



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CAMPUS DE RUSSAS**  
**GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TALLES BRENER SANTIAGO DE MATOS**

**IMPLEMENTAÇÃO DE PLANILHA ELETRÔNICA PARA CÁLCULO DE**  
**ESFORÇOS E TENSÕES EM VIGAS**

**RUSSAS**

**2024**

TALLES BRENER SANTIAGO DE MATOS

IMPLEMENTAÇÃO DE PLANILHA ELETRÔNICA PARA O CÁLCULO DE ESFORÇOS  
E TENSÕES EM VIGAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Cândido Jorge de Sousa Lobo.

RUSSAS

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- M382i Matos, Talles Brener Santiago de.  
Implementação de planilha eletrônica para o cálculo de esforços e tensões em vigas / Talles Brener Santiago de Matos. – 2023.  
89 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, Curso de Engenharia Mecânica, Russas, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Cândido Jorge de Sousa Lobo.
1. Vigas. 2. Força cortante. 3. Momento fletor. 4. Planilha eletrônica. 5. Algoritmo. I. Título.  
CDD 620.1
-

TALLES BRENER SANTIAGO DE MATOS

IMPLEMENTAÇÃO DE PLANILHA ELETRÔNICA PARA O CÁLCULO DE ESFORÇOS  
E TENSÕES EM VIGAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Engenharia  
Mecânica da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial à obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 23/09/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Cândido Jorge de Sousa Lobo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. George Luiz Gomes de Oliveira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ramon Rudá Brito Medeiros  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais e a todos que acreditaram em mim e se esforçaram juntos.

## RESUMO

A análise das estruturas é importante para verificar a segurança e eficácia de projetos. Nesse contexto, as vigas se tornam uma importante estrutura e possuem um papel fundamental para suportar cargas e transmitir forças. Para isso, compreender a força cortante, o momento fletor, bem como as tensões de flexão e cisalhamento em vigas é necessário para entender o comportamento estrutural e dimensionar as vigas adequadamente. Este trabalho tem como proposta a criação de uma planilha eletrônica capaz de calcular a força cortante e o momento fletor em várias seções de vigas plotando os resultados destacando o valor máximo de cada. Além disso, por meio desses cálculos, é possível determinar a máxima tensão de flexão e cisalhamento transversal. Dessa forma, a planilha eletrônica foi desenvolvida numa ferramenta acessível visando fornecer uma solução prática para estudantes, onde o trabalho foi desenvolvido através de cálculos e implementação de algoritmos para obter as variáveis em tipos de vigas sob diferentes condições de carga e perfis. Assim, foi usado cálculos de equilíbrio e aproximados para resolver problemas com diferentes carregamentos nas vigas, a precisão da planilha foi verificada comparando seus resultados com análises teóricas e soluções encontradas em revisões bibliográficas. Diante disso, espera-se que ao utilizar esta planilha eletrônica, os estudantes tenham à disposição uma ferramenta versátil e simples de operar para analisar vigas, que irá contribuir para a criação de projetos mais seguros e eficazes na área.

**Palavras-chave:** vigas; força cortante; momento fletor; planilha eletrônica; algoritmo.

## ABSTRACT

Analysis of structures is important to verify the safety and effectiveness of projects. In this context, beams become an important structure and play a fundamental role in supporting loads and transmitting forces. To achieve this, understanding the shear force, bending moment, as well as bending and shear stresses in beams is necessary to understand the structural behavior and size the beams appropriately. This work proposes the creation of an electronic spreadsheet capable of calculating the shear force and bending moment in several sections of beams, plotting the results highlighting the maximum value of each. Furthermore, through these calculations, it is possible to determine the maximum flexural and transverse shear stress. In this way, the electronic spreadsheet was developed into an accessible tool aiming to provide a practical solution for students, where the work was developed through calculations and implementation of algorithms to obtain variables in types of beams under different load conditions and profiles. Thus, equilibrium and approximate calculations were used to solve problems with different loads on the beams, the accuracy of the spreadsheet was verified by comparing its results with theoretical analyzes and solutions found in literature reviews. Therefore, it is expected that when using this spreadsheet, students will have at their disposal a versatile and simple-to-operate tool for analyzing beams, which will contribute to the creation of safer and more effective projects in the area.

**Keywords:** beams; cutting force; bending moment; electronic spreadsheet; algorithm.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - FORÇAS DE EQUILÍBRIO .....	19
FIGURA 2 - MOMENTO DE UMA FORÇA .....	20
FIGURA 3 - VIGA BI APOIADA COM CARREGAMENTO CONTÍNUO .....	22
FIGURA 4 - VIGA ENGASTADA EM BALANÇO.....	22
FIGURA 5 - VIGA ENGASTADA EM BALANÇO.....	23
FIGURA 6 – CENTROIDE DO TRIÂNGULO .....	27
FIGURA 7 – ESFORÇO CORTANTE .....	29
FIGURA 8 – DIAGRAMA ESFORÇO CORTANTE.....	30
FIGURA 9 – VIGA 1 SECCIONADA .....	31
FIGURA 10 – DIAGRAMA DE FORÇAS .....	32
FIGURA 11 – VIGA 2 SECCIONADA .....	32
FIGURA 12 – VIGA 3 SECCIONADA .....	34
FIGURA 13 – MOMENTO FLETOR .....	37
FIGURA 14 – CARGA DISTRIBUÍDA SOB UMA VIGA.....	38
FIGURA 15 – DIAGRAMA MOMENTO FLETOR.....	38
FIGURA 16 – TENÇÃO DE FLEXÃO.....	43
FIGURA 17 – DIMENSÕES DO PERFIL .....	47
FIGURA 18 – CENTROIDE DO PERFIL I .....	48
FIGURA 19 – DIMENSÕES PERFIL EM T .....	49
FIGURA 20 – CENTROIDE PERFIL EM T .....	50
FIGURA 21 – DIMENSÕES PERFIL CÚBICO .....	52
FIGURA 22 – TENSÃO CISALHAMENTO .....	53
FIGURA 23 – PORÇÃO SUPERIOR DO PERFIL EM T .....	55
FIGURA 24 – DIMENSÕES DA PORÇÃO SUPERIOR .....	55
FIGURA 25 – CENTRO DE GRAVIDADE VIGA EM T .....	57
FIGURA 26 – LINHA NEUTRA PERFIL CÚBICO .....	58
FIGURA 27 – EP1 .....	60
FIGURA 28 – PERFIL DO EXERCÍCIO PROPOSTO 1 .....	60
FIGURA 29 – VALORES NA PLANILHA.....	61
FIGURA 30 – REAÇÕES ARMAZENADAS EM CÉLULAS .....	62
FIGURA 31 – EP 2 .....	65
FIGURA 32 – MEDIDAS PERFIL EM T.....	66



FIGURA 33 – ARMAZENAMENTO EP2 .....	66
FIGURA 34 – FORÇAS EP2 .....	67
FIGURA 35 – TRECHO AB EP2.....	67
FIGURA 36 – TRECHO BC EP2 .....	68
FIGURA 37 – TRECHO CD EP2.....	69
FIGURA 38 – VALORES DAS VARIÁVEIS EP2.....	70
FIGURA 39 – FLEXÃO E CISALHAMENTO EP2 .....	71
FIGURA 40 – EP3 .....	71
FIGURA 41 – PERFIL EP3 .....	72
FIGURA 42 – VALORES EP3 .....	72
FIGURA 43 – FORÇAS EP3 .....	73
FIGURA 44 – VARIÁVEIS EP3.....	75
FIGURA 45 – FLEXÃO E CISALHAMENTO EP3 .....	75
FIGURA 46 – ESFORÇO CORTANTE EP1 .....	77
FIGURA 47 – MOMENTO FLETOR EP1 .....	77
FIGURA 48 – FLEXÃO E CISALHAMENTO MÁXIMO EP1 .....	78
FIGURA 49 – FORÇA CORTANTE EP2.....	79
FIGURA 50 – MOMENTO FLETOR EP2 .....	80
FIGURA 51 – FLEXÃO E CISALHAMENTO MÁXIMO EP2 .....	81
FIGURA 52 – FORÇA CORTANTE EP3.....	82
FIGURA 53 – MOMENTO FLETOR EP3 .....	83
FIGURA 54 - FLEXÃO E CISALHAMENTO EP3 .....	83

