subvariedade Riemanniana de R^{n+1} com as mesmas notações do exemplo anterior. Tomando a orientação da esfera de modo que a normal num ponto $p \in \mathbb{S}^n$ seja o próprio p, então a curvatura média de $\mathbb{S}^n$ é constante igual a 1.*

De fato, tomemos uma base $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset T_p\mathbb{S}^n$ e usemos o resultado da equação anterior para obtermos:

$$H(p) = \frac{1}{n}tr(h_p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle E_{j_p}, E_{j_p}\rangle = \frac{n}{n} = 1.$$

Como o ponto p é arbitrário, segue que a curvatura média H é constante com $H \equiv 1$.

Para encerrarmos analisemos também a curvatura seccional da esfera.

Exemplo 2.8 *Afirmemos que a esfera possui curvatura seccional constante igual $K \equiv 1$. Para verificarmos esse fato, como sabemos que o valor da curvatura seccional em um ponto depende apenas do plano ao qual estamos calculando e o ponto em que está sendo calculado, então* *dado* $p \in \mathbb{S}^n$*, consideremos* X, Y *campos vetoriais unitários e ortogonais entre si definidos numa vizinhança de* p*.*

Agora, como $K(X_p, Y_p) = Rm_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$*, calculemos:*

$$\begin{aligned}
Rm_p(X_p,Y_p,Y_p,X_p) &= \langle R(X,Y)Y, X\rangle_p \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X\rangle_p \\
&= \langle \nabla_X (D_Y Y + \langle Y,Y\rangle p) - \nabla_Y (D_X Y + \langle X,Y\rangle p) - D_{[X,Y]} Y - \langle [X,Y], Y\rangle p, X\rangle_p \\
&= \langle D_X(D_Y Y + I(p)) + \langle X, D_Y Y + p\rangle p - D_Y D_X Y + \langle Y, D_X Y\rangle p - D_{[X,Y]} Y, X\rangle_p \\
&= \langle D_X D_Y Y - D_Y D_X Y - D_{[X,Y]} Y, X\rangle_p + \langle X, X\rangle_p.
\end{aligned}$$

Como o primeiro termo é a curvatura seccional de $\mathbb{R}^{n+1}$ *que é nula e o segundo termo é igual a* 1*, concluímos que* $K \equiv 1$*.*

3 DERIVADA COVARIANTE E DIVERGENTE

Uma vez que temos uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma noção de derivada de tensores será adquirida através da conexão de Levi-Civita ∇ associada.

Com isso, teremos o mínimo para definir o divergente de tensores, que nos fornecerá algumas identidades importantes. Ademais, para clareza de notação, nesta seção utilizaremos por ω 1-formas em M e X, Y, Z campos vetoriais genéricos.

3.1 Derivada covariante

Sendo T um (r,s)-tensor em M qualquer, indicaremos por ∇T a derivada covariante de T que é um $(r,s+1)$-tensor. Além disso, denotaremos por $\nabla_X T(\omega_1,\ldots,\omega_r,Z_1,\ldots,Z_s) = \nabla T(\omega_1,\ldots,\omega_r,Z_1,\ldots,Z_s;X)$. Inicialmente, é interessante listarmos quais são as propriedades que esperamos dessa operação, as quais são:

1. Para qualquer função $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, tem-se $\nabla_X f = df(X)$;
2. $\nabla_X Y$ coincide com a conexão Riemanniana;
3. Toda 1-forma ω em M, tem-se $\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$;
4. $\nabla_X(T\otimes T') = (\nabla_X T)\otimes T' + T\otimes(\nabla_X T')$, onde T' é outro tensor arbitrário.

Sendo $T = \omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_s\otimes Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r$, mostremos que a sua derivada covariante está bem definida.

De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X T)(Y_1,\ldots,Y_s) &= \nabla_X(\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_s\otimes Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r)(Y_1,\ldots,Y_s)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{s}\omega_1\otimes\cdots\otimes(\nabla_X\omega_i)\otimes\cdots\otimes\omega_s\otimes Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r\right)(Y_1,\ldots,Y_s)\\
&\quad+\left(\sum_{j=1}^{r}\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_s\otimes Z_1\otimes\cdots\otimes(\nabla_X Z_j)\otimes\cdots\otimes Z_r\right)(Y_1,\ldots,Y_s)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{s}\omega_1(Y_1)\ldots(\nabla_X\omega_i)(Y_i)\ldots\omega_s(Y_s)Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r\right)\\
&\quad+\left(\sum_{j=1}^{r}\omega_1(Y_1)\ldots\omega_s(Y_s)Z_1\otimes\cdots\otimes(\nabla_X Z_j)\otimes\cdots\otimes Z_r\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{s}\omega_1(Y_1)\ldots\big(\nabla_X(\omega_i(Y_i))-\omega_i(\nabla_X Y_i)\big)\ldots\omega_s(Y_s)Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r\right)\\
&\quad+\left(\sum_{j=1}^{r}\omega_1(Y_1)\ldots\omega_s(Y_s)Z_1\otimes\cdots\otimes(\nabla_X Z_j)\otimes\cdots\otimes Z_r\right)
\end{aligned}
$$

.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla_X(T(Y_1,\ldots,Y_s)) &= \nabla_X\big((\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_s\otimes Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r)(Y_1,\ldots,Y_s)\big)\\
&= \nabla_X\big(\omega_1(Y_1)\ldots\omega_s(Y_s)\otimes Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r\big)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{s}\omega_1(Y_1)\ldots\nabla_X(\omega_i(Y_i))\ldots\omega_s(Y_s)Z_1\otimes\cdots\otimes Z_r\right)\\
&\quad+\left(\sum_{j=1}^{r}\omega_1(Y_1)\ldots\omega_s(Y_s)Z_1\otimes\cdots\otimes(\nabla_X Z_j)\otimes\cdots\otimes Z_r\right)
\end{aligned}$$

.

Desse modo, a próxima definição se torna mais natural.

Definição 3.1 *Seja T um tensor de Mdo tipo (r,s). A sua derivada covariante é o $(r,s+1)$-tensor definido por:*

$$(\nabla_X T)(Y_1,\ldots,Y_s)=\nabla_X(T(Y_1,\ldots,Y_s))-\sum_{i=1}^{s}T(Y_1,\ldots,\nabla_X Y_i,\ldots,Y_s).$$

Nesta definição estamos usando recorrência a partir de como essa aplicação atua nos casos mais simples listados acima.

Exemplo 3.1 *Seja $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ qualquer. Anteriormente já foi dada uma definição do hessiano associado a essa função, porém afirmemos que $\nabla^2 f=\nabla df$.*

Com efeito, veja que:

$$\begin{aligned}
(\nabla df)(X;Y) &= Y(df(X))-df(\nabla_X Y)\\
&= Y\big(\langle\nabla f,X\rangle\big)-\langle\nabla f,\nabla_Y X\rangle\\
&= \langle\nabla_Y\nabla f,X\rangle+\langle\nabla f,\nabla_Y X\rangle-\langle\nabla f,\nabla_Y X\rangle\\
&= \langle\nabla_Y\nabla f,X\rangle.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que ambos coincidem, uma vez já provado que o hessiano é simétrico.

3.2 Divergente

No sentido contrário da derivada covariante, o divergente de um (r,s)-tensor, denotado por $divT$ é um $(r,s-1)$-tensor, o que restringe para $s\geq 1$. Porém, tem relação direta com a primeira como segue abaixo.

Definição 3.2 *Seja T um campo tensorial em M do tipo (r,s), $s \geq 1$. Definimos:*

$$(divT)(Y_1,\ldots,Y_{s-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i}T)(E_i,Y_1,\ldots,Ys-1),$$

onde $\{E_1,\ldots,E_n\}$ é um referencial ortonormal local.

Para campos vetoriais, digamos $X \in \mathscr{X}(M)$, que um $(1,0)$-tensor estenderemos a definição aplicando ao $(0,1)$-tensor $X^\flat(Y) = \langle X,Y\rangle$, isto é, $div(X) = div(X^\flat)$.

Definição 3.3 *O divergente de um campo diferencial $X \in \mathscr{X}(M)$ é a função*

$$div(X) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle.$$

É fácil verificar que o divergente da soma de dois tensores do mesmo tipo é a soma dos divergentes. Semelhantemente em natureza, temos uma propriedade básica para campos.

Proposição 3.1 *Para $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ e $X \in \mathscr{X}(M)$ quaisquer, é válida a seguinte equação:*

$$div(fX) = \langle \nabla f, X\rangle + f div(X).$$

De fato, tomemos um referencial ortonormal local $\{E_1,\ldots,E_n\}$, veja que

$$\begin{aligned}
div(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(fX), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle f(E_i)X + f\nabla_{E_i}X, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\langle f(E_i)X, E_i\rangle + f\langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle X, \langle \nabla f, E_i\rangle E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} f\langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle \\
&= \langle \nabla f, X\rangle + f div(X).
\end{aligned}$$

Semelhantemente à derivada covariante, o divergente também induz um tensor importante associado à funções.

Definição 3.4 *Seja $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ uma função qualquer. Definimos a função Δf, chamada de laplaciano de f, como*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Proposição 3.2 *Se $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, então $\Delta f = tr(\nabla^2 f)$.*

Podemos estender a equação da definição do laplaciano, como se segue:

$$\Delta f \;=\; div(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^2 f(E_i), E_i \rangle = tr(\nabla^2 f).$$

Concluímos, então, que a proposição é verdadeira.

3.3 Identidades diferenciais

Para facilitar as demonstrações dessa seção, utilizaremos uma técnica importante para a Geometria Riemanniana que consiste no uso de um referencial geodésico. Um fato conhecido de geometria Riemanniana, veja do Carmo (2008), que apresentaremos na seguinte proposição sem demonstração.

Proposição 3.3 *Seja* $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *uma variedade Riemanniana qualquer. Dado* $p \in M$ *qualquer, existe uma vizinhança* $p \in U$ *e um referencial ortonormal* $\{E_1, \ldots, E_n\}$*,* $E_i \in \mathscr{X}(U)$*, de modo que* $\nabla_{E_{ip}} E_j = 0$ *para todo* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*.*

Desse modo, apesar de buscarmos identidades que valem para todo ponto da variedade, poderemos aplicar o referencial para um ponto arbitrário resultando na generalidade. Dito isto, façamos para o resto dessa seção a convenção de que, ao utilizar referencial geodésico, o cálculo é pontual.

