



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO EM FÍSICA

DAMIÃO FERREIRA DA SILVA COSTA

COMPORTAMENTOS REOLÓGICOS DE MATERIAIS MACIOS UTILIZANDO
MODELAGEM NO CONTÍNUO

FORTALEZA

2024

DAMIÃO FERREIRA DA SILVA COSTA

COMPORTAMENTOS REOLÓGICOS DE MATERIAIS MACIOS UTILIZANDO
MODELAGEM NO CONTÍNUO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C871c Costa, Damião Ferreira da Silva.

Comportamentos reológicos de materiais macios usando modelagem no contínuo / Damião Ferreira da Silva Costa. – 2024.

102 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

1. Método dos elementos finitos. 2. Mecânica dos sólidos. 3. Reologia. 4. Módulo de Young. 5. Efeitos de borda. I. Título.

CDD 530

DAMIÃO FERREIRA DA SILVA COSTA

COMPORTAMENTOS REOLÓGICOS DE MATERIAIS MACIOS UTILIZANDO
MODELAGEM NO CONTÍNUO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 11/10/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wandemberg Paiva Ferreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Francisco Ronan Viana Araújo
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Aos meus pais, Antônia e Paulo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Federal do Ceará e ao Departamento de Física pela estrutura, pelo acolhimento e pelo suporte necessário para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao meu orientador, o Professor Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira, por toda disponibilidade, paciência, conselhos, compreensão e pela excelente orientação ofertada a mim. Muito OBRIGADO!

Aos professores Dr. Jeanlex Soares, Dr. Ascânio Dias e Dr. Jorge Luiz pelas valiosas contribuições a este trabalho durante a etapa da qualificação.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade e também pela valiosa discussão e contribuição para a melhoria deste trabalho.

Ao Laboratório de Física Biológica, em especial à Dra. Rose Freire, por toda acolhida durante esses anos. Agradeço também aos meus colegas de grupo, em especial à Antônio Edinaldo, João Henrique, Isis do Vale e Thais Feitosa, por todo incentivo dado a mim.

Aos colaboradores e servidores do Departamento de Física, em especial a Rejane Coelho que sempre me acolheu tão bem e sempre disposta a ajudar os alunos da Pós-graduação.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Física, em especial ao Professor Dr. Carlos William, por todos os ensinamentos repassados e necessários para a minha formação.

Aos meus amigos Luciano Aguiar, Marciano Rufino e Raphaela Lima pela amizade e parceria que iniciou durante o mestrado. Vocês fazem parte da minha história, obrigado pelo acolhimento durante esses anos. Agradeço também meus amigos do Piauí, Antônio Carlos, José Augusto, Vladimir Félix, Dona Rosa e Sr. Fábio, Tatiane, Dona Francisca por todo apoio e torcida pelo meu sucesso.

Aos amigos que fiz no trabalho, em especial ao Professor Roberto Tabosa, pela acolhida e pelo incentivo.

À toda minha família, especialmente à minha mãe, Antônia, à minha irmã, Anastácia e à minha sobrinha, Ana Fabrícia, pelo apoio incondicional durante essa jornada. Não caminhei sozinho, batalhei em cada etapa com vocês ao meu lado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa ofertada durante o início do doutorado. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre o comportamento reológico de materiais macios utilizando a abordagem do contínuo e técnicas de simulação numérica através do Método dos Elementos Finitos (MEF). A pesquisa foi dividida em duas partes principais: a primeira focou em testes de nanoindentação para avaliar o efeito de tamanho finito e a influência da rigidez do substrato na medição das propriedades elásticas de amostras viscoelásticas e elásticas. Três geometrias de indentadores (cônico, esférico e cilíndrico) foram consideradas, com resultados indicando que o indentador cônico fornece medidas mais robustas, especialmente quando se analisam variações na altura das amostras e na rigidez do substrato. A segunda parte do estudo explorou a influência de superfícies fractais, especificamente a curva de Koch, na determinação do módulo de Young de materiais elásticos. Foram simuladas amostras com superfícies fractais sob duas configurações diferentes, denominadas *Up* e *Down*. Os resultados mostraram que a presença de superfícies fractais pode aumentar ou diminuir o módulo de Young obtido, especialmente em amostras mais finas que possuem superfícies fractais na orientação *Up*. Além disso, foi observado que, embora a rigidez e o módulo de Young diminuam com o aumento do comprimento da base L da amostra, a influência da fractalidade permanece constante. O MEF é uma ferramenta eficaz para a modelagem numérica de materiais macios, permitindo uma análise detalhada dos efeitos de tamanho finito e da complexidade da superfície nas propriedades mecânicas de tais materiais. Este estudo oferece informações importantes para a montagem de experimentos e a interpretação de resultados em contextos onde superfícies complexas e rugosas estão presentes. Para trabalhos futuros, sugere-se a expansão das simulações para geometrias tridimensionais e a investigação do efeito da força de arrasto em sólidos deformáveis imersos em fluidos.

Palavras-chave: método dos elementos finitos; mecânica dos sólidos; reologia; módulo de Young; efeitos de borda.

ABSTRACT

This work presents an investigation into the rheological behavior of soft materials using the continuum approach and numerical simulation techniques through the Finite Element Method (FEM). The research was divided into two main parts: the first focused on nanoindentation tests to evaluate the finite size effect and the influence of substrate stiffness on the measurement of the elastic properties of viscoelastic and elastic samples. Three indenter geometries (conical, spherical, and cylindrical) were considered, indicating that the conical indenter provides more robust measurements, especially when analyzing variations in sample height and substrate stiffness. The second part of the study explored the influence of fractal surfaces, specifically the Koch curve, on determining the Young's modulus of elastic materials. Samples with fractal surfaces were simulated under two different configurations, referred to as *Up* and *Down*. The results showed that the presence of fractal surfaces can increase or decrease the obtained Young's modulus, especially in thinner samples that have fractal surfaces in the *Up* orientation. Additionally, it was observed that although stiffness and Young's modulus decrease with the increase in the sample's base length L , the influence of fractality remains constant. FEM is an effective tool for the numerical modeling of soft materials, allowing for detailed analysis of finite-size effects and surface complexity on the mechanical properties of such materials. This study provides important insights for experiment design and result interpretation in contexts where complex and rough surfaces are present. For future work, it is suggested that the simulations be expanded to three-dimensional geometries and phenomena such as drag force in deformable solids immersed in fluids be investigated.

Keywords: finite element method; solid mechanics; rheology; Young's modulus; edge effects.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Esquema ilustrativo do processo de deformação de um corpo arbitrário. . . .	18
Figura 2	– Figura ilustrativa de um corpo sendo deformado pela força externa \vec{F} . Os vetores \vec{t} e \vec{b} representam, respectivamente, as forças superficiais e volumétricas. . . .	20
Figura 3	– Figura ilustrativa de um cubo sob influência de tensões normais e de cisalhamento.	21
Figura 4	– Modelo de Maxwell.	30
Figura 5	– Modelo de Kelvin-Voigt.	32
Figura 6	– Modelo do sólido linear padrão na representação de Maxwell.	33
Figura 7	– Exemplo de domínios discretizados. Na parte superior temos uma geometria bidimensional representada por um círculo e na parte inferior temos um domínio tridimensional representado por uma esfera. Cada um destes possui uma representação com elementos finitos maiores e menores.	37
Figura 8	– Esquema ilustrativo do arranjo experimental do Microscópio de Força Atômica (AFM).	41
Figura 9	– Ilustração 2D da geometria com 3 amostras em contato com os indentadores esférico, cônico e <i>flat</i>	50
Figura 10	– Campo de tensão da amostra viscoelástica para os indentadores a) esférico, b) cônico e c) <i>flat</i> em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 5 \mu\text{m}$	51
Figura 11	– Campo de tensão da amostra viscoelástica para os indentadores a) esférico, b) cônico e c) <i>flat</i> em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 10 \mu\text{m}$	52
Figura 12	– Campo de tensão da amostra viscoelástica para o indentador esférico em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 100 \mu\text{m}$	53
Figura 13	– Campo de tensão da amostra viscoelástica para o indentador cônico em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 100 \mu\text{m}$	54
Figura 14	– Campo de tensão da amostra viscoelástica para o indentador <i>flat</i> em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 100 \mu\text{m}$	55

Figura 15 – Curvas de relaxação para os indentadores a) esférico, b) cônico e c) <i>flat</i> . As curvas de forças foram normalizadas considerando $f(t)/\Omega_\lambda \delta_0^\lambda$	56
Figura 16 – Módulo de Young relaxado E em função da altura H da amostra viscoelástica.	57
Figura 17 – Em a) temos o gráfico que descreve o deslocamento do indentador e em b) as curvas de histereses para amostra com altura $H = 10 \mu\text{m}$	57
Figura 18 – Campos de a) tensão e b) deslocamento para diferentes substratos, em que foi utilizado o indentador esférico para realizar a indentação δ_{max} na amostra viscoelástica.	58
Figura 19 – Campos de a) tensão e b) deslocamento para diferentes substratos, em que foi utilizado o indentador cônico para realizar a indentação δ_{max} na amostra viscoelástica.	59
Figura 20 – Campos de a) tensão e b) deslocamento para diferentes substratos, em que foi utilizado o indentador <i>flat</i> para realizar a indentação δ_{max} na amostra viscoelástica.	59
Figura 21 – Módulo de Young relaxado E em função da rigidez do substrato E_s	60
Figura 22 – Imagens obtidas via satélite das a) Ilhas Britânicas e b) da costa da Noruega.	61
Figura 23 – Ilustração 2D da geometria do modelo MEF em que temos a geração fractal de Koch na amostra sobre as perspectivas a) <i>Down</i> e b) <i>Up</i> . A orientação <i>Down</i> ocasiona um ganho de área enquanto que a orientação <i>Up</i> leva a perda de área da amostra. O fractal de Koch será gerado no contorno inferior (destacado em vermelho) até a quarta geração $n = 4$, o qual mostramos o <i>mesh</i> numérico.	63
Figura 24 – Curvas de força para amostra sem fractal para diferentes alturas H	65
Figura 25 – Curvas de força para amostras que possuem o fractal a) <i>Down</i> e b) fractal <i>Up</i> quando altura $H = 0,5 \text{ cm}$	65
Figura 26 – Campos de tensão para os fractais <i>Down</i> e <i>Up</i> , para $H = 0,5 \text{ cm}$ até a quarta geração do fractal de Koch.	66
Figura 27 – Razão entre σ_c e σ_f em função da geração fractal n	66
Figura 28 – Rigidez k em função da geração fractal n para os casos a) <i>Down</i> e b) <i>Up</i>	67
Figura 29 – Módulo de Young medido em função da geração fractal n para os casos a) <i>Down</i> e b) <i>Up</i>	68

Figura 30 – Normalização do módulo de Young medido em função da geração fractal n para os casos $Down$ e Up	68
Figura 31 – Normalização do módulo de Young medido em função da altura H da amostra.	69
Figura 32 – Comparativo entre a normalização do módulo de Young para amostras lisas e amostras com superfícies fractais para a) $A_0 = 0,5 \text{ cm}^2$, b) $A_0 = 0,75 \text{ cm}^2$ e c) $A_0 = 1 \text{ cm}^2$	70
Figura 33 – Campos de tensão para a) amostra lisa e amostras com fractais b) $Down$ e c) Up quando $L = 5 \text{ cm}$ e $H = 0,5 \text{ cm}$	71
Figura 34 – A figura ilustra os gráficos da a) Rigidez k , b) módulo elástico medido e c) a sua normalização em função do tamanho lateral L da amostra modelada.	72
Figura 35 – Esquema ilustrativo da geração do fractal de Koch.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros Ω_λ e λ de acordo com a geometria do indentador (SOUSA <i>et al.</i> , 2020).	43
Tabela 2 – Parâmetros geométricos e materiais utilizados no modelo	51
Tabela 3 – Parâmetros geométricos e materiais da amostra.	63
Tabela 4 – Comparativo entre as áreas quando $H = 0,5$ cm.	86
Tabela 5 – Comparativo entre as áreas quando $H = 0,75$ cm.	86
Tabela 6 – Comparativo entre as áreas quando $H = 1$ cm.	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Organização da Tese	15
2	TEORIA DA TENSÃO E DEFORMAÇÃO DOS SÓLIDOS	17
2.1	Descrição matemática para a deformação	17
2.2	Descrição matemática da tensão	20
2.3	Equação de movimento na descrição Euleriana e Lagrangeana	23
2.4	Equação de Navier para meios elásticos isotrópicos	24
2.5	Relações constitutivas e viscoelasticidade	27
2.5.1	<i>Fluência e relaxação</i>	28
2.5.2	<i>Descrição matemática da viscoelasticidade</i>	29
2.5.2.1	<i>Modelo de Maxwell</i>	30
2.5.2.2	<i>Modelo de Kelvin-Voigt</i>	32
2.5.2.3	<i>Modelo do sólido linear padrão</i>	33
3	METODOLOGIA NUMÉRICA	35
3.1	Método dos elementos finitos	35
3.1.1	<i>Aplicação do MEF a problemas de mecânica dos sólidos</i>	36
4	INDENTAÇÃO EM AMOSTRAS FINITAS	40
4.1	Determinação analítica das curvas de relaxação	40
4.1.1	<i>O modelo de Hertz</i>	41
4.1.2	<i>Fase de carregamento</i>	43
4.1.2.1	<i>Indentador flat</i>	45
4.1.2.2	<i>Indentador cônico</i>	45
4.1.2.3	<i>Indentador esférico</i>	46
4.1.3	<i>Fase de dwell</i>	47
4.1.3.1	<i>Indentador flat</i>	48
4.1.3.2	<i>Indentador cônico</i>	48
4.1.3.3	<i>Indentador esférico</i>	49
4.2	Descrição do modelo numérico	50
4.3	Variando a altura da amostra	56
4.4	Variando a rigidez do substrato	58

5	INFLUÊNCIA DE SUPERFÍCIES FRACTAIS NAS PROPRIEDADES MECÂNICAS	61
5.1	Modelo computacional	63
5.2	Obtenção das curvas de forças	64
5.3	Variando a altura H	67
5.3.1	<i>Amostra lisa versus amostra com fractal</i>	70
5.4	Variando o tamanho da base L	71
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	73
	REFERÊNCIAS	75
	APÊNDICE A – Obtenção da equação de movimento na abordagem lagrangeana	80
	APÊNDICE B – A curva de Koch	83
	APÊNDICE C – Artigos elaborados	87

1 INTRODUÇÃO

O estudo de materiais sempre foi um foco central da Física, seja por meio da análise de estruturas sólidas cristalinas utilizando técnicas de caracterização, como a técnica de difração de raios-X (LIFSHIN, 1999), seja pela formulação de leis constitutivas (PANDOLFI; MANGANIELLO, 2006), como as relações entre tensão e deformação que descrevem o comportamento mecânico dos materiais. Dois exemplos clássicos a serem mencionados são a lei de Hooke, que descreve materiais linearmente elásticos, e a lei de Newton aplicada a fluidos viscosos.

Dentro do amplo campo de estudo dos materiais, destaca-se uma subárea conhecida como Física da Matéria Mole, que foca em materiais que possuem escala de energia para a deformação da ordem à energia térmica $k_B T$, em que k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura. Estes são conhecidos como materiais macios, ou moles (*soft matter* em inglês) (KONING; VITELLI, 2016), sendo classificados como polímeros, surfactantes, coloides, entre outros. Esses materiais são facilmente encontrados no cotidiano, em produtos como leite, detergentes, tintas e amostras biológicas. Além disso, esses materiais eles podem apresentar respostas variadas quando submetidos a variações de temperatura ou tensão mecânica, por exemplo (DOI, 2013).

Um exemplo relevante de estudos no contexto da *soft matter* é a investigação da microrreologia celular, que pode ser conduzida tanto por abordagens experimentais quanto numéricas. A abordagem experimental faz uso de diversas técnicas, como a microscopia de força atômica (AFM) (MOFRAD; KAMM, 2006; GAVARA, 2017), aspiração por micropipeta (GUILAK *et al.*, 2000), pinças óticas (UNAL *et al.*, 2014), entre outras, com o objetivo de obter as propriedades mecânicas das células. A abordagem numérica, por sua vez, permite a construção de modelos computacionais, com geometrias simples ou complexas e condições de contorno variadas, para simular experimentos e determinar o comportamento mecânico dos materiais modelados, além de possibilitar a visualização de grandezas físicas de interesse no interior do material e testes de modelos teóricos analíticos propostos. A partir da análise de curvas de força e do uso de modelos analíticos específicos, pode-se extrair o módulo de Young da célula, tanto na abordagem experimental quanto na numérica.

Essas pesquisas em microrreologia celular ajudam a compreender, sob a perspectiva da Física, fenômenos celulares importantes como a diferenciação, motilidade e mecanotransdução celular (HUANG *et al.*, 2004). Estudos também exploram a relação entre mudanças nas propriedades mecânicas das células e estados patológicos, como o câncer (REBELO *et al.*, 2013;

LEKKA, 2016) e a anemia falciforme (FISSEHA; KATIYAR, 2012). Além disso, a rigidez do substrato onde a célula está depositada pode influenciar nas medições de elasticidade de uma célula viva, apresentando comportamentos peculiares, especialmente em células cancerígenas dispostas em substratos moles (DISCHER *et al.*, 2005; PÉREZ-DOMÍNGUEZ *et al.*, 2020).

Experimentos de indentação são cruciais na Ciência dos Materiais, usados principalmente para determinar propriedades mecânicas como a rigidez e o módulo de elasticidade dos materiais analisados. Esses experimentos envolvem a indentação de uma ponta rígida na superfície do material e a medição da profundidade de penetração e da força aplicada. Modelos tradicionais, como a equação de Hertz para contato mecânico, presumem distribuições uniformes de tensões em superfícies perfeitamente lisas. No entanto, materiais reais, como metais com rugosidade superficial em microescala ou polímeros com rugosidade em nanoescala, frequentemente exibem comportamentos mecânicos atípicos devido à rugosidade superficial (CHUAH *et al.*, 2019), o que pode alterar significativamente os resultados experimentais (XIAO *et al.*, 2020; TIWARI; PERSSON, 2021).

Portanto, a rugosidade da superfície impacta diretamente a distribuição de tensão, fazendo com que o campo de tensões não seja uniforme e varie conforme as características topográficas do material em diferentes escalas (YANG; DAI, 2018; MOHAMMADI; SHARMA, 2012; MCMILLAN *et al.*, 2018). Essas complexidades requerem técnicas avançadas de modelagem e caracterização mecânica em múltiplas escalas para avaliar as propriedades dos materiais com precisão. As irregularidades superficiais também podem comprometer o limite de escoamento do material, provocar deformação plástica prematura e interferir nas medições de recuperação elástica, potencialmente levando a avaliações errôneas da capacidade de um material retornar à sua forma original após a indentação (TIWARI *et al.*, 2020).

Nesta tese, propomos a criação de modelos numéricos para estudar as propriedades reológicas de materiais macios, considerando amostras de pequena escala e com módulos de Young dentro da faixa de elasticidade de géis e células. Inicialmente, investigamos a influência da geometria do indentador nas medições de amostras viscoelásticas finitas por meio de testes de nanoindentação. Em um segundo estudo, abordamos a influência de superfícies rugosas na medida da elasticidade de amostras macias. Ambos os problemas aplicam os princípios básicos da Mecânica dos Sólidos e são resolvidos utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), implementado através do *software* comercial COMSOL *Multiphysics*[®].

Reologia é o campo de estudo que investiga a deformação e o escoamento da matéria,

com diversas aplicações na Indústria, Engenharia e Ciências. Está presente em pesquisas sobre petróleo (SPIECKER; KILPATRICK, 2004), materiais cerâmicos (BALAN; RIEDEL, 2006; ZHANG *et al.*, 2024), tintas (HOATH *et al.*, 2009; MAZO-BARBARA; GINEBRA, 2021), polímeros (PATEL *et al.*, 2011), escoamento de fluidos (SHIBESHI; COLLINS, 2005), e movimento de partículas em meios viscoelásticos (RAIKHER *et al.*, 2013), utilizando abordagens experimentais e numéricas (JABBARZADEH; TANNER, 2006; ROUX, 1990). No entanto, como mencionado anteriormente, nesta tese focaremos na abordagem numérica, assumindo o corpo como um meio contínuo que obedece às premissas básicas da Mecânica dos Meios Contínuos.

A Mecânica dos Meios Contínuos é o campo da Física responsável por fornecer uma base teórica e conceitual para o estudo de materiais em estado sólido ou fluido. Embora a matéria seja composta por átomos e moléculas que interagem entre si por forças interatômicas, assumimos que um material é um meio contínuo, o que significa ignorar os possíveis espaços vazios no corpo e desprezar a natureza atomística da matéria, desde que uma porção do corpo contenha um número extremamente grande de partículas.

Assim, a interação entre diferentes partes do corpo é simplificada utilizando a definição de forças que atuam tanto na superfície quanto no interior do corpo. Combinando as ferramentas do cálculo integral e diferencial com os princípios básicos da Mecânica dos Meios Contínuos, podemos formular as equações de movimento que governam o domínio contínuo e resolvê-las usando ferramentas analíticas, quando possível, ou métodos numéricos, quando as condições de contorno são mais complexas.

1.1 Organização da Tese

Esta tese está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentaremos o arcabouço teórico que fundamenta este trabalho, abordando conceitos fundamentais de Mecânica dos Sólidos. Conceitos-chave como deformação, tensão, condições de equilíbrio no corpo contínuo e modelos reológicos são essenciais para o desenvolvimento deste trabalho e serão discutidos. No Capítulo 3, trataremos da metodologia numérica, abordando o Método dos Elementos Finitos aplicado a problemas de Mecânica dos Sólidos. No Capítulo 4, apresentamos o primeiro estudo realizado nesta tese, que consiste na verificação da influência da geometria do indentador em medições de viscoelasticidade em amostras de tamanho finito. Inicialmente, discutiremos brevemente o modelo de Hertz, determinando as equações teóricas que descrevem curvas de relaxação

de materiais viscoelásticos de acordo com a geometria do indentador. Em seguida, apresentaremos o modelo numérico, com os parâmetros materiais e geométricos utilizados, e finalmente, discutiremos os resultados numéricos obtidos. No Capítulo 5, apresenta-se o segundo estudo realizado nesta tese, que investiga a influência de superfícies fractais sobre as medidas de elasticidade em materiais macios. Para isso, consideramos uma superfície fractal, especificamente a curva de Koch, gerada na superfície inferior da amostra. Inicialmente, apresentamos o modelo numérico, bem como os parâmetros geométricos e materiais utilizados na simulação. Assim como no primeiro estudo, determinamos as curvas de força e as analisamos utilizando o modelo padrão de Hertz. Concluimos o capítulo apresentando os resultados numéricos, acompanhados das devidas considerações e discussões. Finalmente, no Capítulo 6, apresenta-se as conclusões e perspectivas desta tese.

2 TEORIA DA TENSÃO E DEFORMAÇÃO DOS SÓLIDOS

A Mecânica dos Sólidos pode ser definida como um conjunto de leis físicas utilizadas para prever o comportamento de um sólido sob a influência de estresse mecânico ou térmico (BOWER, 2010). Trata-se de um dos ramos da Mecânica dos Meios Contínuos, ao lado da Mecânica dos Fluidos. Na Geofísica, uma das aplicações da Mecânica dos Sólidos está no estudo de terremotos, tanto na predição quanto na propagação de ondas sísmicas (BABESHKO *et al.*, 2018; HUSSEIN *et al.*, 2021). Na Engenharia, suas aplicações variam desde o projeto de barragens e fundações até o desenvolvimento de peças mecânicas, entre outras.

Na Biomecânica, o uso da Mecânica dos Sólidos é fundamental na confecção de próteses biocompatíveis, capazes de induzir a recuperação de tecidos lesionados mediante a aplicação de estresse mecânico (PIOLETTI, 2010; ENTEZARI *et al.*, 2020). Por exemplo, células do tecido ósseo são capazes de reconhecer estímulos mecânicos provenientes do ambiente externo e convertê-los em sinais bioquímicos, facilitando a regeneração óssea (GUSMÃO; BELANGERO, 2009). Dado o seu amplo espectro de aplicação, a Mecânica dos Sólidos não se limita aos exemplos aqui mencionados; há inúmeros estudos que utilizam conceitos-chave, modelos constitutivos teóricos e equações diferenciais derivadas da Mecânica dos Meios Contínuos.

2.1 Descrição matemática para a deformação

A deformação de um sólido consiste na alteração da sua configuração original após a aplicação de um agente externo. Para desenvolver a formulação matemática da deformação, definimos um vetor $\vec{u}(\vec{x}, t)$ que descreve o movimento de um ponto qualquer dentro do sólido. A Figura 1 ilustra os principais vetores envolvidos no processo de deformação.

Considerando que um ponto R esteja na posição \vec{X} na configuração inicial (antes da deformação), o sólido se deforma e o ponto passa a ocupar a posição \vec{x} no instante de tempo t . O vetor deslocamento do ponto R será, portanto,

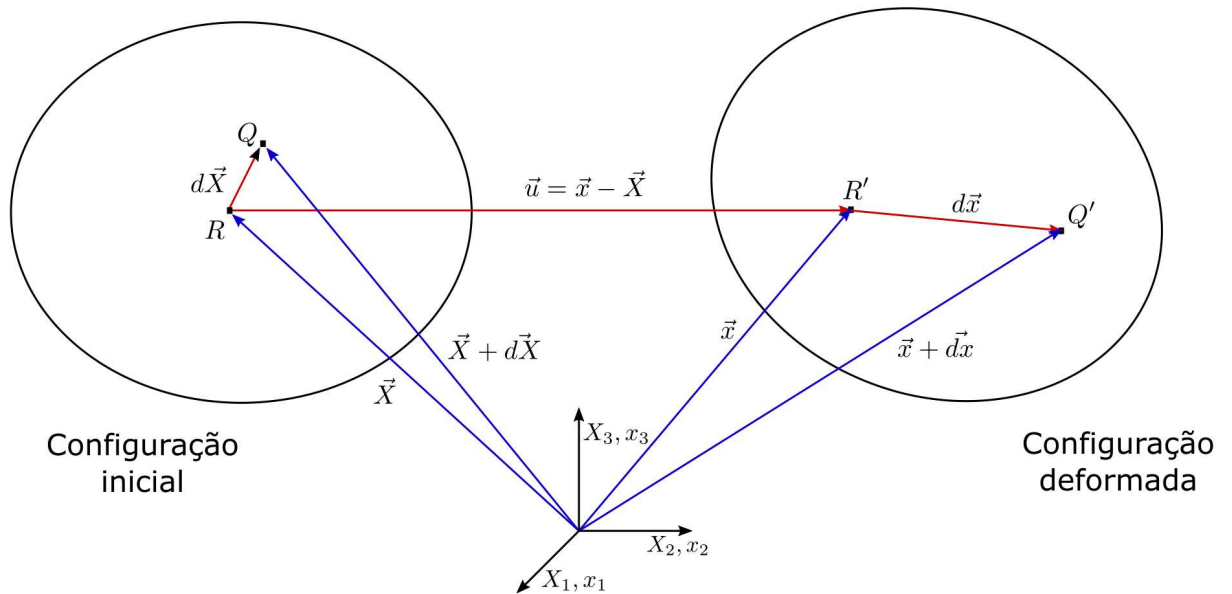
$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{X}, \quad (2.1)$$

ou

$$u_k = x_k - X_k, \quad (2.2)$$

onde $k = 1, 2, e 3$ representam, respectivamente, as três coordenadas cartesianas x, y e z . Rees-

Figura 1 – Esquema ilustrativo do processo de deformação de um corpo arbitrário.



Fonte: Adaptada (SIMOES, 2017).

crevendo a equação (2.2), temos

$$x_k = u_k + X_k, \quad (2.3)$$

$$X_k = x_k - u_k, \quad (2.4)$$

onde o objetivo é manipular essas equações para obter uma representação do campo de deformação utilizando as coordenadas espaciais x_k e materiais X_k .

Derivando a equação (2.3) em relação a X_i , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} &= \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial X_k}{\partial X_i}, \\ \frac{\partial x_k}{\partial X_i} &= \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ki}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e, derivando novamente a equação (2.3) em relação a X_j , obtemos:

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj}. \quad (2.6)$$

Por definição (SIMOES, 2017),

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right], \quad (2.7)$$

conhecido como tensor de deformação de Green-Lagrange. Vamos reescrevê-lo em termos do campo de deslocamentos \vec{u} , para isto iremos utilizar as equações (2.5) e (2.6). Logo substituindo

na equação (2.7),

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ki} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj} \right) - \delta_{ij} \right], \quad (2.8)$$

e, ao realizar a distributiva entre os elementos, obtemos

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \delta_{kj} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{ki} \delta_{kj} - \delta_{ij} \right]. \quad (2.9)$$

Aplicando a mudança de índice, utilizando o delta de Kronecker¹, o tensor de Green-Lagrange reescrito em termos dos deslocamentos será dado por

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right]. \quad (2.10)$$

Analogamente, podemos reescrever o tensor de deformação de Euler-Almansi, dado por (SIMOES, 2017)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right] \quad (2.11)$$

em termos do campo de deslocamento \vec{u} . Para isso, realizam-se duas derivadas na equação (2.4), a primeira em relação a x_i e a segunda em relação a x_j , resultando nas seguintes equações

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.13)$$

Substituindo na equação (2.11) e realizando as manipulações algébricas, o tensor de deformação de Euler, reescrito em termos dos deslocamentos, será dado por

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]. \quad (2.14)$$

Assumindo a hipótese dos pequenos deslocamentos nas equações (2.10) e (2.14), os produtos entre as derivadas tornam-se desprezíveis. Dessa forma, a distinção entre os tensores E_{ij} e e_{ij} desaparece, resultando em

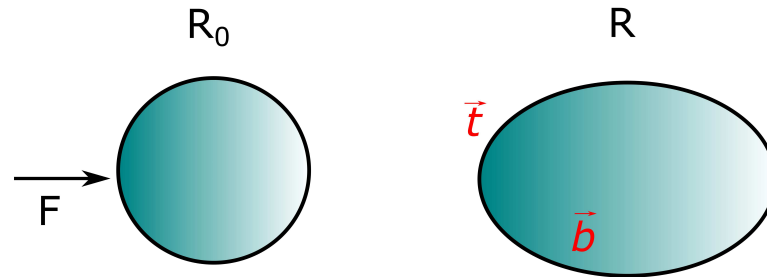
$$E_{ij} \approx e_{ij} \approx \varepsilon_{ij}.$$

Assim, o tensor de deformação pode ser escrito por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad (2.15)$$

¹ O delta de Kronecker permite uma representação simplificada do produto interno entre vetores ortonormais no sistema cartesiano. Logo, $\delta_{ij} = \hat{n}_i \cdot \hat{n}_j$, sendo igual a 1 quando $i = j$ e 0 quando são diferentes.

Figura 2 – Figura ilustrativa de um corpo sendo deformado pela força externa \vec{F} . Os vetores \vec{t} e \vec{b} representam, respectivamente, as forças superficiais e volumétricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

conhecida como equação da compatibilidade, a qual é fundamental na resolução de problemas em Mecânica dos Sólidos, pois assegura que a solução buscada seja compatível com as restrições impostas, além de garantir a integralidade do campo de deformações, que se relaciona com os deslocamentos prescritos para os pontos do interior do corpo deformável.

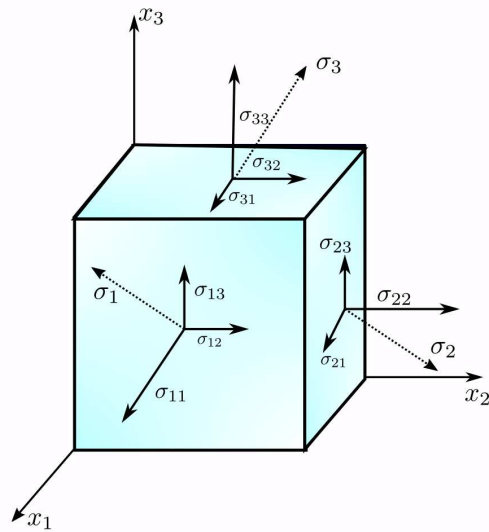
2.2 Descrição matemática da tensão

As forças atuantes em um corpo também podem ser descritas matematicamente. Assim como a deformação, as forças são quantificadas por meio de um tensor de segunda ordem, que pode não ser necessariamente simétrico. Considere um corpo ilustrado na Figura 2. Antes da aplicação de uma força, o corpo está na configuração original R_0 . Após a aplicação da força \vec{F} , ele se deforma, alcançando a nova configuração R . As forças atuantes durante o processo de deformação podem ser superficiais (representadas pelo vetor \vec{t}) ou volumétricas (representadas pelo vetor \vec{b}), que atuam, respectivamente, na superfície e no interior do corpo.