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COMPRIMENTO EM FUNÇÃO DO CORTANTE E FLETOR DO EP 1	63
TABELA 2 – CORTANTE E FLETOR MÁXIMO DO EP 1	63
TABELA 3 – VARIÁVEIS CALCULADAS EP1	64
TABELA 4 – FLEXÃO E CISALHAMENTO MÁXIMO EP1	64
TABELA 5 – TRECHOS, CORTANTES E FLETORES EP3	74
TABELA 6 – TRECHOS EP1	76
TABELA 7 – TRECHOS EP2	78
TABELA 8 – TRECHOS EP3	81

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A	Área
Ax	Reação de apoio no ponto A no eixo X
Ay	Reação de apoio no ponto A no eixo Y
b	Base
By	Reação de apoio no ponto B no eixo Y
C	Centroide
Cent	Centroide
d	Distância
E	Espessura
EP	Exercício Proposto
F	Força
Feq	Força Equivalente
Fx	Força no Eixo X
Fy	Força no Eixo Y
h	Altura
H	Altura
I	Inércia
KN	Kilo Newton
L	Comprimento
LN	Linha Neutra
M	Momento Fletor
m	Metros
Ma	Momento no ponto A
mm	Milímetros
Mo	Momento na origem
MPa	Mega Pascal
V	Força Cortante
Yg	Centro de Gravidade
$\sigma$	Tensão de Flexão
$\tau$	Tensão de Cisalhamento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>OBJETIVO GERAL</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Objetivos Específicos</i> .....	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>PLANILHA ELETRÔNICA</b> .....	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>FORÇAS EXTERNAS</b> .....	<b>19</b>
<b>3.2.1</b>	<i>Forças Externas nas Vigas</i> .....	<b>22</b>
<b>3.3</b>	<b>ESFORÇO CORTANTE</b> .....	<b>28</b>
<b>3.3.1</b>	<i>Força Cortante nas Vigas</i> .....	<b>31</b>
<b>3.4</b>	<b>MOMENTO FLETOR</b> .....	<b>36</b>
<b>3.4.1</b>	<i>Momento Fletor nas Vigas</i> .....	<b>39</b>
<b>3.5</b>	<b>TENSÃO DE FLEXÃO</b> .....	<b>42</b>
<b>3.5.1</b>	<i>Centroide</i> .....	<b>44</b>
<b>3.5.2</b>	<i>Momento de Inércia</i> .....	<b>45</b>
<b>3.5.3</b>	<i>Tensão de Flexão nas vigas</i> .....	<b>47</b>
<b>3.6</b>	<b>TENSÃO DE CISALHAMENTO</b> .....	<b>53</b>
<b>3.6.1</b>	<i>Tensão de Cisalhamento nas Vigas</i> .....	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	<b>60</b>
<b>4.1</b>	<b>VIGA BI APOIADA COM CARREGAMENTO CONTÍNUO</b> .....	<b>60</b>
<b>4.2</b>	<b>VIGA ENGASTADA EM BALANÇO</b> .....	<b>65</b>
<b>4.3</b>	<b>VIGA BI APOIADA COM DOIS CARREGAMENTOS LINEARES</b> .....	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>76</b>
<b>5.1</b>	<b>EXEMPLO 1</b> .....	<b>76</b>
<b>5.2</b>	<b>EXEMPLO 2</b> .....	<b>78</b>
<b>5.3</b>	<b>EXEMPLO 3</b> .....	<b>81</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>85</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>87</b>
	<b>LISTA DE FÓRMULAS</b> .....	<b>88</b>
	<b>APENDICE A – INTERFACE DAS PLANILHAS</b> .....	<b>91</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a engenharia tem passado por uma transformação que foi dada pela necessidade de maior eficiência e precisão. Dito isto, o uso de planilhas eletrônicas se tornou mais comum em diversas áreas, e na engenharia não foi diferente, alguns *softwares* conhecidos por oferecer essa ferramenta, trazem uma maneira prática e acessível de lidar com problemas diversos, facilitando o trabalho tanto de profissionais quanto de estudantes da área.

Antes da popularização dessas ferramentas, os cálculos eram realizados manualmente, isso tornava o processo não apenas demorado, mas também sujeito a erros, especialmente em projetos mais complexos (Smith e Peterson, 2017). A chegada das planilhas mudou o cenário, permitindo que profissionais com conhecimento básico de planilhas eletrônicas pudessem realizar cálculos precisos e eficientes.

Uma das grandes vantagens das planilhas eletrônicas é a sua flexibilidade, elas permitem que o usuário crie suas próprias fórmulas e modelos, adaptando a ferramenta às necessidades específicas de cada projeto (Dias e Silva, 2019). Isso significa que, com um pouco de conhecimento, é possível criar uma planilha que automatiza cálculos complexos ao mesmo tempo produzindo gráficos que ajudam na visualização dos resultados.

Essas planilhas podem ser integradas a outras ferramentas, como *softwares* de modelagem em 3D, isso amplia ainda mais suas capacidades permitindo que dados sejam exportados para outros programas, onde podem ser analisados e verificados (Mendes e Carvalho, 2020). Essa medida não só acelera o processo de projeto, mas também garante que os resultados sejam mais confiáveis.

Outro aspecto importante é a acessibilidade das planilhas eletrônicas, que por serem amplamente utilizadas em diversas áreas, há uma vasta quantidade de tutoriais e materiais didáticos disponíveis, o que facilita o aprendizado e o domínio da ferramenta. Como as planilhas podem ser facilmente compartilhadas, elas se tornam uma excelente ferramenta para o trabalho em equipe, permitindo que profissionais de diferentes áreas colaborem de maneira mais eficaz (Gomes e Almeida, 2021).

Ao adotar as planilhas, empresas não só otimizam seus processos, mas também promovem uma cultura de inovação entre seus colaboradores. Ao incentivar o uso dessas ferramentas, as empresas estão investindo no desenvolvimento contínuo de suas equipes, estimulando a busca por soluções mais eficientes e práticas de projeto mais modernas (Martins e Ribeiro, 2018).

Este trabalho, portanto, busca explorar como a implementação de planilhas eletrônicas pode transformar o cálculo, especificamente em vigas, analisando as vantagens, as limitações e o impacto dessa tecnologia na prática da engenharia. A partir dessa análise, espera-se contribuir para a disseminação dessa prática entre profissionais e estudantes, destacando a importância de modernizar as ferramentas utilizadas no cálculo estrutural.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma planilha eletrônica para determinar a força cortante máxima, momento fletor máximo, tensão de flexão máxima e tensão de cisalhamento máximo.

#### 2.1.1 *Objetivos Específicos*

- Estudar o esforço cortante em 3 tipos de vigas com diferentes reações de apoio;
- Destacar o momento fletor nessas mesmas vigas;
- Avaliar o diagrama do Esforço Cortante e Momento Fletor;
- Destacar a Tensão de Flexão Máxima nessas vigas com diferentes perfis;
- Mostrar a Tensão de Cisalhamento Máximo nessas vigas;

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial bibliográfico em conceitos-chave como planilha eletrônica, momento fletor, esforço cortante, tensão de flexão, tensão de cisalhamento. Esse conteúdo irá nortear os fundamentos básicos que permitiram o desenvolvimento deste trabalho, buscando evidenciar de forma clara e objetiva os resultados e conclusões apresentados.

#### 3.1 Planilha Eletrônica

As planilhas eletrônicas se tornaram uma ferramenta em diversas áreas do conhecimento, desde que foram popularizadas nos anos de 1980, elas vêm desempenhando um papel importante em cálculos e análise de dados, especialmente em projetos que exigem precisão e eficiência (Gomes e Almeida, 2021).