Proposição 3.4 *Dada uma variedade Riemanniana* $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *e* $U, V, X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ *quaisquer. Então*

$$(\nabla Rm)(U, V, X, Y; Z) + (\nabla Rm)(U, V, Y, Z; X) + (\nabla Rm)(U, V, Z, X; Y) = 0.$$

Ademais, essa equação é chamada de segunda identidade de Bianchi.

A fim de demonstrar essa proposição, tomemos um referencial geodésico $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Como o tensor é linear em cada coordenada, então basta provarmos a identidade no caso dos campos E_i, E_j, E_k, E_l, E_m, isto é,

$$(\nabla Rm)(E_i, E_j, E_k, E_l; E_m) + (\nabla Rm)(E_i, E_j, E_l, E_m; E_k) + (\nabla Rm)(E_i, E_j, E_m, E_k; E_l) = 0.$$

Inicialmente, calculemos o primeiro termo da soma acima, pois os outros serão análogos. Vale ressaltar que $\nabla_{E_i}Ej = 0$ e $[E_i,E_j] = \nabla_{E_i}E_j - \nabla_{E_j}E_i = 0$.

$$\begin{aligned}
(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_k,E_l;E_m) &= E_m\big(Rm(E_i,E_j,E_k,E_l)\big)\\
&\quad -(\nabla Rm)(\nabla_{E_m}E_i,E_j,E_k,E_l) - \cdots - Rm(E_i,E_j,E_k,\nabla_{E_m}E_l)\\
&= E_m\big(Rm(E_i,E_j,E_k,E_l)\big)\\
&= E_m\big(Rm(E_k,E_l,E_i,E_j)\big)\\
&= E_m\big(\langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i - \nabla_{[E_l,E_k]}E_i,E_j\rangle\big)\\
&= \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle\\
&\quad -(\langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,\nabla_{E_m}E_j\rangle\\
&= \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle\\
&= \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle\\
&\quad +\langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle\\
&= Rm(E_l,E_m,\nabla_{E_k}E_i,E_j) + \langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle\\
&= \langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
&(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_k,E_l;E_m) + (\nabla Rm)(E_i,E_j,E_l,E_m;E_k) + (\nabla Rm)(E_i,E_j,E_m,E_k;E_l)\\
=\ &\langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle + \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}E_i,E_j\rangle\\
&+\langle\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle\\
=\ &\langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}E_i,E_j\rangle\\
&+\langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_m}\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i,E_j\rangle\\
&+\langle\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}E_i,E_j\rangle - \langle\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}\nabla_{E_m}E_i,E_j\rangle\\
=\ &0.
\end{aligned}$$

Assim, provada essa identidade é natural vermos a próxima, chamada de segunda identidade de Bianchi contraída.

Proposição 3.5 *Em uma variedade Riemanniana $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ vale a seguinte identidade:*

$$\nabla S = 2div(Ric).$$

Tomemos $E_1,\ldots,E_n$ um referencial geodésico local. Temos que

$$div(Ric)(X)=\sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}Ric(E_i,X).$$

Por outro lado, usando segunda identidade de Bianchi,

$$\begin{aligned}
&0=(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,X;E_j)+(\nabla Rm)(E_i,E_j,X,E_j;E_i)+(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_j,E_i;X)\\
\Rightarrow\quad &(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,E_j;X)=(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,X;E_j)+(\nabla Rm)(E_i,E_j,X,E_j;E_i).
\end{aligned}$$

Podemos, então usar o somatório no índice j, isto é

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,E_j;X) &= \sum_{j=1}^{n}(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,X;E_j)+\sum_{j=1}^{n}(\nabla Rm)(E_i,E_j,X,E_j;E_i)\\
\nabla_X Ric(E_i,E_i) &= \nabla_{E_i}Ric(E_i,X)+\sum_{j=1}^{n}(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,X;E_j).
\end{aligned}$$

Com isso, basta somarmos no índice i.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\nabla_X Ric(E_i,E_i) &= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}Ric(E_i,X)+\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla Rm)(E_i,E_j,E_i,X;E_j)\\
\nabla_X S &= div(Ric)(X)+\sum_{j=1}^{n}\nabla_{E_j}Ric(E_j,X)\\
\nabla_X S &= 2div(Ric)(X).
\end{aligned}$$

Como X é um campo vetorial genérico, encerramos aqui a demonstração.

Introduzamos brevemente um produto para tensores do tipo $(1,1)$. Através dele podemos obter algumas desigualdades clássicas.

Definição 3.5 *O produto interno entre dois tensores T,T' do tipo $(1,1)$ definidos em T_pM, onde p pertence à variedade Riemanniana $(M^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, é a aplicação bilinear simétrica positiva definida dada por*

$$\langle T,T'\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle T(E_i),T'(E_i)\rangle,$$

onde $E_1,\ldots,E_n$ é uma base ortonormal qualquer.

Além disso, definimos a norma de T, denotada como $|T|$, por $|T|=\sqrt{\langle T,T\rangle}$.

Um exemplo bem natural de tensor desse tipo é a aplicação identidade. Além dessa, também vimos que podemos considerar a hessiana de uma função como um $(1,1)$-tensor. Nesse sentido, as próximas proposições nos dão identidades envolvendo o hessiano. Para a demonstração de todas sempre consideraremos $E_1,\ldots,E_n$ um referencial geodésico local de M.

Proposição 3.6 *Dadas funções $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, então*

$$div(\nabla^2 f(\nabla g)) = div(\nabla^2 f)(\nabla g) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\rangle.$$

Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned} div(\nabla^2 f(\nabla g)) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla^2 f(\nabla g), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n E_i\langle \nabla_{\nabla g}(\nabla f), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\nabla^2 f(\nabla g, E_i)). \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} div(\nabla^2 f)(\nabla g) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}\nabla^2 f)(E_i, \nabla g) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\nabla^2 f(E_i,\nabla g)) - \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_i}\nabla g) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\nabla^2 f(\nabla g, E_i)) - \langle \nabla^2 f(E_i), \nabla^2 g(E_i)\rangle \\ &= div(\nabla^2 f(\nabla g)) - \langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\rangle \end{aligned}$$

Somando o produto interno dos dois hessianos em ambos os lados da última equação, concluímos a demonstração.

Proposição 3.7 *Sejam $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ e $X \in \mathscr{X}(M)$ quaisquer, então*

$$div(\nabla^2 f)(X) = Ric(\nabla f, X) + \langle \nabla(\Delta f), X\rangle.$$

Calculemos o primeiro e o último termo da equação. Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\Delta f), X\rangle &= X\left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \end{aligned}$$

Agora, notando que $[E_i, X] = \nabla_{E_i}X - \nabla_X E_i = \nabla_{E_i}X$, vemos que

$$\begin{aligned} div(\nabla^2 f)(X) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}\nabla^2 f)(E_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(E_i(\nabla^2 f(X,E_i)) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i}X, E_i)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla_{\nabla_{E_i}X}\nabla f, E_i\rangle\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\rangle\Big). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
div(\nabla^2 f)(X) - \langle \nabla(\Delta f), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_X \nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\rangle - \langle \nabla_X \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla_X \nabla f - \nabla_X \nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{[E_i,X]}\nabla f, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} Rm(X, E_i, \nabla f, E_i)\\
&= Ric(X, \nabla f)\\
&= Ric(\nabla f, X),
\end{aligned}
$$

que equivale a equação desejada.

Da mesma forma que o hessiano que é um tensor do tipo $(0,2)$ podemos identifica-lo a um $(1,1)$-tensor, podemos fazer o mesmo para o *Ric*, isto é, usamos a métrica para identificá-lo ao $(1,1)$-tensor *Rc* dado por

$$Ric(X,Y) = \langle Rc(X), Y\rangle.$$

Lema 3.1 *O tensor Rc posto como anteriormente satisfaz a equação*

$$\nabla_X Ric(Y,Z) = \langle (\nabla_X Rc)(Y), Z\rangle.$$

De fato, basta ver que

$$
\begin{aligned}
\nabla_X Ric(Y,Z) &= X(Ric(Y,Z)) - Ric(\nabla_X Y, Z) - Ric(Y, \nabla_X Z)\\
&= X(\langle Rc(Y), Z\rangle) - \langle Rc(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle Rc(Y), \nabla_X Z\rangle\\
&= \langle \nabla_X(Rc(Y)), Z\rangle + \langle Rc(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle Rc(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle Rc(Y), \nabla_X Z\rangle\\
&= \langle \nabla_X(Rc(Y)) - Rc(\nabla_X Y), Z\rangle\\
&= \langle (\nabla_X Rc)(Y), Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Uma vez explicado, usaremos a mesma notação *Ric* para ambos. Ademais, podemos aplicar diretamente a ultima proposição para conseguir o próximo resultado.

Proposição 3.8 *Seja $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ uma função diferenciável qualquer. Então*

$$div(div(\nabla^2 f)) = \frac{1}{2}\nabla S(\nabla f) + \langle \nabla^2 f, Ric\rangle + \Delta(\Delta f).$$

Demonstremos diretamente a igualdade. Utilizando a proposição anterior, temos que

$$\begin{aligned}
div(div(\nabla^2 f)) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} div(\nabla^2 f))(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(div(\nabla^2 f)(E_i)) - div(\nabla^2 f)(\nabla_{E_i} E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(Ric(\nabla f, E_i) + \langle \nabla(\Delta f), E_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(\langle Ric(E_i), \nabla f \rangle + \langle \nabla(\Delta f), E_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\langle \nabla_{E_i}(Ric(E_i)), \nabla f \rangle + \langle Ric(E_i), \nabla_{E_i} \nabla f \rangle + \langle \nabla_{E_i} \nabla(\Delta f), E_i \rangle) \Big) \\
&= div(\nabla(\Delta f)) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\nabla_{E_i} Ric(E_i, \nabla f) + \langle Ric(E_i), \nabla^2 f(E_i) \rangle \Big) \\
&= div(Ric)(\nabla f) + \langle \nabla^2 f, Ric \rangle + \Delta(\Delta f) \\
&= \frac{1}{2} \nabla S(\nabla f) + \langle \nabla^2 f, Ric \rangle + \Delta(\Delta f)
\end{aligned}$$

como queríamos.

