



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS PASCOAL MARTINS DE SOUSA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE CASCAS UTILIZANDO UMA ABORDAGEM
ISOGEOMÉTRICA

FORTALEZA

2024

MATHEUS PASCOAL MARTINS DE SOUSA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE CASCAS UTILIZANDO UMA ABORDAGEM
ISOGOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em ENGENHARIA CIVIL do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.

Coorientador: Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S697a Sousa, Matheus Pascoal Martins de.
Análise não linear de cascas utilizando uma abordagem isogeométrica / Matheus Pascoal Martins de Sousa. – 2024.
120 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.
Coorientação: Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso.
1. Cascas. 2. Análise Isogeométrica. 3. NURBS. 4. Sólido degenerado. 5. Análise não linear. I. Título.
CDD 624.1
-

MATHEUS PASCOAL MARTINS DE SOUSA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE CASCAS UTILIZANDO UMA ABORDAGEM
ISOGOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em ENGENHARIA CIVIL do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: 30 de agosto de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antônio Taumaturgo Mororó
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Fernando Campos Ramos Martha
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
(PUC-Rio)

À Jesus, meu Senhor e Salvador, pelo fôlego de vida e pelo seu inesgotável amor. À minha família, por toda confiança e esforços investidos em mim.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, acima de tudo, por ter sempre me guiado e permanecido ao meu lado por toda caminhada, e por toda sorte de bênçãos que, por intermédio de Cristo, imerecidamente recebi. Seu fôlego de vida em mim foi-me sustento e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades.

À minha amada esposa, Jaiane, que compartilhou comigo essa e muitas outras conquistas, demonstrou compreensão em minhas ausências e me ajudou bastante me dando dicas e apoio moral para o desenvolvimento deste e de todos os outros trabalhos da universidade. Obrigado, meu amor, por não deixar eu me abalar em nenhum momento e desistir dos meus sonhos.

À toda a minha família, especialmente aos meu pais, Maria Jassineide e Edriano, que sempre me apoiaram e não mediram esforços para que nosso sonho, ter a oportunidade de estudar e alcançar um bom futuro, se tornasse realidade. Obrigado por serem minha principal base na vida sempre com muito amor, carinho e fé. Aos meu tios, Gilvânia e Cláudio Roberto, que durante todo o tempo do curso, de bom grado, me receberam em sua casa como mais um de seus filhos.

Ao meu orientador, Evandro Parente Júnior, por todo apoio, confiança e conhecimentos despendidos para comigo, compartilhando suas ideias e reflexões, e possibilitando assim o aperfeiçoamento científico e o desafiador projeto de pesquisa que vínhamos desenvolvendo.

A meu coorientador, Elias Saraiva Barroso, pelas contribuições realizadas em todos os trabalhos que fizemos em conjunto.

Ao amigo e colaborador, Gabriel Braga, pela disponibilidade, apoio e conhecimentos compartilhados que se mostraram muito necessários à conclusão deste trabalho.

Aos professores Luiz Fernando Martha e Luiz Antônio, por fazerem parte de minha banca examinadora.

A Agência de Pesquisa FUNCAP (Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento), pelo apoio financeiro fornecido durante o mestrado.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

“Em tudo que fizerem, trabalhem de bom ânimo, como se fosse para o Senhor, e não para os homens. Lembrem-se de que o Senhor lhes dará uma herança como recompensa e de que o Senhor a quem servem é Cristo.”

(Colossenses 3:23, 24)

RESUMO

Cascas estão presentes em diversos ramos da engenharia, sendo amplamente utilizadas em estruturas civis, aeronáuticas, mecânicas, automotivas e navais. No entanto, estas estruturas são sensíveis ao colapso desencadeado pela perda de estabilidade devido à sua elevada esbelteza característica e, por isso, uma investigação criteriosa é extremamente importante para garantir um projeto seguro. Assim, se fazem necessárias análises não lineares, nas quais a consideração de grandes deslocamentos e rotações é fundamental. A utilização da análise isogeométrica vem crescendo, devido à sua capacidade de representar exatamente a geometria da estrutura independentemente do grau de discretização e facilitar o refinamento do modelo. Este trabalho apresenta uma formulação isogeométrica baseada em NURBS para análise geométrica não linear de cascas baseadas na teoria de Reissner-Mindlin e na abordagem do sólido degenerado. Os efeitos geometricamente não lineares são incorporados usando a abordagem Lagrangiana Total, permitindo a análise de cascas com grandes deslocamentos e rotações. As implementações foram realizadas no software livre FAST (*Finite element AnalySis Tool*), escrito em linguagem C++ utilizando Programação Orientada a Objetos. Os vetores diretores iniciais nos pontos de controle são obtidos resolvendo um sistema de equações definido nos pontos de Greville. Diversas estratégias de atualização dos vetores diretores e três diferentes esquemas de integração numérica, utilizados para aliviar o problema do travamento, são comparados. A precisão da formulação proposta é avaliada através de análises lineares e não lineares de *benchmarks* de análise de cascas. As respostas obtidas foram comparadas com as disponíveis na literatura e, em todos os testes, a formulação apresentou bons resultados. Nos testes lineares, a eficiência do esquema de integração utilizado para aliviar, se não eliminar, o travamento foi demonstrada através de estudos de convergência. Nos testes não lineares, grandes deslocamentos e rotações foram descritas com precisão utilizando um simples e eficiente esquema para atualização do vetor diretor capaz de remover a restrição de pequenas rotações nodais entre dois incrementos de carga sucessivos e garantir convergência quadrática de iterações de equilíbrio. A integração reduzida uniforme aliviou ligeiramente o travamento e a não uniforme reduziu significativamente o travamento em alguns exemplos, mas a precisão dos resultados foi afetada em alguns casos.

Palavras-chave: Cascas; Análise Isogeométrica; NURBS; Sólido degenerado; Análise Não linear.

ABSTRACT

Shells are present in different branches of engineering, being widely used in civil, aeronautical, mechanical, automotive, and naval structures. However, these structures are sensitive to collapse triggered by the loss of stability due to their characteristic high slenderness and, therefore, a careful investigation is extremely important to guarantee a safe design. Thus, nonlinear analyses are necessary, in which the consideration of large displacements and rotations is fundamental. The use of isogeometric analysis has been growing, due to its ability to exactly represent the geometry of the structure regardless of the degree of discretization and to facilitate model refinement. This work presents an isogeometric formulation based on NURBS for nonlinear geometric analysis of shells based on the Reissner-Mindlin theory and the degenerate solid approach. Geometrically nonlinear effects are incorporated using the Total Lagrangian approach, allowing the analysis of shells with large displacements and rotations. The implementations were carried out in the open-source software FAST (Finite element AnalySis Tool), written in C++ language using Object Oriented Programming. The initial normal vectors at the control points are obtained by solving a defined system of equations at the Greville points. Several director vectors update strategies and three different numerical integration schemes, used to alleviate the locking problem, are compared. The accuracy of the proposed formulation is evaluated through linear and nonlinear analyses of shell analysis benchmarks. The responses obtained were compared with those available in the literature and, in all tests, the formulation showed good results. In linear tests, the efficiency of the integration scheme used to alleviate, if not eliminate, locking was demonstrated through convergence studies. In nonlinear tests, large displacements and rotations were accurately described using a simple and efficient scheme for updating the director vector capable of removing the restriction of small nodal rotations between two successive load increments and guaranteeing quadratic convergence of equilibrium iterations. The uniform reduced integration slightly alleviated the locking and the non-uniform significantly reduced the locking in some examples, but the accuracy of the results was affected in some cases.

Keywords: Shells; Isogeometric Analysis; NURBS; Degenerated solid; Nonlinear Analysis

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas realizadas em uma simulação para análise estrutural em uma aplicação CAE.	19
Figura 2 – Funções de base B-Splines $p = 2$ e vetor de <i>knots</i> $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5]$	22
Figura 3 – Funções de base B-Splines e suas continuidades no interior dos <i>spans</i> de um vetor de <i>knots</i> $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5]$	22
Figura 4 – Efeito da multiplicidade em uma B-Spline quadrática.	23
Figura 5 – Inserção de <i>knot</i> ($\bar{\xi} = 2$) em curva B-Spline quadrática.	24
Figura 6 – Efeito da inserção de <i>knot</i> na continuidade e controle local de uma curva.	25
Figura 7 – Exemplo de funções de base quadrática com inserção de <i>knot</i>	26
Figura 8 – Exemplo de funções de base com elevação de grau de quadrática para cúbica.	26
Figura 9 – Exemplo de refinamento k	27
Figura 10 – Arco de 180° construído com B-Spline e semicircunferência construída com NURBS.	28
Figura 11 – Efeito da variação do peso nas curvas.	30
Figura 12 – Exemplo de superfície NURBS.	31
Figura 13 – Coordenadas paramétricas de um elemento de casca.	33
Figura 14 – Modelo do sólido degenerado.	34
Figura 15 – Deslocamento de um ponto arbitrário no modelo de sólido degenerado.	35
Figura 16 – Vetores diretores nos pontos de controle da casca.	36
Figura 17 – Coordenadas locais do elemento de casca geral.	39
Figura 18 – Geometria de um cabo, graus de liberdade e funções de base.	43
Figura 19 – Modelo de uma superfície NURBS.	43
Figura 20 – Mapeamentos realizados na AIG para integração numérica.	44
Figura 21 – Pontos de Gauss da integração completa.	47
Figura 22 – Pontos de Gauss da integração reduzida uniforme (R _{UNI}).	48
Figura 23 – Pontos de Gauss da integração reduzida isogeométrica (R _{AIG}) usada por Adam <i>et al.</i> (2015a).	49
Figura 24 – Vetores diretores no ponto geométrico projetado a partir de um ponto de controle da casca.	51
Figura 25 – Definição do sistema de bases locais.	52
Figura 26 – Caminho de equilíbrio com <i>snap-through</i> e <i>snap-back</i>	77

Figura 27 – Tipos de perda de estabilidade.	78
Figura 28 – Pontos críticos e caminhos de equilíbrio.	79
Figura 29 – Descrição da casca de Scordelis-Lo e malha 4×4	83
Figura 30 – Malhas usadas na casca de Scordelis-Lo.	84
Figura 31 – Convergência do deslocamento w_A ($w_A^{ref} = 0.3020$) para casca de Scordelis-Lo.	85
Figura 32 – Campo de deslocamento w_A (escala $20\times$) do problema Scordelis-Lo <i>roof</i>	85
Figura 33 – Descrição da casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos e malha 4×4	86
Figura 34 – Malhas usadas na casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos	87
Figura 35 – Convergência do deslocamento w_A ($w_A^{ref} = 1.840 \times 10^{-5}$) para casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos.	88
Figura 36 – Campo de deslocamento w_A (fator de escala = 10^6) do problema da casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos.	89
Figura 37 – Descrição da casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas e malha 4×4	89
Figura 38 – Malhas usadas na casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas	90
Figura 39 – Convergência do deslocamento w_A ($w_A^{ref} = 9.400 \times 10^{-2}$) para casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas.	91
Figura 40 – Campo de deslocamento w_A (fator de escala = 30) do problema da casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas.	92
Figura 41 – Descrição da viga engastada com carga na extremidade e malha 1×8	93
Figura 42 – Curvas carga-deslocamento da viga engastada com carga na extremidade, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada).	95
Figura 43 – Curvas carga-deslocamento da viga engastada com carga na extremidade, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração reduzida uniforme (R_{UNI}).	96
Figura 44 – Deformadas da viga engastada com carga na extremidade.	97
Figura 45 – Descrição da placa anular fendida e malha 5×40	97
Figura 46 – Curvas carga-deslocamento da placa anular fendida, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada).	98

Figura 47 – Curvas carga-deslocamento da placa anular fendida, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração reduzida uniforme (R_{UNI}).	99
Figura 48 – Deformadas da placa anular fendida.	100
Figura 49 – Descrição da casca hemisférica e malha 8×8 .	101
Figura 50 – Curvas carga-deslocamento da casca hemisférica, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada), R_{AIG} (linha pontilhada).	102
Figura 51 – Curvas carga-deslocamento da casca hemisférica, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração reduzida uniforme (R_{UNI}).	103
Figura 52 – Deformadas da casca hemisférica.	104
Figura 53 – Descrição da casca semicilíndrica comprimida e malha 10×10 .	104
Figura 54 – Curvas carga-deslocamento da casca semicilíndrica comprimida, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada), R_{AIG} (linha pontilhada).	106
Figura 55 – Curvas carga-deslocamento da casca semicilíndrica comprimida, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração completa (Full) e reduzida uniforme (R_{UNI}).	107
Figura 56 – Deformadas da casca semicilíndrica comprimida.	107
Figura 57 – Descrição do painel cilíndrico sob carga pontual e malha 4×4 .	108
Figura 58 – Curvas carga-deslocamento do painel cilíndrico sob carga pontual, para estratégia de atualização AQ. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada), R_{AIG} (linha pontilhada).	109
Figura 59 – Deformadas do painel cilíndrico sob carga pontual, $t = 6.35$.	110
Figura 60 – Deformadas do painel cilíndrico sob carga pontual, $t = 12.7$.	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Deslocamento vertical w_A para casca de Scordelis-Lo.	84
Tabela 2 – Deslocamento vertical w_A para casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos.	87
Tabela 3 – Deslocamento vertical w_A para casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas.	91
Tabela 4 – Número total de iterações (TITER) e média de iterações (MITER) para cada malha e estratégia de atualização do vetor normal, para a viga engastada. NINC = 20.	96
Tabela 5 – Número total de iterações (TITER) e média de iterações (MITER) para cada malha e estratégia de atualização do vetor normal, para a placa anular fendida. NINC = 40.	100
Tabela 6 – Número total de iterações (TITER) e média de iterações (MITER) para cada malha e estratégia de atualização do vetor normal, para a casca hemisférica. NINC = 20.	103

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	17
1.1.1	<i>Objetivos Específicos</i>	17
1.2	Organização do Texto	18
2	MODELAGEM GEOMÉTRICA	19
2.1	B-Splines	20
2.1.1	<i>Inserção de knot e elevação de grau</i>	23
2.1.2	<i>Refinamentos</i>	25
2.2	NURBS	28
2.2.1	<i>Superfícies NURBS</i>	30
3	FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA PARA ANÁLISE LINEAR DE CASCAS	32
3.1	Deslocamentos e Deformações	35
3.2	Tensões	38
3.3	Equações de Equilíbrio	40
3.4	Elemento Isogeométrico	42
3.5	Integração Numérica	44
3.5.1	<i>Travamento</i>	45
3.5.2	<i>Integração reduzida</i>	47
3.6	Cálculo dos vetores diretores	50
3.7	Implementação Computacional	57
4	ANÁLISE NÃO LINEAR ISOGOMÉTRICA DE CASCAS	59
4.1	Geometria e Deslocamentos	61
4.2	Tratamento das rotações	62
4.3	Deformações e Tensões	66
4.4	Equações de Equilíbrio	67
4.5	Matriz de Rigidez Tangente	71
4.6	Análise Não Linear Geométrica	76
4.6.1	<i>Análise de Estabilidade</i>	77
4.7	Implementação Computacional	80

5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	82
5.1	Análise Linear	82
5.1.1	<i>Casca de Scordelis-Lo</i>	83
5.1.2	<i>Casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos</i>	86
5.1.3	<i>Casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas</i>	89
5.2	Análise Não Linear	92
5.2.1	<i>Viga engastada submetida a carga na extremidade</i>	93
5.2.2	<i>Placa anular fendida submetida a força de elevação</i>	97
5.2.3	<i>Casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas</i>	100
5.2.4	<i>Casca semicilíndrica comprimida</i>	104
5.2.5	<i>Painel cilíndrico sob carga pontual</i>	107
6	CONCLUSÃO	111
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	115
	REFERÊNCIAS	116

1 INTRODUÇÃO

As cascas são estruturas de superfície curva cuja espessura é muito menor que as outras dimensões. Estão presentes em diversas áreas da engenharia, sendo amplamente utilizadas em estruturas civis, aeronáuticas, mecânicas, automotivas e navais. Com interesse em aproveitar ao máximo o potencial da geometria e do material, dentro dos limites de economia e segurança, técnicas de análise para determinação dos deslocamentos, deformações e tensões são fundamentais para o projeto destes elementos estruturais.

Além disso, antes mesmo que seu material atinja a resistência máxima, cascas sujeitas à esforços de compressão podem sofrer colapso desencadeado pela perda de estabilidade devido à sua elevada esbelteza característica. Por isso, uma investigação criteriosa é extremamente importante para garantir um projeto seguro e, assim, se fazem necessárias análises não lineares, nas quais a consideração de grandes deslocamentos e grandes rotações é fundamental.

Devido à complexidade da física do problema e o seu papel fundamental no projeto estrutural, a análise mecânica de cascas sempre foi um tópico atraente na engenharia. Contudo, ainda não há consenso quanto à elaboração de uma teoria geral, devido a diversas simplificações realizadas para a própria definição de casca.

As formulações derivadas de uma teoria de casca visam transformar um problema que é tridimensional em um problema bidimensional e têm sua validade limitada pela teoria escolhida. Nelas, se utilizam de hipóteses simplificadoras feitas em relação aos campos de deslocamentos e tensões. As teorias de cascas variam entre si, em especial, devido à consideração do cisalhamento transversal. Nelas se destacam a teoria de Kirchhoff-Love e a teoria de Reissner-Mindlin (AHMAD *et al.*, 1970; COOK *et al.*, 2002; BATHE, 2014).

A base da teoria de Kirchhoff-Love é a ideia de que podemos ignorar as deformações de cisalhamento transversal de cascas finas. Como consequência da presença de derivadas de segundo grau no campo de deformações, se faz necessária uma continuidade C^1 sobre os elementos e sua interface. Por outro lado, a teoria de de Reissner-Mindlin considera as deformações de cisalhamento transversal, fazendo com que ela seja adequada à descrição de cascas finas e espessas. O campo de deformações envolve apenas as primeiras derivadas dos deslocamentos e das rotações (ou deformações de cisalhamento transversal), portanto uma continuidade C^0 é suficiente para os elementos.

Uma outra possibilidade para a análise de cascas é a utilização de uma formulação baseada na abordagem de sólido degenerado (AHMAD *et al.*, 1970; UHM; YOUN, 2009;

KIENDL *et al.*, 2010), que parte da modificação de elementos sólidos tridimensionais para consideração das hipóteses de Reissner-Mindlin. Essa abordagem parte da definição de uma superfície média e vetores normais que permanecem retos após a deformação. A abordagem se destaca devido a sua simplicidade, facilitada implementação, adaptação a situações de pequena ou moderada espessura e sua capacidade de modelagem de estruturas com geometria qualquer. Devido à essas características essa abordagem vem sendo bastante utilizada (AHMAD *et al.*, 1970; BATHE; BOLOURCHI, 1980; SURANA, 1983; COOK *et al.*, 2002; MILIĆ *et al.*, 2023; GHADIMI; HASSANI, 2023; HAO *et al.*, 2023).

Quanto aos métodos de análise, inúmeras alternativas podem ser utilizadas para análise de cascas, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) o mais utilizado atualmente. Entretanto, apesar de consolidado, o MEF apresenta algumas limitações inerentes a sua formulação, entre os quais podemos citar a representação aproximada da geometria e a dificuldade em se obter elevação de grau e continuidade em suas funções base.

Na formulação isoparamétrica do MEF, tanto os deslocamentos quanto a geometria da estrutura são aproximados com o uso de funções polinomiais (COOK *et al.*, 2002). Assim, salvo no caso de problemas simples, a resposta do MEF contém tanto erros devido à aproximação do campo de deslocamentos, quanto devido à aproximação da geometria do modelo. Ambos os erros são reduzidos à medida que a malha de elementos finitos é refinada, o que pode ser feito aumentando o número de elementos (refinamento h) ou aumentando o grau dos polinômios utilizados (refinamento p).

Alternativamente, a Análise Isogeométrica (AIG) (HUGHES *et al.*, 2005; COTTRELL *et al.*, 2009) é um método computacional desenvolvido para análise de sólidos e estruturas semelhantes ao MEF. Ela busca integrar os conceitos de CAD (*Computer Aided Design*) e CAE (*Computer Aided Engineering*), utilizando as bases do sistema CAD (e.g. NURBS e T-Splines) como bases para aproximação do campo de deslocamentos da estrutura.

Fazendo isso, na AIG, a geometria do problema é representada de maneira exata independentemente do nível de discretização considerado, eliminando o erro na representação da geometria que existe no MEF. Este fato se torna ainda mais relevante na análise de cascas, devido à sensibilidade às imperfeições característica deste tipo de estruturas (COTTRELL *et al.*, 2009). Adicionalmente, as B-Splines e NURBS possuem um grau de continuidade maior que os normalmente utilizados no MEF, o que pode fazer com que a AIG possua uma convergência mais rápida que o MEF.

Outra grande vantagem do uso da AIG é que ela permite que sejam realizados três tipos de refinamento. O refinamento p é referente à elevação de grau do polinômio de interpolação que é realizado de maneira mais simplificada em comparação as complicações encontradas no MEF. O refinamento h é a divisão em um número maior de elementos, o procedimento mais utilizado no MEF. Por fim, no refinamento k , que não existe no MEF, observamos o efeito dos anteriores combinados e a continuidade entre os elementos é elevada (HUGHES *et al.*, 2005; COTTRELL *et al.*, 2009).

Também é possível elevar a continuidade entre elementos simultaneamente, algo que não é possível no MEF. Com isso, é possível trabalhar com diversas teorias consagradas que exigem um grau mínimo de continuidade entre os elementos para serem aplicadas, como é o caso das teorias de Kirchhoff-Love (KIENDL *et al.*, 2009), de Reissner-Mindlin (BENSON *et al.*, 2010) e de Alta Ordem (TRAN *et al.*, 2016).

Assim, a análise de placas e cascas utilizando a abordagem isogeométrica tem várias vantagens em relação ao uso de elementos finitos. Contudo, sendo uma metodologia recente, a AIG ainda tem muitas questões em aberto, necessitando do desenvolvimento de pesquisas com objetivo de chegar ao grau de maturidade atingido pelo MEF.

Nesse sentido, cabe destacar que vários pesquisadores do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC) já realizaram o desenvolvimento e implementação de algumas formulações de elementos para análise não linear geométrica (NLG), utilizando MEF e AIG.

No trabalho de Barroso (2015), foram implementados elementos sólidos para Análise Isogeométrica de estruturas com grandes deslocamentos, utilizando formulação Lagrangiana Total. A análise não linear geométrica e a estabilidade de placas e cascas abatidas, baseadas nas teorias de Reissner-Mindlin e de Marguerre foi estudada por Barros (2016) e Praciano (2018) utilizando uma formulação isogeométrica baseada em NURBS, e por Silva (2021) utilizando uma formulação isogeométrica baseada em elementos de Bézier. Utilizando um sistema de coordenadas circunferencial, uma formulação baseada na teoria não linear de Donnell utilizando uma abordagem Lagrangiana Total para cascas cilíndricas também foi desenvolvida por Auad (2019).

Considerando as simplificações e limitações das teorias em que se basearam os estudos anteriores, Barroso (2022) implementou uma formulação isogeométrica baseada na teoria de Reissner-Mindlin e na abordagem do sólido degenerado, utilizando funções de base

Bézier. A formulação estava limitada à análise estática e de vibração livre.

A análise não linear geométrica de estruturas de cascas é de grande interesse e importância prática, contudo envolve elevada complexidade. Nas pesquisas envolvendo formulações baseadas na abordagem do sólido degenerado, diversas estratégias vem sendo utilizadas na tentativa de melhor descrever grandes rotações no espaço durante a análise estrutural. Este é um problema bastante complexo, devido à natureza não aditiva das rotações no espaço (ARGYRIS, 1982; SURANA, 1983; CRISFIELD, 1997; ZOU *et al.*, 2020; HAO *et al.*, 2023). Enquanto a maioria dos trabalhos são restritos a pequenas rotações entre sucessivos incrementos de cargas, foram propostas alternativas capazes de remover a restrição de pequenas rotações nodais entre incrementos e fornecer boa convergência de iterações de equilíbrio (DORNISCH *et al.*, 2016; ZOU *et al.*, 2020). Nesses trabalhos, a atualização dos vetores normais é realizada utilizando do tensor de rotação, resultando em uma formulação muito complexa e de difícil implementação.

Outro aspecto importante a ser destacado, é que a AIG não remove os travamentos de membrana e de cisalhamento apresentados por elementos de casca baseados na teoria de Reissner-Mindlin (ECHTER; BISCHOFF, 2010). Assim, diversas alternativas têm sido propostas na literatura para resolver o problema do travamento (*locking*), como formulações mistas (BOUCLIER *et al.*, 2013) e a integração reduzida (ADAM *et al.*, 2015a).

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral contribuir para o avanço da análise estrutural de cascas, utilizando uma abordagem isogeométrica baseada em NURBS.

1.1.1 *Objetivos Específicos*

- a) Desenvolver uma formulação simples e consistente para análise não linear geométrica de cascas baseada nas hipóteses de Reissner-Mindlin, na abordagem Lagrangiana Total e no modelo do sólido degenerado;
- b) Estudar o efeito de diferentes esquemas de integração numérica sobre o travamento na análise linear em elementos NURBS quadráticos e cúbicos;
- c) Comparar estratégias de atualização dos vetores diretores utilizadas para o tratamento das rotações no espaço;
- d) Estudar o efeito dos esquemas de integração e sua interação com as estratégias

para tratamento das rotações sobre o travamento na análise não linear.

1.2 Organização do Texto

A presente dissertação foi dividida em seis capítulos. O Capítulo 2, apresenta uma introdução à Modelagem Geométrica e uma breve revisão acerca das representações de curvas B-Splines e NURBS. São apresentados seus três tipos de refinamento, o conceito de superfície NURBS e a consideração de múltiplos *patches*.

O Capítulo 3 aborda o desenvolvimento da formulação isogeométrica para análise linear de cascas. São apresentadas as expressões para os cálculos da matriz de rigidez a partir das curvas da AIG e para a solução de equilíbrio do sistema. Também são abordados o conceito de elemento isogeométrico, métodos para cálculo do sistema de base nodal e discutida a questão do travamento.

No Capítulo 4, apresenta-se a extensão da formulação para análise não linear geométrica, utilizando a abordagem Lagrangiana Total para a consideração de grandes deslocamentos e grandes rotações. São discutidas diversas formas de atualização do vetor diretor. Também são discutidos métodos numéricos utilizados na análise não linear de estruturas.

No Capítulo 5 são apresentados os exemplos numéricos estudados na dissertação. No exemplos envolvendo análises lineares, são realizados estudos de convergência para avaliação da influência do esquema de integração numérica sobre o travamento e a precisão dos resultados. No exemplos geometricamente não lineares, além da avaliação da capacidade da formulação para análise de problemas com grandes deslocamentos e rotações, é examinada a interação entre a regra de integração empregada e a estratégia de atualização dos vetores diretores na precisão dos cálculos.

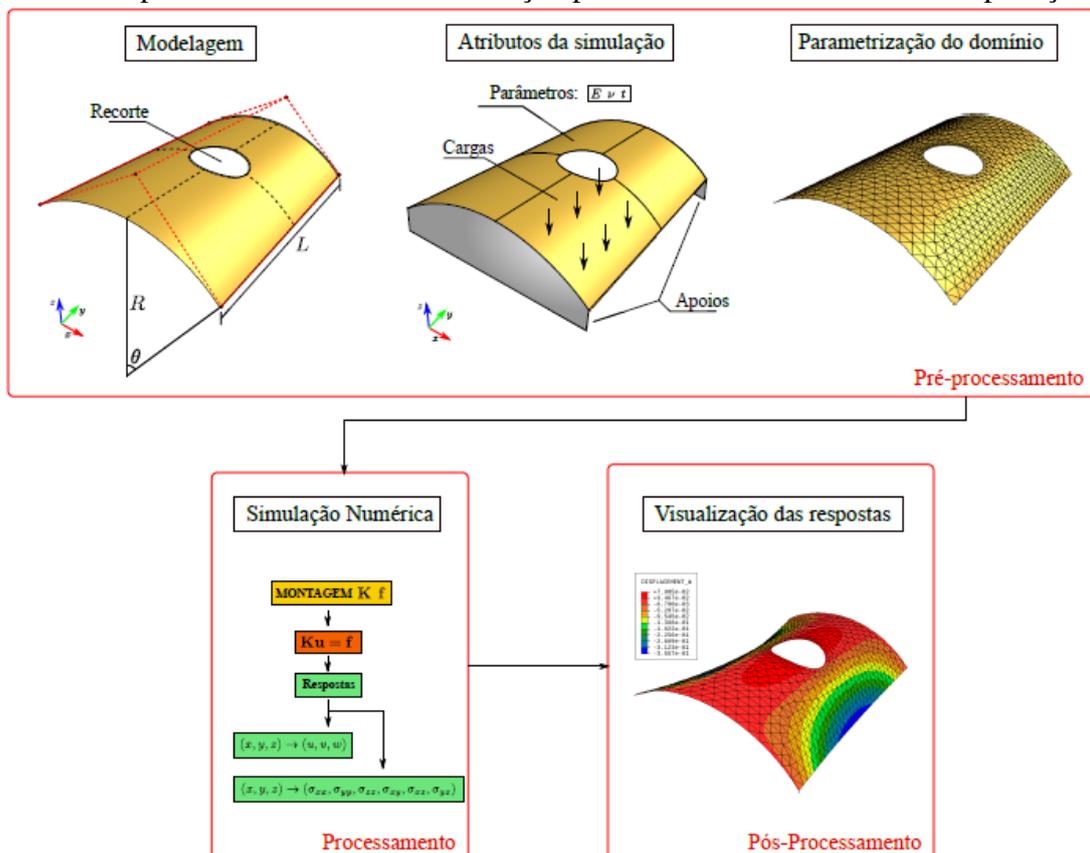
No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e comentários finais da dissertação, bem como as sugestões para trabalhos futuros.

2 MODELAGEM GEOMÉTRICA

A modelagem geométrica é um campo da matemática aplicada que estuda algoritmos e métodos para descrição e modificação de formas geométricas. Ela é amplamente utilizada como base para sistemas de computação gráfica como sistemas CAD (*Computer Aided Design*), que são ferramentas que auxiliam no desenvolvimento de projetos em diversas áreas como engenharia civil, mecânica, arquitetura, indústria automotiva, etc.

Os sistemas CAD são utilizados nas aplicações de engenharia nos sistemas CAE (*Computer Aided Engineering*), que utilizam, de forma integrada, modeladores geométricos e métodos computacionais empregados em simulações numéricas, como por exemplo o Método dos Elementos Finitos (MEF) e a Análise Isogeométrica (AIG). A Figura 1 ilustra como essa integração é realizada nos sistemas CAE, através do exemplo de uma simulação para análise estrutural. Utilizando CAD, a modelagem do problema, a definição de atributos ligados a aplicação numérica e a parametrização do domínio de análise são feitas numa etapa de pré-processamento. A simulação numérica é realizada na etapa de processamento, e a visualização das respostas na etapa de pós-processamento.

Figura 1 – Etapas realizadas em uma simulação para análise estrutural em uma aplicação CAE.



Fonte: Barroso (2022).

Afim de facilitar a integração entre a modelagem e a simulação dos problemas, a Análise Isogeométrica (AIG), proposta por Hughes *et al.* (2005), adota as mesmas funções base utilizadas nos sistemas CAD para descrever curvas e superfícies (e.g. B-Splines e NURBS) nas análises de engenharia feitas pelas ferramentas computacionais CAE. Daí o grande potencial para representação exata de diversas geometrias em qualquer nível de discretização.

Utilizando o conceito isoparamétrico, as mesmas funções são utilizadas para a modelagem geométrica e para a representação do campo de deslocamentos. Portanto, é importante observar que os conceitos de modelagem geométrica descritos neste capítulo não são aplicados apenas à descrição geométrica do problema, mas também definem a forma dos elementos utilizados na simulação e dos campos de resposta da simulação.

Atualmente, as funções NURBS são as mais empregadas na modelagem geométrica. A capacidade de representar de forma exata cônicas e quádricas (como circunferências, cilindros, esferas etc.), além de modelar com precisão geometrias arbitrárias de forma livre, são características importantes das NURBS. Além disso, existem vários algoritmos eficientes e estáveis para geração e modificação desses modelos (COTTRELL *et al.*, 2009).

Do ponto de vista matemático, as NURBS também fornecem propriedades importantes para a análise estrutural, como a da partição da unidade e às relacionadas à sua continuidade, que serão abordadas com mais detalhes posteriormente. Assim, elas são uma representação geométrica comumente considerada em Análises Isogeométricas.

Uma revisão bibliográfica acerca dos conceitos de modelagem geométrica utilizados neste trabalho é apresentada neste capítulo. Uma discussão mais ampla do tema pode ser encontrada na literatura (PIEGL; TILLER, 1997) e (FARIN, 2014).

2.1 B-Splines

É importante abordar, primeiramente, B-Splines para que possamos definir o conceito das NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*). B-Splines são muito utilizadas para modelagem de objetos de geometria livre (*freeform*) por possibilitar o controle da geometria de curvas por meio da manipulação do número e da posição de pontos de controle. É possível citar diversas aplicações que utilizam B-Splines, sendo bastante comum em softwares de modelagem tridimensionais como o Rhinoceros® e em sistemas CAD como o AutoCAD®.

Uma curva B-Spline é representada pela combinação linear de pontos de controle \mathbf{p}_i

e funções de base $N_{i,p}$:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (2.1)$$

onde n é o número de funções de base, p é o grau destas funções e ξ é a coordenada paramétrica.

Outra característica das B-Splines é a capacidade de expressar diferentes segmentos dentro do mesmo espaço paramétrico ao limitar a atuação das funções de base em trechos (i.e. intervalos) de um espaço paramétrico. Tais trechos chamados como *knot spans*, ou simplesmente *spans*, são definidos por um vetor de *knots* (*knot vector*).

O vetor de *knots* é um conjunto de valores não negativos e não decrescentes definidos dentro do intervalo paramétrico da curva $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$. Quando a razão de variação nos valores paramétricos de um vetor é constante, ele é classificado como uniforme. Os vetores de *knots* $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$ e $\Xi = [0, 0, 0.5, 1, 1]$ são uniformes, enquanto $\Xi = [0, 0, 0, 0.3, 0.5, 1, 1, 1]$ não é.

Agora, levando em conta o vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$, as funções de base B-Spline podem ser definidas por:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.3)$$

que consiste na fórmula recursiva de Cox-de Boor (PIEGL; TILLER, 1997). Cada base $N_{i,p}$ contribui ao longo do intervalo paramétrico $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, com o número de bases não nulas em cada *knot span* sempre igual a $p + 1$, como apresentado na Figura 2. Esta propriedade permite que as B-splines sejam avaliadas de forma bastante eficiente.

Podemos calcular o número de bases utilizando o tamanho do vetor de *knots* e o grau da curva através da relação:

$$n = ks - p - 1 \quad (2.4)$$

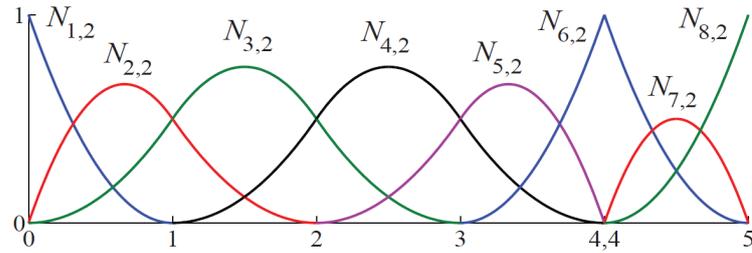
onde n é o número de bases, ks é o tamanho do vetor de *knots* e p é o grau da curva.

Podemos obter a primeira derivada das funções base por meio da seguinte expressão:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.5)$$

Esta derivada é essencial no contexto de Análise Isogeométrica, pois ela é necessária para compor a matriz de rigidez \mathbf{K} .

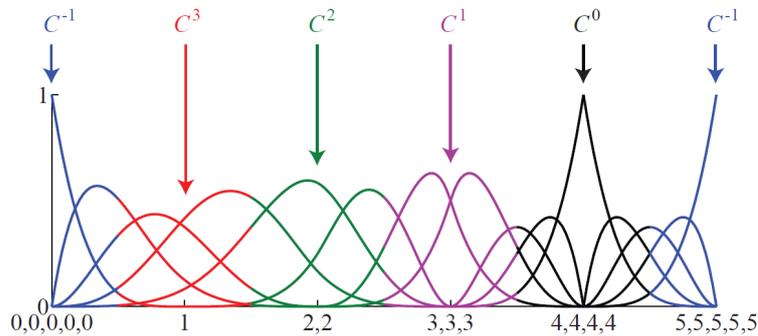
Figura 2 – Funções de base B-Splines $p = 2$ e vetor de $knots$ $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5]$.



Fonte: Cottrell *et al.* (2009).

No interior do vetor de $knots$, os valores paramétricos podem ser repetidos, sendo o número de repetições conhecido como multiplicidade do $knot$. Esse conceito é importante porque afeta a continuidade entre $knot$ spans. Uma das propriedades das B-splines é possuir continuidade C^{p-1} , porém, caso determinado $knot$ passe a possuir uma multiplicidade m ocorrerá uma redução de continuidade entre os $knots$ e a continuidade em sua coordenada paramétrica passa a ser C^{p-m} , como ilustrado na Figura 3.

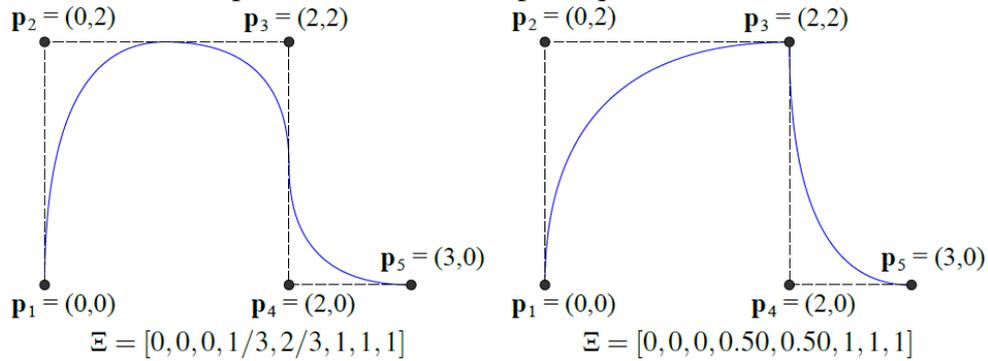
Figura 3 – Funções de base B-Splines e suas continuidades no interior dos $spans$ de um vetor de $knots$ $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5]$.



Fonte: Cottrell *et al.* (2009).