Essas planilhas surgiram em resposta à necessidade de automatizar cálculos que antes eram feitos de forma manual. Os *softwares* de planilhas eletrônicas se tornaram uma ferramenta fundamental para profissionais de diversas áreas, e não demorou para que fosse adotado por engenheiros. A grande vantagem das planilhas eletrônicas é sua simplicidade e flexibilidade, permitindo que estudantes com conhecimento básico possam realizar cálculos complexos de forma organizada e precisa (Gomes e Almeida, 2021).

Uma das características mais marcantes das planilhas é a disposição das células em linhas e colunas, onde é possível inserir números, textos e, principalmente, fórmulas. Essa estrutura facilita a realização de cálculos automatizados, por exemplo, é possível criar modelos que simulam o comportamento de uma viga sob diferentes condições de carga, permitindo ajustes rápidos e análises comparativas que ajudam a otimizar o projeto (Dias e Silva, 2019).

Isso é extremamente útil para usuários que precisam lidar com projetos únicos, onde as condições específicas exigem soluções customizadas (Dias e Silva, 2019). Outro ponto positivo é a possibilidade de visualizar os resultados através de gráficos e tabelas, o que facilita a interpretação dos dados e a apresentação dos resultados para outras pessoas envolvidas no projeto (Gonçalves e Santos, 2018).

Apesar de todas essas vantagens, é importante reconhecer que as planilhas também têm suas limitações, a flexibilidade que permite personalizar as planilhas pode levar a erros caso as fórmulas forem implementadas incorretamente. Além disso, à medida que o projeto se torna mais complexo, as planilhas podem se tornar difíceis de gerenciar, especialmente quando



precisam lidar com grandes volumes de dados ou cálculos muito sofisticados (Panko, 1998). Em projetos de maior escala, pode ser necessário integrar as planilhas com *softwares* mais avançados para garantir que todas as variáveis do projeto sejam consideradas de forma precisa (Mendes e Carvalho, 2020).

Combinar planilhas eletrônicas com outros *softwares* permite que os profissionais aproveitem melhor de cada ferramenta, por exemplo, um engenheiro pode usar uma planilha para calcular as forças atuantes em uma estrutura e, em seguida, exportar esses dados para um *software* de análise estrutural para realizar uma verificação mais detalhada. Esse tipo de integração não só torna o processo de design mais eficiente, como também melhora a qualidade dos resultados (Martins e Almeida, 2021).

Vale destacar que o uso dessas planilhas continua a evoluir, novas funcionalidades, como automação de tarefas por meio de macros e *scripts*, tornam essas ferramentas cada vez mais eficientes. Diante disso, com o avanço da inteligência artificial e da *big data*, as planilhas eletrônicas estão se transformando em ferramentas ainda mais inteligentes, capazes de fornecer análises avançadas e apoiar a tomada de decisões em tempo real (Dias e Silva, 2019).

### 3.2 Forças Externas

Para garantir que uma viga esteja em equilíbrio e possa suportar as cargas aplicadas sem falhar, utilizam-se as equações de equilíbrio. Estas equações permitem determinar as forças internas e as reações nos apoios assegurando que a estrutura mantenha sua integridade sob diversas condições de carga. Esse conceito de equilíbrio estático é fundamental na análise de qualquer estrutura (Meriam e Kraige, 2015). Para que uma viga esteja em equilíbrio estático, duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

Figura 1 - Forças de Equilíbrio

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array}$$

Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

A soma de todas as forças atuando sobre a viga devem ser iguais a zero. Isso significa que as forças aplicadas para cima devem ser equilibradas pelas forças aplicadas para

baixo e o mesmo se aplica para as forças horizontais. Matematicamente, isto é expresso como:

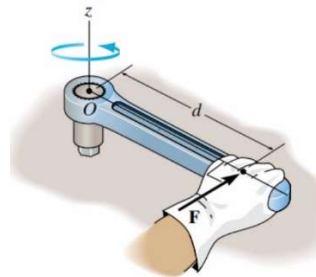
$$\sum Fy = 0 \quad (1)$$

$$\sum Fx = 0 \quad (2)$$

São as componentes das forças na direção vertical e horizontal, respectivamente (Meriam e Kraige, 2015).

Diante disso é incluído a soma de todos os momentos atuando sobre a viga em torno de qualquer ponto deve ser zero. Esse momento é uma medida da tendência de uma força causar rotação em torno de um ponto ou eixo. Para se calcular o momento é preciso do braço de alavanca onde a força está sendo aplicada (Hibbeler, 2017).

Figura 2 - Momento de uma Força



Fonte: Estática para Mecânica, Hibbeler (2017).

Esta condição é expressa como:

$$\sum M_o = 0 \quad (3)$$

De acordo com a figura 2, tem-se que o cálculo do momento da força aplicada na ferramenta seria feito a partir do ponto O, ficando da seguinte forma:

$$\sum M_o = F \times d \quad (4)$$

Onde, M é a resultante das forças aplicadas em torno de um ponto específico (Hibbeler, 2017).

Essas condições de equilíbrio garantem que a viga não se moverá ou girará sob a

ação das forças aplicadas, assegurando que a estrutura permaneça estável e segura, elas são aplicadas para determinar as reações nos apoios de uma viga, as quais são essenciais para a análise estrutural. Em uma viga simplesmente apoiada as reações nos apoios são calculadas considerando as forças e os momentos aplicados na viga (Hibbeler, 2017).

As reações de apoio variam dependendo do tipo de apoio e da configuração da viga, de maneira geral, os apoios podem ser classificados como os apoios simples ou pinos que resistem a forças verticais e permitem rotação, mas não resistem a forças horizontais ou momentos. As reações nesse tipo de apoio são geralmente forças verticais. Os apoios rolantes permitem movimento horizontal, resistindo apenas a forças verticais (Beer, 2015).

Outra configuração comum é a viga engastada em que uma das extremidades é fixada, o que significa que o apoio resiste a forças horizontais e verticais, além de momentos. A presença do momento de reação no apoio engastado adiciona uma complexidade à análise (Gere e Timoshenko, 2017).

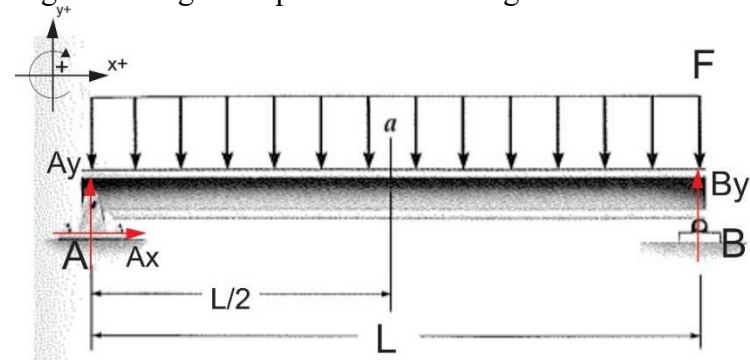
As vigas além de sofrer forças externas e reações de apoio, elas ainda podem ter outras configurações de forças agindo, como os carregamentos aplicados que podem ser classificados principalmente em duas categorias: carregamentos contínuos e pontuais. Os carregamentos pontuais são aplicados em um ponto específico da viga, um exemplo comum é o peso de um objeto concentrado em uma viga, como uma carga de um pilar ou uma máquina. Para analisar uma viga sob carga pontual, é usado equações de equilíbrio para determinar como essa carga afeta as reações nos apoios e as forças internas, o cálculo envolve somar os momentos em torno dos apoios para encontrar as reações e depois analisar a distribuição de forças ao longo da viga (Meriam e Kraige, 2015).