4 ALGUMAS FÓRMULAS DIFERENCIAS PARA HIPERSUPERFÍCIES

No decorrer desta seção, consideremos uma variedade Riemanniana $(\Omega, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$ de dimensão $n+1$ e uma subvariedade $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle, \overline{\nabla})$. Além disso usaremos as notações ∇, Δ e $\overline{\nabla}, \overline{\Delta}$ para indicar respectivamente o gradiente e laplaciano em Ω e M. Também, denotaremos por B a segunda forma fundamental e por H a curvatura média. O principal objetivo desta seção será provar uma fórmula de Reilly.

Apresentando rapidamente, queremos provar que

$$\int_{\Omega}\left((\Delta f)^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f|^2\right) = \int_{\partial\Omega} 2\frac{\partial f}{\partial \eta}\overline{\Delta}\varphi + B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi) + nH(\frac{\partial f}{\partial \eta})^2,$$

para $\varphi = f|_{\partial\Omega}$. Onde, nesse caso, estaremos considerando Ω compacta com bordo $M = \partial\Omega$. Ademais, alguns resultados preliminares para esse objetivo também serão ferramentas para demonstrarmos a identidade do laplaciano da imersão de Takahashi (1996) em uma subseção anterior à demonstração da fórmula de Reilly.

4.1 Identidades preliminares

A fim de demonstrar a fórmula, iremos explorar algumas identidades que tem valor em si mesmas e que serão de utilidade neste caso.

Proposição 4.1 *Sejam $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $X \in \mathscr{X}(\Omega)$ quaisquer, então:*

$$X\langle\nabla f, \nabla g\rangle = \nabla^2 f(\nabla g, X) + \nabla^2 g(\nabla f, X).$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} X(\langle\nabla f, \nabla g\rangle) &= \langle\nabla_X \nabla f, \nabla g\rangle + \langle\nabla f, \nabla_X \nabla g\rangle \\ &= \nabla^2 f(X, \nabla g) + \nabla^2 g(X, \nabla f) \\ &= \nabla^2 f(\nabla g, X) + \nabla^2 g(\nabla f, X). \end{aligned}$$

Conseguintemente,

$$\nabla\langle\nabla f, \nabla g\rangle = \nabla^2 f(\nabla g) + \nabla^2 g(\nabla f).$$

Proposição 4.2 *(Fórmula de Ricci-Bochner) Dada uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ vale a seguinte equação*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}div(\nabla|\nabla f|^2)\\
&= \frac{1}{2}div(2\nabla^2 f(\nabla f))\\
&= div(\nabla^2 f(\nabla f))\\
&= div(\nabla^2 f)(\nabla f)+|\nabla^2 f|^2\\
&= \langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle+Ric(\nabla f,\nabla f)+|\nabla^2 f|^2\\
&= \langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle+|\nabla^2 f|^2+Ric(\nabla f,\nabla f).
\end{aligned}$$

Para o que se segue, tomemos campos ortonormais adaptados $\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1}=\eta\}$ em Ω, de modo que η seja um campo normal em M . Sendo $h_{ij}=B(e_i,e_j)$ e restringindo a M, vale a equação de Gauss

$$\nabla_{e_i}e_j=\overline{\nabla}_{e_i}e_j-h_{ij}\eta$$

Ademais, denotaremos $f_i=e_i(f)$ e $f_{ij}=\nabla^2 f(e_i,e_j)$.

Proposição 4.3 *Sejam $f\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $1\leq i\leq n$ qualquer, é válida a seguinte expressão:*

$$f_{i\eta}=e_i\eta(f)-\sum_{j=1}^{n}f_jh_{ij}.$$

A fim demonstrarmos a expressão acima, observe que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}\eta(f) &= \langle\nabla_{e_i}\eta,\nabla f\rangle\\
&= \langle\nabla_{e_i}\eta,\sum_{j=1}^{n+1}f_je_j\rangle\\
&= (\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\eta,f_je_j\rangle)+\langle\nabla_{e_i}\eta,f_\eta\eta\rangle\\
&= (\sum_{j=1}^{n}f_j\langle\nabla_{e_i}\eta,e_j\rangle)+f_\eta\langle\nabla_{e_i}\eta,\eta\rangle\\
&= (\sum_{j=1}^{n}f_jB(e_i,e_j))+f_\eta(\frac{1}{2}e_i\langle\eta,\eta\rangle)\\
&= \sum_{j=1}^{n}f_jh_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f_{i\eta} &= e_i\eta(f)-\nabla_{e_i}\eta(f)\\
&= e_i\eta(f)-\sum_{j=1}^{n}f_jh_{ij}.
\end{aligned}$$

Proposição 4.4 *Sendo $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $\varphi = f|_M$, então o laplaciano de f restrito à M satisfaz:*

$$\Delta f = \bar{\Delta}\varphi + nH\eta(f) + f_{\eta\eta}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{n+1} \big(e_i(e_i(f)) - \big(\nabla_{e_i} e_i\big) f\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - \big(\nabla_{e_i} e_i\big) f\big) + \eta(\eta(f)) - \big(\nabla_\eta \eta\big) f \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - \big(\overline{\nabla}_{e_i} e_i\big) f + h_{ii}\eta(f)\big) + \eta(\eta(f)) - \big(\nabla_\eta \eta\big) f \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(\varphi)) - \big(\overline{\nabla}_{e_i} e_i\big) \varphi + h_{ii}\eta(f)\big) + \eta(\eta(f)) - \big(\nabla_\eta \eta\big) f.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta f = \overline{\Delta}\varphi + nH\eta(f) + f_{\eta\eta}.$$

A integral de $\langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla} f_\eta \rangle$ no bordo de Ω será útil em futuros cálculos. Para tal temos o seguinte lema:

Lema 4.1 *Seja Ω variedade compacta com bordo $\partial\Omega$. Dada $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $\varphi = f|_{\partial\Omega}$, então*

$$\int_{\partial\Omega} \langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla} f_\eta \rangle = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi.$$

De fato, lembremos que $\partial(\partial\Omega) = \varnothing$. Logo, aplicando o Teorema da divergência teremos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Omega} div(f_\eta \overline{\nabla}\varphi) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla} f_\eta \rangle + \frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi).
\end{aligned}$$

Concluímos, então, que

$$\int_{\partial\Omega} \langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla} f_\eta \rangle = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi.$$

4.2 Laplaciano de uma imersão mínima na esfera

Nesta subseção demonstramos a igualdade $\overline{\Delta}x + nx = 0$ para uma imersão mínima $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$.

A principal ferramenta para obtermos nosso resultado será a identidade encontrada na Proposição 4.4. Nessa situação, usaremos as notações previamente utilizadas de Ω para $\mathbb{S}^{n+1}$ e às de $\partial\Omega$ para M. Ademais para $\mathbb{R}^{n+2}$ usaremos D para indicar tanto sua derivada covariante quanto seu gradiente e Δ_D para indicar o seu divergente.

Veja que a imersão x se escreve como $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^{n+2}(p)) \in \mathbb{R}^{n+2}$, onde cada x^i é uma função com domínio em M e contradomínio na reta $\mathbb{R}$. Assim, por $\overline{\Delta}x + nx = 0$ queremos dizer que $\overline{\Delta}x^i + nx^i = 0$, para $i = 1, \ldots, n+2$.

É importante ver que as funções x^i podem ser facilmente estendidas para a esfera e depois para o espaço R^{n+2} pela mesma forma que explicitamos no parágrafo anterior. Dito isso, apesar de serem funções com domínios diferentes utilizaremos a mesma notação, pois ainda assim deve ficar claro o que passamos pois utilizamos diferentes símbolos para derivadas covariantes e divergentes a seguir que só fazem sentido no respectivo domínio que esta sendo aplicado.

Teorema 4.1 *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão mínima. O laplaciano de M satisfaz a seguinte equação:*

$$\overline{\Delta}x + nx = 0.$$

Antes de demonstrarmos o teorema, vejamos um lema que tem valor em si.

Lema 4.2 *Seja $x : \mathbb{S}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ a inclusão. Então*

$$\Delta x + (n+1)x = 0.$$

A fim de provarmos essa afirmação, consideremos $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ arbitrário, aplicando a Proposição 4.4, veja que:

$$\Delta x^i(p) = \Delta_D x^i(p) - (n+1)p(x^i) - D^2x^i(p,p).$$

Assim, como as segundas derivadas direcionais de x^i são nulas, segue que ambos o laplaciano como o hessiano relativos a conexão D são nulos. Ademais,

$$p(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial p} = x^i(p).$$

Portanto,

$$\Delta x^i(p) + (n+1)x^i(p) = 0$$

e encerramos a demonstração do lema.

Voltemos para o teorema. Sendo $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão mínima, como localmente x é um mergulho vamos considerar sem perda de generalidade que x seja a inclusão, pois nossos cálculos para o laplaciano requerem apenas informação numa vizinhança.

Seja $p \in M$ arbitrário e η um campo vetorial normal definido numa vizinhança desse ponto, portanto $\langle p, \eta_p \rangle = 0$ e $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Ademais, temos pela Proposição 4.4 que

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Delta} x^i(p) = \Delta x^i(p) - \nabla^2 x^i_p(\eta,\eta) \\
&\Rightarrow \overline{\Delta} x^i(p) = -(n+1)x^i(p) - \nabla^2 x^i_p(\eta,\eta).
\end{aligned}
$$

Com isso, basta provarmos que $\nabla^2 x^i_p(\eta,\eta) = -x^i(p)$. Para isso, veja que

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 x^i_p(\eta,\eta) &= \eta(\eta(x^i))(p) - \nabla_\eta \eta(x^i)(p) \\
&= \eta(\eta(x^i))(p) - \langle \nabla_\eta \eta, \nabla x^i \rangle_p \\
&= \eta(\eta(x^i))(p) - \langle D_\eta \eta, \nabla x^i \rangle_p - \langle \eta, \eta \rangle \langle p, \nabla x^i \rangle_p \\
&= \eta(\eta(x^i))(p) - \langle D_\eta \eta, Dx^i - \langle Dx^i, p \rangle p \rangle_p \\
&= \eta(\eta(x^i))(p) - (D_\eta \eta)(x^i)(p) + \langle D_\eta \eta, \langle Dx^i, p \rangle p \rangle_p \\
&= D^2 x^i_p(\eta,\eta) + x^i(p) \langle D_\eta \eta, p \rangle \\
&= x^i(p) \{ \eta \langle \eta, I \rangle_p - \langle \eta, \eta \rangle_p \} \\
&= -x^i(p),
\end{aligned}
$$

onde por I referimos à aplicação identidade. Assim, encerrando a demonstração do teorema.

