



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

JONAS ALVES DE CASTRO

**ALOCAÇÃO DE RECURSOS PARA REDES MÓVEIS EMPREGANDO RSMA COM
MÚLTIPLAS SUBPORTADORAS**

SOBRAL

2024

JONAS ALVES DE CASTRO

ALOCAÇÃO DE RECURSOS PARA REDES MÓVEIS EMPREGANDO RSMA COM
MÚLTIPLAS SUBPORTADORAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia De Computação do Campus Sobral da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia De Computação.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima.

SOBRAL

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C351a Castro, Jonas Alves de.
Alocação de Recursos para Redes Móveis Empregando RSMA com Múltiplas Subportadoras / Jonas Alves de Castro. – 2024.
56 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Sobral, Curso de Engenharia da Computação, Sobral, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima.

1. RSMA. 2. Múltiplas Subportadoras. 3. Alocação de Recursos. 4. Taxa Total Ponderada. I. Título.
CDD 621.39

JONAS ALVES DE CASTRO

ALOCAÇÃO DE RECURSOS PARA REDES MÓVEIS EMPREGANDO RSMA COM
MÚLTIPLAS SUBPORTADORAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia De Computação do Campus Sobral da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia De Computação.

Aprovada em: 30 de Setembro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Rafael Marques
Lima (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Yuri Carvalho Barbosa Silva
Departamento de Engenharia de Teleinformática
(DETI)/UFC

Dr. Lászlón Rodrigues da Costa
Instituto Atlântico

À minha família, pelo apoio e encorajamento durante todo este percurso. Especialmente à minha mãe e ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Maria da Conceição Alves da Silva e meu pai Francisco de Sousa Castro Filho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Rafael Marques Lima, pelo apoio e os ensinamentos.

Aos meus colegas da universidade que me ajudaram e incentivaram de algum modo durante a graduação.

A todos os professores que fizeram parte desta jornada até a graduação, devo a vocês esse novo degrau do conhecimento.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUN-CAP), por minha bolsa de iniciação científica entre os anos de 2021 e 2022.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,
não é a posse, mas o ato de chegar lá, que nos
dá a maior satisfação." (Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Este trabalho explora um problema de alocação de recursos para redes móveis considerando um cenário com múltiplas subportadoras em um sistema que emprega *Rate-Splitting Multiple Access* (RSMA). O modelo do sistema trata-se de um enlace downlink composto por uma estação rádio base com múltiplas antenas e usuários com apenas uma antena. Para cada subportadora disponível no sistema associa-se um único par de usuários, no qual é aplicado o mecanismo RSMA. Para cada par de usuários, as direções dos pré-codificadores privados são definidas utilizando *Zero Forcing* (ZF) e a direção do pré-codificador comum é projetada de tal forma que a taxa comum do par seja maximizada. O problema estudado objetiva a maximização da taxa total dos usuários ponderada por pesos que servem para garantir justiça entre os usuários, dentre outros objetivos. No processo de otimização, é necessário alocar a potência total disponível no sistema entre a mensagem comum e as mensagens privadas de cada par associado às subportadoras. Nesta pesquisa, foram propostas duas soluções de baixa complexidade computacional para o problema de otimização. Estas soluções foram comparadas com dois *benchmarks* desenvolvidos para mostrar como as etapas que compõem as soluções incrementam o desempenho. A primeira solução de *benchmark* consiste em associar os pares de usuários às subportadoras de maneira aleatória e usar o algoritmo de alocação de potência proposto na primeira solução. A segunda solução de *benchmark* utiliza a associação de pares de usuários às subportadoras utilizada nas duas soluções propostas com alocação de potência igualitária.

Palavras-chave: RSMA. Múltiplas subportadoras. Alocação de recursos. Taxa total ponderada.

ABSTRACT

This work explores a resource allocation problem for mobile networks considering a scenario with multiple subcarriers in a system employing Rate-Splitting Multiple Access (RSMA). The system model consists of a downlink composed of a base station with multiple antennas and users with a single antenna. For each available subcarrier in the system, a unique pair of users is associated, to which the RSMA mechanism is applied. For each pair of users, the directions of the private precoders are defined using Zero Forcing (ZF), and the direction of the common precoder is designed in such a way that the common rate of the pair is maximized. The studied problem aims to maximize the total user rate weighted by factors that can be configured to improve system fairness, for example. In the optimization process, it is necessary to allocate the total available power in the system between the common message and the private messages of each pair associated with the subcarriers. In this work, two low complexity solutions were proposed for the optimization problem. These solutions were compared with two benchmarks developed to demonstrate how the steps that compose the solutions improve the performance. The first benchmark solution consists of randomly matching pairs of users and subcarriers and using the power allocation algorithm proposed in the first solution. The second benchmark solution utilizes the matching of pairs of users and subcarriers used in both proposed solutions with equal power allocation.

Keywords: RSMA. Multiple subcarriers. Resource allocation. Weighted sum-rate.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de transmissão e recepção para dois usuários	18
Figura 2 – Modelo de transmissão e recepção para três usuários	20
Figura 3 – Modelo do sistema	29
Figura 4 – Esboço da função objetivo do problema (5.21)	42
Figura 5 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de subportadoras	49
Figura 6 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de usuários	50
Figura 7 – Distribuições de taxas médias dos usuários para diferentes conjuntos de pesos	50
Figura 8 – Ganho relativo da divisão ótima de taxa sobre a divisão igualitária para diferentes valores de potência total	51
Figura 9 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de subportadoras para as soluções propostas	52
Figura 10 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de usuários para as soluções propostas	52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

B5G	<i>Beyond 5G</i>
CSIT	<i>Channel State Information at the Transmitter</i>
ERB	Estação Rádio Base
IoT	<i>Internet of Things</i>
MISO	<i>Multiple-Input Single-Output</i>
NOMA	<i>Non-Orthogonal Multiple Access</i>
QoS	<i>Quality of Service</i>
RS	<i>Rate-Splitting</i>
RSMA	<i>Rate-Splitting Multiple Access</i>
SDMA	<i>Space Division Multiple Access</i>
SIC	<i>Successive Interference Cancellation</i>
SINR	<i>Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
ZF	<i>Zero Forcing</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos do trabalho	14
1.2	Estrutura do documento	14
1.3	Contribuições científicas	15
2	CONTEXTO	16
2.1	SDMA e NOMA	16
2.1.1	<i>SDMA</i>	17
2.1.2	<i>NOMA</i>	17
2.2	RSMA	17
2.2.1	<i>Caso com dois usuários</i>	17
2.2.2	<i>Caso com três usuários</i>	19
2.2.3	<i>Caso geral</i>	21
2.3	Generalização do SDMA e NOMA	22
2.4	Revisão literária	23
3	FERRAMENTAS DE PESQUISA OPERACIONAL	25
3.1	Programação Linear	25
3.2	Programação Linear Inteira Mista	26
3.3	Problemas totalmente unimodulares	27
4	MODELAGEM	28
4.1	Modelo do Sistema	28
4.2	Formulação do Problema de Otimização	32
5	SOLUÇÕES PROPOSTAS	35
5.1	Análise do problema	35
5.2	Primeira solução	36
5.2.1	<i>Associação de pares às subportadoras</i>	37
5.2.2	<i>Alocação de potência entre as subportadoras</i>	38
5.3	Segunda solução	40
5.3.1	<i>Divisão ótima da taxa comum</i>	40
5.3.2	<i>Alocação de potência entre a mensagem comum e as mensagens privadas de um par de usuários</i>	42

5.3.2.1	<i>Alocação de potências privadas com potência comum nula</i>	45
5.3.3	<i>Otimização dos valores de potência entre as subportadoras</i>	45
6	RESULTADOS	48
6.1	Primeira solução proposta	48
6.2	Segunda solução proposta	51
7	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

A indústria das telecomunicações é uma das mais dinâmicas e fundamentais para o desenvolvimento tecnológico global. A interconectividade que as telecomunicações proporcionam é vital para praticamente todos os setores, desde a saúde até a educação, passando pela indústria e pelo comércio. Com o advento das tecnologias de quinta geração (5G), estamos presenciando uma transformação significativa na forma como os dados são transmitidos e recebidos, aumentando a vazão de dados, a capacidade e a confiabilidade das redes móveis, impulsionadas pela necessidade de atender a um número crescente de usuários e a demanda por taxas de dados cada vez maiores. Segundo o *Ericsson Mobility Report* (ERICSSON, 2024), publicado em junho de 2024, as assinaturas de 5G aumentaram em 160 milhões durante o primeiro trimestre de 2024 atingindo um total de 1,7 bilhões de assinaturas e espera-se que esse número chegue a 5,6 bilhões até 2029.

A rápida adoção dessas tecnologias abre uma gama de oportunidades e desafios para a indústria de telecomunicações. Entre as oportunidades, destacam-se a possibilidade de implementação de aplicações inovadoras como a Internet das Coisas ou, do inglês, *Internet of Things* (IoT), veículos autônomos e cidades inteligentes. Estas aplicações dependem de uma infraestrutura de rede robusta, com baixa latência e alta capacidade de transmissão de dados, características que as redes 5G e *Beyond 5G* (B5G) prometem oferecer. Além disso, essas redes têm o potencial de revolucionar a telemedicina, a educação à distância e o trabalho remoto, proporcionando experiências mais interativas e eficientes.

Por outro lado, os desafios são igualmente significativos. A implementação dessas redes avançadas requer investimentos massivos em infraestrutura, incluindo a instalação de milhares de pequenas células para garantir cobertura adequada, especialmente em áreas urbanas densas. Além disso, a necessidade de gerenciar a crescente complexidade da rede, com a integração de diversas tecnologias e dispositivos, apresenta um obstáculo considerável que as operadoras de telecomunicações precisam superar.

A necessidade de novas tecnologias e abordagens para superar esses desafios é evidente. Inovações em *hardware*, como antenas inteligentes e algoritmos avançados de gerenciamento de rede, são essenciais para otimizar o desempenho e a eficiência das redes 5G e B5G. Nesse contexto, o *Rate-Splitting Multiple Access* (RSMA) emerge como uma abordagem inovadora e promissora para enfrentar as limitações das tecnologias atuais.

O RSMA é uma técnica avançada de acesso múltiplo cuja ideia principal é a divisão

das mensagens dos usuários em partes comuns e privadas, proporcionando uma melhor utilização do espectro e aumento da eficiência do sistema. Esta técnica poderosa é capaz de generalizar alguns dos esquemas tradicionais utilizados em sistemas de comunicações móveis, como o *Non-Orthogonal Multiple Access* (NOMA) e o *Space Division Multiple Access* (SDMA) (CLERCKX *et al.*, 2020). Esta propriedade de generalização está relacionada com a capacidade do RSMA em decodificar e tratar parcialmente a interferência utilizando o algoritmo *Successive Interference Cancellation* (SIC).

As vantagens do RSMA são numerosas e significativas. Primeiramente, ele oferece uma melhora substancial na eficiência espectral, permitindo a transmissão de mais dados sem necessidade de aumentar a largura de banda. A eficiência espectral do RSMA sempre excede ou é igual à dos outros esquemas de acesso múltiplo, tanto para *Channel State Information at the Transmitter* (CSIT) perfeito quanto imperfeito (MAO *et al.*, 2022).

Outra vantagem do RSMA é sua capacidade de melhorar a equidade na distribuição de recursos entre os usuários. Trabalhos recentes (MAO *et al.*, 2020) (JOUDEH; CLERCKX, 2016a) mostraram um ganho substancial do RSMA sobre outros esquemas de acesso múltiplo ao comparar taxas obtidas utilizando justiça max-min, ou seja, a taxa que é obtida ao maximizar a pior taxa entre todos os os usuários. Adicionalmente, o ganho de desempenho do RSMA se torna mais evidente quando as taxas dos usuários estão sujeitas a restrições de *Quality of Service* (QoS) ou quando pesos maiores são atribuídos a usuários com condições de canal menos favoráveis quando se objetiva maximizar a soma ponderada das taxas (MAO *et al.*, 2018).

Ademais, o RSMA é bastante flexível, podendo ser utilizado em vários cenários, como casos com diversas direções e magnitudes de canais e diferentes cargas de rede (subcarregadas/sobrecarregadas). É uma estratégia poderosa que consegue gerenciar a interferência dos usuários proveniente de diferentes fontes de forma flexível. Ao contrário do NOMA, que cancela por completo a interferência no lado do receptor, e do SDMA que mitiga totalmente a interferência no lado do transmissor, o RSMA combina de maneira inteligente a mitigação de interferência tanto no transmissor quanto no receptor. Ajustando a quantidade de recursos alocados, o nível de interferência pode ser controlado de forma flexível em ambos os lados.

No entanto, o estudo do RSMA ainda está em seu início e é necessário mais estudos para enfrentar os desafios atuais e melhorar seu desempenho. Segundo (MISHRA *et al.*, 2022), alguns destes desafios são a investigação de *designs* alternativos ao SIC para reduzir a complexidade do receptor no *downlink* e a elaboração de métodos de baixa complexidade para determinar

taxas de divisão de mensagens e alocação de potência que reduzam a sobrecarga de sinalização no *uplink*.

1.1 Objetivos do trabalho

Este trabalho objetiva apresentar o esquema de acesso múltiplo RSMA detalhando seu funcionamento e aplicando-o em um cenário *downlink* com múltiplos usuários a fim de estudar um problema de alocação de recursos. O cenário proposto baseia-se em um modelo definido em um artigo (CLERCKX *et al.*, 2020) que considera apenas dois usuários, estendendo-o para um ambiente com um número maior de usuários, utilizando-se de subportadoras para associar pares de usuários. Essa generalização permitirá uma análise mais abrangente e representativa dos benefícios do RSMA em redes complexas. O problema de alocação de recursos estudado tem como objetivo a maximização das taxas dos usuários ponderadas por pesos que servem como meio de garantir justiça na distribuição de recursos. Por fim, o trabalho visa desenvolver soluções de baixa complexidade para o problema de otimização proposto.

1.2 Estrutura do documento

Neste primeiro capítulo foi feita uma breve introdução e motivação sobre o RSMA. O capítulo 2 apresenta os detalhes do funcionamento do RSMA e, para comparação, as tecnologias NOMA e SDMA, que são os extremos em termos de tratamento de interferência. No final do capítulo 2, é feita uma revisão literária dos principais artigos relacionados ao tema deste trabalho. O capítulo 3 revisa conceitos abordados em Pesquisa Operacional e Programação Linear que foram utilizados no estudo do problema de otimização proposto. No capítulo 4, define-se um modelo de sistema RSMA detalhando o desenvolvimento das expressões para as taxas de transmissão a partir de premissas simplificadoras e em seguida é formulado o problema de otimização. Na sequência, o capítulo 5 apresenta duas soluções propostas para resolução do problema, onde a primeira foi publicada no artigo mencionado na seção 1.3 de contribuições científicas e a segunda é uma extensão da primeira removendo restrições impostas para reduzir o número de variáveis. Uma análise dos ganhos incrementais de desempenho das etapas que constituem as soluções é feita no capítulo 6. Finalmente, no capítulo 7, são feitas as considerações finais com as conclusões obtidas a partir deste trabalho.

1.3 Contribuições científicas

Parte das contribuições deste trabalho foram publicadas no seguinte artigo: J. A. De Castro e F. R. M. Lima, *Subcarrier Assignment, User Matching and Power Allocation for Weighted Sum-Rate Maximization with RSMA*. 2022 *Global Information Infrastructure and Networking Symposium (GIIS)*, Argostoli, Grécia, 2022.