Quando os $knots$ internos possuem uma multiplicidade de $m = p$, ocorre multiplicidade C^0 entre os $knots$, o que fará com que uma das base seja interpoladora ($N_{i,p} = 1$ na posição paramétrica respectiva do $knot$). A Figura 4 compara duas curvas B-Splines quadráticas possuindo os mesmos pontos de controle, mas vetores de $knots$ diferentes. E então podemos perceber o efeito da multiplicidade $m = p$ em um $knot$ interno. Para que os $knots$ nos extremos do vetor de $knots$ funcionem como interpoladores, estes precisam possuir uma multiplicidade de $m = p + 1$. Vetores com essa característica, classificados como vetores com $knots$ abertos, são normalmente utilizados na Análise Isogeométrica, para que haja garantia de que os pontos de controle inicial e final sejam interpoladores.

Figura 4 – Efeito da multiplicidade em uma B-Spline quadrática.



Fonte: Barroso (2022).

As principais características das B-Splines estão listadas abaixo:

1. Não-negatividade:

$$N_{i,p}(\xi) \geq 0; \quad (2.6)$$

2. Partição da unidade:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1; \quad (2.7)$$

3. Suporte compacto: as funções de base $N_{i,p}(\xi)$ são nulas se ξ estiver fora do intervalo $[\xi_1, \xi_{i+p+1}]$;
4. Dado um *knot span*, $p + 1$ funções de base são não nulas neste intervalo;
5. Todas as derivadas de $N_{i,p}$ existem no interior dos *knot spans*. Nos *knots*, as bases são diferenciáveis $p - m$ vezes, sendo m a multiplicidade do *knot*.

2.1.1 Inserção de *knot* e elevação de grau

Inserção de *knot* e elevação de grau (PIEGL; TILLER, 1997) são operações que alteram a descrição de uma curva B-Spline sem que haja qualquer alteração na sua forma. Ao realizamos a inserção de um novo *knot*, um novo valor ξ_i é acrescido ao vetor de *knots* Ξ e, como consequência, aumentamos em um o número de bases $N_{i,p}$ e de pontos de controles. Alguns pontos de controle são alterados afim que se preserve a geometria da curva, como ilustrado na Figura 5. Se inserimos um novo *knot* $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ em um vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$, obtemos os novos pontos de controle após a atualização do polígono de controle, com base nas

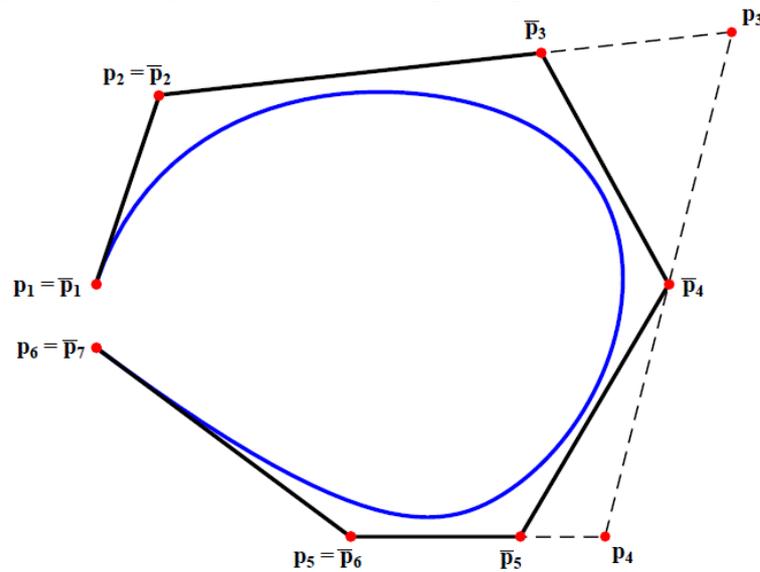
informações do antigos pontos de controle por meio da seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{cases} \mathbf{p}_1, & i = 1, \\ \alpha_i \mathbf{p}_i + (1 - \alpha) \mathbf{p}_{i-1}, & 1 < i < h, \\ \mathbf{p}_{h-1}, & i = h. \end{cases} \quad (2.8)$$

onde h é tamanho do novo vetor de pontos de controle $\bar{\mathbf{p}}$. O parâmetro α é dado por:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k - p, \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k - p + 1 \leq i \leq k, \\ 0, & i \geq k + 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Figura 5 – Inserção de *knot* ($\bar{\xi} = 2$) em curva B-Spline quarática.



Vetor de *knots* antes = [0,0,0,1,3,4,4,4]

Vetor de *knots* depois = [0,0,0,1,2,3,4,4,4]

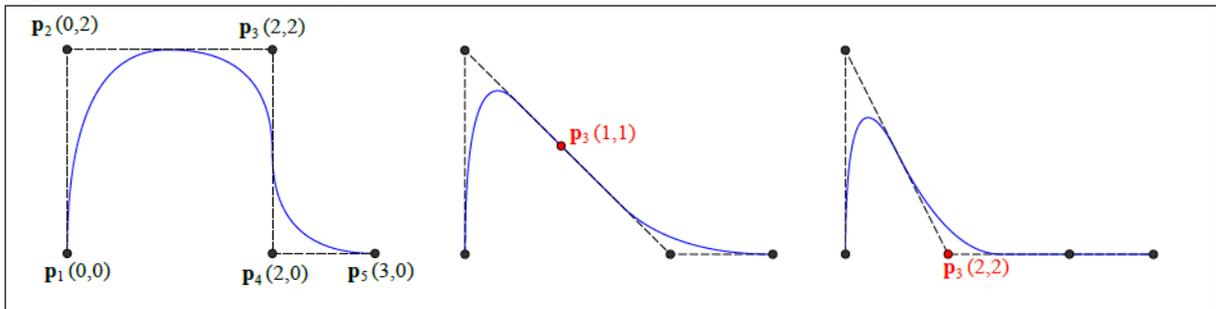
Fonte: Barroso (2022).

A inserção de *knot* tem grande aplicação no ramo de modelagem geométrica, visto que a operação possibilita ao usuário um maior controle local da curva. Inserindo *knots* para que se obtenha uma multiplicidade $m = p$ para determinado valor paramétrico pode-se isolar as alterações ocorridas da modificação do posicionamento dos pontos de controle em intervalos paramétricos e quebrar a continuidade da curva, como podemos observar na Figura 6.

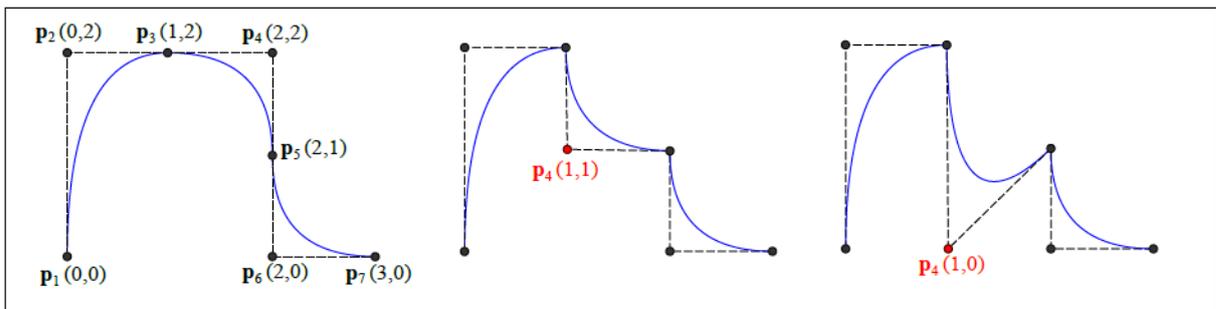
Quanto ao processo de elevação de grau, neste o grau da curva B-Spline é elevado em cada intervalo paramétrico. Nesta operação temos o acréscimo do número de pontos de controle e, também, o acréscimo da multiplicidade de cada *knot* em 1, assim, é garantida inalterada a

continuidade original em cada um deles. É frequentemente utilizada na Análise isométrica, pois como passamos a utilizar funções de forma de ordem superior, a elevação de grau traz uma significativa melhora nas soluções numéricas obtidas. O algoritmo de elevação de grau de B-Splines é mostrado em Piegl e Tiller (1997).

Figura 6 – Efeito da inserção de *knot* na continuidade e controle local de uma curva.



(a) $\Xi = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1]$.



(b) $\Xi = [0, 0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1]$.

Fonte: Barroso (2022).

2.1.2 Refinamentos

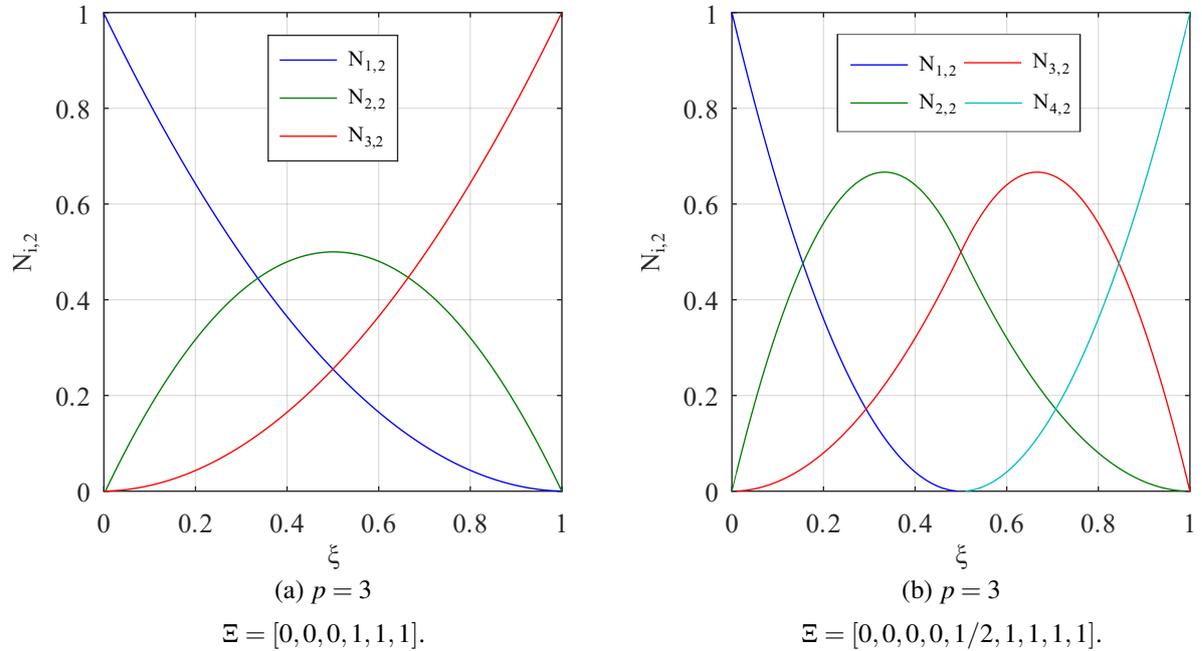
Três tipos de processos de refinamento são utilizados nas B-Splines: *inserção de knot*, *elevação de grau* e *refinamento k*. Para os dois primeiros casos, existem refinamentos semelhantes no MEF, porém, para o último tipo, não existe processo semelhante, sendo essa uma das vantagens apresentadas pela AIG.

No refinamento por *inserção de knot*, mostrado na Figura 7, um novo *knot* ξ é inserido no vetor Ξ e assim cria-se uma nova base e um novo ponto de controle, sem que haja alteração na geometria da curva. Semelhante ao *refinamento h* usado no MEF, esse refinamento aumenta o número de graus de liberdade disponíveis para a análise estrutural.

No refinamento por *elevação de grau*, mostrado na Figura 8, o grau da curva é elevado aumentando a multiplicidade do *knot* em 1 dentro do intervalo paramétrico, mantendo sua continuidade. Esse refinamento proporciona funções de forma de ordem superior para

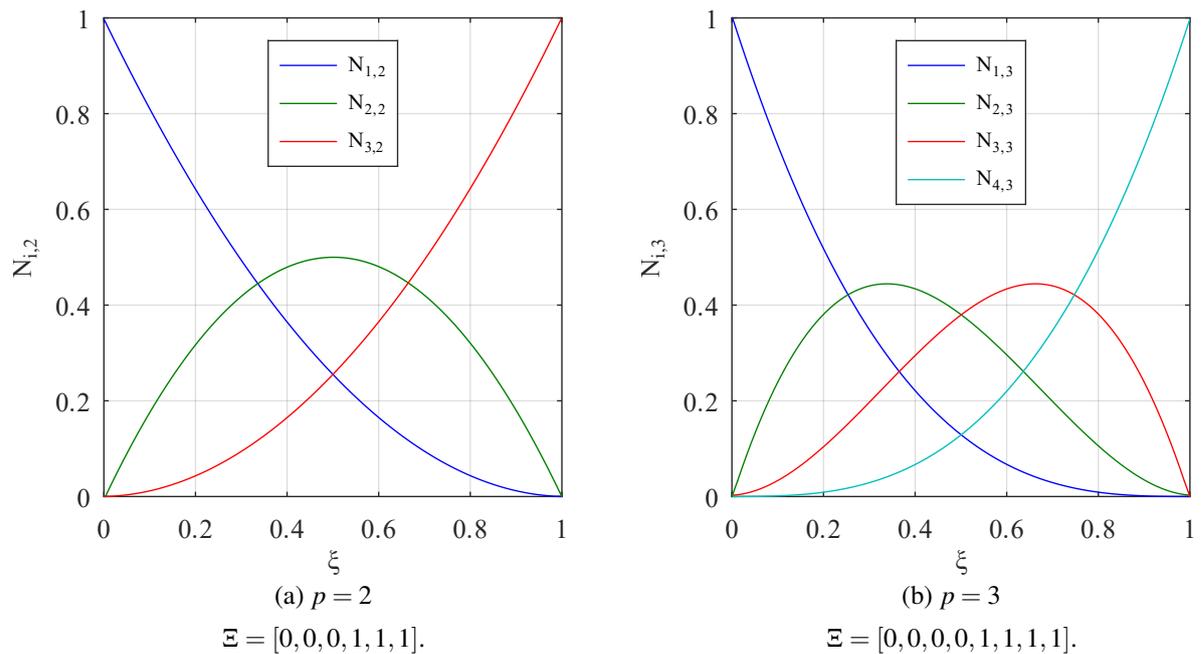
a análise estrutural, o que é uma melhoria do ponto de vista numérico e é comparável ao refinamento p realizado no MEF.

Figura 7 – Exemplo de funções de base quadrática com inserção de *knot*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

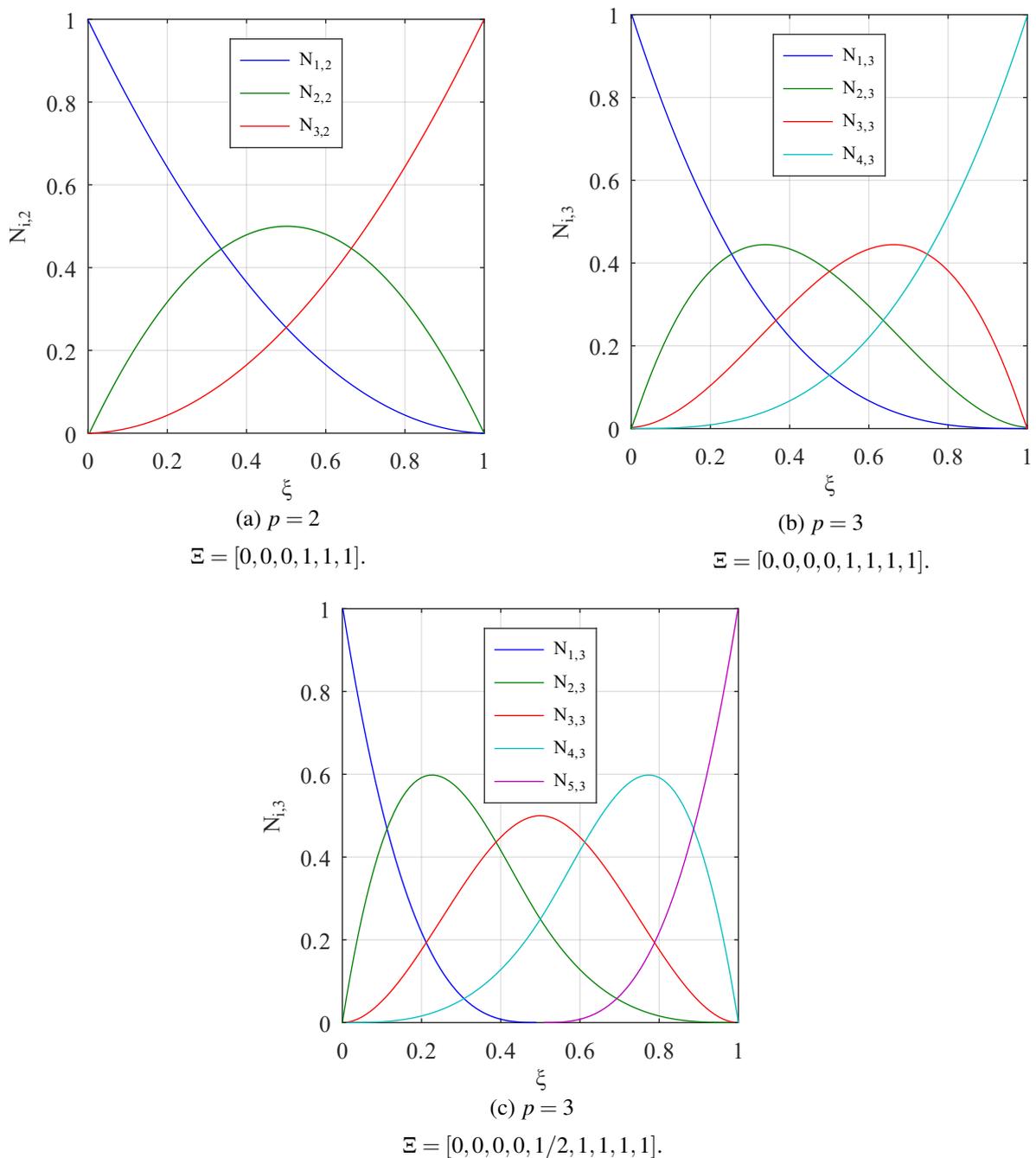
Figura 8 – Exemplo de funções de base com elevação de grau de quadrática para cúbica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dois processos citados são combinados no *refinamento k*, mostrado na Figura 9, para aumentar o grau do polinômio e a continuidade entre os *knots*. Neste refinamento é realizado primeiramente uma elevação do grau e, em seguida, uma inserção de *knots*. É importante observar que o MEF não pode realizar esse refinamento devido a restrições impostas pelas funções de forma que utiliza.

Figura 9 – Exemplo de refinamento *k*.



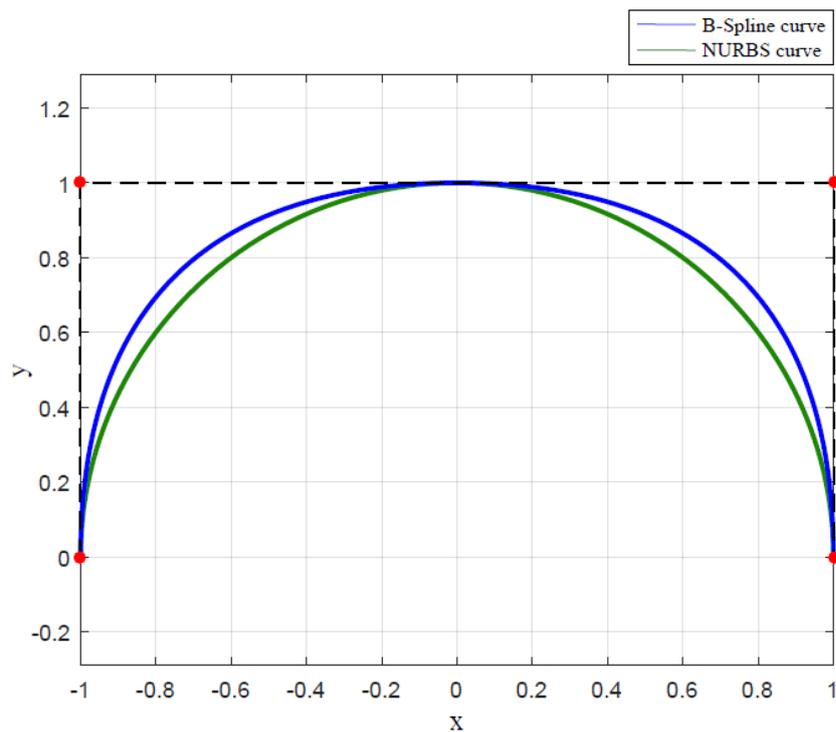
Fonte: Elaborada pelo autor.

O trabalho de Piegl e Tiller (1997) fornece mais informações sobre as implementações computacionais utilizadas para os processos de refinamento especificados.

2.2 NURBS

B-Splines são bastante flexíveis, mas são limitadas em representar curvas polinomiais, impossibilitando a modelagem de diversas geometrias importantes, como círculos e elipses, de forma exata. Para resolver esse problema, foram desenvolvidas as NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*), que são B-Splines com bases racionais e com vetores de *knots* não uniformes. Uma semicircunferência modelada com uma NURBS, e um arco circular modelado uma B-Spline, onde foram utilizados os mesmos pontos de controle da NURBS, mas sem considerar o peso destes, são comparadas na Figura 10.

Figura 10 – Arco de 180° construído com B-Spline e semicircunferência construída com NURBS.



Fonte: Barroso (2022).

As NURBS possuem grande aceitação na indústria de modelagem computacional e podem ser encontradas nos mais diversos modeladores geométricos da atualidade. Sua vasta aplicação pode ser justificada pela suas vantagens (PIEGL; TILLER, 1997):

1. Representar modelos matemáticos padrão e de formas livres, tendo a mesma base de dados para armazenar os dois;

2. Possibilitar descrição de formas variadas por meio da manipulação dos pontos de controle e pesos;
3. Podem ser avaliadas de forma rápida e numericamente estável;
4. Transformações geométricas como translação, espelhamento etc. podem ser aplicadas diretamente aos pontos de controle.
5. São capazes de reproduzir outras representações paramétricas, como as próprias B-Splines, Bézier racionais e não-rationais.

Uma curva NURBS é representada por uma base racional $R_{i,p}$ e pontos de controle \mathbf{p}_i através da expressão:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (2.10)$$

onde n é o número de bases da curva e p é o grau da curva NURBS. As funções de base racional são dadas por:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}}} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} \quad (2.11)$$

onde $N_{i,p}(\xi)$ são funções de base B-Splines, w_i são os pesos relativos a cada ponto de controle e $W(\xi)$ a função peso:

$$W(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}} \quad (2.12)$$

A modificação de uma curva NURBS correspondente a variação do peso do segundo ponto de controle, é apresentada na Figura 11. É possível ver que, apenas alterando os pesos dos mesmos pontos de controles, podemos representar várias curvas distintas.

Podemos obter a primeira derivada das bases NURBS por meio da regra de derivação do quociente:

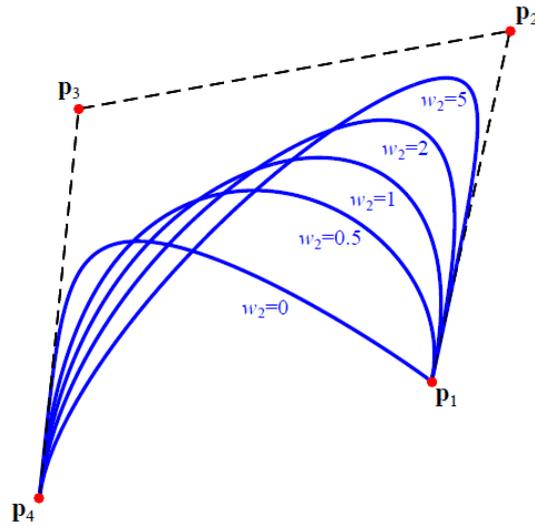
$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = w_i \frac{W(\xi) N'(\xi) - W'(\xi) N_{i,p}(\xi)}{W^2(\xi)} \quad (2.13)$$

onde a derivada da função peso é dada por:

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N'_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}} \quad (2.14)$$

Vale destacar que as funções de base racionais $R_{i,p}(\xi)$ herdam as mesmas características e os procedimentos de refinamentos descritos anteriormente para as funções de base B-Splines $N_{i,p}(\xi)$.

Figura 11 – Efeito da variação do peso nas curvas.



Fonte: Barroso (2022).

2.2.1 Superfícies NURBS

Embora placas e cascas sejam estruturas tridimensionais, ao representarmos estas por suas superfícies médias, as análises passam a utilizar modelos de superfícies e, portanto, é suficiente à representação do domínio de análise. Uma superfície NURBS definida por um produto tensorial é obtida através do produto de duas bases univariantes NURBS. Dessa forma, uma superfície S é definida por um tensor de pontos de controle $\mathbf{P}(n \times m)$, onde com uma dada base NURBS de grau p na direção ξ com vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ e outra base NURBS de grau q na direção η com vetor de *knots* $\Omega = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+p+1}]$. Então, a superfície pode ser expressa por:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{ij} \quad (2.15)$$

onde $R_{i,j}(\xi, \eta)$ é a função de base racional bivalente dada por:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{ij}}{W(\xi, \eta)} \quad (2.16)$$

sendo $N_{i,p}(\xi)$ e $N_{j,q}(\eta)$ as funções de base B-Splines, w_{ij} os pesos relativos a cada ponto de controle e $W(\xi, \eta)$ a função peso bivalente:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m w_{\hat{i}\hat{j}} N_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) \quad (2.17)$$

As derivadas parciais das funções de base bivariantes são necessárias nas formulações de elementos isogeométricos bidimensionais. Podemos obter as derivadas parciais por meio da

regra da derivação do quociente, logo:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}(\xi, \eta) = w_{ij} \frac{W(\xi, \eta) N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta)} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_{i,j}(\xi, \eta) = w_{ij} \frac{W(\xi, \eta) N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta)}$$

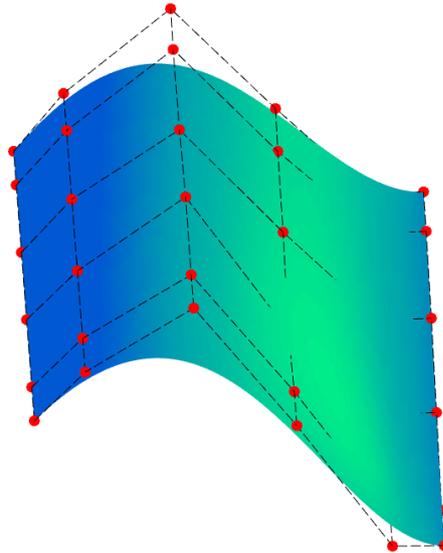
onde as derivadas parciais de $W(\xi, \eta)$ dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m w_{\hat{i}\hat{j}} N'_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m w_{\hat{i}\hat{j}} N_{\hat{i},p}(\xi) N'_{\hat{j},q}(\eta)$$

A Figura 12 mostra um exemplo de superfície NURBS.

Figura 12 – Exemplo de superfície NURBS.



Fonte: Barroso (2015).

3 FORMULAÇÃO ISOGEOMÉTRICA PARA ANÁLISE LINEAR DE CASCAS

As pesquisas envolvendo a análise isogeométrica de cascas começaram quase logo após a proposta do conceito de AIG (COTTRELL *et al.*, 2009) e a partir de então, várias formulações foram propostas no contexto de análises lineares e não lineares.

A teoria de Kirchhoff-Love foi contexto para os primeiros passos no estudo estrutural de cascas com análise isogeométrica. Uma formulação isogeométrica de Kirchhoff-Love foi desenvolvida por Kiendl *et al.* (2009), que estudou estruturas de cascas compostas de múltiplos *patches* utilizando o método da faixa de flexão (*bending strip method*) para garantir a continuidade C^1 entre os *patches*. Por assumir as hipóteses de Kirchhoff-Love, a formulação dispensava a utilização de graus de liberdade de rotação ao custo da necessidade de uma continuidade C^1 entre os elementos.

A maior continuidade fornecida pelas Splines facilita o uso das formulações de casca de Kirchhoff-Love. No entanto, a utilização dessa teoria ocasiona dificuldades na imposição das condições de contorno de rotação e necessitam de estratégias para conexão dos *patches*, além da restrição da limitação à análise de cascas finas imposta pela própria teoria.

Da mesma forma, formulações considerando o cisalhamento transversal através da teoria de Reissner-Mindlin também tem sido estudadas. A primeira formulação para análise linear isogeométrica foi proposta por Uhm e Youn (2009) baseada na abordagem de sólido degenerado, onde vetores diretores são utilizados para descrever o comportamento ao longo espessura. Embora na AIG os vetores normais à superfície possam ser calculados direta e exatamente em qualquer ponto, os vetores diretores usados para definir os graus de liberdade de rotação e os sistemas de bases locais eram aproximados, ainda como eram nas formulações de casca baseadas nos polinômios de Lagrange. Isto fazia com que à medida que a ordem das funções de base NURBS aumentasse, a qualidade da aproximação diminuísse.

O estudo de cascas de Reissner-Mindlin baseadas no conceito de sólido degenerado veio sendo estendido em diversos outros trabalhos. Benson *et al.* (2010) desenvolveu elementos isogeométricos de base NURBS para resolução de problemas elástico-lineares e elastoplásticos não lineares.

Dornisch *et al.* (2013) propôs uma formulação para análise não linear isogeométrica de cascas. Agora utilizando vetores diretores calculados com precisão. O autor propôs a utilização de vetores diretores exatos, desenvolvendo uma formulação que obtém os vetores dos pontos de controle a partir dos vetores calculados exatamente nos pontos de integração,

resolvendo um sistema de equações.

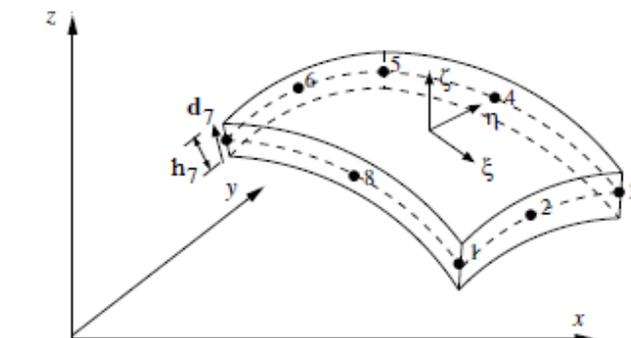
Kang e Youn estenderam a utilização para análise de cascas topologicamente complexas (KANG; YOUN, 2015) e otimização de forma e de topologia de superfície aparadas (KANG; YOUN, 2016a; KANG; YOUN, 2016b). Em uma pesquisa mais recente, Hao *et al.* (2019) utilizou a análise isogeométrica na obtenção de cargas de flambagem e otimização de cascas complexas com rigidez variável.

Nos trabalhos de Ghadimi e Hassani os vetores diretores são obtidos de maneira semelhante à técnica sugerida por Dornisch *et al.* (2013) resolvendo um sistema de equações em um *patch*, agora utilizando os vetores diretores nos pontos de Greville como valores conhecidos para o sistema de equações (GHADIMI; HASSANI, 2021; GHADIMI; HASSANI, 2023).

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da formulação isogeométrica para análise linear de cascas baseada nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado (COOK *et al.*, 2002). A formulação é dotada de simplicidade e generalidade, sendo capaz de modelar geometrias diversas, além de possuir capacidade de tratar cascas tanto de parede fina como espessa (SOUSA JR, 2000). A formulação clássica utilizada para elementos finitos (AHMAD *et al.*, 1970) foi adaptada neste trabalho para elementos NURBS de grau arbitrário.

No modelo de sólido degenerado, a geometria da casca é representada por sua superfície média e pelo vetor normal à esta superfície (\mathbf{v}_3). Pontos fora da superfície média são definidos pela coordenada ζ . Observa-se que $-1 \leq \xi \leq +1$, $-1 \leq \eta \leq +1$ são as coordenadas paramétricas tangentes à superfície da casca, e $-1 \leq \zeta \leq +1$ é a coordenada paramétrica perpendicular à superfície. A Figura 13 mostra que h_a é a espessura no nó a , enquanto u_a , v_a e w_a são os deslocamentos nodais da superfície média.

Figura 13 – Coordenadas paraméricas de um elemento de casca.



Fonte: de Borst *et al.* (2012).

A Figura 14 apresenta um exemplo de modelo sólido degenerado, detalhando a

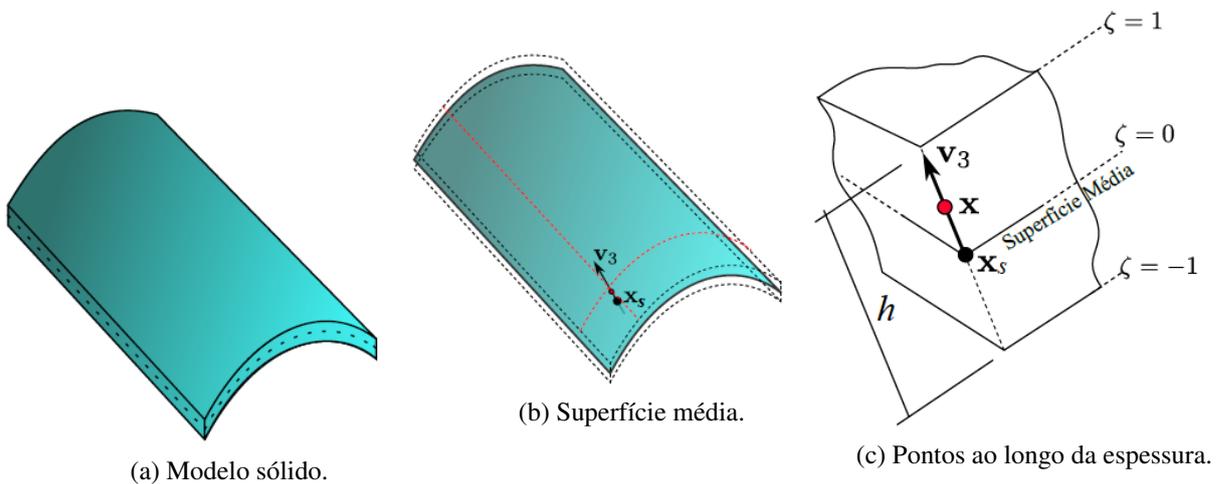
definição dos pontos ao longo da espessura. Desta forma, um ponto \mathbf{x} do sólido é definido por um ponto \mathbf{x}_s da superfície média, pelo vetor normal \mathbf{v}_3 em \mathbf{x}_s e pela espessura h em \mathbf{x}_s , por:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_s(\xi, \eta) + \zeta \frac{h(\xi, \eta)}{2} \mathbf{v}_3(\xi, \eta) \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{v}_3 = (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z})^T$ no qual v_{3x} , v_{3y} e v_{3z} são as componentes da reta normal à superfície média. Assim, obtemos as coordenadas cartesianas fazendo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{Bmatrix} + \zeta \frac{h}{2} \begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Figura 14 – Modelo do sólido degenerado.



Fonte: Adaptado de Barroso (2022).

Na AIG, a geometria de uma casca é representada por uma combinação linear de np funções de base R_a da superfície NURBS e pontos de controle do elemento $\mathbf{x}_a = (x_a, y_a, z_a)$, como:

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^{np} R_a \mathbf{x}_a + \sum_{a=1}^{np} \zeta R_a \frac{h_a}{2} \mathbf{v}_{3a} \quad (3.3)$$

Assim, além das coordenadas cartesianas, esta formulação também requer a definição do vetor \mathbf{v}_{3a} e da espessura h_a para cada ponto de controle. É importante notar que aqui o produto $h\mathbf{v}_3$ é aproximado a partir dos valores dos pontos de controle, no lugar de aproximar h e \mathbf{v}_3 separadamente.

3.1 Deslocamentos e Deformações

O deslocamento \mathbf{u} de um ponto \mathbf{x}^0 para uma nova configuração \mathbf{x}^t (ver Figura 15) é dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}^t - \mathbf{x}^0 = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_{v_3} = \mathbf{u}_s + \zeta \frac{h}{2} (\mathbf{v}_3^t - \mathbf{v}_3^0) \quad (3.4)$$

Considerando a Equação (3.3), utilizando o conceito isoparamétrico, as mesmas funções de base utilizadas para descrever a geometria são utilizadas para aproximar o campo dos deslocamentos:

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{np} R_a \mathbf{u}_a + \sum_{a=1}^{np} \zeta R_a \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{3a}^0) \quad (3.5)$$

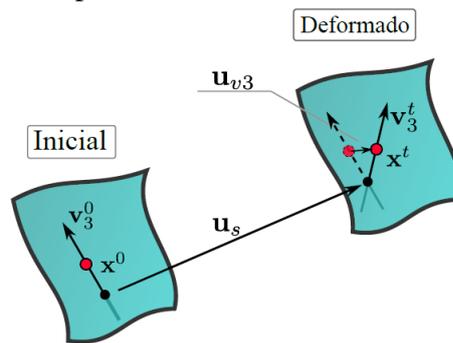
onde \mathbf{v}_{3a}^0 e \mathbf{v}_{3a}^t são os vetores normais associados aos pontos de controles, na configuração inicial e configuração deformada da estrutura, respectivamente. Os deslocamentos podem ser escritos de forma compacta como:

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{np} (R_a \mathbf{u}_a + H_a \mathbf{p}_a) \quad (3.6)$$

onde

$$H_a = R_a \zeta \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a = \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{3a}^0) \quad (3.7)$$

Figura 15 – Deslocamento de um ponto arbitrário no modelo de sólido degenerado.



Fonte: Adaptado de Barroso (2022).

Considerando pequenos deslocamentos e rotações, a rotação do vetor normal \mathbf{v}_{3a} pode ser expressa como a soma de duas rotações independentes α_a e β_a em torno de eixos locais \mathbf{v}_{1a} e \mathbf{v}_{2a} :

$$\mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{3a}^0 = -\mathbf{v}_{2a} \alpha_a + \mathbf{v}_{1a} \beta_a \quad (3.8)$$

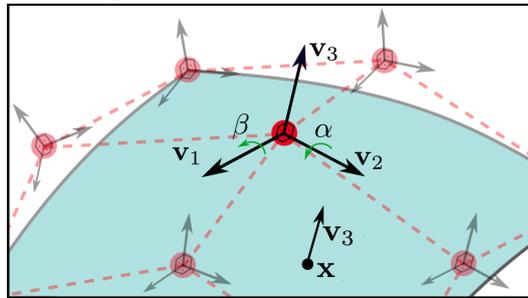
onde $\mathbf{v}_{1a} = (v_{1ax}, v_{1ay}, v_{1az})^T$ e $\mathbf{v}_{2a} = (v_{2ax}, v_{2ay}, v_{2az})^T$ são definidos como:

$$\text{Se } \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}^t \neq 0, \begin{cases} \mathbf{v}_{1a} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}}{\|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}\|} \\ \mathbf{v}_{2a} = \mathbf{v}_{3a} \times \mathbf{v}_{1a} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{Se } \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a} = 0, \begin{cases} \mathbf{v}_{2a} = \frac{\mathbf{v}_{3a} \times \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_{3a} \times \mathbf{e}_1\|} \\ \mathbf{v}_{1a} = \mathbf{v}_{2a} \times \mathbf{v}_{3a} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são vetores unitários nos eixos x , y e z . Os vetores diretores \mathbf{v}_{1a} , \mathbf{v}_{2a} e \mathbf{v}_{3a} são perpendiculares entre si, conforme ilustrado na Figura 16.