4.3 Fórmula de Reilly

Com intuito de simplificar notação, denotaremos, para $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$,

$$
\mathscr{L} f = (\Delta f)^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f|^2 .
$$

Teorema 4.2 *(Fórmula de Reilly) Seja Ω uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n+1$ e com bordo $\partial\Omega$. Dada $f \in C^\infty(\Omega)$ com $f|_{\partial\Omega} = \varphi$, então:*

$$
\int_\Omega \mathscr{L} f = \int_{\partial\Omega} 2\frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta} \varphi + B(\overline{\nabla} \varphi, \overline{\nabla} \varphi) + nH(\frac{\partial f}{\partial \eta})^2.
$$

Para demonstrarmos o teorema acima, iremos fazer o uso do lema abaixo.

Lema 4.3 *Se $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, então*

$$\int_\Omega \mathscr{L} f = \int_\Omega div(\Delta f \nabla f) - \int_\Omega \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2.$$

Utilizando a fórmula de Ricci-Bochner, seque que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathscr{L} f &= \int_\Omega ((\Delta f)^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f|^2) \\
&= \int_\Omega ((\Delta f)^2 - \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 + \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle) \\
&= \int_\Omega (div(\Delta f \nabla f) - \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle - \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 + \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle) \\
&= \int_\Omega div(\Delta f \nabla f) - \int_\Omega \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Desse modo, podemos calcular separadamente cada uma dessas duas integrais. Ademais, usemos o Teorema da divergência em cada uma das integrais. Na primeira, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega div(\Delta f \nabla f) &= \int_{\partial\Omega} \langle \eta, \Delta f \nabla f\rangle \\
&= \int_{\partial\Omega} \Delta f \frac{\partial f}{\partial \eta} \\
&= \int_{\partial\Omega} (\bar{\Delta}\varphi + nH\eta(f) + f_{\eta\eta})\frac{\partial f}{\partial \eta} \\
&= \int_{\partial\Omega} (\bar{\Delta}\varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} + nH(\frac{\partial f}{\partial \eta})^2 + \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta}).
\end{aligned}$$

Já para a segunda,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \int_\Omega \frac{1}{2} div(\nabla|\nabla f|^2) \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}\eta(|\nabla f|^2) \\
&= \int_{\partial\Omega} \nabla^2 f(\nabla f, \eta) \\
&= \int_{\partial\Omega} \nabla^2 f(\sum_{i=1}^{n+1} f_i e_i, \eta) \\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} f_i f_{i\eta} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta} \\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} f_i (e_i\eta(f) - \sum_{j=1}^{n} f_j h_{ij}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta} \\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} f_i e_i(f_\eta) - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_j h_{ij} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \int_{\partial\Omega} \langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla} f_\eta \rangle - \int_{\partial\Omega} B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta} \\
&= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi - \int_{\partial\Omega} B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta} \\
&= -\int_{\partial\Omega} (\frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi + B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi) - \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta}).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathscr{L} f &= \int_{\Omega} div(\Delta f \nabla f) - \int_{\Omega} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \\
&= \int_{\partial\Omega} (\bar{\Delta}\varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} + nH(\frac{\partial f}{\partial \eta})^2 + \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta}) - (-\int_{\partial\Omega} (\frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi + B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi) - \frac{\partial f}{\partial \eta} f_{\eta\eta})) \\
&= \int_{\partial\Omega} (2\frac{\partial f}{\partial \eta} \overline{\Delta}\varphi + B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi) + nH(\frac{\partial f}{\partial \eta})^2).
\end{aligned}
$$

Assim, encerramos nossa demonstração.

5 PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO EM HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS MERGULHADAS NA ESFERA

Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada fechada e $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão mínima de M^n na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Sabemos que $\Delta x + nx = 0$, onde Δ corresponde ao laplaciano de M na métrica induzida por x, como foi provado por Takahashi (1966), além de termos feito uma demonstração para esse fato na seção anterior. Com isso, n é uma cota superior para o primeiro autovalor do laplaciano λ_1 de Δ.

Quando x é um mergulho, uma questão proposta por S.T. Yau (1982) é se $\lambda_1 = n$. O primeiro resultado global nesta direção foi obtido por Choi-Wang (1983), o qual provou que $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$. Em um artigo de Barros-Bessa (1999) foi obtido uma melhoria deste resultado provando que $\lambda_1 \geq \frac{n}{2} + c(M^n, x)$, onde $c(M^n, x)$ é uma constante positiva em função de M^n e x. Vale ressaltar que $\lambda_1 = n$ para algumas classes de hiperfícies isoparamétricas, como também, para hipersuperfícies homogêneas, veja Muto (1988) e referências nele contido.

Daqui para frente, vamos considerar $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ mergulho mínimo, onde M é uma variedade fechada orientável, daí recordemos que $x(M^n)$, que identificaremos por M^n, divide $\mathbb{S}^{n+1}$ em duas componentes conexas Ω_1 e Ω_2 tendo M^n com fronteira em comum. Desse modo, façamos $\Omega = \Omega_1$ e $\partial\Omega = M$. Podemos, com isso, utilizar as notações de métrica, entre outras, como na seção anterior.

5.1 Problema de Dirichlet

Seja $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ a primeira autofunção do laplaciono, isto é, $\overline{\Delta}\varphi + \lambda_1\varphi = 0$. Para o que se segue, denotaremos $\lambda = \lambda_1$ e consideraremos $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ a solução do problema de Dirichlet a seguir:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & em\ \Omega_i \\ u = \varphi_1, & em\ \partial\Omega_i = M^n. \end{cases}$$

Também, dado $t \in \mathbb{R}$, consideremos v_t solução de

$$\begin{cases} \Delta v_t = tu, & em\ \Omega_i \\ v_t = \varphi_1, & em\ \partial\Omega_i = M^n. \end{cases}$$

Exceto quando quisermos ressaltar a que valor de t estivermos aplicando, escrevamos v, sucintamente, além de referirmos por B à $B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi)$. A menos de uma escolha de qual das duas componentes seria Ω podemos supor que $\int_{\partial\Omega} B \geq 0$, então daqui para frente iremos considerar que essa integral é não-negativa. Vale ressaltar que estaremos sempre integrando utilizando a forma elemento de volume usual, embora não explicitemos, pois cremos que não gerará confusão e podemos evitar que equações fiquem demasiadamente longas.

Ademais, denotemos por $\mathscr{C}^{\infty}_{\varphi}(\Omega)$ o conjunto das funções diferenciáveis em $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega)$ tais que $f|_{\Omega} = \varphi$. Provemos, então, algumas propriedadades básicas das funções nesse conjunto que depois aplicaremos para u e v.

Lema 5.1 *Dada $h \in C^{\infty}_{\varphi}(\Omega)$, são válidas as seguintes identidades:*

1. $\int_{\Omega} \langle \nabla h, \nabla u \rangle = \int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2$;
2. $\int_{\Omega} \mid \nabla h \mid^2 = \int_{\Omega} \mid \nabla h - \nabla u \mid^2 + \int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2$;
3. *Em particular, pondo* $\int_{\Omega} \langle \nabla h, \nabla u \rangle = \cos\theta_h (\int_{\Omega} \mid \nabla h \mid^2)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2)^{\frac{1}{2}}$ *teremos que* $\int_{\Omega} \mid \nabla h \mid^2 = \frac{1}{\cos^2\theta_h} \int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2$;
4. $(2\lambda - n) \int_{\Omega} \mid \nabla h \mid^2 = \int_{\Omega} \mid \nabla^2 h \mid^2 - \int_{\Omega} (\Delta h + 2\lambda h) \Delta h + \int_{\partial\Omega} B$.

Provemos cada um dos itens separadamente.

Para o primeiro, note que como $\Delta u = 0$, então $div(h\nabla u) = \langle \nabla h, \nabla u \rangle$, além de que $div(u\nabla u) = \mid \nabla u \mid^2$. Portanto, aplicando o Teorema da divergência

$$\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_{\Omega} div(h\nabla u) = \int_{\Omega} \langle \nabla h, \nabla u \rangle .$$

Para o segundo, temos que $|\nabla h - \nabla u|^2 = |\nabla u|^2 - 2\langle \nabla u, \nabla h \rangle + |\nabla h|^2$, assim integrando e utilizando o item anterior, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla h - \nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla h \rangle + \int_{\Omega} |\nabla h|^2 = \int_{\Omega} |\nabla h|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|.$$

O terceiro basta aplicarmos a desigualdade de Cauchy. Já para a última, por um lado, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathscr{L} h &= \int_{\Omega} \left((\Delta h)^2 - Ric(\nabla h, \nabla h) - |\nabla^2 h|^2 \right) \\ &= \int_{\Omega} (\Delta h)^2 - n \int_{\Omega} |\nabla h|^2 - \int_{\Omega} |\nabla^2 h|^2. \end{aligned}$$

Ademais, pelo Teorema da divergência,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial h}{\partial \eta} = \int_{\Omega} div(h\nabla h) = \int_{\Omega} \left(h\Delta h + \mid \nabla h \mid^2 \right).$$

Por outro lado, pela fórmula de Reilly, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathscr{L}h &= \int_{\partial\Omega} 2\frac{\partial h}{\partial \eta}\overline{\Delta}\varphi + B(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\varphi)\\ &= -2\lambda\int_\Omega \left(h\Delta h + \mid \nabla h\mid^2\right) + \int_{\partial\Omega} B.\end{aligned}$$

Com isso, teremos que

$$(2\lambda - n)\int_\Omega \mid \nabla h \mid^2 = \int_\Omega \mid \nabla^2 h \mid^2 - \int_\Omega (\Delta h + 2\lambda h)\Delta h + \int_{\partial\Omega} B,$$

concluindo assim o lema.