2 CONTEXTO

Nas últimas décadas, técnicas de acesso múltiplo, como SDMA e NOMA, despertaram o interesse da comunidade acadêmica e foram temas de diversos artigos. O SDMA explora a separação espacial dos usuários, enquanto o NOMA adota a sobreposição de sinais e a decodificação sucessiva. No entanto, ambas apresentam limitações inerentes a suas abordagens extremas de gerenciamento de interferência. Surge então o RSMA, uma abordagem mais versátil que generaliza e aprimora os princípios de SDMA e NOMA, oferecendo uma alternativa promissora ao balancear a complexidade e o desempenho, como evidenciado na literatura recente. Este capítulo apresenta a forma como o SDMA e NOMA gerenciam a interferência na seção 2.1 e define o RSMA na seção 2.2, tendo como base o trabalho (MAO *et al.*, 2018). A seção 2.3 mostra como o RSMA generaliza o SDMA e o NOMA utilizando um cenário com dois usuários. Finalmente, na seção 2.4 é feita uma revisão literária dos principais estudos relacionados ao tema deste trabalho.

As seções 2.1 e 2.2 consideram um sistema *downlink* do tipo *Multiple-Input Single-Output* (MISO), onde uma Estação Rádio Base (ERB) com N_t antenas atende J usuários com apenas uma antena. Os usuários são indexados pelo conjunto $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$ e o canal entre um usuário j e a ERB é representado por $\mathbf{h}_j \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$. Ao utilizar o canal MISO, as mensagens transmitidas são pré-codificadas por pré-codificadores pertencentes ao conjunto $\mathbb{C}^{M_t \times 1}$. Sem perda de generalidade, assume-se que a variância do ruído branco é igual a 1 para todos os usuários, pois a variância σ_j^2 do ruído em um usuário j pode ser incorporada no canal mediante uma normalização pelo desvio padrão σ_j . Ademais, assume-se que o SIC utilizado no NOMA e no RSMA é perfeito e que a largura de banda disponível ao sistema é unitária, ou seja, seu valor é 1 Hz.

2.1 SDMA e NOMA

Esta seção apresenta de forma sucinta como os esquemas de acesso múltiplo SDMA e NOMA tratam a interferência causada pelos próprios usuários. Para isso será definido o modelo de transmissão e as expressões para a razão entre o sinal e a interferência mais o ruído ou, do inglês, *Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio* (SINR), para então definirmos a taxa alcançável de cada usuário.

2.1.1 SDMA

O SDMA é um esquema de acesso múltiplo bem consolidado e simples de definir. Cada usuário $j \in \mathcal{J}$ somente decodifica a mensagem que lhe é destinada, tratando toda a interferência como ruído. A SINR no usuário j é dada por

$$\text{SINR}_j = \frac{|\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_j|^2}{1 + \sum_{k \neq j, k \in \mathcal{J}} |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_k|^2}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{p}_j é o pré-codificador da sequência de dados do usuário j . A taxa alcançável do usuário j é dada por $R_j = \log_2(1 + \text{SINR}_j)$.

2.1.2 NOMA

O NOMA é o extremo oposto do SDMA em termos de tratamento de interferência. O NOMA depende de codificação por superposição no transmissor e SIC nos receptores. Para garantir melhores taxas para os usuários, é necessário considerar todas as ordens de decodificação dos usuários. Uma dessas ordens de decodificação é denotada por π e $\pi(k)$ representa o k -ésimo usuário a ser decodificado. Considerando essa ordem de decodificação, a mensagem de um usuário $\pi(k)$, $\forall k \leq i$ é decodificada no usuário $\pi(i)$ utilizando SIC. A SINR no usuário $\pi(i)$ para decodificar a mensagem do usuário $\pi(k)$, $\forall k \leq i$ é dada por

$$\text{SINR}_{\pi(i) \rightarrow \pi(k)} = \frac{|\mathbf{h}_{\pi(i)}^H \mathbf{p}_{\pi(k)}|^2}{1 + \sum_{j > k, j \in \mathcal{J}} |\mathbf{h}_{\pi(i)}^H \mathbf{p}_{\pi(j)}|^2}. \quad (2.2)$$

Para garantir que as mensagens dos usuários sejam decodificadas corretamente no SIC, a taxa alcançável de um usuário $\pi(k)$ é dada por

$$R_{\pi(k)} = \min_{i \geq k} (\log_2(1 + \text{SINR}_{\pi(i) \rightarrow \pi(k)})). \quad (2.3)$$

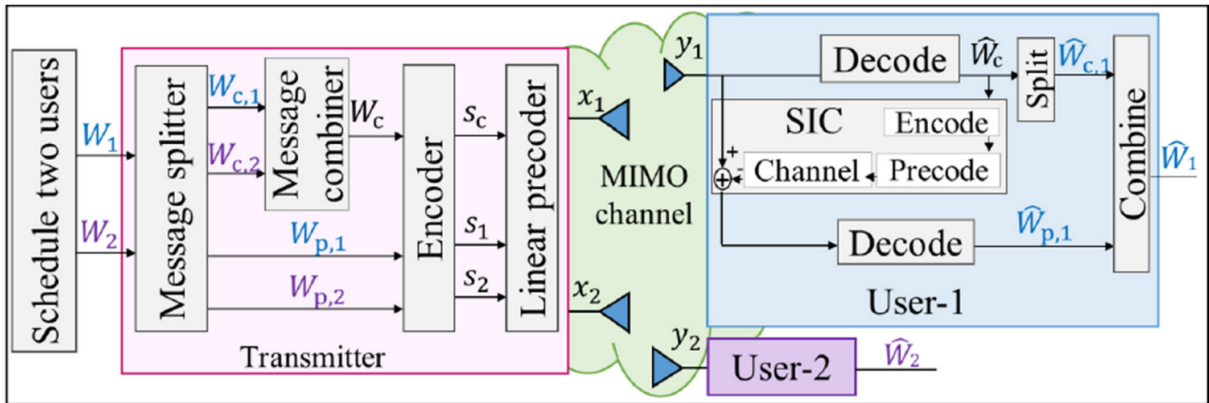
2.2 RSMA

Nessa seção será detalhado o modelo de transmissão do RSMA. A ideia será introduzida para os casos de dois e três usuários, e ao final dessa seção será definido o caso geral.

2.2.1 Caso com dois usuários

A Figura 1 sintetiza o modelo de transmissão e recepção descrito nessa seção. Sejam W_1 e W_2 as mensagens a serem transmitidas para os usuários 1 e 2, respectivamente. As

Figura 1 – Modelo de transmissão e recepção para dois usuários



Fonte: (CLERCKX *et al.*, 2020)

mensagens de cada usuário são divididas em uma parte comum e uma parte privada. A primeira mensagem é dividida em $\{W_{c,1}, W_{p,1}\}$ e a segunda mensagem é dividida em $\{W_{c,2}, W_{p,2}\}$. As partes comuns $\{W_{c,1}, W_{c,2}\}$ são combinadas na mensagem comum W_c . Em seguida, as mensagens privadas $W_{p,1}$ e $W_{p,2}$ são codificadas nas sequências de dados s_1 e s_2 e a mensagem comum W_c é codificada na sequência de dados s_c . Concluindo o processamento no lado do transmissor, as sequências de dados são pré-codificadas linearmente através dos pré-codificadores \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{p}_c . O sinal resultante transmitido é $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 s_1 + \mathbf{p}_2 s_2 + \mathbf{p}_c s_c$.

No lado dos receptores, cada usuário j primeiro decodifica a sequência de dados s_c tratando a interferência de s_1 e s_2 como ruído, resultando na mensagem \hat{W}_c . Utilizando SIC, \hat{W}_c é codificado novamente, pré-codificado e removido do sinal original que foi recebido. Na sequência, o usuário j decodifica a sequência de dados privada s_j na mensagem $\hat{W}_{p,j}$ tratando a interferência da sequência de dados privada do outro usuário como ruído. Finalmente, o usuário j reconstrói a mensagem original extraindo a mensagem $\hat{W}_{c,j}$ de \hat{W}_c e combinando com $\hat{W}_{p,j}$, resultando em \hat{W}_j .

Para a sequência comum s_c , as sequências s_1 e s_2 são tratadas como interferência. Logo, a SINR dessa sequência, em um usuário j , é dada por

$$\text{SINR}_j^c = \frac{|\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_c|^2}{1 + |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_2|^2}. \quad (2.4)$$

Para a sequência privada do usuário j , a sequência privada do usuário $k \neq j$ é tratada como interferência. Portanto, a SINR da sequência privada do usuário j é dada por

$$\text{SINR}_j^p = \frac{|\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_j|^2}{1 + |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_k|^2}. \quad (2.5)$$

As taxas alcançáveis do usuário j para as sequências comum e privada são $R_{c,j} = \log_2(1 + \text{SINR}_j^c)$ e $R_{p,j} = \log_2(1 + \text{SINR}_j^p)$, respectivamente. Para garantir que a sequência

comum seja decodificada por ambos os usuários, a taxa comum alcançável não pode ser maior que $R_c = \min(R_{c,1}, R_{c,2})$. A parcela da taxa comum alcançável que corresponde a um usuário j é denotada por C_j e seu valor depende da razão da mensagem $W_{c,j}$ que compõe a mensagem W_c . A soma das parcelas satisfazem $C_1 + C_2 = R_c$. Com essa definição, a taxa total alcançável de um usuário j é $R_{j,tot} = C_j + R_{p,j}$.

2.2.2 Caso com três usuários

No caso com três usuários, as mensagens dos usuários são divididas em 4 partes. A mensagem do usuário 1 é dividida em $\{W_1^{123}, W_1^{12}, W_1^{13}, W_1^1\}$, a mensagem do usuário 2 é dividida em $\{W_2^{123}, W_2^{12}, W_2^{23}, W_2^2\}$ e a mensagem do usuário 3 é dividida em $\{W_3^{123}, W_3^{13}, W_3^{23}, W_3^3\}$. Nessa notação, os índices sobrescritos indicam os grupos de mensagens que são combinados e codificados em uma única sequência de dados. Por exemplo, as mensagens W_1^{123} , W_2^{123} e W_3^{123} são combinadas e codificadas na sequência comum s_{123} , e as mensagens W_1^{12} e W_2^{12} são codificadas na sequência parcialmente comum s_{12} . A sequência s_{12} é endereçada aos usuários 1 e 2, logo, será decodificada por esses usuários. Já o usuário 3 decodifica as mensagens endereçadas a ele tratando s_{12} como ruído. Após o processamento de codificação das sequências de dados, tem-se o processo de pré-codificação linear através dos pré-codificadores $\{\mathbf{p}_{123}, \mathbf{p}_{12}, \mathbf{p}_{13}, \mathbf{p}_{23}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

O processo de transmissão para três usuários é tão simples quanto para dois usuários, a principal diferença é o número de vezes em que as mensagens são divididas. Porém, o processo de recepção se torna mais complexo. Isso se deve à decodificação das sequências parcialmente comuns, que necessitam introduzir uma ordem de decodificação para garantir valores melhores de taxas alcançáveis.

Define-se S_r como o conjunto de sequências de dados que são decodificados por r usuários. Assim, as sequências que pertencem a S_2 e são decodificadas pelo usuário 1 são s_{12} e s_{13} . Escolhendo o usuário 1 como exemplo para ilustrar o processo de decodificação, tem-se que este usuário decodifica as sequências de dados s_{123} , s_{12} , s_{13} e s_1 utilizando SIC enquanto trata as demais sequências como ruído. A decodificação inicia a partir da sequência comum, a única em S_3 . Depois, prossegue para as sequências em S_2 e finaliza nas sequências privadas em S_1 . O usuário 1 primeiro decodifica a sequência s_{123} sofrendo interferência de todas as outras sequências. A SINR para esse caso é

$$\text{SINR}_1^{123} = \frac{|\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{123}|^2}{1 + \sum_{i \in \{12, 13, 23\}} |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_i|^2 + \sum_{k=1}^3 |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_k|^2}. \quad (2.6)$$

No próximo passo, o usuário 1 decodifica as sequências s_{12} e s_{13} tratando s_{23} como ruído. Existem duas ordens em que isso pode ocorrer, decodificando s_{12} e depois s_{13} ou na ordem reversa. Denota-se $\pi_{r,j}$ como uma ordem de decodificação para decodificar sequências de S_r no usuário j , e $\pi_{r,j,(i)}$ como o i -ésimo elemento da ordem de decodificação $\pi_{r,j}$. Por exemplo, as possíveis ordens de decodificação $\pi_{2,1}$ são $12 \rightarrow 13$ e $13 \rightarrow 12$. Considerando a primeira ordenação, tem-se que $\pi_{2,1,(1)} = 12$ e $\pi_{2,1,(2)} = 13$. Com essa notação, as SINRs para decodificar as sequências de dados $s_{\pi_{2,1,(1)}}$ e $s_{\pi_{2,1,(2)}}$ no usuário 1 são

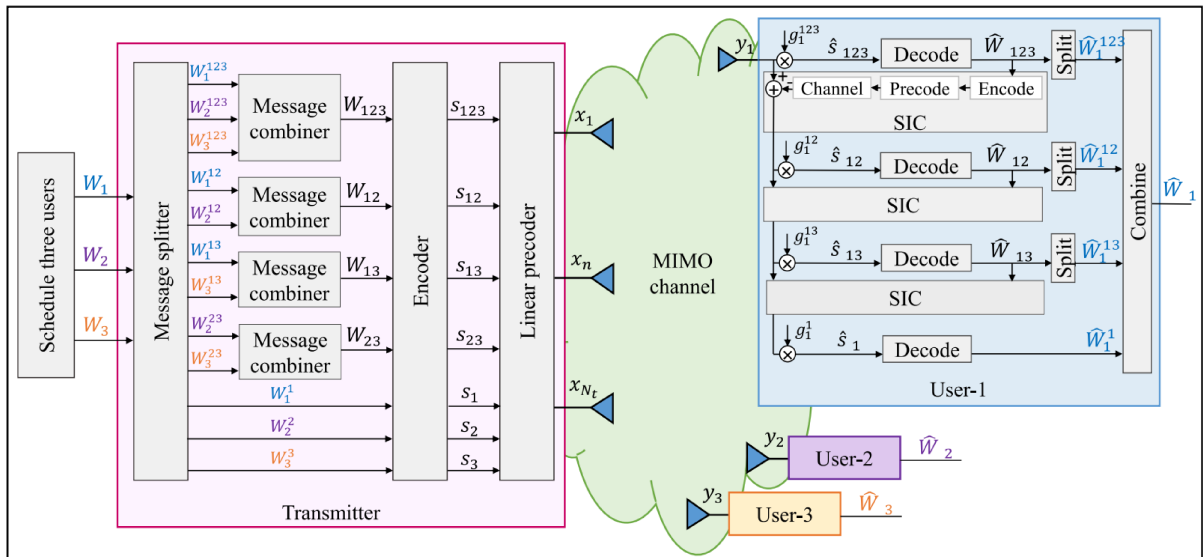
$$\begin{aligned} \text{SINR}_1^{\pi_{2,1,(1)}} &= \frac{|\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{\pi_{2,1,(1)}}|^2}{1 + |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{\pi_{2,1,(2)}}|^2 + |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{23}|^2 + \sum_{k=1}^3 |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_k|^2}, \\ \text{SINR}_1^{\pi_{2,1,(2)}} &= \frac{|\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{\pi_{2,1,(2)}}|^2}{1 + |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{23}|^2 + \sum_{k=1}^3 |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_k|^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Concluindo o processo de decodificação, o usuário 1 decodifica a sequência s_1 tratando as outras sequências como ruído. A SINR desse caso é dada por

$$\text{SINR}_1^1 = \frac{|\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_1|^2}{1 + |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_{23}|^2 + \sum_{k=2}^3 |\mathbf{h}_1^H \mathbf{p}_k|^2}. \quad (2.8)$$

A Figura 2 ilustra o modelo de transmissão e recepção para três usuários detalhando a decodificação no usuário 1 com a ordem de decodificação $\pi_{2,1}$.