Figura 16 – Vetores diretores nos pontos de controle da casca.



Fonte: Adaptado de Barroso (2022).

Ao substituírmos a Equação (3.8) na Equação (3.7) obtemos:

$$\mathbf{p}_a = \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{3a}^0) = \frac{h_a}{2} (-\mathbf{v}_{2a} \alpha_a + \mathbf{v}_{1a} \beta_a) = \mathbf{p}_a^\alpha \alpha_a + \mathbf{p}_a^\beta \beta_a \quad (3.11)$$

Portanto, os deslocamentos no interior da casca são dados por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} R_a \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{Bmatrix} + \sum_{a=1}^{np} R_a \zeta \frac{h_a}{2} \begin{Bmatrix} p_{a_x}^\alpha \alpha + p_{a_x}^\beta \beta \\ p_{a_y}^\alpha \alpha + p_{a_y}^\beta \beta \\ p_{a_z}^\alpha \alpha + p_{a_z}^\beta \beta \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Finalmente, o campo de deslocamentos pode ser escrito de forma matricial como:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_a & p_{a_x}^\beta H_a \\ 0 & R_a & 0 & p_{a_y}^\alpha H_a & p_{a_y}^\beta H_a \\ 0 & 0 & R_a & p_{a_z}^\alpha H_a & p_{a_z}^\beta H_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \alpha_a \\ \beta_a \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \mathbf{N}_a \mathbf{u}_a = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (3.13)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}$ são os deslocamentos no interior do sólido (o símbolo $\hat{\mathbf{u}}$ é utilizado para diferenciar os deslocamentos dos graus de liberdade dos pontos de controle, que são dados por \mathbf{u}) e \mathbf{N} é a matriz de aproximação dos deslocamentos da estrutura. Tal matriz tem formato definido pelas submatrizes \mathbf{N}_a :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{N}_{np} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_a & p_{a_x}^\beta H_a \\ 0 & R_a & 0 & p_{a_y}^\alpha H_a & p_{a_y}^\beta H_a \\ 0 & 0 & R_a & p_{a_z}^\alpha H_a & p_{a_z}^\beta H_a \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Considerando que os deslocamentos e rotações são pequenas, as deformações podem ser calculadas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ w_{,x} + u_{,z} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \mathbf{B}^{(a)} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \alpha_a \\ \beta_a \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (3.15)$$

A matriz deformação-deslocamento do elemento ($\mathbf{B}^{(a)}$) é dada por:

$$\mathbf{B}^{(a)} = \begin{bmatrix} R_{a,x} & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,x} \\ 0 & R_{a,y} & 0 & p_{a_y}^\alpha H_{a,y} & p_{a_y}^\beta H_{a,y} \\ 0 & 0 & R_{a,z} & p_{a_z}^\alpha H_{a,z} & p_{a_z}^\beta H_{a,z} \\ R_{a,y} & R_{a,x} & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,y} + p_{a_y}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,y} + p_{a_y}^\beta H_{a,x} \\ R_{a,z} & 0 & R_{a,x} & p_{a_x}^\alpha H_{a,z} + p_{a_z}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,z} + p_{a_z}^\beta H_{a,x} \\ 0 & R_{a,z} & R_{a,y} & p_{a_y}^\alpha H_{a,z} + p_{a_z}^\alpha H_{a,y} & p_{a_y}^\beta H_{a,z} + p_{a_z}^\beta H_{a,y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde

$$H_{a,x} = R_{a,x} \zeta + R_a \zeta_{,x}, \quad H_{a,y} = R_{a,y} \zeta + R_a \zeta_{,y} \quad \text{e} \quad H_{a,z} = R_{a,z} \zeta + R_a \zeta_{,z}$$

É importante notar que a matriz deformação-deslocamento (\mathbf{B}) tem o mesmo padrão da matriz (\mathbf{N}) mostrada na Equação (3.14).

Para que possamos calcular a matriz deformação-deslocamento se faz necessário o cálculo das derivadas das funções de base em relação às coordenadas cartesianas (x, y, z). Contudo, como as funções base R_a estão definidas em função das coordenadas paramétricas

(ξ, η, ζ) , as derivadas serão obtidas por meio da utilização da matriz Jacobiana (\mathbf{J}):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum R_{a,\xi} (x_a + \zeta \frac{h_a}{2} v_{3a_x}) & \sum R_{a,\xi} (y_a + \zeta \frac{h_a}{2} v_{3a_y}) & \sum R_{a,\xi} (z_a + \zeta \frac{h_a}{2} v_{3a_z}) \\ \sum R_{a,\eta} (x_a + \zeta \frac{h_a}{2} v_{3a_x}) & \sum R_{a,\eta} (y_a + \zeta \frac{h_a}{2} v_{3a_y}) & \sum R_{a,\eta} (z_a + \zeta \frac{h_a}{2} v_{3a_z}) \\ \sum R_a \frac{h_a}{2} v_{3a_x} & \sum R_a \frac{h_a}{2} v_{3a_y} & \sum R_a \frac{h_a}{2} v_{3a_z} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} R_{a,x} \\ R_{a,y} \\ R_{a,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} R_{a,\xi} \\ R_{a,\eta} \\ R_{a,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Além das funções R_a , que aproximam o deslocamento da superfície média dos elementos, também são consideradas as derivadas de ζ , utilizadas para aproximar os deslocamentos ao longo da espessura da casca:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{a,x} \\ \zeta_{a,y} \\ \zeta_{a,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \zeta_{a,\xi} \\ \zeta_{a,\eta} \\ \zeta_{a,\zeta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \zeta_{a,\xi} \\ \zeta_{a,\eta} \\ \zeta_{a,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.2 Tensões

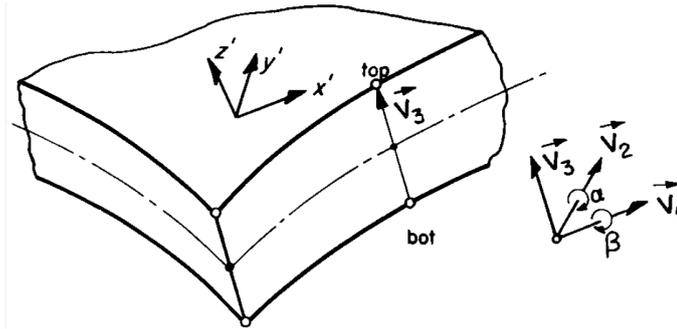
Considerando material isotrópico, homogêneo e com comportamento linear elástico, se torna permitido a utilização da Lei de Hooke generalizada.

Contudo, a tensão normal na direção da espessura ζ será negligenciada devido às hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin. Assim, para um ponto na superfície nós definimos um eixo z' normal aos dois outros eixos ortogonais x' e y' tangentes a ela (Figura 17) a relação entre as tensões e as deformações neste sistema local será dada como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} E' & \nu E' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu E' & E' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^* \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (3.20)$$

onde $E' = E/(1 - \nu^2)$, $G = 0.5E/(1 + \nu)$ e $G^* = 5G/6$ para material homogêneo, sendo E e ν o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, respectivamente. O fator de correção do cisalhamento (5/6) é utilizado devido à distribuição aproximada das deformações de cisalhamento considerada pela teoria de Reissner-Mindlin (COOK *et al.*, 2002). Note que a Equação (3.20) garante que $\sigma'_z = 0$ e fornece condições de tensão plana em cada camada paralela à superfície média da casca.

Figura 17 – Coordenadas locais do elemento de casca geral.



Fonte: Adaptado de Ahmad *et al.* (1970).

O sistema local do elemento, onde as propriedades materiais da casca são definidas, é dado pelos vetores diretores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 , de forma que sejam paralelos aos eixos x' , y' , z' , respectivamente. As propriedades dos materiais são transformadas para o sistema global do problema, onde a matriz de deformação-deslocamento foi definida e o equilíbrio da estrutura é estabelecido.

Na Equação (3.20), o estado de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}'$, definido no sistema de coordenadas local $x'y'z'$ e pode ser obtido por meio da relação (COOK *et al.*, 2002):

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & l_2 n_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & l_3 n_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Aqui, optamos por escrever a matriz em sua forma padrão apresentada nas formulações de elementos sólidos contínuos, em função dos cossenos diretores dos vetores do triedro \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 .

Dessa forma, os valores de l_i , m_i e n_i são os mesmos para v_{ix} , v_{iy} e v_{iz} , respectivamente, para $i = 1, 2, 3$.

Assim, da mesma maneira, podemos obter a relação de transformação das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}' \quad (3.23)$$

e a relação constitutiva no sistema global pode ser obtida pela substituição das Equações (3.20) e (3.21) na Equação (3.23):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{T}^T \mathbf{C}' \mathbf{T} \quad (3.24)$$

3.3 Equações de Equilíbrio

Na AIG, as equações de equilíbrio para análise estática podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Tendo obtido o campo de deformações, no presente desenvolvimento, obteremos as expressões para aplicação do PTV. O equilíbrio ocorre quando o trabalho virtual interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW_{ext}), qualquer que seja o campo de deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}$:

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad (3.25)$$

A integral relacionada ao trabalho virtual interno e as integrais relacionadas aos trabalhos virtuais externos, são realizadas, de forma análoga ao procedimento tomado no desenvolvimento de uma formulação do estado triplo de tensões para um sólido, ao longo do volume da estrutura:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.26)$$

$$\delta W_{ext} = \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dS + \int_A \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dA + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (3.27)$$

onde $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações virtuais, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das tensões, \mathbf{b} é o vetor respectivo às forças de corpo, \mathbf{q}_S é o vetor das cargas de arestas prescritas em uma aresta de comprimento S , \mathbf{q} é o vetor das forças de superfície prescritas em A , $\delta \mathbf{u}_i$ é o deslocamento virtual no ponto de aplicação de \mathbf{p}_i , que são as cargas concentradas aplicadas em n pontos sobre a estrutura.

Utilizando a Equação (3.15) e considerando apenas pequenos deslocamentos, as deformações virtuais são dadas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (3.28)$$

Assim, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (3.29)$$

onde o vetor das forças internas da estrutura (\mathbf{g}) é dado por:

$$\mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.30)$$

Utilizando a Equação (3.14), o trabalho virtual externo pode ser escrito como:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \delta \mathbf{u}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \delta \mathbf{u}^T \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA + \delta \mathbf{u}^T \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j^T \mathbf{p}_j = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (3.31)$$

Portanto, o vetor das cargas externas (\mathbf{f}) é dado por:

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA + \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j^T \mathbf{p}_j \quad (3.32)$$

Nesta expressão, a matriz \mathbf{N}_j corresponde à matriz \mathbf{N} da Equação (3.14) avaliada no ponto de aplicação da força j .

As equações de equilíbrio do modelo discreto são obtidas substituindo as Equações (3.29) e (3.31) na expressão do trabalho virtual:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (3.33)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ são arbitrários, as equações de equilíbrio da AIG são dadas por:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (3.34)$$

Substituindo a relação tensão-deformação na expressão do vetor de forças internas e utilizando a Equação (3.15), pode-se escrever:

$$\mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.35)$$

onde a matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.36)$$

Finalmente, substituindo a relação $\mathbf{g} = \mathbf{K} \mathbf{u}$ na Equação (3.34), podemos escrever as equações de equilíbrio como:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.37)$$

A solução da Equação (3.37) permite a determinação dos graus de liberdade do problema (\mathbf{u}), que correspondem aos deslocamentos dos pontos de controle do modelo. Após o cálculo do vetor de deslocamentos \mathbf{u} , as deformações são calculadas utilizando a Equação (3.15) e as tensões são calculadas utilizando a Equação (3.20), completando a solução do problema de análise de tensões.

3.4 Elemento Isogeométrico

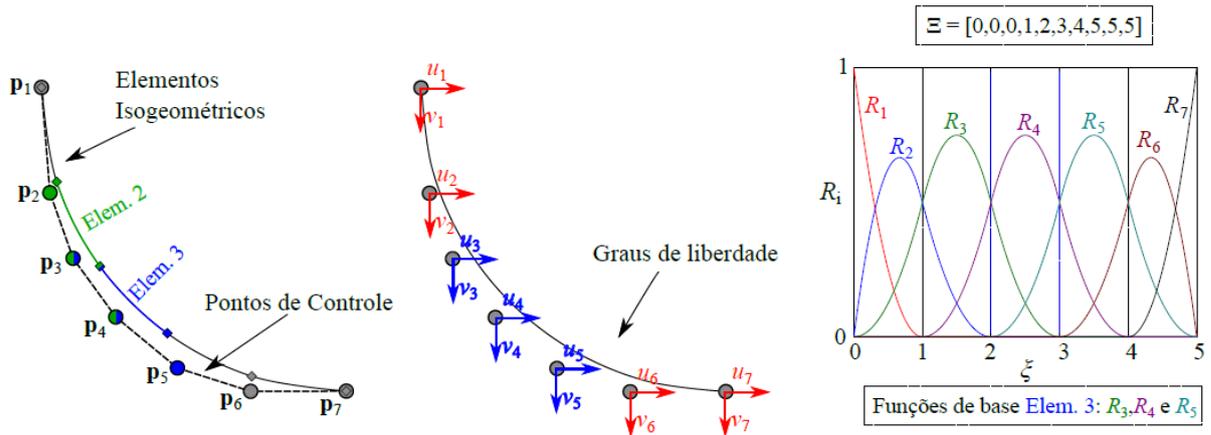
Conforme descrito no Capítulo 2, na AIG as funções de forma (NURBS) são definidas em um *patch* que é dividido em *spans*. *Patches* e *spans* podem ser utilizados para integrar matrizes de rigidez e vetores de força, podendo ser interpretados como elementos no contexto da AIG, conforme abordado em Cottrell *et al.* (2009).

É importante notar que apenas $p + 1$ funções de base são não nulas em um determinado *span* devido à característica de suporte compacto (Figura 18). Como apenas os termos de \mathbf{K} associados às bases não nulas no *span* devem ser integrados, usar o *span* como o equivalente do elemento no MEF resulta em uma redução nos custos computacionais. A matriz de rigidez da estrutura é então calculada somando as contribuições dos elementos isogeométricos. Este somatório é idêntico ao processo de montagem da matriz de rigidez global pelo Método da Rigidez Direta.

Com um número fixo de bases que são não nulas no elemento e cada base associada a um ponto de controle diferente, os pontos de controle que tem influência em um determinado elemento (*span*) são facilmente determinados. A diferença principal em relação ao MEF é que os pontos de controle associados a um determinado elemento AIG geralmente não estão contidos neste elemento, já que os pontos de controle não são interpolados pelas NURBS. Os elementos, bases não nulas e pontos de controle associados de uma malha isogeométrica 1D são mostrados em cores na Figura 18.

A Figura 19 mostra uma superfície com malha 4×4 , ou seja, 16 elementos e 49 pontos de controle. Notavelmente, os pontos de controle em uma AIG não estão nos lados dos elementos como estão no MEF. Na realidade, os pontos de controle raramente estão sobre a superfície NURBS, exceto em bordas retas. Neste caso, os limites dos elementos correspondem ao mapeamento dos limites de cada *span* sobre a geometria da estrutura.

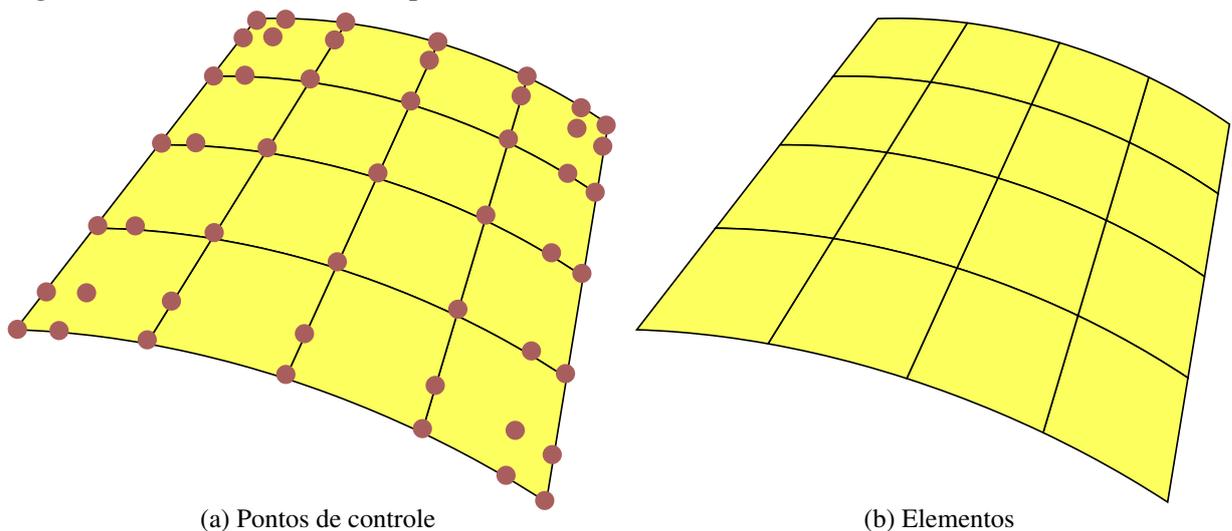
Figura 18 – Geometria de um cabo, graus de liberdade e funções de base.



Fonte: Barroso (2015).

A representação paramétrica é utilizada pelas superfícies e curvas NURBS. Assim, as superfícies NURBS são definidas no espaço paramétrico (ξ, η) de acordo com os *knot vectors* utilizados, sendo feito um mapeamento para o espaço no espaço tridimensional (x, y, z) . A estrutura real (placa ou casca), que é o modelo físico, deve assim ser representada parametricamente. A geometria da estrutura depende de uma malha de controle, definida pelos pontos de controle p_i . Como foi dito anteriormente, a geometria real dos elementos corresponde ao mapeamento dos limites dos *knot spans* para a geometria real da superfície.

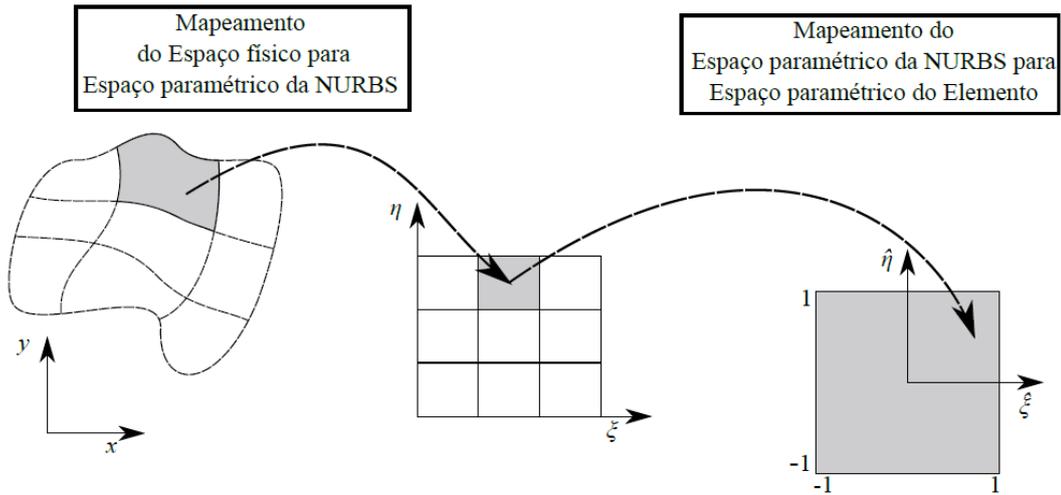
Figura 19 – Modelo de uma superfície NURBS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao utilizar a integração por quadratura de Gauss, um mapeamento extra é necessário, visto que esses pontos são definidos no intervalo paramétrico $[-1, 1]$. Esses mapeamentos são mostrados na Figura 20, para o caso bidimensional.

Figura 20 – Mapeamentos realizados na AIG para integração numérica.



Fonte: Barroso (2015).

O método de extração de Bézier, conforme descrito em Borden *et al.* (2011), é uma técnica utilizada para evitar o mapeamento do espaço paramétrico NURBS para o espaço paramétrico do elemento. Esse procedimento busca representar as NURBS por uma sequência de representações de Bézier de dimensão equivalente, fazendo com que os elementos isogeométricos apresentem as mesmas funções de base, independentemente da discretização utilizada dos *knot vectors*. Apenas uma informação adicional, a matriz de extração (\mathbf{C}_e) é necessária para cada elemento. Dessa forma permite-se a reutilização de programas MEF para AIG, uma vez que aproxima as estruturas dos respectivos algoritmos.

3.5 Integração Numérica

A matriz de rigidez do problema (\mathbf{K}) é montada a partir das matrizes de rigidez dos elementos de casca (\mathbf{K}_E), que são integradas utilizando uma quadratura trivariada:

$$\mathbf{K}_E = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = \sum_{i=1}^{npg} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} | \mathbf{J} |)_i W_i, \quad (3.38)$$

onde npg é número de pontos de integração e W_i são os pesos de cada ponto. É importante notar que o número de pontos de integração considerados nas direções ξ e η devem ser adequados ao grau do elemento adotado para representação da superfície média.

O vetor de forças do problema (\mathbf{f}) é montado a partir dos vetores de forças dos elementos de casca (\mathbf{f}_e), onde há contribuição referente às forças concentradas (\mathbf{f}_{eb}), às forças de

superfície (\mathbf{f}_{es}) e às forças de corpo (\mathbf{f}_{ec}). Assim, partindo da Equação (3.32), temos:

$$\mathbf{f}_e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA + \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j^T \mathbf{p}_j = \mathbf{f}_{eb} + \mathbf{f}_{es} + \mathbf{f}_{ec} \quad (3.39)$$

As forças de superfícies do elemento são integradas usando quadraturas bivariadas na superfície média do elemento:

$$\mathbf{f}_{es} = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA = \sum_{i=1}^{npg} (\mathbf{N}^T \mathbf{q} |\mathbf{J}|)_i W_i, \quad (3.40)$$

As forças de corpo do elemento são integradas usando quadraturas trivariadas:

$$\mathbf{f}_{eb} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV = \sum_{i=1}^{npg} (\mathbf{N}^T \mathbf{b} |\mathbf{J}|)_i W_i, \quad (3.41)$$

Devido ao uso da abordagem do sólido degenerado, neste trabalho é adotado um esquema de integração 3D, utilizando a quadratura de Gauss (COOK *et al.*, 2002) para integração dos elementos de casca nas três direções. Na direção da espessura (ζ), apenas dois pontos de integração são necessários, devido ao uso da teoria de Reissner-Mindlin. Por outro lado, a integração completa nas direções da superfície (ξ, η) requer $p + 1$ pontos de integração para cada coordenada paramétrica, onde p é o grau das funções de base.

3.5.1 Travamento

O travamento ocorre quando o modelo numérico se torna excessivamente rígido devido a deficiências em sua formulação, e não ao problema físico em si. Elementos finitos de baixa ordem de interpolação baseados na teoria de Timoshenko/Reissner-Mindlin demonstram problemas significativos de travamento de membrana e cisalhamento transversal (COOK *et al.*, 2002). Este fenômeno reduz substancialmente a velocidade de convergência do modelo numérico, principalmente quando a espessura da viga/placa/casca é pequena em relação ao vão.

O problema é bem conhecido no contexto do Método dos Elementos Finitos (COOK *et al.*, 2002) e também está presente na Análise Isogeométrica. Apesar das vantagens da utilização de funções de base NURBS, elas não eliminam o travamento de cisalhamento e de membrana apresentados por elementos de casca baseados na cinemática de Reissner-Mindlin totalmente integrados (ECHTER; BISCHOFF, 2010).

No contexto do MEF, foi constatado que o travamento de cisalhamento é significativamente reduzido em placas finas de Reissner-Mindlin com uma ordem polinomial de Lagrange maior que seis (RANK *et al.*, 1998). Portanto, uma abordagem para resolver esse problema

é aumentar a ordem polinomial das funções de forma. No contexto da AIG, Dornisch *et al.* (2013) descobriram que o travamento em cascas finas baseadas na teoria de Reissner-Mindlin é reduzido, mas não completamente eliminado, à medida que a ordem das funções de base aumenta. Isso torna as cascas de Reissner-Mindlin mais flexíveis em comparação com as cascas de Kirchhoff-Love.

Silva (2021) analisou o travamento para diferentes graus de elementos isogeométricos baseados em triângulos de Bézier para placas de Reissner-Mindlin utilizando integração completa. O autor observou que elementos quadráticos são inviáveis, visto que apresentam um severo travamento à medida que sua esbelteza aumenta. Nos elementos cúbicos para estruturas extremamente esbeltas o travamento também se manifesta, mas não impossibilita seu uso nas estruturas usuais. Por fim, os elementos de quarta ordem já não apresentaram travamento.

Contudo, por usar de ordens muito elevadas tais estratégias tornam-se computacionalmente ineficientes. A maioria das geometrias, como cilindros e esferas, pode ser representada usando NURBS de segunda ordem. Técnicas de tratamento do *locking* para elementos de baixa ordem tem sido pesquisadas, e o presente estudo terá como foco NURBS quadráticas e cúbicas, devido ao seu amplo uso em modelagem geométrica e maior eficiência na análise estrutural.

Na AIG, a ocorrência de travamento de membrana e de cisalhamento é atribuída à inconsistência dos campos de deslocamento aproximados e à incapacidade das funções de base B-Splines/NURBS de representar comportamentos de flexão e de inextensionabilidade, conforme discutido por Adam *et al.* (2015a). A elevação da ordem da base melhora os resultados, mas não elimina o travamento.

O problema do travamento de membrana em formulações isogeométricas de cascas tem sido um tema de significativo interesse nos últimos anos. O fenômeno compartilha semelhanças com o do Métodos de Elementos Finitos, levando ao uso de métodos de tratamento do travamento do MEF na AIG (HU *et al.*, 2016).

Alguns métodos de tratamento do problema do travamento são comumente utilizados. Formulações mistas, onde a combinação de deslocamento e deformação é usada para aproximar simultaneamente o campo de tensões e o campo de deslocamento, permitindo o relaxamento ou eliminação de restrições que levam ao travamento (ECHTER *et al.*, 2013). Um método alternativo envolve restringir a descontinuidade ao centro dos *patches* isogeométricos (HU *et al.*, 2016; HU *et al.*, 2020). Métodos mistos condensados estaticamente podem ser vistos como métodos \bar{B} (HU *et al.*, 2020), que também podem ser derivados através de formulações do tipo *Assumed*

Natural Strains (ANS). Essas formulações foram aplicadas às cascas de Reissner-Mindlin (KIM *et al.*, 2022), incorporando deformações assumidas descontínuas entre os elementos. ANS forma a base para a formulação MITC de cascas isogeométricas de Reissner-Mindlin (MI; YU, 2021).

A literatura acerca do travamento de membrana é extensa, com uma demanda contínua por abordagens mais simples e eficientes. Uma das técnicas mais utilizadas é a integração reduzida, discutida a seguir.

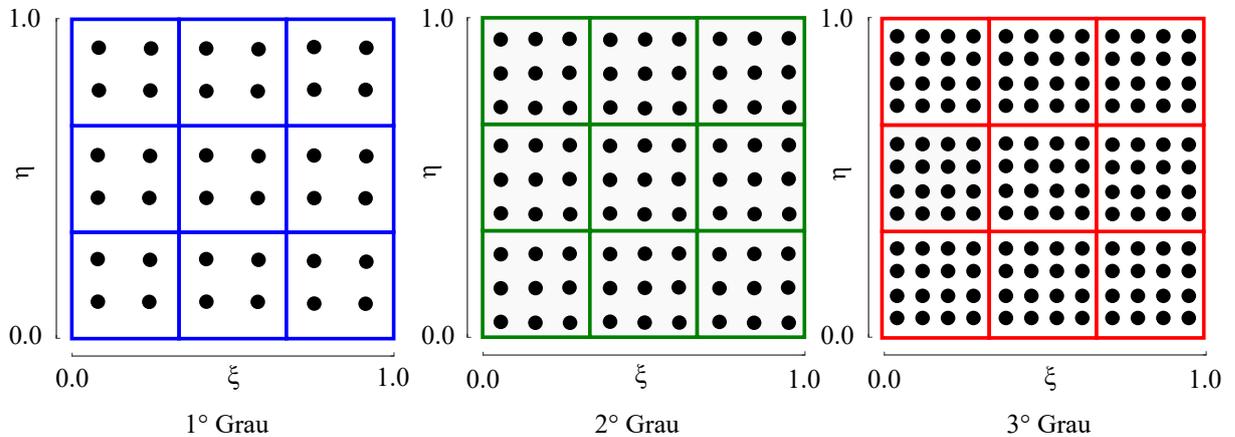
3.5.2 Integração reduzida

A integração completa corresponde à quadratura de Gauss que integra exatamente a matriz de rigidez do elemento. Para elementos de placa, o número de pontos gaussianos para integração completa em cada lado é determinado por:

$$npg = p + 1 \quad (3.42)$$

onde p é a ordem das bases B-Splines utilizadas. A quantidade de pontos necessária a integração por quadratura de Gauss completa para placas e cascas está ilustrada na Figura 21.

Figura 21 – Pontos de Gauss da integração completa.



Fonte: Adaptado de Adam *et al.* (2015a).

Quando a integração completa é utilizada há uma superestimação do valor de rigidez da estrutura, resultando em valores aproximados superiores aos valores reais. Esta situação pode levar a uma convergência mais lenta do modelo numérico, especialmente no caso de aproximações de baixa ordem. Este fenômeno é bem conhecido no caso do MEF (COOK *et al.*, 2002).

Métodos de integração seletiva e reduzida são técnicas que se mostram eficazes na redução do travamento numérico. Estes métodos acarretam na redução da rigidez à flexão

excessiva do elemento de casca totalmente integrado, diminuindo em um ou mais o número de pontos de Gauss na integração numérica dos termos de cisalhamento de membrana e transversal. Este método tem sido amplamente empregado no MEF (COOK *et al.*, 2002) e pode ser ajustado para a AIG (ADAM *et al.*, 2015a). Este método será utilizado neste trabalho.

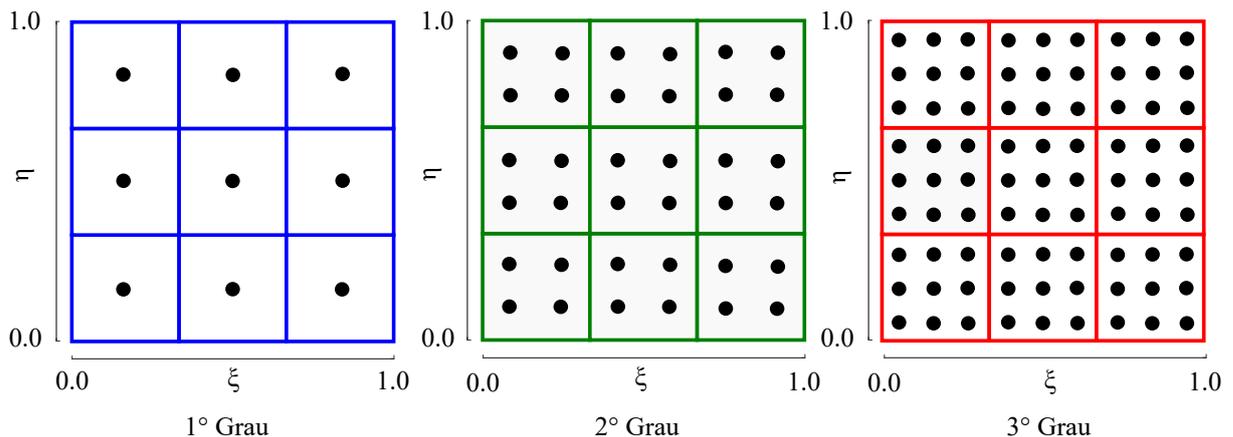
Segundo Adam *et al.* (2015a), a utilização da integração completa em elementos de cascas isogeométricas baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin fortalece os fenômenos de travamento e deteriora o desempenho dos elementos, devido à alta continuidade das funções B-Splines. Algumas estratégias para tratamento deste problema, como a utilização de regras de integração reduzidas e seletivas, foram investigadas para cascas de Reissner-Mindlin (ADAM *et al.*, 2015a; ADAM *et al.*, 2015c) e depois para cascas não lineares usando T-Splines (ADAM *et al.*, 2015b).

Ao lidar com elementos finitos bidimensionais, a integração reduzida uniforme (R_{UNI}) utiliza um número específico de pontos de Gauss para cada coordenada paramétrica de superfície, que é denotado por:

$$npg = p \quad (3.43)$$

A quantidade de pontos necessária a integração por quadratura de Gauss reduzida uniforme para placas e cascas está ilustrada na Figura 22.

Figura 22 – Pontos de Gauss da integração reduzida uniforme (R_{UNI}).



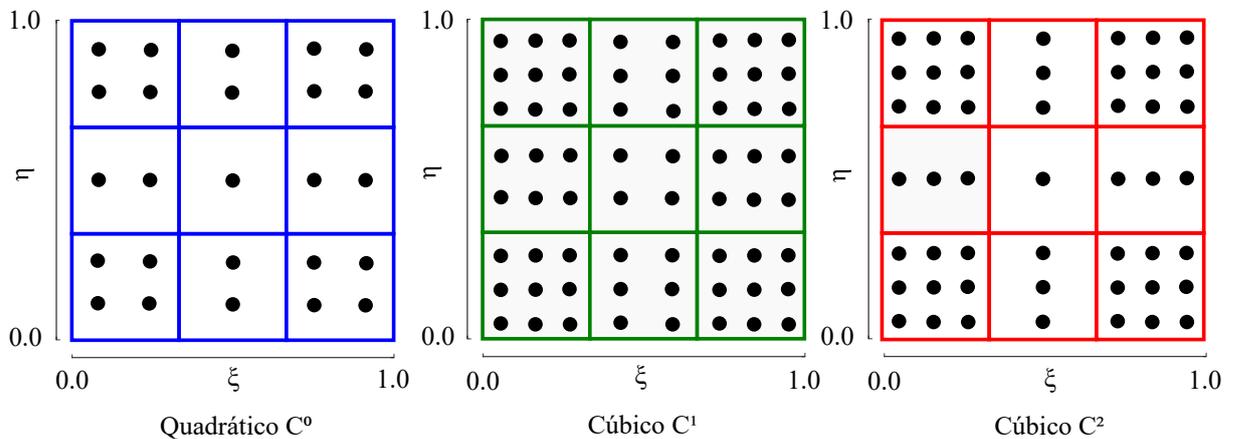
Fonte: Adaptado de Adam *et al.* (2015a).

Assim como no caso do MEF, o esquema de integração uniforme reduzida apenas alivia, mas não elimina o travamento dos elementos isogeométricos de Reissner-Mindlin. Além disso, a alta regularidade dos elementos isogeométricos impede que as regras clássicas de quadratura reduzida removam completamente o travamento numérico (ADAM *et al.*, 2015a).

Outra alternativa é a integração seletiva, que utiliza diferentes números de pontos de Gauss para as matrizes de rigidez à flexão e ao cisalhamento. Esta abordagem lida eficazmente com a questão do travamento, oferece flexibilidade na exploração de outras continuidades e requer menos pontos em comparação com os métodos completo e reduzido. No entanto, Adam *et al.* (2015a) alertaram que esta técnica de integração numérica pode não ser adequada para resolver grandes sistemas de equações não lineares, pois a convergência do método de solução não é garantida. Bouclier *et al.* (2012) observaram que embora a integração seletiva seja fácil de executar e tenha baixo custo computacional, pode ser difícil generalizar para ordens polinomiais superiores. Principalmente no caso de análise não linear, a utilização do método de integração torna a implementação complicada.

Adam *et al.* (2015a) introduziram um método, que aqui chamaremos de esquema de integração reduzida isogeométrico (R_{AIG}), para melhorar a eficiência computacional da análise baseada em Splines, reduzindo o número de pontos de quadratura. A quantidade de pontos necessária a integração por quadratura de Gauss reduzida uniforme para placas e cascas está ilustrada na Figura 23.

Figura 23 – Pontos de Gauss da integração reduzida isogeométrica (R_{AIG}) usada por Adam *et al.* (2015a).



Fonte: Adaptado de Adam *et al.* (2015a).

Este método resolve problemas de travamento de membrana e de cisalhamento, evitando a introdução de modos de energia nulos na análise linear de cascas baseada em NURBS. No trabalho de Adam *et al.* (2015a), concentraram-se na utilização de um único *patch* e assumiram uma regularidade uniforme em todos os elementos interiores. As técnicas de quadratura têm potencial para serem expandidas para graus mais elevados usando a lógica matemática geral apresentada no trabalho.

O uso dos diferentes esquemas de integração reduzida propostos para AIG NURBS limitou-se à análise linear de placas e cascas (ADAM *et al.*, 2015a). Os elementos isogeométricos sub-integrados resultantes mostraram bom desempenho ao realizar *benchmarks* clássicos do *shell obstacle course* em elasticidade linear. Devido à alta regularidade das funções de base NURBS com continuidade C^{p-1} obtida através do refinamento k , esta abordagem aumentou simultaneamente a precisão e a eficiência computacional da formulação IGA, sem gerar modos espúrios.

Praciano *et al.* (2019) aplicou a estratégia de integração reduzida na análise de estabilidade de placas e cascas abatidas utilizando uma formulação isogeométrica baseada em NURBS. Os resultados mostraram que o problema do travamento pode ser efetivamente resolvido usando um método de integração reduzida para IGA baseado em NURBS. Observou-se também um aumento na precisão e maior eficiência computacional.

Considerando estes aspectos, a precisão dos esquemas de integração Full, R_{UNI} e R_{AIG} para análise de cascas utilizando a formulação isogeométrica apresentada neste trabalho será investigada utilizando os exemplos do *Shell Obstacle Course*.

3.6 Cálculo dos vetores diretores

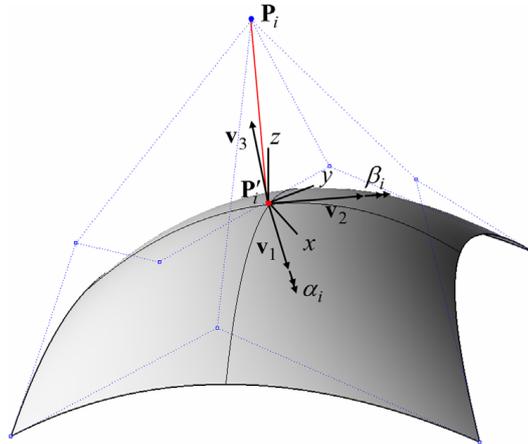
A descrição cinemática da formulação isogeométrica de cascas baseadas na teoria de Reissner-Mindlin requer a informação dos vetores diretores para interpolação dos sistemas de base locais. A definição desses vetores é extremamente importante, particularmente nos pontos de integração numérica (KANG; YOUN, 2015).