Esse lema pode ser aplicado às funções u e v. Sendo $\alpha_t = \theta_{v_t}$ como no terceiro item, ou simplesmente α desde que não haja equívoco, conseguiremos algumas identidades trigonométricas. Além disso, temos:

$$(2\lambda - n)\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 = \int_\Omega \mid \nabla^2 u \mid^2 + \int_{\partial\Omega} B.$$

Ademais, essas funções como satisfazem um problema envolvendo laplaciano, portanto obtenhamos algumas identidades integrais envolvendo o Teorema da divergência.

Lema 5.2 *As funções u e v satisfazem:*

1. $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2$;
2. $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle = \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2$;
3. $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial \eta} = t\int_\Omega u^2 + \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2$;
4. $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial \eta} = t\int_\Omega uv + \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2$.

O importante para utilizarmos o Teorema da divergência nesse lema é notar que na fronteira ambas as funções u e v são iguais à φ.

Para o primeiro veja que

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_\Omega div(u\nabla u) = \int_\Omega (\langle \nabla u, \nabla u\rangle + u\Delta u) = \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2.$$

Já a segunda, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_\Omega div(v\nabla u) = \int_\Omega (\langle \nabla v, \nabla u\rangle + v\Delta u) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle.$$

Agora, para o terceiro,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_\Omega div(u\nabla v) = \int_\Omega (\langle \nabla u, \nabla v\rangle + u\Delta v) = t\int_\Omega u^2 + \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2$$

Finalmente,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\Omega} div(v\nabla v) = \int_{\Omega} (\langle \nabla v, \nabla v \rangle + v\Delta v) = t\int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \mid \nabla v \mid^2 .$$

Essas equações dos dois lemas anteriores serão repetidamente usadas no decorrer desta seção. De imediato temos alguns resultados:

Corolário 5.1 *As funções u e v são tais que*

$$\int_{\Omega} |\nabla v - \nabla u|^2 = tg^2\alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Inicialmente, usemos o segundo item do Lema 5.1, isto é,

$$\int_{\Omega} |\nabla v - \nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Agora, usemos a equação do terceiro item da mesma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla v - \nabla u|^2 &= \frac{1}{cos^2\alpha}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\
&= \left(\frac{1}{cos^2\alpha} - 1\right)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\
&= \frac{1 - cos^2\alpha}{cos^2\alpha}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\
&= \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\
&= tg^2\alpha\int_{\Omega} |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Corolário 5.2 *A integral* $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ *se, e somente se,* $t = -\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}$.

De fato, pelo terceiro item do lema anterior, a integral anterior é uma função afim em função de t, portanto admite uma única raíz. Ademais, para $t = -\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}$, teremos que

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 = -\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 + \int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 = 0$$

e, portanto, essa raíz é tal como no corolário.

5.2 Quociente e estimativa

Na subseção anterior o quociente $\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}$ surgiu ao tentarmos procurar pela raiz da integral da função $\varphi \frac{\partial v}{\partial \eta}$ na fronteira de Ω. Para simplificar, escreveremos $R(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}$.

No entanto, este quociente e o primeiro autovalor do laplaciano de M se relacionam. Dito isso, nesta subseção damos uma demonstração de uma estimativa feita por Barros e Bessa (1999) para $R(u)$ em função de λ.

Proposição 5.1 *Para u e v como anteriormente, é válida a seguinte equação:*

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 = -\left(t^2+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + n\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) + \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 .$$

Pela fórmula de Reilly,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left((\Delta v)^2 - Ric(\nabla v,\nabla v) - |\nabla^2 v|^2\right) &= \int_{\partial\Omega}\left(2\frac{\partial v}{\partial\eta}\overline{\Delta}\varphi + B(\overline{\nabla}\varphi,\overline{\nabla}\varphi)\right)\\
\int_\Omega \left((tu)^2 - n\langle\nabla v,\nabla v\rangle - |\nabla^2 v|^2\right) &= -2\lambda\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}\overline{\Delta}\varphi + \int_{\partial\Omega} B\\
t^2\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 &= -2\lambda\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}\overline{\Delta}\varphi + \int_{\partial\Omega} B.
\end{aligned}$$

Agora, apliquemos o terceiro item do Lema 5.2, de forma que

$$\begin{aligned}
t^2\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 + 2\lambda\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}\overline{\Delta}\varphi &= \int_{\partial\Omega} B\\
t^2\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 + 2\lambda\left(t\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right) &= \int_{\partial\Omega} B\\
\left(t^2+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\lambda\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 &= \int_{\partial\Omega} B.
\end{aligned}$$

Além disso, pelo último item do Lema 5.1 aplicado a $h=u$, temos:

$$\begin{aligned}
\left(t^2+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\lambda\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 &= \int_{\partial\Omega} B\\
\left(t^2+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\lambda\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 &= (2\lambda-n)\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 .
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\left(t^2+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 - n\int_\Omega (|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2) - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 = -\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 .$$

Corolário 5.3 *Para $t\in[-2\lambda,0]$, temos que:*

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 .$$

A fim de provar essa desigualdade, reescrevamos a identidade da proposição anterior, utilizando o Corolário 5.1, assim obtendo

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 = -\left(t^2+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2 .$$

Agora, basta garantirmos que $t^2+2\lambda t \leq 0$, o que é fácil de verificar, pois 0 e -2λ são as raízes do polinômio e, portanto, para $t \in [-2\lambda, 0]$ essa desigualdade é verificada.

Para seguirmos adiante, introduzamos o hessiano com traço nulo e algumas propriedades em um caso geral para depois aplicarmos ao nosso problema na esfera.

Definição 5.1 *Seja $f \in \mathscr{C}^\infty(N^n)$ uma função qualquer, onde N é uma variedade Riemanniana. Definimos o seu hessiano com traço nulo, denotado por $\mathring{\nabla}^2 f$, pondo $\mathring{\nabla}^2 f = \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} I$, onde I e o $(1,1)$-tensor identidade.*

Intuitivamente, pelo seu nome, é esperado que seu traço seja nulo. Para isso temos o seguinte lema:

Lema 5.3 *Para qualquer função $f \in \mathscr{C}^\infty(N^n)$, temos que $tr(\mathring{\nabla}^2 f) = 0$.*

Com efeito, tomemos uma base ortonormal local $E_1, \ldots, E_n$ e calculemos:

$$\begin{aligned}
tr(\mathring{\nabla}^2 f) &= \sum_{i=1}^n \langle \mathring{\nabla}^2 f(E_i), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 f(E_i) - \frac{\Delta f}{n} I(E_i), E_i \rangle \\
&= tr(\nabla^2 f) - \sum_{i=1}^n \frac{\Delta f}{n} \\
&= \Delta f - \Delta f = 0.
\end{aligned}$$

Lema 5.4 *Seja $f \in \mathscr{C}^\infty(N^n)$ uma função qualquer. Então $|\nabla^2 f|^2 = |\mathring{\nabla}^2 f|^2 + \frac{(\Delta f)^2}{n}$.*

Veja que

$$\begin{aligned}
|\mathring{\nabla}^2 f|^2 &= \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} I \right|^2 \\
&= |\nabla^2 f|^2 - 2\frac{\Delta f}{n} \langle \nabla^2 f, I \rangle + \frac{(\Delta f)^2}{n^2} |I|^2 \\
&= |\nabla^2 f|^2 - 2\frac{\Delta f}{n} \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 f(E_i), I(E_i) \rangle + \frac{(\Delta f)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \langle I(E_i), I(E_i) \rangle \\
&= |\nabla^2 f|^2 - 2\frac{\Delta f}{n} \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 f(E_i), E_i \rangle + \frac{(\Delta f)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i \rangle \\
&= |\nabla^2 f|^2 - 2\frac{\Delta f}{n} tr(\nabla^2 f) + \frac{(\Delta f)^2}{n^2} n \\
&= |\nabla^2 f|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n},
\end{aligned}$$

que equivale a equação do lema.

Corolário 5.4 *Seja $f \in \mathscr{C}^\infty(N^n)$ uma função qualquer. Então* $|\nabla^2 f|^2 \geq \dfrac{(\Delta f)^2}{n}$.

Para verificarmos essa desigualdade basta usarmos o lema anterior, notando que $|\mathring{\nabla}^2 f|^2 \geq 0$.

Retornando para o caso da esfera, podemos aplicar isso à função v.

Corolário 5.5 *A função v satisfaz* $\displaystyle\int_\Omega |\nabla^2 v|^2 = \int_\Omega |\mathring{\nabla}^2 v|^2 + \frac{t^2}{n+1}\int_\Omega u^2.$

De fato, segue direto do Lema 5.4, uma vez que

$$\int_\Omega (\Delta v)^2 = \int_\Omega t^2 u^2 = t^2 \int_\Omega u^2.$$

Proposição 5.2 *As funções u e v satisfazem a seguinte equação:*

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 = -\left(\frac{nt^2}{n+1} + 2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\mathring{\nabla}^2 v|^2.$$

Para demonstrarmos, utilizemos a Proposição 5.1, temos

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 = -\left(t^2 + 2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla^2 v|^2.$$

Por outro, substituímos $\displaystyle\int_\Omega |\nabla^2 v|^2 = \int_\Omega |\mathring{\nabla}^2 v|^2 + \frac{t^2}{n+1}\int_\Omega u^2$, obtido no corolário anterior, daí

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 &= -\left(t^2 + 2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\mathring{\nabla}^2 v|^2 + \frac{t^2}{n+1}\int_\Omega u^2 \\
&= -\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)t^2 + 2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\mathring{\nabla}^2 v|^2 \\
&= -\left(\frac{nt^2}{n+1} + 2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 + ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\mathring{\nabla}^2 v|^2,
\end{aligned}$$

encerrando assim a demonstração.

De imediato temos o próximo corolário.