As forças superficiais podem ser decorrentes da aplicação de um carregamento externo, pressão de fluido ou até mesmo do contato com outro corpo, sendo classificadas como forças de curto alcance. Já as forças volumétricas geralmente resultam de agentes externos, como a gravidade, e são classificadas como forças de longo alcance. Considerando uma força por unidade de massa \vec{b} e uma força por unidade de volume \vec{p} , essas forças se relacionam da seguinte forma

$$\rho \vec{b} = \vec{p}, \quad (2.16)$$

Figura 3 – Figura ilustrativa de um cubo sob influência de tensões normais e de cisalhamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

ou, em termos de componentes vetoriais

$$\rho b_j = p_j, \quad (2.17)$$

onde ρ é a densidade, medida na unidade padrão do Sistema Internacional (SI). Assim, a força total atuando em um certo volume V é calculada somando todas as forças \vec{p} atuando no volume, ou seja

$$F_v = \int_V d\vec{p} = \int_V \vec{b} dm = \int_V \rho \vec{b} dV. \quad (2.18)$$

Para descrever matematicamente as forças superficiais, consideramos um cubo, ilustrado na Figura 3, sob a influência de uma tensão $\vec{\sigma}$. Utilizando a notação de Einstein, o vetor de tensão $\vec{\sigma}$ pode ser escrito como

$$\vec{\sigma}^{(e_i)} = \sigma_{ij} \vec{e}_j, \quad (2.19)$$

onde, para $i = j$, temos as tensões normais, ou seja, as componentes perpendiculares às faces do cubo, e para $i \neq j$ correspondem às componentes das tensões de cisalhamento. Desenvolvendo a equação (2.19) no espaço tridimensional, temos

$$\vec{\sigma}^{(e_1)} = \sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{12} \vec{e}_2 + \sigma_{13} \vec{e}_3,$$

$$\vec{\sigma}^{(e_2)} = \sigma_{21} \vec{e}_1 + \sigma_{22} \vec{e}_2 + \sigma_{23} \vec{e}_3,$$

$$\vec{\sigma}^{(e_3)} = \sigma_{31} \vec{e}_1 + \sigma_{32} \vec{e}_2 + \sigma_{33} \vec{e}_3.$$

Em notação matricial, escrevemos

$$\begin{bmatrix} \vec{\sigma}(\vec{e}_1) \\ \vec{\sigma}(\vec{e}_2) \\ \vec{\sigma}(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix},$$

Assim, o estado de tensão pode ser considerado como uma transformação linear que atua sobre o vetor \vec{e}_i , ou seja, um tensor de segunda ordem conhecido como tensor de Cauchy. Este tensor possui a propriedade de ser simétrico, ou seja, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, devido à conservação do momento angular (FUNG, 1994). Portanto, dos nove elementos da matriz, apenas seis são independentes, com as componentes dadas por

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

É importante ressaltar que o tensor de Cauchy é calculado na configuração deformada, ou seja, na descrição espacial Euleriana. No entanto, também é possível representar o estado de tensão utilizando as coordenadas materiais (descrição Lagrangeana) do corpo, para o que se utilizam os tensores de Piola-Kirchhoff. Esses tensores são calculados a partir da configuração de referência. Por definição, a força superficial atuando no corpo é dada por

$$F_s = \int_S \vec{t}_s da, \quad (2.20)$$

onde o vetor \vec{t}_s é a densidade superficial de força, dada por

$$\vec{t}_s = \sigma_{ij} \hat{n}, \quad (2.21)$$

considerando-se um elemento de área da orientado pelo versor \hat{n} . Utilizando a relação de Nanson (LAI *et al.*, 2009)

$$d\vec{a} = \hat{n} da = JF^T \hat{N} dA, \quad (2.22)$$

onde J é o determinante do gradiente de deformação F , que também está relacionado com a razão entre os volumes final e inicial, ou seja

$$J = \det F = \frac{dV}{dV_0},$$

enquanto o gradiente de deformação F é dado por

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (2.23)$$

Nosso objetivo é reescrever a equação (2.20) considerando um elemento de área não deformado dA . Substituindo as equações (2.21) e (2.22) na respectiva equação, obtemos

$$\bar{F}_s = \int \sigma J F^T \hat{N} dA = \int P \cdot \hat{N} dA, \quad (2.24)$$

onde

$$P = J \sigma F^{-T}, \quad (2.25)$$

ou, em termos das componentes

$$P_{im} = J \sigma_{ij} F_{jm}^{-1} = J \sigma_{ij} \frac{\partial X_m}{\partial x_j}, \quad (2.26)$$

onde $(F_{mj}^{-1})^T = F_{jm}^{-1}$, e P_{im} é conhecido como o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff. O segundo tensor de Piola-Kirchhoff é definido pela seguinte relação

$$S = F^{-1} P = J F^{-1} \sigma F^T, \quad (2.27)$$

sendo este simétrico e bastante útil no cálculo da tensão em mecânica dos sólidos computacional.

2.3 Equação de movimento na descrição Euleriana e Lagrangeana

Na abordagem do contínuo, consideram-se as forças volumétricas e superficiais. A força resultante que atua sobre o corpo é a soma desses dois tipos de forças, sendo dada por

$$\vec{F} = \int_V \vec{p} dV + \int_S \sigma_{ij} \cdot \hat{n} da, \quad (2.28)$$

sabendo que a força resultante é a variação temporal do momento linear, o qual pode ser definido em termos da densidade, temos

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{p} dV + \int_S \sigma_{ij} \cdot \hat{n} da, \quad (2.29)$$

portanto

$$\int_V \rho \vec{a} dV = \int_V \vec{p} dV + \int_S \sigma_{ij} \cdot \hat{n} da, \quad (2.30)$$

ou em termos das componentes

$$\int_V \rho a_j dV = \int_V p_j dV + \int_S \sigma_{ij} n_i da. \quad (2.31)$$

Aplicando o teorema da divergência na integral de superfície, obtemos

$$\int_V \rho a_j dV = \int_V p_j dV + \int_V \nabla \cdot \sigma_{ij} dV, \quad (2.32)$$

ou seja

$$\rho a_j = p_j + \nabla \cdot \sigma_{ij}, \quad (2.33)$$

esta é a equação diferencial que descreve o movimento dos pontos internos de um corpo deformável. Para problemas de mecânica dos sólidos, a resolução da equação (2.33) é essencial. No entanto, essa representação é para a descrição Euleriana. Para obter uma expressão na descrição Lagrangeana, reescrevemos a equação (2.33) considerando os tensores de Piola-Kirchhoff. Esta abordagem é amplamente utilizada na resolução de problemas de mecânica dos sólidos. A equação de movimento, na abordagem Lagrangeana, é dada por (ver Apêndice A)

$$\rho_0 a_j = \bar{p}_j + \nabla P_{ij}, \quad (2.34)$$

onde essa equação está escrita em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, mas pode ser reescrita utilizando o segundo tensor, por meio da relação $P = FS$. Para pequenas deformações, a diferença entre os tensores de Cauchy e Piola-Kirchhoff desaparece, de modo que não há distinção significativa entre as coordenadas Eulerianas e Lagrangeanas. Em problemas estáticos, onde $a_j = 0$, as equações de movimento tornam-se

$$p_j + \nabla \cdot \sigma_{ij} = 0, \quad (2.35)$$

na descrição Euleriana, e

$$\bar{p}_j + \nabla P_{ij} = 0, \quad (2.36)$$

na descrição Lagrangeana.

2.4 Equação de Navier para meios elásticos isotrópicos

Para um meio contínuo elástico, as seguintes equações são válidas

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{p}_j = \rho \vec{u}, \quad (2.37)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \nabla \vec{u}], \quad (2.38)$$

$$\sigma = C : \varepsilon, \quad (2.39)$$

onde temos, respectivamente, a equação de movimento, a equação de compatibilidade e a relação constitutiva, conhecida como Lei de Hooke. Nesta notação, $\vec{\sigma}$ é o tensor de tensões, ε é o tensor de deformações, \vec{u} é o vetor de deslocamento de pontos no interior do meio elástico, \vec{p}_j são as forças volumétricas atuantes no corpo, e ρ é a densidade do material.

A equação (2.39) representa um produto matricial que, para um meio elástico isotrópico, é dado por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

onde $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ e $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ são os parâmetros de Lamé, que podem ser expressos em termos do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν do material.

Considerando o caso estacionário e o regime de pequenas deformações, onde $\vec{u} = 0$ e $(\nabla\vec{u})^T \nabla\vec{u} = 0$, as equações (2.37) e (2.38) se reduzem a

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{p}_j = 0, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\nabla\vec{u})^T + \nabla\vec{u}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (2.42)$$

Utilizando a equação (2.41) e considerando apenas uma coordenada, temos

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + p_1 = 0. \quad (2.43)$$

Podemos encontrar σ_{11} , σ_{12} e σ_{13} realizando o produto matricial da equação (2.40), obtendo

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}.$$

Utilizando a equação de compatibilidade, temos

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right],$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right],$$

Substituindo os resultados anteriores na equação (2.43), temos

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + 2\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] + p_1 = 0. \quad (2.44)$$

Note que

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] = \nabla \cdot \vec{u}. \quad (2.45)$$

Reescrevendo

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] + p_1 = 0 \quad (2.46)$$

Tomando

$$\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] = \nabla^2 u_1, \quad (2.47)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right], \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], \quad (2.49)$$

conhecido como Teorema de Schwarz, substituindo na equação (2.46) e reagrupando novamente temos

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 u_1 + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] + p_1 = 0. \quad (2.50)$$

Como o termo entre colchetes refere-se novamente à relação expressa pela equação (2.45), temos

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 u_1 + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \vec{u}) + p_1 = 0. \quad (2.51)$$

Generalizando, temos

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{p}_j = 0, \quad (2.52)$$

expressão conhecida como a equação de Navier para meios elásticos isotrópicos. Em termos do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν , a equação é dada por

$$\left[\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E}{2(1 + \nu)} \right] \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{E}{2(1 + \nu)} \nabla^2 \vec{u} + \vec{p}_j = 0. \quad (2.53)$$

2.5 Relações constitutivas e viscoelasticidade

A propriedade viscoelástica refere-se à combinação de comportamentos elásticos e viscosos em um material. Em geral, as respostas dos materiais viscoelásticos são dependentes do tempo quando expostos a carregamentos, sendo essas características observadas em testes de fluência e relaxação. Sólidos, em geral, obedecem à lei de Hooke generalizada, dada por (MAI-DUY; PHAN-THIEN, 2017)

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (2.54)$$

ou

$$\varepsilon = J \sigma, \quad (2.55)$$

onde $J = 1/E$. É importante destacar que o comportamento linear expresso pela equação (2.54) é considerado para tensões e deformações que permanecem dentro do regime linear de materiais puramente elásticos, nos quais a tensão σ é proporcional à deformação ε . A constante E é o módulo de Young, um parâmetro material que está relacionado à intensidade das forças intermoleculares. Do ponto de vista físico, um material elástico responde instantaneamente quando uma força é aplicada, retornando à sua forma original assim que o carregamento é removido.

Para um fluido newtoniano viscoso, a relação constitutiva é dada por

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}, \quad (2.56)$$

conhecida como a Lei de Newton para fluidos, onde η é a viscosidade. Quando um fluido é submetido a um carregamento, ele escoou, mas, diferentemente dos sólidos, ao remover a carga, o fluido não retorna ao seu estado inicial. O comportamento elástico pode ser representado por uma mola ideal, que obedece à equação (2.54), enquanto o comportamento viscoso de um fluido pode ser modelado por um amortecedor viscoso que segue a Lei de Newton, dada pela equação (2.56).

Dessa forma, a viscoelasticidade pode ser modelada analiticamente através da associação de molas e amortecedores, a fim de obter relações constitutivas que descrevam o comportamento mecânico de materiais viscoelásticos. Esses modelos combinam elementos elásticos e viscosos para capturar a resposta complexa dos materiais sob diferentes condições de carregamento.

2.5.1 *Fluência e relaxação*

No estudo de materiais, é comum a realização de ensaios experimentais para caracterizar, definir ou validar relações constitutivas por meio da análise de curvas de tensão versus deformação ou curvas de relaxação, por exemplo, com o objetivo de encontrar parâmetros materiais importantes. Como mencionado anteriormente, materiais viscoelásticos apresentam uma forte dependência temporal, de modo que a resposta do material varia conforme o tempo de aplicação da carga. Essa resposta pode ser observada em testes de fluência, onde uma tensão constante é aplicada, e em testes de relaxação, onde a deformação aplicada é mantida constante.

Outro parâmetro crucial na reologia é o número de Deborah, um número adimensional definido como (MAI-DUY; PHAN-THIEN, 2017)

$$D_e = \frac{\tau}{t_{obs}}, \quad (2.57)$$

que relaciona o tempo de relaxação τ do material, associado às suas propriedades viscosas, com o tempo de observação ou de realização do experimento. Quando $D_e \rightarrow 0$, o material se comporta como um fluido; quando $D_e \rightarrow \infty$, predomina o comportamento elástico. Assim, afirmar que um material exibe predominância de propriedades viscosas ou elásticas depende da escala de tempo do experimento. A aplicação de uma carga em um curto intervalo de tempo, comparado ao

tempo de relaxação do material, pode resultar na ausência de relaxação significativa do material. Esse comportamento é geralmente observado em áreas de histerese quando se plota o gráfico da força aplicada sobre o material versus a indentação, onde uma maior área de histerese indica uma maior contribuição viscosa.

No mundo macroscópico, o asfalto é um exemplo de material viscoelástico amplamente utilizado no cotidiano (COSTA, 2011). No universo microscópico, as células servem como exemplo de materiais biológicos com tempos de relaxação curtos. Esse fato levou a debates entre pesquisadores sobre a natureza reológica das células, com alguns argumentando que as células eram materiais viscosos, enquanto outros defendiam que eram materiais elásticos. Hoje, sabe-se que as células são materiais viscoelásticos. Diversos modelos tentam descrever o comportamento mecânico desses materiais, variando desde modelos mais simplistas, que serão descritos nas próximas seções, até modelos mais sofisticados, como aqueles que utilizam descrições baseadas em leis de potência (SOUSA *et al.*, 2020; SOUSA *et al.*, 2017).

2.5.2 *Descrição matemática da viscoelasticidade*

A viscoelasticidade é a manifestação simultânea de características elásticas e viscosas em um material. A parte elástica é restauradora, enquanto a contribuição viscosa dissipa energia. No contexto da viscoelasticidade, o estresse pode ser definido como (MARQUES; CREUS, 2012)

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t) d\varepsilon(t), \quad (2.58)$$

ou

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t) \dot{\varepsilon} dt, \quad (2.59)$$

enquanto a deformação pode ser descrita como:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t) d\sigma(t), \quad (2.60)$$

ou

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t) \dot{\sigma} dt, \quad (2.61)$$

onde $E(t)$ é conhecida como a função de relaxação e $J(t)$ como a função de fluência. Ambas são dependentes do tempo e variam de acordo com o material. As equações apresentadas são

decorrentes do princípio da superposição de Boltzmann, que se baseia na aditividade de tensões e deformações; como estamos considerando intervalos infinitesimais em um passo de tempo t , as relações constitutivas no formato integral são válidas.

Essas expressões permitem capturar o comportamento temporal dos materiais viscoelásticos, onde a resposta do material a uma carga aplicada depende tanto da intensidade da carga quanto da duração da aplicação. A função de relaxação $E(t)$ descreve como o material alivia o estresse ao longo do tempo sob deformação constante, enquanto a função de fluência $J(t)$ descreve como a deformação evolui ao longo do tempo sob tensão constante. Essas funções são fundamentais para a compreensão e modelagem do comportamento viscoelástico de materiais em aplicações práticas.

2.5.2.1 Modelo de Maxwell

O modelo reológico de Maxwell consiste em um elemento elástico (mola E) em série com um elemento viscoso (amortecedor η). Este arranjo mecânico, ilustrado na Figura 4, é uma idealização simples do comportamento viscoelástico, frequentemente utilizado devido à sua simplicidade.

Neste modelo, a tensão aplicada na mola e no amortecedor é a mesma, ou seja

$$\sigma_E = \sigma_\eta = \sigma.$$

onde os índices subscritos E e η referem-se, respectivamente, à mola e ao amortecedor.

A deformação total do elemento de Maxwell é dada pela soma das deformações da mola e do amortecedor

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t). \quad (2.62)$$

Derivando essa expressão em relação ao tempo e utilizando as relações constitutivas (2.54) e (2.56), obtemos

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (2.63)$$

Figura 4 – Modelo de Maxwell.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A próxima etapa é resolver a equação diferencial (2.63). Para isso, consideramos o elemento de Maxwell sob uma tensão constante ($\dot{\sigma} = 0$) e uma deformação constante ($\dot{\epsilon} = 0$). No caso de um teste de fluência, a equação diferencial se torna

$$E\dot{\epsilon}(t) = \frac{\sigma}{\tau}, \quad (2.64)$$

onde $\tau = \eta/E$. A solução será do tipo

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\tau E}t + c. \quad (2.65)$$

Para determinar a constante c , aplicamos as condições iniciais

- Em $t = 0$, a deformação instantânea é causada pela mola.
- A deformação da mola obedece a lei de Hooke, que pode ser reescrita como

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}.$$

Logo, quando $t = 0$, temos

$$c = \frac{\sigma_0}{E},$$

de modo que a expressão (2.65) se torna

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right). \quad (2.66)$$

No caso de um teste de relaxação no modelo de Maxwell, temos

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0, \quad (2.67)$$

onde utilizamos novamente a equação (2.63), mas considerando $\dot{\epsilon} = 0$. A solução da equação diferencial referente ao teste de relaxação será do tipo

$$\sigma(t) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right),$$

onde c é uma constante a ser determinada. Aplicando novamente as condições iniciais, a solução geral para o teste de relaxação será

$$\sigma(t) = \epsilon_0 E \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right). \quad (2.68)$$

Isso é esperado para materiais viscoelásticos. Comparando com as relações (2.54) e (2.55), temos que

$$E(t) = E \exp\left(\frac{-t}{\tau_r}\right), \quad (2.69)$$

e

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}. \quad (2.70)$$

Logo, para o modelo de Maxwell temos

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \dot{\sigma} dt, \quad (2.71)$$

$$\sigma(t) = E \int_0^t \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \dot{\varepsilon} dt. \quad (2.72)$$

2.5.2.2 Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt consiste em um elemento elástico em paralelo com um elemento viscoso, conforme ilustrado na Figura 5. Neste modelo, o elemento viscoso impede a deformação instantânea da mola, de modo que a deformação de cada elemento que compõe o sistema mecânico seja a mesma ($\varepsilon = \varepsilon_E = \varepsilon_\eta$). A tensão total no sistema é dada pela soma da tensão na mola mais aquela que atua sobre o amortecedor, ou seja

$$\sigma(t) = \sigma_E + \sigma_\eta. \quad (2.73)$$

Usando novamente as equações (2.54) e (2.56) e reescrevendo a expressão (2.73), temos

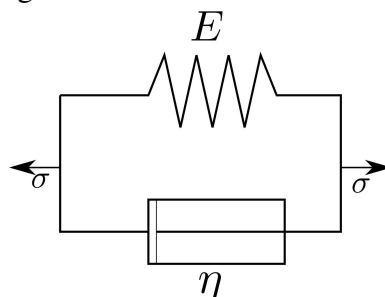
$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon + \lambda_j \dot{\varepsilon}, \quad (2.74)$$

onde $\lambda_j = \eta/E$ é o tempo de retardo. A equação diferencial do modelo de Kelvin-Voigt é homogênea de primeira ordem, e sua solução é composta por uma solução particular S_p e uma solução homogênea S_h .

Para S_h , temos

$$\varepsilon(t) + \lambda_j \dot{\varepsilon} = 0, \quad (2.75)$$

Figura 5 – Modelo de Kelvin-Voigt.



Fonte: Elaborada pelo autor.

cuja solução é do tipo

$$\varepsilon(t) = c \cdot \exp\left(\frac{-t}{\lambda_j}\right). \quad (2.76)$$

Para S_p , consideramos que $\dot{\varepsilon}(t) = 0$, logo

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (2.77)$$

Consequentemente, a solução do modelo de Kelvin-Voigt é do tipo

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + c \cdot \exp\left(\frac{-t}{\lambda_j}\right). \quad (2.78)$$

Considerando que em $t = 0$, a deformação $\varepsilon(0) = 0$, pois não há deformação instantânea, a constante c será igual a

$$c = -\frac{\sigma_0}{E}. \quad (2.79)$$

Logo, a solução completa para o modelo de Kelvin-Voigt será

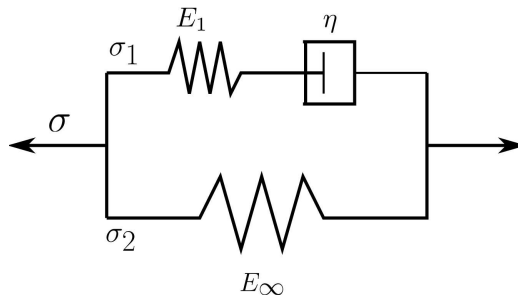
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\lambda_j}\right) \right]. \quad (2.80)$$

2.5.2.3 Modelo do sólido linear padrão

O modelo do sólido linear padrão (SLS) consiste em um elemento viscoelástico em paralelo, ou em série (dependendo da representação), com uma mola. Este modelo é simples e consegue descrever tanto processos de fluência quanto de relaxação. Adotaremos aqui a representação de Maxwell, ilustrada na Figura 6. Sabemos que a deformação total do elemento viscoelástico é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_{E_1} + \varepsilon_{\eta},$$

Figura 6 – Modelo do sólido linear padrão na representação de Maxwell.



Fonte: Elaborada pelo autor.

e, além disso, em seção anterior, definimos a equação diferencial ordinária (EDO) que governa o modelo de Maxwell

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

Na representação adotada, a deformação ε é a mesma para a mola isolada E_∞ e para o elemento de Maxwell, enquanto que a tensão total σ consiste na soma das tensões atuantes sobre cada um desses elementos que compõem o sistema. Além disso, vale ressaltar que as molas E_∞ e E_1 do SLS obedecem à lei de Hooke, enquanto o amortecedor viscoso η obedece à lei de Newton para fluidos. Fazendo uma analogia com circuitos elétricos, a tensão se comporta de maneira similar à corrente elétrica que atravessa um circuito, dividindo-se em σ_1 e σ_2 ao encontrar um nó. A tensão total neste sistema corresponde a

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

onde σ_1 atua sobre o elemento viscoelástico de Maxwell e σ_2 atua sobre a mola isolada E_∞ . Derivando no tempo a expressão anterior, temos

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2. \quad (2.81)$$

Substituindo a EDO de Maxwell e a lei de Hooke para a mola E_∞ na expressão (2.81), obtemos

$$\sigma_1 + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} = \left(\frac{E_\infty + E_1}{E_1} \right) \eta \dot{\varepsilon}.$$

Usando $\sigma_1 = \sigma - E_\infty \varepsilon$ e reorganizando os termos, temos

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} = \left(\frac{E_\infty + E_1}{E_1} \right) \eta \dot{\varepsilon} + E_\infty \varepsilon, \quad (2.82)$$

expressão que corresponde à equação diferencial referente ao SLS. Para o teste de fluência, consideramos $\dot{\sigma} = 0$, e para o teste de relaxação, $\dot{\varepsilon} = 0$. Para resolver a equação (2.82), podemos utilizar o método do fator integrante ou a transformada de Laplace. As soluções para os testes de relaxação e de fluência para o SLS são, respectivamente (LIN, 2020)

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[E_\infty + E_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right], \quad (2.83)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_\infty} \left[1 - \frac{E_1}{E_\infty + E_1} \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau^*}\right) \right], \quad (2.84)$$

onde $\tau = \eta/E_1$ é o tempo de relaxação, e $\tau^* = \eta(E_\infty + E_1)/E_\infty E_1$ é o tempo de retardo do modelo.

3 METODOLOGIA NUMÉRICA

Problemas físicos geralmente são descritos matematicamente por meio de equações diferenciais, que podem ser ordinárias ou parciais. Por exemplo, a propagação de calor em uma barra obedece à lei de Fourier, o transporte de partículas segue a lei de Fick, e o escoamento laminar dentro de um cano é descrito pelas equações de Navier-Stokes, entre outros exemplos. Essas equações diferenciais, quando possível, podem ser solucionadas analiticamente, especialmente para problemas idealizados em que a geometria e as condições de contorno são simples o suficiente para permitir tal solução.

Entretanto, em problemas reais, onde a complexidade geométrica e as condições de contorno tornam a solução analítica inviável, é comum recorrer a ferramentas computacionais para buscar uma solução aproximada. Entre os métodos numéricos, podemos citar o Método dos Volumes Finitos (MVF) (VERSTEEG; MALALASEKRA, 1996), o Método das Diferenças Finitas (MDF) (KUNZ; LUEBBERS, 1993), a Dinâmica Molecular (DM) (DEUFLHARD *et al.*, 1998), e o Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), entre outros. A escolha e o uso de uma ferramenta específica dependem do problema a ser resolvido e das preferências do usuário. Por exemplo, para problemas de escoamento de fluidos computacionais (CFD), o método dos volumes finitos é comumente utilizado, embora o MEF também possa ser aplicado a esses problemas. Além disso, com o avanço das técnicas numéricas, é possível acoplar diferentes fenômenos físicos em um único problema. Um exemplo é o estudo da dilatação térmica, que combina a propagação de calor com a análise de deformação do material.

3.1 Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico desenvolvido inicialmente por engenheiros para resolver problemas relacionados a estruturas, como a análise de tensões e deformações (COOK, 1995). Embora essa tenha sido sua proposta inicial, o MEF atualmente possui diversas aplicações que não se restringem apenas a problemas de deformação de sólidos.

Com o avanço da computação, especialmente no que se refere ao processamento e à memória dos computadores, o uso do MEF, antes restrito a problemas de engenharia, se expandiu para diversas outras aplicações. Assim como a tecnologia dos computadores evoluiu, o MEF também acompanhou esse avanço, tanto em hardware quanto em software, tornando-se

uma ferramenta mais acessível e fácil de utilizar. Atualmente, existem muitos programas que permitem ao usuário criar geometrias e resolver problemas de maneira intuitiva, utilizando interfaces gráficas. Esse desenvolvimento impactou diretamente no aperfeiçoamento e na ampla utilização do MEF, que hoje tem uma gama de aplicações na indústria e em outros campos da ciência e engenharia, não ficando restrito a uma única área do conhecimento (TEIXEIRA-DIAS *et al.*, 2010).

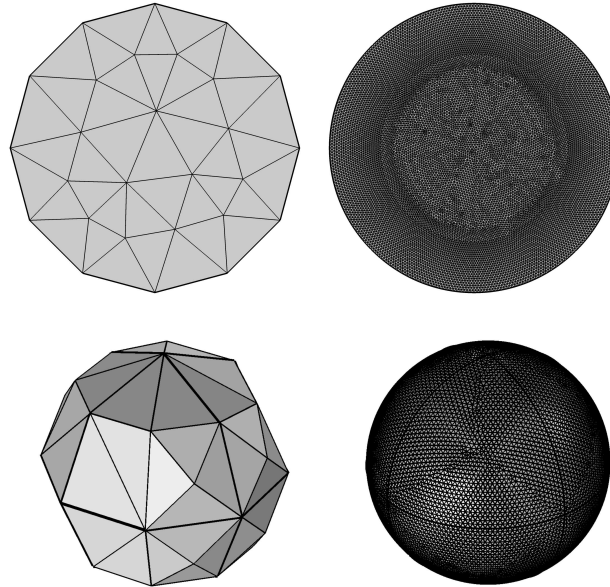
Na indústria, a principal vantagem de utilizar o MEF está na redução de custos, pois sua versatilidade permite modelar peças e realizar análises importantes utilizando ferramentas de desenhos assistidos por computador (CAD). Existem diversos softwares específicos para essa finalidade. No campo científico, o uso do MEF possibilita a realização de experimentos virtuais, onde podem ser aplicadas diferentes condições de contorno para visualizar e estudar fenômenos de interesse. Esses experimentos, que normalmente exigiriam uma estrutura física em laboratório, podem ser implementados em um computador. Contudo, é importante ressaltar que os modelos numéricos implementados utilizando o MEF são validados pela observação experimental; De modo que o MEF pode fornecer uma previsão de como determinado sistema modelado se comportará sob as condições de contorno aplicadas, e a experimentação física valida essas previsões. Além disso, a metodologia numérica permite a obtenção de resultados visuais, como o campo de velocidade de um escoamento em um meio poroso ou os campos de tensão-deformação atuantes em um corpo. Tais observações, que podem ser difíceis ou impossíveis de se obter em um experimento real, são facilmente acessíveis em simulações computacionais.

3.1.1 Aplicação do MEF a problemas de mecânica dos sólidos

Um problema físico geralmente pode exigir a solução de uma ou mais equações diferenciais (ED). No contexto de um domínio contínuo, essas equações são válidas em qualquer ponto do interior do domínio, e cada ponto deve satisfazer a ED que governa o contínuo. De modo simplificado, a ideia principal do MEF é discretizar o domínio contínuo em elementos menores, chamados elementos finitos, e resolver o problema nesses elementos. Na Figura 7, temos exemplos de geometrias discretizadas; note que os elementos finitos são os triângulos presentes na geometria 2D e, no caso 3D, os tetraedros. Além disso, há outras formas que podem ser usadas na discretização do domínio, como retângulos, hexaedros, entre outros, dependendo da quantidade de nós e da dimensão utilizada no modelo.

Para utilizar essa metodologia de forma adequada, devemos seguir as etapas a seguir:

Figura 7 – Exemplo de domínios discretizados. Na parte superior temos uma geometria bidimensional representada por um círculo e na parte inferior temos um domínio tridimensional representado por uma esfera. Cada um destes possui uma representação com elementos finitos maiores e menores.



Fonte: Elaborada pelo autor.

1) definir o problema, 2) definir a geometria (que pode ser simples ou complexa, uni-, bi- ou tridimensional), 3) definir os parâmetros materiais, 4) definir a física envolvida (mecânica dos sólidos, eletromagnetismo, fluidodinâmica, entre outras), 5) atribuir as condições de contorno (sendo possível implementar condições de contorno diversificadas), 6) discretizar o domínio contínuo em elementos menores, formando a malha, e 7) executar a simulação, obter resultados e analisá-los.

Na mecânica dos sólidos, o interesse principal é calcular o campo de tensão-deformação de um corpo. Entretanto, a solução para esse tipo de problema pode variar de ponto a ponto do corpo, gerando um número elevado de soluções (SANTOS, 2010). Ao discretizar o domínio contínuo, o número infinito de soluções passa a ser calculado em termos dos nós que conectam os elementos. Dessa forma, a partir dos deslocamentos de uma quantidade finita de pontos, podemos obter com boa precisão os campos de deslocamentos e de tensão atuantes sobre o corpo. Quanto mais refinada for a malha, mais preciso será o resultado; contudo, isso aumenta o custo computacional, tanto em termos de memória quanto de processamento. Em um problema de contato entre corpos, por exemplo, é comum que a malha seja mais refinada na região onde ocorre o contato físico, devido ao gradiente de tensão e deformação serem maiores nessas áreas, exigindo, portanto, maior precisão.