Os carregamentos contínuos são distribuídos ao longo de uma parte ou toda a extensão da viga, por exemplo, o peso de uma laje ou a carga de uma carga uniformemente distribuída ao longo de uma viga. A análise de vigas com carregamentos contínuos é um pouco mais complexa, pois o carregamento deve ser integrado ao longo da extensão da viga para determinar a carga total e como ela se distribui. Isso é feito somando os efeitos de todas as pequenas seções da viga, o que resulta em uma distribuição de forças mais uniforme. Para uma carga uniformemente distribuída de intensidade  $w$  ao longo de uma viga de comprimento  $L$ , a carga total é  $F_{eq} = w \times L$ . As reações nos apoios e as forças internas são calculadas integrando o efeito do carregamento distribuído. (Gere e Timoshenko, 2017).

### 3.2.1 Forças Externas nas Vigas

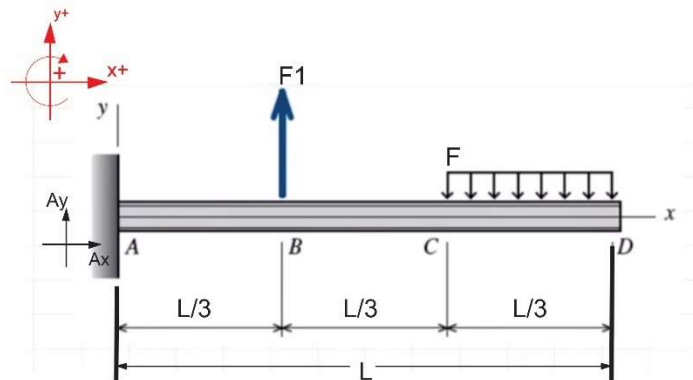
Os exemplos a seguir é possível ver todas essas relações para o cálculo das reações de equilíbrio, além disso, torna-se necessário o conhecimento do cálculo de um carregamento contínuo, que é dado pela sua forma geométrica (Hibbeler, 2017).

Figura 3 - Viga Bi Apoiada com Carregamento Contínuo



Fonte: Adaptado do Hibbeler (2017).

Figura 4 - Viga Engastada em Balanço

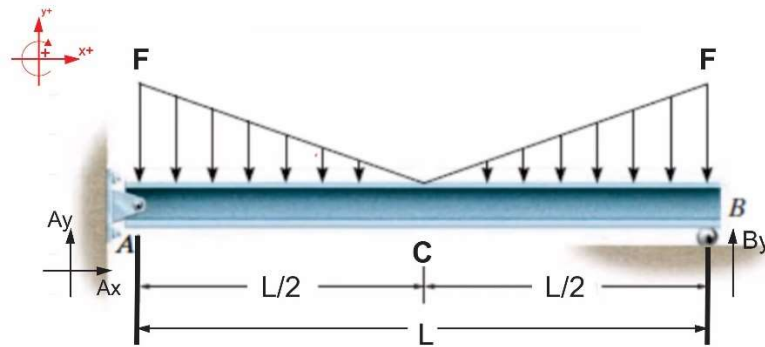


Fonte: Adaptado do Hibbeler (2017).

Os exemplos 1 e 2, figuras 3 e 4, são formatos retangulares, logo a força equivalente  $F_{eq}$  do carregamento fica da seguinte forma, adotando B como base e H como altura.

$$F_{eq} = B \times H \quad (5)$$

Figura 5 - Viga Engastada em Balanço



Fonte: Adaptado do Hibbeler (2017).

Já o exemplo 3, figura 5, a forma geométrica é triangular, ficando da seguinte forma,

$$F_{eq} = \frac{B \times H}{2} \quad (6)$$

Para a análise da estrutura da figura 3, foi feito o cálculo para casos gerais que segue essa estrutura, estrutura essa com duas reações de apoio e uma carga contínua durante toda a viga. Como visto na imagem, o ponto A está com um Pino Externo tendo como reações no eixo Ax e Ay, já o ponto B está sob efeito de um Rolete tendo como reação apenas o eixo By. A viga apresentada tem o comprimento L e está sob efeito de uma carga contínua com uma força F na direção vertical para baixo. Para realizar os cálculos de casos gerais para esse tipo de estrutura usando as orientações apresentadas na imagem, tem-se que:

$$F_{eq} = L \times F \quad (7)$$

Em que L está em metros e F está em KN por metro, logo a força equivalente  $F_{eq}$  resulta em KN. A seguir é mostrado que as forças resultantes no eixo X é igual a zero, pois é visto que a única reação nesse eixo é zerada.

$$\sum F_x = 0 \quad (8)$$

Logo aplicando no exemplo 1, tem-se:

$$Ax = 0 \quad (9)$$

Como mostrado tem-se também o cálculo do momento resultante na reação de equilíbrio, onde o somatório de todos os momentos é zerado, no caso do exemplo 1, a única reação do momento é no ponto A, sendo assim:

$$\sum Ma = 0 \quad (10)$$

Logo aplicando no exemplo 1, tem-se:

$$B_y \times L - Feq \times \frac{L}{2} = 0 \quad (11)$$

Logo, realizando as operações algébricas, tem-se:

$$B_y = \frac{Feq}{2} \quad (12)$$

Com a reação  $B_y$  sendo calculada é possível agora calcular a reação  $A_y$ , através do somatório de forças no eixo Y, da seguinte forma:

$$A_y + B_y = 0 \quad (13)$$

Realizando as operações algébricas temos que:

$$A_y = -B_y = -\frac{Feq}{2} \quad (14)$$

O sinal negativo apresentado mostra apenas que o sentido adotado é o oposto.

Para o segundo exemplo, figura 4, é abordado uma complexidade maior, pois para o desenvolvimento do cálculo das reações de apoio de forma geral, tem-se que seccionar a viga em três partes. Diferentemente do exemplo 1, essa viga tem apenas a reação de apoio no ponto A, tanto no eixo X como no eixo Y, do engaste na parede, além das forças externas  $F_1$  e a carga contínua exercida pela força  $F$ . Tem-se também que o comprimento da viga é  $L$  em metros e que cada trecho a ser analisado se encontra a cada um terço do comprimento.

Na reação de apoio no ponto A é visto que temos tanto a reação no eixo horizontal,  $A_x$ , como a reação no eixo vertical,  $A_y$ . Dessa forma, para dar procedimento aos cálculos das reações de equilíbrio, temos:

$$F_{eq} = \frac{L}{3} \times F \quad (15)$$

Do mesmo modo temos o cálculo da força equivalente da carga contínua encontrada na extremidade da viga em KN, visto que L está em metros e a força F está em KN por metro.

Para o eixo X, tem-se que:

$$\sum F_x = 0 \quad (16)$$

Logo,

$$A_x = 0 \quad (17)$$

Seguindo para o eixo vertical Y, temos a mesma lógica,

$$\sum F_y = 0 \quad (18)$$

Logo,

$$A_y + F_1 - F_{eq} = 0 \quad (19)$$

$$A_y = F_{eq} - F_1 \quad (20)$$

Igualmente temos o cálculo para encontrar as reações  $A_x$  e  $A_y$ , dando continuidade é necessário o cálculo do momento no ponto A, pois para que se tenha equilíbrio todas as reações devem ser zeradas. Com isso, temos que para o cálculo do momento,

$$M_A - F_1 \times \frac{L}{3} + F_{eq} \times \frac{5L}{6} = 0 \quad (21)$$

$$M_A = F_1 \times \frac{L}{3} - F_{eq} \times \frac{5L}{6} \quad (22)$$

Com isso temos todas as reações de equilíbrio para esta viga.

Para o exemplo 3, figura 5, temos uma viga com duas reações de apoio, porém com dois carregamentos contínuos, apresentado a seguir. Esta viga tem comprimento  $L$  em metros, sendo o centro dela no ponto  $C$ . Como visto na Figura 3, a viga tem um pino externo no ponto  $A$ , tendo como reações  $A_x$  na horizontal e  $A_y$  na vertical, e no ponto  $B$  tem um balanço, tendo como uma reação  $B_y$  na vertical.

Além das reações de apoio, tem-se a força externa exercida pelos carregamentos contínuos com a forma geométrica de um triângulo, ambos exercidos pela mesma força  $F$  em KN. Como feito nos exemplos anteriores é preciso encontrar as reações de apoio para o cálculo do equilíbrio, usando o somatório de forças em  $X$ ,  $Y$  e o somatório do momento, todos igual a zero.