Figura 2 – Modelo de transmissão e recepção para três usuários



Fonte: (MAO *et al.*, 2018)

As taxas para cada sequência de dados são calculadas utilizando a fórmula de Shannon com a SINR correspondente e são indexadas da mesma forma que a SINR. Como simplificação da notação, a taxa privada de um usuário j será escrita como R_j em vez de R_j^j . De

maneira similar ao caso com dois usuários, é necessário adicionar restrições para garantir que as sequências parcialmente comuns e a sequência comum possam ser decodificadas pelos grupos de usuários que as decodificam. O conjunto de equações (2.9) lista as restrições que definem os limites de taxas alcançáveis.

$$\begin{aligned}
R_{123} &= \min(R_1^{123}, R_2^{123}, R_3^{123}), \\
R_{12} &= \min(R_1^{12}, R_2^{12}), \\
R_{13} &= \min(R_1^{13}, R_3^{13}), \\
R_{23} &= \min(R_2^{23}, R_3^{23}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

As parcelas das taxas das sequências parcialmente comuns e da sequência comum que são alocadas para os os usuários que decodificam tais sequências, são indexadas seguindo o mesmo estilo de indexação das SINRs. Por exemplo, C_1^{123} é a parcela da taxa comum R_{123} alocada ao usuário 1. As parcelas das taxas de sequências são tais que o conjunto de equações (2.10) é satisfeito.

$$\begin{aligned}
C_1^{123} + C_2^{123} + C_3^{123} &= R_{123}, \\
C_1^{12} + C_2^{12} &= R_{12}, \\
C_1^{13} + C_3^{13} &= R_{13}, \\
C_2^{23} + C_3^{23} &= R_{23}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Concluindo essa seção, as taxas totais dos usuários são dadas por

$$\begin{aligned}
R_{1,\text{tot}} &= C_1^{123} + C_1^{12} + C_1^{13} + R_1, \\
R_{2,\text{tot}} &= C_2^{123} + C_2^{12} + C_2^{23} + R_2, \\
R_{3,\text{tot}} &= C_3^{123} + C_3^{13} + C_3^{23} + R_3.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2.3 Caso geral

Para cada subconjunto de usuários $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}$ é transmitida uma sequência de dados $s_{\mathcal{A}}$, que é decodificada por todos os usuários em \mathcal{A} , enquanto é tratada como ruído pelos usuários que não pertencem a esse subconjunto. A mensagem de um usuário j é dividida em $\{W_j^{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}, j \in \mathcal{B}\}$. As mensagens $\{W_k^{\mathcal{A}} : k \in \mathcal{A}\}$ com o mesmo índice sobrescrito são combinadas e codificadas na sequência de dados $s_{\mathcal{A}}$ e são pré-codificadas pelo pré-codificador $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$.

Na recepção do sinal, cada usuário utiliza SIC para decodificar as sequências de dados destinadas a ele. A decodificação começa com a sequência comum em S_j e prossegue até

as sequências privadas em S_1 . O conjunto de sequências de S_r que são decodificadas em um usuário j é definido como $S_{r,j} = \{s_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}, j \in \mathcal{B}, s_{\mathcal{B}} \in S_r\}$. Utilizando a notação para ordens de decodificação $\pi_{r,j,(i)}$ da seção 2.2.2, a SINR do usuário j para decodificar a sequência $s_{\pi_{r,j,(i)}}$ é dada por

$$\text{SINR}_j^{\pi_{r,j,(i)}} = \frac{|\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_{\pi_{r,j,(i)}}|^2}{1 + I_{\pi_{r,j,(i)}} + I_{r,j} + I_j}, \quad (2.12)$$

onde as parcelas de interferência são definidas como

$$\begin{aligned} I_{\pi_{r,j,(i)}} &= \sum_{k=j+1}^r |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_{\pi_{r,j,(k)}}|^2, \\ I_{r,j} &= \sum_{r'=1}^{r-1} \sum_{k=1}^{|S_{r',j}|} |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_{\pi_{r',j,(k)}}|^2, \\ I_j &= \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}, j \notin \mathcal{B}} |\mathbf{h}_j^H \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$I_{\pi_{r,j,(i)}}$ representa a interferência das sequências restantes $s_{\pi_{r,j,(i)}}$ de $S_{r,j}$ que não foram decodificadas. $I_{r,j}$ é a interferência das sequências de ordem inferior $s_{\pi_{r',j,(i)}}$ de $S_{r'}$, $\forall r' < r$ que vão ser decodificadas. I_j denota a interferência das sequências que não são direcionadas ao usuário j .

A taxa correspondente a uma sequência $s_{\mathcal{A}}$ de um usuário j é $R_j^{\mathcal{A}} = \log_2(1 + \text{SINR}_j^{\mathcal{A}})$. Para garantir que as sequências decodificadas por mais de um usuário tenham sucesso, a taxa de um usuário do subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}$, $|\mathcal{A}| \geq 2$, para decodificar a sequência $s_{\mathcal{A}}$ não deve ser superior a

$$R_{\mathcal{A}} = \min_k \left(R_k^{\mathcal{A}} : k \in \mathcal{A} \right). \quad (2.14)$$

A parcela da taxa $R_{\mathcal{A}}$ destinada ao usuário j é denotada por $C_k^{\mathcal{A}}$ e é válido que $\sum_{k \in \mathcal{A}} C_k^{\mathcal{A}} = R_{\mathcal{A}}$.

A taxa total do usuário j é dada por

$$R_{j,\text{tot}} = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}, j \in \mathcal{B}} C_j^{\mathcal{B}} + R_j. \quad (2.15)$$

2.3 Generalização do SDMA e NOMA

O RSMA se especializa no SDMA quando não é alocada potência para mensagens comuns. A mensagem W_k de um usuário k é codificada diretamente na sequência de dados privada s_k . Como não há mensagem comum aos usuários, não existe interferência a ser decodificada nos receptores. A interferência das mensagens privadas são tratadas totalmente como ruído. Para o RSMA se especializar no NOMA, é suficiente codificar totalmente a mensagem do k -ésimo

usuário a ser decodificado $W_{\pi(k)}$ na sequência de dados indexada pelo conjunto $\Pi_k = \{\pi(j) : J \geq j \geq k\}$ e não alocar potência para as demais sequências do conjunto S_{J-k+1} . A mensagem do primeiro usuário a ser decodificado $W_{\pi(1)}$ será codificada totalmente na sequência comum s_{Π_1} e a mensagem do último usuário a ser decodificado será codificada na sequência privada s_{Π_J} . Por exemplo, considerando 3 usuários com a ordem de decodificação $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, a mensagem do usuário 1 será codificada em s_{123} , a mensagem do usuário 2 será codificada em s_{23} e a mensagem do usuário 3 será codificada em s_3 . Não será alocada potência para s_1, s_2, s_{12} e s_{13} .

2.4 Revisão literária

Todos os trabalhos citados nessa seção são estudos que utilizam o RSMA. Em (MATTHIESEN *et al.*, 2021), os autores estudaram *designs* de pré-codificadores para problemas de otimização para maximizar a taxa total de dados ponderada e maximizar a eficiência energética. O cenário estudado considerou canais MISO em um sistema *downlink*. No trabalho (YANG *et al.*, 2020), foi considerado um problema de otimização com o objetivo de maximizar a taxa total de dados e com restrições de QoS no cenário *Single-Input Single-Output* (SISO). A alocação de potência e alocação de taxa para a mensagem comum foram otimizadas. Em (JOUDEH; CLERCKX, 2016b), um sistema *uplink* foi utilizado para estudar um problema de maximização da taxa total de dados ergódica assumindo informação imperfeita sobre o estado dos canais MISO. Os pré-codificadores foram projetados a partir da resolução de um problema de otimização de taxa estocástica. Os autores do trabalho (YANG *et al.*, 2019) estudaram um problema de maximização da taxa total de dados em um sistema *uplink*. Nesse trabalho, enquanto cada usuário ajusta sua potência de transmissão, a ERB deve determinar a ordem de decodificação das mensagens transmitidas pelos usuários. Em todos os trabalhos citados anteriormente, apenas uma subportadora foi assumida nos problemas de alocação de recursos. Entretanto, a transmissão utilizando múltiplas subportadoras é de suma importância nos sistemas de comunicação sem fio modernos. A alocação de recursos de múltiplas subportadoras é um problema relevante e de alta complexidade para esquemas de acesso não ortogonal. Além da associação de usuários às subportadoras, problemas de alocação de potência entre os usuários e suas mensagens comuns e privadas são acoplados pela restrição de potência total disponível ao sistema no *downlink*, o que aumenta drasticamente a complexidade do problema. Os autores do trabalho (LI *et al.*, 2020) propuseram um algoritmo de alocação de recursos para maximizar a soma total de dados de um sistema baseado em RSMA com múltiplas subportadoras. A solução proposta por eles consiste

em três etapas. A primeira determina a distribuição de potência para cada mensagem associada a uma única subportadora assumindo que a potência de transmissão do sistema é distribuída igualmente entre as subportadoras. Em seguida, as subportadoras são associadas aos usuários com base na alocação de potência encontrada no primeiro passo. O problema de associação das subportadoras para os usuários é resolvido utilizando o algoritmo Húngaro. Concluindo a solução do problema, a potência alocada para as subportadoras é atualizada através da otimização do problema de maximização da taxa total. Esse trabalho é o mais similar ao presente estudo, entretanto, a restrição assumida de uma única subportadora por usuário limita drasticamente a capacidade do sistema.

3 FERRAMENTAS DE PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional é uma disciplina fundamental que se dedica à aplicação de técnicas matemáticas e analíticas para resolver problemas complexos e otimizar processos. Desde seu desenvolvimento durante a Segunda Guerra Mundial, a pesquisa operacional tem sido crucial para a tomada de decisões estratégicas em diversos setores. Segundo (RODRIGUES *et al.*, 2014), a Pesquisa Operacional permite a modelagem e análise detalhada de sistemas complexos, contribuindo significativamente para a eficiência operacional e a eficácia na alocação de recursos. O campo busca não apenas entender e modelar problemas, mas também fornecer soluções práticas que podem ser implementadas em contextos do mundo real. Os métodos e técnicas de Pesquisa Operacional incluem uma variedade de abordagens para otimização e análise de sistemas. Dentre os métodos que são utilizados nesse trabalho destacam-se a Programação Linear, a Programação Linear Inteira Mista e a Programação Não Linear.

3.1 Programação Linear

De acordo com (PLOSCHAS; SAMARAS, 2014), a Programação Linear é talvez a mais importante e bem estudada classe de problemas de otimização. A Programação Linear é uma classe de problemas de otimização que buscam maximizar ou minimizar uma função objetivo linear sujeita a um conjunto de restrições lineares que podem ser definidas via equações ou inequações. Todos os problemas de Programação Linear podem ser formulados matematicamente na forma

$$\max_{\mathbf{x}} \text{ ou } \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{Ax} (\leq, =, \geq) \mathbf{b}, \quad (3.1b)$$

onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de coeficientes da função objetivo, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de variáveis de decisão, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de coeficientes das restrições e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de constantes das restrições.

Existem vários métodos para resolver problemas de programação linear, sendo dois dos mais conhecidos o método Simplex e o método dos Pontos Interiores. O método Simplex, desenvolvido por George Dantzig na década de 1940, é um algoritmo iterativo que percorre os vértices do poliedro definido pelas restrições lineares para encontrar a solução ótima. Esse método

é o mais utilizado para resolver problemas de Programação Linear (PLOSKAS; SAMARAS, 2014). O método Simplex é bastante eficaz em muitos problemas práticos e amplamente utilizado em várias aplicações industriais e comerciais. Para resolver um problema de Programação Linear utilizando o método Simplex, é necessário que o problema esteja formulado na seguinte forma padrão

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (3.2c)$$

onde os coeficientes e variáveis são definidos conforme a formulação geral, exceto o vetor de coeficientes da restrição de igualdade \mathbf{b} , cujas entradas devem ser não negativas, ou seja, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Todo problema de Programação Linear pode ser formulado de maneira equivalente na forma padrão através de um conjunto de transformações simples (SOLOW, 2014).

O método dos Pontos Interiores, introduzido por Narendra Karmarkar em 1984, é outra abordagem para resolver problemas de Programação Linear. Foi o primeiro algoritmo razoavelmente eficiente para resolver esses problemas em tempo polinomial (STRANG, 1987). Ao contrário do Simplex, que se move ao longo das bordas do poliedro, o método dos Pontos Interiores atravessa o interior do poliedro. Esse método é conhecido por sua eficiência em lidar com problemas de grande escala.

3.2 Programação Linear Inteira Mista

A Programação Linear Inteira Mista é uma extensão da Programação Linear que lida com problemas em que algumas ou todas as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros. Este tipo de problema é útil em muitas situações práticas onde a solução não pode ser uma fração, como em problemas de alocação de recursos, planejamento e otimização combinatória.

Os problemas de Programação Linear Inteira Mista são classificados como *NP-hard*. Isso significa que, na sua forma geral, não existe um algoritmo conhecido que possa resolver de maneira ótima todos os casos do problema em tempo polinomial. A dificuldade de resolver problemas *NP-hard* está relacionada com a complicação em encontrar uma solução ótima dentro de um número exponencial de possibilidades.

Dois dos métodos mais importantes para resolver problemas dessa classe são o *Branch and Bound* e o método do Plano de Corte. O método *Branch and Bound* funciona dividindo o problema original em subproblemas menores e explorando uma árvore de possibilidades para encontrar a solução ótima. Já o método do Plano de Corte é uma técnica que melhora a solução do problema adicionando restrições extras (cortes) para eliminar regiões que não contêm soluções inteiras, sem remover as soluções ótimas. Ao leitor interessado nos métodos citados, as leituras (LAND; DOIG, 1960) (WOLSEY, 2008) são sugeridas.

3.3 Problemas totalmente unimodulares

Alguns problemas de Programação Linear Inteira Mista podem possuir apenas soluções ótimas inteiras mesmo sem a condição de integralidade. Um problema com essa propriedade é chamado de totalmente unimodular. Uma condição suficiente para isso é garantir que toda submatriz quadrada da matriz de restrições tem determinante igual a -1 , 0 ou 1 . Essa condição é difícil de verificar manualmente em uma matriz genérica. Entretanto, o Teorema 3.3.1, encontrado no apêndice do trabalho (HELLER; TOMPKINS, 2016), fornece uma condição suficiente e fácil de verificar para garantir que uma matriz é totalmente unimodular. Esse teorema é utilizado na seção 5.2.1 deste trabalho de conclusão de curso.

Teorema 3.3.1 *Seja \mathbf{A} uma matriz m por n na qual as linhas podem ser particionadas em dois conjuntos disjuntos B e C . Se as seguintes propriedades são verificadas, então a matriz \mathbf{A} é totalmente unimodular:*

- a) Toda coluna de \mathbf{A} contém no máximo dois elementos não nulos;*
- b) Todo elemento de \mathbf{A} é -1 , 0 ou 1 ;*
- c) Se dois elementos não nulos de uma coluna em \mathbf{A} possuem o mesmo sinal, então a linha de um está em B e a outra está em C ;*
- d) Se dois elementos não nulos de uma coluna em \mathbf{A} possuem sinais opostos, então ambas as linhas estão em B ou ambas estão em C .*

4 MODELAGEM

Neste capítulo será definido um modelo para múltiplos usuários e múltiplas subportadoras utilizando RSMA. O modelo é baseado no trabalho (CLERCKX *et al.*, 2020) para dois usuários, sendo uma extensão para múltiplos usuários associando pares de usuários em subportadoras. No final do capítulo é formulado um problema de otimização para estudar o modelo definido.