Corolário 5.6 *Para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos que*

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq -\left(\frac{nt^2}{n+1} + 2\lambda t\right)\int_\Omega u^2.$$

Corolário 5.7 *O hessiano de u satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \frac{\lambda^2(n+1)}{n}\int_\Omega u^2.$$

Basta escolhermos o ponto de máximo de $-\left(\frac{nt^2}{n+1}+2\lambda t\right)$, ou seja, quando $t = -\frac{\lambda(n+1)}{n}$ e substituirmos na desigualdade do corolário anterior. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 &\geq -\left(\frac{nt^2}{n+1}+2\lambda t\right)\int_\Omega u^2 \\
&\geq -\left\{\frac{n}{n+1}\left(-\frac{\lambda(n+1)}{n}\right)^2 - 2\lambda\frac{\lambda(n+1)}{n}\right\}\int_\Omega u^2 \\
&\geq -\left\{\left(\frac{\lambda^2(n+1)}{n}\right) - 2\frac{\lambda^2(n+1)}{n}\right\}\int_\Omega u^2 \\
&\geq \frac{\lambda^2(n+1)}{n}\int_\Omega u^2.
\end{aligned}$$

Proposição 5.3 *O quociente $R(u)$ definido anteriormente satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$R(u) \geq \frac{\lambda^2(n+1)}{(2\lambda-n)n}.$$

Equivalentemente, é suficiente provarmos que

$$(2\lambda-n)\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \frac{\lambda^2(n+1)}{n}\int_\Omega u^2.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
(2\lambda-n)\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 &= \int_{\partial\Omega} B \geq 0 \\
\Longrightarrow (2\lambda-n)\int_\Omega |\nabla u|^2 &\geq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2.
\end{aligned}$$

Desse modo, aliando essa desigualdade com a adquirida no Corolário 5.7, obtemos que

$$(2\lambda-n)\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \frac{\lambda^2(n+1)}{n}\int_\Omega u^2.$$

Assim temos uma cota inferior para o quociente que depende do primeiro autovalor do laplaciano.

5.3 Estimativas trigonométricas

Nesta subseção temos como objetivo demonstrar uma nova identidade integral com mais parâmetros. Ademais, aplicando esta a fim de estimar tanto $tg^2\alpha$ quanto $cos^2\alpha$ de modo a obter resultados estimando o autovalor.

Proposição 5.4 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrários de modo que $b \neq 0$, então*

$$ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2 = \left(\frac{a+b}{b}\right)^2\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \left(t^2 + 2\lambda\frac{a+b}{b}t\right)\int_\Omega u^2 - \frac{1}{b^2}\int_\Omega |a\nabla^2 u + b\nabla^2 v|^2.$$

A demonstração se baseará principalmente na fórmula de Reilly aplicado à função $au+bv$. Como $au+bv|_{\partial\Omega}=(a+b)\varphi$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\omega}\mathscr{L}(au+bv) &= \int_{\partial\Omega}2\left\{\varphi(au+bv)_{\eta}\overline{\Delta}\big((a+b)\varphi\big)\right\}+\int_{\partial\Omega}B\big((a+b)\overline{\nabla}\varphi,(a+b)\overline{\nabla}\varphi\big)\\ &= -2(a+b)\lambda\int_{\partial\Omega}\varphi(au_{\eta}+bv_{\eta})+(a+b)^2\int_{\partial\Omega}B\\ &= (a+b)^2\int_{\partial\Omega}B-2(a+b)a\lambda\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}-2(a+b)b\lambda\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial v}{\partial\eta}.\end{aligned}$$

Agora, apliquemos o Lema 5.2, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\mathscr{L}(au+bv) &= (a+b)^2\int_{\partial\Omega}B-2\lambda(a+b)a\int_{\Omega}|\nabla u|^2-2\lambda(a+b)b\left(t\int_{\Omega}u^2+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)\\ &= (a+b)^2\int_{\partial\Omega}B-2\lambda(a+b)(a+b)\int_{\Omega}|\nabla u|^2-2\lambda(a+b)bt\int_{\Omega}u^2\\ &= (a+b)^2\int_{\partial\Omega}B-2\lambda(a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2-2\lambda(a+b)bt\int_{\Omega}u^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\mathscr{L}(au+bv) &= \int_{\Omega}\big(\Delta(au+bv)\big)^2-n\int_{\Omega}|\nabla(au+bv)|^2-\int_{\Omega}|\nabla^2(au+bv)|^2\\ &= \int_{\Omega}(\Delta bv)^2-n\int_{\Omega}|a\nabla u+b\nabla v|^2-\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2\\ &= b^2t^2\int_{\Omega}u^2-n\int_{\Omega}\left(a^2|\nabla u|^2+2ab\langle\nabla u,\nabla v\rangle+b^2|\nabla v|^2\right)-\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2\\ &= b^2t^2\int_{\Omega}u^2-n\left(\int_{\Omega}a^2|\nabla u|^2+2ab\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2\int_{\Omega}|\nabla v|^2\right)-\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2\end{aligned}$$

Porém, como

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}a^2|\nabla u|^2+2ab\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2\int_{\Omega}|\nabla v|^2 &= (a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2\int_{\Omega}|\nabla v|^2-b^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2\\ &= (a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^2-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)\\ &= (a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2tg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2,\end{aligned}$$

teremos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\mathscr{L}(au+bv) &= b^2t^2\int_{\Omega}u^2-n\left(\int_{\Omega}a^2|\nabla u|^2+2ab\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2\int_{\Omega}|\nabla v|^2\right)-\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2\\ &= b^2t^2\int_{\Omega}u^2-n\left((a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2+b^2tg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)-\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2\\ &= b^2t^2\int_{\Omega}u^2-n(a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2-b^2ntg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2-\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|a\nabla^2u+b\nabla^2v|^2 &= (2\lambda-n)(a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2-(a+b)^2\int_{\partial\Omega}B\\ &\quad -nb^2tg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2+(b^2t^2+2\lambda(a+b)bt)\int_{\Omega}u^2.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega}|a\nabla^2 u+b\nabla^2 v|^2=(a+b)^2\int_{\Omega}|\nabla^2 u|^2-nb^2tg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2+(b^2t^2+2\lambda(a+b)bt)\int_{\Omega}u^2.$$

Em particular, se b é não nulo, ao dividirmos por b^2 na equação acima e organizar os termos adequadamente, teremos que

$$ntg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2=(\frac{a+b}{b})^2\int_{\Omega}|\nabla^2 u|^2+(t^2+2\lambda\frac{a+b}{b}t)\int_{\Omega}u^2-\frac{1}{b^2}\int_{\Omega}|a\nabla^2 u+b\nabla^2 v|^2,$$

o que encerra a demonstração.

Para fins de conseguir uma estimativa melhor para a tangente, podemos desenvolver mais o termo envolvendo os hessianos.

Corolário 5.8 *Dados $a,b\in\mathbb{R}$ quaisquer, com $b\neq 0$, é válida a seguinte equação:*

$$ntg^2\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^2=(\frac{a+b}{b})^2\int_{\Omega}|\nabla^2 u|^2+(\frac{n}{n+1}t^2+2\lambda\frac{a+b}{b}t)\int_{\Omega}u^2-\frac{1}{b^2}\int_{\Omega}|a\mathring{\nabla}^2 u+b\mathring{\nabla}^2 v|^2.$$

Inicialmente note que

$$\Delta(au+bv)=a\Delta u+b\Delta v=btu.$$

Agora, utilizando o Lema 5.4, teremos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|a\nabla^2 u+b\nabla^2 v|^2 &= \int_{\Omega}|a\mathring{\nabla}^2 u+b\mathring{\nabla}^2 v|^2+\int_{\Omega}\frac{\big(\Delta(au+bv)\big)^2}{n+1}\\ &= \int_{\Omega}|a\mathring{\nabla}^2 u+b\mathring{\nabla}^2 v|^2+\int_{\Omega}\frac{(btu)^2}{n+1}\\ &= \int_{\Omega}|a\mathring{\nabla}^2 u+b\mathring{\nabla}^2 v|^2+\frac{b^2t^2}{n+1}\int_{\Omega}u^2\end{aligned}$$

Assim, substituindo $\int_{\Omega}|a\nabla^2 u+b\nabla^2 v|^2$ na proposição anterior, conseguimos a equação do corolário.

Teorema 5.1 *Seja t um número real qualquer fixado. Com relação à tangente de α_t, que iremos simplesmente denotar por α, é válido a seguinte desigualdade:*

$$tg^2\alpha\leq(2\lambda-n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}.$$

Almejando esta desigualdade, iremos utilizar o corolário anterior, porém fixaremos $b=1$, pois variar o seu valor não nos daria uma desigualdade melhor. Nesse caso estudemos para que valor de a a expressão $\frac{n}{n+1}t^2 + 2\lambda(a+1)t$ se anula. Como para $t = 0$ o polinômio é sempre nulo independentemente da escolha de a, consideremos $t \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1}t^2 + 2\lambda(a+1)t &= 0 \\
\Rightarrow \frac{n}{n+1}t + 2\lambda(a+1) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{n}{n+1}t + 2\lambda a + 2\lambda &= 0 \\
\Rightarrow 2\lambda a &= -2\lambda - \frac{n}{n+1}t \\
\Rightarrow a &= -\frac{1}{2\lambda}\left(2\lambda + \frac{n}{n+1}t\right) \\
\Rightarrow a &= -1 - \frac{nt}{2\lambda(n+1)}.
\end{aligned}$$

Agora, escolhendo a como acima teremos que o polinômio que multiplica $\int_\Omega u^2$ será nulo. Ademais, o coeficiente que multiplica a integral dos hessianos com traços nulos é negativo, portanto, teremos que:

$$\begin{aligned}
ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \left(-1 - \frac{nt}{2\lambda(n+1)} + 1\right)^2 \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \left(\frac{nt}{2\lambda(n+1)}\right)^2 \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \frac{n^2t^2}{4\lambda^2(n+1)^2} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Rightarrow tg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \leq (2\lambda - n) \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
tg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq (2\lambda - n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \\
\Rightarrow tg^2\alpha &\leq (2\lambda - n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2},
\end{aligned}$$

como queríamos.

Corolário 5.9 *Dado t um número real arbitrário, temos que*

$$cos^2\alpha \geq \frac{4\lambda^2(n+1)^2}{4\lambda^2(n+1)^2 + (2\lambda - n)nt^2}.$$

De fato, cheguemos nessa desigualdade a partir da anterior.