No MEF e na maioria das análises isogeométricas baseadas na teoria de cascas de Reissner-Mindlin, o vetor normal de qualquer ponto arbitrário é determinado interpolando os vetores normais nodais do elemento. Como resultado, a precisão dos vetores normais diminui significativamente com o aumento do tamanho da malha e da complexidade da geometria da superfície.

É fácil definir os vetores normais à superfície no MEF, porém, em métodos isogeométricos, esta tarefa torna-se mais complexa. A modelagem NURBS tem diversas vantagens, mas apresenta desafios na definição do vetor normal nos pontos de controle, que normalmente não estão situados na superfície, conforme ilustrado na Figura 24. É importante ressaltar que a precisão dos resultados da AIG da casca depende muito dos vetores normais definidos nos pontos de controle. Vários pesquisadores (UHM; YOUN, 2009; DORNISCH *et al.*, 2012; ADAM *et al.*,

2015a; KANG; YOUN, 2015; GHADIMI; HASSANI, 2023) investigaram a determinação do vetor normal à superfície de referência para um ponto específico do polígono de controle.

Figura 24 – Vetores diretores no ponto geométrico projetado a partir de um ponto de controle da casca.



Fonte: Kang e Youn (2015).

Um dos inúmeros benefícios que a análise isogeométrica traz para a análise de cascas, é a capacidade das NURBS para representação exata da geometria física. Ao contrário do MEF, onde os elementos não possuem essa capacidade e, portanto, dependem de vetores diretores nodais que são aproximados em pontos predefinidos, a AIG permite calcular com precisão os vetores normais à superfície em qualquer ponto da superfície, devido à exatidão geométrica da superfície média.

A formulação de cascas baseada na teoria de Reissner-Mindlin requer que cada ponto de controle possua um sistema de vetores de base \mathbf{v}_a , que é fornecido como dado de entrada ou calculado em uma etapa de pré-processamento. O vetor diretor

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{x}_{a,\xi} \times \mathbf{x}_{a,\eta}}{\|\mathbf{x}_{a,\xi} \times \mathbf{x}_{a,\eta}\|} \quad (3.44)$$

é calculado a partir das derivadas $\mathbf{x}_{,\xi}$ e $\mathbf{x}_{,\eta}$ de um ponto escolhido na superfície média. Os outros dois vetores de base que definem o sistema de eixos utilizados para definição dos graus de liberdade rotacionais, \mathbf{v}_{1a} e \mathbf{v}_{2a} , são determinados de maneira que possamos aplicar corretamente as condições de contorno e o sistema de base seja ortogonal. Estes vetores são paralelos à

superfície média da casca e são calculados como:

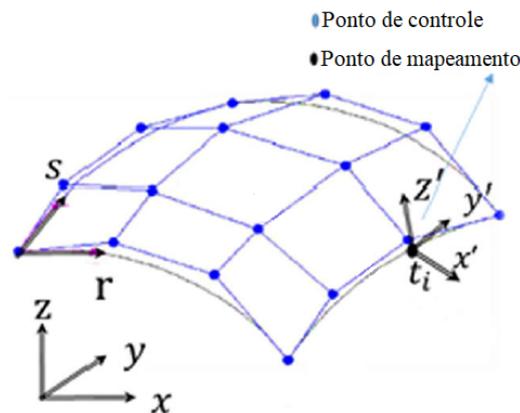
$$\begin{cases} \text{Se } \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a} \neq 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{1a} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}}{\|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}\|} \\ \mathbf{v}_{2a} = \mathbf{v}_{3a} \times \mathbf{v}_{1a} \end{array} \right. \\ \\ \text{Se } \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{2a} = \frac{\mathbf{v}_{3a} \times \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_{3a} \times \mathbf{e}_1\|} \\ \mathbf{v}_{1a} = \mathbf{v}_{2a} \times \mathbf{v}_{3a} \end{array} \right. \end{cases} \quad (3.45)$$

onde \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são vetores unitários nos eixos x , y e z .

Novamente, como os pontos de controle das geometrias NURBS não ficam na superfície média (exceto os pontos na fronteira ou em regiões de continuidade C^0) eles não podem ser usados diretamente para definir o sistema de coordenadas local e os graus de liberdade rotacionais. Portanto, para cada ponto de controle, é necessário encontrar um ponto correspondente na superfície média da casca e determinar nele os vetores ortogonais. A questão é que na AIG as funções de base não são interpoladoras e então não existe uma localização única associada a cada ponto de controle para definir os vetores normais.

Apesar de que na AIG os vetores normais à superfície podem ser calculados direta e exatamente em qualquer ponto, os métodos tradicionais para calculá-los concentram-se principalmente em mapear pontos na superfície média correspondentes aos pontos de controle e então calcular seus vetores normais (Figura 25).

Figura 25 – Definição do sistema de bases locais.



Fonte: Adaptado de Ghadimi e Hassani (2023).

Um desses métodos tradicionais, a utilização de pontos mais próximos da superfície, em geral, não possui solução de forma fechada para o problema, então o método iterativo de Newton-Raphson é comumente usado. Outro método de mapeamento, a identificação de pontos

máximos de funções de forma, tem como requisito mínimo para escolha das amostras no espaço paramétrico que todas as funções de base da superfície devem ser não-nulas em pelo menos um ponto (UHM; YOUN, 2009). Tais processos são complicados em NURBS e T-Splines porque as regiões, ou *knot spans*, de influência das bases seguem padrões irregulares (UHM; YOUN, 2009).

Outras estratégias, por exemplo, envolvem a utilização de projeção ortogonal (PI-EGL; TILLER, 1997), pontos de ancoragem expressos no espaço paramétrico (UHM; YOUN, 2009) ou pontos de Greville (ADAM *et al.*, 2015a). Os pontos de ancoragem, $t_i = (t_{i\xi}, t_{i\eta})$, locais no espaço paramétrico aos quais as funções de base estão associadas, são definidos como (BAZILEVS *et al.*, 2010):

$$t_{i\xi} = \begin{cases} \xi_{i+(p+1)/2} & \text{se } p \text{ é ímpar,} \\ \frac{1}{2} (\xi_{i+(p/2)} + \xi_{i+(p+1)/2}) & \text{se } p \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.46)$$

onde ξ_i é o i -ésimo *knot* e p é a ordem das funções de base que compõem a B-Spline. Os pontos de Greville, $t_i = (t_{i\xi}, t_{i\eta})$, são definidos no espaço paramétrico como (FARIN, 2014):

$$t_{i\xi} = \frac{\xi_{i+1} + \dots + \xi_{i+p}}{p}. \quad (3.47)$$

Finalmente, as componentes dos vetores diretores iniciais nos pontos t_i , são calculados analogamente à Equação (3.44), fazendo o produto vetorial das derivadas da Equação (2.15) como:

$$\mathbf{v}_{3i} = \frac{S_{,\xi}(t_{i\xi}, t_{i\eta}) \times S_{,\eta}(t_{i\xi}, t_{i\eta})}{\|S_{,\xi}(t_{i\xi}, t_{i\eta}) \times S_{,\eta}(t_{i\xi}, t_{i\eta})\|} \quad (3.48)$$

e

$$\mathbf{v}_{1i} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3i}}{\|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3i}\|}, \quad \mathbf{v}_{2i} = \mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i} \quad (3.49)$$

Adam *et al.* (2015a) compara e discute os resultados de algumas dessas abordagens e de uma abordagem de cálculo exato dos vetores diretores. Segundo o autor, a formulação usando uma normal exata fornece boa precisão, no entanto, além da sua complexidade, não é compatível com integração reduzida. A colocação uniforme é pouco precisa na interpolação da normal e a projeção ortogonal consome muito tempo. A colocação em abcissas de Greville oferece um bom equilíbrio entre precisão e tempo de cálculo.

Algumas vantagens do uso das abcissas de Greville para definição do campo de normais incluem (ADAM *et al.*, 2015a):

- Interpolação simples de campos de deslocamento;
- Compatibilidade com integração reduzida;
- Baixo custo computacional na definição de normais, pois não é necessária projeção;
- Modelagem precisa com uma distribuição de normais adaptada as B-Splines.

Em resumo, esses mapeamentos podem introduzir erros que só são atenuados com a utilização de uma malha muito refinada (GHADIMI; HASSANI, 2021). Adicionalmente, Ghadimi e Hassani (2023) acrescentam que, como os pontos de controle não são distribuídos igualmente nos espaços paramétricos e físicos, essas abordagens fornecem resultados menos precisos à medida em que é realizada uma elevação de grau.

A análise isogeométrica de cascas com vetores diretores exatos foi primeiramente pesquisada por Dornisch *et al.* (2012), que propôs uma formulação de casca que obtém os vetores normais dos pontos de controle a partir dos vetores normais exatos calculados nos pontos de integração, resolvendo um sistema de equações. De acordo com o autor, para alcançar o comportamento de convergência desejado, os vetores diretores nos pontos de controle calculados inicialmente devem fornecer vetores de base interpolados exatos.

O método proposto em Dornisch *et al.* (2012), denominado cálculo de sistemas de base nodal otimizados, utiliza uma técnica baseada em mínimos quadrados para determinar os vetores normais nos pontos de controle de forma a obter a melhor interpolação possível.

O método consiste em selecionar cada sistema de base nodal de tal forma que o sistema de base interpolado seja ortonormal em todos os pontos de integração e que o vetor diretor, bem como o eixo de rotação local, esteja na direção correta. Para conseguir isso, um sistema de equações é estabelecido e resolvido de forma independente para cada *patch*. Os três vetores de base \mathbf{v}_a consistem em nove equações em cada ponto de integração. Isso resulta em $(n_{PI} \times n_{el})$ equações da seguinte forma:

$$v_{ij}^{PI} = \sum_{a=1}^{n_{PC}} R_a v_{ija}^{PC} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.50)$$

onde n_{PI} é o número de pontos de integração por elemento, n_{el} é o número de elementos no *patch*, n_{PC} é o número total de pontos de controle no *patch* em consideração, v_{ij}^{PI} é o j -ésimo componente do i -ésimo vetor de base do sistema de base de pontos de integração e, analogamente, v_{ija}^{PC} são os valores desconhecidos dos sistemas de vetores de base no ponto de controle a . Para cada combinação de i e j , todas as Equações (3.50) são montados em um sistema de equações:

$$\mathbf{v}_{ij}^{PI} = \mathbf{R} \mathbf{v}_{ija}^{PC} \quad (3.51)$$

Só é necessário realizar uma inversão de matriz para calcular todos os componentes dos sistemas de base nodal, pois a matriz \mathbf{R} é a mesma para todas as nove direções. Além disso, na matriz \mathbf{R} , existem $(n_{PI} \times n_{el})$ linhas e n_{PC} colunas contendo funções de base R_a que são linearmente independentes e, portanto, todas as colunas são linearmente independentes, então:

$$\text{posto}(\mathbf{R}) = n_{PC} \quad (3.52)$$

e existe uma solução única. Assim, como em geral o número de pontos de integração é maior que número de pontos de controle de um modelo, a solução da Equação (3.50) sempre pode ser determinada resolvendo a equação normal:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{v}_{ij}^{PI} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{v}_{ija}^{PC} \quad (3.53)$$

que é determinada e, portanto, solucionável com solucionadores padrão.

A avaliação precisa do vetor diretor inicial e a interpolação das rotações nodais resultam em uma formulação de casca onde grandes deformações e rotações finitas podem ser descritas com precisão, mesmo com malhas grosseiras. A interpolação introduzida mantém a ortogonalidade do vetor diretor de referência, preservando a orientação correta em todo o domínio para cada discretização, e garante a inextensibilidade da casca (DORNISCH *et al.*, 2013). O autor acrescenta que ao fazer isso resultados mais precisos para estruturas curvas e um melhor comportamento de convergência para cálculos não lineares são obtidos. Particularmente para ordens superiores de funções de base NURBS, passa a ser possível a utilização de passos de carga maiores em comparação com formulações padrão. Portanto, cálculos com malhas grosseiras e de alta ordem são altamente competitivos, segundo Dornisch *et al.* (2013).

Em contrapartida, quando o grau das funções de base é aumentado, o cálculo do vetor normal dos pontos de controle para a superfície de referência torna-se mais desafiador. À medida que o número de elementos de um modelo se torna maior, mais cara se torna a resolução do problema (MILIĆ *et al.*, 2023). Outra dificuldade encontrada é a necessidade de cálculo de novos vetores diretores caso o esquema de integração numérica seja modificado, devido à variação do número de pontos de integração entre esquemas de integração.

Nos estudos de Dornisch *et al.* (2012) os vetores normais da superfície da casca ainda são calculados por interpolação, outro problema é que, apesar da melhoria na precisão, a resolução das equações de álgebra linear para obtenção de vetores de direção nodais exatos e sistemas de base nodal incorre em custos computacionais adicionais. Por esta razão, Kang e Youn (2015) propuseram uma formulação de casca onde, usando o método de projeção a

partir da característica das expressões NURBS, o vetor normal em um ponto arbitrário em uma superfície de casca pode ser facilmente obtido pelo produto externo das derivadas da expressão de superfície NURBS. Dessa forma o ponto projetado torna-se a origem do sistema de base local. No entanto, também foi especificado que o método está limitado análise linear (KANG; YOUN, 2015).

Ghadimi e Hassani (GHADIMI; HASSANI, 2021; GHADIMI; HASSANI, 2023) propuseram uma formulação de casca não linear baseada em NURBS para a análise com grandes deslocamentos e rotações. Nestes trabalhos, os vetores diretores são obtidos de maneira semelhante à técnica sugerida por Dornisch *et al.* (2013) resolvendo um sistema de equações em um *patch*, com a exceção de que os pontos de Greville são utilizados em substituição aos pontos de integração na Equação (3.50).

O sistema de equações para os vetores diretores nodais passa a possuir solução única, pois os pontos de controle e os pontos de Greville são correlacionados um a um. Ainda, mesmo com uma malha grosseira e elevação da ordem das funções NURBS, o erro de interpolação não aumenta. Comparando o tempo de computação dos vetores, pode-se concluir que os pontos de Greville para definição do sistema de equações são uma boa escolha principalmente para problemas com grandes esforços computacionais como em análises não lineares.

As componentes dos vetores diretores iniciais nos pontos de Greville t_i , calculados conforme a Equação (3.47), podem ser definidas segundo a Equação (3.48). Se V_{ij}^0 denota a j -ésima componente dos i -ésimos vetores ($i, j = 1, 2, 3$), o sistema de bases locais em cada ponto de Greville contém nove componentes. Portanto, os sistemas de equações montados devem ser resolvidos separadamente no *patch*, o que nos dá uma expressão similar a Equação (3.50):

$$v_{ij}^{PG}(t_{i\xi}, t_{i\eta}) = \sum_{a=1}^{n_{PC}} R_a(t_{i\xi}, t_{i\eta}) v_{ija}^{PC} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.54)$$

em que \mathbf{v}_{ij}^{PG} são os vetores de base conhecidos nos pontos de Greville e \mathbf{v}_{ija}^{PC} são vetores de base desconhecidos.

Os dois métodos de definição de equações, nos pontos de Gauss (DORNISCH *et al.*, 2012; DORNISCH *et al.*, 2013) e nos pontos de Greville (GHADIMI; HASSANI, 2021; GHADIMI; HASSANI, 2023), foram comparados por Ghadimi e Hassani (2021) com base no seu tempo computacional. O autor observou-se que os pontos de Greville se mostraram mais adequados para definição do sistema de equações, pois levaram à redução do custo computacional, preservando a precisão dos resultados.

Além disso, notou-se que os erros de interpolação não aumentaram em malhas NURBS mais grosseiras e de ordens mais elevadas. Comparando o tempo de cálculo dos vetores, concluiu-se que a utilização dos pontos de Greville para definição do sistema de equações é uma boa escolha, principalmente para problemas que exigem esforços computacionais significativos, como soluções não lineares.

Neste trabalho, portanto, o sistema de equações para definição dos vetores de base será formado usando os valores conhecidos dos vetores diretores nos pontos de Greville, como feito por Ghadimi e Hassani (2023). A precisão do método proposto será investigada para análise geométrica linear e não linear envolvendo grandes deformações e rotações (A formulação proposta será discutida no Capítulo 4) através do estudo de *benchmarks* de cascas bastante populares (SZE *et al.*, 2004). O comportamento será estudado em todos os problemas para diferentes ordens de funções de base e malhas de pontos de controle.

3.7 Implementação Computacional

As implementações foram realizadas no software de código aberto FAST (*Finite element AnalySis Tool*), escrito em linguagem C++. O FAST está em desenvolvimento contínuo no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará.

Para esta pesquisa, foi realizada a implementação do elemento para análise estática de sólidos degenerados com o domínio discretizado por funções de forma do tipo NURBS.

Antes do presente trabalho, o FAST já contava com elementos de casca baseada na teoria de Reissner-Mindlin e na abordagem do sólido degenerado. A formulação proposta para utilização em análises estáticas e de vibração livre foi implementada por Barroso (2022) utilizando funções de base de Bézier.

Foi utilizada uma formulação clássica de aproximação do campo de normais no modelo equivalente a adotada no MEF. São fornecidos vetores normais correspondentes a pontos distribuídos de forma equidistante no espaço paramétrico dos elementos, que no caso de elementos de Bézier não racionais, correspondem à posição paramétrica que maximiza a função de base correspondente e coincidem com os nós de elementos finitos convencionais. Em seguida, é realizado um procedimento de ajuste para cálculo de cada componente dos vetores nos pontos de controle.

A associação de cada ponto de controle à posição paramétrica que maximiza a função

de base correspondente é mais complexa no caso das NURBS e T-Splines porque as regiões, ou *knot span*, de influência das bases seguem padrões irregulares (UHM; YOUN, 2009). Como, nas NURBS, os pontos de controle não são distribuídos igualmente nos espaços paramétricos e físicos essa abordagem fornece resultados menos precisos à medida em que é realizada uma elevação de ordem.

As implementações realizadas neste trabalho se resumiram ao desenvolvimento de um programa Octave utilizado para obtenção dos vetores normais posteriormente fornecidos como dado de entrada para as simulações realizadas. Agora, o procedimento de ajuste para cálculo de cada componente dos vetores nos pontos de controle considera a informação dos vetores nos pontos de Greville. No contexto das placas essas localizações coincidem com as coordenadas paramétricas dos pontos de controle e no caso de cascas geralmente correspondem aos máximos das funções de base Spline (ADAM *et al.*, 2015a).

Assim como o elemento de casca Bézier do FAST, o elemento isogeométrico utilizado neste trabalho foi implementado levando em consideração o conceito de Extração de Bézier, que permite que a estrutura básica utilizada em programas de elementos finitos, como a montagem da matriz de rigidez e vetor de forças externas, possa ser aproveitada na análise isogeométrica.

É preciso destacar que, antes destes desenvolvimentos, o FAST também já disponibilizava a possibilidade da leitura do *input* referente aos esquemas de pontos para integração por quadratura de Gauss. Portanto, não se fez necessária nenhuma implementação adicional para utilização dos diferentes esquemas de integração discutidos e utilizados nesta pesquisa.

4 ANÁLISE NÃO LINEAR ISOGEOMÉTRICA DE CASCAS

A primeira formulação de casca de Reissner-Mindlin isogeométrica foi introduzida por Benson *et al.* (2010) e aplicada em testes lineares e elastoplásticos não lineares, mostrando bom desempenho. A atualização do vetor diretor envolvia uma rotação discreta dos vetores diretores nodais, o que resulta na deterioração da qualidade da aproximação à medida que a ordem das funções de base NURBS aumentam. Como um elemento de sólido degenerado clássico, a consideração de pequenas rotações incrementais das normais à superfície média restringia o tamanho dos incrementos de carga e diminuía a eficiência computacional (DORNISCH *et al.*, 2013).

Assim, para superar estas limitações e para lidar com grandes deslocamentos e rotações, uma formulação de casca considerando tensor de rotação completo foi proposta por Dornisch *et al.* (2013), que empregou uma abordagem rotacional contínua, mais precisa e capaz de lidar com rotações finitas e deslocamentos significativos. Contudo, apesar de ter feito o uso de uma formulação muito complexa e a multiplicatividade das rotações acarretar em maior custo computacional e em matrizes de rigidez globais não simétricas, apenas a curva de carga-deslocamento de uma viga sujeita à momento na extremidade foi apresentada.

O modelo de casca e o esquema de integração reduzida apresentados por Adam *et al.* (2015a) foram estendidos por Adam *et al.* (2015b) para consideração de grandes deslocamentos, contudo utilizando funções de base T-Spline. A análise foi baseada em uma formulação Lagrangiana Total, e as rotações incrementais eram atualizadas usando álgebra de quatérnios. Apenas a curva de carga-deslocamento de uma casca hemisférica submetida à cargas concentradas foi descrita como exemplo.

Em Hao *et al.* (2017) e Hao *et al.* (2019) a fórmula para a matriz de rigidez geométrica de cascas laminadas de rigidez variável (*variable stiffness composites*) foram derivadas usando modelo de sólido degenerado para AIG, afim de viabilizar a análise de flambagem linear destas. A análise envolve a derivação da matriz de rigidez geométrica, obtenção de vetores normais nos pontos de controle e o problema de acoplamento de *patches* NURBS. O método proposto apresentou convergência estável e eficiente tanto para análise envolvendo pequenos deslocamentos quanto para análise de flambagem.

No trabalho de Hao *et al.* (2023), foi proposta uma formulação Lagrangiana Total para análise do comportamento pós-flambagem de cascas laminadas de rigidez variável. Esta abordagem demonstrou um bom desempenho na análise do comportamento não linear de diversas

estruturas, conforme mostrado nos exemplos de viga com momento na extremidade e casca cilíndrica abatida. Voltando ao foco de seu trabalho, os demais exemplos apresentados trataram da flambagem linear de cascas perfeitas e imperfeitas.

Uma função não linear associada aos graus de liberdade rotacionais na expressão do campo de deslocamento (SURANA, 1983) foi introduzida na formulação de Hao *et al.* (2023), removendo as restrições relacionadas ao tamanho das rotações nodais. Entretanto, a proposta de Surana (1983) parte da utilização de uma formulação total, ao invés de uma abordagem incremental mais apropriada a problemas 3D. Além disso, os autores fazem uso de funções não lineares trigonométricas diferentes para cada sequência de rotações dos graus de liberdade de rotação, α e β , que não podem ser alternadas (HAO *et al.*, 2023).

Ghadimi e Hassani (2023) estenderam a formulação não linear geométrica de elementos de casca proposta por Bathe (2014) para aplicações em AIG envolvendo análise de cascas piezolaminadas. A formulação não linear foi desenvolvida com base na abordagem Lagrangiana Atualizada. A estratégia para atualização do vetor normal considerou efeitos de rotação de segunda ordem (ARGYRIS, 1982). Os componentes lineares e não lineares da deformação foram expressos pelo tensor de deformação de Green-Lagrange, que não é afetado pelas rotações do corpo rígido. Como a análise não linear não era o principal foco, apenas as curvas de carga-deslocamento de uma viga sujeita a carga na extremidade e de um painel cilíndrico sob carga pontual foram obtidas.

Em um artigo recente, uma formulação isogeométrica para análise não linear de cascas com grandes deslocamentos e rotações foi desenvolvida utilizando as abordagens corrotacional e Lagrangiana Atualizada (HAN *et al.*, 2024). Os deslocamentos incrementais contêm termos lineares e quadráticos. A formulação proposta demonstrou precisão e robustez no traçado das curvas carga-deslocamento de vários exemplos clássicos de análise não linear de cascas (SZE *et al.*, 2004), mas é bastante complexa e apresenta reduzida eficiência computacional.

Assim, o desenvolvimento de elementos isogeométricos de casca capazes de lidar com grandes deslocamentos e rotações de forma simples, robusta e eficiente continua a ser um desafio significativo, atraindo a atenção de diversos pesquisadores.

A seguir, apresentaremos o desenvolvimento de uma formulação isogeométrica simples para análise não linear de cascas baseada nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado. Será utilizada uma formulação Lagrangiana Total (BATHE, 2014; CRISFIELD, 1991) que considera grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas

deformações. Nela são consideradas as deformações de Green-Lagrange e as tensões de Piolla-Kirchhoff II, que são avaliadas sempre na configuração inicial da estrutura. Diferentes esquemas de atualização do vetor normal são considerados.

4.1 Geometria e Deslocamentos

Usando a mesma notação da Capítulo 3, as coordenadas de um ponto genérico (\mathbf{x}) no elemento de casca em um tempo t qualquer são dadas por:

$$\mathbf{x}^t = \sum_{a=1}^{np} R_a \mathbf{x}_a^t + \sum_{a=1}^{np} \zeta R_a \frac{h_a}{2} \mathbf{v}_{3a}^t \quad (4.1)$$

onde \mathbf{x}_a^t são os pontos de controle da superfície média e \mathbf{v}_{3a}^t são os vetores normais no tempo t , e h_a é a espessura associada ao ponto de controle a .

Os deslocamentos \mathbf{u} de um ponto genérico dentro da casca são dados pela diferença entre suas coordenadas nos instantes 0 e t :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}^t - \mathbf{x}^0 \quad (4.2)$$

Considerando a Equação (4.1), o campo dos deslocamentos é dado por:

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{np} R_a \mathbf{u}_a + \sum_{a=1}^{np} \zeta R_a \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{3a}^0) \quad (4.3)$$

onde \mathbf{u}_a são os deslocamentos dos pontos de controle da superfície média, e \mathbf{v}_{3a}^0 e \mathbf{v}_{3a}^t são os vetores normais associados aos pontos de controles, na configuração inicial e configuração deformada da estrutura, respectivamente. O primeiro termo representa os efeitos das translações da superfície média e o segundo termo representa os efeitos das rotações do vetor normal em torno de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

Os deslocamentos podem ser escritos de forma compacta como:

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{np} (R_a \mathbf{u}_a + H_a \mathbf{p}_a) \quad (4.4)$$

onde

$$H_a = R_a \zeta \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a = \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{3a}^0) \quad (4.5)$$

A relação dada na Equação (4.4) é usada diretamente para avaliar o deslocamento total e a deformação total (e, portanto, a tensão total) para a formulação Lagrangiana Total e é válida para qualquer magnitude das componentes de deslocamento.

4.2 Tratamento das rotações

Na análise não linear, considera-se que todas as respostas da estrutura são conhecidas nos instantes $0, \dots, t$ e busca-se determinar estas respostas no instante $t + \Delta t$. Como discutido no Capítulo 3, a rotação do vetor normal \mathbf{v}_{3a} pode ser expressa como a soma de duas rotações independentes α_a e β_a em torno de eixos locais \mathbf{v}_{1a} e \mathbf{v}_{2a} .

Considerando rotações moderadas, podemos reescrever a Equação (3.8) para atualização do vetor normal de t para $t + \Delta t$ fazendo:

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{2a}^0 \alpha_a + \mathbf{v}_{1a}^0 \beta_a \quad (4.6)$$

Onde os vetores no \mathbf{v}_{1a}^0 e \mathbf{v}_{2a}^0 são definidos como discutido no Capítulo 3. Esta aproximação, que chamaremos de Atualização para Rotações Moderadas (ARM), é válida somente se consideramos pequenos deslocamentos e rotações. Contudo, essa estratégia não preserva o comprimento unitário do vetor.

Vale destacar que essa forma de atualização tem sido utilizada com sucesso na análise não linear de placas abatidas e cascas abatidas utilizando as teorias de von Karman e Marguerre, respectivamente (BARROS, 2016; PRACIANO, 2018; AUAD, 2019; SILVA, 2021). Adicionalmente, ela foi utilizada com sucesso no cálculo da carga crítica de cascas (SOUSA *et al.*, 2023).

Contudo, segundo Argyris (1982), para consideração de grandes rotações no espaço tridimensional devemos ter a ciência de que estas não são aditivas. Dependendo do tamanho do incremento, a rotação correspondente ao vetor \mathbf{v}_{3a} pode ser grande, uma rotação finita, não podendo ser interpretada por uma rotação de componentes vetoriais em torno dos eixos cartesianos (ARGYRIS, 1982; BATHE, 2014).

O tensor de Rodrigues (ARGYRIS, 1982) pode ser utilizado para fazer a atualização do vetor normal de forma consistente (DORNISCH, 2015; DORNISCH *et al.*, 2016). Nessa abordagem o vetor normal é atualizado de t para $t + \Delta t$ fazendo:

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_a \mathbf{v}_{3a}^t \quad (4.7)$$

onde a matriz de rotação ortogonal \mathbf{Q}_a é dependente das rotações incrementais (α_a e β_a) e dos vetores \mathbf{v}_{1a}^t e \mathbf{v}_{2a}^t . Neste caso $|\mathbf{v}_{3a}^t| = |\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t}| = 1$ e o comprimento unitário dos vetores é preservado.

Podemos escrever a matriz \mathbf{Q}_a no sistema de coordenadas Cartesiano utilizando a base de vetores ortonormais ($\mathbf{v}_{1a}^t, \mathbf{v}_{2a}^t, \mathbf{v}_{3a}^t$) (ARGYRIS, 1982; CRISFIELD, 1997). Nesse

sistema, a matriz formada pelas componentes do tensor de rotação pode ser expressa, utilizando a formula de Rodrigues, como:

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\theta)}{\theta} \mathbf{S}_a + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \right)^2 \mathbf{S}_a^2 \quad (4.8)$$

ou utilizando a relação trigonométrica, $\sin^2(\theta/2) = (1 - \cos(\theta))/2$:

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\theta)}{\theta} \mathbf{S}_a + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \mathbf{S}_a^2 \quad (4.9)$$

sendo

$$\theta_a = (\alpha_a^2 + \beta_a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

Nesta equação, \mathbf{I}_3 é uma matriz identidade (3×3) e \mathbf{S}_a é uma matriz antissimétrica dada por (BATHE, 2014):

$$\mathbf{S}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_a \\ 0 & 0 & -\alpha_a \\ -\beta_a & \alpha_a & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

É importante notar que, aqui as rotações finitas α_a e β_a deixam de ser independentes e se tornam duas variáveis que definem o tensor de rotação, diferentemente do que é observado no caso de rotações infinitesimais e moderadas (DVORKIN, 1995).

Além da vantagem da preservação do comprimento unitário dos vetores diretores, esta abordagem garante que grandes deslocamentos e rotações finitas possam ser descritas com precisão. Por outro lado, a utilização do tensor de rotação requer o armazenamento da informação do tensor e suas derivadas em cada ponto de integração ou nó (ZOU *et al.*, 2020) fazendo com que a estratégia tenha elevado custo computacional, além de resultar em uma formulação muito complexa e de difícil implementação.

De modo alternativo, podemos realizar aproximações ao levarmos em conta algumas simplificações na expressão da matriz de rotação, objetivando simplificar a formulação e reduzir o custo da atualização e armazenamento do tensor de rotação e suas derivadas a cada iteração de Newton-Raphson. Partiremos da Equação (4.10), que pode ser expressa de maneira exponencial como (ARGYRIS, 1982; CRISFIELD, 1997):

$$\mathbf{Q}_a = \exp(\mathbf{S}_a) = \mathbf{I}_3 + \mathbf{S}_a + \frac{\mathbf{S}_a^2}{2!} + \frac{\mathbf{S}_a^3}{3!} + \dots \quad (4.12)$$

Caso apenas os termos lineares em \mathbf{Q}_a sejam considerados, da Equação (4.7) obtemos:

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_{3a}^t + \mathbf{S}_a \mathbf{v}_{3a}^t \quad (4.13)$$

onde apenas os termos lineares em α_a e β_a são incluídos. Note que podemos chegar a esta mesma expressão se considerarmos o caso em que $\theta \rightarrow 0$ diretamente na Equação (4.8), conforme Argyris (1982). A expressão acima pode ser simplificada como:

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{2a}^t \alpha_a + \mathbf{v}_{1a}^t \beta_a \quad (4.14)$$

Note que, diferentemente da Equação (4.6), \mathbf{v}_{1a}^t e \mathbf{v}_{2a}^t são os vetores diretores atualizados, definidos no instante t fazendo:

$$\text{Se } \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}^t \neq 0, \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{1a}^t = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}^t}{\|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}^t\|} \\ \mathbf{v}_{2a}^t = \mathbf{v}_{3a}^t \times \mathbf{v}_{1a}^t \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\text{Se } \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3a}^t = 0, \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{2a}^t = \frac{\mathbf{v}_{3a}^t \times \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_{3a}^t \times \mathbf{e}_1\|} \\ \mathbf{v}_{1a}^t = \mathbf{v}_{2a}^t \times \mathbf{v}_{3a}^t \end{cases} \quad (4.16)$$

onde \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são vetores unitários nos eixos x , y e z . Esta aproximação, que chamaremos de Atualização Linear (AL), é válida somente se consideramos pequenos incrementos de rotação α_a e β_a . Assim como na ARM, essa estratégia não preserva o comprimento unitário do vetor. É importante ressaltar que esta abordagem é utilizada em trabalhos clássicos de cascas baseadas na teoria de Reissner-Mindlin e na abordagem do sólido degenerado, como o de Bathe e Bolourchi (1980).

Uma aproximação melhor pode ser obtida considerando os termos lineares e quadráticos de \mathbf{Q}_a :

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_{3a}^t + \mathbf{S}_a \mathbf{v}_{3a}^t + \frac{1}{2} \mathbf{S}_a^2 \mathbf{v}_{3a}^t \quad (4.17)$$

Esta equação inclui todos os termos de segunda ordem de α_a e β_a , que contribuirão para consideração dos efeitos de rigidez de deformação não linear, além de possibilitarem a obtenção de uma matriz de rigidez tangente consistente (BATHE, 2014). Simplificando a expressão, temos:

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{2a}^t \alpha_a + \mathbf{v}_{1a}^t \beta_a - \frac{1}{2} (\alpha_a^2 + \beta_a^2) \mathbf{v}_{3a}^t \quad (4.18)$$

onde \mathbf{v}_{1a}^t e \mathbf{v}_{2a}^t são os vetores diretores atualizados, definidos no instante t através da Equação (4.15), assim como realizado na AL. Esta aproximação, que chamaremos de Atualização Quadrática (AQ), permite a consideração de rotações incrementais maiores. Assim como na demais aproximações já discutidas, essa estratégia não preserva o comprimento unitário do vetor, porém esse comprimento sofre pouca alteração devido à melhor aproximação proporcionada pela consideração dos termos quadráticos. Esta abordagem é discutida em trabalhos mais recentes de cascas baseadas na teoria de Reissner-Mindlin e na abordagem do sólido degenerado (DVORKIN, 1995; BATHE, 2014; GHADIMI; HASSANI, 2023).

Um outra alternativa para aproximação utilizada para atualização dos vetores normais é proposta neste trabalho. Ela objetiva trazer para a aproximação AL, a mais simples entre as apresentadas, uma melhoria advinda da normalização do comprimento do vetor que não é preservado na estratégia original. Chamaremos esta aproximação de Atualização Linear Normaliza (ALN). A primeira parte do processo de atualização do vetor de forma semelhante à Equação (4.14):

$$\hat{\mathbf{v}}_{3a}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_{3a}^t - \mathbf{v}_{2a}^t \alpha_a + \mathbf{v}_{1a}^t \beta_a \quad (4.19)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}_{3a}^{t+\Delta t}$ é o vetor aproximado a partir da utilização de uma AL e portanto sem garantia de que o comprimento unitário tenha sido preservado. Em seguida realizamos a seguinte normalização:

$$\mathbf{v}_{3a}^{t+\Delta t} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_{3a}^{t+\Delta t}}{L_a} \quad (4.20)$$

onde L_a é o comprimento do vetor não normalizado $\hat{\mathbf{v}}_{3a}^{t+\Delta t}$ e que pode ser expresso por:

$$L_a = \sqrt{\hat{\mathbf{v}}_{3a}^{t+\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{3a}^{t+\Delta t}} = \sqrt{1 + \alpha_a^2 + \beta_a^2} \quad (4.21)$$

Em síntese, a ARM é válida somente se consideramos pequenos deslocamentos e rotações moderadas. Já as demais alternativas (AL, AQ e ALN), podem ser utilizadas na análise não linear de cascas com grandes rotações, desde que as rotações incrementais sejam suficientemente pequenas.

Considerando as respectivas limitações, os vetores obtidos por meio dessas alternativas é suficientemente consistente para as análise não lineares e podem ser empregados diretamente nas expressões de deformação-deslocamento dos elementos de casca. As quatro estratégia de aproximação do tensor de rotações para atualização dos vetores diretores serão utilizadas e comparadas nos exemplos envolvendo não linearidade geométrica apresentados no Capítulo 5.

4.3 Deformações e Tensões

A abordagem Lagrangiana Total (BATHE, 2014), onde as tensões e deformações são avaliadas na configuração inicial da estrutura, é adotada neste trabalho. Esta formulação é baseada na utilização das deformações de Green-Lagrange e das tensões Piola-Kirchhoff II.

As deformações de Green-Lagrange são calculadas a partir das derivadas de deslocamento em relação às coordenadas cartesianas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ w_{,x} + u_{,z} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2 \\ u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2 \\ u_{,z}^2 + v_{,z}^2 + w_{,z}^2 \\ 2(u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \\ 2(u_{,x}u_{,z} + v_{,x}v_{,z} + w_{,x}w_{,z}) \\ 2(u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z} + w_{,y}w_{,z}) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

É importante ressaltar que as derivadas aqui utilizadas serão, também, obtidas por meio da utilização da matriz Jacobiana (\mathbf{J}), já expressa na Equação (3.17). Devido ao uso da abordagem Lagrangiana Total, as derivações realizadas para montagem da matriz são realizadas em relação à geometria inicial (ou seja, indeformada).