4.1 Modelo do Sistema

Considera-se um sistema *downlink* composto por uma ERB posicionada no centro de uma célula de área circular com múltiplas antenas e um conjunto de terminais móveis com apenas uma antena distribuídos uniformemente ao redor da ERB. A largura de banda total do sistema é dividida igualmente entre as subportadoras disponíveis.

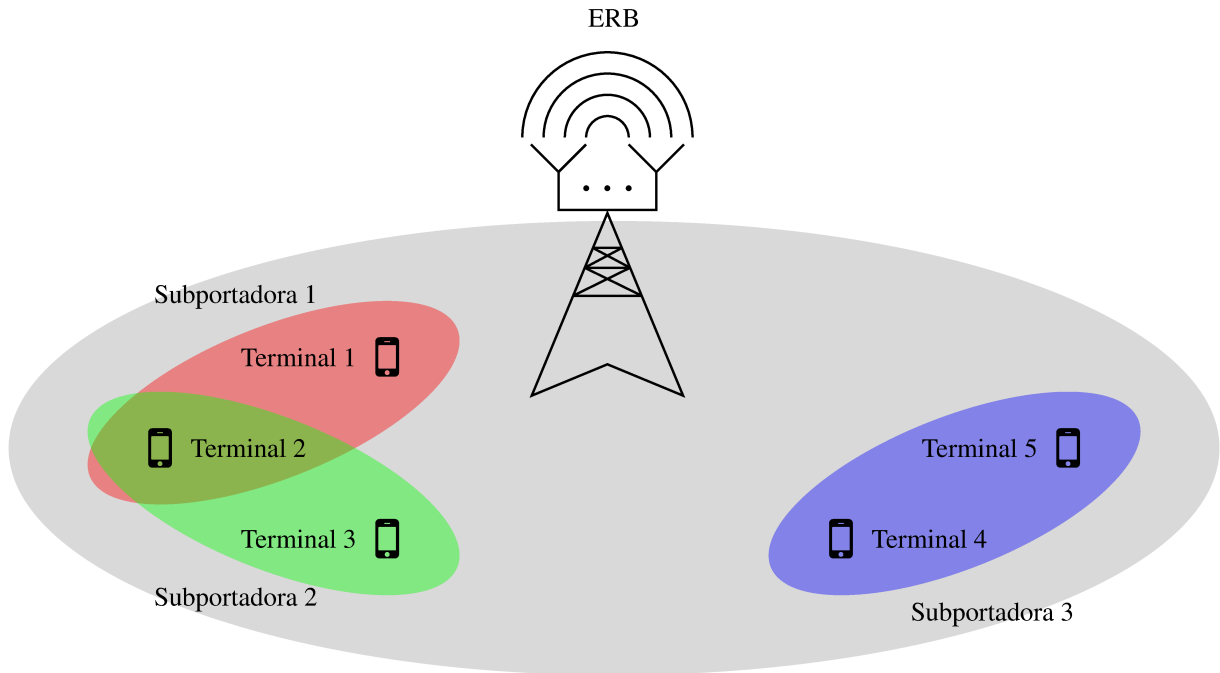
Para se obter um melhor desempenho do RSMA é necessário utilizar uma versão generalizada, como descrito no trabalho (MAO *et al.*, 2018) e apresentado na seção 2.2.3, que é capaz de providenciar maiores taxas e melhorias em QoS. Entretanto, de acordo com os autores do trabalho mencionado, a implementação desse mecanismo generalizado pode ser muito complexa, dado o alto número de camadas SIC e de mensagens comuns envolvidas.

Para superar esse desafio foi adotada a seguinte estratégia para simplificar o sistema: para cada subportadora se associa um único par de terminais móveis e utiliza-se um mecanismo *Rate-Splitting* (RS) para dois terminais móveis, baseado no trabalho de (CLERCKX *et al.*, 2020), para construir os pré-codificadores das mensagens privadas e da mensagem comum para cada par.

A Figura 3 ilustra o modelo do sistema. Nesse cenário em particular, tem-se 5 terminais móveis e 3 subportadoras. Na subportadora 1 está associado o par de terminais (1,2), na subportadora 2 está associado o par de terminais (2,3) e na subportadora 3 o par (4,5) está associado. Desconsiderando restrições de QoS, é coerente assumir que o terminal móvel 2 venha a ter uma taxa de dados maior que os demais terminais, dado que 2 subportadoras são alocadas para esse terminal. Porém, isso não pode ser garantido, já que a taxa de dados de um par depende do alinhamento dos canais dos terminais que compõem o par.

O conjunto de terminais móveis do sistema é representado pelo conjunto $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, J\}$, onde J é o número de terminais. O conjunto das subportadoras, cuja quantidade é

Figura 3 – Modelo do sistema



Fonte: Autoral.

N , é definido por $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$. O conjunto de todos os possíveis pares de usuários é dado por $\mathcal{P} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{J}, i < j\}$. O canal entre um usuário j , que utiliza a subportadora n , e a ERB é denotado por $\mathbf{h}_{n,j}$ e faz parte do conjunto $\mathbb{C}^{N_t \times 1}$, onde N_t é o número de antenas da ERB.

Seguindo o artigo base, e assumindo uma variação unitária para o ruído branco e SIC perfeito, a taxa privada $R_{n,i,j,1}$ do terminal i e a taxa privada $R_{n,i,j,2}$ do terminal j de um par de terminais (i, j) associado a uma subportadora n são dadas por

$$\begin{aligned} R_{n,i,j,1} &= \log_2 \left(1 + \frac{|\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2}{1 + |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2} \right), \\ R_{n,i,j,2} &= \log_2 \left(1 + \frac{|\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2}{1 + |\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{p}_{n,1}$ e $\mathbf{p}_{n,2}$ são, respectivamente, os pré-codificadores lineares privados associados ao primeiro e ao segundo terminais do par alocado na subportadora n . A taxa comum $R_{n,i,j,c}$ associada ao par na subportadora n é dada por

$$R_{n,i,j,c} = \min \left(\log_2 \left(1 + \frac{|\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2}{1 + |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2 + |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2} \right), \log_2 \left(1 + \frac{|\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2}{1 + |\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2 + |\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2} \right) \right), \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{p}_{n,c}$ é o pré-codificador linear comum associado ao par de terminais alocado na subportadora n .

Na sequência, o artigo base utiliza duas simplificações que fixam as direções dos pré-codificadores lineares. A primeira delas é a utilização de *Zero Forcing* (ZF) nos pré-codificadores privados com o objetivo de eliminar as parcelas de interferência $|\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2$ e $|\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2$. Essa simplificação é expressa pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2 &= 0, \\ |\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

que permitem explicitar a dependência das parcelas $|\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2$ e $|\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2$ com as potências alocadas para os pré-codificadores privados $P_{n,1} = \|\mathbf{p}_{n,1}\|^2$ e $P_{n,2} = \|\mathbf{p}_{n,2}\|^2$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2 &= \rho_{n,i,j} \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 P_{n,1}, \\ |\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2 &= \rho_{n,i,j} \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 P_{n,2}, \\ \rho_{n,i,j} &= 1 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A notação $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ representa o vetor \mathbf{h} normalizado. As constantes $\rho_{n,i,j}$ assumem valores no intervalo $[0, 1]$ e indicam o grau de alinhamento entre os canais $\mathbf{h}_{n,i}$ e $\mathbf{h}_{n,j}$. Para $\rho_{n,i,j} = 0$ os canais são paralelos e para $\rho_{n,i,j} = 1$ os canais são ortogonais. Utilizando essa simplificação e definindo $\gamma_{n,i,j,1}^2 = 1 + |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,1}|^2$, $\gamma_{n,i,j,2}^2 = 1 + |\mathbf{h}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,2}|^2$, $\tilde{\mathbf{h}}_{n,i} = \mathbf{h}_{n,i}/\gamma_{n,i,j,1}$ e $\tilde{\mathbf{h}}_{n,j} = \mathbf{h}_{n,j}/\gamma_{n,i,j,2}$, as taxas dadas pelas equações (4.1) e (4.2) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} R_{n,i,j,1} &= \log_2 (\gamma_{n,i,j,1}^2), \\ R_{n,i,j,2} &= \log_2 (\gamma_{n,i,j,2}^2), \\ R_{n,i,j,c} &= \min (\log_2 (1 + |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2), \log_2 (1 + |\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

A segunda simplificação utilizada no artigo base, fixa a direção do pré-codificador comum através da restrição de que essa direção maximize a taxa comum, ou seja, o pré-codificador comum deve ser solução do seguinte problema de otimização

$$\max_{\mathbf{p}_{n,c}} \min (\log_2 (1 + |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2), \log_2 (1 + |\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2)), \text{ sujeito a } \|\mathbf{p}_{n,c}\|^2 = P_{n,c}, \quad (4.6)$$

onde $P_{n,c}$ é a potência alocada ao pré-codificador comum. Como a função $\log_2(1+x)$ é crescente, a solução do problema (4.6) é a mesma que a do seguinte problema simplificado

$$\max_{\mathbf{p}_{n,c}} \min (|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2, |\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2), \text{ sujeito a } \|\mathbf{p}_{n,c}\|^2 = P_{n,c}. \quad (4.7)$$

Seguindo (HSIAO JIANN-CHING GUEY; CHEN, 2015), a solução do problema (4.7) é $\mathbf{p}_{n,c} = \sqrt{P_{n,c}} \mathbf{f}_{n,c}$, com a direção do pré-codificador comum $\mathbf{p}_{n,c}$ dada por

$$\mathbf{f}_{n,c} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mu_1 \tilde{\mathbf{h}}_{n,i} + \mu_2 \tilde{\mathbf{h}}_{n,j} e^{-j\angle \alpha_{12}}), \quad (4.8)$$

onde

$$\lambda = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - |\alpha_{12}|^2}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2|\alpha_{12}|},$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2|\alpha_{12}|} \begin{bmatrix} \alpha_{22} - |\alpha_{12}| \\ \alpha_{11} - |\alpha_{12}| \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12}^* & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \\ \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}^H \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{h}}_{n,i} \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}].$$

Essa solução tem a propriedade de que $|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,c}| = |\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}^H \mathbf{p}_{n,c}|$, o que permite a remoção da função min na expressão da taxa comum, escolhendo apenas um dos argumentos como seu valor. Utilizando o primeiro argumento, temos a seguinte expressão para a taxa comum

$$R_{n,i,j,c} = \log_2 (1 + |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{p}_{n,c}|^2) = \log_2 (1 + |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c}|^2 P_{n,c}). \quad (4.10)$$

Essa expressão oculta a dependência das potências alocadas para os pré-codificadores privados no fator $|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c}|^2$. Para expor essa dependência, é necessário calcular e substituir os valores dos coeficientes definidos em (4.9) na expressão (4.8) para então calcularmos o valor de $|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c}|^2$. Calculando os valores dos coeficientes obtemos

$$\alpha_{11} = \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2,$$

$$\alpha_{22} = \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}\|^2,$$

$$\alpha_{12} = \tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j} = |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}| e^{j\angle\alpha_{12}},$$

$$|\alpha_{12}| = |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|,$$

$$N = \rho \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 P_{n,c},$$

$$D = \gamma_{n,i,j,2}^2 \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 + \gamma_{n,i,j,1}^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 - 2\gamma_{n,i,j,1}\gamma_{n,i,j,2} |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{h}_{n,j}|, \quad (4.11)$$

$$c = \alpha_{11} + \alpha_{22} - 2|\alpha_{12}| = \frac{D}{\gamma_{n,i,j,1}^2 \gamma_{n,i,j,2}^2},$$

$$\lambda = \frac{\|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}\|^2 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|^2}{c} = \frac{\rho \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}\|^2}{c} = \frac{N}{c \gamma_{n,i,j,1}^2 \gamma_{n,i,j,2}^2} = \frac{N}{D P_{n,c}},$$

$$\mu_1 = \frac{\|\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}\|^2 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|}{c},$$

$$\mu_2 = \frac{\|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|}{c}.$$

Expandindo a expressão $\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c}$ temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mu_1 \tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,i} + \mu_2 \tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j} e^{-j\angle\alpha_{12}}), \\
\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mu_1 \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 + \mu_2 |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}| e^{j\angle\alpha_{12}} e^{-j\angle\alpha_{12}}), \\
\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mu_1 \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 + \mu_2 |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|), \\
\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c} &= \frac{1}{c\sqrt{\lambda}} ((\|\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}\|^2 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|) \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 + (\|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|) |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|), \\
\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c} &= \frac{1}{c\sqrt{\lambda}} (\|\tilde{\mathbf{h}}_{n,j}\|^2 \|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}\|^2 - |\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \tilde{\mathbf{h}}_{n,j}|^2), \\
\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c} &= \frac{\rho_{n,i,j} \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2}{\gamma_{n,i,j,2}^2 \gamma_{n,i,j,1}^2 c\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda D}{D\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Assim, concluímos que $|\tilde{\mathbf{h}}_{n,i}^H \mathbf{f}_{n,c}|^2 = \lambda$, logo a expressão da taxa comum pode ser reescrita como

$$R_{n,i,j,c} = \log_2 \left(1 + \frac{\rho_{n,i,j} \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 P_{n,c}}{\gamma_{n,i,j,2}^2 \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 + \gamma_{n,i,j,1}^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 - 2\gamma_{n,i,j,1} \gamma_{n,i,j,2} |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{h}_{n,j}|} \right). \tag{4.13}$$

É importante salientar que as derivações acima só são válidas se $D \neq 0$, o que é garantido por $\rho_{n,i,j} > 0$, já que nesse intervalo tem-se

$$\begin{aligned}
D &= \gamma_{n,i,j,2}^2 \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 + \gamma_{n,i,j,1}^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 - 2\gamma_{n,i,j,1} \gamma_{n,i,j,2} |\mathbf{h}_{n,i}^H \mathbf{h}_{n,j}| \\
D &= \gamma_{n,i,j,2}^2 \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 + \gamma_{n,i,j,1}^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 - 2\gamma_{n,i,j,1} \gamma_{n,i,j,2} \|\mathbf{h}_{n,i}\| \|\mathbf{h}_{n,j}\| \sqrt{1 - \rho_{n,i,j}} \\
D &> \gamma_{n,i,j,2}^2 \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 + \gamma_{n,i,j,1}^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 - 2\gamma_{n,i,j,1} \gamma_{n,i,j,2} \|\mathbf{h}_{n,i}\| \|\mathbf{h}_{n,j}\| = (\gamma_{n,i,j,2} \|\mathbf{h}_{n,i}\| - \gamma_{n,i,j,1} \|\mathbf{h}_{n,j}\|)^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A condição $\rho_{n,i,j} > 0$ será de bastante utilidade para demonstrar resultados na seção 5.