Primeiramente temos que a força equivalente vai ser dada pela área da forma geométrica do carregamento, para este com forma triangular tem-se que a área triangular  $A_t$  é (Beer, 2015):

$$A_t = \frac{BxH}{2} \quad (23)$$

Em que a base  $B$  é a metade do comprimento da viga e a altura é a força  $F$ , dessa forma,

$$F_{eq} = \frac{F x \frac{L}{2}}{2} \quad (24)$$

$$F_{eq} = \frac{F x L}{4} \quad (25)$$

Dado o exposto para o eixo  $X$  na horizontal, tem-se,

$$\sum F_x = 0 \quad (26)$$

$$A_x = 0 \quad (27)$$

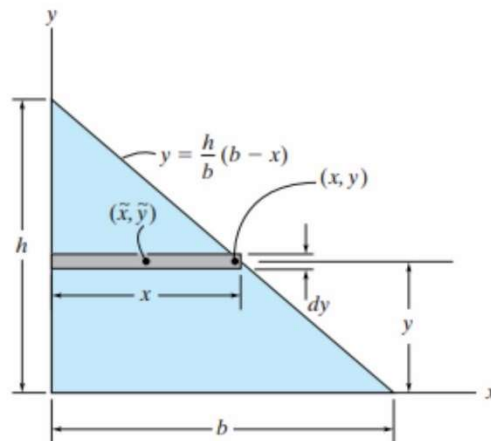
Antes do cálculo da reação em  $Y$ , foi visto que seria necessário realizar o somatório



do momento no ponto A para que assim pudéssemos encontrar a reação  $B_y$  no ponto B, dessa forma,

Para o cálculo do momento é preciso encontrar o centroide da figura triangular para que assim possamos ter o braço de alavanca e para o seguinte formato tem-se o padrão a se seguir para achar o centroide da carga continua apresentada na figura 5.

Figura 6 – Centroide do Triângulo



Fonte: Mecânica dos Materiais, Beer (2015).

Para o centroide de um triângulo retângulo temos as seguintes fórmulas já determinadas como visto no Resistência dos materiais, Hibbeler (2017).

$$\bar{X} = \frac{B}{3} \quad (28)$$

$$\bar{Y} = \frac{H}{3} \quad (29)$$

Então com isso é possível calcular o momento em relação ao ponto A da viga, da seguinte forma:

$$\sum M_A = 0 \quad (29)$$

$$Feq x \frac{L}{6} + Feq x \frac{5L}{6} - B_Y x L = 0 \quad (30)$$

$$Feq \times L = By \times L \quad (31)$$

$$By = Feq \quad (32)$$

Para o cálculo da reação no eixo Y na vertical, tem-se que,

$$\sum Fy = 0 \quad (33)$$

$$Ay + By - Feq - Feq = 0 \quad (34)$$

$$Ay + By = 2 \times Feq \quad (35)$$

$$Ay = 2 \times Feq - By \quad (36)$$

$$Ay = Feq \quad (37)$$

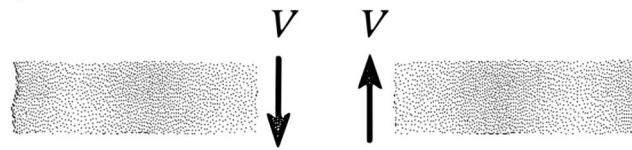
Dessa forma é mostrado que para casos gerais dessa viga, com essa estrutura, a reação  $Ay$  e  $By$  são iguais, e ambas têm o mesmo valor da  $Feq$ .

### 3.3 Esforço Cortante

As forças cortantes surgem quando uma carga é aplicada perpendicularmente ao eixo longitudinal de uma estrutura. Essas forças atuam paralelamente à seção transversal do material, gerando tensões internas chamadas tensões cortantes  $\tau$ . Segundo Hibbeler (2017), a tensão cortante pode ser expressa pela equação  $\tau = V/A$ , onde  $V$  é a força cortante e  $A$  é a área da seção transversal.

Essas forças são importantes para o dimensionamento e a análise de vigas, colunas e outros elementos. Gere e Timoshenko (2017) explicam que as forças cortantes são geralmente mais elevadas perto dos apoios e menores nas regiões centrais das vigas, isso ocorre porque os apoios precisam resistir às forças verticais que agem sobre a estrutura, resultando em forças cortantes mais intensas nesses pontos.

Figura 7 – Esforço Cortante



### Cisalhamento interno positivo

Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Entender a distribuição dessas forças é necessário para evitar falhas estruturais, como fissuras e rupturas, especialmente em materiais frágeis. Beer, Johnston e DeWolf (2015) enfatizam que o projeto seguro de estruturas deve considerar tanto as forças cortantes quanto as tensões de flexão, que ocorrem simultaneamente e podem afetar a resistência total da estrutura.

A distribuição das forças cortantes ao longo de uma viga varia de acordo com o tipo de carregamento e as condições de apoio, em uma viga apoiada com uma carga pontual no centro, as forças cortantes são máximas nos apoios e diminuem linearmente até o ponto de aplicação da carga. Gere e Timoshenko (2017) ilustram que, em vigas com carregamento distribuído, as forças cortantes se distribuem de forma triangular, com o valor máximo nos apoios e mínimo no ponto médio.

Além disso, a distribuição das forças cortantes na seção transversal da viga também não é uniforme. Hibbeler (2017) explica que, em uma seção retangular, as forças cortantes são máximas na linha neutra da seção e nulas nas extremidades. Em perfis mais complexos, como vigas em I, a maior parte da força cortante se concentra no centro do perfil.

O cálculo dessas forças envolve a construção de diagramas de força cortante, que mostram como a força varia ao longo do comprimento da viga. Meriam e Kraige (2015) destacam que esses diagramas são fundamentais para identificar pontos críticos onde as forças cortantes são máximas e, portanto, onde há maior risco de falha. Essas forças cortantes resultam em tensões de cisalhamento dentro do material, que são essenciais para o dimensionamento de componentes estruturais.

Segundo Beer, Johnston e DeWolf (2015), as tensões de cisalhamento são uma das principais causas de falhas em materiais, em estruturas de aço essas tensões são críticas para o dimensionamento de conectores, como parafusos e rebites, que devem resistir às forças cortantes sem falhar.

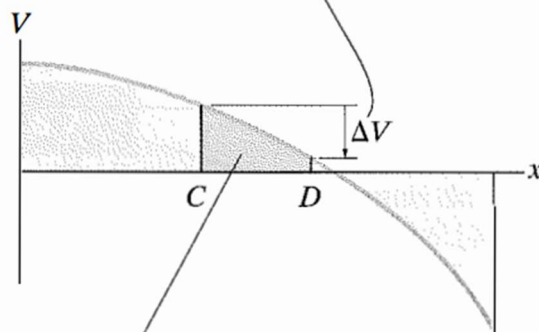
Gere e Timoshenko (2017) explicam que, em seções de vigas onde as tensões de cisalhamento são elevadas é comum encontrar reforços ou o uso de materiais com alta

resistência ao cisalhamento para prevenir falhas estruturais, por exemplo em pontes as forças cortantes determinam a espessura das vigas, que são dimensionadas para suportar as forças geradas pelo tráfego. Hibbeler (2017) destaca que, em edifícios, as forças cortantes influenciam o projeto de vigas e colunas para garantir que suportem cargas dinâmicas, como vento e terremotos.

Nos componentes mecânicos, como eixos e engrenagens, as forças cortantes são essenciais para garantir a durabilidade e a resistência ao desgaste. Meriam e Kraige (2015) enfatizam que a análise correta das forças cortantes em tais componentes é importante para evitar falhas por fadiga.

Algumas irregularidades na seção transversal, como furos e entalhes, podem concentrar as forças cortantes, aumentando o risco de falhas estruturais, nesses casos o uso de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), pode ser necessário para prever com precisão a distribuição das forças cortantes e evitar problemas.