Para isso, escrevamos

$$\begin{aligned}
tg^2\alpha &\leq (2\lambda-n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}\\
\Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} &\leq (2\lambda-n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}\\
\Rightarrow sen^2\alpha &\leq (2\lambda-n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}cos^2\alpha\\
\Rightarrow 1-cos^2\alpha &\leq (2\lambda-n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}cos^2\alpha\\
\Rightarrow 1 &\leq \left\{1+(2\lambda-n)\frac{nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}\right\}cos^2\alpha\\
\Rightarrow 1 &\leq \frac{4\lambda^2(n+1)^2+(2\lambda-n)nt^2}{4\lambda^2(n+1)^2}cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\frac{4\lambda^2(n+1)^2}{4\lambda^2(n+1)^2+(2\lambda-n)nt^2} \leq \cos^2\alpha.$$

Observação 5.1 *Em ambas as desigualdades, como utilizamos apenas o valor de t^2, o importante é o valor de seu módulo, ou seja, não é importante o seu sinal. Ademais é possível ver que se $|t'| \leq |t|$ então a mesma desigualdade para t ainda será válida para t'.*

Observação 5.2 *Sabemos que $cos^2\alpha_t \leq 1$, no entanto se para algum t específico conseguirmos uma melhor majoração, isto é, encontrarmos um número real c de modo que $cos^2\alpha_t \leq c < 1$ então conseguiremos uma estimativa para λ melhor que $\lambda \geq n/2$.*

Pondo $\lambda = rn$, podemos conferir que

$$\frac{4\lambda^2(n+1)^2}{4\lambda^2(n+1)^2+(2\lambda-n)nt^2} = \frac{4r^2(n+1)^2}{4r^2(n+1)^2+(2r-1)t^2},$$

daí, definindo a função $p : [\frac{1}{2},1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(\rho) = \frac{4\rho^2(n+1)^2}{4\rho^2(n+1)^2+(2\rho-1)t^2},$$

podemos verificar que p é decrescente em função de ρ no intervalo $\in [\frac{1}{2},1]$ e que quando $\rho = \frac{1}{2}$ temos que $p(\frac{1}{2}) = 1$. De fato sua derivada é

$$p'(\rho) = \frac{8\,(n+1)^2\,t^2\cdot(\rho-1)\,\rho}{\left((4n^2+8n+4)\,\rho^2+2t^2\rho-t^2\right)^2}$$

e, portanto $p'(\rho) < 0$ para $\rho \in (\frac{1}{2},1)$.

Assim, se $cos^2\alpha_t \leq c < 1$, teríamos que $r \geq p^{-1}(c) > p^{-1}(1) = \frac{1}{2}$. Concluí-se que, nessa hipótese, $\lambda \geq p^{-1}(c)\cdot n > n/2$.

5.4 Desigualdade e extensão

Diferentemente da observação 5.2, nesta subseção focaremos de modo quantitativo a fim de conseguirmos uma hipótese que garanta que $\lambda = n$.

Sabemos que

$$\int_\Omega |\nabla v_t|^2 > \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{t^2}\int_\Omega |\nabla u|^2, \forall t \geq 1.$$

Uma vez que $\int_\Omega |\nabla v_t - \nabla u|^2 > 0$ para $t > 0$, pois caso contrário teríamos $v = u$ que é um absurdo comparando os laplacianos.

Assim, por continuidade, podemos supor que esse comportamento se mantenha numa vizinhança de $t = 1$. A pergunta é, então, até que t à esquerda de 1 ainda é válida a seguinte desigualdade:

$$\int_\Omega |\nabla v_t|^2 \geq \frac{1}{t^2}\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Tal desigualdade é equivalente à

$$\frac{1}{\cos^2\alpha_t} \geq \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \cos^2\alpha_t \leq t^2.$$

Uma vez bem estalecido esse problema, simplifiquemos a notação e escrevamos simplesmente $\alpha = \alpha_t$.

Pelo Corolário 5.9, sabemos que

$$cos^2\alpha \geq \frac{4\lambda^2(n+1)^2}{4\lambda^2(n+1)^2 + (2\lambda - n)nt^2}.$$

Desse modo, para o problema da extensão temos

$$\frac{4\lambda^2(n+1)^2}{4\lambda^2(n+1)^2 + (2\lambda - n)nt^2} \leq cos^2\alpha \leq t^2.$$

Implicando, com isso:

$$4\lambda^2(n+1)^2 \leq 4\lambda^2(n+1)^2t^2 + (2\lambda - n)nt^4$$

Agora, escrevamos $\lambda = rn$ na desigualdade anterior.

$$\begin{aligned}
4r^2n^2(n+1)^2 &\leq 4r^2n^2(n+1)^2t^2 + (2rn-n)nt^4\\
\Leftrightarrow \qquad & 4r^2(n+1)^2 \leq 4r^2(n+1)^2t^2 + (2r-1)t^4\\
\Leftrightarrow \qquad & 4r^2(n+1)^2(1-t^2) - (2r-1)t^4 \leq 0\\
\Leftrightarrow \qquad & 4(n+1)^2(1-t^2)r^2 - 2t^4r + t^4 \leq 0.
\end{aligned}$$

Note que temos uma desigualdade com o lado esquerdo sendo um polinômio do segundo grau em r. Com isso, para valores tais que $t < 1$ tem-se que $1-t > 0$, logo analisando a concavidade desse polinômio garantimos que o valor de r é maior que a primeira raíz desse polinômio.

Antes de tudo, analisemos o discriminante Δ, desse polinômio que para nosso problema de extensão tem que ser não negativo.

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4t^8 - 4\cdot 4(n+1)^2(1-t^2)t^4\\
&= 4t^4\{t^4 - 4(n+1)^2(1-t^2)\}
\end{aligned}$$

Conseguintemente, o discriminante é não negativo se, e somente se,

$$t^4 \geq 4(n+1)^2(1-t^2).$$

Se escrevermos $y = t^2$, então facilitamos esse problema de determinar t. Veja:

$$\begin{aligned}
& y^2 \geq 4(n+1)^2(1-y)\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y^2}{4(n+1)^2} + y - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

Assim, para $y = t^2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
& y > 2(n+1)^2\left\{\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right\}\\
& \Leftrightarrow y > \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}+1}
\end{aligned}$$

Portanto, como para o problema estamos interessados em $t > 0$, teremos:

$$t \geq \sqrt{2}\cdot\left\{\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}+1\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Nesse sentido, denotaremos por $t_* = \sqrt{2}\cdot\left\{\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}+1\right\}^{-\frac{1}{2}}$.

Teorema 5.2 *Se tivermos que*

$$\int_\Omega |\nabla v_{t_*}|^2 \geq \frac{1}{{t_*}^2}\int_\Omega |\nabla u|^2,$$

então $\lambda = n$.

De fato, temos que t_* anula o discriminante, ou seja, ${t_*}^4 = 4(n+1)^2(1-{t_*}^2)$. Por outro lado, isso implicará que na desigualdade

$$4(n+1)^2(1-t_*^2)r^2 - 2t_*^4 r + t_*^4 \leq 0$$

existe uma única solução para r que será:

$$r = \frac{2{t_*}^4}{8(n+1)^2(1-{t_*}^2)} = 1.$$

Concluí-se, assim, que $\lambda = n$.

Observação 5.3 *Nesse teorema utilizamos a maior extensão que era permitida baseada no que conhecíamos do problema. No entanto, qualquer extensão do domínio nos fornece uma cota inferior para r melhor do que $\frac{1}{2}$.*

5.5 Produto interno dos hessianos

O intuito desta subseção será encontrar uma identidade para a integral de $\langle \nabla^2 u, \nabla^2 v\rangle$, além de expor algumas consequências.

Lema 5.5 *As funções u e v satisfazem às seguintes equações:*

1. $\displaystyle\int_\Omega |\nabla^2 u + \nabla^2 v|^2 = 4\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + (t^2+4\lambda t)\int_\Omega u^2 - ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2;$
2. $\displaystyle\int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2 = t^2\int_\Omega u^2 - ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2.$

Em ambas as identidades, aplicaremos a Proposição 5.4. Para a primeira, veja que

$$\begin{aligned}
& ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2 = (\frac{1+1}{1})^2\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + (t^2+2\lambda\frac{1+1}{1}t)\int_\Omega u^2 - \frac{1}{1^2}\int_\Omega |1\nabla^2 u + 1\nabla^2 v|^2 \\
\Leftrightarrow\ & ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2 = 2^2\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + (t^2+2\cdot 2t)\int_\Omega u^2 - \int_\Omega |\nabla^2 u + \nabla^2 v|^2 \\
\Leftrightarrow\ & ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2 = 4\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + (t^2+4t)\int_\Omega u^2 - \int_\Omega |\nabla^2 u + \nabla^2 v|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \int_\Omega |\nabla^2 u + \nabla^2 v|^2 = 4\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + (t^2+4\lambda t)\int_\Omega u^2 - ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Já para a segunda,

$$
\begin{aligned}
& ntg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2=(\frac{1-1}{-1})^2\int_\Omega|\nabla^2u|^2+(t^2+2\lambda\frac{1-1}{-1}t)\int_\Omega u^2-\frac{1}{(-1)^2}\int_\Omega|1\nabla^2u-1\nabla^2v|^2\\
\Leftrightarrow\ & ntg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2=t^2\int_\Omega u^2-\int_\Omega|\nabla^2u-\nabla^2v|^2\\
\Leftrightarrow\ & \int_\Omega|\nabla^2u-\nabla^2v|^2=t^2\int_\Omega u^2-ntg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

Concluímos, com isso, a demonstração do lema.

Corolário 5.10 *O quociente $R(u)$ definido como anteriormente satisfaz:*

$$tg^2\alpha_t\leq\frac{t^2}{R(u)(n+1)},\forall t\in\mathbb{R}.$$

Pelo Lema 5.5,

$$\int_\Omega|\nabla^2u-\nabla^2v|^2+ntg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2=t^2\int_\Omega u^2.$$

Agora, como $\big(\Delta(u-v)\big)^2=t^2u^2$, pelo Lema 5.4, temos que

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega|\mathring{\nabla}^2u-\mathring{\nabla}^2v|^2+\frac{t^2}{n+1}\int_\Omega u^2+ntg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2=t^2\int_\Omega u^2\\
& \Leftrightarrow\int_\Omega|\mathring{\nabla}^2u-\mathring{\nabla}^2v|^2+ntg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2=\frac{nt^2}{n+1}\int_\Omega u^2.
\end{aligned}
$$

Daí, segue que vale a seguinte desigualdade:

$$tg^2\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2\leq\frac{t^2}{n+1}\int_\Omega u^2,$$

que equivale ao problema do corolário.