4.2 Formulação do Problema de Otimização

O problema de otimização estudado neste trabalho objetiva maximizar a soma ponderada das taxas dos usuários por pesos, o que pode ser utilizado para diversas finalidades, como, por exemplo, garantir justiça entre os usuários com canais de baixa qualidade. Ao aumentar o peso atribuído a um usuário, a potência alocada para ele tende a aumentar e, conseqüentemente, a taxa que ele receberá será maior, o que pode ser usado para assegurar QoS. Para cada usuário $j \in \mathcal{J}$, $u_j > 0$ será o seu peso associado. As parcelas da taxa comum $R_{n,i,j,c}$, dedicadas ao primeiro e ao segundo usuário do par (i, j) , são denotadas pelas variáveis $C_{n,i,j,1}$ e $C_{n,i,j,2}$,

respectivamente, e estão sujeitas às seguintes restrições

$$\begin{aligned} C_{n,i,j,1} + C_{n,i,j,2} &= R_{n,i,j,c}, \\ C_{n,i,j,1} &\geq 0, \\ C_{n,i,j,2} &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para identificar se um par de usuários $(i, j) \in \mathcal{P}$ está associado a uma subportadora n , são definidas as variáveis de decisão binárias $x_{n,i,j}$, onde o valor será 1 caso o par esteja associado à subportadora e 0 caso contrário. Com a introdução dessas variáveis é possível definir a restrição de que um único par de usuários está associado a uma subportadora com o seguinte conjunto de equações

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} x_{n,i,j} = 1, \forall n \in \mathcal{N}. \tag{4.16}$$

Antes de definir a função objetivo do problema é necessário definir a taxa R_j que um usuário j recebe. Esta taxa consiste na soma da taxa privada e da taxa comum do usuário em todas as subportadoras em que ele está associado, e é dada pela seguinte equação

$$R_j = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{j-1} (R_{n,i,j,2} + C_{n,i,j,2}) \cdot x_{n,i,j} + \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{i=j+1}^J (R_{n,j,i,1} + C_{n,j,i,1}) \cdot x_{n,j,i}. \tag{4.17}$$

A primeira parcela da equação (4.17) são as taxas obtidas quando o usuário j é o segundo elemento do par (i, j) e a segunda parcela são as taxas obtidas quando ele é o primeiro elemento. Com essa definição a função objetivo do problema é dada por

$$W = \sum_{j \in \mathcal{J}} u_j \cdot R_j. \tag{4.18}$$

Avaliando as parcelas que compõem a função objetivo para um par fixo e uma subportadora fixa, reescreve-se a função objetivo em uma forma equivalente com apenas dois somatórios, iterando primeiro sobre as subportadoras e depois sobre os pares de usuário, com um único termo no somatório. A expressão resultante é a seguinte

$$W = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} (u_i \cdot (R_{n,i,j,1} + C_{n,i,j,1}) + u_j \cdot (R_{n,i,j,2} + C_{n,i,j,2})) \cdot x_{n,i,j}. \tag{4.19}$$

Para finalizar, é necessário definir uma restrição de potência total máxima que pode ser alocada. Esse valor total é denotado por P . Também é conveniente definir as variáveis auxiliares $P_n = P_{n,1} + P_{n,2} + P_{n,c}$ que representam a potência total alocada por subportadora. Com essa definição, a restrição é dada por

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n \leq P. \tag{4.20}$$

Reunindo todas as definições temos o seguinte problema de otimização

$$\max_{P_{n,1}, P_{n,2}, P_{n,c}, C_{n,i,j,1}, C_{n,i,j,2}, x_{n,i,j}} W \quad (4.21a)$$

$$C_{n,i,j,1} + C_{n,i,j,2} = R_{n,i,j,c}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i, j) \in \mathcal{P}, \quad (4.21b)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} x_{n,i,j} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (4.21c)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n \leq P, \quad (4.21d)$$

$$P_{n,1} \geq 0, P_{n,2} \geq 0, P_{n,c} \geq 0, \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.21e)$$

$$C_{n,i,j,1} \geq 0, C_{n,i,j,2} \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i, j) \in \mathcal{P}, \quad (4.21f)$$

$$x_{n,i,j} \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i, j) \in \mathcal{P}. \quad (4.21g)$$

As restrições extras (4.21e) e (4.21g) servem apenas para definir o domínio das variáveis que elas restringem. O problema (4.21) é composto por variáveis contínuas e inteiras e não é linear, logo, é classificado como problema da classe de Programação Não Linear Inteira Mista, que é conhecido por ser uma classe de problemas difíceis de resolver.

5 SOLUÇÕES PROPOSTAS

Este capítulo apresenta duas soluções propostas para o problema formulado no capítulo anterior. Primeiro é feita uma análise do problema na seção 5.1. Na sequência, a seção 5.2 descreve a solução que foi proposta na contribuição científica citada na introdução do presente trabalho. Finalmente, a seção 5.3 descreve a segunda solução sem as restrições impostas na primeira solução.

5.1 Análise do problema

A forma de representar a divisão da taxa comum entre os usuários de um par como parcelas é uma maneira comum na literatura (CLERCKX *et al.*, 2020) (LUO; MAO, 2023) (HIEU *et al.*, 2023). Entretanto, a representação equivalente em forma de fatores é mais interessante, pois ela move a expressão da taxa comum $R_{n,i,j,c}$ da restrição (4.21b) para a função objetivo, removendo a dependência de variáveis de alocação de potência desta restrição. Esta transformação de variáveis é dada por

$$C_{n,i,j,1} = \alpha_{n,i,j,1} \cdot R_{n,i,j,c}, \quad (5.1)$$

$$C_{n,i,j,2} = \alpha_{n,i,j,2} \cdot R_{n,i,j,c}.$$

Com esta representação, as restrições (4.21b) e (4.21f) se tornam

$$\alpha_{n,i,j,1} + \alpha_{n,i,j,2} = 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}, \quad (5.2)$$

$$\alpha_{n,i,j,1} \geq 0, \quad \alpha_{n,i,j,2} \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}.$$

E a função objetivo (4.19) é modificada para

$$W = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} (u_i \cdot R_{n,i,j,1} + u_j \cdot R_{n,i,j,2} + (\alpha_{n,i,j,1} \cdot u_i + \alpha_{n,i,j,2} \cdot u_j) \cdot R_{n,i,j,c}) \cdot x_{n,i,j}. \quad (5.3)$$

Utilizando este novo formato, vamos demonstrar que a restrição (4.21d) é atingida com igualdade, ou seja, toda a potência disponível é utilizada no sistema. Para isso, é suficiente provar que a função objetivo é crescente em alguma variável de alocação de potência. Para comprovar isso, suponha por absurdo que a solução ótima do problema fosse de tal maneira que a potência total utilizada é menor que a potência total disponível. Assim, existiria uma parcela $\Delta P > 0$ não alocada. Alocando esse valor para a variável de alocação de potência em que a função objetivo é crescente, o valor da função aumentaria, ou seja, um absurdo, já que se supôs que a solução era ótima. A variável de alocação de potência que nos permite caracterizar esse

comportamento crescente necessário é a da parte comum $P_{n,c}$. Calculando $\frac{\partial W}{\partial P_{n,c}}$ obtém-se

$$\frac{\partial W}{\partial P_{n,c}} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} (\alpha_{n,i,j,1} \cdot u_i + \alpha_{n,i,j,2} \cdot u_j) \cdot \frac{\partial R_{n,i,j,c}}{\partial P_{n,c}} \cdot x_{n,i,j}. \quad (5.4)$$

Utilizando a notação de (4.11) para o numerador (N) e o denominador (D) da fração na expressão de $R_{n,i,j,c} = \log_2(1 + N/D)$, o valor de $\frac{\partial R_{n,i,j,c}}{\partial P_{n,c}}$ é dado por

$$\frac{\partial R_{n,i,j,c}}{\partial P_{n,c}} = \frac{1}{\ln 2} \frac{\rho_{n,i,j} \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2}{N + D}. \quad (5.5)$$

Este valor não é negativo, portanto, a função objetivo é crescente em $P_{n,c}$, o que conclui a demonstração de que a restrição (4.21d) é atingida com igualdade.

Com estas considerações, o problema (4.21) é reescrito na seguinte forma equivalente

$$\max_{P_{n,1}, P_{n,2}, P_{n,c}, \alpha_{n,i,j,1}, \alpha_{n,i,j,2}, x_{n,i,j}} W \quad (5.6a)$$

$$\alpha_{n,i,j,1} + \alpha_{n,i,j,2} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}, \quad (5.6b)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} x_{n,i,j} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (5.6c)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n = P, \quad (5.6d)$$

$$P_{n,1} \geq 0, P_{n,2} \geq 0, P_{n,c} \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (5.6e)$$

$$\alpha_{n,i,j,1} \geq 0, \alpha_{n,i,j,2} \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}, \quad (5.6f)$$

$$x_{n,i,j} \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}. \quad (5.6g)$$

As restrições (5.6b), (5.6c) e (5.6d) são lineares nas variáveis de otimização, todavia, a função objetivo não é monótona nas variáveis de alocação de potência privada, muito menos côncava, o que mostra a complexidade do problema completo.

5.2 Primeira solução

Esta seção expõe a contribuição científica publicada em (CASTRO; LIMA, 2022). Inicialmente, a complexidade do problema (5.6) é reduzida fixando a classe de variáveis de alocação de potência para as mensagens comuns e privadas ($P_{n,1}$, $P_{n,2}$ e $P_{n,c}$) e a classe de

variáveis de divisão da taxa comum ($\alpha_{n,i,j,1}$ e $\alpha_{n,i,j,2}$) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} P_{n,1} = P_{n,2} = P_{n,3} &= \frac{P_n}{3}, \forall n \in \mathcal{N}, \\ \alpha_{n,i,j,1} = \alpha_{n,i,j,2} &= \frac{1}{2}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A primeira expressão divide a potência alocada para a portadora de maneira igualitária entre as três partes do par, já a segunda expressão divide a taxa comum em duas partes iguais. Com isso, o problema de otimização passa a ter duas classes de variáveis, a classe de alocação de potência por subportadora P_n e a classe de associação de pares às subportadoras $x_{n,i,j}$. Isto resulta no novo problema descrito por

$$\max_{P_n, x_{n,i,j}} W \quad (5.8a)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} x_{n,i,j} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (5.8b)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n = P, \quad (5.8c)$$

$$P_n \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (5.8d)$$

$$x_{n,i,j} \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}. \quad (5.8e)$$

A solução proposta para o problema (5.8) consiste em duas etapas. Primeiro, encontra-se a associação de pares às subportadoras $x_{n,i,j}$, assumindo que a potência total disponível seja distribuída uniformemente entre as subportadoras. Em seguida, a potência alocada para as subportadoras é otimizada utilizando um algoritmo baseado no método do gradiente.

5.2.1 Associação de pares às subportadoras

Fixando as variáveis $P_n = P/N$ no problema (5.8), tem-se o seguinte problema pertencente à classe de problemas de Programação Linear Inteira

$$\max_{x_{n,i,j}} W \quad (5.9a)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} x_{n,i,j} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (5.9b)$$

$$x_{n,i,j} \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}. \quad (5.9c)$$

Problemas dessa classe são geralmente difíceis de resolver, dado sua natureza combinatória. Entretanto, será mostrado que a forma matricial da restrição (5.9b) é totalmente unimodular. Portanto, o problema relaxado tem a mesma solução ótima que o problema original. O problema relaxado pertence à classe dos problemas de Programação Linear, cuja solução ótima pode ser encontrada através do algoritmo de Karmarkar com complexidade polinomial $O(l^{3.5})$, onde l é o número de variáveis de otimização (STRANG, 1987).

Para mostrar que a restrição (5.9b) é totalmente unimodular, devemos primeiro reescrevê-la na forma matricial. Essa forma será $\mathbf{Ax} = \mathbf{1}_{N \times 1}$, onde \mathbf{x} é um vetor composto pelas variáveis $x_{n,i,j}$ em alguma ordem e $\mathbf{1}_{N \times 1}$ é o vetor de tamanho $N \times 1$ com todos os elementos iguais a 1. Depois devemos verificar as quatro condições do Teorema 3.3.1 para a matriz \mathbf{A} . Para isso, é suficiente garantir as seguintes propriedades:

- a) Todo elemento de \mathbf{A} é 0 ou 1;
- b) Toda coluna de \mathbf{A} contém exatamente um elemento não nulo.

A propriedade a) é naturalmente garantida, uma vez que os elementos de \mathbf{A} indicam se uma variável $x_{n,i,j}$ está presente em um dos somatórios da restrição (5.9b), sendo seu valor 1 se estiver presente e 0 se não estiver. A propriedade b) segue do fato de que cada coluna de \mathbf{A} representa uma única variável $x_{n,i,j}$, e cada uma dessas variáveis aparece apenas uma vez nos somatórios desta restrição.

5.2.2 Alocação de potência entre as subportadoras

Fixando as variáveis $x_{n,i,j}$ no problema (5.8) com os valores encontrados na etapa anterior, chega-se ao seguinte problema da classe de problemas não lineares

$$\max_{P_n} W \quad (5.10a)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n = P, \quad (5.10b)$$

$$P_n \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}. \quad (5.10c)$$

Para resolver o problema (5.10), emprega-se o método iterativo do gradiente, no qual uma solução $\mathbf{P}^{(t)} = (P_1^{(t)}, \dots, P_N^{(t)})$ em uma iteração t é atualizada usando a direção do gradiente da função objetivo para obter a nova solução $\mathbf{P}^{(t+1)} = (P_1^{(t+1)}, \dots, P_N^{(t+1)})$. Por se tratar de um método iterativo, é necessário uma solução inicial $\mathbf{P}^{(0)}$. A solução inicial escolhida é a alocação

igualitária de potência, ou seja, $P_n^{(0)} = P/N$. Para simplificar a notação utilizada no cálculo das derivadas que constituem o gradiente, reescreve-se a função objetivo (5.3) como

$$W = \sum_{n \in \mathcal{N}} g_n(P_n), \quad (5.11)$$

onde $g_n(P_n)$ é dada por

$$g_n(P_n) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} (u_i \cdot R_{n,i,j,1} + u_j \cdot R_{n,i,j,2} + (\alpha_{n,i,j,1} \cdot u_i + \alpha_{n,i,j,2} \cdot u_j) \cdot R_{n,i,j,c}) \cdot x_{n,i,j}, \forall n \in \mathcal{N}. \quad (5.12)$$

O valor da derivada $\frac{\partial g_n}{\partial P_n}$ é calculado através de

$$\frac{\partial g_n}{\partial P_n} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} \left(u_i \cdot \frac{\partial R_{n,i,j,1}}{\partial P_n} + u_j \cdot \frac{\partial R_{n,i,j,2}}{\partial P_n} + (\alpha_{n,i,j,1} \cdot u_i + \alpha_{n,i,j,2} \cdot u_j) \cdot \frac{\partial R_{n,i,j,c}}{\partial P_n} \right) \cdot x_{n,i,j}, \forall n \in \mathcal{N}. \quad (5.13)$$

Onde as derivadas das taxas $\frac{\partial R_{n,i,j,1}}{\partial P_n}$, $\frac{\partial R_{n,i,j,2}}{\partial P_n}$ e $\frac{\partial R_{n,i,j,c}}{\partial P_n}$, são determinadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{n,i,j,1}}{\partial P_n} &= \frac{1}{\ln 2} \frac{\|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \rho_{n,i,j}/3}{1 + \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \rho_{n,i,j} P_n/3}, \\ \frac{\partial R_{n,i,j,2}}{\partial P_n} &= \frac{1}{\ln 2} \frac{\|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 \rho_{n,i,j}/3}{1 + \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 \rho_{n,i,j} P_n/3}, \\ \frac{\partial R_{n,i,j,c}}{\partial P_n} &= \frac{1}{\ln 2} \frac{(N'D - ND')}{D(N+D)} = \frac{1}{\ln 2} \frac{\rho_{n,i,j} \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2}{3D(N+D)} (D - P_n D'). \end{aligned} \quad (5.14)$$

É possível ignorar a restrição (5.10b) fixando uma variável qualquer P_k como $P - \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{k\}} P_n$, resultando na função objetivo $W_k = W(P_1, \dots, P_{k-1}, P - \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{k\}} P_n, \dots, P_N)$. Assim, as derivadas das variáveis que não foram fixadas são dadas por

$$\frac{\partial W_k}{\partial P_n} = \frac{\partial g_n}{\partial P_n} - \frac{\partial g_k}{\partial P_k}. \quad (5.15)$$

A expressão que atualiza os valores das variáveis que não foram fixadas na iteração t é a seguinte

$$P_n^{(t+1)} = P_n^{(t)} + \theta_t \cdot \frac{\partial W_k}{\partial P_n}, \quad (5.16)$$

onde $\theta_t > 0$ é um parâmetro utilizado para definir o tamanho do passo na iteração. Com valores apropriados de θ_t , o método converge para uma solução, todavia, as potências podem atingir valores negativos, o que viola a restrição (5.10c). Para contornar isso, verifica-se, em cada iteração, se a restrição foi violada. Se isso ocorrer, as variáveis envolvidas terão o seu valor fixado em 0. O Algoritmo 1 resume a solução proposta para o problema (5.8). O parâmetro ε é utilizado para determinar a tolerância de convergência da solução.