Definiremos a relação entre deslocamentos e tensões considerando as deformações de Green-Lagrange, que podem ser escritas em função de uma parcela linear $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ e uma parcela não linear $\boldsymbol{\varepsilon}_L$. Para simplificar as derivações matemáticas, é interessante reescrever as deformações de Green-Lagrange, Equação (4.22), como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \quad (4.23)$$

Note que a relação entre o vetor das deformações ($\boldsymbol{\varepsilon}$) e o vetor dos deslocamentos (\mathbf{u}) não pode mais ser dada da maneira apresentada na Equação (3.15), visto que agora o efeito das rotações nodais não pode mais ser escrita de maneira explícita. Agora a relação entre o vetor das deformações e o vetor dos deslocamentos nodais é determinada de maneira implícita por meio

do vetor $\boldsymbol{\beta}$ que contém as derivadas dos deslocamentos no espaço cartesiano:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \begin{Bmatrix} R_{a,x} u_a + H_{a,x} p_{a_x} \\ R_{a,y} u_a + H_{a,y} p_{a_x} \\ R_{a,z} u_a + H_{a,z} p_{a_x} \\ R_{a,x} v_a + H_{a,x} p_{a_y} \\ R_{a,y} v_a + H_{a,y} p_{a_y} \\ R_{a,z} v_a + H_{a,z} p_{a_y} \\ R_{a,x} w_a + H_{a,x} p_{a_z} \\ R_{a,y} w_a + H_{a,x} p_{a_z} \\ R_{a,z} w_a + H_{a,x} p_{a_z} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

com

$$H_{a,x} = R_{a,x} \zeta + R_a \zeta_{,x}, \quad H_{a,y} = R_{a,y} \zeta + R_a \zeta_{,y} \quad \text{and} \quad H_{a,z} = R_{a,z} \zeta + R_a \zeta_{,z}. \quad (4.25)$$

Devido ao uso da abordagem de sólido degenerado, a matrizes \mathbf{H} and \mathbf{A} são iguais às utilizadas para elementos contínuos 3D (CRISFIELD, 1991):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & 0 & v_{,x} & 0 & 0 & w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & 0 & v_{,y} & 0 & 0 & w_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & u_{,z} & 0 & 0 & v_{,z} & 0 & 0 & w_{,z} \\ u_{,y} & u_{,x} & 0 & v_{,y} & v_{,x} & 0 & w_{,y} & w_{,x} & 0 \\ u_{,z} & 0 & u_{,x} & v_{,z} & 0 & v_{,x} & w_{,z} & 0 & w_{,x} \\ 0 & u_{,z} & u_{,y} & 0 & v_{,z} & v_{,y} & 0 & w_{,z} & w_{,y} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

As tensões de Piola-Kirchhoff II, considerando pequenas deformações e comportamento elástico linear, podem ser calculadas a partir de deformações de Green-Lagrange no sistema local usando a lei de Hooke generalizada, utilizando a Equação (3.20).

4.4 Equações de Equilíbrio

Assim como descrito na Seção 3.3, as equações de equilíbrio para análise estática podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), como apresentado nas Equações (3.25), (3.26) e (3.27):

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad \Rightarrow \quad \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dS \quad (4.27)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos virtuais, \mathbf{b} é o vetor respectivo às forças de corpo e \mathbf{q} é o vetor das forças de superfície. Devido ao uso da abordagem Lagrangiana Total, as integrações são realizadas em relação a geometria inicial (ou seja, indeformada).

As deformações virtuais $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ são obtidas pela variação das deformações de Green-Lagrange, com base na Equação (4.23):

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\beta} \quad (4.28)$$

Por outro lado, da variação da Equação (4.5) obtém-se:

$$\delta \mathbf{p}_a = \frac{h_a}{2} \delta \mathbf{v}_{3a}^t = \mathbf{p}_a^\alpha \delta \alpha + \mathbf{p}_a^\beta \delta \beta \quad (4.29)$$

onde as derivadas dos termos \mathbf{p} variam de acordo com aproximação utilizada para atualização dos vetores diretores. As derivadas são dadas, para cada caso, por:

Atualização para Rotações Moderadas (ARM):

$$\mathbf{p}_a^\alpha = \frac{h_a}{2} (-\mathbf{v}_{2a}^0) \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^\beta = \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{1a}^0) \quad (4.30)$$

Atualização Linear (AL):

$$\mathbf{p}_a^\alpha = \frac{h_a}{2} (-\mathbf{v}_{2a}^t) \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^\beta = \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{1a}^t) \quad (4.31)$$

Atualização Linear Normalizada (ALN):

$$\mathbf{p}_a^\alpha = \frac{h_a}{2} \left(\frac{-\mathbf{v}_{2a}^t - L_a^\alpha \mathbf{v}_{3a}^t}{L_a} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^\beta = \frac{h_a}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_{1a}^t - L_a^\beta \mathbf{v}_{3a}^t}{L_a} \right) \quad (4.32)$$

onde as primeiras derivadas do comprimento do vetor não normalizado, L_a^α e L_a^β , são dadas por:

$$L_a^\alpha = \frac{\alpha}{L} \quad \text{e} \quad L_a^\beta = \frac{\beta}{L} \quad (4.33)$$

Atualização Quadrática (AQ):

$$\mathbf{p}_a^\alpha = \frac{h_a}{2} (-\mathbf{v}_{2a}^t - \alpha \mathbf{v}_{3a}^t) \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^\beta = \frac{h_a}{2} (\mathbf{v}_{1a}^t - \beta \mathbf{v}_{3a}^t) \quad (4.34)$$

Além disso, da variação da Equação (4.24) obtemos:

$$\delta \boldsymbol{\beta} = \sum_{a=1}^{np} \begin{bmatrix} R_{a,x} & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,x} \\ R_{a,y} & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,y} & p_{a_x}^\beta H_{a,y} \\ R_{a,z} & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,z} & p_{a_x}^\beta H_{a,z} \\ 0 & R_{a,x} & 0 & p_{a_y}^\alpha H_{a,x} & p_{a_y}^\beta H_{a,x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{a,z} & p_{a_z}^\alpha H_{a,z} & p_{a_z}^\beta H_{a,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_a \\ \delta v_a \\ \delta w_a \\ \delta \alpha_a \\ \delta \beta_a \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \mathbf{G}^{(a)} \delta \mathbf{u}_a = \mathbf{G} \delta \mathbf{u}, \quad (4.35)$$

onde \mathbf{G} tem o mesmo padrão da matriz \mathbf{N} (Equação (3.14)), onde as contribuições dos graus de liberdade de cada ponto de controle são dados ao longo de cinco colunas. Portanto, as deformações virtuais podem ser escritas como:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} \quad (4.36)$$

com

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L = \mathbf{H}\mathbf{G} + \mathbf{A}\mathbf{G} \quad (4.37)$$

Portanto, a matriz $\bar{\mathbf{B}}$ é obtida da soma das matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_L , respectivamente as parcelas linear e não linear da relação incremental de deformação-deslocamento.

A matriz relativa aos incrementos de deformações lineares do elemento ($\mathbf{B}_0^{(a)}$) é a mesma apresentada pela Equação (3.16):

$$\mathbf{B}_0^{(a)} = \begin{bmatrix} R_{a,x} & 0 & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,x} \\ 0 & R_{a,y} & 0 & p_{a_y}^\alpha H_{a,y} & p_{a_y}^\beta H_{a,y} \\ 0 & 0 & R_{a,z} & p_{a_z}^\alpha H_{a,z} & p_{a_z}^\beta H_{a,z} \\ R_{a,y} & R_{a,y} & 0 & p_{a_x}^\alpha H_{a,y} + p_{a_y}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,y} + p_{a_y}^\beta H_{a,x} \\ R_{a,z} & 0 & R_{a,x} & p_{a_x}^\alpha H_{a,z} + p_{a_z}^\alpha H_{a,x} & p_{a_x}^\beta H_{a,z} + p_{a_z}^\beta H_{a,x} \\ 0 & R_{a,z} & R_{a,y} & p_{a_y}^\alpha H_{a,z} + p_{a_z}^\alpha H_{a,y} & p_{a_y}^\beta H_{a,z} + p_{a_z}^\beta H_{a,y} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

A matriz relativa aos incrementos de deformações não lineares do elemento ($\mathbf{B}_L^{(a)}$) é dada por:

$$\mathbf{B}_L^{(a)} = \begin{bmatrix} R_{a,x}u_{,x} & R_{a,x}v_{,x} & R_{a,x}w_{,x} & (u_{,x}p_{a_x}^\alpha + v_{,x}p_{a_y}^\alpha + w_{,x}p_{a_z}^\alpha)H_{a,x} \\ R_{a,y}u_{,y} & R_{a,y}v_{,y} & R_{a,y}w_{,y} & (u_{,y}p_{a_x}^\alpha + v_{,y}p_{a_y}^\alpha + w_{,y}p_{a_z}^\alpha)H_{a,y} \\ R_{a,z}u_{,z} & R_{a,z}v_{,z} & R_{a,z}w_{,z} & (u_{,z}p_{a_x}^\alpha + v_{,z}p_{a_y}^\alpha + w_{,z}p_{a_z}^\alpha)H_{a,z} \\ R_{a,x}u_{,y} + R_{a,y}u_{,x} & R_{a,x}v_{,y} + R_{a,y}v_{,x} & R_{a,x}w_{,y} + R_{a,y}w_{,x} & (u_{,y}p_{a_x}^\alpha + v_{,y}p_{a_y}^\alpha + w_{,y}p_{a_z}^\alpha)H_{a,x} \\ & & & + (u_{,x}p_{a_x}^\alpha + v_{,x}p_{a_y}^\alpha + w_{,x}p_{a_z}^\alpha)H_{a,y} \\ R_{a,x}u_{,z} + R_{a,z}u_{,x} & R_{a,x}v_{,z} + R_{a,z}v_{,x} & R_{a,x}w_{,z} + R_{a,z}w_{,x} & (u_{,z}p_{a_x}^\alpha + v_{,z}p_{a_y}^\alpha + w_{,z}p_{a_z}^\alpha)H_{a,x} \\ & & & + (u_{,x}p_{a_x}^\alpha + v_{,x}p_{a_y}^\alpha + w_{,x}p_{a_z}^\alpha)H_{a,z} \\ R_{a,y}u_{,z} + R_{a,z}u_{,y} & R_{a,y}v_{,z} + R_{a,z}v_{,y} & R_{a,y}w_{,z} + R_{a,z}w_{,y} & (u_{,z}p_{a_x}^\alpha + v_{,z}p_{a_y}^\alpha + w_{,z}p_{a_z}^\alpha)H_{a,y} \\ & & & + (u_{,y}p_{a_x}^\alpha + v_{,y}p_{a_y}^\alpha + w_{,y}p_{a_z}^\alpha)H_{a,z} \\ \dots & \dots & \dots & (u_{,x}p_{a_x}^\beta + v_{,x}p_{a_y}^\beta + w_{,x}p_{a_z}^\beta)H_{a,x} \\ \dots & \dots & \dots & (u_{,y}p_{a_x}^\beta + v_{,y}p_{a_y}^\beta + w_{,y}p_{a_z}^\beta)H_{a,y} \\ \dots & \dots & \dots & (u_{,z}p_{a_x}^\beta + v_{,z}p_{a_y}^\beta + w_{,z}p_{a_z}^\beta)H_{a,z} \\ \dots & \dots & \dots & (u_{,y}p_{a_x}^\beta + v_{,y}p_{a_y}^\beta + w_{,y}p_{a_z}^\beta)H_{a,x} \\ & & & + (u_{,x}p_{a_x}^\beta + v_{,x}p_{a_y}^\beta + w_{,x}p_{a_z}^\beta)H_{a,y} \\ \dots & \dots & \dots & (u_{,z}p_{a_x}^\beta + v_{,z}p_{a_y}^\beta + w_{,z}p_{a_z}^\beta)H_{a,x} \\ & & & + (u_{,x}p_{a_x}^\beta + v_{,x}p_{a_y}^\beta + w_{,x}p_{a_z}^\beta)H_{a,z} \\ \dots & \dots & \dots & (u_{,z}p_{a_x}^\beta + v_{,z}p_{a_y}^\beta + w_{,z}p_{a_z}^\beta)H_{a,y} \\ & & & + (u_{,y}p_{a_x}^\beta + v_{,y}p_{a_y}^\beta + w_{,y}p_{a_z}^\beta)H_{a,z} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

É importante frisar que para consideração de grandes rotações, os vetores normais implícitos nos termos \mathbf{p} devem ser atualizados através das Equações (4.6), (4.14), (4.18), de acordo com a estratégia de atualização escolhida.

Finalmente, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (4.40)$$

onde o vetor das forças internas da estrutura (\mathbf{g}) é dado por:

$$\mathbf{g} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.41)$$

O restante do desenvolvimento, que inclui o desenvolvimento das expressões para o trabalho virtual externo, definição do vetor de cargas externas e equações de equilíbrio do modelo discreto segue a mesma estrutura apresentada na Seção 3.3 para a formulação linear.

É importante notar que, o vetor de forças internas (\mathbf{g}) depende de forma não linear dos deslocamentos da casca devido aos efeitos da não linearidade geométrica de Green-Lagrange e da atualização dos vetores normais. Finalmente, considerando que os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ são arbitrários, obtemos as equações de equilíbrio:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.42)$$

sendo \mathbf{r} o resíduo.

Vale ressaltar que a definição dos elementos isogeométricos segue a mesma abordagem do Capítulo 3. Assim, os *knot spans* podem ser interpretados como elementos isogeométricos, de forma que o cálculo do vetor de forças interna (\mathbf{g}) pode ser realizado por quadratura de Gauss. Depois, as contribuições dos elementos são adicionadas ao vetor \mathbf{g} da estrutura em um somatório idêntico ao processo de montagem pelo Método da Rigidez Direta. A matriz de rigidez e o vetor de forças do problema são montados a partir das suas respectivas contribuições em cada elemento, e por fim, integrados utilizando a quadratura de Gauss. O elemento não linear isogeométrico também segue o conceito de Extração de Bézier e a estrutura básica utilizada em programas de elementos finitos é aproveitada na análise isogeométrica.

4.5 Matriz de Rigidez Tangente

A solução do sistema de equações de equilíbrio requer que seja utilizado um método de solução não linear, como o Método de Newton-Raphson (CRISFIELD, 1991). Para tal, se faz necessária uma matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}_T) da estrutura, que será calculada somando as contribuições dos elementos isogeométricos, num processo de montagem da matriz de rigidez pelo Método da Rigidez Direta.

A matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}_T) do elemento, obtida através da diferenciação do vetor de forças internas \mathbf{g} , como dado pela expressão:

$$\mathbf{K}_T = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} dV + \int_V \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (4.43)$$

onde \mathbf{K}_E corresponde à matriz de rigidez clássica e \mathbf{K}_G corresponde à matriz de rigidez geométrica.

Observando a primeira parcela da Equação (4.43), é possível obter-se:

$$\mathbf{K}_E = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} dV = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} dV \quad (4.44)$$

onde o operador \mathbf{C}_T é a matriz constitutiva tangente. Seu cálculo depende da relação constitutiva adequada. No caso de materiais isotrópicos com comportamento elástico linear, temos que $\mathbf{C}_T = \mathbf{C}$, onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva elástica apresentada na Equação (3.20).

A segunda parcela, chamada de matriz geométrica ou de tensões iniciais, apresenta a derivada parcial da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ em relação aos deslocamentos nodais. Da Equação (4.37) temos:

$$\mathbf{K}_G = \int_V \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \left(\mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{H}^T + \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{A}^T \right) \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_{G_1} + \mathbf{K}_{G_2} + \mathbf{K}_{G_3} \quad (4.45)$$

onde \mathbf{K}_{G_1} corresponde a matriz de rigidez geométrica clássica, e \mathbf{K}_{G_2} e \mathbf{K}_{G_3} aparecem devido ao uso de um esquema de atualização não linear para o vetor normal. Essas matrizes são obtidas utilizando a metodologia apresentada por Surana (1983).

Observando a ultima parcela da Equação (4.45), é possível obter-se:

$$\mathbf{K}_{G_1} = \int_V \mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \quad (4.46)$$

onde \mathbf{S} é a matriz de tensões de Piola-Kirchhoff II:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

com

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Podemos obter a primeira matriz de rigidez contendo os efeitos das funções não lineares de rotação \mathbf{K}_{G_2} partindo da segunda parcela da Equação (4.45):

$$\mathbf{K}_{G_2} = \int_V \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.49)$$

Podemos obter um vetor auxiliar \mathbf{k} realizando as seguintes manipulações algébricas:

$$\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{G}^T \mathbf{H}^T \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^*) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{k}) \quad (4.50)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left\{ \sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \sigma_z \right\} \quad (4.51)$$

e

$$\mathbf{k}_a = \begin{Bmatrix} R_{a,x}\sigma_x + R_{a,y}\tau_{xy} + R_{a,z}\tau_{xz} \\ R_{a,x}\tau_{xy} + R_{a,y}\sigma_y + R_{a,z}\tau_{yz} \\ R_{a,x}\tau_{xz} + R_{a,y}\tau_{yz} + R_{a,z}\sigma_z \\ c_x p_{a_x}^\alpha + c_y p_{a_y}^\alpha + c_z p_{a_z}^\alpha \\ c_x p_{a_x}^\beta + c_y p_{a_y}^\beta + c_z p_{a_z}^\beta \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

onde

$$c_x = H_{a,x}\sigma_x + H_{a,y}\tau_{xy} + H_{a,z}\tau_{xz}, \quad (4.53)$$

$$c_y = H_{a,x}\tau_{xy} + H_{a,y}\sigma_y + H_{a,z}\tau_{yz},$$

$$c_z = H_{a,x}\tau_{xz} + H_{a,y}\tau_{yz} + H_{a,z}\sigma_z.$$

Substituindo a Equação (4.50) na Equação (4.49) podemos escrever a primeira matriz de rigidez contendo os efeitos das funções não lineares de rotação do elemento ($\mathbf{K}_{G_2}^{(ia)}$) como:

$$\mathbf{K}_{G_2}^{(ia)} = \int_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{k}_a) dV \quad (4.54)$$

$$= \int_V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x p_{a_x}^{\alpha\alpha} + c_y p_{a_y}^{\alpha\alpha} + c_z p_{a_z}^{\alpha\alpha} & c_x p_{a_x}^{\alpha\beta} + c_y p_{a_y}^{\alpha\beta} + c_z p_{a_z}^{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & c_x p_{a_x}^{\alpha\beta} + c_y p_{a_y}^{\alpha\beta} + c_z p_{a_z}^{\alpha\beta} & c_x p_{a_x}^{\beta\beta} + c_y p_{a_y}^{\beta\beta} + c_z p_{a_z}^{\beta\beta} \end{bmatrix} dV$$

onde $p_a^{\alpha\alpha}$, $p_a^{\alpha\beta}$, $p_a^{\beta\beta}$ são as segunda derivadas termos \mathbf{p} em relação as rotações α_a e β_a . Além disso, notamos que:

$$\mathbf{K}_{G_2}^{(ia)} = \mathbf{0} \quad i \geq 1, \quad a \leq np \quad \text{se } i \neq a \quad (4.55)$$

Portanto, essa matriz é toda nula, exceto por blocos (2×2) que ficam próximos à diagonal da matriz. Esses blocos são formados pelos quatro termos não nulos correspondentes aos graus de liberdade de rotação de cada ponto de controle, como visto na matriz apresentada na Equação (4.54).

Por fim, podemos obter a segunda matriz de rigidez contendo os efeitos das funções não lineares de rotação \mathbf{K}_{G_3} partindo da terceira parcela da Equação (4.45):

$$\mathbf{K}_{G_3} = \int_V \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.56)$$

Podemos obter um vetor auxiliar \mathbf{l} realizando as seguintes manipulações algébricas:

$$\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{G}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{G}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}) \quad (4.57)$$

onde

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} A_{\sigma 1} \\ A_{\sigma 2} \\ A_{\sigma 3} \\ A_{\sigma 4} \\ A_{\sigma 5} \\ A_{\sigma 6} \\ A_{\sigma 7} \\ A_{\sigma 8} \\ A_{\sigma 9} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x u_{,x} + \tau_{xy} u_{,y} + \tau_{xz} u_{,z} \\ \tau_{xy} u_{,x} + \sigma_y u_{,y} + \tau_{yz} u_{,z} \\ \tau_{xz} u_{,x} + \tau_{yz} u_{,y} + \sigma_z u_{,z} \\ \sigma_x v_{,x} + \tau_{xy} v_{,y} + \tau_{xz} v_{,z} \\ \tau_{xy} v_{,x} + \sigma_y v_{,y} + \tau_{yz} v_{,z} \\ \tau_{xz} v_{,x} + \tau_{yz} v_{,y} + \sigma_z v_{,z} \\ \sigma_x w_{,x} + \tau_{xy} w_{,y} + \tau_{xz} w_{,z} \\ \tau_{xy} w_{,x} + \sigma_y w_{,y} + \tau_{yz} w_{,z} \\ \tau_{xz} w_{,x} + \tau_{yz} w_{,y} + \sigma_z w_{,z} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

e

$$\mathbf{l}_a = \begin{Bmatrix} R_{a,x} A_{\sigma 1} + R_{a,y} A_{\sigma 2} + R_{a,z} A_{\sigma 3} \\ R_{a,x} A_{\sigma 4} + R_{a,y} A_{\sigma 5} + R_{a,z} A_{\sigma 6} \\ R_{a,x} A_{\sigma 7} + R_{a,y} A_{\sigma 8} + R_{a,z} A_{\sigma 9} \\ d_x p_{a_x}^\alpha + d_y p_{a_y}^\alpha + d_z p_{a_z}^\alpha \\ d_x p_{a_x}^\beta + d_y p_{a_y}^\beta + d_z p_{a_z}^\beta \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

onde

$$d_x = H_{a,x} A_{\sigma 1} + H_{a,y} A_{\sigma 2} + H_{a,z} A_{\sigma 3}, \quad (4.60)$$

$$d_y = H_{a,x} A_{\sigma 4} + H_{a,y} A_{\sigma 5} + H_{a,z} A_{\sigma 6},$$

$$d_z = H_{a,x} A_{\sigma 7} + H_{a,y} A_{\sigma 8} + H_{a,z} A_{\sigma 9}.$$

Substituindo a Equação (4.56) na Equação (4.55) podemos escrever a segunda matriz de rigidez contendo os efeitos das funções não lineares de rotação do elemento ($\mathbf{K}_{G_3}^{(ia)}$) como:

$$\mathbf{K}_{G_3}^{(ia)} = \int_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}_a) dV \quad (4.61)$$

$$= \int_V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_x p_{a_x}^{\alpha\alpha} + d_y p_{a_y}^{\alpha\alpha} + d_z p_{a_z}^{\alpha\alpha} & d_x p_{a_x}^{\alpha\beta} + d_y p_{a_y}^{\alpha\beta} + d_z p_{a_z}^{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & d_x p_{a_x}^{\alpha\beta} + d_y p_{a_y}^{\alpha\beta} + d_z p_{a_z}^{\alpha\beta} & d_x p_{a_x}^{\beta\beta} + d_y p_{a_y}^{\beta\beta} + d_z p_{a_z}^{\beta\beta} \end{bmatrix} dV$$

Além disso, notamos que

$$\mathbf{K}_{G_3}^{(ia)} = \mathbf{0} \quad i \geq 1, \quad a \leq np \quad \text{se } i \neq a \quad (4.62)$$

Podemos notar que, essa matriz tem a mesma estrutura de \mathbf{K}_{G_2} e é toda nula, exceto por blocos (2×2) que ficam próximos à diagonal da matriz.

As segundas derivadas do termo \mathbf{p} utilizadas nos desenvolvimentos acima são dadas, para cada caso, por:

Atualização para Rotações Moderadas (ARM):

$$\mathbf{p}_a^{\alpha\alpha} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_a^{\alpha\beta} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^{\beta\beta} = \mathbf{0} \quad (4.63)$$

Atualização Linear (AL):

$$\mathbf{p}_a^{\alpha\alpha} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_a^{\alpha\beta} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^{\beta\beta} = \mathbf{0} \quad (4.64)$$

Atualização Linear Normalizada (ALN):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_a^{\alpha\alpha} &= \frac{h_a}{2} \left(\frac{-2L_a^\alpha \mathbf{v}_{3a,\alpha}^t + L_a^{\alpha\alpha} \mathbf{v}_{3a}^t}{L_a} \right), \quad \mathbf{p}_a^{\alpha\beta} = \frac{h_a}{2} \left(\frac{-L_a^{\alpha\beta} \mathbf{v}_{3a}^t + L_a^\alpha \mathbf{v}_{3a,\beta}^t + L_a^\beta \mathbf{v}_{3a,\alpha}^t}{L_a} \right) \quad \text{e} \\ \mathbf{p}_a^{\beta\beta} &= \frac{h_a}{2} \left(\frac{-2L_a^\beta \mathbf{v}_{3a,\beta}^t + L_a^{\beta\beta} \mathbf{v}_{3a}^t}{L_a} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde as primeiras derivadas do comprimento do vetor não normalizado, L_a^α e L_a^β , são dadas por:

$$L_a^\alpha = \frac{\alpha}{L} \quad \text{e} \quad L_a^\beta = \frac{\beta}{L} \quad (4.66)$$

e as segundas derivadas do comprimento do vetor não normalizado, $L_a^{\alpha\alpha}$, $L_a^{\alpha\beta}$ e $L_a^{\beta\beta}$, são dadas por:

$$L_a^{\alpha\alpha} = \frac{1 - (L_a^\alpha)^2}{L}, \quad L_a^{\alpha\beta} = \frac{-L_a^\alpha L_a^\beta}{L} \quad \text{e} \quad L_a^{\beta\beta} = \frac{1 - (L_a^\beta)^2}{L} \quad (4.67)$$

Atualização Quadrática (AQ):

$$\mathbf{p}_a^{\alpha\alpha} = \frac{h_a}{2} (-\mathbf{v}_{3a}^t), \quad \mathbf{p}_a^{\alpha\beta} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_a^{\beta\beta} = \frac{h_a}{2} (-\mathbf{v}_{3a}^t) \quad (4.68)$$

É importante notar que as matrizes \mathbf{K}_E , \mathbf{K}_{G_1} , \mathbf{K}_{G_2} e \mathbf{K}_{G_3} da estrutura são obtidas de modo idêntico ao que é realizado na análise linear.

4.6 Análise Não Linear Geométrica

A equação de equilíbrio em sua forma geral, mostrada na Equação (4.42), pode ser reescrita de modo a incluir um resíduo \mathbf{r} que representa o desbalanceamento entre forças internas e externas:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{g}(u) - \lambda \mathbf{q} \quad (4.69)$$

onde \mathbf{q} é um vetor de carga de referência e de magnitude arbitrária e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{q} . No equilíbrio, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pois as forças internas igualam-se às externas.

Qualquer estado de equilíbrio da estrutura pode ser descrito por um par (\mathbf{u}, λ) que satisfaça a Equação (4.69). Assim as curvas cargas-deslocamentos correspondem aos gráficos do fator de carga \times deslocamento, formados por pontos (\mathbf{u}, λ) . Essa curva carga-deslocamento, também conhecida como caminho de equilíbrio, é uma ferramenta importante para estudar um sistema estrutural com comportamento não linear, pois a mesma permite analisar a estabilidade do sistema, avaliar sua capacidade de carga e quantificar sua sensibilidade às imperfeições iniciais.

A solução da Equação (4.69) necessita da utilização de um método de solução não linear, como o Método de Newton-Raphson (CRISFIELD, 1991). Esse método é baseado na linearização da Equação (4.69), como se segue:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} - \delta \lambda \mathbf{q} \quad (4.70)$$

onde o subscrito n representa o valor do novo resíduo. Já os valores anteriores são apresentados sem subscrito.

Para uma estrutura com n graus de liberdade, a imposição do equilíbrio é representada por um sistema de n equações. Porém, é preciso determinar tanto os deslocamentos \mathbf{u} quanto o fator de carga λ para descrever completamente o caminho carga-deslocamento, fazendo com que o sistema tenha $n + 1$ incógnitas.

Devido à diferença entre o número de incógnitas e equações, a resolução das equações de equilíbrio de forma direta é impossibilitada, sendo preciso adotar um dos métodos de traçado do caminho de equilíbrio (*path-following methods*), como o Método de Controle de Carga, Controle de Deslocamento ou Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991).

Nos métodos de controle de carga e controle de deslocamento, uma das $n + 1$ variáveis é mantida constante a cada passo, tornando possível a solução do sistema. Já nos

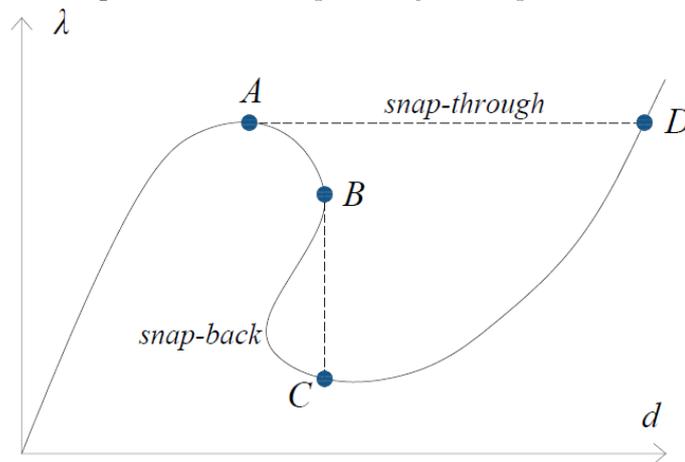
métodos de comprimento de arco, uma equação adicional é utilizada, mantendo variações tanto na carga quanto nos deslocamentos.

Por se tratarem de métodos iterativos, é necessário determinar quando o método de Newton-Raphson atingiu a convergência considerando uma tolerância tol que satisfaça a seguinte condição:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{q}\|)} \leq tol \quad (4.71)$$

O método adotado para traçar o caminho de equilíbrio neste trabalho é o Comprimento de Arco (*Arc-Length*), pois ele é capaz de capturar comportamentos complexos de *snap-through* (diminuição da carga) e *snap-back* (diminuição dos deslocamentos), fenômenos apresentados na Figura 26.

Figura 26 – Caminho de equilíbrio com *snap-through* e *snap-back*.



Fonte: Silva (2021).

Esse método foi proposto por Wempner (1971) e Riks (1979), tendo como objetivo o traçado completo dos caminhos de equilíbrio de estruturas que apresentassem comportamentos complexos. Posteriormente, outras formulações para o método foram propostas, na qual se destaca o método do Comprimento de Arco Cilíndrico (CRISFIELD, 1981; RAMM, 1981), os quais serão utilizados no presente trabalho. Mais detalhes sobre o método e sua implementação podem ser encontrados nos trabalhos de Crisfield (1991) e Parente *et al.* (2006).

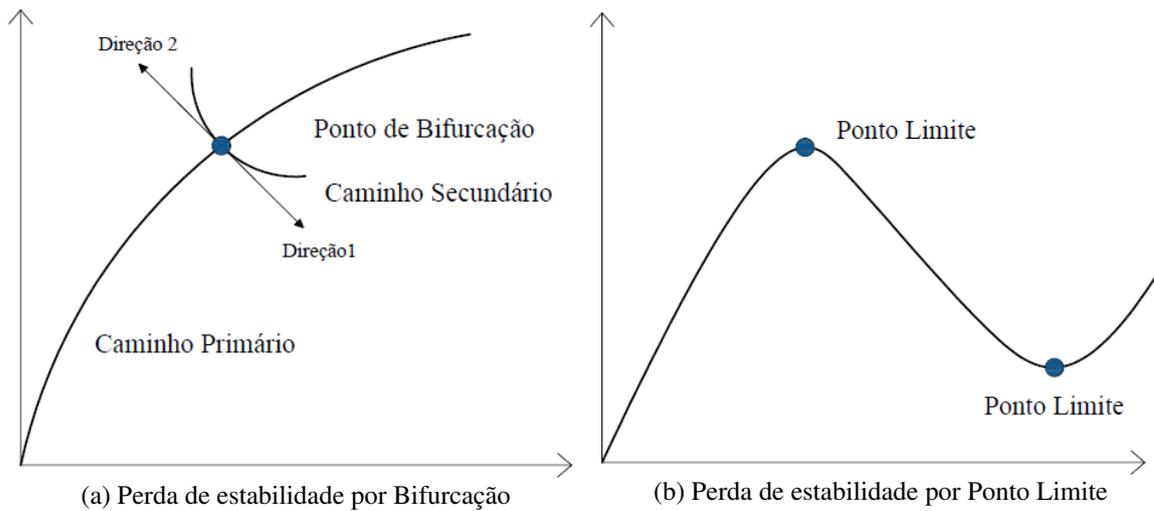
4.6.1 Análise de Estabilidade

A formulação apresentada neste trabalho é uma extensão da proposta por (SOUSA *et al.*, 2023) e, assim como ela, foi desenvolvida de modo que possa ser utilizada para avaliar a

carga crítica, descrever o comportamento pós-crítico e o traçado do caminho de equilíbrio de cascas à medida que deslocamentos variam.

Existem dois tipos de perda de estabilidade, sendo eles por bifurcação ou por ponto limite. A perda de estabilidade por bifurcação acontece quando dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam, onde o caminho inicial é chamado de primário e os outros de caminhos secundários ou pós-críticos, como ilustrado na Figura 27a. O ponto crítico, nesse caso, é chamado de ponto de bifurcação.

Figura 27 – Tipos de perda de estabilidade.



Fonte: Adaptado de Silva (2008).

Já a perda de estabilidade por ponto limite se dá quando a tangente à curva é nula, como ilustra a Figura 27b, sendo o tipo mais comum em estruturas reais. Em ambos os casos, porém, a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T é singular nos pontos críticos (limite e bifurcação). Assim sendo:

$$\det \mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (4.72)$$

Alternativamente, o ponto crítico pode ser detectado usando a condição de autovalor nulo:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda)\phi = \mathbf{0}, \text{ com } \|\phi\| = 1 \quad (4.73)$$

onde ϕ é o autovetor associado, que representa o modo de flambagem.

De acordo com Wriggers e Simo (1990), podem-se determinar pontos críticos de estruturas não lineares através da combinação das Equações (4.69) e (4.73), montando um

sistema não linear estendido, definido por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{K}_t(\mathbf{u}, \lambda)\phi \\ \|\phi\| - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.74)$$

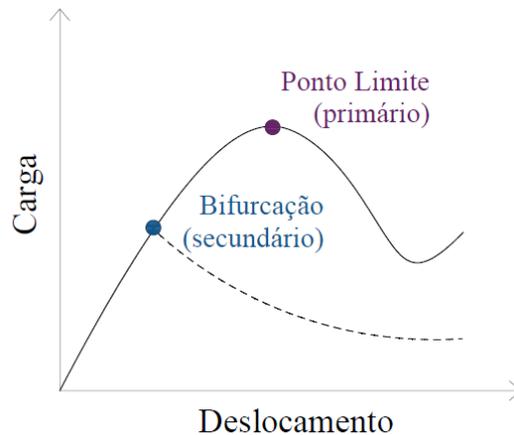
sendo o par de soluções do $(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr})$ do sistema apresentado na Equação (4.74) um ponto crítico.

Procedimentos numéricos têm sido propostos para resolver eficientemente este sistema (WRIGGERS; SIMO, 1990; PARENTE *et al.*, 2006). Após o cálculo do ponto crítico, o modo de flambagem associado pode ser usado para sua classificação quanto ao tipo de flambagem (PARENTE *et al.*, 2006):

$$\begin{cases} \phi^T \mathbf{f} \neq 0 \Rightarrow \text{ponto limite} \\ \phi^T \mathbf{f} = 0 \Rightarrow \text{ponto de bifurcação} \end{cases} \quad (4.75)$$

Finalmente, o modo de flambagem pode ser usado para realizar o *branch-switching* (PARENTE *et al.*, 2006) para o caminho pós-crítico secundário em um ponto de bifurcação, como ilustrado na Figura 28. É importante notar que esta abordagem pode ser usada para estudar a estabilidade de estruturas perfeitas e imperfeitas, com instabilidade por bifurcação e pontos limite. Além disso, funciona bem quando não há modos distintos com a mesma carga crítica, ou seja, outros caminhos partindo do mesmo ponto crítico.

Figura 28 – Pontos críticos e caminhos de equilíbrio.



Fonte: Silva (2021).

Quando os deslocamentos pré-críticos são pequenos, a matriz de rigidez \mathbf{K}_E , dada na Equação (4.44), pode ser obtida através de uma análise linear, uma vez que os termos não lineares da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ são desprezíveis. A matriz de rigidez geométrica, por sua vez, é proporcional ao carregamento aplicado.

Como a matriz tangente pode ser decomposta na soma da matriz do material e geométrica, temos:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (4.76)$$

Considerando que a matriz tangente do material é igual a matriz de rigidez linear ($\mathbf{u}_{cr} = \mathbf{0}$) e a matriz geométrica depende de um fator de carga λ é proporcional à matriz para a carga de referência, temos que:

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_0 \quad (4.77)$$

$$\mathbf{K}_G = \lambda \bar{\mathbf{K}}_G \quad (4.78)$$

Assim, substituindo na Equação (4.73), tem-se:

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda \bar{\mathbf{K}}_G)\phi = \mathbf{0} \quad (4.79)$$

onde \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez linear, obtida através de uma análise linear, λ é a carga crítica e ϕ é o modo de flambagem. Essa análise é conhecida como estabilidade linear (*eigenvalue buckling*) e oferece boas aproximações para a carga crítica de estruturas que sofrem perda de estabilidade com deslocamentos pré-críticos desprezíveis, como na Figura 27a.

4.7 Implementação Computacional

Nesta seção, descreveremos as implementações que foram necessárias à extensão da formulação linear, descrita no Capítulo 3, para análise não linear. As implementações foram realizadas no software de código aberto FAST (*Finite element AnalySis Tool*), escrito em linguagem C++.

Na etapa inicial da pesquisa, objetivando viabilizar análises de flambagem linearizada e não linear com rotações moderadas (SOUSA *et al.*, 2023), foram implementadas a matriz que relaciona os incrementos de deslocamentos e suas derivadas (\mathbf{G}), a matriz de tensões de Piola-Kirchhoff II (\mathbf{S}), a matriz relativa aos incrementos de deformações não lineares (\mathbf{B}_L) e a matriz de rigidez geométrica clássica (\mathbf{K}_{G1}).

Posteriormente, foram realizadas as implementações necessárias à análise não linear envolvendo grandes deslocamentos e rotações. Foi necessária uma nova implementação do cálculo das tensões de Green-Lagrange, usando as Equações (4.22) e (4.24), pois a formulação clássica utilizada em sólidos 3D baseadas nas matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_L , implementadas por Barroso

(2015), não puderam ser aproveitadas para a análise cascas baseadas no conceito do sólido degenerado para o caso de grandes rotações.

O tratamento das grandes rotações realizado foi viabilizado por meio da implementação de diferentes esquemas de atualização do vetor \mathbf{p} e o cálculo de suas derivadas. Portanto, tornou-se necessária a implementação das matrizes de rigidez geométrica (\mathbf{K}_{G2} e \mathbf{K}_{G3}) contendo os efeitos dos termos não lineares utilizados na atualização do vetor normal.

Os algoritmos utilizados neste trabalho para análise não linear e de estabilidade já estavam implementados no FAST.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos da utilização da formulação isogeométrica desenvolvida. As implementações foram realizadas no software de código aberto FAST (*Finite element AnalySis Tool*), escrito em linguagem C++. O FAST está em desenvolvimento contínuo no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará.