Após a discretização, a equação diferencial que governa o corpo continua válida, mas será reescrita em sua forma fraca no intuito de implementá-la a nível elemento finito para a resolução do problema utilizando a metodologia numérica. No MEF, para reescrever a forma forte, representada pelas equações de movimento apresentadas no Capítulo 2, na forma fraca, podemos utilizar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). A formulação forte da equação de movimento, definida anteriormente, é dada por

$$\nabla \cdot \sigma_{ij} + p_j - \rho \ddot{u}_j = 0,$$

aplicando o PTV na equação de movimento, temos

$$\int_V \delta u_j (\nabla \cdot \sigma_{ij} + p_j - \rho \ddot{u}_j) dV, \quad (3.1)$$

onde δu_j corresponde as componentes do campo de deslocamento virtuais arbitrário. Utilizando a seguinte identidade (GONZALEZ; STUART, 2008)

$$\nabla \cdot (S^T \vec{v}) = (\nabla \cdot S) \cdot \vec{v} + S : \nabla \vec{v},$$

onde S é um tensor de segunda ordem e \vec{v} é um vetor. Considerando $S^T \equiv \vec{\sigma}^T \equiv \vec{\sigma}$ e $\vec{v} \equiv \vec{\delta u}$, temos

$$\nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\delta u}) = (\nabla \cdot \vec{\sigma}) \cdot \vec{\delta u} + \vec{\sigma} : \nabla \vec{\delta u},$$

ou, em termos das componentes,

$$\nabla \cdot (\sigma_{ij} \cdot \delta u_j) = (\nabla \cdot \sigma_{ij}) \cdot \delta u_j + \sigma_{ij} \nabla \delta u_j. \quad (3.2)$$

Reordenando os termos e substituindo na equação (3.1), temos

$$\int_V [\nabla \cdot (\sigma_{ij} \cdot \delta u_j) - \sigma_{ij} \nabla \delta u_j] dV + \int_V \delta u_j p_j dV - \int_V \delta u_j \rho \ddot{u}_j dV = 0. \quad (3.3)$$

Reorganizando

$$\int_V \sigma_{ij} \nabla \delta u_j dV = \int_V \delta u_j p_j dV - \int_V \delta u_j \rho \ddot{u}_j dV + \int_V \nabla \cdot (\sigma_{ij} \cdot \delta u_j) dV. \quad (3.4)$$

Aplicando o teorema da divergência no último termo, temos

$$\int_V \nabla \cdot (\sigma_{ij} \cdot \delta u_j) dV = \int_S \delta u_j \cdot \sigma_{ij} n_j dS$$

além disso, a condição de equilíbrio na superfície é

$$t_j = \sigma_{ij} n_j, \quad (3.5)$$

logo

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ij} \cdot \delta u_j) dV = \int_S \delta u_j t_j dS. \quad (3.6)$$

Consequentemente,

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \nabla \delta u_j dV = \int_V \delta u_j p_j dV - \int_V \delta u_j \rho \ddot{u}_j dV + \int_S \delta u_j t_j dS. \quad (3.7)$$

Como o tensor de tensões é simétrico, realizamos a seguinte substituição (SIMOES, 2017)

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} \nabla \delta u_j = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{ij} + \boldsymbol{\sigma}_{ji}}{2} \delta u_{j,i} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \delta u_{j,i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ji} \delta u_{j,i}, \quad (3.8)$$

realizando a troca do índice mudo no segundo termo, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \nabla \delta u_j &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \delta u_{j,i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \delta u_{i,j} \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij} \nabla \delta u_j &= \left[\frac{1}{2} \delta u_{j,i} + \frac{1}{2} \delta u_{i,j} \right] \boldsymbol{\sigma}_{ij} \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij} \nabla \delta u_j &= \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (3.9)$$

e, substituindo na expressão (3.7), obtemos

$$\int_V \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV = \int_V \delta u_j p_j dV - \int_V \delta u_j \rho \ddot{u}_j dV + \int_S \delta u_j t_j dS \quad (3.10)$$

ou

$$\int_V \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \vec{u} \cdot \vec{p} dV - \int_V \delta \vec{u} \rho \ddot{\vec{u}} dV + \int_S \delta \vec{u} \cdot \vec{t} dS, \quad (3.11)$$

que corresponde à formulação fraca da equação de movimento (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Ao aproximar o problema ao nível do elemento finito \mathbf{e} , os campos de deslocamentos reais e virtuais podem ser escritos em termos das funções de forma (TEIXEIRA-DIAS *et al.*, 2010), ou seja

$$\vec{u} = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e \quad (3.12)$$

e

$$\delta \vec{u} = \mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e, \quad (3.13)$$

em que \mathbf{N}^e corresponde à matriz de interpolação e \mathbf{d}^e aos deslocamentos dos nós do elemento \mathbf{e} . Dessa forma, o problema passa a ser resolvido dentro dos elementos finitos utilizando funções de interpolação, ou funções de forma, de caráter algébrico/matricial e de fácil resolução do ponto de vista computacional.

4 INDENTAÇÃO EM AMOSTRAS FINITAS

O estudo de sistemas em escalas nano e micrométricas sempre despertou o interesse dos físicos. As diversas aplicações tecnológicas de hoje são resultado de estudos realizados no passado, que possibilitaram tais avanços. A área de *Soft Matter* é uma das vertentes da Física Clássica que está atualmente em crescimento. Há pesquisas que envolvem diversas metodologias, variando desde o uso de técnicas computacionais, como a Dinâmica Molecular e o Método dos Elementos Finitos, até o uso de técnicas experimentais clássicas, como o Microscópio de Força Atômica (AFM). Paralelamente, também podemos mencionar o desenvolvimento de modelos analíticos que descrevem o comportamento reológico de materiais de interesse em *Soft Matter*.

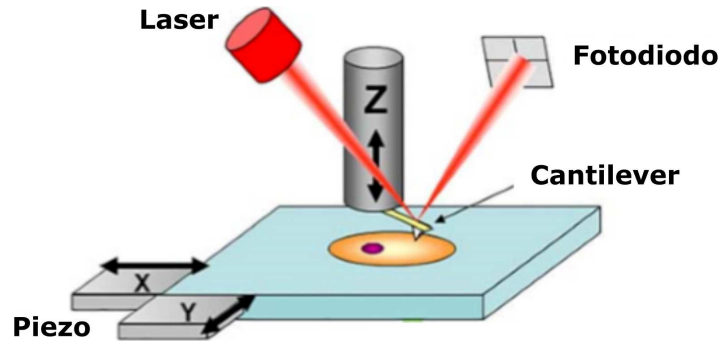
Neste capítulo, apresentaremos os resultados de testes de indentação em amostras elásticas e viscoelásticas, com o objetivo de verificar a influência da geometria do indentador e os efeitos de tamanho finito.

4.1 Determinação analítica das curvas de relaxação

Nos estudos realizados em *Soft Matter*, destaca-se a determinação de propriedades mecânicas de materiais moles, como células, por exemplo. Do ponto de vista biológico, as células são consideradas a unidade básica da vida. Independentemente de serem procariontes ou eucariontes, células animais ou vegetais, elas são indispensáveis para as funções metabólicas e fisiológicas dos seres vivos.

Estudos anteriores mostraram que estados de doença podem alterar a elasticidade celular. Células metastáticas de câncer de rim, por exemplo, são mais macias quando comparadas a células saudáveis (REBELO *et al.*, 2013). Além disso, mudanças morfológicas, como o aumento de volume ou alterações na forma da célula, podem ser indicativos de possíveis desordens patológicas, como aquelas causadas por parasitas, como o *Plasmodium falciparum* (COOKE *et al.*, 2014), agente causador da malária, certos tipos de anemia, como a anemia falciforme, e até mesmo o câncer. Alterações na forma e no volume, o estado de saúde da célula e a reologia estão intimamente relacionados. Nesse contexto, os físicos utilizam aparatos específicos para investigar essas mudanças, contribuindo para o desenvolvimento da ciência fundamental. O AFM, cujo experimento encontra-se ilustrado na Figura 8, é uma ferramenta amplamente utilizada em estudos de microreologia celular devido à sua versatilidade. Com ele, podemos obter tanto a imagem da superfície celular quanto determinar as propriedades elásticas de uma

Figura 8 – Esquema ilustrativo do arranjo experimental do Microscópio de Força Atômica (AFM).



Fonte: Adaptada (GAVARA, 2017).

célula isolada por meio de testes de nanoindentação.

Um teste de nanoindentação consiste em aplicar uma força da ordem de nanonewtons sobre a célula, de modo a deformá-la na região de contato, em um processo chamado de indentação. Nesse processo, a força aplicada e a indentação no material são registradas sob a forma de curvas de força, que são então analisadas com o auxílio de um modelo analítico específico, para finalmente extrair o módulo de elasticidade da célula.

4.1.1 O modelo de Hertz

Uma mola elástica ideal obedece à Lei de Hooke, dada por:

$$F = k \cdot x, \quad (4.1)$$

onde F é a força aplicada, k é a constante de rigidez da mola, e x é a sua deformação. A Lei de Hooke pode ser aplicada a sólidos elásticos lineares; entretanto, quando consideramos indentações em amostras macias, essa lei clássica precisa ser modificada. Nesses casos, temos

$$F \propto \delta^\lambda, \quad (4.2)$$

onde δ é a indentação aplicada na amostra, e o expoente λ possui um valor que varia de acordo com a geometria do indentador. A relação de proporcionalidade dada pela equação (4.2) é conhecida como modelo de Hertz. Esse modelo relaciona a força aplicada F com a indentação δ aplicada sobre a amostra, considerando o contato entre dois corpos elásticos com base em um conjunto de premissas.

As premissas básicas do modelo de Hertz são:

- O material indentado se comporta como um sólido elástico linear. Como amostras macias não apresentam natureza linear, aplica-se uma indentação de profundidade máxima correspondente a 10% da espessura do local indentado para evitar respostas não lineares;
- Os corpos em contato devem ser isotrópicos e homogêneos. Um material isotrópico é aquele que apresenta propriedades mecânicas independentes da direção, por exemplo, o módulo elástico na direção x é igual ao módulo elástico na direção y . Embora a exigência de homogeneidade possa ser desconsiderada em situações práticas devido à complexidade da composição do material, como no caso das células, que são compostas por organelas, filamentos de citoesqueleto e fluidos celulares, o modelo de Hertz ainda é amplamente utilizado para extrair as propriedades elásticas desses materiais biológicos. Do ponto de vista numérico, essa premissa pode ser considerada, pois assumimos o material como um meio contínuo, desprezando possíveis espaços vazios e assumindo uma composição única;
- A força aplicada é estática, de modo que não haja oscilações sobre a amostra;
- As dimensões dos corpos são maiores que a dimensão da superfície de contato, garantindo que as tensões fiquem restritas apenas à área de contato, desaparecendo nas extremidades da amostra;
- O raio de curvatura dos corpos em contato deve ser grande quando comparado ao raio de contato, pois a teoria de Hertz se baseia no problema de um espaço elástico semi-infinito em contato com um indentador esférico, onde a pressão de contato ocorre em uma pequena área localizada;
- O contato entre os corpos é suave. Para satisfazer essa condição, é comum a utilização de indentadores esféricos em experimentos de AFM, devido ao fato de que essa geometria oferece maior controle da área de contato sobre a amostra. Em contrapartida, pontas cônicas têm maior probabilidade de gerar respostas não lineares. Entretanto, neste trabalho, mostraremos que os indentadores cônicos ocasionam erros menores nas medidas de elasticidade de amostras finas com tamanho finito.

Reescrevendo a relação (4.2) em forma de igualdade, temos

$$F(\delta) = \Omega_\lambda E \delta^\lambda, \quad (4.3)$$

considerando a força \bar{F} normalizada

$$\bar{F} = \frac{F(\delta)}{\Omega_\lambda \delta^\lambda} = E, \quad (4.4)$$

Tabela 1 – Valores dos parâmetros Ω_λ e λ de acordo com a geometria do indentador (SOUSA *et al.*, 2020).

Geometria do indentador	λ	Ω_λ
cilíndrica/ <i>flat</i>	1	$\frac{2r}{(1-\nu^2)}$
esférica	3/2	$\frac{4}{3} \frac{\sqrt{r}}{(1-\nu^2)}$
cônica	2	$\frac{2}{\pi} \frac{\tan \theta}{(1-\nu^2)}$

em que E é o módulo de Young do material, enquanto que os parâmetros Ω_λ e λ dependem da geometria do indentador conforme a Tabela 1.

Quando o material considerado é uma célula, a equação (4.3) apresenta limitações, pois esses materiais são viscoelásticos, e, portanto, o módulo de Young exibe uma dependência temporal. Essa dependência temporal pode ser de dois tipos: exponencial, onde $E(t) \sim e^{-\frac{t}{\tau}}$, ou do tipo lei de potência, onde $E(t) \sim t^{-\beta}$. Ambos os modelos têm suas vantagens e desvantagens. Para estudar géis, por exemplo, os modelos exponenciais são bastante eficazes. No entanto, para materiais biológicos como células, os modelos baseados em descrições de lei de potência são mais precisos.

Para materiais viscoelásticos, as curvas de relaxação normalizadas são obtidas a partir de (SOUSA *et al.*, 2020)

$$\bar{F}(t) = \int_0^t E(t-t') \frac{d\bar{\delta}^\lambda(t')}{dt'} dt', \quad (4.5)$$

onde realizamos a integração analítica considerando dois regimes distintos: a fase de carregamento $\bar{F}_l(t)$ e a fase de *dwell* (relaxação) $\bar{F}_d(t)$ para os indentadores *flat*, esférico e cônico.

4.1.2 Fase de carregamento

Vamos considerar a indentação $\delta(t')$ como

$$\delta(t') = \delta_{max} \frac{t'}{t_l}, \quad (4.6)$$

onde t_l corresponde ao tempo de carregamento. Quando $t' = t_l$, podemos afirmar que o indentador penetrou ao máximo na amostra (δ_{max}). Elevando todos os termos a λ , temos

$$\delta^\lambda(t') = \delta_{max}^\lambda \frac{t'^\lambda}{t_l^\lambda}. \quad (4.7)$$

Considerando a normalização da indentação $\bar{\delta}(t') = \frac{\delta(t')}{\delta_{max}}$, temos

$$\bar{\delta}^\lambda(t') = \frac{t'^\lambda}{t_l^\lambda}. \quad (4.8)$$

Derivando essa expressão em relação a t' , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\delta}^\lambda(t')}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left(\frac{t'^\lambda}{t_l^\lambda} \right) \\ \frac{d\bar{\delta}^\lambda(t')}{dt'} &= \lambda \frac{t'^{\lambda-1}}{t_l^\lambda}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Para um material que obedece ao Modelo do Sólido Linear Padrão (SLS), a função de relaxação é dada por

$$E(t-t') = E_\infty + E_1 e^{-\frac{(t-t')}{\tau}}. \quad (4.10)$$

Substituindo as equações (4.9) e (4.10) na expressão (4.5), temos

$$\begin{aligned}\bar{F}_l(t) &= \int_0^t \left[E_\infty + E_1 e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \right] \lambda \frac{t'^{\lambda-1}}{t_l^\lambda} dt' \\ \bar{F}_l(t) &= \int_0^t E_\infty \lambda \frac{t'^{\lambda-1}}{t_l^\lambda} dt' + \int_0^t E_1 \lambda \frac{t'^{\lambda-1}}{t_l^\lambda} e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} dt'.\end{aligned}\quad (4.11)$$

A expressão (4.11) pode ser separada em duas integrais. Manipulando a primeira integral, temos

$$\bar{F}_{1l}(t) = \frac{E_\infty \lambda}{t_l^\lambda} \int_0^t t'^{\lambda-1} dt', \quad (4.12)$$

usando

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,$$

onde c é uma constante, quando consideramos o intervalo de integração indefinido. Logo

$$\int_0^t t'^{\lambda-1} dt' = \frac{t^\lambda}{\lambda}, \quad (4.13)$$

consequentemente

$$\bar{F}_{1l}(t) = E_\infty \left(\frac{t}{t_l} \right)^\lambda. \quad (4.14)$$

Manipulando a segunda integral da expressão (4.11), temos

$$\begin{aligned}\bar{F}_{2l}(t) &= \frac{E_1 \lambda}{t_l^\lambda} \int_0^t t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} dt' \\ \bar{F}_{2l}(t) &= \frac{E_1 \lambda}{t_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t t'^{\lambda-1} e^{\frac{t'}{\tau}} dt',\end{aligned}\quad (4.15)$$

Fazendo a mudança de variável $u = \frac{t'}{\tau}$ então $dt' = \tau du$, logo

$$\begin{aligned}\bar{F}_{2l}(t) &= \frac{E_1 \lambda}{t_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t/\tau} (u\tau)^{\lambda-1} e^u \tau du \\ \bar{F}_{2l}(t) &= \frac{E_1 \lambda}{t_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t/\tau} \tau^{\lambda-1} \tau u^{\lambda-1} e^u du \\ \bar{F}_{2l}(t) &= \frac{E_1 \lambda}{t_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \tau^\lambda \int_0^{t/\tau} u^{\lambda-1} e^u du.\end{aligned}\quad (4.16)$$

E a força total de carregamento será dada por

$$\bar{F}_l(t) = E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^\lambda + \frac{E_1 \lambda}{t_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \tau^\lambda \int_0^{t/\tau} u^{\lambda-1} e^u du. \quad (4.17)$$

4.1.2.1 Indentador flat

Para o indentador *flat*, temos $\lambda = 1$. Substituindo essa condição na equação (4.17), obtemos

$$\bar{F}_l(t) = E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right) + \frac{E_1}{t_l} e^{-\frac{t}{\tau}} \tau \int_0^{t/\tau} e^u du, \quad (4.18)$$

resolvendo a integral remanescente

$$\int_0^{t/\tau} e^u du = \left[e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right], \quad (4.19)$$

substituindo este resultado na expressão (4.18) para finalmente encontrar a força de carregamento para o indentador *flat*

$$\bar{F}_l(t) = E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right) + E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right) - E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.20)$$

4.1.2.2 Indentador cônico

Para o indentador cônico, temos $\lambda = 2$. Substituindo essa condição na equação (4.17), obtemos

$$\bar{F}_l(t) = E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t/\tau} u e^u du. \quad (4.21)$$

Resolvendo a integral remanescente por meio de integração por partes e aplicando no intervalo de integração considerado, temos

$$\int_0^{t/\tau} u e^u du = u e^u - \int_0^{t/\tau} e^u du = u e^u - e^u = \frac{t}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} - e^{\frac{t}{\tau}} + 1. \quad (4.22)$$

Portanto, a força de carregamento para o indentador cônico é dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_l(t) &= E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\frac{t}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} - e^{\frac{t}{\tau}} + 1\right] \\
 \bar{F}_l(t) &= E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 \left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{t}{\tau}} - 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{t}{\tau}} + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 \bar{F}_l(t) &= E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^2 + 2E_1 \frac{t\tau}{t_l^2} + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 \\
 \bar{F}_l(t) &= E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^2 + 2E_1 \left[\frac{t\tau}{t_l^2} + \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^2 (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) \right]. \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

4.1.2.3 Indentador esférico

Para o indentador esférico, temos $\lambda = \frac{3}{2}$. Substituindo essa condição na equação (4.17), obtemos

$$\bar{F}_l(t) = E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t/\tau} u^{\frac{1}{2}} e^u du. \quad (4.24)$$

Resolvendo a integral remanescente por meio de integração por partes e aplicando no intervalo de integração considerado, temos

$$\int_0^{t/\tau} u^{\frac{1}{2}} e^u du = u^{\frac{1}{2}} e^u - \int_0^{t/\tau} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du. \quad (4.25)$$

Realizando a substituição $z = \sqrt{u}$ e $du = 2zdz$, obtemos

$$\int_0^{t/\tau} \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{t}{\tau}}} \frac{2e^{z^2}}{\sqrt{\pi}} dz. \quad (4.26)$$

Por definição (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014), temos

$$\operatorname{erfi}(z) = \int_0^z \frac{2e^{t^2}}{\sqrt{\pi}} dt, \quad (4.27)$$

conhecida como função de erro imaginária de Gauss. Assim, temos

$$\int_0^{\sqrt{\frac{t}{\tau}}} \frac{2e^{z^2}}{\sqrt{\pi}} dz = \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau}} \right), \quad (4.28)$$

logo, a integral, dada pela equação (4.25), tem como solução

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t/\tau} u^{\frac{1}{2}} e^u du &= u^{\frac{1}{2}} e^u \Big|_0^{t/\tau} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) \\
 \int_0^{t/\tau} u^{\frac{1}{2}} e^u du &= \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau}} \right). \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Portanto, a força de carregamento para o indentedor esférico será dada por

$$\begin{aligned}\bar{F}_l(t) &= E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right) \right] \\ \bar{F}_l(t) &= E_\infty \left(\frac{t}{t_l}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}E_1 \left(\frac{\tau}{t_l}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right) \right].\end{aligned}\quad (4.30)$$

4.1.3 Fase de dwell

Na fase de *dwell*, a força será calculada através de

$$\bar{F}_d(t) = \int_0^{t_l} E(t-t') \frac{d\bar{\delta}^\lambda(t')}{dt'} dt' + \int_{t_l}^t E(t-t') \frac{d\bar{\delta}_{max}^\lambda(t')}{dt'} dt', \quad (4.31)$$

onde δ_{max} corresponde à indentação máxima na amostra. Em testes de relaxação em materiais viscoelásticos, a indentação máxima é constante, ou seja, se

$$\delta_{max} = \text{constante},$$

então

$$\frac{d\bar{\delta}_{max}^\lambda(t')}{dt'} = 0. \quad (4.32)$$

Assim, a força durante o relaxamento será calculada utilizando

$$\bar{F}_d(t) = \int_0^{t_l} E(t-t') \frac{d\bar{\delta}^\lambda(t')}{dt'} dt'. \quad (4.33)$$

Sabemos que

$$\frac{d\bar{\delta}^\lambda(t')}{dt'} = \lambda \frac{t'^{\lambda-1}}{t_l^\lambda}$$

então

$$\bar{F}_d(t) = \frac{\lambda}{t_l^\lambda} \int_0^{t_l} E(t-t') t'^{\lambda-1} dt'. \quad (4.34)$$

Utilizando a função de relaxação do SLS e substituindo na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}\bar{F}_d(t) &= \frac{\lambda}{t_l^\lambda} \int_0^{t_l} \left(E_\infty + E_1 e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \right) t'^{\lambda-1} dt' \\ \bar{F}_d(t) &= E_\infty \frac{\lambda}{t_l^\lambda} \int_0^{t_l} t'^{\lambda-1} dt' + E_1 \frac{\lambda}{t_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t_l} t'^{\lambda-1} e^{\frac{t'}{\tau}} dt'.\end{aligned}\quad (4.35)$$

A integral do primeiro termo tem como solução

$$E_\infty \frac{\lambda}{t_l^\lambda} \int_0^{t_l} t'^{\lambda-1} dt' = E_\infty \frac{\lambda}{t_l^\lambda} \left[\frac{t'^{\lambda-1+1}}{\lambda-1+1} \right]_0^{t_l} = E_\infty, \quad (4.36)$$

logo

$$\bar{F}_d(t) = E_\infty + E_1 \frac{\lambda}{t_1^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t_1} t'^{\lambda-1} e^{\frac{t'}{\tau}} dt', \quad (4.37)$$

onde a integral remanescente será resolvida considerando as geometrias *flat*, cônica e esférica do indentador.

4.1.3.1 Indentador *flat*

Para o indentador *flat*, considera-se $\lambda = 1$ na equação (4.37). Então

$$\bar{F}_d(t) = E_\infty + E_1 \frac{1}{t_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t_1} e^{\frac{t'}{\tau}} dt', \quad (4.38)$$

em que a integral remanescente pode ser facilmente resolvida e tem como solução

$$\int_0^{t_1} e^{\frac{t'}{\tau}} dt' = \tau e^{\frac{t_1}{\tau}} - \tau. \quad (4.39)$$

Logo a força durante o processo de *dwell* para um indentador *flat* é dada por

$$\begin{aligned} \bar{F}_d(t) &= E_\infty + E_1 \frac{1}{t_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\tau e^{\frac{t_1}{\tau}} - \tau \right] \\ \bar{F}_d(t) &= E_\infty + E_1 \left(\frac{\tau}{t_1} \right) e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} - E_1 \left(\frac{\tau}{t_1} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.1.3.2 Indentador cônico

Para o indentador cônico, temos $\lambda = 2$. Substituindo na equação (4.37), obtemos

$$\bar{F}_d(t) = E_\infty + E_1 \frac{2}{t_1^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t_1} t' e^{\frac{t'}{\tau}} dt', \quad (4.41)$$

onde a integral remanescente será resolvida por meio de integração por partes. Assumindo

$$\begin{aligned} u &= t' & du &= dt' \\ dv &= e^{\frac{t'}{\tau}} & v &= \tau e^{\frac{t'}{\tau}}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int t' e^{\frac{t'}{\tau}} dt' &= t' \tau e^{\frac{t'}{\tau}} - \tau \int e^{\frac{t'}{\tau}} dt' \\ \int t' e^{\frac{t'}{\tau}} dt' &= t' \tau e^{\frac{t'}{\tau}} - \tau^2 e^{\frac{t'}{\tau}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aplicando o intervalo de integração, temos

$$\int_0^{t_1} t' e^{\frac{t'}{\tau}} dt' = t_1 \tau e^{\frac{t_1}{\tau}} - \tau^2 e^{\frac{t_1}{\tau}} + \tau^2. \quad (4.43)$$

Consequentemente, a força durante o processo de relaxação do material viscoelástico para a ponta cônica será dada por

$$\begin{aligned} \bar{F}_d(t) &= E_\infty + E_1 \frac{2}{t_l^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[t_l \tau e^{\frac{t_l}{\tau}} - \tau^2 e^{\frac{t_l}{\tau}} + \tau^2 \right] \\ \bar{F}_d(t) &= E_\infty + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l} \right) e^{-\frac{(t-t_l)}{\tau}} - 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l} \right)^2 e^{-\frac{(t-t_l)}{\tau}} + 2E_1 \left(\frac{\tau}{t_l} \right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.1.3.3 Indentador esférico

Para o indentador esférico, temos $\lambda = \frac{3}{2}$. Substituindo na equação (4.37), obtemos

$$\bar{F}_d(t) = E_\infty + E_1 \frac{3}{2t_l^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{t_l} t'^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t'}{\tau}} dt', \quad (4.45)$$

onde a integral remanescente será resolvida por meio de integração por partes. Assumindo

$$\begin{aligned} u &= t'^{\frac{1}{2}} & du &= \frac{1}{2} t'^{-\frac{1}{2}} dt' \\ dv &= e^{\frac{t'}{\tau}} & v &= \tau e^{\frac{t'}{\tau}}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\int t'^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t'}{\tau}} dt' = \tau t'^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t'}{\tau}} - \frac{\tau}{2} \int \frac{e^{\frac{t'}{\tau}}}{\sqrt{t'}} dt'. \quad (4.46)$$

Manipulando algebricamente a integral do último termo, temos

$$\int \frac{e^{\frac{t'}{\tau}}}{\sqrt{t'}} dt' = \int \frac{e^{\left(\frac{\sqrt{t'}}{\tau}\right)^2}}{\sqrt{t'}} dt', \quad (4.47)$$

onde realizamos a substituição $u = \frac{\sqrt{t'}}{\tau}$ e $du = \frac{1}{2\sqrt{\tau t'}} dt'$. Portanto

$$\int_0^{t_l} \frac{e^{\left(\frac{\sqrt{t'}}{\tau}\right)^2}}{\sqrt{t'}} dt' = \sqrt{\pi} \sqrt{\tau} \int_0^{\sqrt{\frac{t_l}{\tau}}} \frac{2e^{u^2}}{\sqrt{\pi}} du = \sqrt{\pi} \sqrt{\tau} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t_l}{\tau}} \right), \quad (4.48)$$

onde utilizamos novamente a definição da função de erro imaginária de Gauss, dada pela equação (4.27). Substituindo esse resultado na expressão (4.46), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{t_l} t'^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t'}{\tau}} dt' &= \tau t_l^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t_l}{\tau}} \Big|_0^{t_l} - \frac{\tau}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\tau} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t_l}{\tau}} \right) \\ \int_0^{t_l} t'^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t'}{\tau}} dt' &= \tau t_l^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t_l}{\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t_l}{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

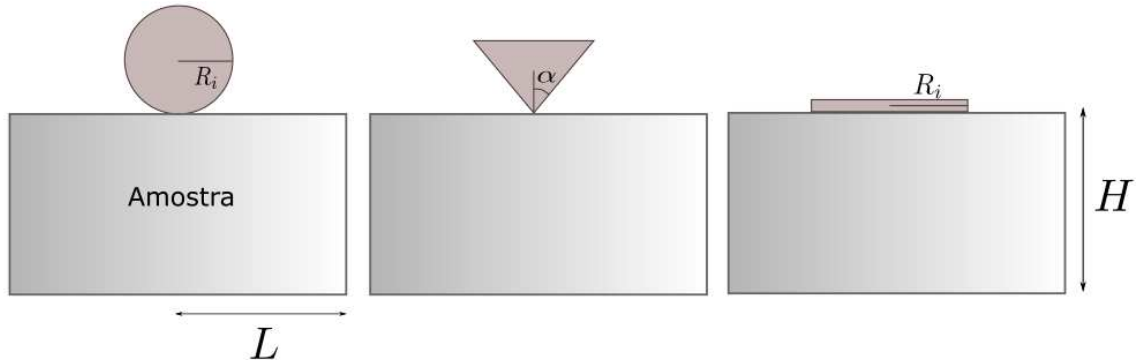
Finalmente, a força total durante o regime de *dwell* para um indentador esférico é dada por

$$\begin{aligned} \bar{F}_d(t) &= E_\infty + E_1 \frac{3}{2t_l^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\tau t_l^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t_l}{\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t_l}{\tau}} \right) \right] \\ \bar{F}_d(t) &= E_\infty + \frac{3}{2} E_1 \left(\frac{\tau}{t_l} \right) e^{-\frac{(t-t_l)}{\tau}} - \frac{3}{4} \sqrt{\pi} E_1 \left(\frac{\tau}{t_l} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t_l}{\tau}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

4.2 Descrição do modelo numérico

O modelo numérico considera uma amostra cilíndrica cujo comportamento reológico é descrito pelo modelo do sólido linear padrão (SLS) no caso viscoelástico, ou pelo módulo de Young no caso elástico. A amostra será indentada utilizando três geometrias distintas para o indentador: esférica, cônica, e flat, conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – Ilustração 2D da geometria com 3 amostras em contato com os indentadores esférico, cônico e flat.



Fonte: Elaborada pelo autor.

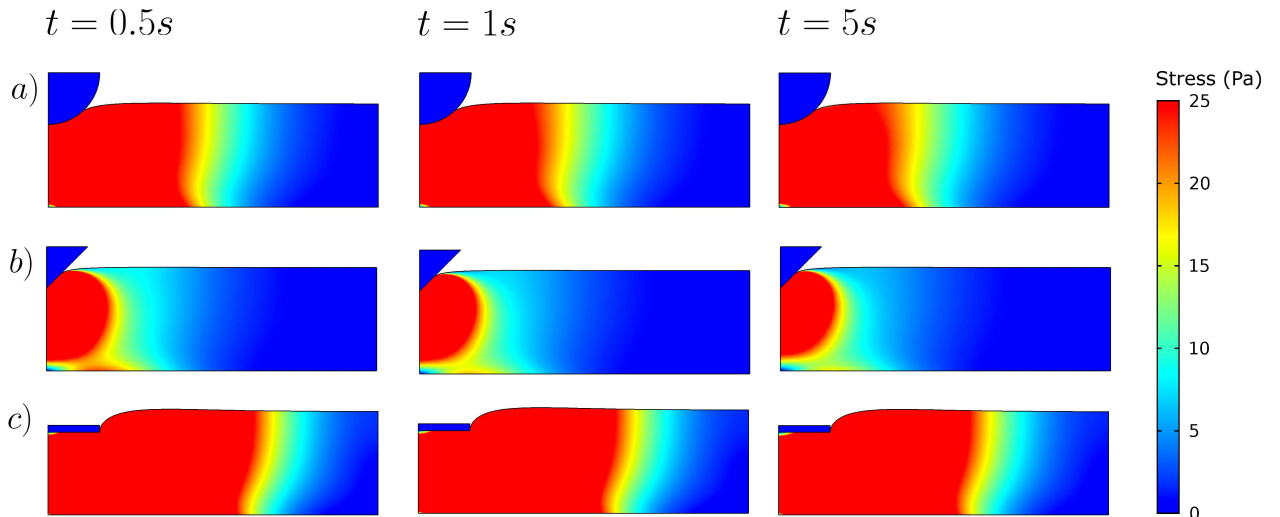
Independentemente da geometria do indentador, ele realiza testes de relaxação, penetrando na amostra até uma indentação máxima de $\delta_0 = 1 \mu\text{m}$. Além disso, diferentes alturas H da amostra foram consideradas. O tempo de relaxação τ e o tempo de carregamento t_l foram mantidos fixos. A amostra é assumida como incompressível e fixada a um substrato rígido, de modo que a base da amostra não tenha movimento nas direções z e r . As propriedades geométricas e materiais utilizadas no modelo estão listadas na Tabela 2.

As curvas de *dwell* foram obtidas e normalizadas de acordo com a geometria do indentador, utilizando os fatores apresentados na Tabela 1.