Algoritmo 1: Primeira solução proposta

Entrada: $\mathbf{h}_{n,j}$, P , u_j , θ_t e ε
x: Vetor das variáveis binárias $x_{n,i,j}$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $\forall (i,j) \in \mathcal{P}$.
 $\mathbf{P}^{(t)}$: Vetor das variáveis de potência $P_n^{(t)}$ na iteração t , $\forall n \in \mathcal{N}$.
 Inicializar iteração: $t = 0$, $P_n^{(0)} = P/N$, $\forall n \in \mathcal{N}$.
 Inicializar variável de potência fixada: $k = 1$.
 Inicializar conjunto de variáveis de potência nulas: $Z = \{\}$.
 Resolver a versão relaxada do problema (5.9) obtendo a associação ótima $x_{n,i,j}$ para potência igualitária.
while $t < 1$ or $|W(\mathbf{x}, \mathbf{P}^{(t)}) - W(\mathbf{x}, \mathbf{P}^{(t-1)})| > \varepsilon$ **do**
 for $n \in \mathcal{N} \setminus \{k\} \cup Z$ **do**
 $P_n^{(t+1)} = P_n^{(t)} + \theta_t \cdot \frac{\partial W_k}{\partial P_n}$
 end
 $Z = \{n \in \mathcal{N} : P_n^{(t+1)} < 0\}$
 for $n \in Z$ **do**
 $P_n^{(t+1)} = 0$
 end
 if $k \in Z$ **then**
 Defina k como elemento de $\mathcal{N} \setminus Z$
 end
 $P_k(t+1) = P - \sum_{n \neq k} P_n^{(t+1)}$
 $t = t + 1$
end
Saída: $x_{n,i,j}$ e P_n

5.3 Segunda solução

Esta seção apresenta uma proposta de solução mais completa, sem as simplificações iniciais (5.7) da primeira solução. Na primeira etapa é calculada a divisão ótima da taxa comum dos pares de usuários entre eles. Em seguida, a alocação de potência entre a mensagem comum e as mensagens privadas é calculada utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. Na sequência, a associação de pares às subportadoras é calculada da mesma forma que na primeira solução proposta, conforme a seção 5.2.1. Por fim, a alocação de potência entre as subportadoras é otimizada utilizando o método do gradiente, projetando a solução no conjunto viável, definido pelas restrições nas variáveis de potência por subportadora, a cada atualização do gradiente.

5.3.1 Divisão ótima da taxa comum

Deixando livre apenas a classe de variáveis de divisão da taxa comum ($\alpha_{n,i,j,1}$ e $\alpha_{n,i,j,2}$) no problema (5.6), tem-se o seguinte problema de otimização

$$\max_{\alpha_{n,i,j,1}, \alpha_{n,i,j,2}} W \quad (5.17a)$$

$$\alpha_{n,i,j,1} + \alpha_{n,i,j,2} = 1, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}, \quad (5.17b)$$

$$\alpha_{n,i,j,1} \geq 0, \alpha_{n,i,j,2} \geq 0, \forall n \in \mathcal{N}, \forall (i,j) \in \mathcal{P}. \quad (5.17c)$$

As parcelas das taxas privadas na função objetivo, expressa na equação (5.3), não tem contribuição para esse problema, pois, só dependem das variáveis de potência privada. Portanto, essas parcelas constantes podem ser ignoradas na função objetivo sem afetar a solução. Além disso, os fatores constantes que multiplicam as variáveis de divisão de taxa comum podem ser agrupados em constantes únicas, dadas por

$$b_{n,i,j,1} = u_i \cdot R_{n,i,j,c} \cdot x_{n,i,j}, \quad (5.18)$$

$$b_{n,i,j,2} = u_j \cdot R_{n,i,j,c} \cdot x_{n,i,j}.$$

Com isso, a nova função objetivo pode ser representada por

$$W = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} \alpha_{n,i,j,1} \cdot b_{n,i,j,1} + \alpha_{n,i,j,2} \cdot b_{n,i,j,2}. \quad (5.19)$$

A partir dessa nova função objetivo, observa-se que o problema (5.17) pode ser particionado em um conjunto de subproblemas indexados pela tupla de índices (n, i, j) . Cada subproblema utiliza um par de variáveis $\alpha_{n,i,j,1}$ e $\alpha_{n,i,j,2}$, e objetiva maximizar a parcela $\alpha_{n,i,j,1} \cdot b_{n,i,j,1} + \alpha_{n,i,j,2} \cdot b_{n,i,j,2}$ do objetivo (5.19). Além disso, todos esses subproblemas são equivalentes, diferindo apenas nos coeficientes $b_{n,i,j,1}$ e $b_{n,i,j,2}$. Logo, é suficiente resolver apenas o seguinte problema que representa essa classe de subproblemas

$$\max_{x,y} a \cdot x + b \cdot y \quad (5.20a)$$

$$x + y = 1, \quad (5.20b)$$

$$x \geq 0, y \geq 0. \quad (5.20c)$$

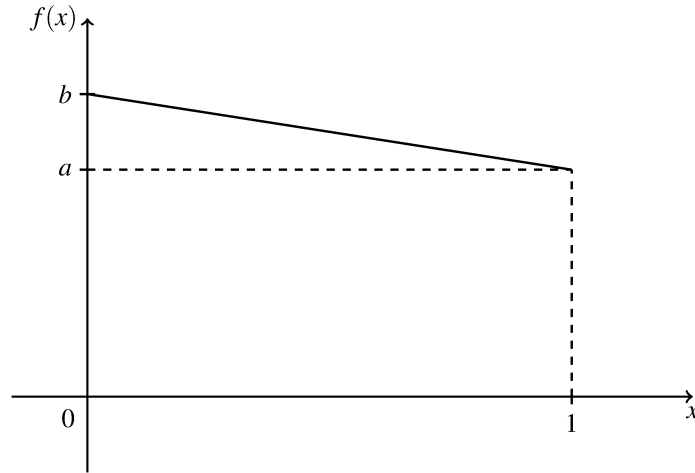
Para uma solução geométrica simples, a variável y é removida reescrevendo o problema (5.20) na forma equivalente com apenas uma variável, definido por

$$\max_x a \cdot x + b \cdot (1 - x) \quad (5.21a)$$

$$x \geq 0, x \leq 1. \quad (5.21b)$$

Analisando a Figura 4, onde é mostrado um esboço da função objetivo $f(x)$ em função de $x \in [0, 1]$, nota-se que a solução deve ser um dos extremos, 0 ou 1. Quando $a < b$, a solução é $x = 0$ e o valor da função objetivo é b , quando $a \geq b$, a solução é $x = 1$ e o valor da função

Figura 4 – Esboço da função objetivo do problema (5.21)



Fonte: Autoral.

objetivo é a . De outra forma, temos que o valor ótimo da função objetivo é $\max(a, b)$, e ele ocorre quando a variável associada ao coeficiente do valor máximo é 1.

Aplicando esse resultado no problema (5.17), obtém-se a solução ótima dada por

$$\alpha_{n,i,j,1} = \begin{cases} 0, & \text{se } u_i < u_j, \\ 1, & \text{se } u_i \geq u_j, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\alpha_{n,i,j,2} = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i < u_j, \\ 0, & \text{se } u_i \geq u_j. \end{cases}$$

Com essa solução, o valor da função objetivo resulta em

$$W = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{D}} (u_i \cdot R_{n,i,j,1} + u_j \cdot R_{n,i,j,2} + \max(u_i, u_j) \cdot R_{n,i,j,c}) \cdot x_{n,i,j}. \quad (5.23)$$

5.3.2 Alocação de potência entre a mensagem comum e as mensagens privadas de um par de usuários

A taxa total ponderada de um par de usuários (i, j) associado em uma subportadora n na função objetivo (5.23) é dada por

$$f_{n,i,j} = u_i \cdot R_{n,i,j,1} + u_j \cdot R_{n,i,j,2} + \max(u_i, u_j) \cdot R_{n,i,j,c}. \quad (5.24)$$

Para simplificar a notação, as seguintes definições são introduzidas

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= \max(u_i, u_j), \\
\rho_{n,i,j,1} &= \|\mathbf{h}_{n,i}\|^2 \rho_{n,i,j}, \\
\rho_{n,i,j,2} &= \|\mathbf{h}_{n,j}\|^2 \rho_{n,i,j}, \\
\sigma_{n,i,j} &= \sqrt{1 - \rho_{n,i,j}}, \\
w_{n,i,j,1}^2 &= \frac{1}{\rho_{n,i,j,1}} + P_{n,1}, \\
w_{n,i,j,2}^2 &= \frac{1}{\rho_{n,i,j,2}} + P_{n,2}, \\
\Omega_{n,i,j} &= \frac{1}{\rho_{n,i,j,1}} + \frac{1}{\rho_{n,i,j,2}} + P_n.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Com essas definições a taxa total ponderada de um par de usuários pode ser calculada como

$$f_{n,i,j} = u_i \cdot \log_2(\rho_{n,i,j,1} w_{n,i,j,1}^2) + u_j \cdot \log_2(\rho_{n,i,j,2} w_{n,i,j,2}^2) + u_{i,j} \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_{n,c}}{D}\right), \tag{5.26}$$

$$D = w_{n,i,j,1}^2 + w_{n,i,j,2}^2 - 2\sigma_{n,i,j} w_{n,i,j,1} w_{n,i,j,2}.$$

A restrição que limita a alocação de potência para as mensagens de um par ao total disponível por subportadora é reescrita como

$$h_{n,i,j} = w_{n,i,j,1}^2 + w_{n,i,j,2}^2 + P_{n,c} - \Omega_{n,i,j} = 0. \tag{5.27}$$

Para maximizar $f_{n,i,j}$ sujeito à restrição $h_{n,i,j} = 0$, aplica-se o método dos multiplicadores de Lagrange na forma $\nabla f_{n,i,j} = \frac{\lambda}{\ln 2} \nabla h_{n,i,j}$, obtendo, respectivamente, as seguintes equações para as variáveis $w_{n,i,j,1}$, $w_{n,i,j,2}$ e $P_{n,c}$

$$\frac{u_i}{w_{n,i,j,1}} - \frac{u_{i,j} P_{n,c}}{D(P_{n,c} + D)} (w_{n,i,j,1} - \sigma_{n,i,j} w_{n,i,j,2}) = \lambda w_{n,i,j,1}, \tag{5.28a}$$

$$\frac{u_j}{w_{n,i,j,2}} - \frac{u_{i,j} P_{n,c}}{D(P_{n,c} + D)} (w_{n,i,j,2} - \sigma_{n,i,j} w_{n,i,j,1}) = \lambda w_{n,i,j,2}, \tag{5.28b}$$

$$\frac{u_{i,j}}{P_{n,c} + D} = \lambda. \tag{5.28c}$$

Substituindo a equação (5.28c) nas demais equações e manipulando-as, obtém-se

$$w_{n,i,j,1}^2 = \frac{u_i}{\lambda} - \frac{P_{n,c}}{D} (w_{n,i,j,1}^2 - \sigma_{n,i,j} w_{n,i,j,1} w_{n,i,j,2}), \tag{5.29a}$$

$$w_{n,i,j,2}^2 = \frac{u_j}{\lambda} - \frac{P_{n,c}}{D} (w_{n,i,j,2}^2 - \sigma_{n,i,j} w_{n,i,j,1} w_{n,i,j,2}). \tag{5.29b}$$

$$\tag{5.29c}$$

Somando as equações (5.29a) e (5.29b) resulta em

$$w_{n,i,j,1}^2 + w_{n,i,j,2}^2 = \frac{u_i + u_j}{\lambda} - P_{n,c}. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.30) na restrição (5.27), obtém-se o valor de $1/\lambda$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\Omega_{n,i,j}}{u_i + u_j}. \quad (5.31)$$

Colocando os fatores $w_{n,i,j,1}^2$ e $w_{n,i,j,2}^2$ em evidência nas equações (5.29a) e (5.29b), respectivamente, e realizando a diferença, tem-se que

$$w_{n,i,j,1}^2 - w_{n,i,j,2}^2 = \frac{u_i - u_j}{\lambda} \frac{D}{P_{n,c} + D} = \frac{u_i - u_j}{\lambda} - \frac{u_i - u_j}{u_{i,j}} P_{n,c}. \quad (5.32)$$

A partir das equações (5.30) e (5.32) pode-se reescrever $w_{n,i,j,1}^2$ e $w_{n,i,j,2}^2$ em função de λ e $P_{n,c}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} w_{n,i,j,1}^2 &= \frac{u_i}{\lambda} - \frac{u_{i,j} + u_i - u_j}{2u_{i,j}} P_{n,c}, \\ w_{n,i,j,2}^2 &= \frac{u_j}{\lambda} - \frac{u_{i,j} - u_i + u_j}{2u_{i,j}} P_{n,c}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Utilizando os resultados das equações (5.30) e (5.31) para expandir o termo D na equação (5.28c) e manipulando o resultado, obtém-se

$$w_{n,i,j,1}^2 w_{n,i,j,2}^2 = \frac{(u_i + u_j - u_{i,j})^2}{4\sigma_{n,i,j}^2 \lambda^2}. \quad (5.34)$$

Substituindo as equações (5.33) em (5.34) e desenvolvendo os termos, leva à seguinte equação do segundo grau em $\lambda P_{n,c}/2$

$$a_{n,i,j} \left(\frac{\lambda P_{n,c}}{2} \right)^2 + b_{n,i,j} \left(\frac{\lambda P_{n,c}}{2} \right) + c_{n,i,j} = 0. \quad (5.35)$$

Onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_{n,i,j} &= 1 - \frac{(u_i - u_j)^2}{u_{i,j}^2}, \\ b_{n,i,j} &= \frac{(u_i - u_j)^2}{u_{i,j}} - (u_i + u_j), \\ c_{n,i,j} &= u_i u_j - \frac{(u_i + u_j - u_{i,j})^2}{4\sigma_{n,i,j}^2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Caso não existam soluções reais não negativas para a equação (5.35), o valor de $P_{n,c}$ é fixado em 0 e as potências privadas são alocadas conforme a seção 5.3.2.1. Caso contrário,

a potência comum alocada para o par será o menor valor obtido a partir dessas soluções. Os valores alocados para as potências privadas $P_{n,1}$ e $P_{n,2}$ são calculados utilizando as equações (5.33) com esse valor, resultando em

$$\begin{aligned} P_{n,1} &= -\frac{1}{\rho_{n,i,j,1}} + \frac{u_i}{\lambda} - \frac{u_{i,j} + u_i - u_j}{2u_{i,j}} P_{n,c}, \\ P_{n,2} &= -\frac{1}{\rho_{n,i,j,2}} + \frac{u_j}{\lambda} - \frac{u_{i,j} - u_i + u_j}{2u_{i,j}} P_{n,c}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.3.2.1 Alocação de potências privadas com potência comum nula