Utilizaremos exemplos geometricamente lineares e não lineares, considerando material linear elástico isotrópico, para testar a implementação e demonstrar a capacidade da formulação proposta para problemas com pequenos e grandes deslocamentos. O objetivo principal é investigar como as hipóteses assumidas para o desenvolvimento da formulação e escolhas (esquemas de integração, método de cálculo de vetores diretores e de atualização das rotações) discutidas nos capítulos anteriores afetam as respostas mecânicas das análises.

As ordens das funções de base NURBS nas duas direções paramétricas são iguais, a menos que seja especificado o contrário. A ordem será denotada por p . As elevações de grau dos modelos foram realizadas por meio de refinamento k , que garante a maior continuidade possível em todos os exemplos.

Para determinação dos vetores normais nos pontos de controle foi realizada uma técnica baseada em mínimos quadrados. O sistema de equações foi formado usando os valores conhecidos dos vetores diretores nos pontos de Greville, como feito por Ghadimi e Hassani (2023).

5.1 Análise Linear

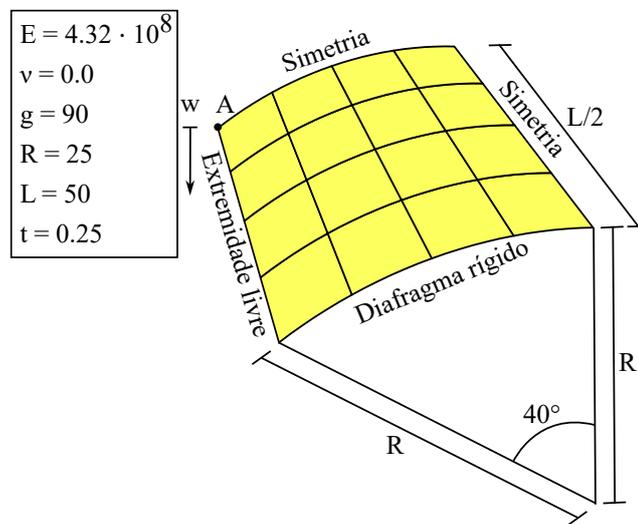
Nos problemas a seguir realizaremos vários estudos de convergência em três *benchmarks* clássicos do conhecido *Shell Obstacle Course* proposto por Belytschko *et al.* (1985) para avaliação do desempenho de formulações para análise linear de cascas. Como os exemplos possuem caráter de linearidade geométrica, não são necessárias atualizações de rotação.

Nestes estudos consideraram-se elementos NURBS quadráticos e cúbicos, e três esquemas de integração: integração completa (Full), reduzida uniforme (R_{UNI}) e reduzida isogeométrica (R_{AIG}). Dois pontos de Gauss são considerados na espessura (direção t) em todos os casos.

5.1.1 Casca de Scordelis-Lo

Este exemplo trata de uma casca cilíndrica com suporte de dois diafragmas rígidos em suas extremidades curvas. O diafragma rígido é simulado restringindo todos os deslocamentos no plano na extremidade suportada e a rotação em torno do vetor tangente na direção circunferencial. A casca está sujeita a uma carga vertical g devida ao seu peso próprio, sendo a carga distribuída por toda a sua área superficial. As duas bordas laterais restantes estão livres. O modelo estrutural e as propriedades da casca são mostrados na Figura 29.

Figura 29 – Descrição da casca de Scordelis-Lo e malha 4×4 .

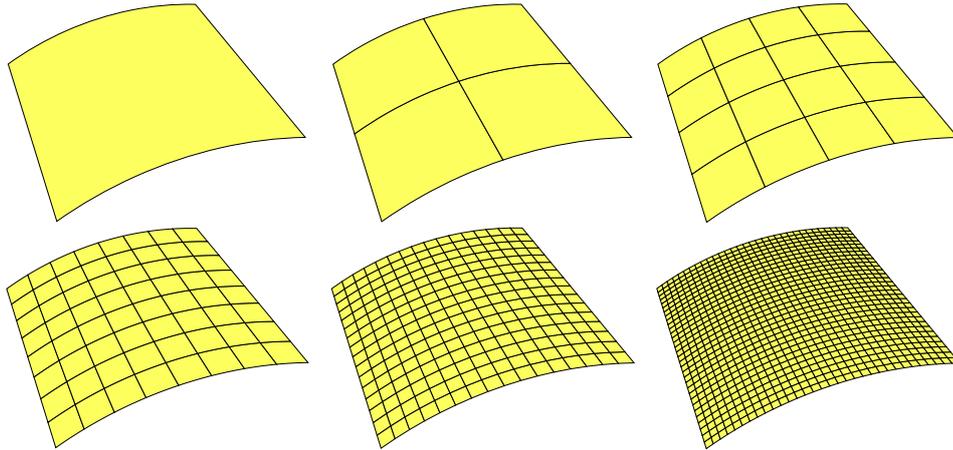


Fonte: Elaborada pelo autor.

Este teste foi reportado pela primeira vez por Scordelis e Lo (1964). Também foi resolvido com sucesso, por Hughes *et al.* (2005) e por Dornisch *et al.* (2013), usando a AIG. Esta estrutura de casca em particular serve como um problema clássico para avaliação do travamento de membrana, pois já é esperado que esta estrutura de casca sofra destas patologias. As deformações de membrana e de flexão dominam o problema, sendo o cisalhamento transversal desprezível (ADAM *et al.*, 2015a). Segundo Belytschko *et al.* (1985), mesmo elementos com problemas sérios de travamento de membrana exibirão convergência moderada, mas, imprecisões na avaliação da tensão da membrana impedirão significativamente a convergência.

Devido à simetria do problema, apenas um quarto da casca foi considerada nas análises. O modelo foi discretizado em 6 malhas uniformes distintas (de 1×1 à 32×32 elementos) seguindo o mesmo padrão, dobrando o número de elementos ao longo do comprimento e da circunferência do modelo, conforme mostrado na Figura 30.

Figura 30 – Malhas usadas na casca de Scordelis-Lo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 1 – Deslocamento vertical w_A para casca de Scordelis-Lo.

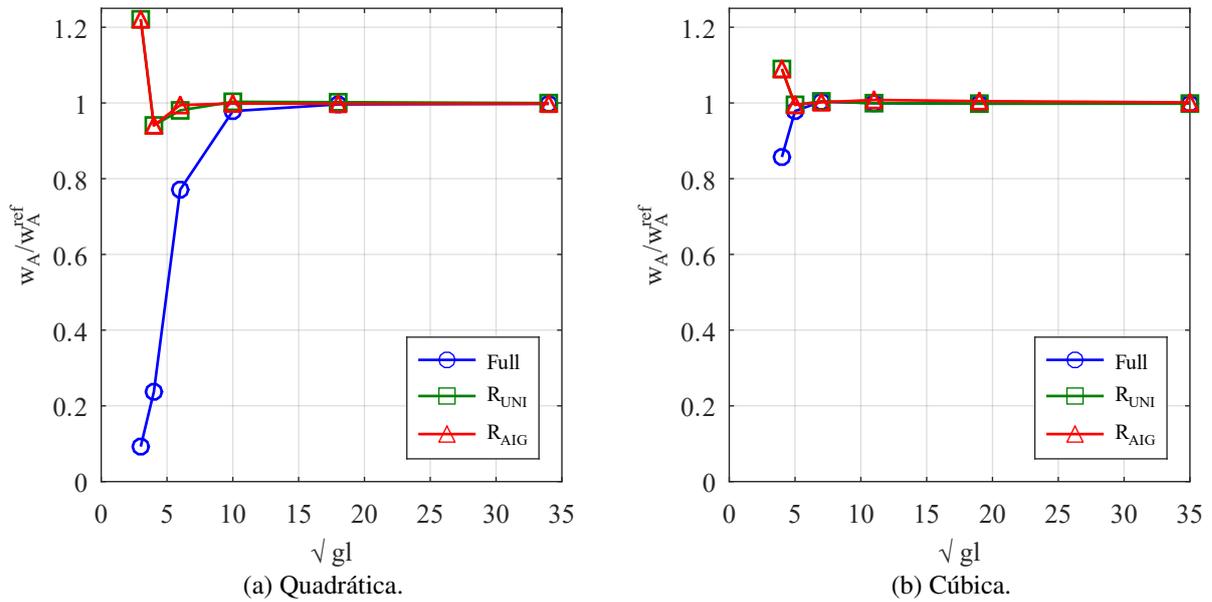
Elementos por lado	Quadrática			Cúbica		
	Full	R _{UNI}	R _{AIG}	Full	R _{UNI}	R _{AIG}
1	0.0279	0.3688	0.3688	0.2589	0.3291	0.3291
2	0.0716	0.2841	0.2841	0.2955	0.3005	0.3005
4	0.2328	0.3003	0.2961	0.3031	0.3032	0.3025
8	0.2955	0.3016	0.3029	0.3018	0.3018	0.3044
16	0.3009	0.3013	0.3026	0.3015	0.3015	0.3035
32	0.3013	0.3014	0.3019	0.3015	0.3015	0.3024

Fonte: elaborada pelo autor.

Para avaliar a convergência, o deslocamento vertical para baixo (w_A) no ponto médio da borda lateral (ponto A) foi comparado com a solução de referência $w_A^{ref} = 0.3020$, obtida por Dornisch *et al.* (2013) utilizando elementos de cascas NURBS, também baseados nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado. Um valor um pouco diferente, de $w_A^{ref} = 0.3024$, foi obtido da utilização de elementos finitos com base na teoria de cascas abatidas por Scordelis e Lo (1964) e utilizado como solução de referência no trabalho de Belytschko *et al.* (1985). Os deslocamentos produzidos neste estudo estão representados graficamente na Figura 31.

É possível observar que, para uma mesma malha, ao elevar o grau das funções de base o resultado melhora significativamente, como apresentado na Tabela 1. Os elementos de integração reduzida, R_{UNI} e R_{AIG}, apresentaram resultados muito similares e foram mais precisos que os elementos de integração total, contudo apresentaram comportamento de convergência não monotônica. Em contraste, as respostas de integração completa foram mais rígidas que a solução de referência.

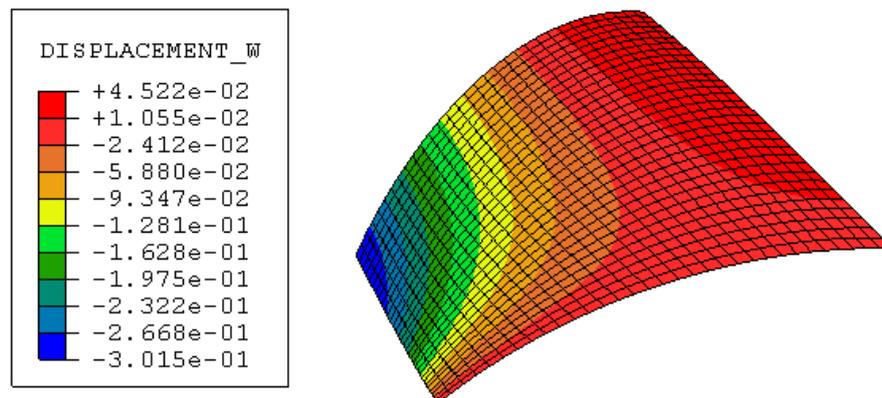
Figura 31 – Convergência do deslocamento w_A ($w_A^{ref} = 0.3020$) para casca de Scordelis-Lo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O campo de deslocamento é bem comportado e pode ser facilmente aproximado devido à geometria simples do problema, curvatura constante e carregamento distribuído. Os resultados demonstram rápida convergência e excelente concordância com os resultados de referência. Além disso, mesmo para malhas grosseiras, os elementos cúbicos fornecem uma solução altamente precisa. A Figura 32 mostra o campo de deslocamento (w_A) do problema.

Figura 32 – Campo de deslocamento w_A (escala 20×) do problema Scordelis-Lo *roof*.

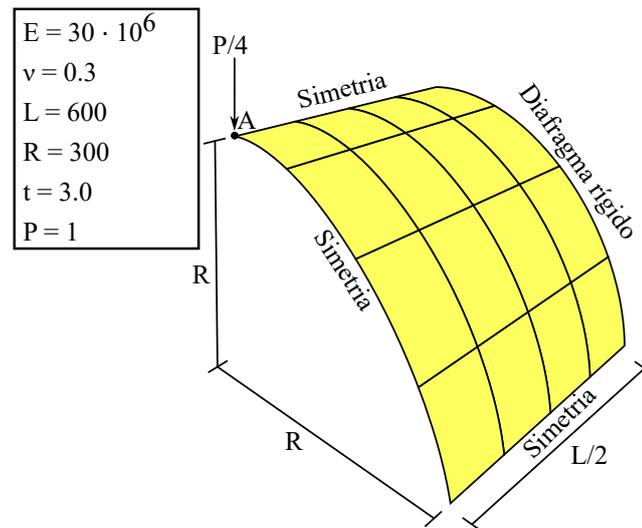


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.2 Casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos

Este exemplo trata de um cilindro de paredes finas apoiado nas extremidades por diafragmas rígidos e submetido a duas cargas concentradas situadas em pontos opostos e localizadas no centro de seu comprimento. O diafragma rígido é simulado por meio da restrição de deslocamentos e rotações, como descrito no exemplo anterior. O modelo estrutural e as propriedades da casca são mostrados na Figura 33.

Figura 33 – Descrição da casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos e malha 4×4 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Este problema foi estudado por Belytschko *et al.* (1985) utilizando elementos finitos baseados na teoria de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado. Também foi resolvido com sucesso, por Hughes *et al.* (2005) e por Dornisch *et al.* (2013), usando a AIG. Este é um teste severo utilizado para avaliar a capacidade do elemento de casca de representar com precisão as deformações da membrana e de flexão, especialmente perto dos pontos de aplicação das cargas (BELYTSCHKO *et al.*, 1985). As deformações causadas pelo cisalhamento são insignificantes, fazendo com que formulações de casca Reissner-Mindlin e de casca de Kirchhoff-Love produzam resultados semelhantes (DORNISCH *et al.*, 2013).

Devido à simetria do problema, apenas um oitavo da casca foi considerado nas análises. A Figura 34 ilustra as malhas utilizadas neste exemplo, modeladas seguindo a mesma estratégia de discretização descrita no Exemplo 5.1.1.

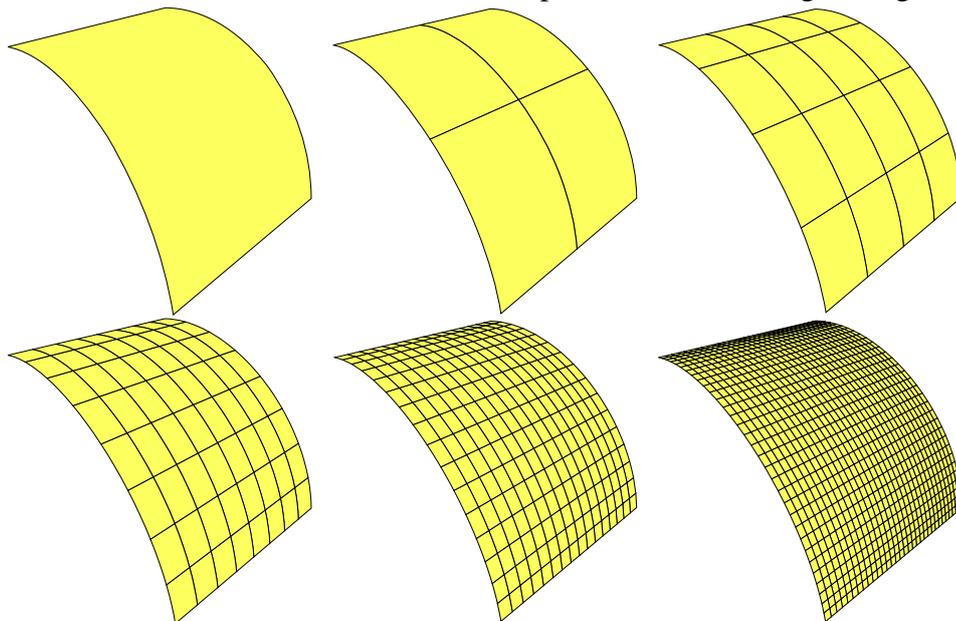
Tabela 2 – Deslocamento vertical w_A para casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos.

Elementos por lado	Full	Quadrática		Full	Cúbica	
		RUNI	R _{AIG}		RUNI	R _{AIG}
1	4.199×10^{-7}	1.977×10^{-6}	1.977×10^{-6}	7.833×10^{-7}	1.460×10^{-5}	1.460×10^{-5}
2	7.192×10^{-7}	8.712×10^{-7}	8.712×10^{-7}	1.328×10^{-6}	1.368×10^{-6}	1.368×10^{-6}
4	1.812×10^{-6}	2.538×10^{-6}	7.097×10^{-6}	6.144×10^{-6}	6.510×10^{-6}	7.847×10^{-6}
8	6.553×10^{-6}	9.264×10^{-6}	1.490×10^{-5}	1.516×10^{-5}	1.564×10^{-5}	1.745×10^{-5}
16	1.492×10^{-5}	1.735×10^{-5}	1.872×10^{-5}	1.828×10^{-5}	1.832×10^{-5}	1.879×10^{-5}
32	1.805×10^{-5}	1.841×10^{-5}	1.879×10^{-5}	1.851×10^{-5}	1.851×10^{-5}	1.879×10^{-5}

Fonte: elaborada pelo autor.

Em seu trabalho, Belytschko *et al.* (1985) usou como referência um valor de deslocamento de $w_A^{ref} = 1.8248 \times 10^{-5}$ para análises utilizando MEF. Para avaliar a convergência, o deslocamento vertical para baixo (w_A) no ponto de aplicação da carga foi comparado com a solução de referência $w_A^{ref} = 1.8400 \times 10^{-5}$, obtida por Dornisch (2015) utilizando elementos de cascas NURBS, também baseados nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado. Um outro valor, $w_A^{ref} = 1.8780 \times 10^{-5}$ foi obtido com a utilização de elementos isogeométricos também baseados na teoria Reissner-Mindlin e conceito de sólido degenerado por Adam *et al.* (2015a), utilizando o esquema de integração isogeométrica proposta pelo autor (R_{AIG}). Os deslocamentos produzidos neste estudo estão representados graficamente na Figura 35.

Figura 34 – Malhas usadas na casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos



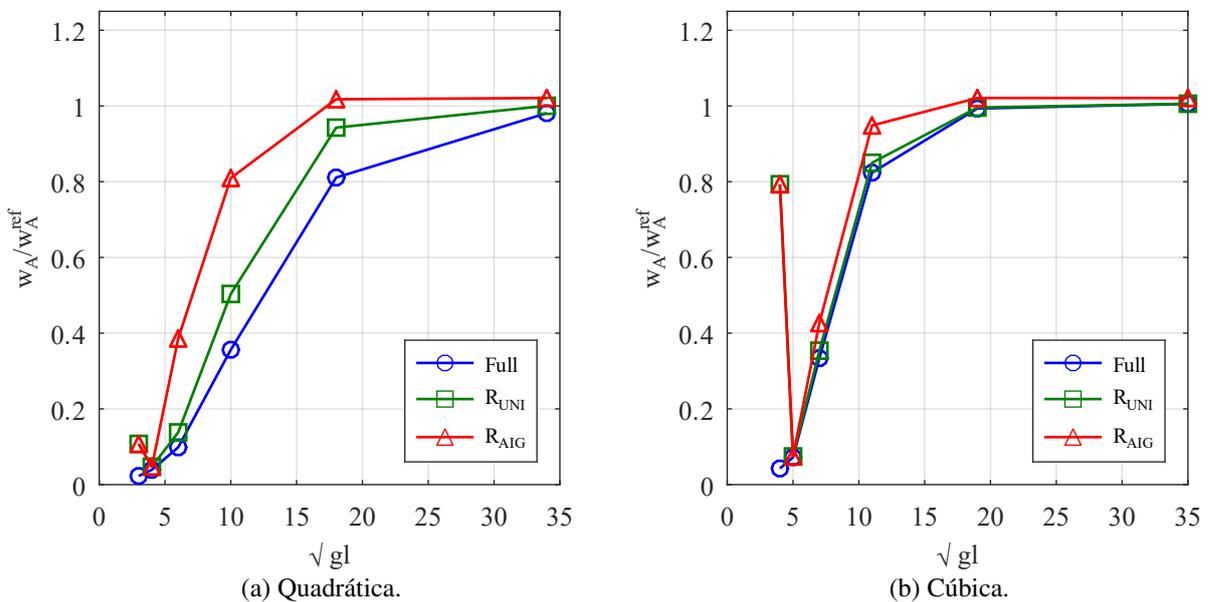
Fonte: Elaborada pelo autor.

Diferente do exemplo anterior, todos os elementos utilizados apresentaram trava-

mento nos primeiros níveis de refinamento. Segundo Dornisch *et al.* (2013), o travamento é responsável pela lenta convergência das respostas das cascas de Reissner-Mindlin de ordem mais baixa, $p = 2$. É possível observar que, para uma mesma malha, ao elevar o grau das funções de base o resultado melhora significativamente, como apresentado na Tabela 2.

A integração reduzida isogeométrica R_{AIG} melhorou consideravelmente a precisão da resposta para todos os graus, contudo, forneceu resultados mais flexíveis em relação aos demais esquemas de integração, mas que convergem para a solução de Adam *et al.* (2015a). A elevação de grau mostrou-se importante para melhorar a convergência da resposta obtida, resultando em desempenhos similares ao considerarmos malhas cúbicas. Embora a resposta para a integração R_{UNI} seja muito próxima da obtida da integração completa (Full), ela se mostra uma boa alternativa devido ao menor custo computacional. Com o refinamento do modelo, todos os esquemas de integração tendem a convergir para um valor mais flexível que o valor de referência, $w_A^{ref} = 1.840 \times 10^{-5}$ (DORNISCH, 2015).

Figura 35 – Convergência do deslocamento w_A ($w_A^{ref} = 1.840 \times 10^{-5}$) para casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos.

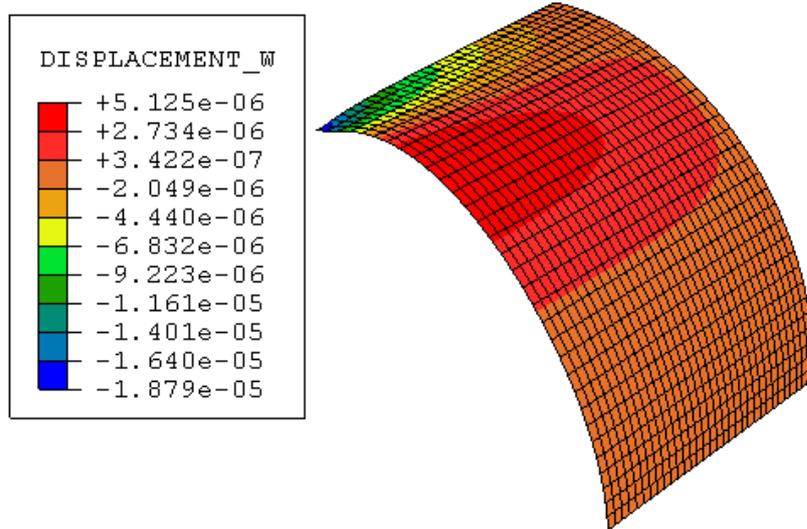


Fonte: Elaborada pelo autor.

O campo de deslocamento é mais complexo do que o do exemplo anterior devido ao carregamento ser concentrado. Isto explica também o travamento mais severo observado neste caso. Além disto, foi necessário um número maior de graus de liberdade para obter a convergência da resposta analisada. A Figura 36 mostra o campo de deslocamento (w_A) do

problema.

Figura 36 – Campo de deslocamento w_A (fator de escala = 10^6) do problema da casca cilíndrica comprimida sobre diafragmas rígidos.

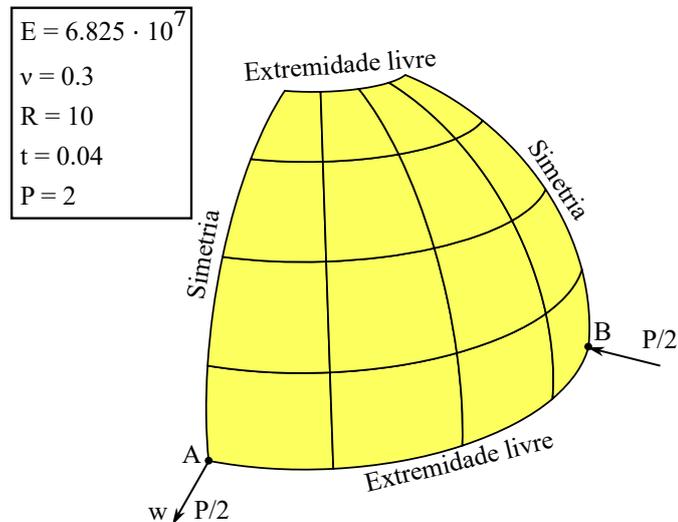


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.3 Casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas

Este exemplo trata de um hemisfério com corte no polo de 18° submetido a dois pares de cargas localizadas em pontos opostos do equador. Os pares de cargas têm direções opostas, mas possuem mesma magnitude. As duas extremidades estão livres. O modelo estrutural e as propriedades da casca são mostrados na Figura 37.

Figura 37 – Descrição da casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas e malha 4×4 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

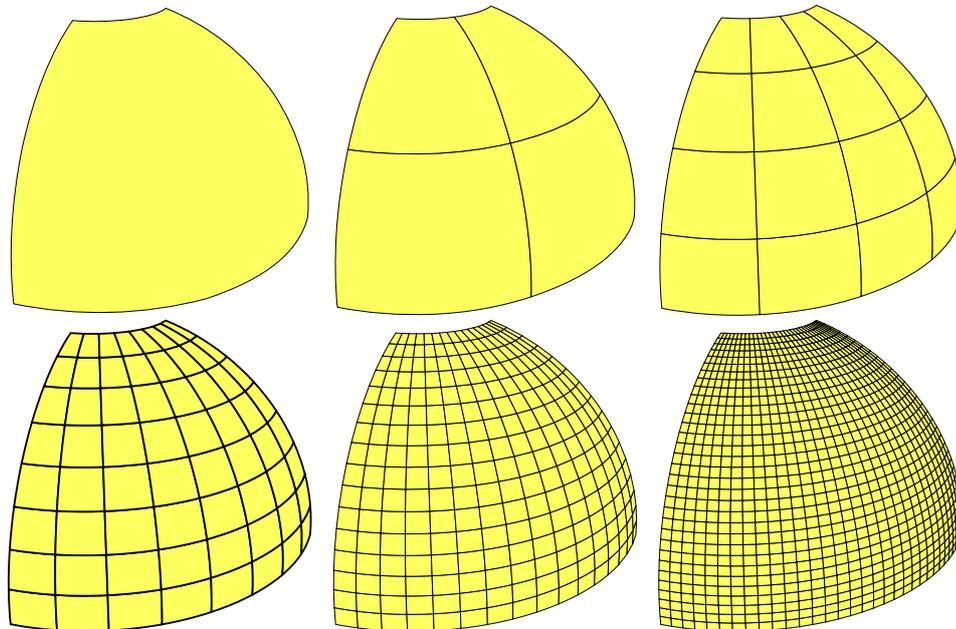
Este exemplo é uma versão modificada do problema do hemisfério do *Shell Obstacle*

Course de Belytschko *et al.* (1985) devido ao corte no polo realizado para que se torne possível discretizar a geometria utilizando uma malha estruturada de elementos quadrilaterais, o que não é possível quando a região do polo é considerada. Foi estudado por Macneal e Harder (1985) utilizando elementos finitos quadrilaterais de cascas. Também foi resolvido com sucesso, por Adam *et al.* (2015a) e por Ghadimi e Hassani (2021), usando a AIG.

Adam *et al.* (2015a) afirmaram que este é um bom teste para verificar se o elemento não apresenta problemas com travamento de membrana e de cisalhamento. Este é um teste desafiador pois possui modos de flexão inextensíveis e grandes rotações de corpo rígido que são agravados devido a assimetria do problema. A energia da membrana é quase zero (BELYTSCHKO *et al.*, 1985; ADAM *et al.*, 2015a). Segundo Belytschko *et al.* (1985) este exemplo permite a avaliação da capacidade do elemento de lidar com rotações de corpo rígido em relação as normais à superfície da casca, fazendo com que uma modelagem precisa do movimento do corpo rígido seja necessária a um bom desempenho.

Devido à simetria do problema, apenas um quarto da casca foi considerado nas análises. A Figura 38 ilustra as malhas utilizadas neste exemplo, modeladas seguindo a mesma estratégia de discretização utilizada nos exemplos anteriores.

Figura 38 – Malhas usadas na casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

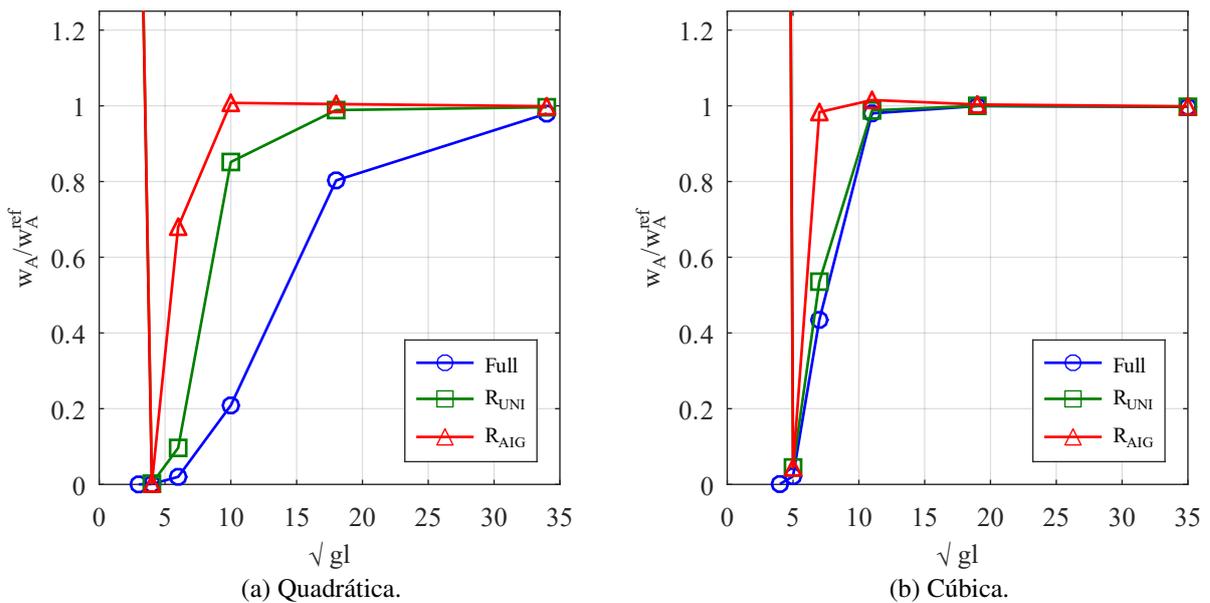
Tabela 3 – Deslocamento vertical w_A para casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas.

Elementos por lado	Quadrática			Cúbica		
	Full	R _{UNI}	R _{AIG}	Full	R _{UNI}	R _{AIG}
1	1.495×10^{-5}	1.831×10^{-1}	1.831×10^{-1}	9.012×10^{-5}	6.308×10^{-1}	6.308×10^{-1}
2	9.068×10^{-5}	1.967×10^{-4}	1.967×10^{-4}	2.030×10^{-3}	4.218×10^{-3}	4.218×10^{-3}
4	1.882×10^{-3}	9.070×10^{-3}	6.396×10^{-2}	4.085×10^{-2}	5.034×10^{-2}	9.244×10^{-2}
8	1.962×10^{-2}	8.005×10^{-2}	9.471×10^{-2}	9.212×10^{-2}	9.285×10^{-2}	9.544×10^{-2}
16	7.548×10^{-2}	9.294×10^{-2}	9.444×10^{-2}	9.394×10^{-2}	9.399×10^{-2}	9.433×10^{-2}
32	9.207×10^{-2}	9.364×10^{-2}	9.389×10^{-2}	9.375×10^{-2}	9.375×10^{-2}	9.387×10^{-2}

Fonte: elaborada pelo autor.

Para avaliar a convergência, o deslocamento (w_A) no ponto de aplicação e na direção do carga foi comparado com a mesma solução de referência utilizada por Macneal e Harder (1985), $w_A^{ref} = 9.400 \times 10^{-2}$. Adam *et al.* (2015a) também consideraram este valor, embora os autores tenham mencionado que análises mais recentes tenham sugerido um valor de referência de $w_A^{ref} = 9.300 \times 10^{-2}$. O valor de referência adotado também foi utilizado por Barroso (2022) para comparação com seus resultados obtidos usando elementos de Bézier também baseados na teoria Reissner-Mindlin e conceito de sólido degenerado. Os deslocamentos produzidos neste estudo estão representados graficamente na Figura 39.

Figura 39 – Convergência do deslocamento w_A ($w_A^{ref} = 9.400 \times 10^{-2}$) para casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

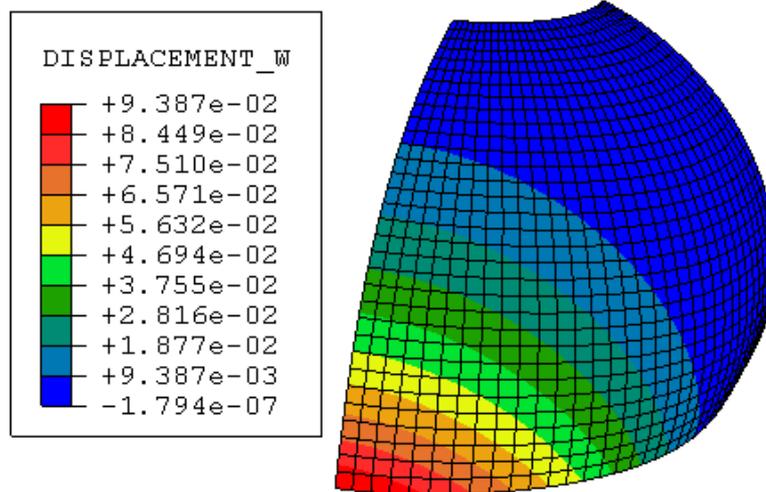
Assim como no exemplo anterior, todos os elementos utilizados apresentaram trava-

mento nos primeiros níveis de refinamento. Mais um vez, a elevação do grau das funções de base melhora significativamente o resultado para uma mesma malha, como apresentado na Tabela 3.

Novamente, a integração reduzida isogeométrica R_{AIG} melhorou a precisão da resposta para todos os graus e o refinamento do modelo fez com que todos os esquemas de integração convergissem para um valor muito próximo ao de referência. Embora a integração R_{AIG} apresente uma convergência mais rápida, o esquema de integração R_{UNI} fornece um comportamento de convergência mais estável. O uso de elementos com grau mais elevado mostrou-se importante para melhorar a convergência da resposta obtida, principalmente para integrações completa (Full) e R_{UNI} .

O campo de deslocamentos apresenta grande complexidade devido a dupla curvatura da geometria, além do carregamento concentrado. O fato deste exemplo ser uma casca de parede fina também explica o severo travamento observado. A Figura 40 mostra o campo de deslocamento (w_A) do problema.

Figura 40 – Campo de deslocamento w_A (fator de escala = 30) do problema da casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Análise Não Linear

Nos problemas a seguir realizaremos vários estudos através de *benchmarks* de análise não linear considerados em diversos trabalhos na literatura para avaliação do desempenho formulações para análise não linear geométrica de cascas. Todos os exemplos considerados aqui foram estudados por Sze *et al.* (2004), que realizou uma seleção dos testes não lineares de cascas

mais populares.

Como discutido no Capítulo 4, são necessárias atualizações das rotações, visto que os exemplos possuem caráter de não linearidade geométrica. Exceto em casos especificados, serão consideradas as quatro estratégias de atualização do vetor normal, para Rotações Moderadas (ARM), Linear (AL), Linear Normalizada (ALN) e Quadrática (AQ).

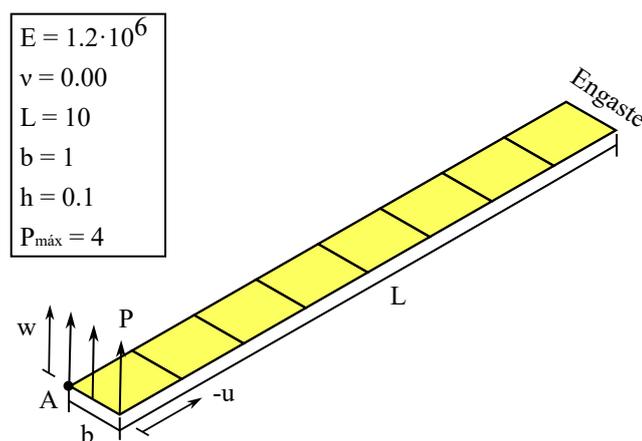
Nestes estudos consideraram-se apenas elementos NURBS cúbicos, visto melhor desempenho apresentado no exemplos lineares e maior popularidade entre as análises isogeométricas realizadas na literatura. Como esperado, devido a maior ordem das bases empregadas, estes elementos apresentam convergência mais acelerada e menor suscetibilidade ao travamento, quando comparados aos elementos NURBS quadráticos.

Salvo nos casos onde o contrário é especificado, os três esquemas de integração são utilizados: integração completa (Full), reduzida uniforme (R_{UNI}) e reduzida isogeométrica (R_{AIG}). Dois pontos de Gauss são considerados na espessura da casca em todos os casos.

5.2.1 Viga engastada submetida a carga na extremidade

O primeiro exemplo de análise não linear neste trabalho trata de uma viga em balanço modelada como uma placa submetida a uma carga distribuída transversal de magnitude P em sua extremidade livre (SZE *et al.*, 2004), conforme apresentado na Figura 41.

Figura 41 – Descrição da viga engastada com carga na extremidade e malha 1×8 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste problema, dominado pela flexão, podem ser avaliados o comportamento não linear de flexão fora do plano e o comportamento de travamento por cisalhamento (HAN *et al.*,

2024). Utilizando formulação isogeométrica NURBS para análise não linear de cascas baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado, este problema foi utilizado por Ghadimi e Hassani (2023) como teste para validação, e também foi resolvido com sucesso por Han *et al.* (2024).

O problema foi modelado sem consideração de simetria. Foram utilizadas quatro malhas seguindo um mesmo padrão, dobrando o número de elementos ao longo do comprimento e considerando o número de elementos na largura sempre igual a um. Assim, as malhas possuem 1×1 , 1×2 , 1×4 e 1×8 elementos.