Tabela 2 – Parâmetros geométricos e materiais utilizados no modelo

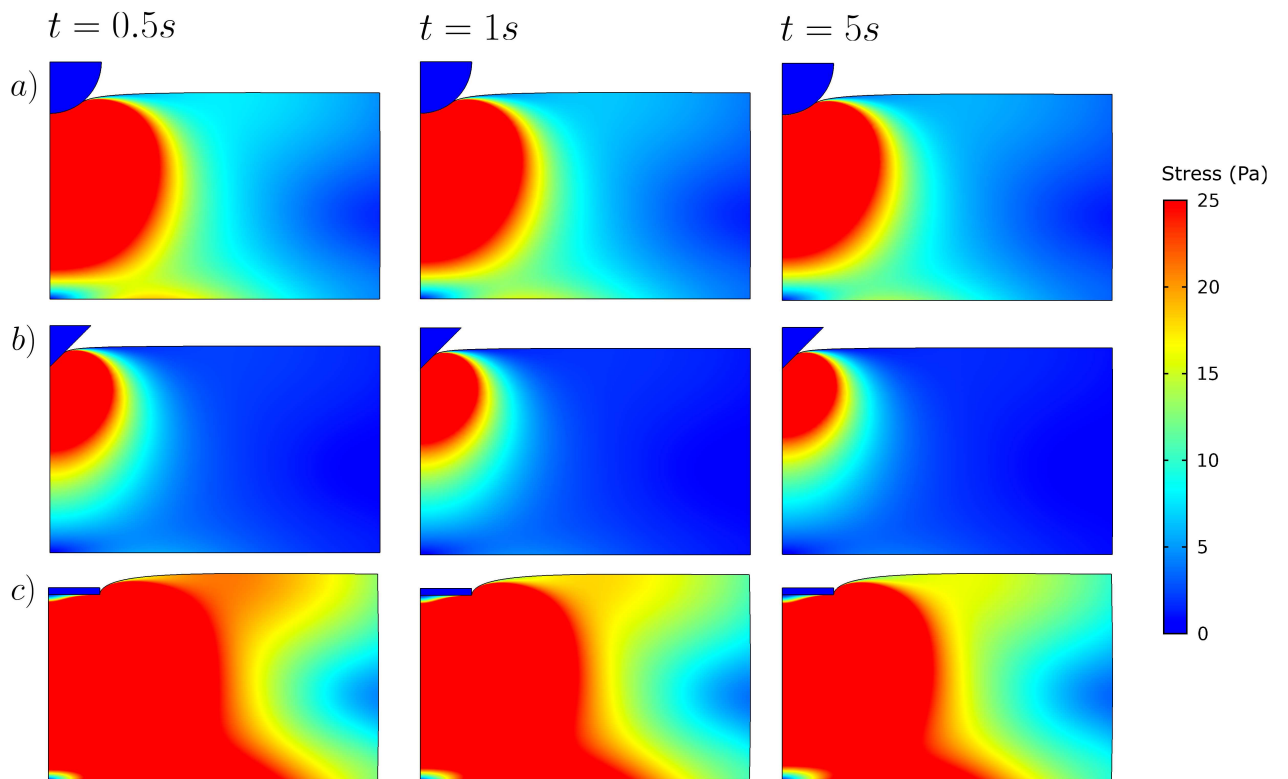
Parâmetro	Valor	Descrição
L	$8 \mu\text{m}$	Raio da amostra
H	5, 10 e $100 \mu\text{m}$	Altura da amostra
E_{input}	1000 Pa	Módulo de Young da amostra
ν_s	0,49	Coefficiente de Poisson da amostra
ρ_s	1000 kg/m^3	Densidade da amostra
τ	0,5 s	Tempo de relaxação da amostra
t_l	0,5 s	Tempo de carregamento
R_i	$2,5 \mu\text{m}$	Raio do indentador <i>flat</i> e esférico
α	45°	Ângulo de meia abertura do indentador cônico

Figura 10 – Campo de tensão da amostra viscoelástica para os indentadores **a)** esférico, **b)** cônico e **c)** *flat* em instantes diferentes ($t = 0,5 \text{ s}$; 1 s ; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 5 \mu\text{m}$.



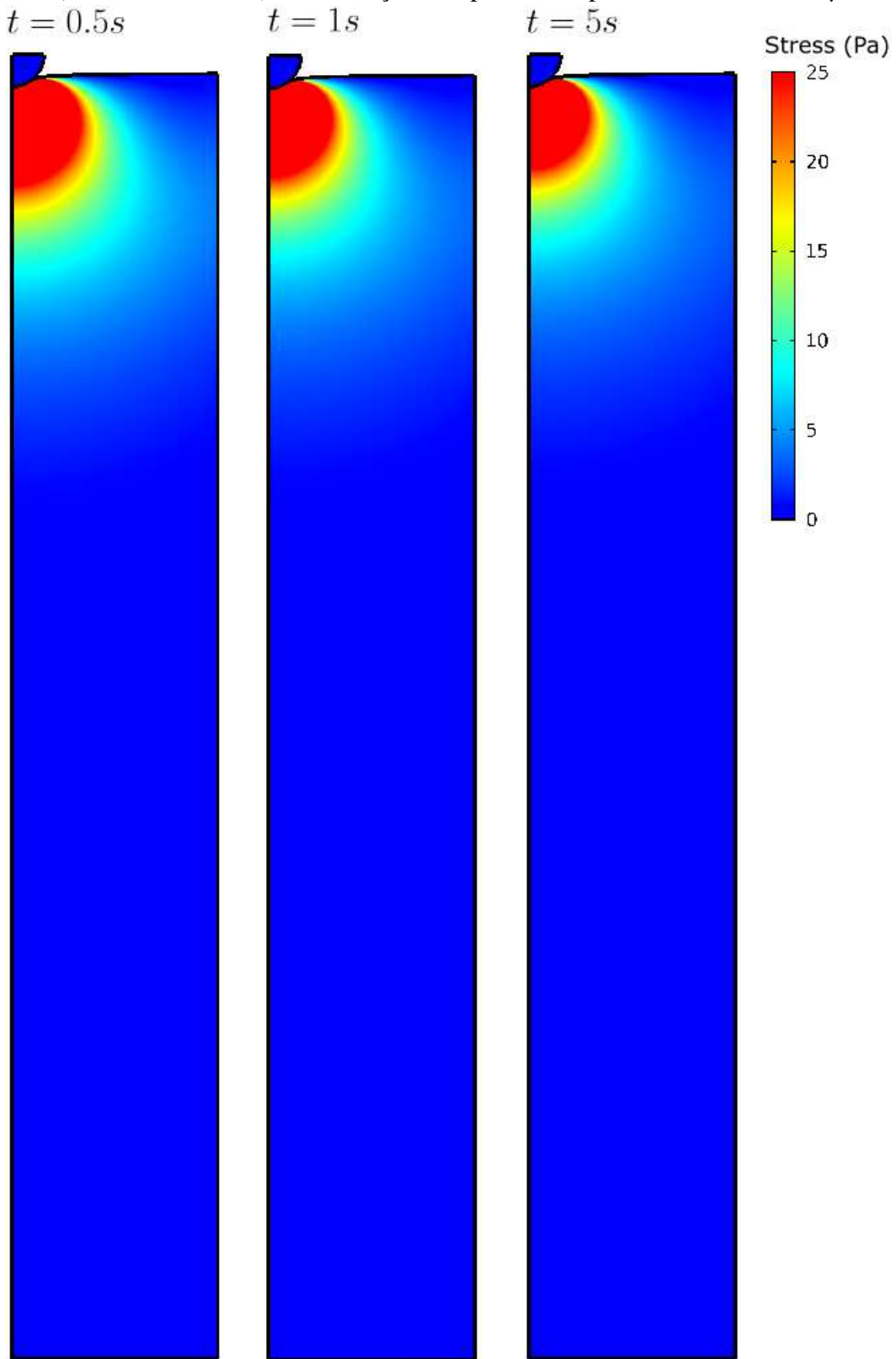
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Campo de tensão da amostra viscoelástica para os indentadores **a)** esférico, **b)** cônico e **c)** *flat* em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 10 \mu\text{m}$.



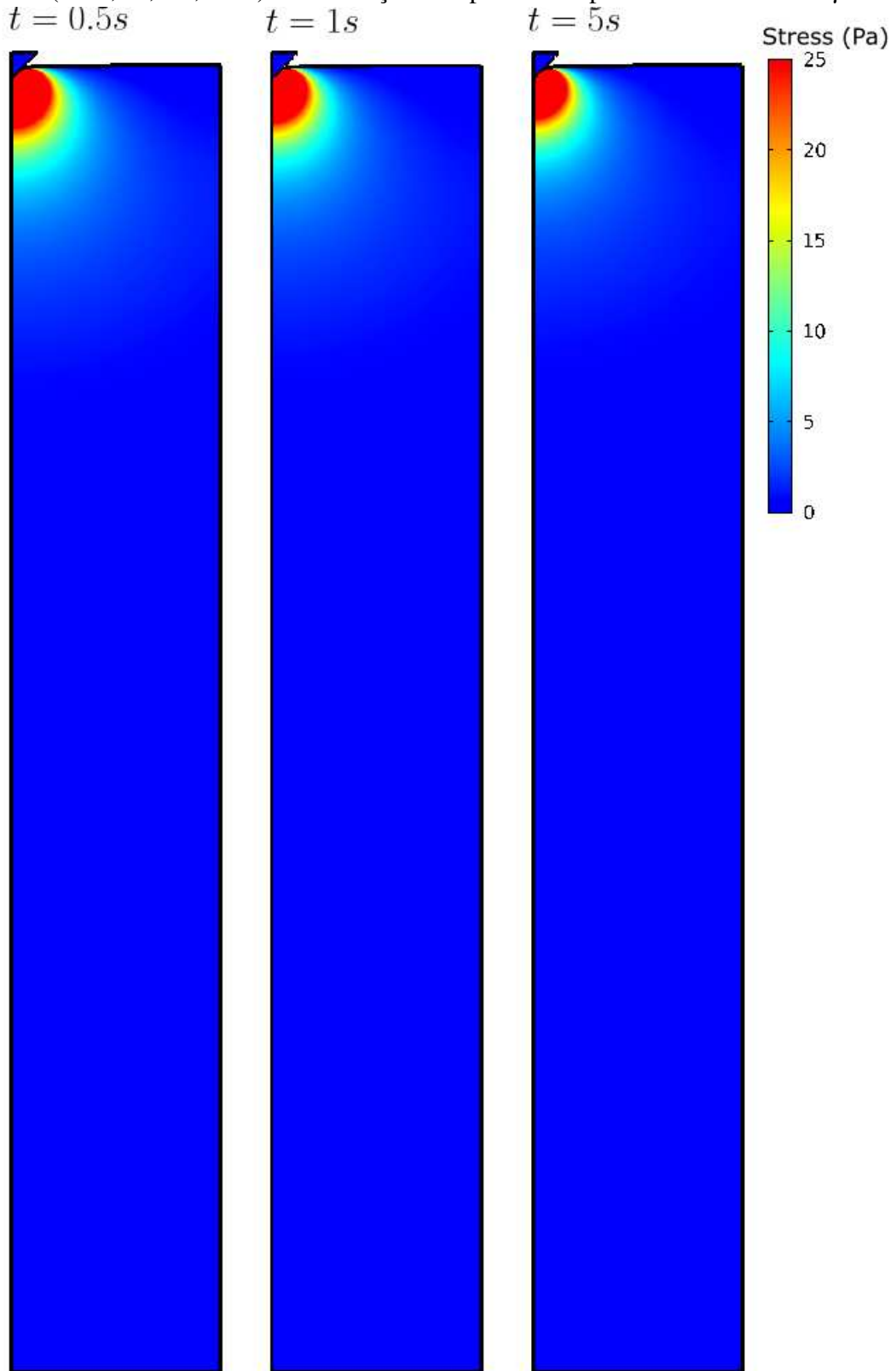
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Campo de tensão da amostra viscoelástica para o indentador esférico em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 100 \mu\text{m}$.



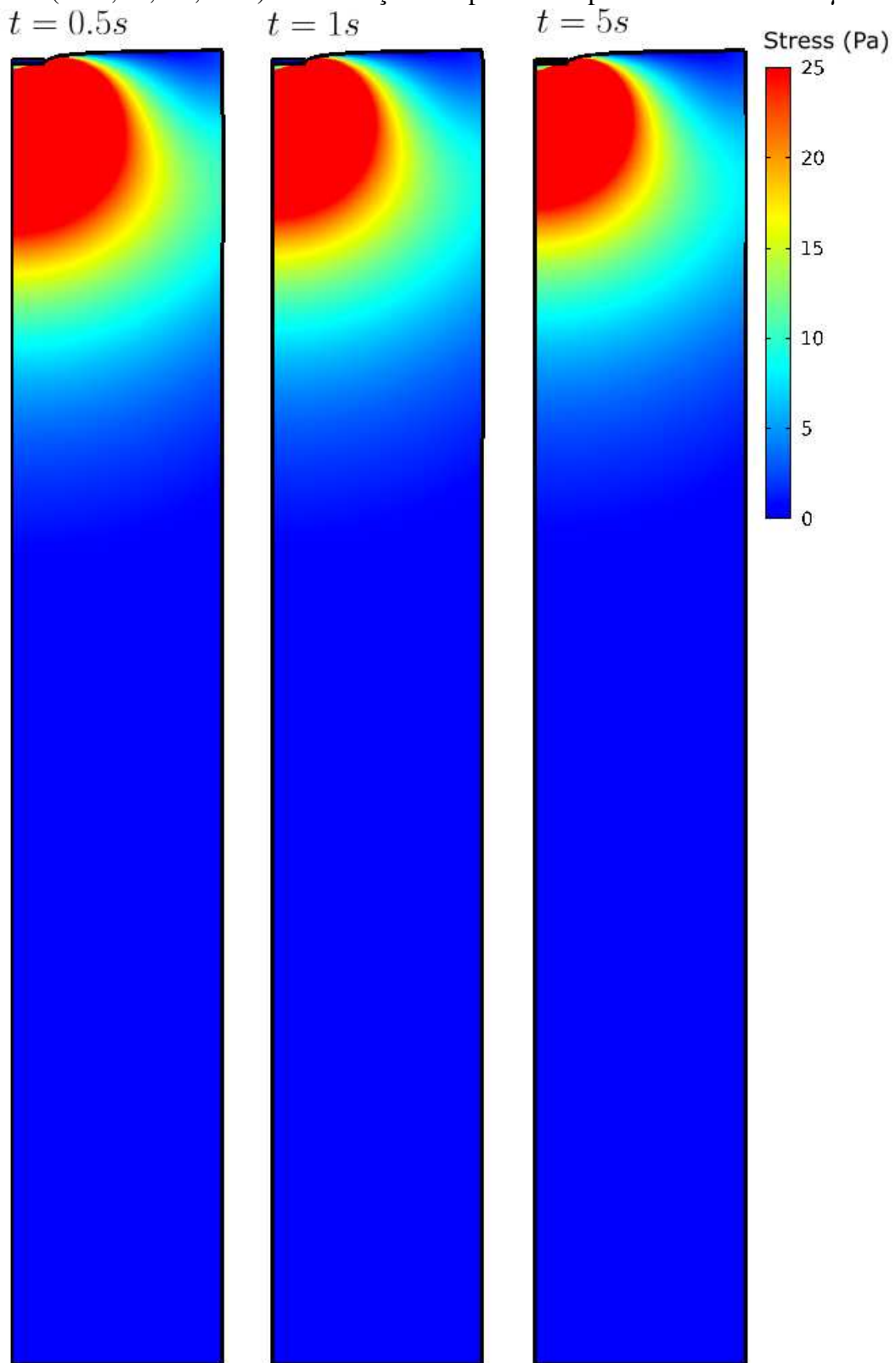
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Campo de tensão da amostra viscoelástica para o indentador cônico em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 100 \mu\text{m}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Campo de tensão da amostra viscoelástica para o indentador *flat* em instantes diferentes ($t = 0,5$ s; 1 s; e 5 s) da simulação computacional para a altura $H = 100$ μm .

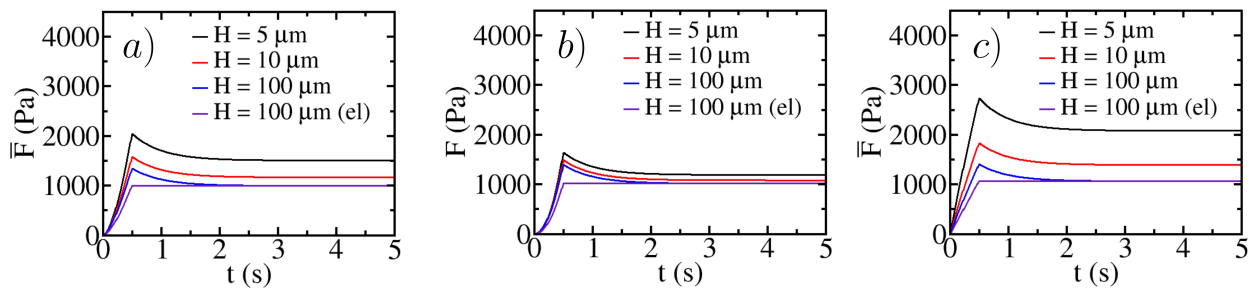


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Variando a altura da amostra

As Figuras 10-14 mostram a distribuição do campo de tensão gerado devido à indentação, de acordo com a geometria do indentador e com a altura H da amostra. A visualização do campo de tensão permite compreender como a geometria do indentador impacta a distribuição de tensões no interior da amostra, já que a pressão de contato varia conforme a geometria do indentador. Com base nesses resultados, podemos afirmar que os indentadores *flat* produzem um campo de tensão mais acentuado, enquanto os indentadores cônicos geram um campo de tensão menor. Quanto maior a área de contato, mais profunda e intensa será a distribuição da tensão.

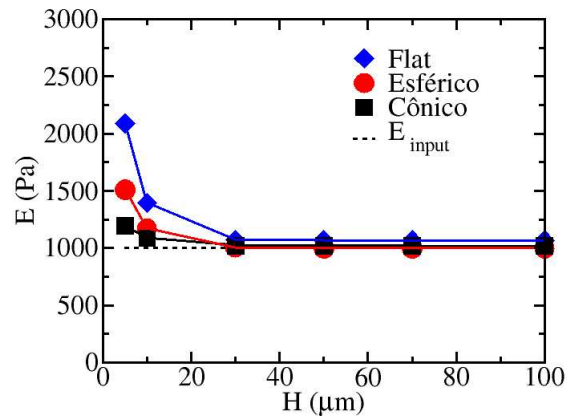
Figura 15 – Curvas de relaxação para os indentadores **a)** esférico, **b)** cônico e **c)** *flat*. As curvas de forças foram normalizadas considerando $f(t)/\Omega_\lambda \delta_0^\lambda$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

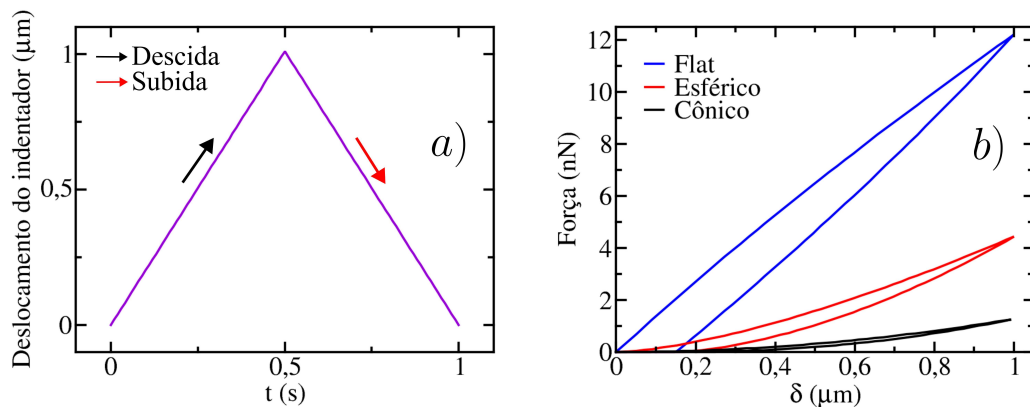
As curvas de *dwell* foram plotadas para cada geometria do indentador e altura da amostra, conforme ilustrado na Figura 15. Os gráficos exibem a força normalizada de acordo com a geometria, com o objetivo de verificar a influência da espessura finita nas medidas. Observa-se que as curvas de *dwell* seguem o comportamento observado na distribuição do campo de tensão, em que os indentadores cônicos são menos sensíveis ao efeito de espessura finita, inclusive no caso extremo em que $H = 5 \mu\text{m}$ e δ_{max} corresponde a cerca de 20% da altura H da amostra.

Figura 16 – Módulo de Young relaxado E em função da altura H da amostra viscoelástica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Em **a)** temos o gráfico que descreve o deslocamento do indentador e em **b)** as curvas de histereses para amostra com altura $H = 10 \mu\text{m}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando a amostra é mais fina, a rigidez medida é maior, devido aos efeitos do substrato rígido, o que pode ocasionar medidas errôneas e imprecisas. Como mostrado na Figura 16, os indentadores esférico e *flat* são mais sensíveis a esse efeito, enquanto o indentador cônico demonstra maior robustez em relação à influência dessa condição de contorno. À medida que a altura H da amostra aumenta, o módulo de Young medido se aproxima do valor de *input* do material (veja a Tabela 2). Portanto, podemos inferir que indentadores cônicos geram erros menores em indentações de amostras finitas, quando comparados a indentadores esféricos e cilíndricos. Ressaltamos que esses resultados se referem a amostras com adesão de 100% ao substrato rígido.

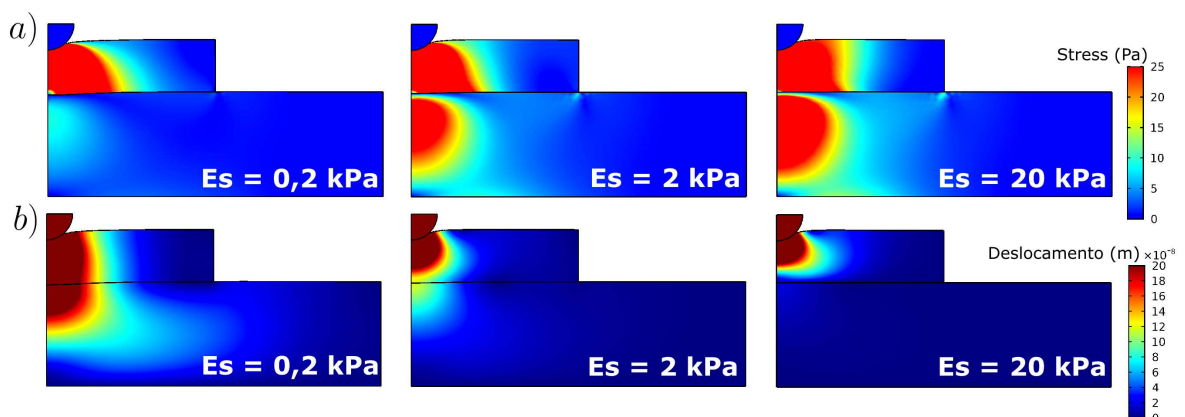
Além disso, simulamos a aproximação e afastamento do penetrador com o objetivo de obter curvas de histereses. Os indutores obedecem a mesma função para o deslocamento, conforme o gráfico ilustrado pela Figura 17-a, aplicando a profundidade máxima igual a $1 \mu\text{m}$. A amostra dissipa menos energia quando penetrada pelo indutor cônico, conforme o gráfico ilustrado na Figura 17-b, que mostra as curvas de histerese para diferentes geometrias de indutores com altura de amostra fixa em $H = 10 \mu\text{m}$. A geometria *flat* ocasiona maior dissipação de energia, a geometria cônica dissipa menos, enquanto a esférica provoca uma dissipação intermediária. Quanto maior a área de histerese, maior será a manifestação das propriedades viscosas da amostra.

4.4 Variando a rigidez do substrato

Nesta seção, apresentamos os resultados dos testes de indentação em amostras viscoelásticas posicionadas sobre um substrato em contato com um indutor. A altura da amostra foi fixada em $H = 5 \mu\text{m}$, enquanto a rigidez do substrato foi variada em um intervalo de $0,2 \text{ kPa}$ a 20 kPa . Realizamos simulações utilizando as três geometrias de indutor. O objetivo foi deformar a amostra sobre um substrato de rigidez variável.

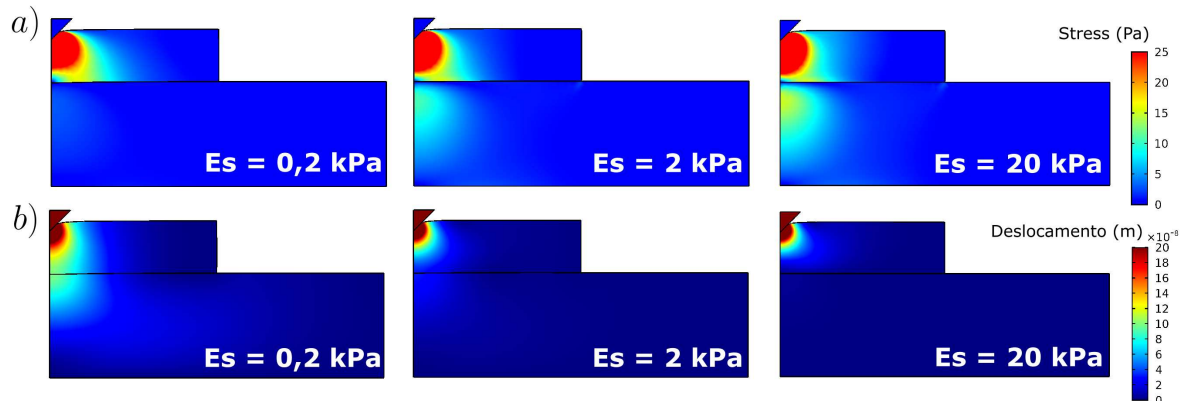
As condições de contorno seguem o padrão de um teste de indentação, considerando a amostra fixada sobre um substrato deformável. As curvas de *dwell* obtidas foram normalizadas conforme a geometria do indutor. Os campos de tensão e deslocamento para os diferentes indutores e substratos estão ilustrados nas Figuras 18 a 20.

Figura 18 – Campos de **a)** tensão e **b)** deslocamento para diferentes substratos, em que foi utilizado o indutor esférico para realizar a indentação δ_{max} na amostra viscoelástica.



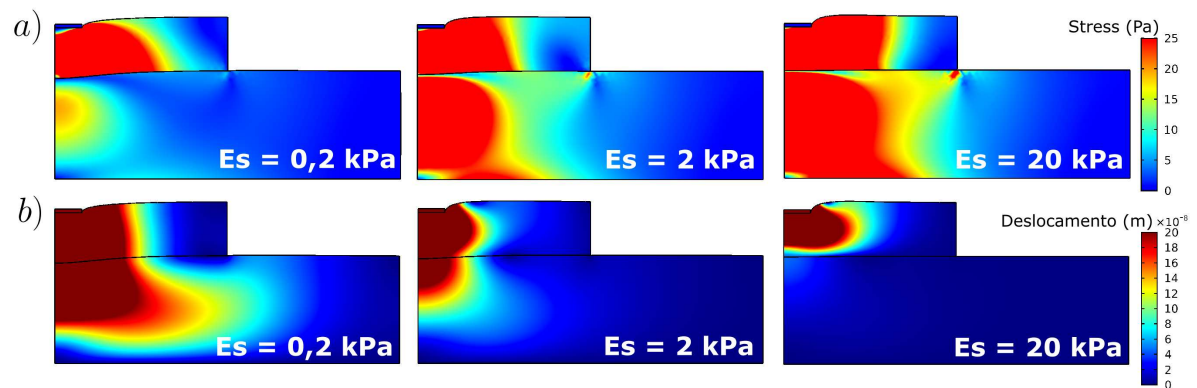
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Campos de **a)** tensão e **b)** deslocamento para diferentes substratos, em que foi utilizado o indentador cônico para realizar a indentação δ_{max} na amostra viscoelástica.



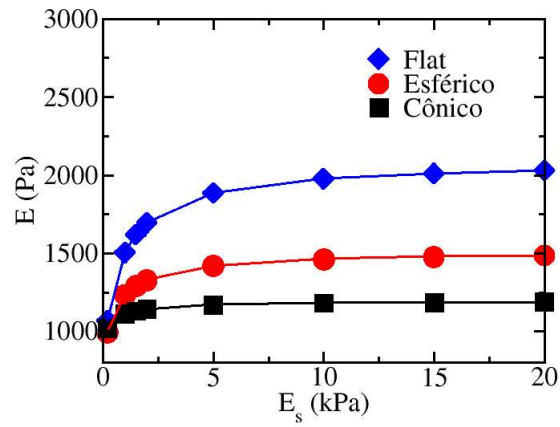
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Campos de **a)** tensão e **b)** deslocamento para diferentes substratos, em que foi utilizado o indentador *flat* para realizar a indentação δ_{max} na amostra viscoelástica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos nesta etapa da simulação estão ilustrados na Figura 21. As medidas realizadas utilizando o indentador cônico no experimento computacional são menos influenciadas pela variação na rigidez do substrato deformável, corroborando com os resultados discutidos anteriormente.

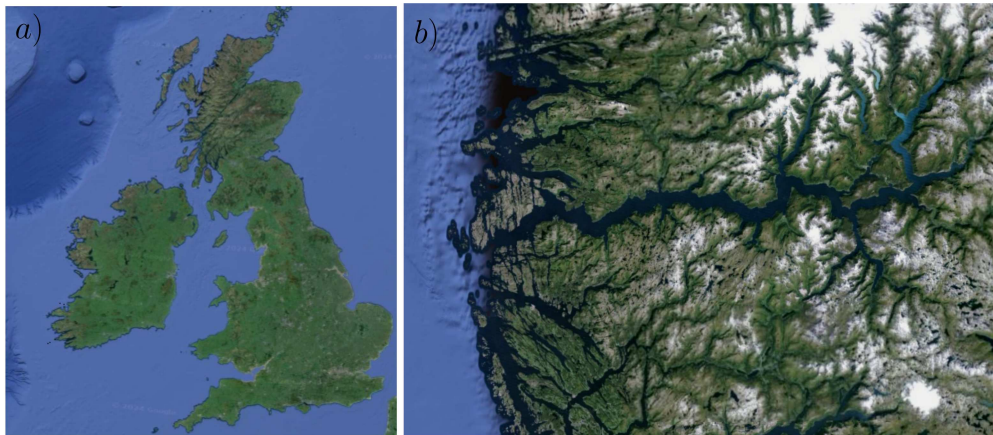
Figura 21 – Módulo de Young relaxado E em função da rigidez do substrato E_s .

Fonte: Elaborada pelo autor.

5 INFLUÊNCIA DE SUPERFÍCIES FRACTAIS NAS PROPRIEDADES MECÂNICAS

Fractais estão presentes em várias escalas na natureza. De fato, a geometria euclidiana, baseada em formas perfeitas como cones, quadrados e círculos, não é capaz de descrever com precisão o formato, o contorno e as superfícies irregulares encontradas no mundo real (ASSIS *et al.*, 2008). Um exemplo clássico desse desafio é a determinação precisa do perímetro de um continente, arquipélago ou da costa de um país. A Figura (22) ilustra essa problemática com imagens obtidas por satélite das Ilhas Britânicas e da costa da Noruega. Em ambos os casos, à medida que o *zoom* é aplicado em determinada região litorânea, o contorno terrestre torna-se mais complexo e irregular.

Figura 22 – Imagens obtidas via satélite das **a)** Ilhas Britânicas e **b)** da costa da Noruega.



Fonte: Google *Earth*.

As imagens mencionadas são exemplos de fractais naturais, ou seja, fractais encontrados na natureza que não possuem uma regra de geração estabelecida, podemos citar também superfícies auto-afim presentes em montanhas ou até mesmo em substratos rugosos. Por outro lado, há fractais que possuem regras de geração, geralmente através de uma relação de recorrência ou de funções iteradas, levando à construção de fractais idealizados que, na prática, podem não existir na natureza. Entretanto, seja o fractal determinístico ou aleatório, ambos podem possuir detalhes em qualquer escala, serem irregulares, apresentar algum nível de auto-similaridade e ter uma dimensão fractal.

Diante desse fato, a geometria fractal surge como uma área da Matemática destinada a auxiliar no cálculo e descrição de formas complexas presentes ou não na natureza, uma vez que

a geometria fractal é baseada em dimensões não-inteiras. Além disso, a abordagem fractal não está restrita apenas à Matemática. A Física, por exemplo, utiliza essa abordagem em diversas aplicações, como no estudo de fenômenos críticos, onde dimensões fractais aparecem quando o sistema estudado atinge o ponto crítico (SUZUKI, 1983). A Medicina também emprega a abordagem fractal em pesquisas oncológicas (SOKOLOV, 2015; BAISH; JAIN, 2000; SEDIVY; MADER, 1997), enquanto a Economia a utiliza para estudar o comportamento do mercado financeiro (GLERIA *et al.*, 2004). A Biologia aplica a abordagem fractal em estudos sobre a extinção de espécies (ARGOLO *et al.*, 2016).

Neste capítulo, apresentamos os resultados de um estudo numérico, implementado através do software comercial COMSOL *Multiphysics*[®], que investiga a influência de superfícies fractais no processo de medição das propriedades reológicas de materiais. Para isso, consideramos um fractal determinístico conhecido como curva de Koch (ver Apêndice B), até sua quarta geração, sob duas perspectivas diferentes que chamaremos de fractal *Up* e fractal *Down*.

Este estudo examina como a rugosidade superficial influencia a medição de propriedades elásticas, com foco particular em superfícies rugosas com padrões fractais auto-similares em diferentes escalas. Simulações numéricas, especificamente Modelagem de Elementos Finitos (MEF), foram utilizadas para explorar as distribuições de tensão e deformação durante o processo de indentação em amostras que contêm superfícies fractais de Koch. Essa abordagem permite compreender como esses padrões afetam o comportamento dos materiais sob condições de indentação e projetar experimentos que refletem de forma mais precisa as propriedades mecânicas de materiais com superfícies complexas (BOGAHAWATHTHA *et al.*, 2024; PAVÓN-DOMÍNGUEZ *et al.*, 2021; WANG *et al.*, 2018).