Figura 8 – Diagrama Esforço Cortante



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Para facilitar a visualização do esforço cortante é feito um diagrama representando a variação dela ao longo do comprimento de uma viga. Este diagrama permite identificar rapidamente onde as forças cortantes são mais intensas e, conseqüentemente, onde a viga está mais sujeita a falhas.

Meriam e Kraige (2015) explicam que o diagrama de esforço cortante é construído a partir do somatório das forças verticais ao longo da viga. Se a viga é submetida a uma carga pontual, o diagrama mostrará um salto correspondente à magnitude da força aplicada. No caso de uma carga distribuída, o diagrama apresenta uma inclinação que reflete a variação contínua da força cortante ao longo da estrutura.

A interpretação desses diagramas determina os pontos críticos em uma viga

ajudando a visualizar onde as forças cortantes atingem seus valores máximos e mínimos. Gere e Timoshenko (2017) destacam que o valor máximo da força cortante normalmente ocorre próximo aos apoios da viga, onde a reação ao carregamento é mais significativa.

Em vigas com cargas distribuídas, o diagrama de esforço cortante apresenta uma variação linear, onde o valor máximo ocorre nos apoios e decresce até zero no ponto médio da viga. Essa análise é importante para dimensionar corretamente a seção transversal da viga e garantir que ela suporte as forças cortantes sem falhar.

Vale lembrar que a relação entre  $w$  e  $V$  se dá da seguinte forma (Hibbeler, 2017):

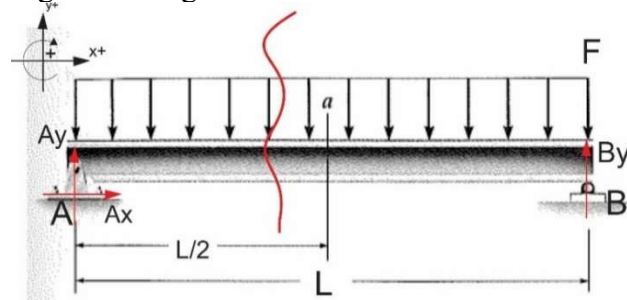
$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (38)$$

$$V = \int -w dx \quad (39)$$

### 3.3.1 Força Cortante nas Vigas

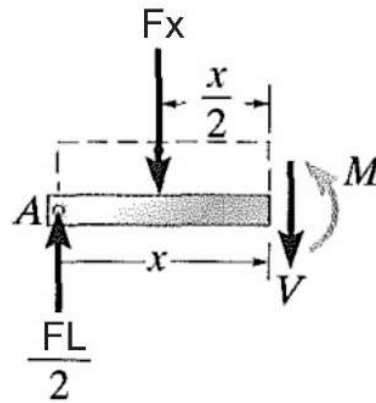
Para este trabalho é preciso calcular a forças cortante de forma geral para as vigas específicas mostradas na figura 3, 4 e 5. Dada a definição de força cortante, temos que no primeiro exemplo de viga na figura 3, é visto que seccionando a viga e analisando o elemento infinitesimal, temos a seguinte ilustração:

Figura 9 – Viga 1 Seccionada



Fonte: Adaptado do Hibbeler (2017).

Figura 10 – Diagrama de Forças



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Desta forma, realizando o somatório das forças no eixo Y para o equilíbrio, ou seja, igualando a zero (Hibbeler, 2017), tem-se que:

$$\sum Fy = 0 \quad (40)$$

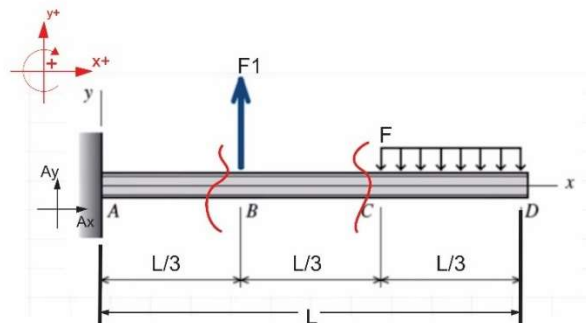
$$Ay - Fx - V(x) = 0 \quad (41)$$

$$V(x) = Ay - Fx \quad (42)$$

Logo é possível ver que o esforço cortante V está em função de X que representa o comprimento da viga variando de 0 até L.

Para o segundo exemplo de viga, figura 4, foi necessário seccionar a viga em 3 partes para que assim possamos realizar o mesmo procedimento da figura 8, ficando da seguinte forma:

Figura 11 – Viga 2 seccionada



Fonte: Adaptado do Kassimali (2017).

Para o trecho AB que compreende a variação de X da seguinte forma:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{3} \quad (43)$$

Logo, segundo Hibbeler (2017),

$$V_{AB} = V_A + \int_A^B -w dx \quad (44)$$

Como não tem carga distribuída neste trecho,  $w$  é igual a zero. Então a cortante no trecho AB vai depender apenas de uma força vertical no ponto A.

$$V_{AB} = V_A = Ay \quad (45)$$

Para o trecho seguinte, BC, segue-se a mesma divisão, porém temos uma carga atuante no ponto B, então a cortante segue da seguinte forma (Hibbeler, 2017):

$$V_{BC} = V_B + \int_B^C -w dx \quad (46)$$

Como não tem carga distribuída no trecho BC, a integral é zerada, e a cortante no ponto B fica igual a cortante do ponto B na análise anterior mais a carga atuante no ponto, ficando da seguinte forma:

$$V_B = V_{AB} \quad (47)$$

$$V_{BC} = V_B + F1 \quad (48)$$

Por último tem-se o trecho CD, onde tem o carregamento contínuo, então na análise deste trecho fica da seguinte forma:

$$\int_C^D -w dx = -Fx \quad (49)$$

Logo, utilizando a cortante do trecho anterior,

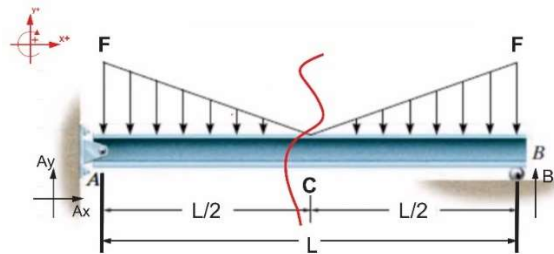
$$V_{CD} = V_{BC} - Fx \quad (50)$$

$$V_{CD} = V_B + F1 - Fx \quad (51)$$

E assim é possível encontrar o esforço cortante máximo na viga 2.

Para a viga 3, é necessário seccionar ela em duas partes, primeiramente o trecho AC, compreendendo o trecho,

Figura 12 – Viga 3 seccionada



Fonte: Adaptado do Hibbeler, 2017.

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (52)$$

Como este trecho compreende um carregamento distribuído com forma triangular, com o decorrer do trecho a força irá variar, então foi preciso montar uma equação que acompanhasse o trecho, através de análises feitas, foi possível chegar na seguinte conclusão, segundo o Resistência dos materiais, Hibbeler (2017).

$$w(x) = F - \frac{2Fx}{L} \quad (53)$$

Onde  $x=0$ , tem:

$$w(0) = F \quad (54)$$

E  $x=L/2$ , tem:



$$w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (55)$$

Logo a cortante do trecho AC fica da seguinte forma:

$$V_{AC} = V_A + \int_A^C -w dx \quad (56)$$

Adotando,

$$V_A = Ay \quad (57)$$

Tem que a integralização segue da seguinte forma,

$$V_{AC} = Ay - \left(Fx - \frac{Fx^2}{L}\right) \quad (58)$$

Com isso, para o trecho AC, torna-se possível encontrar a cortante no ponto A e no ponto C de forma geral,

Logo para  $x=0$ , tem-se:

$$V_A = Ay \quad (59)$$

E para  $x=L/2$ :

$$V_C = 0 \quad (60)$$

Assim, podemos prosseguir com a análise levando em consideração a cortante no ponto C para a análise no restante da viga, que compreende o trecho CB, porém para este trecho foi preciso encontrar outra equação, visto que o carregamento muda, através de análises foi possível chegar a seguinte conclusão (Hibbeler, 2017):

$$w(x) = \frac{2F}{L} \quad (61)$$

Onde para  $x=0$ , tem:

$$w(0) = 0 \quad (62)$$

E para  $x=L/2$ :

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = F \quad (63)$$

Logo, tem que:

$$V_{CB} = V_C + \int_C^B -w(x)dx \quad (64)$$

Com o cálculo no ponto C, é possível ver que o valor da cortante neste ponto é igual a zero, logo, a cortante no trecho CB fica da seguinte forma (Hibbeler, 2017):

$$V_{CB} = -\frac{Fx^2}{L} \quad (65)$$

Logo substituindo  $x=0$ , tem que:

$$V_C = 0 \quad (66)$$

E  $x=L/2$ , tem:

$$V_B = \frac{FL}{4} \quad (67)$$

Podendo assim analisar a cortante máxima.