Aqui, apenas as integrações completa (Full) e reduzida uniforme (R_{UNI}) foram consideradas, visto que como a malha não é quadrada não podemos utilizar o esquema de pontos de integração associado a integração reduzida isogeométrica (R_{AIG}).

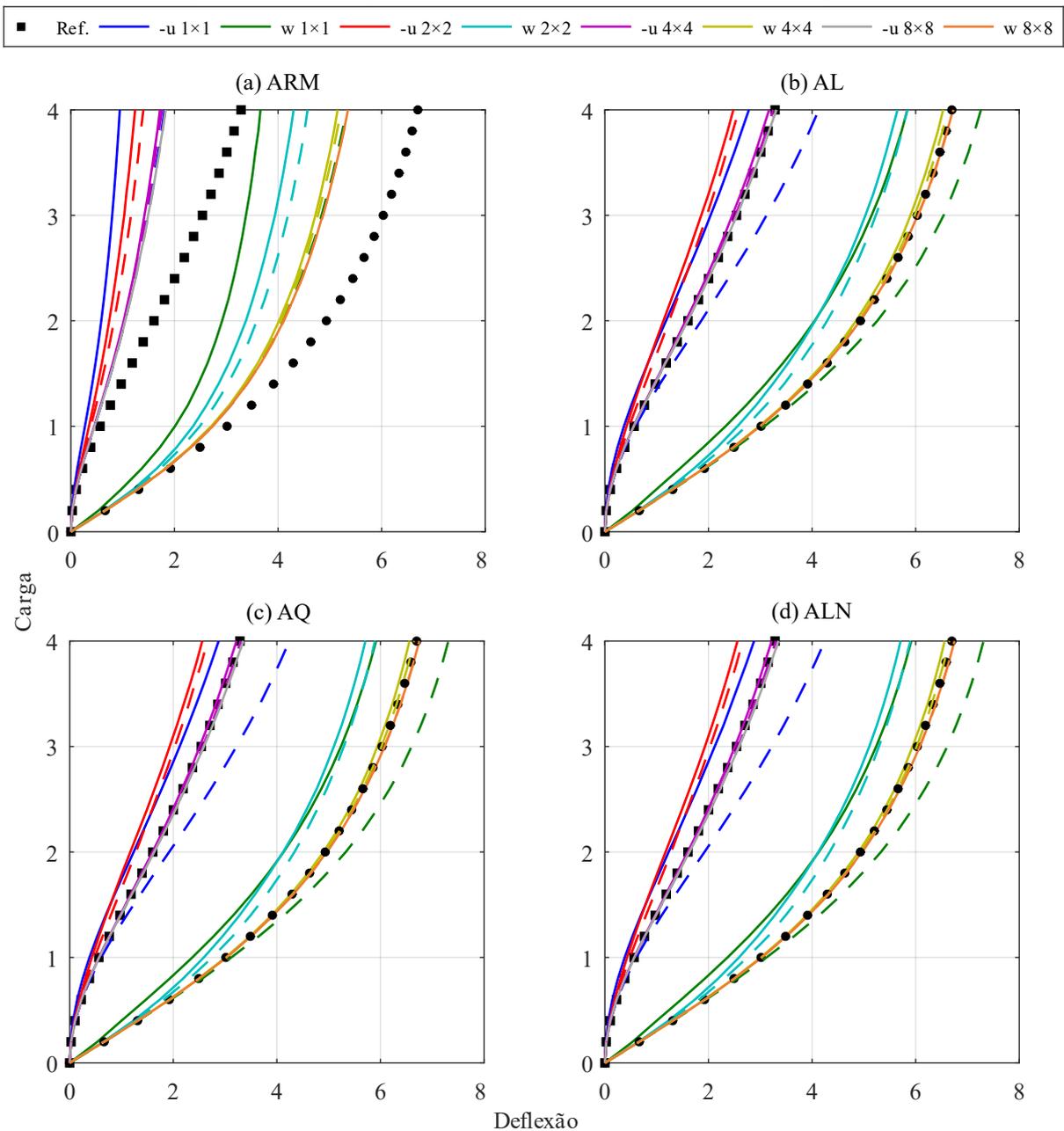
O Método de Controle de Carga com iterações de Newton-Rapshon foi utilizado para realizar as análises não lineares. A carga foi aplicada utilizando 20 incrementos uniformes e a tolerância adotada para a força residual foi de 10^{-6} . As curvas carga-deslocamento foram obtidas considerando os deslocamentos $-u$ e w no ponto A , na extremidade livre onde a carga é aplicada. Os resultados, obtidos utilizando as diferentes estratégias de atualização do vetor normal, são apresentados na Figura 42. Também são mostrados em todos os gráficos os resultados obtidos por Sze *et al.* (2004), utilizando uma malha de 1×16 elementos S4R de um modelo de casca geral do software ABAQUS.

Podemos observar que a integração completa apresenta uma convergência monotônica, enquanto no esquema de integração R_{UNI} esse comportamento não é mais garantido, ocorrendo uma oscilação nos resultados de forma que o modelo se torna mais flexível ou rígido a depender do refinamento adotado. Com o refinamento do modelo, todos os esquemas de integração convergiram para a solução esperada, de maneira que os resultados com elementos cúbicos considerando os dois esquemas de integração são quase idênticos aos resultados de Sze *et al.* (2004). Como o custo computacional da integração reduzida uniforme é menor, essa se mostra uma escolha interessante devido sua eficiência e será utilizada nos nossos próximos estudos.

Como esperado, as curvas descritas utilizando a estratégia ARM não consegue descrever bem o comportamento não linear da estrutura, uma vez que o problema envolve grandes rotações. Também podemos observar que para este exemplo as estratégias ALN e AQ obtiveram respostas muito similares e de excelente concordância com a literatura. Quanto a AL,

independentemente do nível de discretização da malha, os resultados obtidos não apresentam a mesma concordância e demonstram um modelo de comportamento mais rígido que o observado mediante a utilização das outras duas estratégias. A Figura 43 apresenta as curvas de carga-deslocamento para as estratégias de atualização que resultaram em uma melhor resposta (Figura 42) obtida por modelos utilizando o esquema de integração R_{UNI} .

Figura 42 – Curvas carga-deslocamento da viga engastada com carga na extremidade, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada).

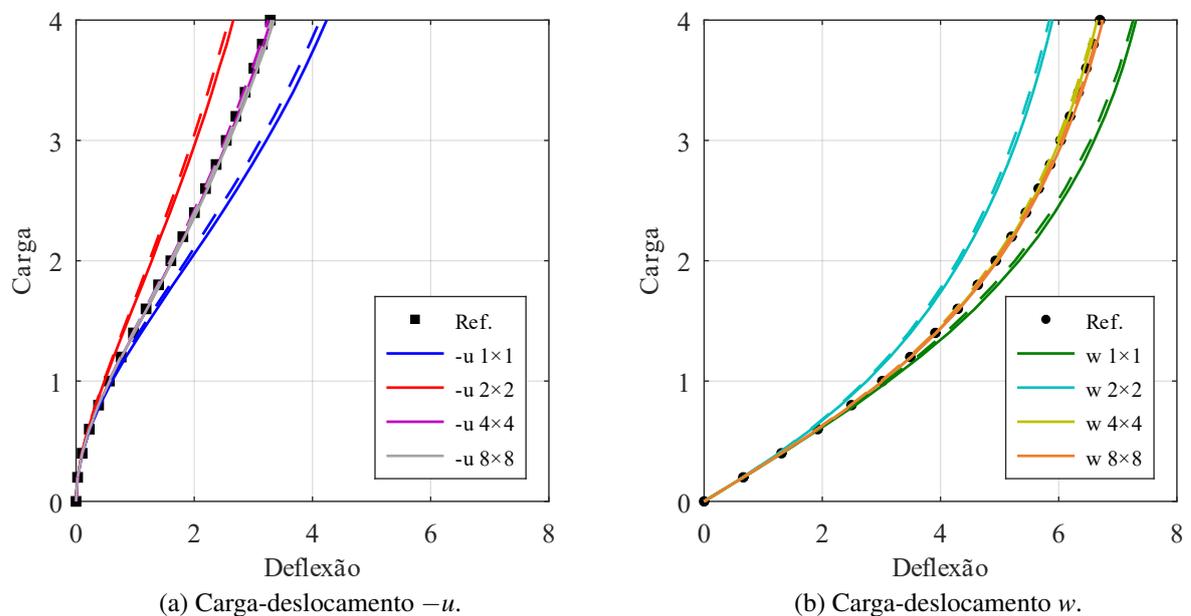


Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todas as simulações foi considerado um número de incrementos de carga (NINC)

igual à 20 para reproduzir resultados para os mesmos pontos tabelados por Sze *et al.* (2004). A Tabela 4 apresenta os números total e médio de iterações necessários para obtenção da curva de carga-deslocamento de cada estratégia de atualização do vetor normal. Pode-se observar que além de melhor descrever o comportamento não linear da estrutura analisada, as estratégias ALN e AQ resultam em números total e médio de iterações muito menores em relação aos números total e médio obtidos para a opção AL. A estratégia ALN apresentou um desempenho muito similar em relação à AQ, quando não superior.

Figura 43 – Curvas carga-deslocamento da viga engastada com carga na extremidade, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração reduzida uniforme (R_{UNI}).



Fonte: Elaborada pelo autor.

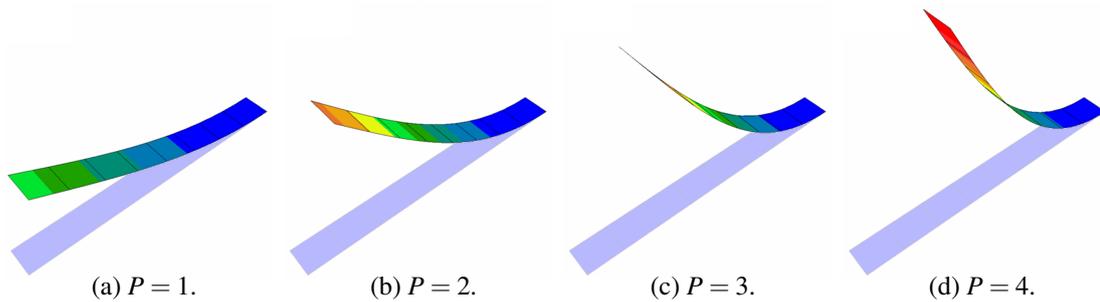
Tabela 4 – Número total de iterações (TITER) e média de iterações (MITER) para cada malha e estratégia de atualização do vetor normal, para a viga engastada. NINC = 20.

Malha	1x1				1x2				1x4				1x8			
	ARM	AL	ALN	AQ	ARM	AL	ALN	AQ	ARM	AL	ALN	AQ	ARM	AL	ALN	AQ
TITER	99	251	108	109	99	172	104	104	99	172	106	106	99	170	104	105
MITER	4.95	12.55	5.40	5.45	4.95	8.60	5.20	5.20	4.95	8.6	5.30	5.30	4.95	8.50	5.20	5.25

Fonte: elaborada pelo autor.

As deformadas do modelo obtidas considerando níveis crescentes de carregamento são apresentadas na Figura 44, mostrando que a estrutura realmente apresenta grandes deslocamentos e rotações.

Figura 44 – Deformadas da viga engastada com carga na extremidade.

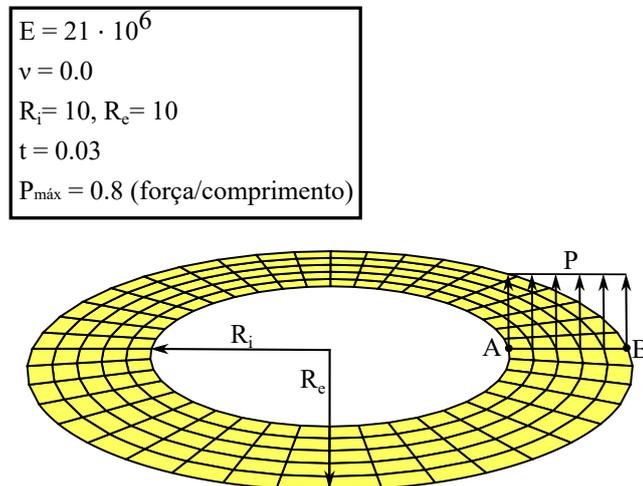


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.2 Placa anular fendida submetida a força de elevação

Análise não linear de uma placa anular fendida submetida a uma carga uniformemente distribuída P aplicada em uma extremidade da fenda enquanto a outra extremidade da fenda está totalmente engastada (SZE *et al.*, 2004). Não foram encontradas referências onde este problema tenha sido estudado utilizando formulação isogeométrica NURBS para análise não linear de cascas baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado.

Figura 45 – Descrição da placa anular fendida e malha 5×40 .



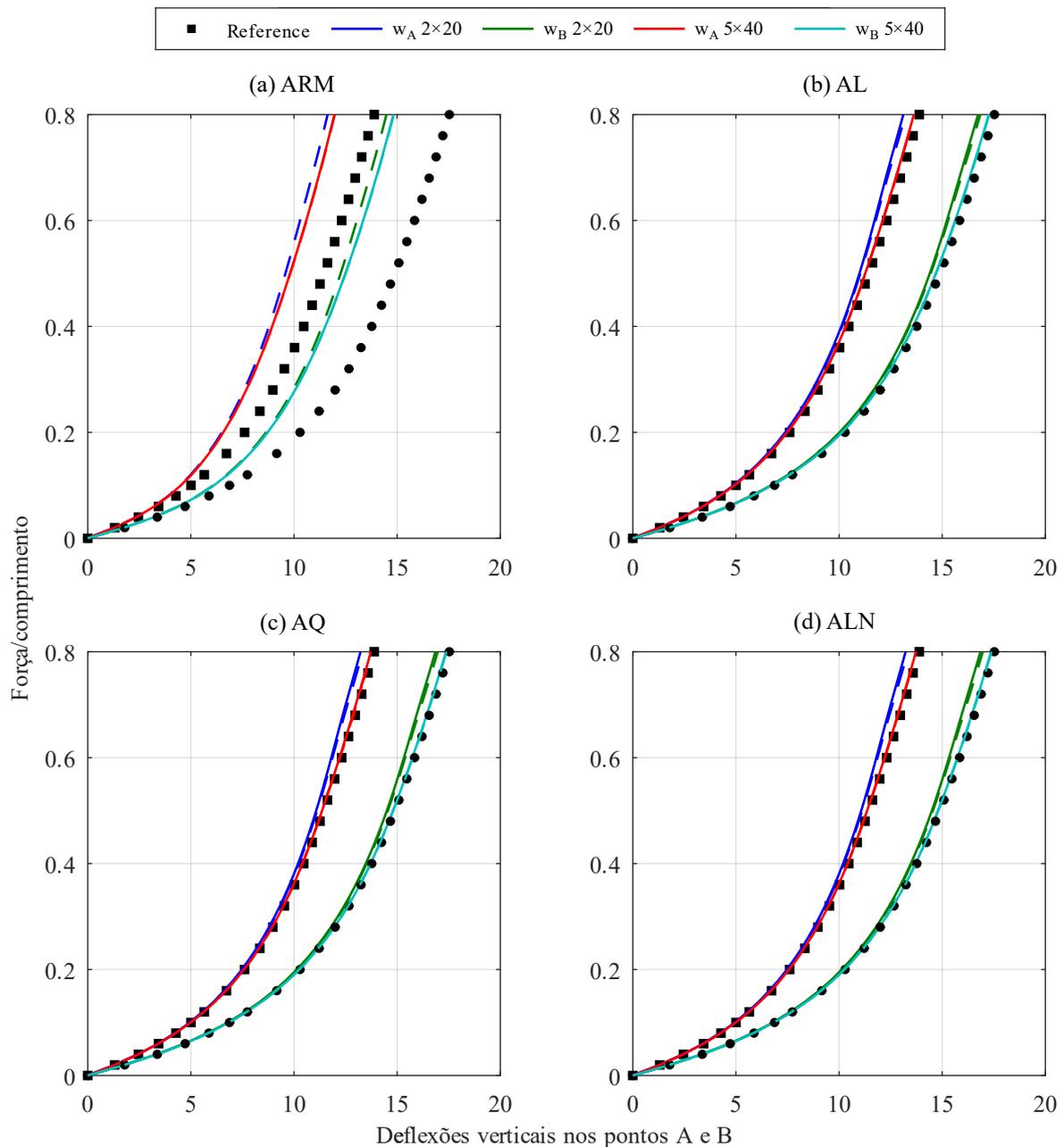
Fonte: Elaborada pelo autor.

Foram utilizadas apenas duas malhas: uma possuindo 2×20 elementos, e a outra 5×40 elementos. Aqui, novamente, não podemos utilizar o esquema de pontos de integração associado a integração reduzida isogeométrica (R_{AIG}) e apenas as integrações completa (Full) e reduzida uniforme (R_{UNI}) foram consideradas.

O Método de Controle de Carga com iterações de Newton-Rapshon foi utilizado para

realizar as análises não lineares. A carga foi aplicada utilizando 40 incrementos uniformes e a tolerância adotada para a força residual foi de 10^{-4} . As curvas carga-deslocamento foram obtidas considerando os deslocamentos w nos pontos A e B , na extremidade livre onde a carga é aplicada. Os resultados, obtidos utilizando as diferentes estratégias de atualização do vetor normal, são apresentados na Figura 46. Também são mostrados em todos os gráficos os resultados obtidos por Sze *et al.* (2004), utilizando uma malha de 10×80 elementos S4R de um modelo de casca geral do software ABAQUS.

Figura 46 – Curvas carga-deslocamento da placa anular fendida, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada).

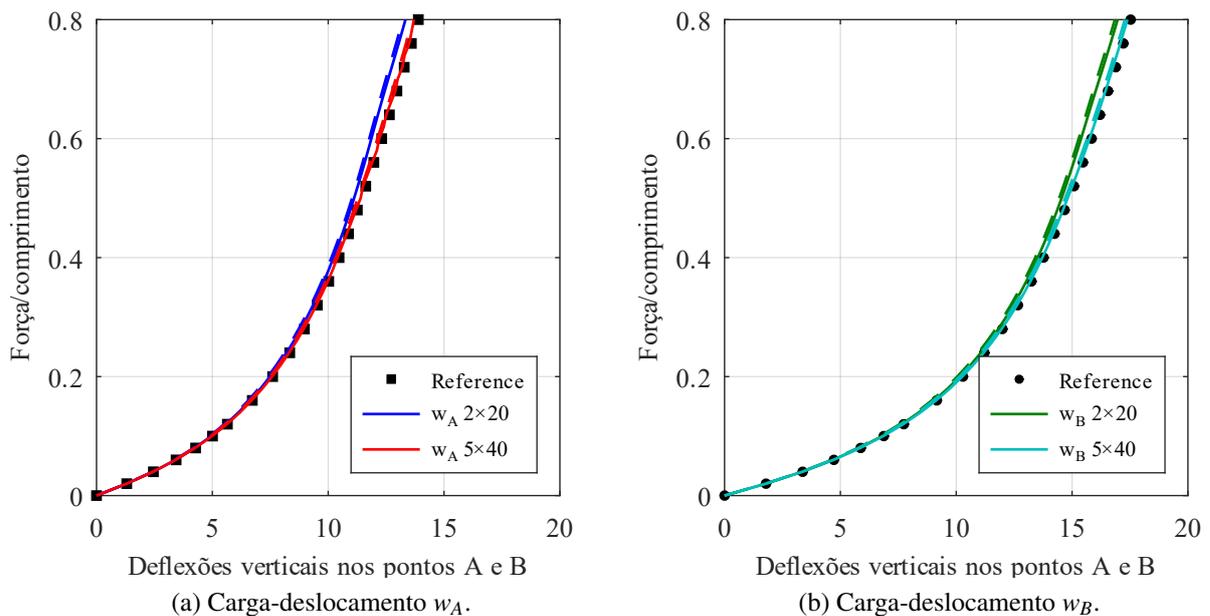


Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o refinamento do modelo, todos os esquemas de integração convergiram para a solução esperada, de maneira que os resultados obtidos com elementos cúbicos considerando os dois esquemas de integração são quase idênticos aos resultados de Sze *et al.* (2004). Como o custo computacional da integração reduzida uniforme é menor, essa se mostra uma escolha interessante devido sua eficiência e será utilizada nos nossos próximos estudos.

O comportamento observado no Exemplo 5.2.1 se repete com respostas muito similares e de excelente concordância com a literatura para as estratégias para atualização das rotações ALN e AQ, mas com a estratégia AL demonstrando comportamento mais rígido, independentemente do nível de discretização da malha. A Figura 47 apresenta as curvas de carga-deslocamento para as estratégias de atualização que resultaram em uma melhor resposta (Figura 46) obtida por modelos utilizando o esquema de integração R_{UNI} .

Figura 47 – Curvas carga-deslocamento da placa anular fendida, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração reduzida uniforme (R_{UNI}).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todas as simulações foi considerado um número de incrementos de carga (NINC) igual à 40 para reproduzir resultados para os mesmos pontos tabelados por Sze *et al.* (2004). A Tabela 5 apresenta os números total e médio de iterações necessários para obtenção da curva de carga-deslocamento de cada estratégia de atualização do vetor normal. Novamente, as estratégias ALN e AQ resultam em números total e médio de iterações muito menores em relação aos números total e médio obtidos para a opção AL.

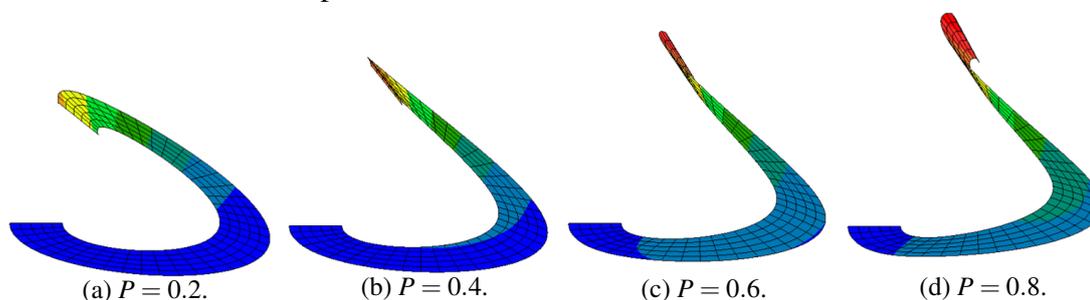
Tabela 5 – Número total de iterações (TITER) e média de iterações (MITER) para cada malha e estratégia de atualização do vetor normal, para a placa anular fendida. NINC = 40.

Atualização	Malha 2x20				Malha 5x40			
	ARM	AL	ALN	AQ	ARM	AL	ALN	AQ
TITER	259	392	255	251	346	370	252	248
MITER	6.47	9.80	6.38	6.28	8.65	9.25	6.30	6.20

Fonte: elaborada pelo autor.

As deformadas do modelo obtidas considerando níveis crescentes de carregamento são apresentadas na Figura 48, mostrando que a estrutura realmente apresenta grandes deslocamentos e rotações.

Figura 48 – Deformadas da placa anular fendida.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.3 Casca hemisférica submetida a forças radiais alternadas

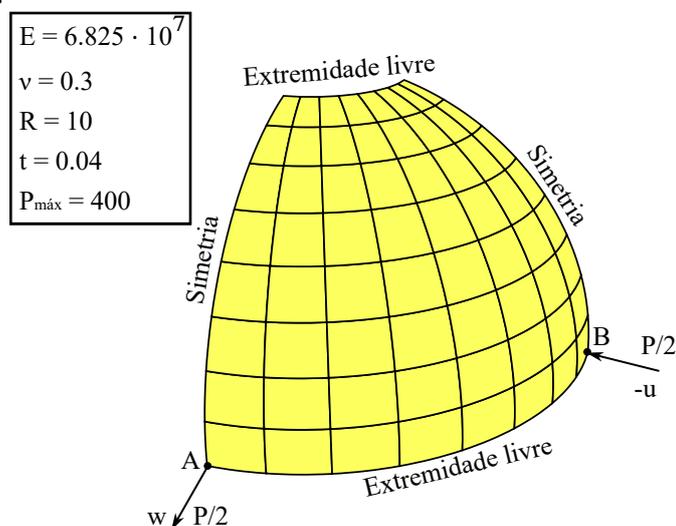
Este exemplo trata da análise não linear do hemisfério com corte no polo de 18° submetido a dois pares de cargas localizadas em pontos opostos do equador (SZE *et al.*, 2004), apresentado no exemplo linear 5.1.3. Os pares de cargas têm direções opostas, mas possuem mesma magnitude. As duas extremidades estão livres. O modelo estrutural e as propriedades da casca são mostrados na Figura 49.

Neste teste mais desafiador, que combina efeitos de flexão e membrana, pode-se demonstrar a capacidade da formulação para representação de problemas envolvendo grandes deslocamentos (HAN *et al.*, 2024). Utilizando formulação isogeométrica NURBS para análise não linear de cascas baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado, este problema foi estudado por Adam *et al.* (2015b) aplicando técnicas de integração completa e reduzida. Também foi resolvido com sucesso por Han *et al.* (2024).

Devido à simetria do problema, apenas um quarto da casca foi considerado nas análises. O modelo foi discretizado em 2 malhas uniformes distintas com 8×8 e 16×16

elementos.

Figura 49 – Descrição da casca hemisférica e malha 8×8 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

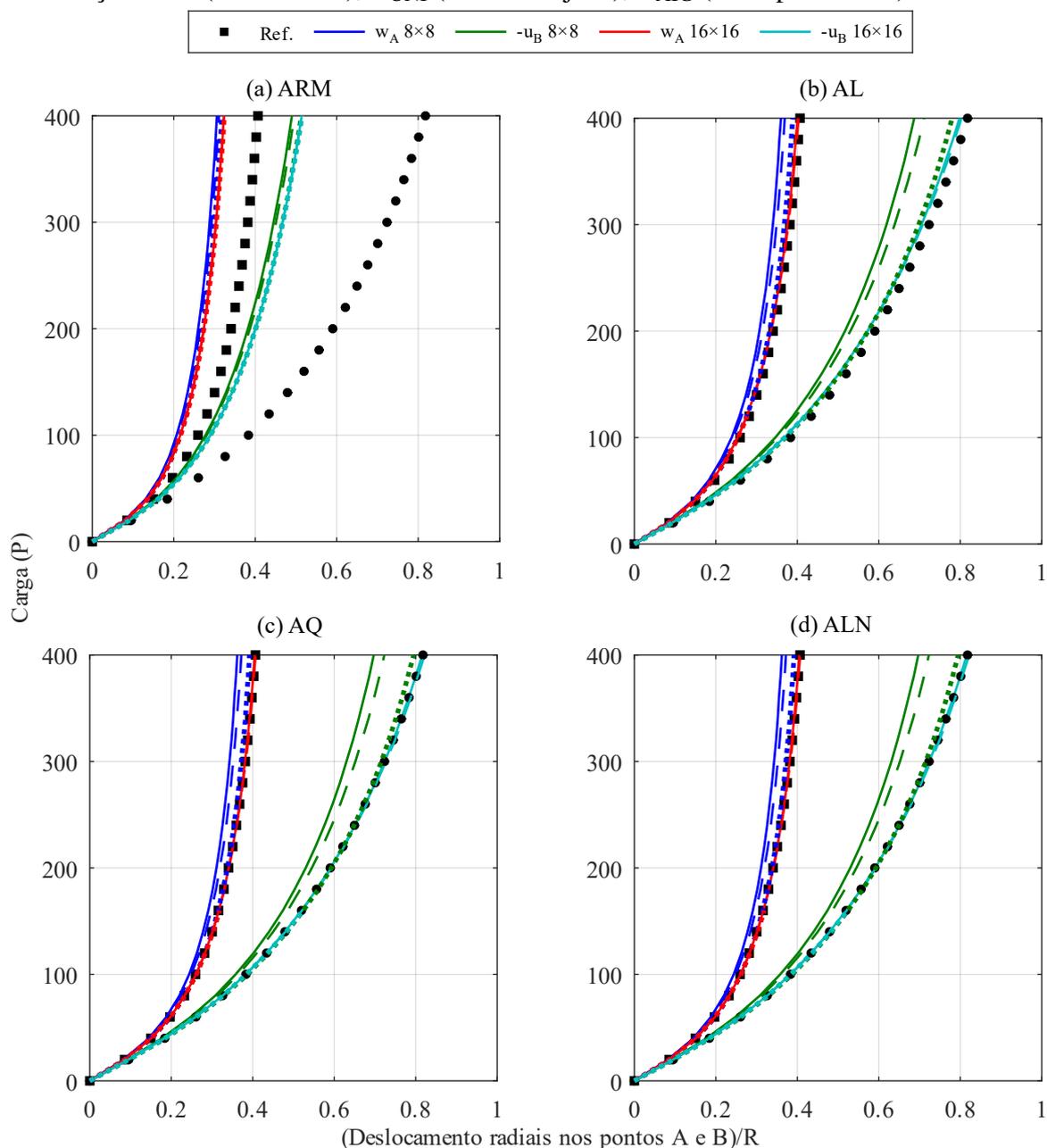
O Método de Controle de Carga com iterações de Newton-Rapshon foi utilizado para realizar as análises não lineares. A carga foi aplicada utilizando 20 incrementos uniformes e a tolerância adotada para a força residual foi de 10^{-4} . As curvas carga-deslocamento foram obtidas considerando os deslocamentos w no ponto A e $-u$ no ponto B , nos pontos de aplicação das cargas concentradas. Os resultados, obtidos utilizando as diferentes estratégias de atualização do vetor normal, são apresentados na Figura 50. Também são mostrados em todos os gráficos os resultados obtidos por Sze *et al.* (2004), utilizando uma malha de 16×16 elementos S4R de um modelo de casca geral do software ABAQUS.

O esquema de integração (R_{AIG}) apresenta melhor precisão, especialmente para discretizações grosseiras. Porém, os resultados para a malha mais refinada (16×16) não descrevem a curva completa, atingindo apenas 0,4 do fator de carga, exceto para o caso onde uma estratégia ARM para atualização dos vetores diretores é utilizada (Figura 50 (a)).

Com o refinamento do modelo, todos os esquemas de integração convergiram para a solução esperada, de maneira que os resultados para todos os esquemas de integração são praticamente idênticos aos resultados de Sze *et al.* (2004). Finalmente, os resultados mostram que as integrações reduzidas aliviam o problema do travamento, levando a uma convergência mais rápida. Além disso, como o custo computacional da integração reduzida uniforme é menor, esta é uma escolha promissora devido à sua eficiência. Podemos observar um comportamento de convergência monotônica em todos os casos, independentemente do esquema de integração

utilizado.

Figura 50 – Curvas carga-deslocamento da casca hemisférica, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada), R_{AIG} (linha pontilhada).

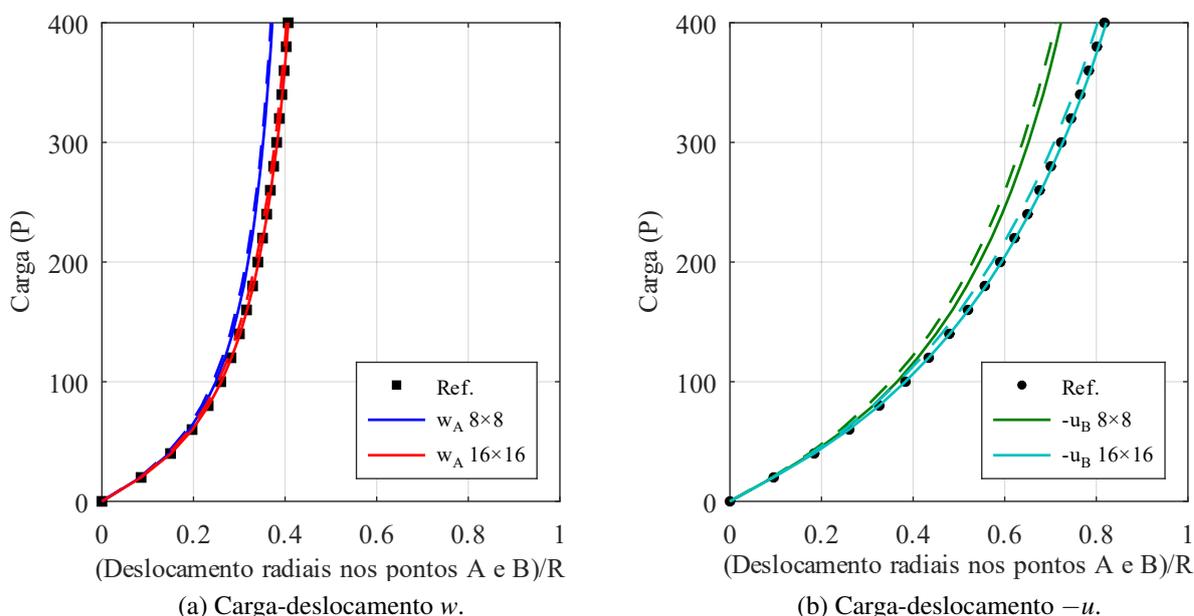


Fonte: Elaborada pelo autor.

Quanto à comparação das respostas para as diferentes estratégias para atualização das rotações, se repete o comportamento observado no Exemplo 5.2.1, com respostas muito similares e de excelente concordância com a literatura para as estratégias ALN e AQ, mas com a estratégia AL demonstrando comportamento mais rígido, independentemente do nível de discretização da malha. A Figura 51 apresenta as curvas de carga-deslocamento para as estratégias de atualização

que resultaram em uma melhor resposta (Figura 50) obtida por modelos utilizando o esquema de integração R_{UNI} .

Figura 51 – Curvas carga-deslocamento da casca hemisférica, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração reduzida uniforme (R_{UNI}).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todas as simulações foi considerado um número de incrementos de carga (NINC) igual à 20 para reproduzir resultados para os mesmos pontos tabelados por Sze *et al.* (2004). A Tabela 6 apresenta os números total e médio de iterações necessários para obtenção da curva de carga-deslocamento de cada estratégia de atualização do vetor normal. Novamente, as estratégias ALN e AQ apresentaram desempenho muito similares e resultam em números totais e médios de iterações muito menores em relação aos número total e médio obtidos para a opção AL.

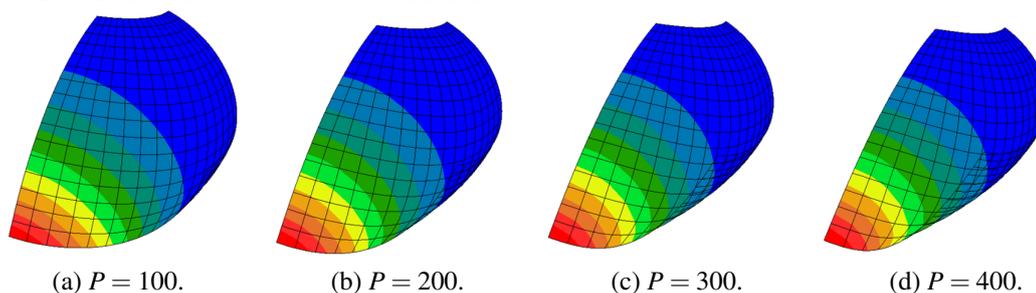
Tabela 6 – Número total de iterações (TITER) e média de iterações (MITER) para cada malha e estratégia de atualização do vetor normal, para a casca hemisférica. NINC = 20.

Atualização	Malha 8x8				Malha 16x16			
	ARM	AL	ALN	AQ	ARM	AL	ALN	AQ
TITER	104	194	113	113	104	200	120	120
MITER	5.20	9.70	5.65	5.65	5.20	10.00	6.00	6.00

Fonte: elaborada pelo autor.

As deformadas do modelo obtidas considerando níveis crescentes de carregamento são apresentadas na Figura 52, mostrando que a estrutura realmente apresenta grandes deslocamentos e rotações.

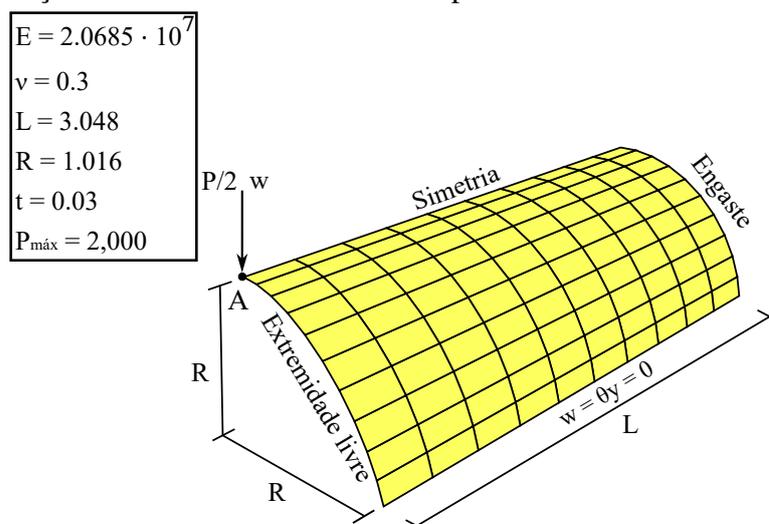
Figura 52 – Deformadas da casca hemisférica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.4 Casca semicilíndrica comprimida

Este exemplo trata da análise não linear de um meio cilindro engastado submetido a força de compressão no centro da extremidade livre. w e θ_y são restringidos nas laterais (SZE *et al.*, 2004). O modelo estrutural e as propriedades da casca são mostrados na Figura 53.

Figura 53 – Descrição da casca semicilíndrica comprimida e malha 10×10 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste teste, amplamente utilizado para examinar o comportamento do elemento sob deformações inextensionais, a deformação da casca cilíndrica é afetada tanto pelo travamento de cisalhamento quanto pelo travamento de membrana (HAN *et al.*, 2024). O trabalho recente de Han *et al.* (2024) é a única referência encontrada onde este problema foi estudado, utilizando formulação isogeométrica NURBS para análise não linear de cascas baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado.

Devido à simetria do problema, apenas metade da casca foi considerada nas análises. O modelo foi discretizado em 3 malhas uniformes distintas (5×5 , 10×10 e 20×20

elementos). Assim como o exemplo anterior, o Método de Controle de Carga com iterações de Newton-Rapshon foi utilizado para realizar as análises não lineares. Em todas as simulações foi considerado um número de incrementos de carga igual à 40, para reproduzir resultados para os mesmos pontos tabelados por Sze *et al.* (2004), e a tolerância adotada para a força residual foi de 10^{-4} .

As curvas carga-deslocamento foram obtidas considerando o deslocamento w no ponto A , onde a carga concentrada é aplicada. Os resultados obtidos utilizando as diferentes estratégias de atualização do vetor normal são apresentados na Figura 54. Também são mostrados em todos os gráficos os resultados obtidos por Sze *et al.* (2004), utilizando uma malha de 40×40 elementos S4R de um modelo de casca geral do software ABAQUS.