Em aplicações práticas, especialmente em testes de nanoindentação em materiais macios com substratos rugosos, a rugosidade superficial pode impactar diretamente a medição de parâmetros cruciais, como a elasticidade (ROY; VEMAGANTI, 2024; AFFERRANTE *et al.*, 2023). Compreender o comportamento mecânico de materiais com superfícies complexas ao serem indentados é de extrema importância para o design de materiais, aplicações em engenharia e até para o desenvolvimento de abordagens diagnósticas mais eficazes na pesquisa médica (SOKOLOV, 2015; BAISH; JAIN, 2000; SEDIVY; MADER, 1997; DOKUKIN *et al.*, 2011).

Tabela 3 – Parâmetros geométricos e materiais da amostra.

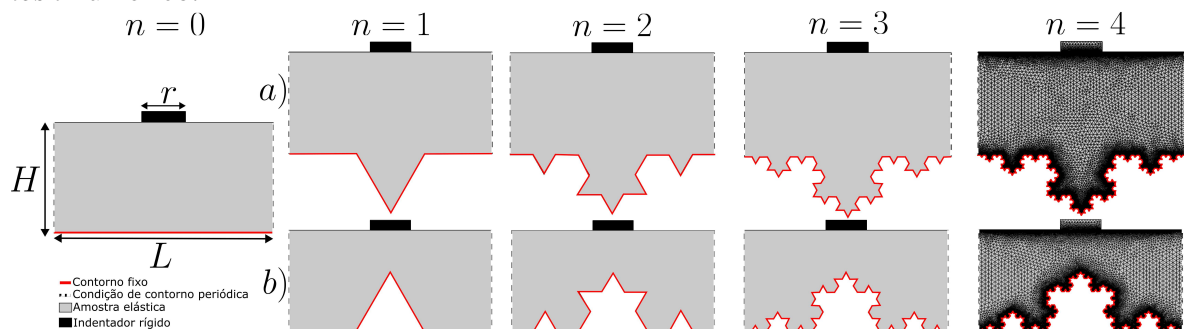
Variável	Nome	Valor
A	Área da amostra	1 cm^2
L	Base da amostra	1 cm
t	Espessura da amostra Pa	1 cm
E_s	Módulo de Young atribuído para amostra	1000 Pa
n_s	Coefficiente de Poisson da amostra	0,49
d_s	Densidade da amostra	1000 kg/m^3
H	Altura da amostra	Valor variável
n	Geração fractal	Valor variável

5.1 Modelo computacional

O modelo utilizado baseia-se em uma aproximação 2D, utilizando a condição de contorno de tensão no plano, permitindo a obtenção das curvas de força. Os parâmetros geométricos e materiais estão listados na Tabela 3.

A geometria do modelo, ilustrada na Figura 23, é bastante simples. Inicialmente, a amostra tem formato retangular e está em contato com um indentador *flat*. Com a geração de fractal na base da amostra (contorno destacado em vermelho), o indentador, que é rígido e indeformável, aplica uma indentação correspondente a 4% da altura da amostra.

Figura 23 – Ilustração 2D da geometria do modelo MEF em que temos a geração fractal de Koch na amostra sobre as perspectivas **a) Down** e **b) Up**. A orientação *Down* ocasiona um ganho de área enquanto que a orientação *Up* leva a perda de área da amostra. O fractal de Koch será gerado no contorno inferior (destacado em vermelho) até a quarta geração $n = 4$, o qual mostramos o *mesh* numérico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, possíveis efeitos viscosos foram desconsiderados, assumindo-se que a amostra é puramente elástica e o problema foi resolvido considerando o caso estacionário. Como se trata de um experimento de indentação, considerou-se a base da amostra fixa (sem movimento em x e y), e nas paredes laterais foram implementadas condições de contorno periódicas para

eliminar os efeitos de tamanho finito decorrentes das bordas laterais da amostra modelada.

5.2 Obtenção das curvas de forças

Testes de indentação têm como objetivo principal medir o módulo de Young da amostra por meio da análise das curvas de força obtidas, utilizando um modelo teórico apropriado. No caso de materiais viscoelásticos, a curva de força depende do tempo, devido à relaxação do material. Entretanto, quando o material é puramente elástico, o modelo de Hertz é amplamente utilizado. As curvas de força obtidas neste estudo foram tratadas utilizando o modelo de Hertz, conforme a seguinte expressão

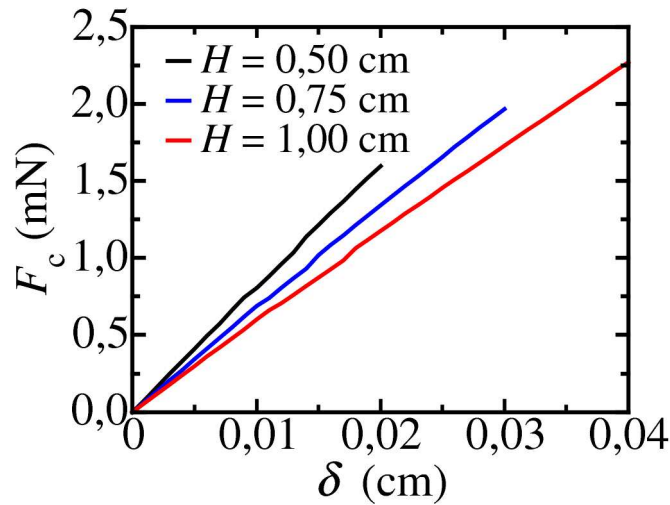
$$F(\delta) = E\Omega_\lambda \delta^\lambda, \quad (5.1)$$

onde Ω_λ e λ são parâmetros que dependem da geometria do indentador, E é o módulo de Young, e δ corresponde à profundidade de indentação. Para o indentador *flat*, temos $\lambda = 1$ e

$$\Omega = \frac{2r}{(1 - \nu^2)}. \quad (5.2)$$

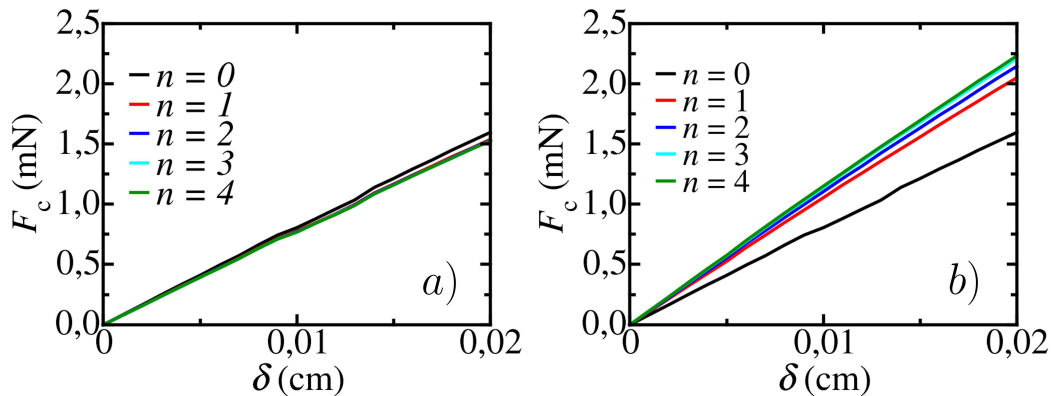
Inicialmente, o experimento computacional foi realizado considerando amostras com altura H variável. Para $n = 0$ (superfície sem fractal), os resultados numéricos, conforme ilustrado no gráfico da Figura 24, estão de acordo com a literatura, que sugere que quanto menor a espessura da amostra, maior será a rigidez medida. Isso pode ser justificado pelos efeitos de tamanho finito decorrentes da espessura da amostra. Em materiais finos, o módulo de Young pode ser superestimado, pois o indentador pode “sentir” o substrato rígido quando a amostra é indentada profundamente. Para minimizar este efeito e adequar o modelo numérico às principais premissas do modelo de Hertz, considerou-se uma indentação máxima de 4% da espessura da amostra.

Figura 24 – Curvas de força para amostra sem fractal para diferentes alturas H .



Fonte: Elaborada pelo autor.

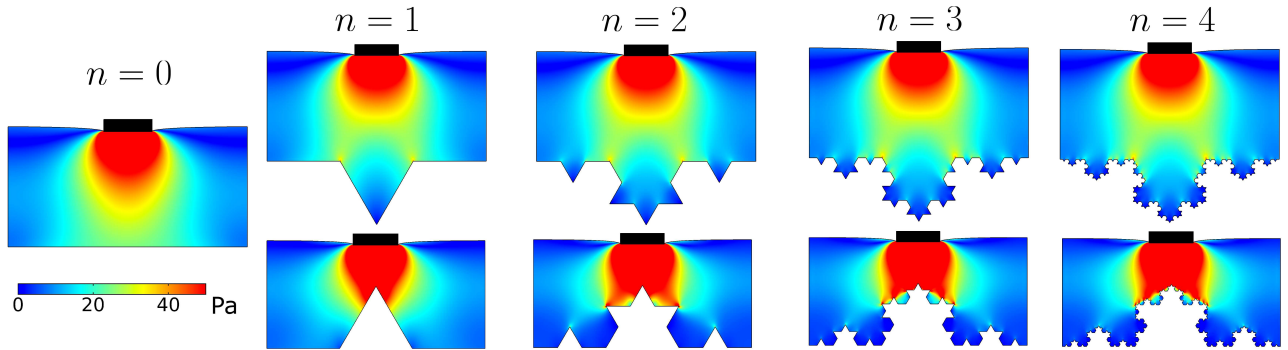
Figura 25 – Curvas de força para amostras que possuem o fractal **a)** *Down* e **b)** fractal *Up* quando altura $H = 0,5$ cm.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A presença de fractais influencia significativamente nas curvas de força, conforme mostrado nos gráficos da Figura 25. No caso *Down*, a geração de fractais leva a uma pequena diminuição na inclinação da curva. Em contrapartida, no caso *Up*, a geração de fractais tem um impacto mais expressivo. A amostra torna-se mais rígida à medida que o fractal é gerado, o que impacta diretamente na inclinação da curva. Quanto mais inclinada a curva, maior é a rigidez medida. Os campos de tensão estão ilustrados na Figura 26, onde se pode observar a distribuição do campo de tensão para cada geração n do fractal de Koch nos casos *Down* e *Up*.

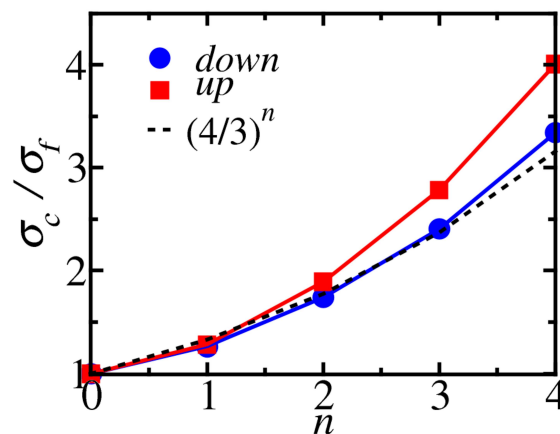
Figura 26 – Campos de tensão para os fractais *Down* e *Up*, para $H = 0,5$ cm até a quarta geração do fractal de Koch.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico, ilustrado pela Figura 27, mostra a razão entre a tensão na região de contato σ_c e a tensão na região do fractal de Koch σ_f em função da geração n para os casos *Down* e *Up* quando consideramos $H = 0,5$ cm fixa. Para amostras com superfícies uniforme, o valor esperado quando consideramos a razão σ_c/σ_f é igual a 1. Fisicamente, isto nos indica que a tensão da superfície superior será transmitida totalmente a superfície inferior. O que pode ser observado quando consideramos a amostra lisa sem o fractal.

Figura 27 – Razão entre σ_c e σ_f em função da geração fractal n .



Fonte: Elaborada pelo autor.

À medida que o fractal é gerado, espera-se que o aumento do perímetro $P(n)$ compense a disparidade das tensões entre as superfícies consideradas. Então $\sigma_f \propto 1/P(n)$, em que $P(n) = (4/3)^n L$ é o perímetro do fractal de Koch de tamanho inicial L para uma dada geração n . De forma analoga, temos que $\sigma_c \propto 1/S(\delta)$, em que $S(\delta)$ é o comprimento da superfície superior. Como estamos considerando regimes de pequenas indentações, podemos assumir que $S(\delta) \approx L$.

Tomando a razão entre σ_c e σ_f , temos que

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_f} \propto \frac{P(n)}{S(\delta)} \propto \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{L}{S(\delta)} \approx \left(\frac{4}{3}\right)^n. \quad (5.3)$$

Como a tensão não está uniformemente distribuída devido a existência de irregularidades geométricas ocasionadas pelo aumento da geração do fractal de Koch n , a razão σ_c/σ_f não segue a predição dada pela equação (5.3), de modo que quanto maior for n maior será essa disparidade, sendo mais perceptível para o caso do fractal *Up* o que nos leva a concluir que há acúmulo de tensão ocasionado pelas irregularidades de superfícies fractais.

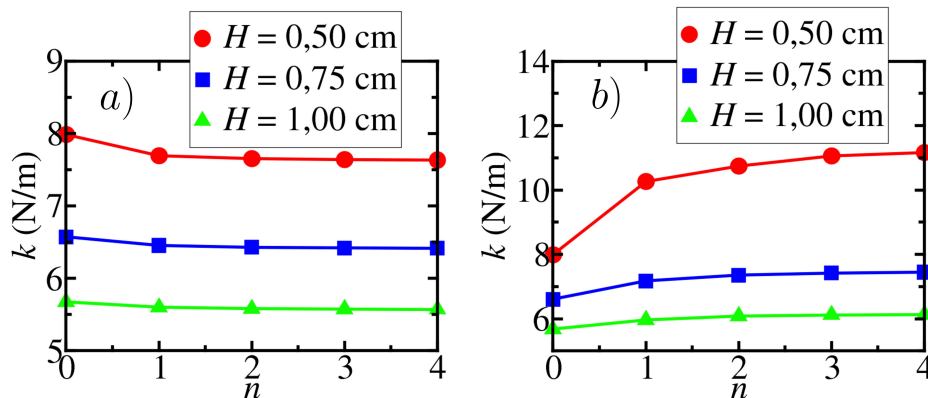
5.3 Variando a altura H

O primeiro resultado é derivado diretamente da análise das curvas de força obtidas no experimento computacional, onde foram comparados os valores de k para os fractais *Down* e *Up*. Por definição, temos

$$F = k \cdot x, \quad (5.4)$$

que é conhecida como a Lei de Hooke. Note que a força F e a deformação x são diretamente proporcionais, de modo que, ao realizar um ajuste linear sobre as curvas de força obtidas pelo experimento computacional, o coeficiente angular da reta corresponde à rigidez k da mola. Assim, os ajustes das curvas de força foram realizados e, a partir dos valores obtidos, um gráfico analítico foi construído.

Figura 28 – Rigidez k em função da geração fractal n para os casos **a)** *Down* e **b)** *Up*.

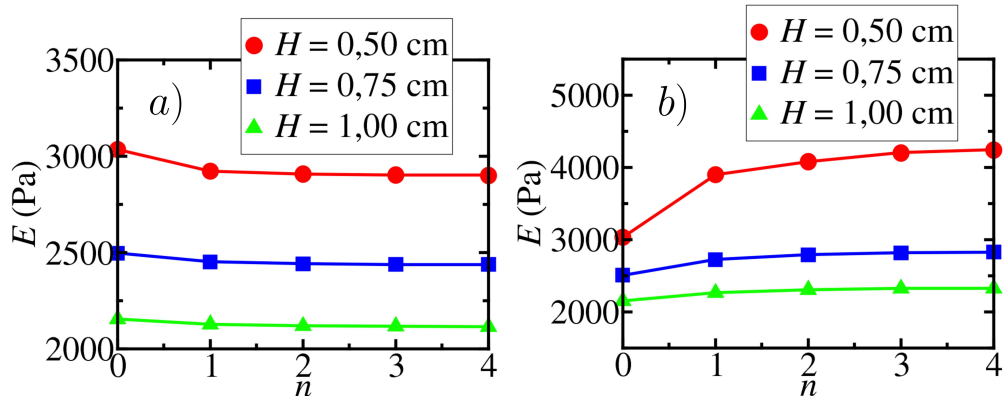


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados ilustrados na Figura 28 mostram que a rigidez medida a partir das curvas de força evolui de acordo com a geração fractal n . A manifestação do fractal é mais

significativa para amostras mais finas, enquanto essa influência diminui à medida que a altura H aumenta. Além disso, os valores de rigidez k tendem a se estabilizar à medida que a geração fractal aumenta, o que é válido tanto para o caso *Down* quanto para o caso *Up*.

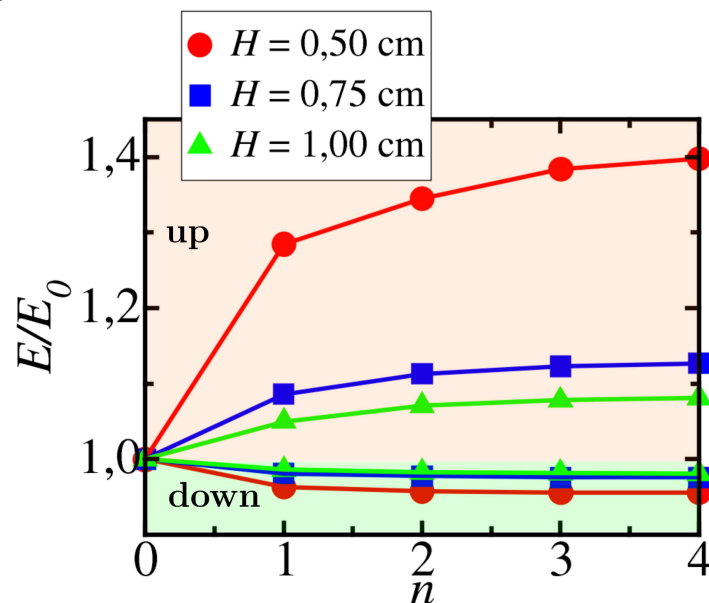
Figura 29 – Módulo de Young medido em função da geração fractal n para os casos a) *Down* e b) *Up*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a equação (5.1), o módulo de Young para a amostra foi calculado. As Figuras 29-a e 29-b ilustram a evolução deste parâmetro em função da geração fractal de Koch. Superfícies fractais podem ocasionar o aumento ou a diminuição do módulo de Young medido.

Figura 30 – Normalização do módulo de Young medido em função da geração fractal n para os casos *Down* e *Up*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

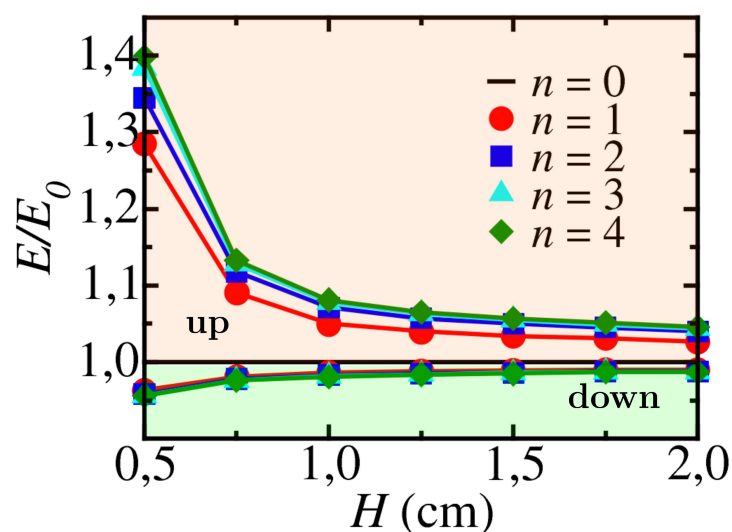
No caso *Down*, a elasticidade tende a diminuir à medida que a fractalidade da

amostra/superfície aumenta. A normalização, ilustrada pela Figura 30, permite observar a magnitude da queda ou do aumento, do módulo de Young medido, consideramos a razão deste com E_0 (sem o fractal). Quando o fractal possui orientação *Down*, há uma diminuição do E normalizado e nossos resultados numéricos mostram que é pequena, em torno de 4% quando consideramos $H = 0,5$ cm e 2% quando $H = 1$ cm.

Por outro lado, quando o fractal é gerado na configuração *Up* há aumento significativo da elasticidade. No gráfico ilustrado pela Figura (30), pode-se observar esta tendência de crescimento, sendo mais notável quando $H = 0,5$ cm. Nesta situação, nota-se que há o incremento de até 40%, dependendo da altura H da amostra e da geração fractal n considerada. Como no mundo real o parâmetro H não pode ser controlado, é necessário levar em consideração possíveis efeitos da rugosidade da superfície sobre as propriedades elásticas de materiais macios, cujo tamanho de escala seja pequeno.

O gráfico ilustrado pela Figura 31 mostra a módulo de Young e o percentual de influência do fractal, calculado a partir da normalização de E em termos de E_0 , ambos estão em função da altura H da amostra. Para os casos *Down* e *Up*, nossos resultados mostram que a medida que a altura da amostra H aumenta, a capacidade das superfícies fractais de influenciar na medida da propriedade elástica diminui drasticamente e convergem ao valor dado como *input* no modelo.

Figura 31 – Normalização do módulo de Young medido em função da altura H da amostra.

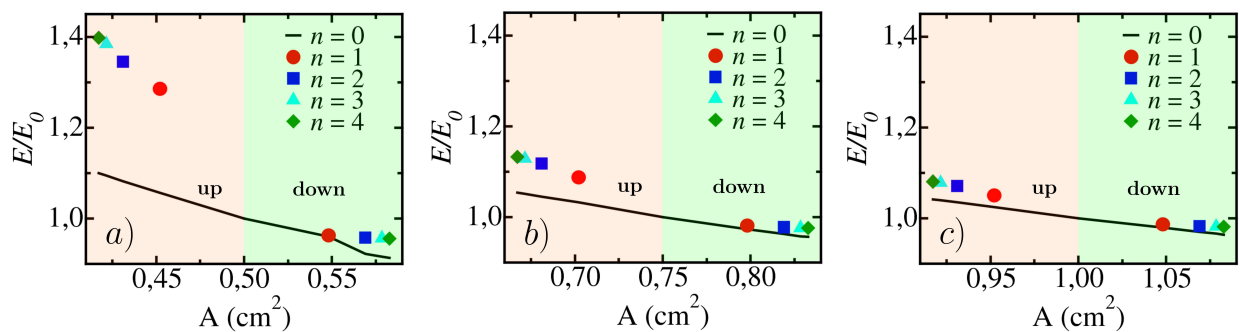


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3.1 Amostra lisa versus amostra com fractal

Nesta seção, apresentamos resultados referentes à comparação entre amostras com superfícies fractais e amostras lisas. Para isso, consideramos amostras lisas com altura H_l ajustável e uma base $L = 1$ cm fixa, de modo que sua área seja igual à área da amostra com fractal. As indentações realizadas nas amostras lisas e com fractais possuem o mesmo valor para a área correspondente A_0 . Consideramos A_0 como o valor da área padrão, de modo que, para tornar a área da amostra lisa igual à área da amostra com fractal, ajustamos H_l — aumentando-o para o fractal *Down* ou diminuindo-o para o fractal *Up*. Ou seja, a base L é fixa, e a amostra com fractal tem sua área alterada à medida que a geração n do fractal de Koch é gerada, enquanto na amostra puramente lisa, ajustamos a altura H_l variável para manter a área constante.

Figura 32 – Comparativo entre a normalização do módulo de Young para amostras lisas e amostras com superfícies fractais para **a)** $A_0 = 0,5$ cm², **b)** $A_0 = 0,75$ cm² e **c)** $A_0 = 1$ cm²



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os gráficos comparativos, ilustrados na Figura 32, mostram a normalização do módulo de Young medido em função da área da amostra. Esses gráficos permitem inferir que, embora as amostras tenham a mesma área, a presença de superfícies fractais pode incrementar o módulo de Young medido em até 30%. No entanto, há uma tendência de convergência dos valores de E conforme a área A_0 aumenta devido ao ajuste da altura, já que a largura L da amostra permaneceu fixa. Quando $A_0 = 0,5$ cm², observa-se uma discrepância significativa entre as normalizações, especialmente no caso do fractal *Up*. Entretanto, ao analisar o gráfico correspondente a $A_0 = 1$ cm², essa diferença diminui significativamente.

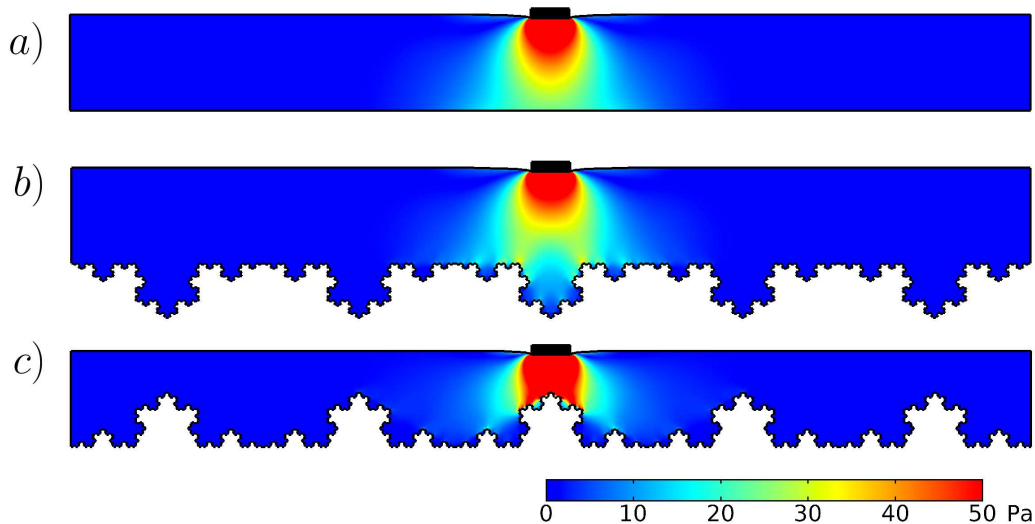
Este comportamento sugere que, embora a área seja um fator determinante nas propriedades mecânicas medidas, a presença de superfícies fractais afetam o módulo de Young medido de maneira não trivial, especialmente em amostras menores. A análise mostra que, à medida que a amostra aumenta, os efeitos das irregularidades de superfície induzidas pelos

fractais tendem a ser menos pronunciados, aproximando-se do comportamento de uma amostra lisa tradicional.

5.4 Variando o tamanho da base L

Nesta seção, apresentamos os resultados das simulações em que houve um aumento do comprimento da base L da amostra. Consideramos uma amostra elástica com altura H fixa de 0,5 cm, com a superfície inferior lisa e a geração $n = 4$ da curva de Koch sob as perspectivas *Up* e *Down*. Para eliminar os efeitos de borda, aplicamos condições de contorno periódicas nas laterais da amostra. A amostra foi indentada considerando 4% de sua altura H . As curvas de força obtidas foram analisadas utilizando o modelo de Hertz para o indentador cilíndrico, aplicando novamente as equações (5.1) e (5.4) para extrair os parâmetros elásticos da amostra. A Figura 33 ilustra o campo de stress para o comprimento $L = 5$ cm durante a indentação máxima, considerando a amostra lisa, com fractal *Down* e *Up*.

Figura 33 – Campos de tensão para a) amostra lisa e amostras com fractais b) *Down* e c) *Up* quando $L = 5$ cm e $H = 0,5$ cm.

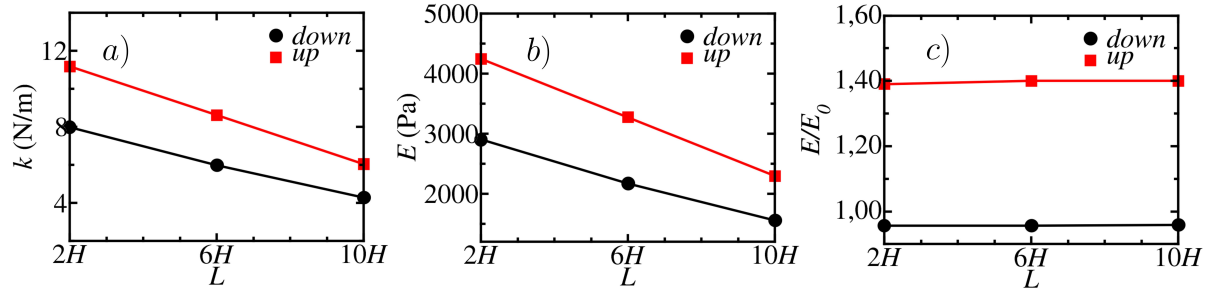


Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base nos resultados ilustrados pela Figura 34-a e 34-b, podemos afirmar que a rigidez k diminui com o aumento de L , independentemente da orientação do fractal. Além disso, o módulo de Young medido segue a mesma tendência, pois ambos os parâmetros são diretamente proporcionais. Por outro lado, o gráfico ilustrado pela Figura 34-c mostra que, embora haja um aumento em L , a normalização do módulo de Young medido é constante tanto no fractal

Down quanto no fractal *Up*. Isso indica que a fractalidade continua influenciando as medições de elasticidade, mesmo que a amostra cresça lateralmente.

Figura 34 – A figura ilustra os gráficos da **a)** Rigidez k , **b)** módulo elástico medido e **c)** a sua normalização em função do tamanho lateral L da amostra modelada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Os estudos realizados nesta tese focaram na resolução de problemas relacionados à Mecânica dos Sólidos, com o objetivo de investigar o comportamento reológico de materiais macios. Para isso, empregou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) na modelagem numérica do sistema, visando realizar experimentos de nanoindentação para verificar o efeito da geometria do indentador no processo de medida em amostras elásticas e viscoelásticas de tamanho finito, além de analisar a influência de superfícies rugosas no processo de medição da elasticidade do material modelado.

No primeiro estudo, foram realizados testes de nanoindentação utilizando três tipos de indentadores em amostras viscoelásticas, cujo comportamento reológico foi descrito pelo modelo do sólido linear padrão, e em amostras elásticas, descritas pela lei de Hooke. A indentação máxima foi aplicada nas amostras para obter as curvas de força durante o processo de relaxação, que posteriormente foram normalizadas considerando a geometria do indentador. Os resultados indicaram que a ponta cônica, quando comparada aos indentadores esférico e *flat*, proporciona resultados mais robustos no que se refere ao erro ocasionado a manifestação da condição de contorno atribuída na base da amostra tanto na verificação de efeitos de tamanho finito, ao variar a altura da amostra, quanto na análise da rigidez do substrato, seja ele rígido ou deformável.

No estudo sobre a rugosidade da superfície, foi considerada uma amostra deformada por um indentador *flat*. A amostra, elástica e incompressível, foi analisada em relação à sua altura H e comprimento de base L , com simulações realizadas alterando o valor de H . Os resultados mostraram que a rugosidade da superfície pode aumentar ou diminuir o módulo de Young obtido. Para esta conclusão, considerou-se o crescimento do fractal sob duas perspectivas diferentes, denominadas *Up* e *Down*. O fractal *Down* causou uma leve diminuição da elasticidade, enquanto o fractal *Up* apresentou uma diferença significativa na rigidez. Além disso, foi observado que, quanto maior a altura H , menor a influência dessas superfícies fractais. Em relação ao aumento lateral L da amostra, houve uma diminuição na rigidez medida e no módulo elástico, mas as superfícies fractais continuaram influenciando as medidas de elasticidade, conforme indicado nos gráficos de normalização do módulo de Young em função do tamanho lateral L .

De modo geral, o MEF mostrou-se uma ferramenta bastante útil para a implementação de modelos numéricos voltados à reologia de materiais macios. Nesta tese, foram abordados dois estudos distintos, ambos utilizando a mesma metodologia numérica. Destaca-se que os estudos foram puramente computacionais, considerando um modelo de simetria axial para o

estudo de nanoindentação, e um modelo bidimensional com uma superfície fractal determinística para o estudo de superfícies rugosas.

Há ainda muito a ser explorado utilizando simulações numéricas. No estudo das superfícies rugosas, por exemplo, abordou-se com um fractal determinístico conhecido como curva de Koch; no entanto, esse estudo pode ser expandido para considerar uma geometria tridimensional com uma superfície fractal auto-afim, como aquelas encontradas na natureza, no intuito de modelar superfícies rugosas aleatórias. Além disso, o MEF não se restringe apenas a experimentos de indentação. Para o futuro, propõe-se a investigação do comportamento da força de arrasto em estruturas sólidas deformáveis imersas em um fluido. Sabe-se que a força de arrasto é tradicionalmente do tipo $F \propto v^\alpha$, onde α é igual a 1 ou 2. No entanto, valores de $\alpha < 1$ têm sido observados em diversos estudos experimentais, relacionando essa condição à deformação na estrutura do sólido causada pelo escoamento. Assim, a Física desse problema pode ser explorada, contribuindo para a Ciência fundamental por meio de simulações numéricas.