### 3.4 Momento Fletor

O momento fletor pode ser definido como o momento de uma força em relação a um ponto específico em uma estrutura. Essa força gera uma rotação ou uma tendência de dobramento em torno desse ponto. Matematicamente, o momento fletor  $M$  é expresso pela

equação  $M = F \times d$ , onde  $F$  é a força aplicada e  $d$  é a distância perpendicular da linha de ação da força ao ponto considerado (Hibbeler, 2017).

Em uma viga, o momento fletor em uma seção é a soma dos momentos de todas as forças atuando antes dessa seção, o sinal depende da direção da curvatura que ele induz, se a curvatura é para cima, o momento é considerado positivo, e se é para baixo, negativo (Beer, Johnston e DeWolf, 2015).

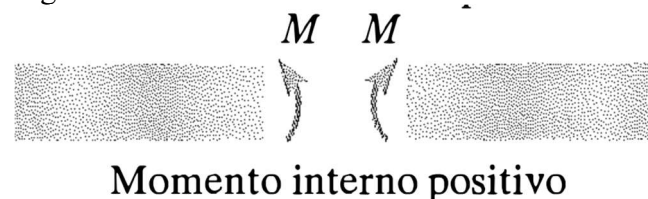
Para o dimensionamento de elementos estruturais, ele determina como uma viga ou uma estrutura se deforma sob a ação de cargas. Gere e Timoshenko (2017) afirmam que, ao projetar vigas, é essencial garantir que elas sejam capazes de suportar os momentos fletores máximos sem falhar por flexão.

A resistência de uma viga ao momento fletor é dada pelo módulo de resistência da seção transversal, que depende da geometria da seção e do material utilizado. Em perfis de aço, por exemplo, seções em "I" ou "H" são amplamente utilizadas devido à sua alta eficiência em resistir aos momentos fletores, enquanto minimizam o material utilizado (Meriam e Kraige, 2015).

Esse momento não é constante ao longo do comprimento de uma viga, ele varia dependendo da distribuição de cargas e das condições de apoio. Para uma viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no centro, o momento fletor é máximo no meio da viga e zero nos apoios (Hibbeler, 2017). Essa variação é importante para determinar a seção crítica da viga, que deve ser dimensionada para resistir ao momento fletor máximo.

No caso de uma carga distribuída uniformemente ao longo da viga, o momento fletor atinge seu valor máximo no centro da viga, onde a soma dos momentos devido às forças de cada lado da seção é maior (Beer, Johnston e DeWolf, 2015). Essa análise é essencial para garantir que a viga não falhe sob carregamento, especialmente em situações onde a carga varia ou onde existem múltiplos pontos de aplicação de carga.

Figura 13 – Momento Fletor



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

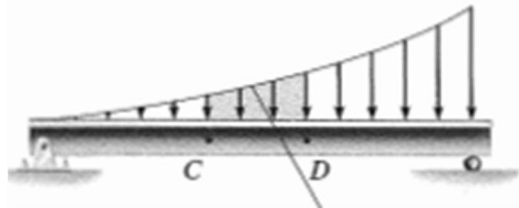
Um diagrama de momento fletor é uma representação gráfica que mostra como o

ele varia ao longo do comprimento da viga, por exemplo, em uma viga simplesmente apoiada, o diagrama para uma carga pontual é uma curva parabólica, atingindo o máximo no ponto de aplicação da carga e decrescendo até zero nos apoios (Gere e Timoshenko, 2017).

Para cargas distribuídas, o diagrama assume a forma de uma parábola invertida, com o valor máximo no centro da viga. Esses diagramas permitem identificar rapidamente os pontos críticos em uma estrutura e dimensionar adequadamente as seções para resistir aos momentos fletores máximos (Hibbeler, 2017).

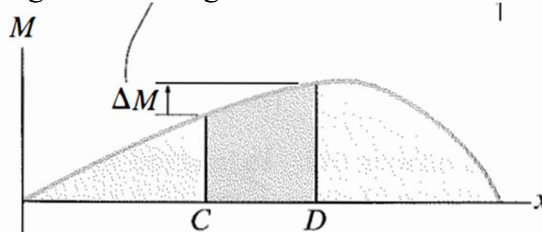
As condições de apoio de uma viga afetam a distribuição do momento fletor ao longo de seu comprimento. Em uma viga engastada em uma extremidade, o momento fletor máximo ocorre no ponto de engaste e diminui linearmente até a extremidade livre (Beer, Johnston e DeWolf, 2015). Já em uma viga contínua, que é apoiada em mais de dois pontos, o momento fletor pode ter múltiplos picos, dependendo da distribuição das cargas e das reações nos apoios.

Figura 14 – Carga distribuída sob uma viga



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Figura 15 – Diagrama Momento Fletor



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Vale lembrar que, seguindo a mesma lógica do esforço cortante, o momento fletor segue a seguinte relação fundamental entre V e M (Hibbeler, 2017):

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (68)$$

Aplicando integral, tem:

$$M = \int V dx \quad (69)$$

### 3.4.1 Momento Fletor nas Vigas

Para a viga na figura 9, basta realizar o cálculo do momento do trecho infinitesimal em relação ao ponto seccionado onde age a cortante V e o momento M, como visto na figura 10, então fazendo o somatório dos momentos em relação a este ponto tem (Hibbeler, 2017):

$$\sum M = 0 \quad (70)$$

$$-Ay * x + Fx * \frac{x}{2} + M(x) = 0 \quad (71)$$

$$M(x) = -F \frac{x^2}{2} + Ay * x \quad (72)$$

Desta forma é possível encontrar o momento fletor máximo da viga.

Para a viga da figura 11, é visto que ela foi seccionada em três partes, então primeiramente para o trecho AB, tem (Hibbeler, 2017):

$$M_{AB} = M_A + \int_A^B V dx \quad (73)$$

Usando o cortante já encontrado na equação e fazendo o somatório dos momentos em relação ao ponto A, temos:

$$\sum M_A = 0 \quad (74)$$

Fazendo as devidas substituições chegasse à seguinte conclusão para o trecho AB:

$$M_{AB} = \left( F1 * \frac{L}{3} \right) - \left( Feq * \frac{5L}{6} \right) + Ay * x \quad (75)$$

Com x variando de 0 até L/3, para x=0, temos:

$$M_{AB} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) \quad (76)$$

E para  $x=L/3$ , temos:

$$M_{AB} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} \quad (77)$$

Essa equação será necessária para encontrar o momento no trecho BC, pois será preciso carregar o valor do momento no ponto B, não só o valor do momento, mas também o valor da cortante no trecho BC que já havia sido encontrado, sendo assim calculando o momento no trecho BC da viga, tem (Hibbeler, 2017):

$$M_{BC} = M_B + \int_B^C Vdx \quad (78)$$

$$M_{BC} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * x \quad (79)$$

Com x variando de 0 até L/3, em que para  $x=0$ , tem:

$$M_{BC} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} \quad (80)$$

E para  $x=L/3$ , tem-se:

$$M_{BC} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3} \quad (81)$$

Dessa forma é possível encontrar o momento fletor máximo no trecho BC.