Proposição 5.5 *Os hessianos de u e de v são tais que*

$$\int_\Omega\langle\nabla^2u,\nabla^2v\rangle=\int_\Omega|\nabla^2u|^2+\lambda t\int_\Omega u^2.$$

A fim de demonstrarmos, aplicamos a lei do paralelogramo para obtermos

$$
\begin{aligned}
|\nabla^2u+\nabla^2v|^2-|\nabla^2u-\nabla^2v|^2 &= \big(|\nabla^2u|^2+2\langle\nabla^2u,\nabla^2v\rangle+|\nabla^2v|^2\big)-\big(|\nabla^2u|^2-2\langle\nabla^2u,\nabla^2v\rangle+|\nabla^2v|^2\big)\\
&= 4\langle\nabla^2u,\nabla^2v\rangle.
\end{aligned}
$$

Desse modo, temos que

$$\langle\nabla^2u,\nabla^2v\rangle=\frac{1}{4}|\nabla^2u+\nabla^2v|^2-\frac{1}{4}|\nabla^2u-\nabla^2v|^2,$$

e, portanto,

$$\int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v\rangle = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla^2 u + \nabla^2 v|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2.$$

Para terminar, basta aplicarmos o lema anterior nessa equação obtendo:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v\rangle &= \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla^2 u + \nabla^2 v|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(4\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + (t^2 + 4\lambda t)\int_\Omega u^2 - ntg^2\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{4}\left(t^2\int_\Omega u^2 - ntg^2\alpha\int_\Omega |\nabla u|^2\right) \\
&= \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \lambda t\int_\Omega u^2.
\end{aligned}$$

A partir dessa fórmula, podemos supor algumas condições acerca das integrais dos hessianos em direção à conjectura.

Corolário 5.11 *Se para $t_0 = -R(u)$, tivermos que $\int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v_{t_0}\rangle \geq 0$, então $\lambda = n$.*

De fato, valendo a hipótese do corolário, teríamos que:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v_{t_0}\rangle \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \lambda R(u)\int_\Omega u^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Porém, como

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \leq (2\lambda - n)\int_\Omega |\nabla u|^2,$$

teremos que

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (2\lambda - n)\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq (\lambda - n)\int_\Omega |\nabla u|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda \geq n.
\end{aligned}$$

Corolário 5.12 *Suponhamos que $\int_{\partial\Omega} B = 0$, então $\lambda = n$ se, e somente se $\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2$.*

Inicialmente, provarmos que se $\lambda = n$, então $\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2$. Neste caso teríamos que

$$\begin{aligned}
& (2\lambda - n)\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Rightarrow\ & \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2$, provemos que $\lambda = n$. De fato, basta vermos que

$$\int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v_{t_0} \rangle = \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0,$$

assim, pelo corolário anterior, segue a igualdade entre λ e n.

Proposição 5.6 *Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, vale a desigualdade a seguir:*

$$\left| \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v \rangle \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v|^2.$$

Para provarmos essa afirmação, apliquemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz na normas L_2. Temos que

$$\left| \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v \rangle \right| \leq \sqrt{\int_\Omega |\nabla^2 u|^2} \sqrt{\int_\Omega |\nabla^2 v|^2}.$$

Por outro lado, observe que:

$$\sqrt{\int_\Omega |\nabla^2 u|^2} \sqrt{\int_\Omega |\nabla^2 v|^2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 \right)}.$$

Agora, nesse outro lado podemos aplicar a desigualdade entre a média geométrica e aritmética, obtendo

$$\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v|^2 \right)} \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v|^2,$$

que conclui a demonstração.

Lema 5.6 *Para $t_0 = -R(u)$, vale a seguinte estimativa*

$$\int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \left(\frac{n-\lambda}{2\lambda - n}\right)^2 \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 .$$

A fim de provarmos essa declaração, utilizemos a proposição anterior obtendo que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v_{t_0} \rangle \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \\ \Rightarrow \quad 0 &\leq \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v_{t_0} \rangle + \frac{\varepsilon}{4} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a Proposição 5.5, temos que

$$\begin{aligned} & 0 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \lambda R(u) \int_\Omega u^2 + \frac{\varepsilon}{4} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \varepsilon\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

No entanto, como

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \frac{\lambda}{2\lambda - n} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2,$$

teremos que

$$\begin{aligned}
& \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \frac{\lambda \varepsilon}{2\lambda - n} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{4} + \left(\frac{\lambda}{2\lambda - n} - 1 \right) \varepsilon \right\} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \left(-\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \varepsilon \right) \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq -\frac{1}{4} \left(\varepsilon^2 - 4 \frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \varepsilon \right) \int_\Omega |\nabla^2 u|^2.
\end{aligned}$$

Assim, substituamos $\varepsilon = 2(n - \lambda)/(2\lambda - n)$ na desigualdade acima, isto é,

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq -\frac{1}{4} \left\{ \left(2 \frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \right)^2 - 4 \frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \left(2 \frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \right) \right\} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq -\frac{1}{4} \left\{ 4 \left(\frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \right)^2 - 8 \frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \left(\frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \right) \right\} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq -\frac{1}{4} \left\{ -4 \left(\frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \right)^2 \right\} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \left(\frac{n - \lambda}{2\lambda - n} \right)^2 \int_\Omega |\nabla^2 u|^2,
\end{aligned}$$

como afirmado no lema.

Teorema 5.3 *Seja $t_0 = -R(u)$. Se tivermos que $\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2$, então $\lambda \geq \frac{2}{3} n$.*

Com efeito, se aplicarmos o lema anterior junto a essa hipótese teremos que

$$\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla^2 v_{t_0}|^2 \geq \left(\frac{n - \lambda}{2\lambda - n}\right)^2 \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 .$$

Portanto, comparando os coeficiente que multiplicam a integral de $|\nabla^2 u|^2$ segue que

$$\begin{aligned}
& 1 \geq \left(\frac{n - \lambda}{2\lambda - n}\right)^2 \\
\Rightarrow \quad & n - \lambda \leq 2\lambda - n \\
\Rightarrow \quad & 2n \leq 3\lambda.
\end{aligned}$$

Concluímos com isso que $\lambda \geq \frac{2n}{3}$.

Teorema 5.4 *Se $\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v_{t_0}|^2$ para $t_0 = -R(u)$, então $\lambda = n$.*

Para isso, veja que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 u - \nabla^2 v\rangle &= \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v\rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 - \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \\
&= \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Agora, de forma análoga ao que fizemos anteriormente, para $\varepsilon > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \langle \nabla^2 u, \nabla^2 u - \nabla^2 v\rangle \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2 \\
\Rightarrow\quad & \frac{\lambda}{2\lambda - n}\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2 \\
\Rightarrow\quad & 4\varepsilon \left\{ \frac{\lambda}{2\lambda - n} - \varepsilon \right\} \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $\varepsilon = \frac{\lambda}{2(2\lambda - n)}$ na desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{\lambda^2}{(2\lambda - n)^2}\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v|^2.$$

Com isso, se valer a hipótese que $\int_\Omega |\nabla^2 u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla^2 u - \nabla^2 v_{t_0}|^2$, então

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^2}{(2\lambda - n)^2} \leq 1 \\
\Rightarrow\quad & \lambda \leq 2\lambda - n \\
\Rightarrow\quad & n \leq \lambda.
\end{aligned}$$

Encerrando, desse modo, a igualdade $\lambda = n$.

6 CONCLUSÃO

É possível separarmos nosso trabalho em duas partes: uma mais básica sendo as duas primeiras subseções do corpo do texto; e as duas últimas que chegaram nos resultados principais. Para a primeira, fizemos um trabalho de definir e apresentar resultados básicos principalmente quando desenvolvemos identidades diferenciais. Esses resultados foram essenciais para a segunda parte, uma vez que as identidades foram aplicadas para obtermos uma demonstração para a fórmula de Reilly, além de ser a base para todo o resto do trabalho. Com isso, aplicamos esta fórmula em mais de um contexto que tinhamos funções soluções de EDP's específicas. Mais precisamente, como a imersão divide a esfera em duas componentes Ω_1 e Ω_2, consideramos uma delas de modo vantojoso para nossas equações observando que ambas componentes possuem $x(M)$ como seu bordo. Assim, usamos u e v soluções de problemas de dirichlet a fim de obtermos resultados relacionando o primeiro autovalor através de condições acerca essas funções, seus gradientes e suas hessianas.

REFERÊNCIAS

BARROS, A.; BESSA, G. Estimate of the first eigenvalue of minimal hypersurface of Sn+1. **Matematica Contemporanea**, v. 17, p. 71–75, 1999.

BESSE, A. **Einstein manifolds**. New York: Springer-Verlag, 2008.

CARMO, M. D. **Geometria riemanniana**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

CHOI, H.; WANG, A. A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. **J. Diff. Geom.**, v. 18, p. 559–562, 1983.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. Hamilton's Ricci flown. **American Mathematical Society**, v. 77, p. 531–549, 2006.

LEE, J. M. **Riemannian manifolds**: an introduction to curvature. New York: Springer, 1997.

MUTO, H. The first eigenvalue of the laplacian of an isoparametric hypersurface in a unit sphere. **Math. Z.**, v. 197, p. 531–549, 1988.

REILLY, R. Applications of the hessian operator in riemannian manifold. **Indiana Univ. Math. J**, v. 26, p. 459–472, 1977.

TAKAHASHI, T. Minimal immersions of riemannian manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 18, p. 380–385, 1966.

VIACLOVSKY, Jeff. **Topics in Riemannian Geometry**. [*S. l.*], 2007. Disponível em: http://www.math.wisc.edu/∼jeffv/courses/865_Fall_2007.pdf. Acesso em: 20 nov. 2023.

YAU, S. **Seminar on differential geometry**. Princeton, N.J.: Princeton University Press; [Tokyo]: University of Tokyo Press, 1982. (Annals of Mathematics Studies, n. 102).