REFERÊNCIAS

- AFFERRANTE, L.; VIOLANO, G.; CARBONE, G. Exploring the dynamics of viscoelastic adhesion in rough line contacts. **Scientific Reports**, London, v. 13, n. 1, p. 15060, 2023.
- ARGOLO, C.; BARROS, P.; TOMÉ, T.; ARASHIRO, E.; GLERIA, I.; LYRA, M. Threshold of coexistence and critical behavior of a predator-prey stochastic model in a fractal landscape. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, [s. l.], v. 2016, n. 8, p. 083204, 2016.
- ASSIS, T. A. d.; MIRANDA, J. G. V.; MOTA, F. d. B.; ANDRADE, R. F. S.; CASTILHO, C. M. C. d. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s. l.], v. 30, p. 2304–1, 2008.
- BABESHKO, V. A.; EVDOKIMOVA, O. V.; BABESHKO, O. M. On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. **Acta Mechanica**, [s. l.], v. 229, n. 11, p. 4727–4739, 2018.
- BAISH, J. W.; JAIN, R. K. Fractals and cancer. **Cancer research**, [s. l.], v. 60, n. 14, p. 3683–3688, 2000.
- BALAN, C.; RIEDEL, R. Rheological investigations of a polymeric precursor for ceramic materials: experiments and theoretical modeling. **Journal of Optoelectronics and Advanced Materials**, [s. l.], v. 8, n. 2, p. 561, 2006.
- BOGAHAWATHTHA, M.; MOHOTTI, D.; HAZELL, P. J.; WANG, H.; WIJESOORIYA, K.; LEE, C. K. Energy absorption and mechanical performance of 3d printed menger fractal structures. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 305, p. 117774, 2024.
- BOWER, A. F. **Applied mechanics of solids**. [S. l.]: CRC Press, 2010.
- CHUAH, H. G.; TAN, W. H.; CHANG, B. P.; KHOO, T. S.; KHOR, C. Y.; HOW, H. G. The influence of surface roughness on material dislocation of microindentation using bonded interface technique. **Tribology-Materials, Surfaces & Interfaces**, London, England, v. 13, n. 4, p. 191–196, 2019.
- COOK, R. D. **Finite element modeling for stress analysis**. 1st. ed. [S. l.]: Wiley, 1995.
- COOKE, B. M.; STUART, J.; NASH, G. B. The cellular and molecular rheology of malaria. **Biorheology**, [s. l.], v. 51, n. 2-3, p. 99–119, 2014.
- COSTA, E. F. **Estudo das propriedades mecânicas de ligantes asfálticos por Microscopia de Força Atômica**. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- DEUFLHARD, P.; HERMANS, J.; LEIMKUHNER, B.; MARK, A. E.; REICH, S.; SKEEL, R. D. **Computational molecular dynamics: challenges, methods, ideas** Proc. Berlin 1997. 1. ed. [S. l.]: Springer, 1998.
- DISCHER, D. E.; JANMEY, P.; WANG, Y.-I. Tissue cells feel and respond to the stiffness of their substrate. **Science**, [s. l.], v. 310, n. 5751, p. 1139–1143, 2005.

DOI, M. **Soft matter physics**. [S. l.]: Oxford University Press, 2013.

DOKUKIN, M. E.; GUZ, N. V.; GAIKWAD, R. M.; WOODWORTH, C. D.; SOKOLOV, I. Cell surface as a fractal: Normal and cancerous cervical cells demonstrate different fractal behavior of surface adhesion maps at the nanoscale. **Physical review letters**, [s. l.], v. 107, n. 2, p. 028101, 2011.

ENTEZARI, A.; SWAIN, M. V.; GOODING, J. J.; ROOHANI, I.; LI, Q. A modular design strategy to integrate mechanotransduction concepts in scaffold-based bone tissue engineering. **Acta Biomaterialia**, [s. l.], v. 118, p. 100–112, 2020.

FISSEHA, D.; KATIYAR, V. Analysis of mechanical behavior of red cell membrane in sickle cell disease. **Appl. Mathematics**, [s. l.], v. 2, n. 2, p. 40–46, 2012.

FUNG, Y. C. **A First Course in Continuum Mechanics**: for physical and biological engineers and scientists. [S. l.]: Prentice Hall, 1994.

GAVARA, N. A beginner's guide to atomic force microscopy probing for cell mechanics. **Microscopy research and technique**, [s. l.], v. 80, n. 1, p. 75–84, 2017.

GLERIA, I.; MATSUSHITA, R.; SILVA, S. D. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s. l.], v. 26, p. 99–108, 2004.

GONZALEZ, O.; STUART, A. M. **A First Course in Continuum Mechanics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2008.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. [S. l.]: Academic press, 2014.

GUILAK, F.; TEDROW, J. R.; BURGKART, R. Viscoelastic properties of the cell nucleus. **Biochemical and biophysical research communications**, [s. l.], v. 269, n. 3, p. 781–786, 2000.

GUSMÃO, C. V. B. d.; BELANGERO, W. D. Como a célula óssea reconhece o estímulo mecânico? **Revista Brasileira de Ortopedia**, [s. l.], v. 44, p. 299–305, 2009.

HOATH, S.; HUTCHINGS, I.; MARTIN, G.; TULADHAR, T.; MACKLEY, M.; VADILLO, D. Links between ink rheology, drop-on-demand jet formation, and printability. **J. Imaging Sci. Technol**, [s. l.], v. 53, n. 4, p. 041208, 2009.

HUANG, H.; KAMM, R. D.; LEE, R. T. Cell mechanics and mechanotransduction: pathways, probes, and physiology. **American Journal of Physiology-Cell Physiology**, [s. l.], v. 287, n. 1, p. C1–C11, 2004.

HUSSEIN, M. N.; ALFATLAWI, T. J. M.; KADHIM, M. J. Xfem analysis of concrete arch dam to assess deformations and propagation of artificial crack due to the combination of earthquake and uplift pressure. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics**: conference series. [S. l.], 2021. v. 1773, n. 1, p. 012031.

JABBARZADEH, A.; TANNER, R. I. Molecular dynamics simulation and its application to nano-rheology. **Rheology reviews**, [s. l.], v. 2006, p. 165, 2006.

KONING, V.; VITELLI, V. **Fluids, colloids and soft materials: an introduction to soft matter physics**. Wiley, 2016.

- KUNZ, K. S.; LUEBBERS, R. J. **The finite difference time domain method for electromagnetism**. 1. ed. [S. l.]: CRC-Press, 1993.
- LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4. ed. [S. l.]: Elsevier, 2009.
- LEKKA, M. Discrimination between normal and cancerous cells using afm. **Bionanoscience**, [s. l.], v. 6, n. 1, p. 65–80, 2016.
- LIFSHIN, E. **X-ray Characterization of Materials**. [S. l.]: Wiley-VCH, 1999.
- LIN, C.-Y. Alternative form of standard linear solid model for characterizing stress relaxation and creep: including a novel parameter for quantifying the ratio of fluids to solids of a viscoelastic solid. **Frontiers in Materials**, [s. l.], v. 7, p. 11, 2020.
- MAI-DUY, N.; PHAN-THIEN, N. **Understanding viscoelasticity: an introduction to rheology**. Third edition. [S. l.]: Springer, 2017. (Graduate texts in physics).
- MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. **Computational Viscoelasticity**. 1. ed. [S. l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- MAZO-BARBARA, L. del; GINEBRA, M.-P. Rheological characterisation of ceramic inks for 3d direct ink writing: A review. **Journal of the European Ceramic Society**, [s. l.], v. 41, n. 16, p. 18–33, 2021.
- MCMILLAN, A.; JONES, R.; PENG, D.; CHECHKIN, G. A. A computational study of the influence of surface roughness on material strength. **Meccanica**, [s. l.], v. 53, p. 2411–2436, 2018.
- MOFRAD, M. R.; KAMM, R. D. **Cytoskeletal mechanics: models and measurements in cell mechanics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2006.
- MOHAMMADI, P.; SHARMA, P. Atomistic elucidation of the effect of surface roughness on curvature-dependent surface energy, surface stress, and elasticity. **Applied physics letters**, [s. l.], v. 100, n. 13, 2012.
- PANDOLFI, A.; MANGANIELLO, F. A model for the human cornea: constitutive formulation and numerical analysis. **Biomechanics and modeling in mechanobiology**, [s. l.], v. 5, n. 4, p. 237–246, 2006.
- PATEL, H.; BONDE, M.; SRINIVASAN, G. *et al.* Biodegradable polymer scaffold for tissue engineering. **Trends Biomater Artif Organs**, [s. l.], v. 25, n. 1, p. 20–9, 2011.
- PAVÓN-DOMÍNGUEZ, P.; PORTILLO-GARCÍA, G.; RINCÓN-CASADO, A.; RODRÍGUEZ-PARADA, L. Influence of the fractal geometry on the mechanical resistance of cantilever beams designed through topology optimization. **Applied Sciences**, [s. l.], v. 11, n. 22, p. 10554, 2021.
- PÉREZ-DOMÍNGUEZ, S.; KULKARNI, S. G.; RIANNA, C.; RADMACHER, M. Atomic force microscopy for cell mechanics and diseases. **Neuroforum**, [s. l.], v. 26, n. 2, p. 101–109, 2020.
- PIOLETTI, D. P. Biomechanics in bone tissue engineering. **Computer methods in biomechanics and biomedical engineering**, [s. l.], v. 13, n. 6, p. 837–846, 2010.

- RAIKHER, Y. L.; RUSAKOV, V. V.; PERZYNSKI, R. Brownian motion in a viscoelastic medium modelled by a jeffreys fluid. **Soft Matter**, [s. l.], v. 9, n. 45, p. 10857–10865, 2013.
- REBELO, L. M.; SOUSA, J. S. de; FILHO, J. M.; RADMACHER, M. Comparison of the viscoelastic properties of cells from different kidney cancer phenotypes measured with atomic force microscopy. **Nanotechnology**, [s. l.], v. 24, n. 5, p. 055102, 2013.
- ROUX, S. Continuum and discrete description of elasticity and other rheological behaviour. In: **Statistical models for the fracture of disordered media**. [S. l.]: Elsevier, 1990. p. 87–114.
- ROY, A.; VEMAGANTI, K. Fractal surface-based three-dimensional modeling to study the role of morphology and physiology in human skin friction. **Surface Topography: metrology and properties**, [s. l.], v. 12, n. 1, p. 015006, 2024.
- SANTOS, J. A. C. **Nanoindentação de Materiais Elásticos Lineares com Espessura Finita**. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.
- SEDIVY, R.; MADER, R. M. Fractals, chaos, and cancer: do they coincide? **Cancer investigation**, [s. l.], v. 15, n. 6, p. 601–607, 1997.
- SHIBESHI, S. S.; COLLINS, W. E. The rheology of blood flow in a branched arterial system. **Applied Rheology**, [s. l.], v. 15, n. 6, p. 398–405, 2005.
- SIMOES, F. M. F. **Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos**. [S. l.]: IST Press, 2017.
- SOKOLOV, I. **Fractals**: a possible new path to diagnose and cure cancer? [S. l.]: Taylor & Francis, 2015. p. 3049–3051.
- SOUSA, J. S.; FREIRE, R.; SOUSA, F.; RADMACHER, M.; SILVA, A.; RAMOS, M.; MONTEIRO-MOREIRA, A.; MESQUITA, F.; MORAES, M.; MONTENEGRO, R. *et al.* Double power-law viscoelastic relaxation of living cells encodes motility trends. **Scientific reports**, [s. l.], v. 10, n. 1, p. 1–10, 2020.
- SOUSA, J. S.; SANTOS, J.; BARROS, E.; ALENCAR, L.; CRUZ, W.; RAMOS, M.; FILHO, J. M. Analytical model of atomic-force-microscopy force curves in viscoelastic materials exhibiting power law relaxation. **Journal of Applied Physics**, [s. l.], v. 121, n. 3, p. 034901, 2017.
- SPIECKER, P. M.; KILPATRICK, P. K. Interfacial rheology of petroleum asphaltenes at the oil-water interface. **Langmuir**, [s. l.], v. 20, n. 10, p. 4022–4032, 2004.
- SUZUKI, M. Phase transition and fractals. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 69, n. 1, p. 65–76, 1983.
- TEIXEIRA-DIAS, F.; SOUSA, R. J. de Alves de; VALENTE, R. F.; CRUZ, J. P. da. **Método dos Elementos Finitos**. 1st. ed. [S. l.]: ETEP - Edições Técnicas e Profissionais, 2010.
- TIWARI, A.; ALMQVIST, A.; PERSSON, B. Plastic deformation of rough metallic surfaces. **Tribology Letters**, [s. l.], v. 68, n. 4, p. 129, 2020.
- TIWARI, A.; PERSSON, B. Cylinder-flat contact mechanics with surface roughness. **Tribology Letters**, [s. l.], v. 69, n. 1, p. 4, 2021.

UNAL, M.; ALAPAN, Y.; JIA, H.; VARGA, A. G.; ANGELINO, K.; ASLAN, M.; SAYIN, I.; HAN, C.; JIANG, Y.; ZHANG, Z. *et al.* Micro and nano-scale technologies for cell mechanics. **Nanobiomedicine**, [s. l.], v. 1, n. Godište 2014, p. 1–5, 2014.

VERSTEEG, H.; MALALASEKRA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the finite volume method approach**. [S. l.]: Prentice Hall, 1996.

WANG, J.; ZHANG, Y.; HE, N.; WANG, C. H. Crashworthiness behavior of koch fractal structures. **Materials & Design**, [s. l.], v. 144, p. 229–244, 2018.

XIAO, Y.; WU, L.; LUO, J.; ZHOU, L. Mechanical response of thin hard coatings under indentation considering rough surface and residual stress. **Diamond and Related Materials**, [s. l.], v. 108, p. 107991, 2020.

YANG, H.-B.; DAI, M. Influence of surface roughness on the stress field around a nanosized hole with surface elasticity. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, [s. l.], v. 69, p. 1–9, 2018.

ZHANG, J.; MIN, B.-W.; GU, H.; WU, G.; WU, W. Rheological behavior of SiO_2 ceramic slurry in stereolithography and its prediction model based on Poa-delM. **Materials**, [s. l.], v. 17, n. 17, p. 4270, 2024.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. 5th ed. [S. l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. v. 1.

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NA ABORDAGEM LAGRANGEANA

Temos que

$$P = J\sigma F^{-T}.$$

Desse modo

$$\sigma = J^{-1}PF^T$$

ou em termos das componentes

$$\sigma_{ij} = J^{-1}P_{im}F_{jm}. \quad (\text{A.1})$$

Derivando a equação (A.1) em termos de x_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1}P_{im}F_{jm}] \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= J^{-1}F_{jm} \frac{\partial P_{im}}{\partial x_j} + P_{im} \frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1}F_{jm}], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

em que fizemos uso da regra da cadeia. Iremos trabalhar com o último termo da equação, realizando a regra da cadeia temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1}F_{jm}] = \frac{1}{J} \frac{\partial F_{jm}}{\partial x_j} - \frac{F_{jm}}{J^2} \frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad (\text{A.3})$$

reescrevendo a equação (A.3), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1} F_{jm}] &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_m} \right) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_m} \right) \frac{\partial J}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \\
\frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1} F_{jm}] &= \frac{1}{J} \frac{\partial^2 x_j}{\partial X_k \partial X_m} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{1}{J^2} \delta_{km} \frac{\partial J}{\partial X_k} \\
\frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1} F_{jm}] &= \frac{1}{J} \frac{\partial^2 x_j}{\partial X_k \partial X_m} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial X_m}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Por definição, temos a seguinte identidade (LAI *et al.*, 2009)

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \det A = \det A (A^{-1})_{kj} \frac{\partial A_{jk}}{\partial X_m}, \tag{A.5}$$

considerando $A = F$ e $\det F = J$, aplicando na relação acima e substituindo no último termo da equação (A.4), temos que o primeiro e segundo termo irão se cancelar de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1} F_{jm}] = 0,$$

e a equação (A.2) seja resumida em

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = J^{-1} F_{jm} \frac{\partial P_{im}}{\partial x_j}. \tag{A.6}$$

Manipulando esta equação, temos

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = J^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} \frac{\partial P_{im}}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = J^{-1} \frac{\partial P_{im}}{\partial X_k} \delta_{km}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = J^{-1} \frac{\partial P_{im}}{\partial X_m},$$

tomando $m \equiv j$, temos

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = J^{-1} \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j}. \tag{A.7}$$

Vamos utilizar a equação (A.7) na EDP da elastodinâmica, na abordagem euleriana, que definimos como

$$\rho a_j = p_j + \nabla \cdot \sigma_{ij},$$

logo substituindo o termo do divergente do tensor de Cauchy pela equação (A.7) e considerando que $p_j = \rho b_j$ iremos obter

$$J\rho a_j = J\rho b_j + \nabla P_{ij}. \quad (\text{A.8})$$

O parâmetro J é o determinante da matriz gradiente de deformação F e que também está relacionado com a razão infinitesimal entre o volume final e inicial, logo

$$J = \det F = \frac{dV}{dV_0},$$

considerando que a massa seja conservada, temos que

$$\rho dV = \rho_0 dV_0,$$

ou seja,

$$\rho_0 = J\rho.$$

Substituindo na equação (A.8)

$$\rho_0 a_j = \rho_0 b_j + \nabla P_{ij},$$

reescrevendo-a, temos

$$\rho_0 a_j = \bar{p}_j + \nabla P_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

em que ρ_0 corresponde a densidade na configuração de referência.

APÊNDICE B – A CURVA DE KOCH

Dado o segmento de reta l , cuja Figura 35 faz referência a geração $n = 0$, divide-se em 3 partes iguais, retira-se o segmento central e no local em que houve a remoção, acrescenta-se um triângulo equilátero. Este processo descrito consiste na primeira geração $n = 1$ do fractal de Koch. Se este processo for repetido, dessa vez os segmentos de reta resultante da iteração anterior serão novamente divididos em 3 partes iguais e no local em que houve a remoção do segmento central acrescentamos novamente um triângulo equilátero, dando origem a segunda geração $n = 2$ do fractal de Koch. Este processo poderá se repetido inúmeras vezes até a geração n desejada.

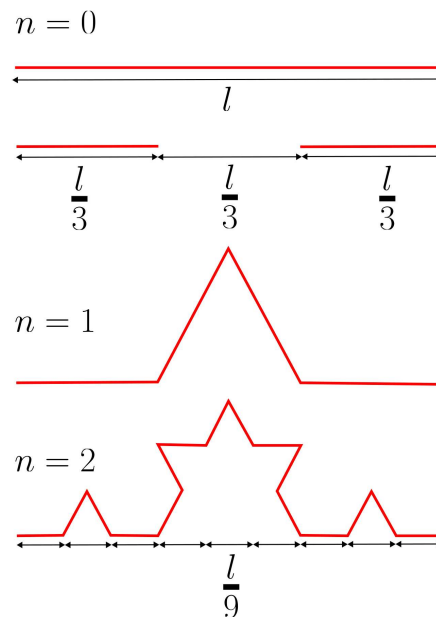


Figura 35 – Esquema ilustrativo da geração do fractal de Koch.

Cada segmento de reta que compõe o fractal terá como comprimento

$$L' = \frac{l}{3^n}, \quad (\text{B.1})$$

em que n corresponde a geração considerada. Quando não temos fractal, $L' = l$ o que corresponde ao tamanho original da reta. Entretanto quando a geração fractal aumenta, o número de segmentos N de reta cresce também. Logo, o número N de segmentos de reta que compõe o fractal de Koch para uma dada geração n é dado por

$$N = 4^n. \quad (\text{B.2})$$

Por definição, temos que perímetro é a soma de todos os lados de uma figura geométrica. Um quadrado de lado b , por exemplo, possui como perímetro $P_q = 4b$. Para calcular o perímetro do fractal de Koch, temos que considerar a quantidade de segmentos N de reta com seus respectivos comprimentos L' . Logo, o perímetro do Koch para uma dada geração n é dado por

$$\begin{aligned} P_k &= L'N \\ P_k &= \left(\frac{4}{3}\right)^n l, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

considerando $l = 1$, temos

$$P_k = \left(\frac{4}{3}\right)^n. \quad (\text{B.4})$$

Uma das particularidades deste fractal é quando considera-se o número de interações $n \rightarrow \infty$. Neste caso, pode-se observar que o comprimento P_k do fractal de Koch tenderá ao infinito também. Consequentemente, podemos afirmar que $P_k(n) > P_k(n = 0)$ e para cada interação n , essa diferença torna-se cada vez mais significativa.

Relação de recorrência para o cálculo de área do fractal de Koch

A área total A_t do fractal de Koch na primeira geração $n = 1$ corresponde a área de um triângulo equilátero de lado $l/3$, ou seja

$$A_t = \frac{l^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4}. \quad (\text{B.5})$$

Para $n = 2$, temos o surgimento de 4 triângulos equiláteros de lado $l/9$, logo

$$A_t = \frac{l^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4} + 4 \frac{l^2 \sqrt{3}}{81 \cdot 4}, \quad (\text{B.6})$$

Para $n = 3$, temos o surgimento de 16 triângulos equiláteros de lado $l/27$, então

$$A_t = \frac{l^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4} + 4 \frac{l^2 \sqrt{3}}{81 \cdot 4} + 16 \frac{l^2 \sqrt{3}}{729 \cdot 4}, \quad (\text{B.7})$$

Logo podemos construir uma relação de recorrência que permite calcular a área do fractal em uma dada geração n . Generalizando

$$A_t(n) = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \sum_{i=1}^n \frac{4^{i-1}}{9^i}. \quad (\text{B.8})$$

Com auxílio da expressão (B.8), calculamos a área da amostra analiticamente e comparamos com o cálculo de área realizado com recurso computacional. Os resultados obtidos constam nas Tabelas 4, 5 e 6.

Tabela 4 – Comparativo entre as áreas quando $H = 0,5$ cm.

Geração	<i>Down</i> - Analítica	<i>Down</i> - Numérica	<i>Up</i> - Analítica	<i>Up</i> - Numérica
$n = 0$	0,5 cm ²	0,5 cm ²	0,5 cm ²	0,5 cm ²
$n = 1$	0,548 cm ²	0,54811 cm ²	0,452 cm ²	0,45189 cm ²
$n = 2$	0,569 cm ²	0,56950 cm ²	0,431 cm ²	0,43050 cm ²
$n = 3$	0,5785 cm ²	0,57900 cm ²	0,4215 cm ²	0,42100 cm ²
$n = 4$	0,58272 cm ²	0,58322 cm ²	0,41728 cm ²	0,41678 cm ²

Tabela 5 – Comparativo entre as áreas quando $H = 0,75$ cm.

Geração	<i>Down</i> - Analítica	<i>Down</i> - Numérica	<i>Up</i> - Analítica	<i>Up</i> - Numérica
$n = 0$	0,75 cm ²	0,75 cm ²	0,75 cm ²	0,75 cm ²
$n = 1$	0,798 cm ²	0,79811 cm ²	0,702 cm ²	0,70189 cm ²
$n = 2$	0,819 cm ²	0,81950 cm ²	0,681 cm ²	0,68050 cm ²
$n = 3$	0,8285 cm ²	0,82900 cm ²	0,6715 cm ²	0,67100 cm ²
$n = 4$	0,83272 cm ²	0,83322 cm ²	0,66728 cm ²	0,66678 cm ²

Tabela 6 – Comparativo entre as áreas quando $H = 1$ cm.

Geração	<i>Down</i> - Analítica	<i>Down</i> - Numérica	<i>Up</i> - Analítica	<i>Up</i> - Numérica
$n = 0$	1 cm ²	1 cm ²	1 cm ²	1 cm ²
$n = 1$	1,048 cm ²	1,0481 cm ²	0,952 cm ²	0,95189 cm ²
$n = 2$	1,069 cm ²	1,0695 cm ²	0,931 cm ²	0,93050 cm ²
$n = 3$	1,0785 cm ²	1,0790 cm ²	0,9215 cm ²	0,92100 cm ²
$n = 4$	1,08272 cm ²	1,0832 cm ²	0,91728 cm ²	0,91678 cm ²

APÊNDICE C – ARTIGOS ELABORADOS

Nanoindentation in finite thickness viscoelastic materials

Cite as: J. Appl. Phys. 132, 214701 (2022); doi: 10.1063/5.0127403

Submitted: 21 September 2022 · Accepted: 11 November 2022 ·

Published Online: 6 December 2022



View Online



Export Citation



CrossMark

D. F. S. Costa,¹ J. L. B. de Araújo,² C. L. N. Oliveira,¹ and J. S. de Sousa^{1,a)}

AFFILIATIONS

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60455-970 Fortaleza, Ceará, Brazil

²Laboratório de Ciência de Dados e Inteligência Artificial, Universidade de Fortaleza, 60811-905 Fortaleza, Ceará, Brazil

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed: jeanlex@fisica.ufc.br

ABSTRACT

In this work, we present an analytical model to describe atomic force microscopy force curves of standard linear solid and power-law viscoelastic materials by taking indenter geometry and finite thickness effects into account. We show that conical/pyramidal cantilevers are less susceptible to finite thickness effects than other shapes, such as spherical and flat punch indenters. This is confirmed by finite element modeling of the stress field distribution within the sample. We also perform a systematic error analysis for the cases where finite thickness samples are analyzed with an infinite thickness force model. In particular, we show that for spherical indenters and indentation depth up to 20% of sample thickness, the mechanical response of viscoelastic materials will wrongly mimic a purely elastic behavior even within time-scales where viscoelastic relaxation should appear.

Published under an exclusive license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0127403>

I. INTRODUCTION

When a rigid punch deforms materials, the respective stress distribution within the sample and the response force depend on the shape of the contact area as well as on the intrinsic mechanical properties of the material. The two-body indentation Sneddon's model describes, in a simple way, the behavior of the contact force for geometries as those shown in Fig. 1. This time-independent constitutive equation is, perhaps, the most used model to extract Young's modulus from solids in indentation assays.¹ In viscoelastic materials, however, time-dependent relations regulate how the internal stresses relax to a mechanical equilibrium state as soon as external loads are applied. Sneddon's theory fails to explain this behavior, and, thus, more complex rheological models are needed.

Atomic Force Microscopy (AFM) has been used to perform indentation assays to measure the elastic moduli in hard materials for almost 40 years. In the last decade, however, AFM has been booming as the microrheology technique for complex biological and synthetic materials.²⁻⁴ Biological samples usually present complex viscoelastic properties whose rheological behaviors are often probed in small volumes, where finite-size effects play a strong role. To cope with this increasing challenge, novel theoretical approaches have been developed to explain such sophisticated behaviors. It is paramount that theoretical models account for

proper viscoelastic responses and geometric constraints subjected to the sample.

Most works with AFM measurements of thin and soft samples interpret their results qualitatively, with Sneddon's model disregarding finite thickness effects and viscoelastic relaxation even when the samples clearly present time-dependent behaviors.⁵ Living cells, for instance, are well accepted to hold power-law (PL) viscoelastic relaxation with exponents ranging from 0.1 to 0.4 but have been treated with purely elastic models.⁶ Only recently, theoretical frameworks have evolved to provide suitable viscoelastic models to extract elastic and viscous data from measured force curves.⁷⁻⁹ However, the role of finite-size effects and different indenter geometries in the characterization of viscoelastic materials is still unclear.

Here, we systematically study the role of finite thickness effects in determining the viscoelastic properties of standard linear solid (SLS) and power-law viscoelastic materials in AFM-based nanoindentation experiments. This paper is organized as follows. Section II presents analytical indentation models of AFM force curves in viscoelastic materials with infinite and finite thicknesses deformed by standard axisymmetric indenter geometries, namely, flat, spherical, and conical shapes, shown in Fig. 1. We also present a computational model based on finite element modeling to perform computational indentation experiments and test the

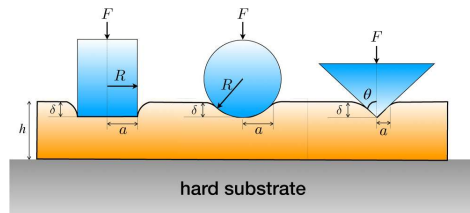


FIG. 1. Schematics of a finite thickness sample being probed with different indenter geometries.

analytical models. In Sec. III, we perform a systematic error analysis during the extraction of viscoelastic parameters from finite thickness samples using infinite thickness models. Section IV finishes the paper with conclusions.

II. ANALYTICAL MODEL

A. Elastic materials

When stiff indenters deform purely elastic materials with simple axisymmetric geometries (see Fig. 1), the contact force is given by Sneddon's model,

$$F_{\infty}(\delta) = E\Omega_{\lambda}\delta^2, \quad (1)$$

where δ is the indentation depth, E is Young's modulus of the sample, and λ and Ω_{λ} are geometry-dependent parameters, as shown in Table I. The index ∞ stands for samples with infinite thickness. For flat cylinders, the contact force increases linearly with indentation, while for cones, the force increases quadratically. Elastic materials instantaneously deform when subjected to external forces and recover their original shape when the forces are removed because there is no time lag between force application and sample deformation. The delayed response between force and deformation is a characteristic of viscoelastic materials.

B. Infinite thickness viscoelastic materials

Unlike elastic solids, viscoelastic materials undergo a time-dependent relaxation when deformed due to friction at the

molecular scale. The resulting force-indentation relationship in the time domain depends on the intrinsic properties of the sample, indenter geometry, and the indentation depth history $\delta(t)$. For infinite thickness samples, the contact force is given by⁷

$$F_{\infty}(t) = \Omega_{\lambda} \int_0^t E(t-t') \frac{d\delta^2(t')}{dt'} dt', \quad (2)$$

where $E(t)$ is the time-dependent relaxation function of the material. To solve this equation analytically, we adopt a proper relaxation function $E(t)$ as well as an indentation history that mimics indentation assays. In this regard, dwell force curves (DFCs) are versatile force measurements that allow studying the viscoelastic relaxation of soft materials in a relatively large time window (10^{-4} s– 10^1 s).⁹ A two-stage curve describes DFCs as

$$\delta(t) = \begin{cases} (\delta_0/\tau_l)t, & 0 \leq t \leq \tau_l, \\ \delta_0, & t > \tau_l, \end{cases} \quad (3)$$

where in the first stage (load), the samples are subjected to linear indentation history up to a maximum indentation δ_0 in a time interval τ_l . The indentation speed is given by δ_0/τ_l . After that, the indentation remains constant in the second stage (dwell).

We assume that the viscoelastic sample exhibits a power-law (PL) relaxation function of the form

$$E(t) = E(\tau_l) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^{-\beta}, \quad (4)$$

where $E(\tau_l)$ is the value of the elasticity modulus at $t = \tau_l$. The force curve is then given by

$$F(t) = \begin{cases} F_{\infty}(t), & 0 \leq t \leq \tau_l, \\ F_{\infty}(t)I(\tau_l/t, \lambda, 1-\beta), & t > \tau_l, \end{cases} \quad (5)$$

where

$$F_{\infty}(t) = \lambda\Omega_{\lambda}\delta_0^2 E(\tau_l) B(\lambda, 1-\beta) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^{\lambda-\beta}. \quad (6)$$

$B(x; n, m)$ is the incomplete Beta function that obeys $B(n, m) = B(1; n, m) = \Gamma(n)\Gamma(m)/\Gamma(n+m)$, $\Gamma(x)$ is the Gamma function, and $I(x; n, m) = B(x; n, m)/B(n, m)$ is the incomplete regularized Beta function. The validity of such an approach has been extensively demonstrated and used in several works.^{7-9,12} This approach assumes that the sample is infinitely thick, which is not

TABLE I. Dependence of the parameters λ and Ω_{λ} on the indenter geometry. r is the indenter radius of cylindrical and spherical indenters, θ is the half-opening angle of conical indenters, ν is the Poisson ratio, δ is the indentation depth, and c_{λ} is the indentation-dependent contact radius. Four-sided pyramidal tips exhibit the same exponent of the series expansion of the force model in powers of $(c_{\lambda}/h)^{\lambda}$, as shown in Eq. (8), for finite thickness, incompressible ($\nu = 0.5$) and purely elastic materials up to fourth order.¹¹ Those parameters are independent of the indenter geometry and dimensions.