Quando o valor alocado para a potência comum é nulo, a taxa total ponderada de um par de usuários (5.24) resulta em

$$f_{n,i,j} = u_i \cdot \log_2(1 + \rho_{n,i,j,1} P_{n,1}) + u_j \log_2(1 + \rho_{n,i,j,2} P_{n,2}), \quad (5.38)$$

e a restrição da potência total disponível para a subportadora é dada por

$$h_{n,i,j} = P_{n,1} + P_{n,2} - P_n = 0. \quad (5.39)$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange na forma $\nabla f_{n,i,j} = \frac{\lambda}{\ln 2} \nabla h_{n,i,j}$, obtém-se, respectivamente, as seguintes equações para as potências privadas $P_{n,1}$ e $P_{n,2}$

$$\begin{aligned} \frac{u_i \rho_{n,i,j,1}}{1 + \rho_{n,i,j,1} P_{n,1}} &= \lambda, \\ \frac{u_j \rho_{n,i,j,2}}{1 + \rho_{n,i,j,2} P_{n,2}} &= \lambda. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações (5.39) e (5.40), o valor de $1/\lambda$ é dado pela mesma equação (5.31) do caso com potência comum não nula. As potências privadas são dadas por

$$\begin{aligned} P_{n,1} &= \frac{u_i}{\lambda} - \frac{1}{\rho_{n,i,j,1}}, \\ P_{n,2} &= \frac{u_j}{\lambda} - \frac{1}{\rho_{n,i,j,2}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.3.3 Otimização dos valores de potência entre as subportadoras

Nesta seção, assume-se que a associação de pares às subportadoras já foi calculada conforme a seção 5.2.1. Portanto, as tuplas de índices (n, i, j) consideradas nas expressões, são aquelas em que as variáveis binárias $x_{n,i,j}$ são iguais a 1. Considerando a alocação de potências para as mensagens de um par de usuários da seção 5.3.2, a taxa comum não depende do valor

da potência alocada para a subportadora, pois quando $P_{n,c} > 0$, a SINR da mensagem comum é dada por

$$\text{SINR}_{n,i,j,c} = 1 + \frac{P_{n,c}}{D} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda P_{n,c}}{u_{i,j}}}, \quad (5.42)$$

e o valor de $\lambda P_{n,c}$ é constante, já que depende apenas dos coeficientes definidos em (5.36). Devido a essa propriedade, a taxa comum pode ser omitida durante a otimização das potências entre as subportadoras. Além disso, a SINR de uma mensagem privada é linear na potência alocada P_n , assim, as taxas privadas ponderadas de um par de usuários pode ser expressa por

$$m_{n,i,j} = u_i \cdot \log_2(y_{n,i,j,1} + z_{n,i,j,1}P_n) + u_j \cdot \log_2(y_{n,i,j,2} + z_{n,i,j,2}P_n), \quad (5.43)$$

onde as constantes $y_{n,i,j,k}$ e $z_{n,i,j,k}$, $k = 1, 2$, são obtidas utilizando as expressões da seção 5.3.2. A derivada $\frac{dm_{n,i,j}}{dP_n}$ é dada por

$$\frac{dm_{n,i,j}}{dP_n} = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{u_i z_{n,i,j,1}}{y_{n,i,j,1} + z_{n,i,j,1}P_n} + \frac{u_j z_{n,i,j,2}}{y_{n,i,j,2} + z_{n,i,j,2}P_n} \right). \quad (5.44)$$

O método iterativo do gradiente desta seção utiliza também a alocação igualitária de potência como solução inicial. A expressão para atualizar os valores das variáveis em uma iteração t para a próxima iteração $t + 1$ é dada por

$$P_n^{(t+1)} = P_n^{(t)} + \theta_t \cdot \frac{dm_{n,i(n),j(n)}}{dP_n}, \quad (5.45)$$

onde $(i(n), j(n))$ é o par associado à subportadora n , e $\theta_t > 0$ é um parâmetro utilizado para definir o tamanho do passo na iteração.

Para garantir que a soma das potências alocadas às subportadoras não ultrapassem a potência total disponível ao sistema, os valores em cada iteração devem ser projetados no valor viável mais próximo para a restrição $\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n = P$. Como essa restrição é linear, isso pode ser feito multiplicando cada valor $P_n^{(t+1)}$ por $P / (\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n^{(t+1)})$.

O Algoritmo 2 sintetiza a segunda solução proposta para o problema (5.8). O parâmetro ε é similar ao utilizado no Algoritmo 1, e serve para determinar a tolerância de convergência da solução.

Algoritmo 2: Segunda solução proposta

Entrada: $\mathbf{h}_{n,j}$, P , u_j , θ_t e ε

\mathbf{x} : Vetor das variáveis binárias $x_{n,i,j}$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $\forall (i,j) \in \mathcal{P}$.

α : Vetor das variáveis de divisão da taxa comum $\alpha_{n,i,j}$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $\forall (i,j) \in \mathcal{P}$.

$\mathbf{P}^{(t)}$: Vetor das variáveis de potência $P_n^{(t)}$ na iteração t por subportadora, $\forall n \in \mathcal{N}$.

$\mathbf{P}_1^{(t)}$: Vetor das variáveis de potência $P_{n,1}^{(t)}$ para mensagem privada do primeiro usuário na iteração t por subportadora, $\forall n \in \mathcal{N}$.

$\mathbf{P}_2^{(t)}$: Vetor das variáveis de potência $P_{n,2}^{(t)}$ para a mensagem privada do segundo usuário na iteração t por subportadora, $\forall n \in \mathcal{N}$.

$\mathbf{P}_c^{(t)}$: Vetor das variáveis de potência $P_{n,c}^{(t)}$ para a mensagem comum na iteração t por subportadora, $\forall n \in \mathcal{N}$.

Inicializar iteração: $t = 0$, $P_n^{(0)} = P/N$, $\forall n \in \mathcal{N}$.

Calcular os valores ótimos de divisão de taxa α conforme a equação (5.22).

Calcular as potências $\mathbf{P}_1^{(0)}$, $\mathbf{P}_2^{(0)}$ e $\mathbf{P}_c^{(0)}$ utilizando as expressões da seção 5.3.2.

Calcular a associação \mathbf{x} resolvendo a versão relaxada do problema (5.9).

Calcular as constantes $y_{n,i,j,k}$ e $z_{n,i,j,k}$ para todos os pares de usuários que foram associados às subportadoras.

while $t < 1$ or $|W(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1^{(t)}, \mathbf{P}_2^{(t)}, \mathbf{P}_c^{(t)}) - W(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1^{(t-1)}, \mathbf{P}_2^{(t-1)}, \mathbf{P}_c^{(t-1)})| > \varepsilon$ **do**

for $n \in \mathcal{N}$ **do**

$$P_n^{(t+1)} = P_n^{(t)} + \theta_t \cdot \frac{dm_{n,i(n),j(n)}}{dP_n}$$

end

$$\beta = \frac{P}{\sum_{n \in \mathcal{N}} P_n^{(t+1)}}$$

$$\mathbf{P}^{(t+1)} = \beta \mathbf{P}^{(t+1)}$$

 Calcular as potências $\mathbf{P}_1^{(t+1)}$, $\mathbf{P}_2^{(t+1)}$ e $\mathbf{P}_c^{(t+1)}$ utilizando as expressões da seção 5.3.2.

$t = t + 1$

end

Saída: $\alpha_{n,i,j,1}$, $\alpha_{n,i,j,2}$, $x_{n,i,j}$, $P_{n,1}$, $P_{n,2}$ e $P_{n,c}$

6 RESULTADOS

Os resultados apresentados nesse capítulo foram obtidos através da implementação das soluções propostas no capítulo 5 utilizando o modelo definido na seção 4.1. Para melhorar o tempo de processamento, o pacote de otimização CPLEX da IBM foi utilizado. Esse pacote é amplamente reconhecido por seu excelente desempenho em problemas de otimização, superando muitos outros *softwares* disponíveis no mercado.

A configuração do cenário comum a todas as soluções propostas consiste de uma ERB com $N_t = 4$ antenas localizada no centro de uma célula com raio igual a 10 m, onde os usuários estão uniformemente distribuídos. A potência total de transmissão disponível ao sistema é 100 W. As componentes do vetor $\mathbf{h}_{n,j}$, que representa o canal do usuário j ao utilizar a subportadora n , seguem a distribuição $\mathcal{CN}(0, \frac{1}{N_t d_j^3})$, onde d_j é a distância entre o usuário j e a ERB. A notação $\mathcal{CN}(\mu, \sigma)$ designa a distribuição gaussiana complexa circularmente simétrica com média μ e desvio padrão σ . Para cada ponto dos gráficos foram realizadas 1000 simulações e calculada a média.

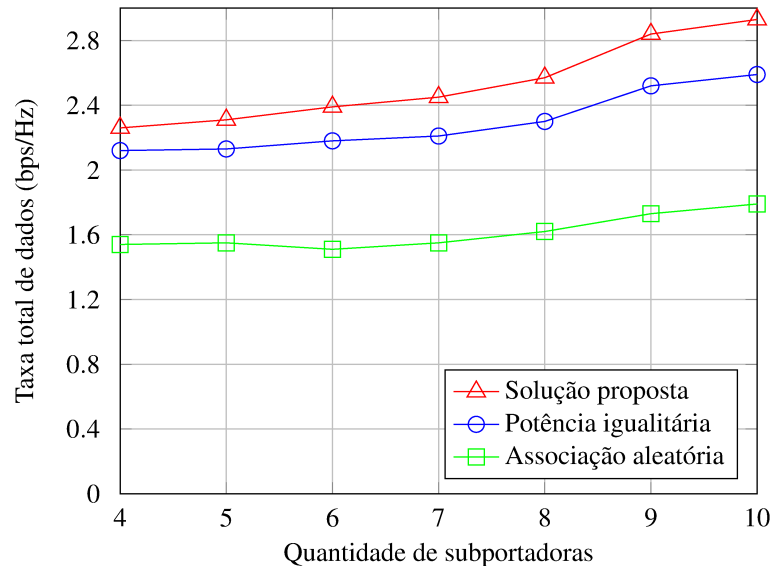
6.1 Primeira solução proposta

Para poder avaliar o desempenho da primeira solução proposta, foram simuladas outras soluções como *benchmark*. A primeira solução de *benchmark* consiste em associar os pares de usuários às subportadoras de maneira aleatória e usar o algoritmo de alocação de potência proposto. A segunda solução utiliza a associação ótima com alocação de potência igualitária. Nos gráficos desta seção, a primeira solução proposta é identificada como *Solução proposta*, e o primeiro e segundo *benchmarks* são referenciados por *Associação aleatória* e *Potência igualitária*, respectivamente.

A Figura 5 mostra a taxa total de dados para diferentes quantidades de subportadoras considerando 8 usuários. A taxa total de dados é a soma das taxas de todos os usuários, onde a taxa de um usuário é a soma das taxas privadas e comuns desse usuário em todas as subportadoras, conforme a equação (4.17). De forma equivalente, a taxa total de dados é calculada utilizando a função objetivo definida em (4.18) com todos os pesos iguais a 1. Nota-se que a taxa total de dados aumenta à medida em que o número de subportadoras aumenta. Isso pode ser justificado pelo aumento da probabilidade de os pares de usuários encontrarem subportadoras nas quais os canais dos usuários possam ser melhor acoplados. Ambos os *benchmarks* apresentam um

desempenho inferior à solução proposta, o que indica os benefícios de otimizar conjuntamente a associação de pares de usuários às subportadoras e a alocação de potência.

Figura 5 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de subportadoras

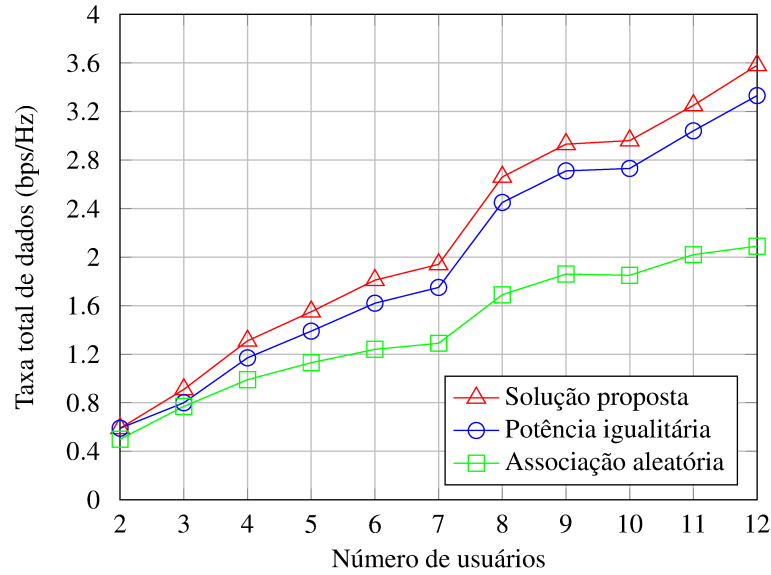


Fonte: Autoral.

As contribuições de cada etapa da solução proposta podem ser visualizadas através da diferença entre as curvas. A contribuição para a taxa total no sistema correspondente à primeira etapa, a associação de pares de usuários às subportadoras, corresponde à diferença entre a curva da *Solução proposta* e a curva da *Associação aleatória*. Para a segunda etapa, a alocação de potência, o ganho obtido corresponde à diferença entre a curva da *Solução proposta* e a curva da *Potência igualitária*. Percebe-se que a primeira etapa de otimização tem um impacto bem maior no desempenho do que a segunda etapa, além disso, ambos os ganhos relativos crescem conforme o aumento do número de subportadoras.

A Figura 6 retrata a taxa total de dados para diferentes quantidades de usuários utilizando 6 subportadoras. Novamente, a solução proposta demonstra um desempenho superior em relação aos *benchmarks*. Semelhante às figuras com variação do número de subportadoras, identifica-se que a taxa total de dados aumenta conforme o número de usuários aumenta. Esse comportamento pode ser explicado pelo aumento do número de pares de usuários, que é dado por $\binom{J}{2} = J(J-1)/2$. Quanto mais pares de usuários maiores são as possibilidades de se encontrar melhores acoplamentos. Por exemplo, quando se tem apenas 2 usuários, só existe um par que pode ser formado e associado para cada subportadora. Se aumentar para 4 usuários, cada subportadora terá 6 possibilidades de pares, resultando no total de 36 associações possíveis.

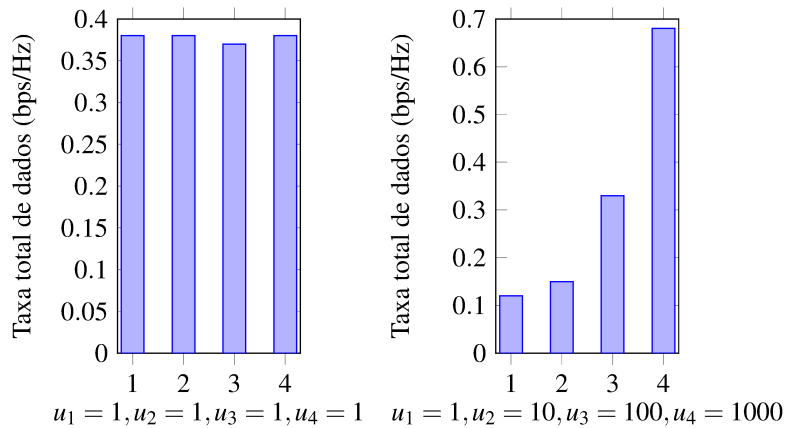
Figura 6 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de usuários



Fonte: Autoral.