Aqui, vemos que esquema de integração (R_{AIG}) não foi capaz de descrever completamente as curvas, atingindo apenas cerca de 0,3 do fator de carga, exceto para o caso onde uma estratégia ARM para atualização dos vetores diretores é utilizada (Figura 50 (a)). Por outro lado, especialmente para discretizações grosseiras, ainda podemos perceber uma melhor precisão, mostrando-se suficiente para que sua resposta seja muito próxima a da referência até um valor de aproximadamente 15% a 30% do raio da estrutura. Foi possível observar que este valor decresce à medida que refinamos as malhas.

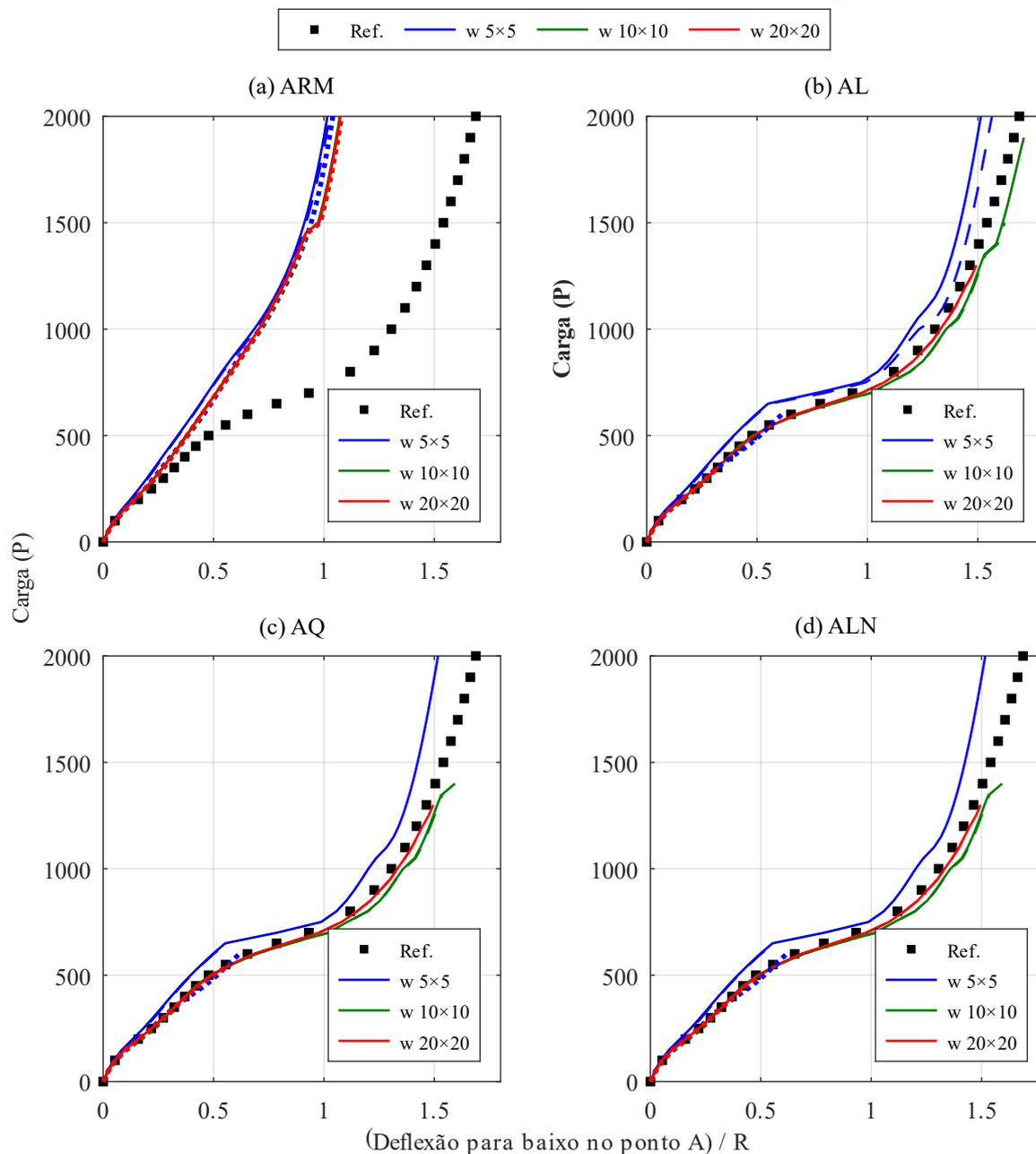
Note que, independentemente do esquema de atualização de vetores adotado, à medida que refinamos as malhas, maior é a proximidade entre os resultados e valores da referência, e menor é capacidade do modelo de descrever as curvas.

Em todos os casos, exceto para o esquema de aproximação ARM, podemos observar um comportamento de convergência oscilatório, que tende a convergir para a solução esperada com o refinamento do modelo. Os resultados de AQ e ALN são muito próximos, de modo que as repostas para os três esquemas de integração não apresentam nenhuma diferença visível. Apenas através das curvas de carga-deslocamento obtidas para atualização AL podemos ver que as integrações reduzidas aliviam o problema do travamento. Ainda assim, como a integração reduzida uniforme apresentou resultados muito próximos dos obtidos utilizando integração completa, o menor custo computacional do esquema faz com que sua utilização seja mais atrativa.

Novamente, a utilização das estratégias ALN e AQ nos dá resultados muito similares, como observado nos Exemplos 5.2.1 e 5.2.3. Muito próxima dessas duas estratégias, as repostas para estratégia AL, demonstraram comportamento levemente mais rígido apenas no nível de discretização mais baixo. A Figura 55 apresenta as curvas de carga-deslocamento para as

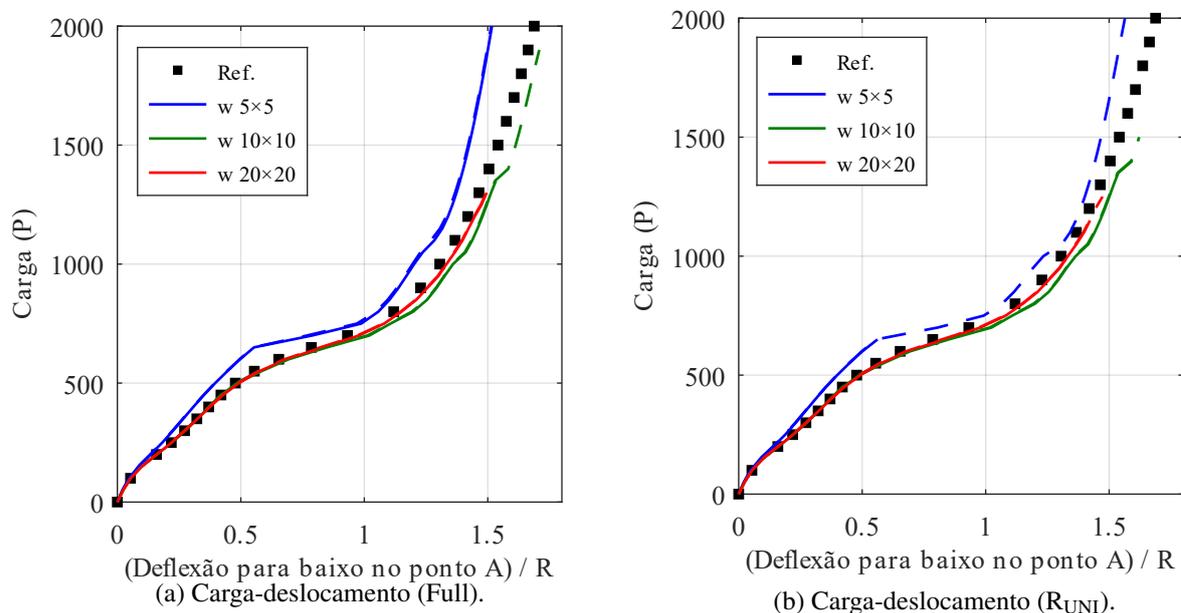
estratégias de atualização que resultaram em melhores respostas (Figura 54) obtidas por modelos utilizando os esquemas de integração completo (Full) e R_{UNI} .

Figura 54 – Curvas carga-deslocamento da casca semicilíndrica comprimida, para diferentes estratégias de atualização. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada), R_{AIG} (linha pontilhada).



Fonte: Elaborada pelo autor.

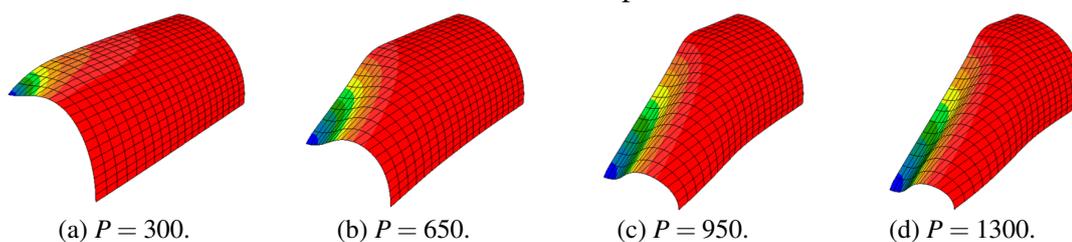
Figura 55 – Curvas carga-deslocamento da casca semicilíndrica comprimida, para estratégias de atualização AL (linha tracejada) e AQ (linha sólida) utilizando integração completa (Full) e reduzida uniforme (R_{UNI}).



Fonte: Elaborada pelo autor.

As deformadas do modelo obtidas considerando níveis crescentes de carregamento são apresentadas na Figura 56, mostrando que a estrutura realmente apresenta grandes deslocamentos e rotações.

Figura 56 – Deformadas da casca semicilíndrica comprimida.

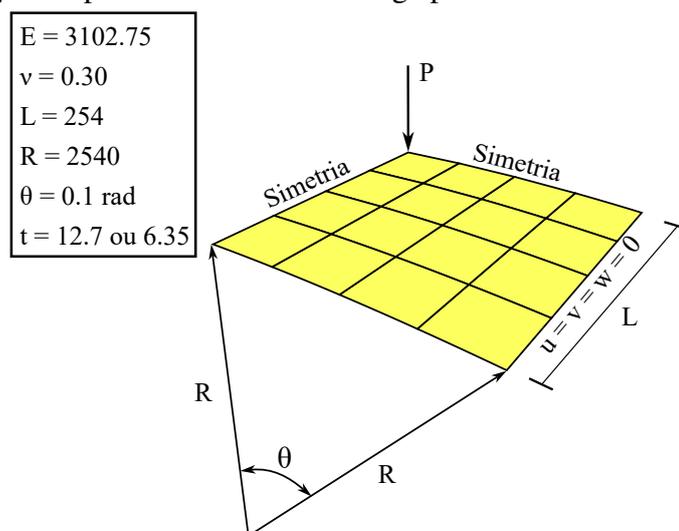


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.5 Painel cilíndrico sob carga pontual

Análise não linear de um painel cilíndrico abatido submetido a uma carga pontual no centro (SZE *et al.*, 2004). São consideradas duas espessuras distintas, sendo elas $t = 6.35$ e $t = 12.7$. O *benchmark* foi analisado por diversos autores, sendo inicialmente analisado por Sabir e Lock (1972).

Figura 57 – Descrição do painel cilíndrico sob carga pontual e malha 4×4 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando formulação isogeométrica NURBS para análise não linear de cascas baseadas nas hipóteses de Reissner-Mindlin e na abordagem do contínuo degenerado, este problema foi utilizado por Hao *et al.* (2023) como teste para validação, e também foi resolvido com sucesso por Ghadimi e Hassani (2023).

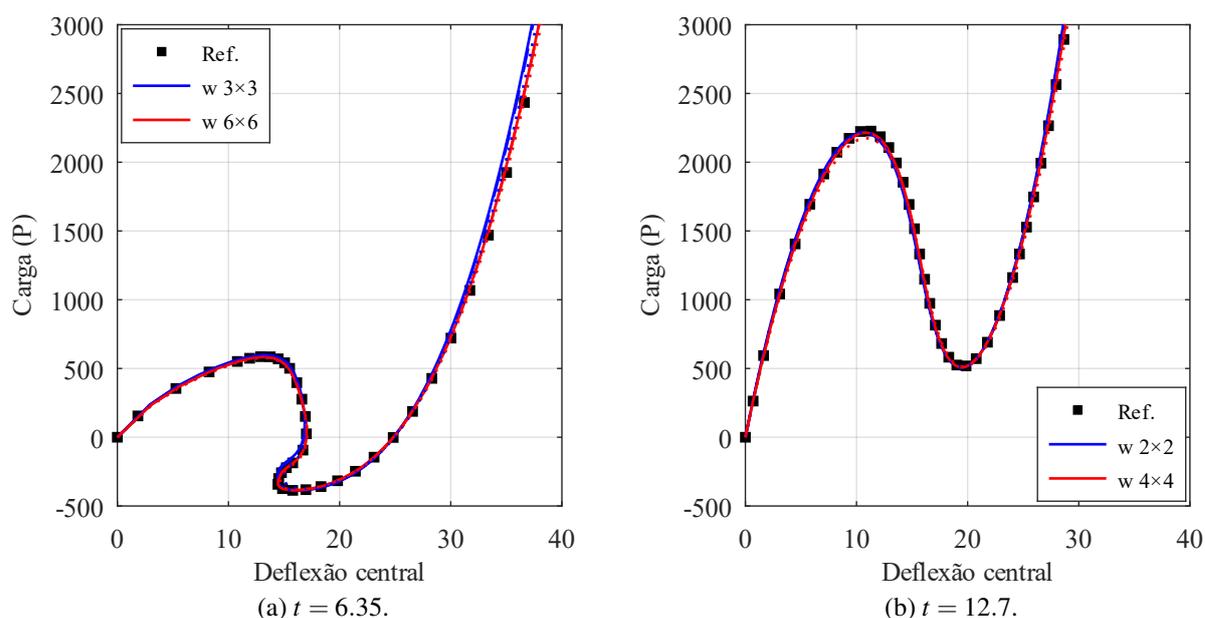
Devido à simetria do problema, apenas um quarto da casca foi considerado nas análises. O modelo foi discretizado em 2 malhas uniformes distintas para cada espessura, com 3×3 e 6×6 elementos para $t = 6.35$, e com 2×2 e 4×4 elementos para $t = 12.7$. O método utilizado para o traçado dos caminhos de equilíbrio foi o Método do Comprimento de Arco Cilíndrico devido à presença de *snap-back* e *snap-through*.

As curvas carga-deslocamento foram obtidas considerando a deslocamento w no ponto de aplicação da carga, no centro do painel. O comportamento observado nos exemplos anteriores se repete, com respostas muito similares e de excelente concordância com a literatura para as estratégias para atualização das rotações ALN e AQ. A Figura 58 apresenta as curvas de carga-deslocamento para a estratégia de atualização AQ e esquemas de integração Full, R_{UNI} e R_{AIG} . Também são mostrados em todos os gráficos os resultados obtidos por Sze *et al.* (2004), utilizando malhas de 24×24 e de 12×12 , para $t = 6.35$ e $t = 12.7$ respectivamente, de elementos S4R de um modelo de casca geral do software ABAQUS.

A Figura 58 (a) mostra a curva carga-deslocamento da casca com espessura de 12.7. Resultados precisos foram obtidos usando uma malha NURBS cúbica de 4×4 em comparação com os resultados de referência (SZE *et al.*, 2004). Esta casca apresenta um comportamento não linear simples, caracterizado pela presença de pontos limites e *snap-through*.

A Figura 58 (b) mostra os resultados para a casca de 6.35 de espessura. Esta estrutura apresenta um comportamento não linear mais complexo, com *snap-through* e *snap-back*. Previsões razoavelmente precisas foram obtidas usando uma malha NURBS cúbica de 3×3 . A curva para a malha mais refinada (6×6) é quase idêntica, mas mais próxima dos resultados de referência (SZE *et al.*, 2004) para deslocamentos maiores.

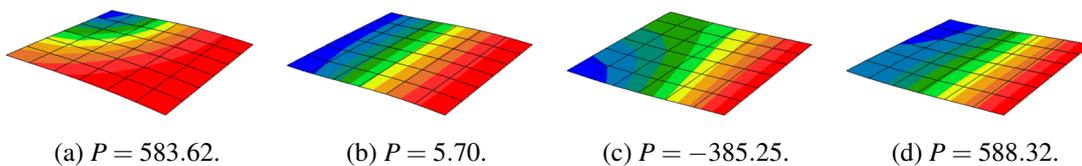
Figura 58 – Curvas carga-deslocamento do painel cilíndrico sob carga pontual, para estratégia de atualização AQ. Full (linha sólida), R_{UNI} (linha tracejada), R_{AIG} (linha pontilhada).



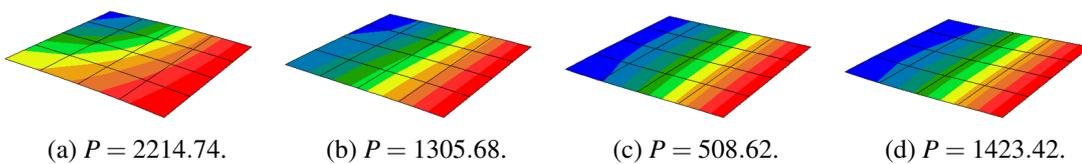
Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o refinamento do modelo, todos os esquemas de integração convergiram para a solução esperada, de maneira que os resultados com elementos cúbicos são quase idênticos aos resultados de Sze *et al.* (2004), independentemente do esquema de integração considerado. Os resultados obtidos mostram que a R_{AIG} pode eliminar o travamento ainda que em malhas mais grosseiras, de modo que podemos ver sua maior capacidade para tratamento do travamento em comparação aos demais esquemas nas malhas com menor nível de discretização. No entanto, os modelos integrados por esse esquema apresentaram resultados mais flexíveis, como podemos observar na Figura 58 (b).

As deformadas do modelo obtidas considerando níveis crescentes de carregamento são apresentadas nas Figuras 59 e 60.

Figura 59 – Deformadas do painel cilíndrico sob carga pontual, $t = 6.35$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 – Deformadas do painel cilíndrico sob carga pontual, $t = 12.7$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho trata do desenvolvimento e implementação de uma formulação isogeométrica para análise não linear geométrica de cascas de forma livre baseada em NURBS. A utilização da abordagem isogeométrica permite a representação exata da geometria das cascas e uma fácil aplicação dos refinamentos h , p e k . Foram adotadas as teorias de Reissner-Mindlin e o conceito de sólido degenerado, além de uma formulação Lagrangiana Total, de maneira a permitir a análise de estruturas com grandes deslocamentos e grandes rotações.

A geometria da casca é descrita usando uma superfície média e um campo de vetores diretores, ambos definidos usando funções de base NURBS e a informação dos vetores diretores nos pontos de controle. Como os pontos de controle das geometrias NURBS não estão sobre a superfície da casca (exceto os pontos na fronteira ou em regiões de continuidade C^0), os vetores diretores iniciais são obtidos utilizando uma técnica baseada em mínimos quadrados utilizando as componentes dos vetores diretores nos pontos de Greville como valores conhecidos nas equações (GHADIMI; HASSANI, 2023).

Acerca do tratamento das rotações, embora o mais recomendável seja a utilização de uma matriz ortogonal de rotações para o cálculo dos vetores diretores atualizados, esta opção é computacionalmente cara e torna obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente bastante complexa. Diante disto, quatro aproximações para o cálculo da atualização dos vetores foram apresentadas, sendo todas as alternativas suficientemente consistentes para as análises não lineares, considerando suas respectivas limitações.

Esta formulação apresenta travamento de membrana e cisalhamento quando aproximações de baixa ordem são utilizadas juntamente com a integração completa por quadratura de Gauss. O uso de funções de base de ordem superior alivia, mas não o elimina, o problema do travamento. Por isso, três diferentes esquemas de integração numérica foram utilizados para aliviar o problema do travamento encontrados nos exemplos numéricos. Além das já difundidas integrações de Gauss completa e reduzida uniforme, também foi considerada a regra de integração não uniforme proposta por Adam *et al.* (2015a) para formulações isogeométricas de placas e cascas baseadas em NURBS.

Com o objetivo de investigar como as hipóteses assumidas para o desenvolvimento da formulação e escolhas (esquemas de integração, método de cálculo de vetores diretores e de atualização das rotações) foram realizados alguns exemplos geometricamente lineares e não lineares clássicos e os resultados obtidos foram comparados com os disponíveis na literatura.

Nos problemas de análise linear, foram realizados estudos de convergência em três *benchmarks* clássicos do conhecido *Shell Obstacle Course* proposto por Belytschko *et al.* (1985) para avaliação da influência do esquema de integração numérica sobre o travamento e a precisão dos resultados. No primeiro exemplo, mesmo considerando malhas pouco refinadas, podemos observar que os resultados convergem rapidamente e a elevação de grau é muito efetiva. Isto é justificado pela ausência do efeito da descontinuidade na carga devido ao fato das cargas serem distribuídas. Nos outros dois exemplos, considerados pela literatura como severos devido a descontinuidade acentuada ocasionada pela aplicação de cargas concentradas, observou-se uma convergência mais rápida dos elementos cúbicos em relação aos quadráticos.

Quanto ao travamento, os resultados obtidos mostram que a integração reduzida isogeométrica, além de ser computacionalmente barata, pode eliminar o travamento ainda que em malhas mais grosseiras. Quando aplicada nos elementos com funções de base de ordem inferior podemos ver sua maior capacidade para aliviar, se não eliminar, o travamento, em comparação aos demais esquemas. Por outro lado, o esquema de integração reduzida uniforme é capaz a aliviar o travamento, melhorando a precisão dos resultados e ainda possuindo considerável eficiência em relação à integração completa.

É importante ressaltar que todos os esquemas de integração convergem para a solução com o refinamento do modelo, entretanto, o esquema de integração reduzida isogeométrica torna a estrutura mais flexível que o esquema de integração reduzida uniforme clássico, que apresenta um comportamento mais estável para todos os graus de bases utilizados.

Através de *benchmarks* de análise não linear considerados em vários trabalhos na literatura para avaliação do desempenho formulações para análise não linear geométrica de cascas, atestamos a capacidade da formulação para análise de problemas com grandes deslocamentos e rotações. Foi examinada a interação entre a regra de integração empregada e a estratégia de atualização dos vetores diretores na precisão dos cálculos. Todos os exemplos considerados aqui foram estudados por Sze *et al.* (2004), que realizou uma seleção dos testes não lineares de cascas mais populares.

As quatro estratégias de aproximação do tensor de rotações para atualização dos vetores diretores, para Rotações Moderadas (ARM), Linear (AL), Linear Normalizada (ALN) e Quadrática (AQ), foram utilizadas e comparadas. Cada uma delas se comprovou suficientemente consistente para as análise não lineares, considerando as respectivas limitações.

Como esperado, as curvas descritas utilizando a estratégia ARM não conseguem

descrever bem o comportamento não linear das estruturas, uma vez que os problemas envolvem grandes rotações e à medida que se acumulam os incrementos dos ângulos o erro das aproximações tende a crescer. Isto pode ser justificado ao lembrarmos que o método de atualização é válido apenas se considerarmos problemas com pequenos deslocamentos e rotações moderadas. Esse fato fica mais evidenciado no Exemplo 5.2.4 onde a estrutura sofre grandes deformações, chegando a sofrer deslocamentos 1.5 vezes maiores que a dimensão do seu raio.

Contudo, não podemos esquecer que a estratégia de atualização dos vetores ARM é de elevada simplicidade, visto que dispensa a utilização das matrizes de rigidez geométricas adicionais contendo os efeitos dos termos não lineares, pois a segunda derivada destes termos é nula, fazendo que seu custo computacional seja reduzido. Como comentado anteriormente, essa forma de atualização pode ser utilizada com sucesso no cálculo da carga crítica de cascas (SOUSA *et al.*, 2023) e na análise não linear de placas abatidas e cascas abatidas utilizando as teorias de von Karman e Marguerre, respectivamente (BARROS, 2016; PRACIANO, 2018; AUAD, 2019; SILVA, 2021).

Já as demais alternativas (AL, AQ e ALN), se provaram capazes de realizar a análise não linear de cascas com grandes rotações. Desde que as rotações incrementais sejam suficientemente pequenas entre dois incrementos de carga sucessivos a AL tem um ótimo desempenho. Na maior parte dos exemplos, independentemente do nível de discretização da malha, os resultados obtidos por essa estratégia não apresentaram a mesma concordância encontrada utilizando as outras duas (AQ e ALN), além disso, demonstraram um modelo de comportamento mais rígido.

No Exemplo 5.2.4, onde para descrição da curva se fazem necessárias malhas mais refinadas e foram utilizados menores incrementos de carga, está desvantagem não é mais observada pois o travamento é aliviado pela maior discretização dos modelos e a estratégia exibiu um desempenho melhor que as outras ao descrever a curva até maiores valores de deslocamento.

Em geral, as estratégias ALN e AQ obtiveram respostas muito similares e de excelente concordância com a literatura. Pode-se observar que além de melhor descrever o comportamento não linear da estrutura analisada, as estratégias resultam num número total e médio de iterações muito menor em relação aos número total e médio obtidos para a opção AL. É importante destacar que a restrição de pequenos incrementos de rotação é removida pelas estratégias AQ e ALN, além disso elas proporcionam convergência quadrática de iterações de equilíbrio. A maior diferença entre as duas é a maior facilidade, por parte da estratégia AQ, de

obtenção das expressões para atualização do vetores diretores e suas derivadas, o que torna sua implementação muito mais simples.

Quanto ao travamento, visto o melhor desempenho apresentado no exemplos lineares e maior popularidade entre as análise isogeométricas realizadas na literatura, nestes estudos consideraram-se apenas elementos NURBS cúbicos que, por sua vez, sofrem menos o problema do travamento, devido a maior ordem das funções de base. Com exceção do primeiro e do segundo exemplo, os três esquemas de integração são utilizados: integração completa (Full), reduzida uniforme (R_{UNI}) e reduzida isogeométrica (R_{AIG}). No primeiros testes, não podemos utilizar o esquema de pontos de integração associado a R_{AIG} , pois como a malha não é quadrada não podemos utilizar o esquema de pontos de integração associado.

Desde o primeiro exemplo, já podemos concluir que a R_{UNI} ajuda a aliviar ligeiramente o fenômeno do travamento, melhorando a precisão dos resultados e a eficiência computacional. Contudo, esquemas de integração completa tendem a convergir para as mesmas soluções com refinamento do modelo. Para o caso da casca semicilíndrica comprimida, estas observações não são tão relevantes pois a resolução do problema exige malhas mais refinadas, onde a diferença entre os esquemas de integração Full e R_{UNI} não é mais perceptível.

Os resultados obtidos mostraram que a R_{AIG} , além de ser computacionalmente barata, pode eliminar o travamento ainda que em malhas mais grosseiras. Nas malhas com menor nível de discretização, podemos ver sua maior capacidade para aliviar, se não eliminar, o travamento, em comparação aos demais esquemas. No entanto, os modelos integrados por esse esquema apresentaram problemas de convergência que cresciam à medida que as malhas se tornavam mais refinadas. Apesar deste fato, a R_{AIG} se mostrou muito eficiente para descrição das curvas carga-deslocamento para um pequenos valores de deslocamentos, em torno de 30% à 50% do raio das estruturas.

Por fim, ao que se refere a interação entre os esquemas de integração e as estratégias para tratamento das rotações, duas combinações se mostraram bastante eficientes e competitivas para cada uma das suas prováveis aplicações. O elemento com o esquema de Integração Reduzida Isogeométrica (R_{AIG}) e Atualização Linear (AL) pode ser muito útil para aplicações envolvendo análise linear, de estabilidade (envolvendo descrição do comportamento pós-crítico e o traçado do caminho de equilíbrio) e cálculo da carga crítica de cascas em geral, além da análise não linear de placas e cascas abatidas. O elemento com o esquema de Integração Reduzida Uniforme (R_{UNI}) e Atualização Quadrática (AQ) pode ser muito útil para a análise não linear de cascas

envolvendo grandes deslocamentos e grandes rotações.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

a) Comparar e observar a influencia das estratégias para definição dos vetores diretores iniciais nos resultados para análise não linear;

b) Realizar análise de estabilidade linear de cascas, validando as aproximações obtidas para carga crítica;

c) Avaliar a capacidade da formulação para descrição do comportamento pós-crítico e o traçado do caminho de equilíbrio à medida que deslocamentos variam;

d) Considerar cascas de outros materiais: compósitos laminados, materiais com gradração funcional etc.;

e) Desenvolver e implementar a formulação utilizando o tensor de rotação completo para obtenção dos vetores diretores atualizados.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. part ii: Plates and shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 284, p. 106–137, 2015.
- ADAM, C.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. A reduced integration for reissner-mindlin non-linear shell analysis using t-splines. In: SPRINGER. **Isogeometric Analysis and Applications 2014**. [S. l.], 2015. p. 103–125.
- ADAM, C.; HUGHES, T. J.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Selective and reduced numerical integrations for nurbs-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 284, p. 732–761, 2015.
- AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 2, n. 3, p. 419–451, 1970.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982.
- AUAD, S. P. Análise isogeométrica de cascas cilíndricas de material com gradação funcional. 2019.
- BARROS, P. S. B. Abordagem isogeométrica para o estudo da estabilidade de compósitos laminados considerando falha progressiva. 2016.
- BARROSO, E. S. Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica. 2015.
- BARROSO, E. S. **Geração de malhas de alta ordem para análise isogeométrica utilizando elementos de Bézier racionais**. Tese (Doutorado) – Programa de Pós- Graduação em Ciência da Computação, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2022.
- BATHE, K. **Finite Element Procedures**. K. J. Bathe, 2014. ISBN 9780979004957. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=EafLsgEACAAJ>.
- BATHE, K.-j.; BOLOURCHI, S. A geometric and material nonlinear plate and shell element. **Computers & structures**, Elsevier, v. 11, n. 1-2, p. 23–48, 1980.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R.; LIPTON, S.; SCOTT, M. A.; SEDERBERG, T. W. Isogeometric analysis using t-splines. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 199, n. 5-8, p. 229–263, 2010.
- BELYTSCHKO, T.; STOLARSKI, H.; LIU, W. K.; CARPENTER, N.; ONG, J. S. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 51, n. 1-3, p. 221–258, 1985.
- BENSON, D.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; HUGHES, T. Isogeometric shell analysis: the reissner–mindlin shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 5-8, p. 276–289, 2010.

- BORDEN, M. J.; SCOTT, M. A.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, 2011.
- BOUCLIER, R.; ELGUEDJ, T.; COMBESCURE, A. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 245, p. 144–162, 2012.
- BOUCLIER, R.; ELGUEDJ, T.; COMBESCURE, A. Efficient isogeometric nurbs-based solid-shell elements: Mixed formulation and b-method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 267, p. 86–110, 2013.
- COOK, R. D. *et al.* **Concepts and applications of finite element analysis**. [S. l.]: John Wiley & sons, 2002.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- CRISFIELD, M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials**. [S. l.]: Wiley, 1991. (Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures). ISBN 9780471929567.
- CRISFIELD, M. Advanced topics, vol. 2 of non-linear finite element analysis of solids and structures. **Brisbane: John Wiley and Sons Ltd**, 1997.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In: **Computational methods in nonlinear structural and solid mechanics**. [S. l.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.
- de Borst, R.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J.; VERHOOSSEL, C. V. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- DORNISCH, W. **Interpolation of rotations and coupling of patches in isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis**. [S. l.]: Schriftenreihe des Lehrstuhls für Baustatik und Baudynamik der RWTH Aachen, 2015.
- DORNISCH, W.; KLINKEL, S. *et al.* On the choice of the director for isogeometric reissner-mindlin shell analysis. In: **Proc. Tenth World Congress on Computational Mechanics, Sao Paulo, Brazil**. [S. l.: s. n.], 2012.
- DORNISCH, W.; KLINKEL, S.; SIMEON, B. Isogeometric reissner–mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 253, p. 491–504, 2013.
- DORNISCH, W.; MÜLLER, R.; KLINKEL, S. An efficient and robust rotational formulation for isogeometric reissner–mindlin shell elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 303, p. 1–34, 2016.
- DVORKIN, E. N. Nonlinear analysis of shells using the mitc formulation. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer, v. 2, n. 2, p. 1–50, 1995.
- ECHTER, R.; BISCHOFF, M. Numerical efficiency, locking and unlocking of nurbs finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 5-8, p. 374–382, 2010.

ECHTER, R.; OESTERLE, B.; BISCHOFF, M. A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 254, p. 170–180, 2013.

FARIN, G. **Curves and surfaces for computer-aided geometric design: a practical guide**. [S. l.]: Elsevier, 2014.

GHADIMI, Z.; HASSANI, B. Accurate calculation of nodal vectors in isogeometric analysis of shell structures using greville points. **Amirkabir Journal of Mechanical Engineering**, Amirkabir University of Technology, v. 53, n. 10, p. 5185–5202, 2021.

GHADIMI, Z.; HASSANI, B. An isogeometric degenerated shell formulation for geometrically nonlinear analysis of smart laminated shells. **Acta Mechanica**, Springer, v. 234, n. 3, p. 1065–1082, 2023.

HAN, Q.; WU, C.; LIU, M.; WU, H. A corotational isogeometric assumed natural strain shell element in updated lagrangian formulation for general geometric nonlinear analysis of thin-walled structures. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 194, p. 111311, 2024.

HAO, P.; LIAO, H.; WU, T.; HUO, Z.; WANG, B. Isogeometric degenerated shell formulation for post-buckling analysis of composite variable-stiffness shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 321, p. 117209, 2023.

HAO, P.; LIU, X.; WANG, Y.; LIU, D.; WANG, B.; LI, G. Collaborative design of fiber path and shape for complex composite shells based on isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 354, p. 181–212, 2019.

HAO, P.; YUAN, X.; LIU, H.; WANG, B.; LIU, C.; YANG, D.; ZHAN, S. Isogeometric buckling analysis of composite variable-stiffness panels. **Composite Structures**, Elsevier, v. 165, p. 192–208, 2017.

HU, P.; HU, Q.; XIA, Y. Order reduction method for locking free isogeometric analysis of timoshenko beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 308, p. 1–22, 2016.

HU, Q.; XIA, Y.; NATARAJAN, S.; ZILIAN, A.; HU, P.; BORDAS, S. P. Isogeometric analysis of thin reissner–mindlin shells: locking phenomena and b-bar method. **Computational Mechanics**, Springer, v. 65, n. 5, p. 1323–1341, 2020.

HUGHES, T. J.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 194, n. 39-41, p. 4135–4195, 2005.

KANG, P.; YOUN, S.-K. Isogeometric analysis of topologically complex shell structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 99, p. 68–81, 2015.

KANG, P.; YOUN, S.-K. Isogeometric shape optimization of trimmed shell structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 53, p. 825–845, 2016.

KANG, P.; YOUN, S.-K. Isogeometric topology optimization of shell structures using trimmed nurbs surfaces. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 120, p. 18–40, 2016.

KIENDL, J.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. The bending strip method for isogeometric analysis of kirchhoff–love shell structures comprised of multiple patches. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 37-40, p. 2403–2416, 2010.

KIENDL, J.; BLETZINGER, K.-U.; LINHARD, J.; WÜCHNER, R. Isogeometric shell analysis with kirchhoff–love elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 198, n. 49-52, p. 3902–3914, 2009.

KIM, M.-G.; LEE, G.-H.; LEE, H.; KOO, B. Isogeometric analysis for geometrically exact shell elements using bézier extraction of nurbs with assumed natural strain method. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 172, p. 108846, 2022.

MACNEAL, R. H.; HARDER, R. L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. **Finite elements in analysis and design**, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 3–20, 1985.

MI, Y.; YU, X. Isogeometric mitc shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 377, p. 113693, 2021.

MILIĆ, P.; MARINKOVIĆ, D.; KLINGE, S.; ČOJBAŠIĆ, Ž. Reissner-mindlin based isogeometric finite element formulation for piezoelectric active laminated shells. **Tehnički vjesnik**, Sveučilište u Slavonskom Brodu, Stojarski fakultet, v. 30, n. 2, p. 416–425, 2023.

PARENTE, E.; HOLANDA, A. S. D.; SILVA, S. M. B. A. D. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, Springer Nature BV, v. 38, n. 6, p. 567–567, 2006.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. [S. l.]: Springer-Verlag, 1997.

PRACIANO, J. S. C. Análise da estabilidade de estruturas laminadas e de materiais com gradação funcional utilizando uma formulação isogeométrica. 2018.

PRACIANO, J. S. C.; BARROS, P. S. B.; BARROSO, E. S.; JUNIOR, E. P.; HOLANDA, Á. S. de; JUNIOR, J. B. M. S. An isogeometric formulation for stability analysis of laminated plates and shallow shells. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 143, p. 106224, 2019.

RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: SPRINGER. **Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics: Proceedings of the Europe-US Workshop Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28–31, 1980**. [S. l.], 1981. p. 63–89.

RANK, E.; KRAUSE, R.; PREUSCH, K. On the accuracy of p-version elements for the reissner–mindlin plate problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 43, n. 1, p. 51–67, 1998.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

SABIR, A.; LOCK, A. The applications of finite elements to large deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells. Southampton University Press, 1972.

SCORDELIS, A.; LO, K. Computer analysis of cylindrical shells. In: **Journal Proceedings**. [S. l.: s. n.], 1964. v. 61, n. 5, p. 539–562.

SILVA, F. **Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não-lineares e estabilidade de cascas cilíndricas**. Tese (Doutorado) – Tese de Doutorado–PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, F. D. P. Análise isogeométrica de placas e cascas de material com gradação funcional utilizando elementos de bézier. 2021.

SOUSA JR, J. B. M. **Auto-Adaptação e Otimização de Forma em Cascas**. Tese (Doutorado) – Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2000.

SOUSA, M. P. M.; SOUZA, J. W. F. de; BARROSO, E. S.; JR, E. P.; JUNIOR, J. B. M. de S. Stability analysis of shells using a nurbs-based isogeometric approach. In: **XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. [S. l.: s. n.], 2023. v. 5, n. 05.

SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 19, n. 4, p. 581–615, 1983.

SZE, K.; LIU, X.; LO, S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite elements in analysis and design**, Elsevier, v. 40, n. 11, p. 1551–1569, 2004.

TRAN, L. V.; PHUNG-VAN, P.; LEE, J.; WAHAB, M. A.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis for nonlinear thermomechanical stability of functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier, v. 140, p. 655–667, 2016.

UHM, T.-K.; YOUN, S.-K. T-spline finite element method for the analysis of shell structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 80, n. 4, p. 507–536, 2009.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C. A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 30, n. 1, p. 155–176, 1990.

ZOU, Z.; SCOTT, M. A.; MIAO, D.; BISCHOFF, M.; OESTERLE, B.; DORNISCH, W. An isogeometric reissner–mindlin shell element based on bézier dual basis functions: Overcoming locking and improved coarse mesh accuracy. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 370, p. 113283, 2020.