Geometry	λ	Ω_{λ}	γ_{λ}	p_{λ}	$c_{\lambda} = p_{\lambda}\delta^{\gamma_{\lambda}}$	$\alpha_{\lambda,1}^{(el)}$	$\alpha_{\lambda,2}^{(el)}$	$\alpha_{\lambda,3}^{(el)}$	$\alpha_{\lambda,4}^{(el)}$
Flat cylinder	1	$\frac{2r}{(1-\nu^2)}$	0	r	r	1.133	1.283	0.598	-0.291
Spherical	3/2	$\frac{4}{3} \frac{\sqrt{r}}{(1-\nu^2)}$	1/2	\sqrt{r}	$\sqrt{r\delta}$	1.133	1.497	1.469	0.755
Conical	2	$\frac{2}{\pi} \frac{\tan\theta}{(1-\nu^2)}$	1	$\tan\theta$	$\tan\theta\delta$	0.721	0.650	0.491	0.255

the case in many practical applications. One should note that in the limit of $\beta = 0$, $E(t)$ becomes constant, thereby representing a purely elastic material, and Eq. (6) becomes identical to Sneddon's model in Eq. (1).

C. Finite thickness viscoelastic materials

Finite-size effects significantly impact the response force in a sample of thickness h , due to the effects of a rigid substrate. In such cases, Eq. (2) is written as²

$$F(t) = \Omega_\lambda \sum_{i=0}^N a_i \int_0^t E(t-t') \frac{d\delta^{b_i}(t')}{dt'} dt', \quad (7)$$

where N is the number of high-order terms in the summation, and a_i and b_i are geometry-dependent parameters. This equation can be solved to

$$F(t) = F_\infty(t) \left[1 + \sum_{n=1}^N \alpha_{\lambda,n}^{(v)} \left(\frac{c_\lambda}{h} \right)^n \right], \quad (8)$$

where $F_\infty(t)$ is given by Eq. (6) and the term in brackets approaches unity as $h \rightarrow \infty$, and, thus, $F(t)$ recovers the infinite thickness case. The parameters $c_\lambda = p_i \delta^{b_i}$ represent the contact radius, shown in Table I. The mathematical form of Eq. (8) is similar to the finite thickness correction of elastic materials reported elsewhere.^{11,13-15}

The viscoelastic coefficients $\alpha_{\lambda,n}^{(v)}$ in Eq. (8) become slightly different in the load ($t \leq \tau_i$) and the dwell ($t > \tau_i$) stages. In the load stage, they are time-independent,

$$\alpha_{\lambda,n}^{(v)} = \left(\frac{\lambda + n\gamma_\lambda}{\lambda} \right) \left[\frac{B(\lambda + n\gamma_\lambda, 1 - \beta)}{B(\lambda, 1 - \beta)} \right] \alpha_{\lambda,n}^{(el)}, \quad (9)$$

while in the dwell part they become time-dependent,

$$\alpha_{\lambda,n}^{(v)} = \left(\frac{\lambda + n\gamma_\lambda}{\lambda} \right) \left[\frac{B(\tau_i/t; \lambda + n\gamma_\lambda, 1 - \beta)}{B(\tau_i, t; \lambda, 1 - \beta)} \right] \alpha_{\lambda,n}^{(el)}. \quad (10)$$

The coefficients $\alpha_{\lambda,n}^{(el)}$, listed in Table I, are the same parameters for pure elastic samples calculated in reference¹¹ up to fourth order. One should note that $\alpha_{\lambda,n}^{(v)} = \alpha_{\lambda,n}^{(el)}$ for the flat indenter, and the special case of the relaxation exponent $\beta = 0$ recovers the purely elastic case.

D. Standard linear solid model

Equation (8) can be generalized for other relaxation models by replacing $F_\infty(t)$ and $\alpha_{\lambda,n}^{(v)}$ with proper expressions for each viscoelastic model. For the standard linear solid (SLS) viscoelastic model, whose relaxation function is given by $E(t) = E_\infty + E_1 e^{-t/\tau}$, the quantities $F_\infty(t)$ and $\alpha_{\lambda,n}^{(v)}$ become

$$F_\infty(t) = \Omega(\lambda) \delta_0^\lambda \begin{cases} \left(\frac{t}{\tau} \right)^\lambda [E_\infty + E_1 e^{-t/\tau} {}_1F_1(\lambda, \lambda + 1, t/\tau)], & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ [E_\infty + E_1 e^{-t/\tau} {}_1F_1(\lambda, \lambda + 1, \tau_i/\tau)], & t > \tau_i, \end{cases} \quad (11)$$

$$\alpha_{\lambda,n}^{(v)} = \alpha_{\lambda,n}^{(el)} \begin{cases} \frac{[E_\infty + E_1 e^{-t/\tau} {}_1F_1(\lambda + n, \lambda + n + 1, t/\tau)]}{[E_\infty + E_1 e^{-t/\tau} {}_1F_1(\lambda, \lambda + 1, t/\tau)]}, & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ \frac{[E_\infty + E_1 e^{-t/\tau} {}_1F_1(\lambda + n, \lambda + n + 1, \tau_i/\tau)]}{[E_\infty + E_1 e^{-t/\tau} {}_1F_1(\lambda, \lambda + 1, \tau_i/\tau)]}, & t > \tau_i, \end{cases} \quad (12)$$

${}_1F_1(a, b, x)$ is the confluent hypergeometric function of the first kind,¹⁶ and $\alpha_{\lambda,n}^{(el)}$ is the same of Table I. By making $E_1 = 0$, we obtain the purely elastic model. Analogous expressions for the Kelvin–Voigt viscoelastic model are deduced by Garcia *et al.*¹¹

E. Continuum viscoelastic model

Our numerical model consists of a cylindrical viscoelastic body of height h and radius $a = 16 \mu\text{m}$ deformed by an infinitely rigid axisymmetric indenter on its top surface. The sample is incompressible and homogeneous, with its bottom surface fixed on an infinitely rigid substrate. There is no displacement on that surface as the sample is deformed, while the other surfaces are free to move. The mechanical stress distribution is solved by the following elastodynamics equations representing, respectively, the balance of linear momentum and the strain–displacement relations,^{17,18}

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{FS})^t + \mathbf{F}_b &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^t + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \nabla \mathbf{u}], \end{aligned} \quad (13)$$

where \mathbf{u} is the displacements vector, $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the strain tensor, $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$ is the deformation gradient tensor, ρ is the mass density, \mathbf{F}_b the body force per unit volume, and \mathbf{S} is the second Piola–Kirchhoff stress. The bulk and shear moduli are given, respectively, by $K = E/3(1 - 2\nu)$ and $G = E/2(1 + \nu)$, where $E = 1.0 \text{ kPa}$ is Young's modulus, $\nu = 0.49$ the Poisson coefficient, and $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

We apply finite element modeling (FEM) to perform this numerical assay with the COMSOL Multiphysics software.¹⁹ We numerically mimic DFCs by moving the indenter toward the sample with constant velocity, such that the maximum indentation depth of $\delta_0 = 1 \mu\text{m}$ is achieved at $\tau_i = 0.5 \text{ s}$. After that, the indenter stops during $\tau_d = 4.5 \text{ s}$ to obtain the dwell part of the force curve. In order to study the influence of finite thickness effects in the numerical model, we run simulations with different values of h . We consider the exact geometries of the indenter and the same properties of the sample as those used in the analytical study. In an attempt to perform the infinite case $h \rightarrow \infty$ numerically, we run cases of $h = 100 \mu\text{m}$, which is much larger than the width of the sample.

III. RESULTS

The relaxation properties of SLS and PL models are rather different, as shown in Fig. 2(a). The PL relaxation does not exhibit any characteristic lifetime and relaxes continuously with the same log–log slope at any timescale. On the other hand, the SLS relaxation exhibits a lifetime τ , after which the material is almost fully relaxed. In order to model DFCs and investigate finite thickness effects in such distinct materials, we chose parameters such that $E_{PL}(t_{ref}) = E_{SLS}(t_{ref}) \approx 1 \text{ kPa}$ at a reference time $t_{ref} = 1 \text{ s}$.

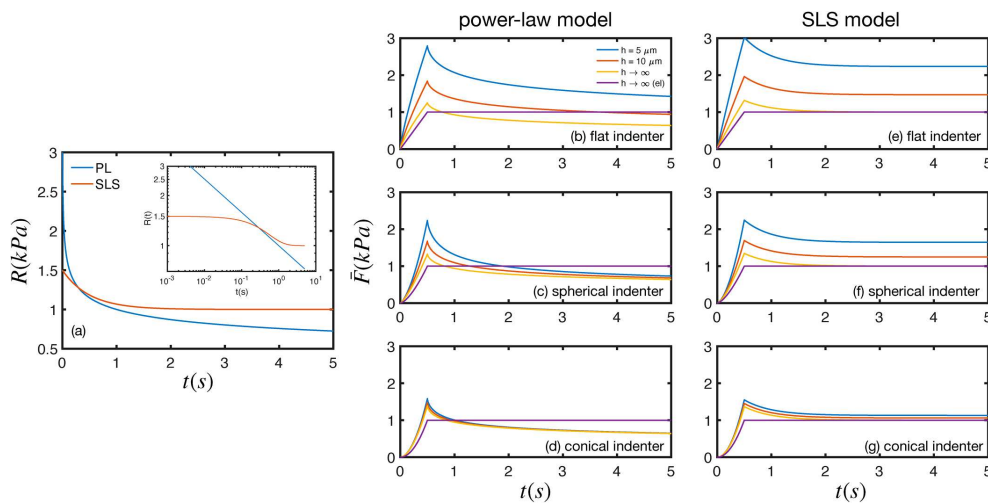


FIG. 2. (a) Comparison of the PL and SLS viscoelastic relaxation functions. Parameters are chosen to coincide at a reference time, i.e., $(t_{ref}) \approx 1$ kPa for $t_{ref} = 1$ s. For the SLS model, this condition is met with $E_{\infty} = 1$ kPa, $E_1 = 0.5$ kPa, and $\tau = 0.5$ s. The inset panel shows the relaxation functions on a log-log scale. (b)–(g) Analytical force curves obtained with Eq. (8) (PL) and with Eq. (12) (SLS) for $E = 1.0$ kPa, $\delta_0 = 1.0 \mu m$, $\tau_1 = 0.5$ s, and $\beta = 0.2$ and for samples of different thicknesses and indented by a flat, spherical, and conical indenters. The flat and spherical indenters hold a radius of $r = 2.5 \mu m$, and the half-opening angle of the conical shape is $\theta = 45^\circ$. The curves are normalized as $F(t) = F(t)/(\Omega_c \delta_0^2)$.

Figures 2(b)–2(g) compare analytical DFCs of PL and SLS materials with varying thicknesses indented by different axisymmetric geometries. The maximum indentation depth and loading time are fixed as $\delta_0 = 1 \mu m$ and $\tau_1 = 0.5$ s, respectively. These values are compatible with slow AFM force curves (vertical frequencies f_z ranging between 0.3 and 0.5 Hz) with maximum forces between 1 and 5 nN for samples with few kPa of stiffness. For the PL curves, we used a relaxation exponent $\beta = 0.2$, representing soft-glassy materials and living cells.⁵

The most striking characteristic of those curves is that the curves for the conical indenter are less sensitive concerning the sample thickness, even in the extreme case of a maximum indentation of the order of 20% of the sample thickness ($h = 5 \mu m$), for which the force curve only slightly deviates from the infinite thickness case.

On the opposite end, the curves for the flat punch ($r = 2.5 \mu m$) are extremely sensitive to the sample thickness even in the case of a maximum indentation of only 10% of the thickness ($h = 10 \mu m$), despite $\delta_0/h \approx 0.1$ being considered the upper limit to avoid finite thickness effects.¹⁵ The curves for the spherical indenter ($r = 2.5 \mu m$) exhibit an intermediate sensitivity concerning the sample thickness. We remark that using a spherical bead indenter with a radius $r \approx 2.5 \mu m$ is usual in several nanoindentation experiments, especially in living cells. They are considered less aggressive to delicate cells, avoiding punctuation of the membrane,

and appropriate to average the mechanical response of the whole cell, which is highly inhomogeneous over the cell surface.²⁰

Comparing the viscoelastic models, the same sensitivity trends regarding the indenter geometry and sample thickness are observed in both PL and SLS viscoelastic models. However, PL curves with conical indenter are more sensitive to the sample thickness up to the maximum force. One second later, the thickness effect is negligible. The SLS curves with conical indenter exhibit a minor and nearly fixed correction in the curves during the whole dwell part. The amplitude of this correction is inversely proportional to sample thickness.

In order to validate our analytical force models for materials with finite thickness and shed some light on why the curves for the conical indenter are less sensitive to the sample thickness, we performed numerical simulations in SLS materials with Eq. (13). Figures 3(a)–3(c) show the relative error between analytical and numerical DFCs for several sample thicknesses and indenter geometries. At the beginning of the force curve, the relative error is significant because of a computational artifact. For small indentation depths, the computational mesh of the two-body contact region is not well defined, which may induce errors in determining the total indentation force. However, the error quickly reduces as the indentation depth increases. In the dwell stage, the error becomes nearly constant, indicating that the analytical and FEM model diverges by a minor correction. However, this error is reduced by increasing

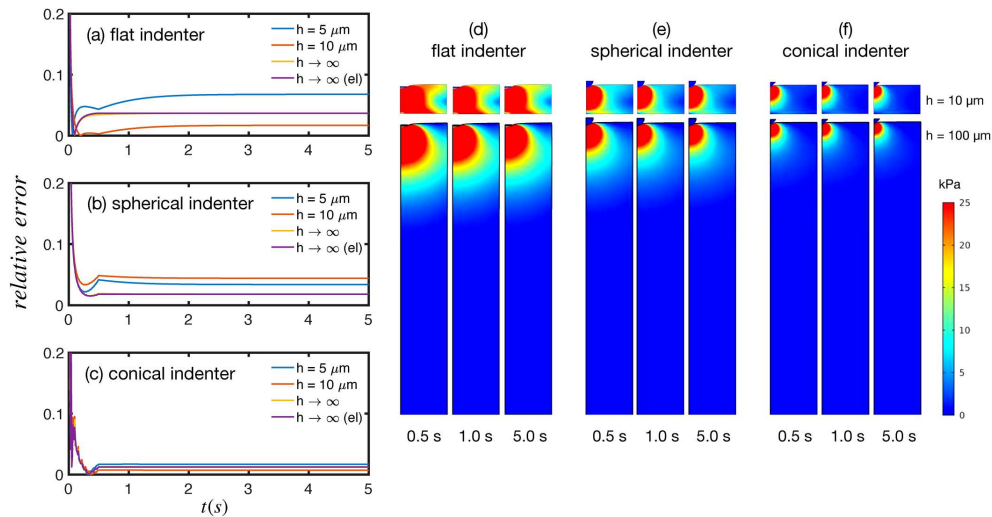


FIG. 3. (a)–(c) Relative error between forces curves calculated with FEM and SLS models for different sample thicknesses and indenter geometries. (d)–(f) Snapshots of the von Mises stress fields at different instants of the FEM force curves (showing a profile view of axisymmetric plane).

the number of higher order terms in the summation of Eq. (8). It is important to note that more significant errors (up to 10%) are observed in the curves for flat indenters, while they are less than 2% in curves for conical indenters.

Panels (d)–(f) in Fig. 3 show the von Mises stress field in samples for different thicknesses. First, the spatial stress distribution is clearly dependent on the indenter geometry. The larger the contact area, the deeper and more intensely the stress distribution extends across the sample below the indenter. This result shows why the force curves for the conical indenter are less sensitive to the sample thickness. For example, in the samples with $h = 10 \mu\text{m}$ and $\delta_0 = 1 \mu\text{m}$, the stress field below the conical indenter does not reach the bottom surface, while the flat indenter the stress field reaches the bottom surface with very high intensity. For thick samples ($h = 100 \mu\text{m}$), the stress field does not reach the bottom surface regardless of the indenter geometry. In those cases, the FEM simulations differ from the infinite thickness analytical models by less than 5% for the flat indenter case and less than 2% for the spherical and conical cases.

A. Error analysis in physical parameters

In order to investigate the error introduced by finite thickness effects in AFM measurements interpreted in terms of infinitely thick samples, we perform a systematic study of theoretical DFCs calculated with varying finite thicknesses by fitting those curves with force models of infinitely thick samples. We compare the fitted viscoelastic parameters (E_{fit} , β_{fit}) with the input parameter

$E_{input} = 1 \text{ kPa}$ and $\beta_{input} = 0.2$, and the goodness-of-fit r^2 of each DFC. Those results are shown in Fig. 4.

First, we observe that the fitted stiffness E_{fit} converges to E_{input} as the sample thickness increases, but sensitivity to thickness and the convergence rate strongly depend on the indenter geometry. As observed for the force curves and the stress distribution, the less sensitive geometry is the conical indenter, while the most sensitive geometry is the flat cylinder. In particular, for the case of a conical indenter DFC with $\delta_0/h = 0.1$, E_{fit} is 1.03 kPa for the fit of the whole force curve (app + dwell) and 1.15 kPa for the fit of the loading region only. For the spherical indenter DFC, one obtains 1.15 kPa (app + dwell) and 1.40 kPa (app only). Finally, for the flat indenter DFC, one obtains 1.37 kPa for both (app + dwell and app only). The absence of difference of E_{fit} in the fitting of either the loading part or the whole DFC reflects that coefficients $\alpha_{k,n}^{(v)}$ in Eq. (10) are time-independent for the flat indenter.

Concerning the fitted values of the relaxation exponents, we observe that, except for the flat indenter case, which is thickness-insensitive, the exponent β also converges to β_{input} as the thickness increases. However, the convergence trend for spherical and conical indenters is different, depending whether the fitting is performed with the whole DFC (app + dwell) or only with the loading part (app): $\beta_{fit}^{(app + dwell)} > \beta_{input}$ and $\beta_{fit}^{(app)} < \beta_{input}$. This is a significant issue because fitting only the loading part may lead to the interpretation that the sample is nearly elastic $\beta_{fit} \rightarrow 0$ and not viscoelastic. This becomes even stronger for $\delta_0/h \geq 0.2$, where

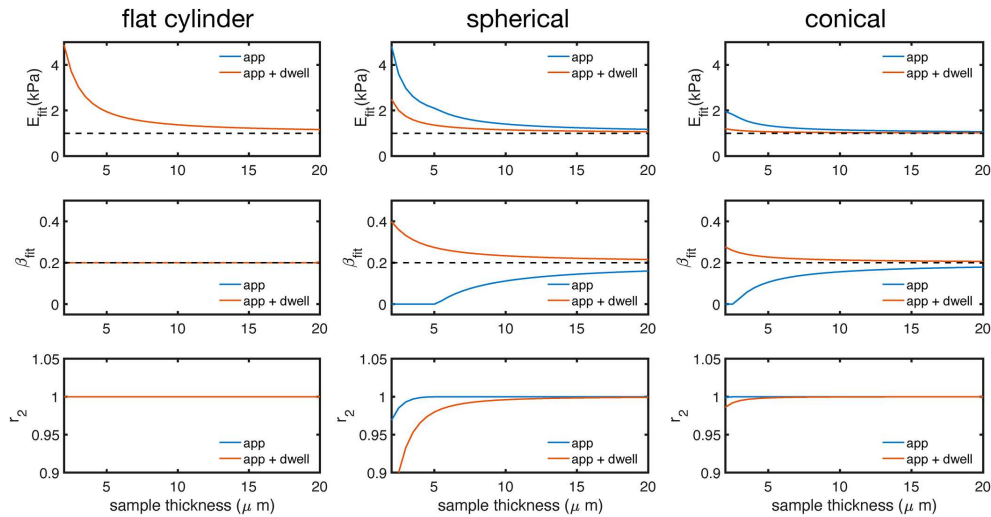


FIG. 4. Fitting parameters (E_{fit} , β_{fit}) and goodness-of-fit r^2 of the infinite thickness model extracted from DFCs generated with the finite thickness model. The dashed lines represent the input parameters used to generate the finite thickness DFCs. The blue and red lines indicate the fit performed in the load stage only and in the whole curve (app + dwell), respectively.

$\beta_{fit}^{app} = 0$. In such cases, the force curves can be well fitted with the conventional Sneddon's model and yield very good goodness-of-fit $r^2 = 1$. Any trace of viscoelastic behavior in the force curves is washed out, leading to the interpretation that cells are purely elastic, even within timescales where viscoelastic effects should matter. On the other hand, fitting the whole force curve leads to overestimated exponents $\beta_{fit}^{(app+dwell)} > \beta_{input}$, with β_{fit} less sensitive and converging faster concerning the sample thickness for the conical indenter, when compared to the spherical indenter. Using $\delta_0/h = 0.1$ as a reference, we obtained $\beta_{fit}^{(app+dwell)} = 0.23$ and $\beta_{fit}^{(app)} = 0.11$ for the spherical case, and $\beta_{fit}^{(app+dwell)} = 0.21$ and $\beta_{fit}^{(app)} = 0.16$ for the conical case. The reduced sensitivity with respect to finite thickness correction in the determination of the power-law viscoelastic exponent has been observed experimentally by Sanchez *et al.*²¹

Finally, regarding the overall goodness-of-fit behavior, we obtain $r^2 \approx 1$ for thickness larger than $10 \mu\text{m}$ ($\delta_0/h < 0.1$) even with some error in the fitting parameters. For smaller thicknesses ($\delta_0/h > 0.1$), the scenario becomes problematic for spherical indenters with degradation of fit quality and significant errors in the fitted parameters. One remarkable feature is that high-quality fits are obtained for the loading part for $\delta_0/h > 0.2$, accompanied by a fitted exponent of $\beta_{fit} = 0$, inducing an erroneous interpretation that the sample behaves elastically.

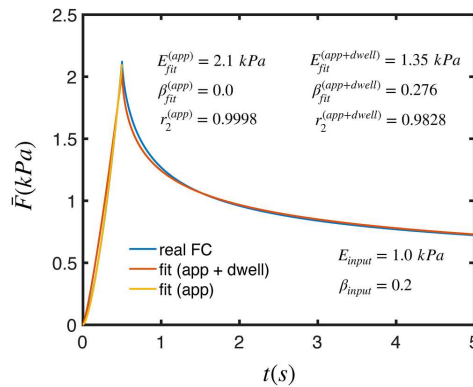


FIG. 5. Analytical force curve (blue line) on a finite viscoelastic material with $h = 5 \mu\text{m}$, plotted with Eq. (8) for $E_{input} = 1.0 \text{ kPa}$, $\beta_{input} = 0.2$, $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$, and indenter by a spherical indenter ($r = 2.5 \mu\text{m}$). These curves are fitted with those infinite thickness approaches, shown in x and y, for elastic (yellow curve) and (red curve) viscoelastic materials, respectively. The infinite elastic approach is fitted only on the approaching part of the force curve, while the infinite viscoelastic approach is fitted on the whole curve. The curves are normalized as $\tilde{F}(t) = F(t)/(\Omega_0 \delta_0^2)$.

The case where a nearly ideal goodness-of-fit, with divergence in the physical properties, is obtained by fitting only the loading part of the force curve as illustrated in Fig. 5. We suspect this issue happened in a recent article by Rheinlaender *et al.*, who measured the mechanical properties of different types of cells cultured on polyacrylamide gels using spherical indenters.⁵ Analyzing the approach curve, they found perfect elastic exponents ($F \propto \delta^{3/2}$ instead of $F \propto \delta^n$, with $n < 3/2$) and $r^2 \approx 1$ in the curve fittings, despite the clear viscoelastic response of their samples.

IV. CONCLUSIONS

In conclusion, we investigated the influence of finite thickness effects in determining viscoelastic properties in standard linear viscoelastic solid and power-law materials. We developed analytical force models for the mechanical contact between axisymmetric indenters and viscoelastic samples with finite thickness. In addition to the analytical approach, we numerically reproduce the contact forces and stress field distribution with FEM modeling. We found that conical (or pyramidal) indenters are more robust to finite thickness than flat and spherical indenters. This result contradicts the common sense that a spherical tip is the best geometry to probe soft materials. Our results show that the sample stiffness is consistently overestimated concerning sample thickness. However, the relaxation exponent may be under- or overestimated depending on which part of the force curve is analyzed. Remarkably, indentations with spherical indenters of the order of 20% of the sample thickness may erroneously behave as perfectly elastic with a goodness-of-fit $r_2 \approx 1$ if only the loading part of the force function is fitted. We believe that this work provides comprehensive guidelines to estimate errors in AFM measurements performed with different indenter geometries.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to acknowledge financial support from the Brazilian agencies CNPq and FUNCAP.

AUTHOR DECLARATIONS

Conflict of Interest

The authors have no conflicts to disclose.

Author Contributions

D. F. S. Costa: Formal analysis (equal); Methodology (equal); Writing – original draft (equal). **J. L. B. de Araújo:** Methodology (equal); Software (equal); Validation (equal). **C. L. N. Oliveira:** Funding acquisition (lead); Methodology (equal); Writing – review & editing (equal). **J. S. de Sousa:** Conceptualization (equal); Writing – review & editing (equal).

DATA AVAILABILITY

The data that support the findings of this study are available within the article.

REFERENCES

- I. N. Sneddon, "The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile," *Int. J. Eng. Sci.* **3**, 47–57 (1965).
- H.-J. Butt, B. Cappella, and M. Kappl, "Force measurements with the atomic force microscope: Technique, interpretation and applications," *Surf. Sci. Rep.* **59**, 1–152 (2005).
- D. Wang and T. P. Russell, "Advances in atomic force microscopy for probing polymer structure and properties," *Macromolecules* **51**, 3 (2017).
- R. Garcia, "Nanomechanical mapping of soft materials with the atomic force microscope: Methods, theory and applications," *Chem. Soc. Rev.* **49**, 5850 (2020).
- J. Rheinlaender, A. Dimitracopoulos, B. Wallmeyer, N. M. Kronenberg, K. J. Chalut, M. C. Gather, T. Betz, G. Charras, and K. Franze, "Cortical cell stiffness is independent of substrate mechanics," *Nat. Mater.* **19**, 1019–1025 (2020).
- B. D. Hoffman and J. C. Crocker, "Scaling cell mechanics: Dissecting the physical responses of cells to force," *Annu. Rev. Biomed. Eng.* **11**, 259 (2009).
- J. S. de Sousa, J. A. C. Santos, E. B. Barros, L. M. R. Alencar, W. T. Cruz, M. V. Ramos, and J. Mendes Filho, "Analytical model of atomic-force-microscopy force curves in viscoelastic materials exhibiting power law relaxation," *J. Appl. Phys.* **121**, 034901 (2017).
- J. S. de Sousa, R. S. Freire, F. D. Sousa, M. Radmacher, A. F. B. Silva, M. V. Ramos, A. C. O. Monteiro-Moreira, F. P. Mesquita, M. E. A. Moraes, R. C. Montenegro, and C. L. N. Oliveira, "Double power-law viscoelastic relaxation of living cells encodes motility trends," *Sci. Rep.* **10**, 4749 (2020).
- F. B. de Sousa, P. K. V. Babu, M. Radmacher, C. L. N. Oliveira, and J. S. de Sousa, "Multiple power-law viscoelastic relaxation in time and frequency domains with atomic force microscopy," *J. Phys. D: Appl. Phys.* **54**, 335401 (2021).
- F. Rico, P. Roca-Cusachs, N. Gavara, R. Farré, M. Rotger, and D. Navajas, "Probing mechanical properties of living cells by atomic force microscopy with blunted pyramidal cantilever tips," *Phys. Rev. E* **72**, 021914 (2005).
- P. D. Garcia and R. Garcia, "Determination of the elastic moduli of a single cell cultured on a rigid support by force microscopy," *Biophys. J.* **114**, 2923 (2018).
- P. D. Garcia, C. R. Guerrero, and R. Garcia, "Nanorheology of living cells measured by AFM-based force–distance curves," *Nanoscale* **12**, 9133 (2020).
- E. K. Dimitriadis, F. Horkay, J. Maresca, B. Kachar, and R. S. Chadwick, "Determination of elastic moduli of thin layers of soft material using the atomic force microscope," *Biophys. J.* **82**, 2798 (2002).
- J. A. C. Santos, L. M. Rebêlo, A. C. Araújo, E. B. Barros, and J. S. de Sousa, "Thickness-corrected model for nanoindentation of thin films with conical indenters," *Soft Matter* **8**, 4441 (2012).
- N. Gavara and R. S. Chadwick, "Determination of the elastic moduli of thin samples and adherent cells using conical atomic force microscope tips," *Nat. Nanotechnol.* **7**, 733 (2012).
- I. S. Gradshteyn, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed. (Academic Press, San Diego, CA, 2007).
- G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering* (Wiley, 2000).
- A. J. M. Spencer, *Continuum Mechanics* (Dover Publications, 2004).
- COMSOL Multiphysics v. 5.5. Comsol AB, Stockholm, Sweden.
- F. M. Hecht, J. Rheinlaender, N. Schierbaum, W. H. Goldmann, B. Fabry, and T. E. Schäffer, "Imaging viscoelastic properties of live cells by AFM: Power-law rheology on the nanoscale," *Soft Matter* **11**, 4584–4591 (2015).
- J. G. Sanchez, F. M. Espinosa, R. Miguez, and R. Garcia, "The viscoelasticity of adherent cells follows a single power-law with distinct local variations within a single cell and across cell lines," *Nanoscale* **13**, 16339 (2021).

Indenting fractal-edged elastic materials

D. F. S. Costa, J. H. M. Pontes, W. P. Ferreira, J. S. de Sousa, and C. L. N. Oliveira*
Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil

Surface roughness plays a crucial role in the accuracy of indentation experiments used to measure the elastic properties of materials. In this study, we present a computational analysis of how surface roughness, represented explicitly by fractal geometry, influences the mechanical properties of soft materials. We model two-dimensional elastic samples with a Koch fractal bottom surface, grown upward or downward to the fourth generation, referred to as fractal *down* and fractal *up*, respectively. The elastodynamics equations are solved numerically while a rigid punch indents the elastic sample from the top surface. By applying the Hertz model for mechanical contact, we determine the Young's modulus of the materials. Our findings reveal that fractal surfaces, especially those with dimensions comparable to the sample size, can significantly alter experimental measurement outcomes. In particular, the roughness of the substrate profoundly affects the measured elastic properties, as seen in scenarios involving cell elasticity. For instance, in the *down* fractal scenario, reductions in the measured elastic modulus range from 2% to 4%, while increases reach up to 40% in the *up* fractal scenario. These results underscore the importance of incorporating fractal geometry into the design and analysis of indentation experiments. This approach could significantly enhance our understanding and application of material characterization and mechanical testing, leading to more accurate and reliable results. Our numerical findings align with experimental trends, with reduced elastic modulus observed in the *down* scenario, similar to surfaces treated with abrasives, and increased stiffness in the *up* scenario, akin to bonded materials with induced roughness.

I. INTRODUCTION

Interfacial effects profoundly influence the behavior of virtually every physical system [1], ranging from quantum devices [2, 3] and chemical compositions [4] to transport phenomena [5–7]. These effects can mislead estimations if not carefully considered, which is especially critical in experiments involving surface interactions. One common type of such experiment is indentation testing, where a hard tip is pressed into a material's surface to measure penetration depth and applied force, thereby evaluating mechanical properties. Traditional models like the Hertz mechanical contact model assume perfectly smooth surfaces and uniform stress distribution throughout the material. However, real-world materials often deviate from this ideal due to surface irregularities, such as microscale and nanoscale roughness in metals and polymers, respectively [8]. These discrepancies highlight the need for a nuanced approach to interpreting experimental data, considering the complex realities of material surfaces.

Surface roughness disrupts the assumption of uniform stress distribution, creating complex stress patterns that vary with the material's topographical features at different scales [9–11]. These irregularities can significantly alter experimental outcomes by inducing stress concentrations not fully accounted for by standard models [12, 13]. Addressing these complexities requires advanced modeling techniques and multi-scale mechanical characterization to assess a material's properties [14] accurately. Moreover, surface irregularities can compromise a material's yield strength, lead to premature plastic deformation, and interfere with measurements of elastic recovery, potentially resulting in incorrect assessments of a material's ability to revert to its original shape post-indentation [15].

Furthermore, nanoindentation assays on living cells provide insights into rheologic behaviors sensitive to their microenvironment and internal physical properties [16–20]. The interaction of proteins like integrins, which form focal adhesions connecting the cell to the substrate and activate intracellular signaling pathways, illustrates this sensitivity [21]. Cells can deform the contact surface on soft substrates such as the extracellular matrix, creating mechanical feedback that influences cell adhesion further. Such irregular adhesion topographies pose challenges and offer opportunities to explore cellular adaptation and mechanobiology [22]. Additionally, physiological processes or external stimuli driving changes in the cytoskeleton can significantly alter cell's mechanical properties [23, 24], evident in diseases like cancer where such properties serve as diagnostic markers [25–28]. Thus, understanding the influence of substrate roughness on these measurements is crucial for developing more effective diagnostic tools and enhancing our understanding of cellular mechanics in health and disease.