A Figura 7 apresenta duas distribuições de taxas médias dos usuários para um cenário com 4 subportadoras e 4 usuários. Nessa simulação, o efeito da perda de percurso no canal foi desconsiderado. As componentes dos canais dos usuários são distribuídos segundo $\mathcal{CN}(0, \frac{1}{N_t})$. Cada distribuição tem um conjunto de pesos associados e cada coluna de uma distribuição corresponde à taxa do usuário ao qual o peso está associado. Esses dados ilustram como os pesos podem ser utilizados para garantir justiça entre os usuários. Na distribuição da esquerda, onde os pesos são todos iguais, as taxas dos usuários estão praticamente uniformemente distribuídas. Quanto à distribuição da direita, as taxas dos usuários se distribuem conforme os pesos, quanto maior o peso maior a taxa.

Figura 7 – Distribuições de taxas médias dos usuários para diferentes conjuntos de pesos

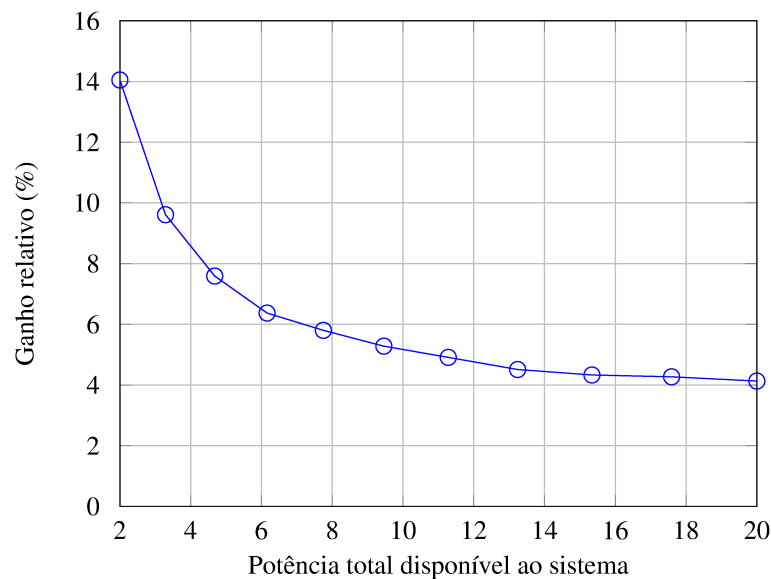


Fonte: Autoral.

6.2 Segunda solução proposta

Para ilustrar a contribuição da divisão ótima da taxa comum calculada na seção 5.3.1, foram realizadas simulações considerando a divisão igualitária da primeira solução proposta e a divisão ótima. O cenário utilizado tem apenas um par de usuários e uma subportadora, e a taxa total ponderada do par é calculada para diversos valores de potência total disponível ao sistema. Para cada simulação realizada, a alocação de potência entre as mensagens do par foi encontrada através de força bruta, enumerando os valores das variáveis que satisfazem as restrições do problema considerando incrementos fixos da potência total. Se os valores dos incrementos de potência utilizados são P/Q , para um inteiro positivo Q , o espaço de busca para as três potências tem tamanho $\binom{Q+2}{2} = (Q+2)(Q+1)/2$, que é quadrático em Q , o que justifica a viabilidade de enumeração para esse cenário. O número de divisões utilizadas para os incrementos foi $Q = 20$. A Figura 8 mostra o ganho relativo da divisão ótima de taxa sobre a divisão igualitária para diferentes valores de potência total. Observa-se que o ganho relativo decresce com o aumento da potência total, com o máximo em torno de 14% para a potência total igual a 2 W. Esse decréscimo pode ser explicado pelo aumento das taxas privadas em relação à taxa comum. Quanto maior a taxa total disponível ao sistema, maiores são as taxas privadas, o que diminui a contribuição da divisão da taxa comum.

Figura 8 – Ganho relativo da divisão ótima de taxa sobre a divisão igualitária para diferentes valores de potência total

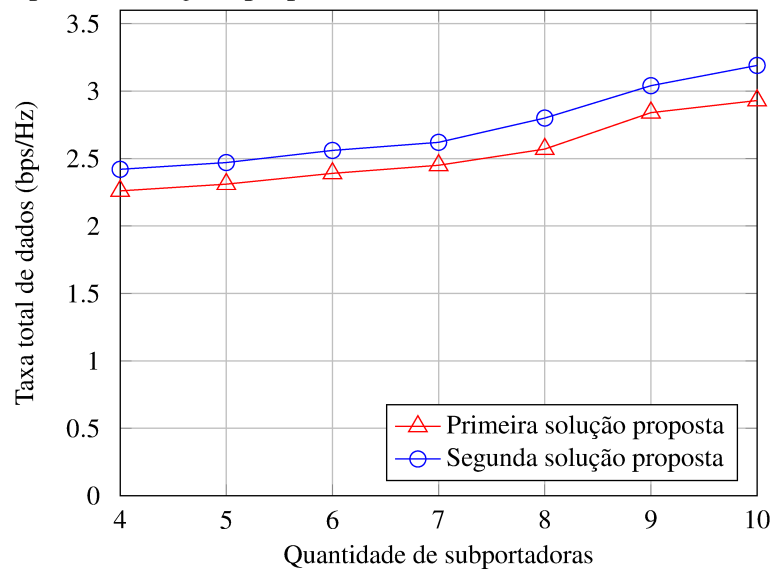


Fonte: Autoral.

Os próximos gráficos comparam as duas soluções propostas considerando a taxa total

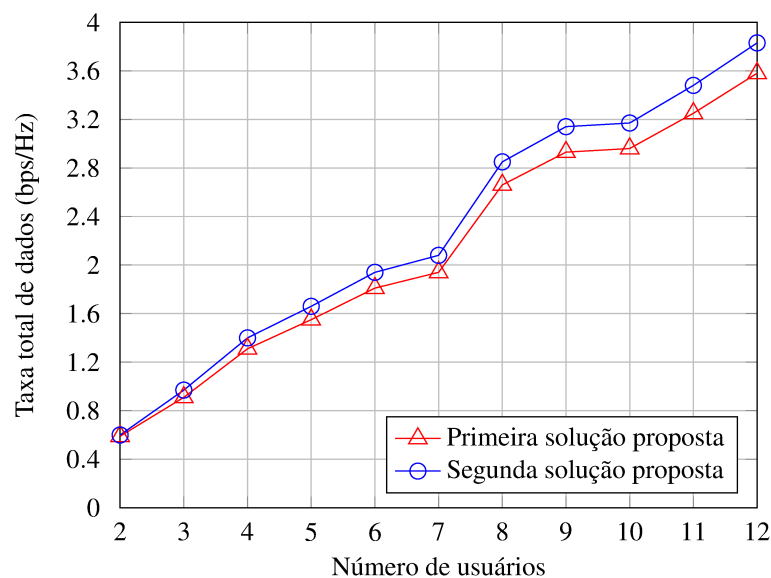
de dados. A Figura 9 apresenta a taxa total de dados para diferentes quantidades de subportadoras e a Figura 10 exibe a taxa total de dados para diferentes quantidades de usuários. Os padrões observados na primeira solução proposta são preservados na segunda solução proposta, a taxa total de dados aumenta com o número de usuários e com o número de subportadoras. Além disso, a segunda solução proposta apresenta um desempenho melhor em relação à primeira solução proposta.

Figura 9 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de subportadoras para as soluções propostas



Fonte: Autoral.

Figura 10 – Taxa total de dados para diferentes quantidades de usuários para as soluções propostas



Fonte: Autoral.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho estuda a associação entre pares de usuários às subportadoras e a alocação de potência entre a mensagem comum e as mensagens privadas dos pares de usuários associados em cada subportadora considerando um sistema baseado em RSMA com o objetivo de maximizar a taxa total dos usuários ponderada por pesos que servem para garantir justiça entre os usuários.

O modelo do sistema assume que cada par de usuários é associado a uma única subportadora, enquanto os pré-codificadores da mensagem comum e das mensagens privadas de cada par de usuários são projetados conforme o trabalho (CLERCKX *et al.*, 2020). Baseado nesse modelo, o problema de otimização é formulado onde a associação entre pares de usuários às subportadoras e a alocação de potência entre as mensagens para cada subportadora deve ser otimizado.

Duas soluções foram propostas para resolver o problema de otimização formulado. A primeira solução considera simplificações estratégicas que reduzem a complexidade do problema, alocando de forma igualitária a taxa comum e a potência entre as mensagens de um par de usuários. A segunda solução expande a primeira, mantendo passos metodológicos semelhantes, mas introduzindo uma otimização mais refinada na alocação dos recursos previamente simplificados. Ambas as soluções apresentam desempenho superior às soluções de *benchmark* propostas. A segunda solução mostrou uma taxa total de dados superior à primeira solução, entretanto, a primeira solução é computacionalmente mais simples.

Para este trabalho, assume-se o funcionamento ideal do SIC na decodificação das mensagens dos usuários. No entanto, para estudos futuros, é importante explorar cenários mais realistas que considerem o SIC imperfeito no RSMA. A partir do problema de otimização desenvolvido neste estudo, novas abordagens podem ser propostas para adaptar o modelo às condições de um SIC não ideal. Além disso, seria interessante investigar a troca do objetivo de otimização, como maximizar a pior taxa de um usuário ou maximizar a taxa total de dados sujeitos a restrições de QoS, para avaliar o impacto de diferentes critérios de desempenho no contexto do RSMA. A consideração de métricas alternativas pode fornecer uma visão mais abrangente e prática das possíveis aplicações e limitações do modelo proposto.

REFERÊNCIAS

- CASTRO, J. A. D.; LIMA, F. R. M. Subcarrier assignment, user matching and power allocation for weighted sum-rate maximization with RSMA. In: **2022 Global Information Infrastructure and Networking Symposium (GIIS)**. [S. l.: s. n.], 2022. p. 20–24.
- CLERCKX, B.; MAO, Y.; SCHÖBER, R.; POOR, H. V. Rate-splitting unifying SDMA, OMA, NOMA, and multicasting in MISO broadcast channel: A simple two-user rate analysis. **IEEE Wireless Communications Letters**, v. 9, n. 3, p. 349–353, 2020.
- ERICSSON. **Ericsson Mobility Report**. 2024. Disponível em: <https://www.ericsson.com/49ed78/assets/local/reports-papers/mobility-report/documents/2024/ericsson-mobility-report-june-2024.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2024.
- HELLER, I.; TOMPKINS, C. B. 14 . an extension of a theorem of dantzig's. In: _____. **Linear Inequalities and Related Systems. (AM-38), Volume 38**. Princeton University Press, 2016. p. 247–254. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/9781400881987-015>.
- HIEU, N. Q.; HOANG, D. T.; NIYATO, D.; NGUYEN, D. N.; KIM, D. I.; JAMALIPOUR, A. Joint power allocation and rate control for rate splitting multiple access networks with covert communications. **IEEE Transactions on Communications**, v. 71, n. 4, p. 2274–2287, 2023.
- HSIAO JIANN-CHING GUEY, W.-H. S. C.-L.; CHEN, R.-J. A two-user approximation-based transmit beamforming for physical-layer multicasting in mobile cellular downlink systems. **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, Taylor & Francis, v. 38, n. 6, p. 742–750, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/02533839.2015.1016879>.
- JOUDEH, H.; CLERCKX, B. Robust transmission in downlink multiuser MISO systems: A rate-splitting approach. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 64, n. 23, p. 6227–6242, 2016.
- JOUDEH, H.; CLERCKX, B. Sum-rate maximization for linearly precoded downlink multiuser MISO systems with partial CSIT: A rate-splitting approach. **IEEE Transactions on Communications**, v. 64, n. 11, p. 4847–4861, 2016.
- LAND, A. H.; DOIG, A. G. An automatic method of solving discrete programming problems. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 28, n. 3, p. 497–520, 1960. ISSN 00129682, 14680262. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1910129>.
- LI, L.; CHAI, K.; LI, J.; LI, X. Resource allocation for multicarrier rate-splitting multiple access system. **IEEE Access**, v. 8, p. 174222–174232, 2020.
- LUO, F.; MAO, Y. **A Practical Max-Min Fair Resource Allocation Algorithm for Rate-Splitting Multiple Access**. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2306.10930>.
- MAO, Y.; CLERCKX, B.; LI, V. O. Rate-splitting multiple access for downlink communication systems: bridging, generalizing, and outperforming SDMA and NOMA. **EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking**, Springer Science and Business Media LLC, v. 2018, n. 1, maio 2018. ISSN 1687-1499. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1186/s13638-018-1104-7>.

MAO, Y.; CLERCKX, B.; ZHANG, J.; LI, V. O. K.; ARAFAH, M. A. Max-min fairness of k-user cooperative rate-splitting in MISO broadcast channel with user relaying. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, v. 19, n. 10, p. 6362–6376, 2020.

MAO, Y.; DIZDAR, O.; CLERCKX, B.; SCHOBBER, R.; POPOVSKI, P.; POOR, H. V. Rate-splitting multiple access: Fundamentals, survey, and future research trends. **IEEE Communications Surveys & Tutorials**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 24, n. 4, p. 2073–2126, 2022. ISSN 2373-745X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/COMST.2022.3191937>.

MATTHIESEN, B.; MAO, Y.; POPOVSKI, P.; CLERCKX, B. Globally optimal beamforming for rate splitting multiple access. In: **ICASSP 2021 - 2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)**. [S. l.: s. n.], 2021. p. 4775–4779.

MISHRA, A.; MAO, Y.; DIZDAR, O.; CLERCKX, B. Rate-splitting multiple access for 6G—part I: Principles, applications and future works. **IEEE Communications Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 10, p. 2232–2236, out. 2022. ISSN 2373-7891. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/LCOMM.2022.3192012>.

PLOSKAS, N.; SAMARAS, N. Gpu accelerated pivoting rules for the simplex algorithm. **Journal of Systems and Software**, v. 96, p. 1–9, 2014. ISSN 0164-1212. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0164121214001174>.

RODRIGUES, L.; AHLERT, F.; LACERDA, D.; CAMARGO, L.; LIMA, P. **Pesquisa operacional : programação linear passo a passo : do entendimento do problema à interpretação da solução [recurso eletrônico]**. [S. l.: s. n.], 2014. ISBN 978-85-7431-671-0.

SOLOW, D. **Linear Programming: An Introduction to Finite Improvement Algorithms**. 2nd. ed. [S. l.]: Dover Publications, 2014. ISBN 139780486782171.

STRANG, G. Karmarkar’s algorithm and its place in applied mathematics. **The Mathematical Intelligencer**, v. 9, p. 4–10, 1987. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123541868>.

WOLSEY, L. A. Mixed integer programming. In: _____. **Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering**. John Wiley Sons, Ltd, 2008. p. 1–10. ISBN 9780470050118. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9780470050118.ecse244>.

YANG, Z.; CHEN, M.; SAAD, W.; XU, W.; SHIKH-BAHAELI, M. **Sum-Rate Maximization of Uplink Rate Splitting Multiple Access (RSMA) Communication**. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1906.04092>.

YANG, Z.; CHEN, M.; SAAD, W.; SHIKH-BAHAELI, M. Downlink sum-rate maximization for rate splitting multiple access (RSMA). In: **ICC 2020 - 2020 IEEE International Conference on Communications (ICC)**. [S. l.: s. n.], 2020. p. 1–6.