This study focuses on the impact of surface roughness, particularly fractal-like roughness characterized by self-

*Electronic address: lucas@fisica.ufc.br

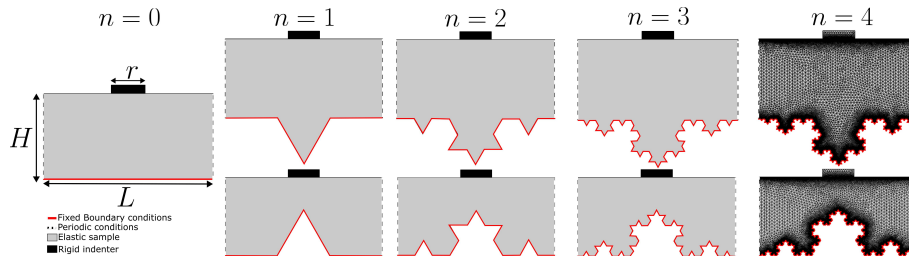


FIG. 1: Illustration of the indentation physical model, featuring an elastic sample colored in gray, with height H and length L , compressed from above by a rigid indenter of length $r = L/5$. The top surface, shown in a black solid line, is free to displace, while the bottom surface, represented by a red solid line, remains fixed. Periodic boundary conditions are applied on the sides to simulate an infinite medium. The bottom surface transforms according to the rules of a Koch fractal. At the first generation ($n = 0$), the sample maintains a rectangular shape without fractal growth. Subsequent frames visually demonstrate the progressive growth of the fractal pattern from $n = 1$ to $n = 4$, expanding either upwards or downwards. The numerical mesh for solving the elastodynamics equations is depicted for the ($n = 4$) cases in *up* and *down* configurations.

similar patterns across scales, on the measurement of elastic properties. The presence of fractal geometry in surface roughness introduces substantial challenges, necessitating sophisticated models and analytical techniques for accurate property evaluation. We utilize numerical simulations to explore stress and strain distributions during indentation on surfaces modeled as Koch fractals, helping us understand how these patterns affect material behavior under stress and enabling us to design experiments that more accurately reflect the mechanical properties of materials with complex surfaces [29–31]. Such insights are critical in practical applications, especially in nanoindentation tests on soft materials with rough substrates, where surface roughness can directly affect the measurement of crucial parameters like elasticity [32, 33]. Understanding the fundamental mechanics governing complex material behavior under indentation is essential for advancing material design and selection in engineering applications and developing more effective diagnostic approaches in medical research [34–37].

II. COMPUTATIONAL MODEL

Our model comprises a two-dimensional elastic medium characterized by Young’s modulus, E_s , a mass density, ρ , and a Poisson ratio, ν . The top surface of this medium is free to move, while the lateral edges adhere to periodic boundary conditions to mitigate finite-size effects. Conversely, the bottom surface is fixed, evolving according to the n^{th} generation of a Koch fractal. This fixed boundary condition simulates a non-deformable substrate. The sample is compressed from above by a rigid rectangular indenter of length r , centrally positioned on the top surface, with an indentation given by δ . As depicted in Fig. 1, at $n = 0$, the sample maintains a rectangular shape with height H and length L . However, the fractal may grow either downwards (in the same direction as the applied stress) or upwards (in the opposite direction), altering the sample’s mass by adding or removing material, respectively. *Down*-grown and *up*-grown fractals for n up to 4 are displayed, and we examine both scenarios. Only the bottom surface exhibits roughness, while the top remains flat to avoid numerical issues at the contact interface. Our simulations utilize parameters typical of Polyacrylamide gels, with $E_s = 10^3$ Pa, $\rho = 10^3$ kg/m³, $\nu = 0.49$, representing materials with elastic moduli ranging from hundreds to thousands of Pascal, by changing percentages of acrylamide and bis-acrylamide in PBS (phosphate-buffered saline) solution [38, 39].

The fixed boundary conditions used in our simulations represent scenarios where the sample rests on a highly rigid substrate. Precisely, our decision to fix the entire bottom boundary reflects cases where soft materials or biological tissues are bonded or anchored to stiff substrates, such as glass slides or metal surfaces, during mechanical testing or indentation experiments. Fractal structures in real-world materials theoretically extend to the molecular scale, where self-similarity breaks down due to the discrete nature of matter. However, computational constraints arise much earlier, as each additional fractal generation exponentially increases mesh complexity, leading to greater computational demands and potential numerical instability. To maintain a balance between obtaining meaningful mechanical insights and ensuring computational feasibility, we limited our study to fractal generations up to $n = 4$. This approach ensures that our simulations remain practical while aligning with the level of detail achievable in experimental setups. The numerical mesh used for these calculations is shown in Fig. 1 for $n = 4$.

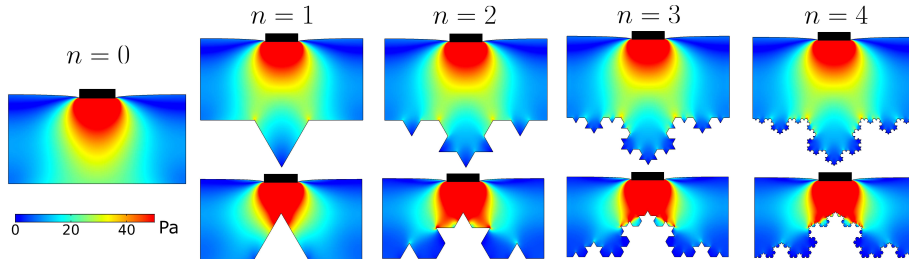


FIG. 2: The stress field for up to the fourth generation in both *up* and *down* fractal cases for $H = 0.5$ cm and $L = 1.0$ cm. The color gradient represents the Cauchy stress magnitude, measured in Pascals (Pa).

The elastodynamics equations can effectively describe the deformation of a continuum elastic medium, which provides a comprehensive framework for understanding momentum conservation and the relationship between strain and stress [40, 41]. These equations are formulated as

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}],\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ represents the Cauchy stress tensor, $\boldsymbol{\varepsilon}$ the strain tensor, \mathbf{u} the displacement vector, and \mathbf{f} the volumetric forces. The stress and strain tensors are interconnected through the material's constitutive relation, which, for small deformations, can be simplified by the generalized Hooke's law $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, where the symbol $:$ denotes the tensorial inner product, and the fourth-order stiffness tensor is given by

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $\lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ and $\mu = E / [2(1 + \nu)]$ are, respectively, the Lamé's first and second parameters.

In our analyses, we apply indentation up to 4% of H , leading to stationary conditions where $\dot{\mathbf{u}} = 0$ and $(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u} = 0$, with no external volumetric forces, $\mathbf{f} = 0$. The bottom surface is immovable due to fixed boundary conditions ($\mathbf{u} = 0$). These conditions simplify the equations to

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}], \quad (3)$$

commonly known as the compatibility equations. These equations are solved using the commercial software *COMSOL Multiphysics*, which employs the finite element method to manage the computational complexities [42]. The results, including stress and strain distributions and the contact force, F_c , between the sample and the indenter for a given indentation δ , are calculated and visually represented.

III. RESULTS

The geometry of our 2-D model is straightforward, comprising a rectangular sample in contact with a similarly shaped rectangular indenter. One of the most fascinating aspects of our model is the incorporation of a rough surface in the form of a fractal generation at its bottom. This distinctive feature is a critical element of our study. It allows us to explore the effects of self-similarity across multiple scales, and more importantly, it alters the stress distribution within the material. Fig. 2 provides a detailed view of the stress field distribution within the sample across various fractal generations for both *up* and *down* geometries. As expected, for a surface without fractal growth ($n = 0$), the stress field disperses uniformly from the indenter's contact region throughout the sample. However, as

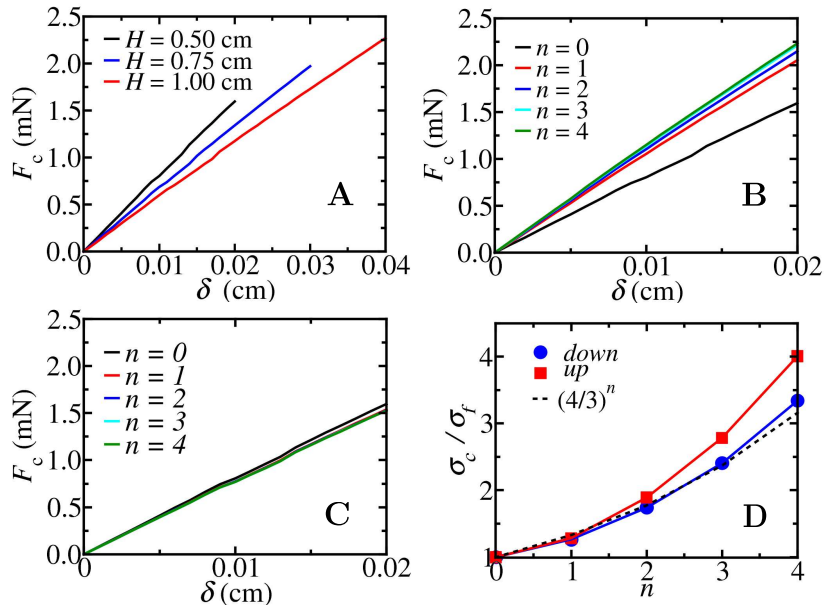


FIG. 3: (A) Contact force curve versus indentation for different values of H in the flat sample ($n = 0$). The slope of these curves reflects the sample's rigidity. Frames (B) and (C) show similar curves to (A) but for a fixed $H = 0.5$ cm and several fractal generations (n) in the *up* and *down* fractal scenarios, respectively. These plots effectively demonstrate the influence of fractal geometry on the force-indentation relationship, with significant differences observed in comparison to the flat sample. Additionally, frame (D) depicts the ratio of the stress exerted on the contact surface, σ_c , to that on the fractal surface, σ_f , as the fractal generation increases. This graph shows us the accumulation of the stress through the elastic sample. Both *down* and *up* fractal cases slightly diverge from the growth behavior of the Koch fractal, $(4/3)^n$, as n increases.

n increases, the stress field becomes more localized at the sharp protrusions of the fractal surface, while diminishing within the microcavities. This shift disrupts the previously uniform distribution, highlighting the intricate influence of fractal geometry on stress concentration patterns. This effect is further accentuated in the upward fractal orientation, where high-stress concentrations are observed on the bottom surface, as indicated by the red regions in the figure. Although measuring stress maps in bulk samples is challenging, experimental techniques can be applied to obtain such information on surfaces [43], allowing for a potential comparison with our results.

The Hertz model offers valuable insights into elastic contact mechanics, assuming a smooth, idealized infinite half-plane surface. However, generalizations of this model account for addressing finite-size effects [44], viscoelastic behavior [18], and other complexities [45]. The Hertz model remains suitable in our study due to the smooth contact between the sample surface and the indenter with a known geometry. Using a rigid flat-ended cylindrical indenter results in a linear increase in contact force with indentation depth δ [46, 47], as expressed by

$$F_c(\delta) = \frac{2r}{(1-\nu^2)} E \delta, \quad (4)$$

where E represents the effective Young's modulus. This relationship directly reflects Hooke's Law, where the stiffness constant, $k = \frac{2r}{(1-\nu^2)} E$, can be calculated from the slope of the contact force curve. We show that E depends on n , indicating a divergence from the actual Young's modulus of the sample, E_s .

Figure 3A displays the Hertz curve for the flat case ($n = 0$), showing that the spring constant decreases with increasing sample height, consistent with finite-size effects [45]. The influence of fractal geometry on these measurements is evident in the force curves in Figs. 3B and C. Fractal generation slightly reduces stiffness, with a more significant impact in the upward scenario. By analyzing the slope of these curves, we can infer changes in stiffness, illustrating how fractal geometry influences the material's response to indentation. These results suggest that as fractal generation

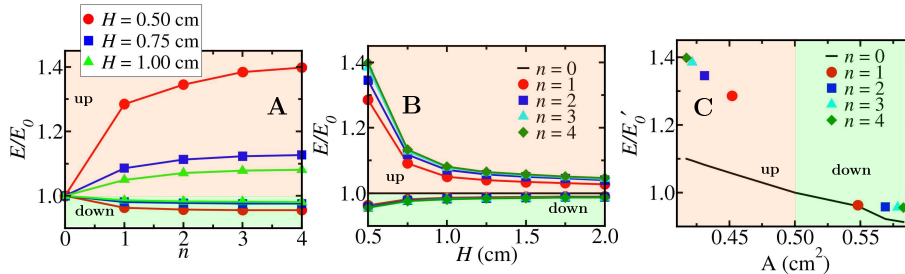


FIG. 4: Young’s modulus, E , in both *down* and *up* fractal orientations measured in a sample with height H and generation n , normalized to the value of E with the same H but $n = 0$, which we call E_0 . (A) shows how E/E_0 changes with n for different values of H while (B) shows changing with H for different values of n . In frame (C), the normalization is done with E'_0 , where the sample height is adjusted to compensate for the area lost or gained due to fractal growth, keeping the sample’s area constant and equal to HL , the area without fractal boundary.

n increases, the stiffness modulus E tends towards a specific value significantly influenced by the sample height.

To calculate the ratio between the average stress on the contact surface, σ_c , and that on the fractal surfaces, σ_f , we assume the stress is uniformly transmitted along the vertical direction through the sample. In this scenario, the disparity between the stresses should compensate for the difference in the perimeter of each surface. Thus, $\sigma_f \propto 1/P(n)$, where $P(n) = (4/3)^n L$ is the perimeter of the n^{th} generation of the Koch fractal initial length L [48]. Similarly, $\sigma_c \propto 1/S(\delta)$, where $S(\delta)$ is the actual length on the top surface, which depends on the indentation due to its deformability. For small indentations, $S(\delta) \approx L$. Therefore, the ratio between the stresses can be computed as

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_f} \propto \frac{P(n)}{S(\delta)} \propto \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{L}{S(\delta)} \approx \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad (5)$$

yielding the same growth rule as the Koch fractal. However, since the stress is not uniformly distributed along the sample, the ratio σ_c/σ_f as a function of the fractal generation n , shown in Fig. 3D, slightly diverges from this prediction. The divergence observed in the simulations, both in the *up* and *down* fractal cases, from the $(4/3)^n$ behavior highlights the non-uniformity of the stress propagation due to the emergence of stress concentration areas with increasing n .

To accurately capture the effect of the fractal boundary, we carefully distinguish between the finite-size effects arising from the finite sample height, H , and the effects introduced by the fractal surface. To isolate the influence of the fractal geometry, we first normalize Young’s modulus E , obtained for a given H , and fractal generation n , by Young’s modulus E_0 , obtained for the flat case ($n = 0$) with the same height H . Since both E and E_0 are subject to finite-size effects, this normalization reduces the role of small sample heights while preserving the effect of the fractal boundary. Figures 4A and B present the effective Young’s modulus normalized by E_0 for both *down* and *up* cases. Fig. 4A demonstrates that fractal surfaces can decrease or increase the measured elastic modulus. In the *down* fractal scenario, reductions are generally below 5%, while in the *up* fractal scenario, increases can reach 40%. As expected, E/E_0 approaches one as H increases, as shown in frame B. As H increases, the influence of surface roughness diminishes, with both *up* and *down* fractals converging to typical values, illustrating the lesser impact of fractal features on larger samples. Increasing H leads to a slow convergence of the analytical Young’s modulus to the value input in the numerical model.

Since fractal growth modifies the material quantity—removing material in the *up* scenario and adding material in the *down* scenario—the normalization in Figs. 4A and B may introduce biases related to the varying material volume. We perform an additional normalization, comparing E to a new reference E'_0 . Here, E'_0 corresponds to Young’s modulus of a flat sample ($n = 0$) with an adjusted height, ensuring that the fractal and flat samples contain the same area (i.e., the same amount of material). This approach enables a fairer comparison despite the geometric differences introduced by fractal growth (see Fig. 4C). The solid line in this figure represents the expected finite-size effects arising from changes in H . In the *up*-fractal scenario, where the measured Young’s modulus exhibits deviations of up to 40%, we find that only 10% of this deviation is attributable to finite-size effects. The remaining 30% directly result from the influence of the fractal boundary. This finding underscores fractal geometry’s significant role in shaping the material’s mechanical behavior—an effect that finite-size considerations alone cannot explain. We also analyze different cases with varying L ($L = 2H, 6H, 10H$) for both *up* and *down* scenarios, as depicted in Fig. 5A-C

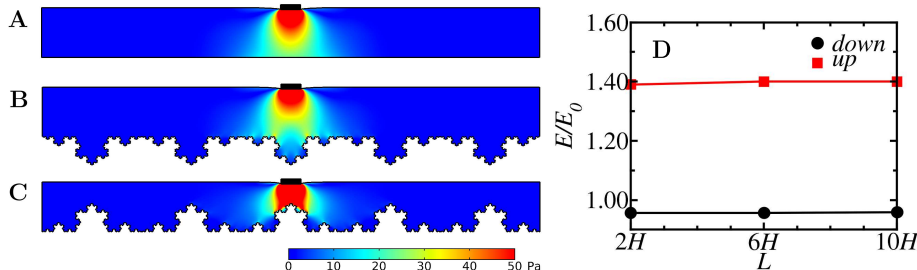


FIG. 5: The magnitude of the Cauchy stress, measured in Pascals (Pa), is represented by a color gradient for $H = 0.5$ cm and $L = 10H$. The sample without fractal ($n = 0$) is shown in A, while the fractal cases *up* in B and *down* C for $n = 4$. The ratio E/E_0 , defined in Fig. 4, is maintained regardless of the length L .

$L = 10H$ and $n = 4$. Normalization shows that the effects of fractal generation remain constant despite the increase in L , as demonstrated in Fig. 5D.

The hardening effect observed in the “fractal *up*” scenario—where material removal concentrates stress and increases stiffness—agrees closely with experimental findings from bonded materials with differing elasticities [8]. In that study, material dislocation at the bond interface introduced surface roughness, which enhanced resistance to indentation, mirroring the mechanical response observed in our *up*-fractal configuration. Conversely, the reduction in elastic modulus seen in the “fractal *down*” scenario aligns with trends reported for surfaces treated with abrasive papers and polished with diamond pastes [14]. While material dislocation in bonded surfaces promotes stress concentration, as observed in the fractal-*up* scenario, the topography produced by sanding appears to disperse the stress field under applied pressure, similar to the fractal-*down* cases. Further investigation is needed to fully understand the mechanisms behind the stress-dispersing effects of sanded surfaces and how they correspond to the behavior observed in the fractal-*down* configuration.

Although this study focuses on Koch fractals, future research could explore additional fractal models or self-affine surfaces. For example, self-affine models generated through stochastic processes have been used to fabricate rough surfaces, showing that increasing the fractal dimension reduces surface stiffness [49]. In contrast, we keep the fractal dimension fixed while increasing iterations through a deterministic growth rule. This structured approach allows us to systematically investigate how successive fractal generations—and their corresponding roughness length scales—impact the mechanical response. Our findings offer clear insights into the role of surface roughness in modulating material behavior under indentation, helping to advance the understanding of mechanical properties across multiple scales.

IV. CONCLUSIONS

Our work reveals the significant impact of surface roughness, particularly fractal geometry, on the accuracy of indentation experiments used to measure the elastic properties of materials. We have demonstrated that the fractal nature of the bottom surface is a critical factor in scenarios involving thin films or textured substrates, where it significantly alters the mechanical response during indentation. The structural complexity introduced by fractal patterns has essential implications for stress distribution and the force-indentation relationship. Specifically, in the *down* fractal scenario, where the material is added, reductions in the elastic modulus ranged between 2% and 4% compared to the case without a fractal boundary, depending on the sample height H . Conversely, in the *up* fractal scenario, where the material is removed, increases in the modulus reached up to 40%. We also analyzed cases where the amount of material was conserved by adjusting the height H to maintain the same area as a smooth sample. Even in these scenarios, the fractal boundary significantly influenced the elastic measurements, demonstrating that fractal geometry can lead to deviations from expected mechanical behavior, regardless of material conservation. Our findings not only highlight the necessity of accounting for surface roughness, particularly fractal geometry, in the design and analysis of indentation experiments, but also point to potential applications in biophysics. Particularly, our work could contribute to a better understanding of rheological measurements in living cells. The influence of fractal-like surface roughness could help explain the variations observed in the mechanical properties of cells, especially in the context of cellular adhesion and interactions with substrates of varying stiffness and roughness. This potential for

practical applications should inspire and encourage further exploration in this field. While our research is focused on deterministic fractals, it opens up substantial potential for future studies to explore random fractals, such as self-affine surfaces or other geometric roughness models. These investigations could lead to the development of more effective diagnostic tools and material design strategies in engineering and medical research.

Acknowledgments

The authors acknowledge the financial support from the Brazilian agencies CNPq, CAPES, and FUNCAP. Author Declarations: The authors have no conflicts to disclose

-
- [1] D. Allara, A perspective on surfaces and interfaces, *Nature* 437 (2005) 638. <https://doi.org/10.1038/nature04234>
 - [2] C. L. N. Oliveira, J. A. K. Freire, V. N. Freire, and G. A. Farias, Effects of interfacial profiles on quantum levels in $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$ graded spherical quantum dots, *App. Surf. Sci.* 237 (2004) 266. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2004.06.048>
 - [3] C. L. N. Oliveira, J. A. K. Freire, V. N. Freire, and G. A. Farias, Inhomogeneous broadening arising from interface fluctuations in strained $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$ and $(\text{In}_u\text{Ga}_{1-u}\text{As})_v$ $(\text{InP})_{1-v}/\text{InP}$ quantum wells, *App. Surf. Sci.* 234 (2004) 38. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2004.05.055>
 - [4] M. Prutton, *Introduction to Surface Physics*, Oxford University Press, 1994.
 - [5] J. S. Andrade Jr., E. A. A. Henrique, M. P. Almeida, and M. H. A. S. Costa, Heat transport through rough channels, *Phys. A* 339 (2004) 296. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.03.066>
 - [6] C. L. N. Oliveira, F. K. Wittel, J. S. Andrade Jr, and H. J. Herrmann, Invasion percolation with a hardening interface under gravity, *Int. J. Mod. Phys. C* 21 (2010) 903. <https://doi.org/10.1142/S0129183110015555>
 - [7] E. K. Lenzi, A. A. Tateishi, H. V. Ribeiro, M. K. Lenzi, G. Gonçalves, and L. R. da Silva, Fractional diffusion equation, boundary conditions and surface effects, *J. Stat. Mech.* (2014) P08019. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2014/08/P08019>
 - [8] H. G. Chuah, W. H. Tan, B. P. Chang, T. S. Khoo, C. Y. Khor, and H. G. How, The influence of surface roughness on material dislocation of microindentation using bonded interface technique, *Tribology - Materials, Surfaces & Interfaces* 13 (4) (2019) 191. <https://doi.org/10.1080/17515831.2019.1643074>
 - [9] H. B. Yang and M. Dai, Influence of surface roughness on the stress field around a nanosized hole with surface elasticity, *Z. Angew. Math. Phys* 69 (2018) 127. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-1022-x>
 - [10] P. Mohammadi and P. Sharma, Atomistic elucidation of the effect of surface roughness on curvature-dependent surface energy, surface stress, and elasticity, *Appl. Phys. Lett.* 100 (2012) 133110. <https://doi.org/10.1063/1.3695069>
 - [11] A. McMillan, R. Jones, D. Peng, and G. A. Chechkin, A computational study of the influence of surface roughness on material strength, *Meccanica* 53 (2018) 2411. <https://doi.org/10.1007/s11012-018-0830-6>
 - [12] Y. Xiao, L. Wu, J. Luo, and L. Zhou, Mechanical response of thin hard coatings under indentation considering rough surface and residual stress, *Diamond and Related Materials* 108 (2020) 107991. <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2020.107991>
 - [13] A. Tiwari and B. N. J. Persson, Cylinder-flat contact mechanics with surface roughness, *Tribology Letters* 69 (1) (2021) 4. <https://doi.org/10.1007/s11249-020-01380-z>
 - [14] G. Peng, Y. Liu, F. Xu, H. Jiang, W. Jiang, and T. Zhang, On determination of elastic modulus and indentation hardness by instrumented spherical indentation: influence of surface roughness and correction method, *Mater. Res. Express* 10 (8) (2023) 086503. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/acebbb>
 - [15] A. Tiwari, A. Almqvist, and B. N. J. Persson, Plastic Deformation of Rough Metallic Surfaces, *Tribol. Lett.* 68 (2020) 129. <https://doi.org/10.1007/s11249-020-01368-9>
 - [16] J. S. de Sousa, J. A. C. Santos, E. B. Barros, L. M. R. Alencar, W. T. Cruz, M. V. Ramos, and J. Mendes Filho, Analytical model of atomic-force-microscopy force curves in viscoelastic materials exhibiting power law relaxation, *J. Appl. Phys.* 121 (2017) 034901. <https://doi.org/10.1063/1.4974043>
 - [17] J. S. de Sousa, R. S. Freire, F. D. Sousa, M. Radmacher, A. F. B. Silva, M. V. Ramos, A. C. O. Monteiro-Moreira, F. P. Mesquita, M. E. A. Moraes, R. C. Montenegro, and C. L. N. Oliveira, Double power-law viscoelastic relaxation of living cells encodes motility trends, *Sci. Rep.* 10 (2020) 4749. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-61631-w>
 - [18] I. V. M. Lima, A. V. S. Silva, F. D. Sousa, W. P. Ferreira, R. S. Freire, C. L. N. Oliveira, and J. S. de Sousa, Measuring the viscoelastic relaxation function of cells with a time-dependent interpretation of the Hertz-Sneddon indentation model, *Heliyon* 10 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e30623>
 - [19] A. L. D. Moura, W. V. Santos, F. D. Sousa, R. S. Freire, C. L. N. Oliveira, and J. S. Sousa, Viscoelastic relaxation of fibroblasts over stiff polyacrylamide gels by atomic force microscopy, *Nano Ex.* 4 (3) (2023) 035008. <https://doi.org/10.1088/2632-959X/acfb8>
 - [20] D. E. Discher, P. Janmey, and Y.-L. Wang, Tissue cells feel and respond to the stiffness of their substrate, *Science* 310 (2005) 1139. <https://doi.org/10.1126/science.1116995>
 - [21] H. Parameswaran, K. R. Lutchen, and B. Suki, A computational model of the response of adherent cells to stretch and changes in substrate stiffness, *J. Appl. Physiol.* 116 (2014) 825. doi:10.1152/jappphysiol.00962.2013

- [22] C. Rianna and M. Radmacher, Influence of microenvironment topography and stiffness on the mechanics and motility of normal and cancer renal cells, *Nanoscale* 9 (31) (2017) 11222. <https://doi.org/10.1039/C7NR02940C>
- [23] Q. Wen and P. A. Janmey, Polymer physics of the cytoskeleton, *Curr. Opin. Solid State and Materials, Science* 15 (2) (2011) 177. <https://doi.org/10.1016/j.cossms.2011.05.002>
- [24] X. Trepatt, G. Lenormanda and J. J. Fredberg, Universality in cell mechanics, *Soft Matter* 4 (9) (2008) 1750. <https://doi.org/10.1039/B804866E>
- [25] L. M. Rebelo, J. S. Sousa, J. Mendes Filho, and M. Radmacher, Comparison of the viscoelastic properties of cells from different kidney cancer phenotypes measured with atomic force microscopy, *Nanotechnol.* 24 (5) (2013) 055102. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/24/5/055102>
- [26] M. Lekka, Discrimination between normal and cancerous cells using AFM, *BioNanoSci* 6 (2016) 65. <https://doi.org/10.1007/s12668-016-0191-3>
- [27] D. Fisseha and V. K. Katiyar, Analysis of Mechanical Behavior of Red Cell Membrane in Sickle Cell Disease, *Appl. Math.* 2 (2012) 40. <https://doi.org/10.5923/j.am.20120202.08>
- [28] Y. Abidine, A. Giannetti, J. Revilloud, V. M. Laurent, and C. Verdier, Viscoelastic properties in cancer: From cells to spheroids, *Cells* 10 (7) (2021) 1704. <https://doi.org/10.3390/cells10071704>
- [29] M. Bogahawaththa, D. Mohotti, P. J. Hazell, H. Wang, K. Wijesooriya, and C. K. Lee, Energy absorption and mechanical performance of 3D printed Menger fractal structures, *Engineering Structures* 305 (2024) 117774. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117774>
- [30] P. Pavón-Domínguez, G. Portillo-García, A. Rincón-Casado, and L. Rodríguez-Parada, Influence of the fractal geometry on the mechanical resistance of cantilever beams designed through topology optimization, *Appl. Sci.* 11 (22) (2021) 10554. <https://doi.org/10.3390/app112210554>
- [31] J. Wang, Y. Zhang, N. He, and C. H. Wang, Crashworthiness behavior of Koch fractal structures, *Materials & Design* 144 (2018) 229. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.02.035>
- [32] A. Roy and K. Vemaganti, Fractal surface-based three-dimensional modeling to study the role of morphology and physiology in human skin friction, *Surf. Topogr.: Metrol. Prop.* 12 (1) (2024) 015006. <https://doi.org/10.1088/2051-672X/ad1fda>
- [33] L. Afferrante, G. Violano, and G. Carbone, Exploring the dynamics of viscoelastic adhesion in rough line contacts, *Sci. Rep.* 13 (1) (2023) 15060. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-39932-7>
- [34] I. Sokolov, Editorial - Fractals: a possible new path to diagnose and cure cancer? *Future Oncol.* 11 (22) (2015) 3049. <https://doi.org/10.2217/fon.15.211>
- [35] J. W. Baish and R. K. Jain, Fractals and Cancer, *Cancer Res.* 60 (2000) 3683.
- [36] R. Sedivy and R. M. Mader, Fractals, Chaos, and Cancer: Do They Coincide? *Cancer Investigation* 15 (6) (1997) 601. <https://doi.org/10.3109/07357909709047603>
- [37] M. E. Dokukin, N. V. Guz, R. M. Gaikwad, C. D. Woodworth, and I. Sokolov, Cell surface as a fractal: normal and cancerous cervical cells demonstrate different fractal behavior of surface adhesion maps at the nanoscale, *Phys. Rev. Lett* 107 (2) (2011) 028101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.028101>
- [38] M. A. Caporizzo, C. M. Roco, M. C. C. Ferrer, M. E. Grady, E. Parrish, D. M. Eckmann, and R. J. Composto, Strain-rate Dependence of Elastic Modulus Reveals Silver Nanoparticle Induced Cytotoxicity, *Nanobiomed.* 2 (2015) 9. <https://doi.org/10.5772/61328>
- [39] J. R. Tse and A. J. Engler, Preparation of Hydrogel Substrates with Tunable Mechanical Properties, *Current Protocols in Cell Biology* 47 (2010) 10.16.1. <https://doi.org/10.1002/0471143030.cb1016s47>
- [40] A. J. M. Spencer, *Continuum mechanics*, Courier Corporation, 2004.
- [41] R. Zielinski, C. Mihai, D. Kniss, and S. N. Ghadiali, Finite element analysis of traction force microscopy: influence of cell mechanics, adhesion, and morphology, *J. Biomech. Eng.* 135 (7) (2013) 071009-1. <https://doi.org/10.1115/1.4024467>
- [42] COMSOL Multiphysics@www.comsol.com. COMSOL AB, Stockholm, Sweden.
- [43] B. Suki, Y. Hu, N. Murata, J. Insirovic, J. R. Mondoñedo, C. L. N. Oliveira, N. Schaible, P. G. Allen, R. Krishnan, and E. Bartolák-Suki, A microfluidic chamber-based approach to map the shear moduli of vascular cells and other soft materials, *Sci. Rep.* 7 (2017) 2305. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-02659-3>
- [44] E. K. Dimitriadis, F. Horkay, J. Maresca, B. Kashar, and R. S. Chadwick, Determination of elastic moduli of thin layers of soft material using the atomic force microscope, *J. Biophys.* 82 (2002) 2798. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(02\)75620-8](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(02)75620-8)
- [45] D. F. S. Costa, J. L. B. de Araújo, C. L. N. Oliveira, and J. S. de Sousa, Nanoindentation in finite thickness viscoelastic materials, *Journal of Applied Physics* 132 (2022) 214701. <https://doi.org/10.1063/5.0127403>
- [46] I. Sneddon, The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, *Int. J. Eng. Sci.* 3 (1965) 47. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(65\)90019-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(65)90019-4)
- [47] F. B. de Sousa, P. K. V. Babu, M. Radmacher, C. L. N. Oliveira, and J. S. de Sousa, Multiple power-law viscoelastic relaxation in time and frequency domains with atomic force microscopy, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 54 (2021) 335401. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac02fa>
- [48] J. Feder, *Fractals*, 5th ed., Springer Science & Business Media, 2013.
- [49] R. Buzio, C. Boragno, F. Biscarini, F. B. de Mongeot, and U. Valbusa, Contact Mechanics and Friction of Fractal Surfaces Probed by Atomic Force Microscopy, *Nature Mater* 2 (2003) 233. <https://doi.org/10.1038/nmat855>
- [50] R. Buzio, K. Malyska, Z. Rymuza, C. Boragno, F. Biscarini, F. Buatier de Mongeot, and U. Valbusa, Experimental Investigation of the Contact Mechanics of Rough Fractal Surfaces, *IEEE Transactions on NanoBiosci.* 3 (2004) 27. doi: 10.1109/TNB.2003.820264