Para o último trecho dessa viga temos o trecho CD, em que mais uma vez precise levar os valores do momento no ponto C e a cortante BC, para que se possa seguir na análise, com isso tem (Hibbeler, 2017):

$$M_{CD} = M_C + \int_C^D Vdx \quad (82)$$

Com o valor do momento no ponto C e o cortante no trecho CD já encontrados,

temos:

$$M_{CD} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3} + \left(V_{BC} * x - \frac{Fx^2}{2}\right) \quad (83)$$

Com x variando de 0 até L/3,

Para x=0, tem:

$$M_{CD} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3} \quad (84)$$

E para x=L/3, tem:

$$M_{CD} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3} + \left(V_{BC} * \frac{L}{3} - \frac{FL^2}{6}\right) \quad (85)$$

Com isso tem o momento no ponto C e D da viga.

Para o exemplo da viga da figura 12, a viga foi seccionada em duas, e para a análise do momento fletor primeiramente é analisado o trecho AC, com x variando 0 até L/2. Como visto, o momento do trecho AC se dá da seguinte forma:

$$M_{AC} = M_A + \int_A^C V dx \quad (86)$$

Como o cortante do trecho já foi encontrado anteriormente, temos que a equação fica da seguinte forma, seguindo o braço de alavanca como sendo o centroide da figura:

$$M_{AC} = Ay * x - \frac{Fx^2}{2} + \frac{Fx^3}{3L} \quad (87)$$

Para x=0, tem:

$$M_{AC} = 0 \quad (88)$$

Para x=L/2, tem:

$$M_{AC} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} + \frac{FL^2}{24} \quad (89)$$

Dando continuidade, para o trecho CB segue na mesma análise, porém temos que levar as equações encontradas para o momento fletor no ponto C e o cortante do trecho CB, ou seja:

$$M_{CB} = M_C + \int_C^B V dx \quad (90)$$

Logo,

$$M_{CB} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} + \frac{FL^2}{24} - \frac{Fx^3}{3L} \quad (91)$$

Com x variando de 0 até L/2, onde para x=0, tem:

$$M_{CB} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} + \frac{FL^2}{24} \quad (92)$$

E para x=L/2, tem:

$$M_{CB} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} \quad (93)$$

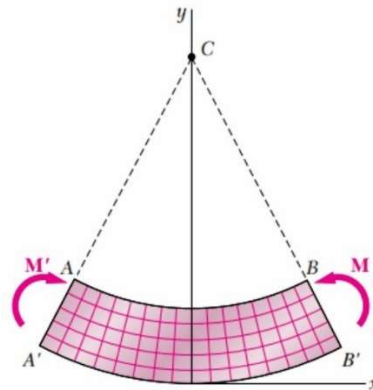
Logo, é possível encontrar o momento fletor no trecho CB nos pontos C e B.

### 3.5 Tensão de Flexão

A tensão de flexão surge quando uma estrutura é submetida a forças que fazem com que ela se dobre, ou seja, quando há a aplicação de momentos fletores. Dito isso, entender como essa tensão se distribui e afeta o material é fundamental para garantir que as estruturas projetadas sejam seguras e funcionem como esperadas (Beer, 2015).



Figura 16 – Tensão de Flexão



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

A tensão de flexão não se distribui de forma uniforme ao longo da altura da viga, ela varia linearmente onde as partes superiores estão sob compressão e as inferiores sob tração. No meio da viga, há uma linha chamada de fibra neutra, onde a tensão de flexão é zero (Gere e Goodno, 2017). Por exemplo, uma viga retangular, a tensão máxima ocorre tanto na parte superior quanto na inferior da seção transversal, esse conceito é essencial para saber onde o material está mais sujeito a falhas e, para que assim, possa reforçar essas áreas (Beer, 2015).

Na prática, a tensão de flexão é um dos principais fatores que é levado em conta ao projetar vigas e outras estruturas. Em materiais como aço, concreto e madeira têm diferentes capacidades de suportar essa tensão, e isso deve ser considerado no projeto. Por exemplo, ao projetar uma ponte de aço, precisa garantir que a tensão de flexão máxima que ocorrerá não ultrapasse o limite elástico do material para evitar colapsos (Timoshenko e Gere, 2017).

Além disso, a tensão de flexão também é importante em projetos mecânicos, como no caso de eixos rotativos, onde a flexão pode levar à fadiga do material ao longo do tempo (Ugural e Fenster, 2011).

Quando se projeta uma viga o objetivo é garantir que a tensão de flexão máxima não exceda a resistência do material, sempre considerando um fator de segurança. Isso envolve calcular o momento fletor máximo que a viga vai suportar e escolher uma seção transversal adequada para manter a tensão dentro dos limites aceitáveis (Hibbeler, 2017).

Para a tensão de flexão máxima é usado a seguinte fórmula:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}} * y}{I}$$

Aqui,  $M$  é o momento fletor,  $y$  é a distância do ponto onde está sendo calculado a

tensão até a linha neutra, e  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga (Hibbeler, 2017). A fórmula mostra que quanto maior o momento fletor e a distância da fibra neutra, maior será a tensão de flexão. Já o momento de inércia funciona como uma espécie de resistência da seção transversal à flexão (Megson, 2013).

É por isso que seções em "I" são tão populares, especialmente em estruturas como pontes e edifícios. Elas oferecem um grande momento de inércia, o que significa que são muito mais eficientes em resistir à flexão do que uma simples seção retangular (Gere e Goodno, 2017).

Para dar continuidade nos cálculos foi necessário encontrar cada uma dessas variáveis, logo é preciso destacar um direcionamento para cada uma delas.

### 3.5.1 Centroide

O centroide representa o centro de massa de uma área ou volume, sendo o ponto onde se pode imaginar que toda a massa ou área de um objeto está concentrada. Esse conceito é importante para resolver problemas de equilíbrio de corpos rígidos, mas também para entender como as forças e momentos se distribuem em uma estrutura (Beer, 2015).

O cálculo do centroide depende da distribuição de massa ou área de uma figura é feito da seguinte forma,

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} \quad (94)$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA} \quad (95)$$

Onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas dos pontos na área  $A$ . Para figuras simétricas, como um círculo ou um retângulo, o centroide coincide com o centro geométrico, mas em figuras mais complexas, precisa usar integração para encontrá-lo (Hibbeler, 2017).

Determinar o centroide é essencial em diversas aplicações na engenharia, por exemplo, ao projetar uma viga, é preciso saber onde está o centroide da sua seção transversal para calcular corretamente as tensões e deformações, ele também é importante no cálculo de momentos de inércia, que são usados para determinar a resistência de uma seção à flexão e ao cisalhamento (Gere e Goodno, 2017).

Outro exemplo prático é no estudo de equilíbrio de corpos rígidos, onde as forças

podem ser aplicadas de maneira a gerar momentos em torno do centroide, influenciando o comportamento da estrutura como um todo (Beer, 2015).

Para calcular o centroide é usado diferentes métodos, dependendo da geometria da área ou volume em questão, para áreas compostas, por exemplo, é preciso dividir a área total em várias formas simples, encontrar os centroides dessas formas e depois usar uma média ponderada para encontrar o centroide da área total (Hibbeler, 2017).

No caso de figuras mais complexas, o cálculo pode exigir o uso de integração, especialmente quando a área ou volume não é composta por formas simples, nesses casos as equações integrais são aplicadas para determinar as coordenadas do centroide (Megson, 2013).

### 3.5.2 *Momento de Inércia*

O momento de inércia mede a resistência de uma seção transversal de um elemento estrutural à flexão, ou seja, a sua dificuldade em se deformar sob a ação de um momento fletor. Esse conceito é importante para garantir que as estruturas projetadas sejam seguras e que possam suportar as cargas aplicadas sem sofrer deformações excessivas (Beer, 2015).

Trata-se de um parâmetro fundamental que dimensiona estruturas, ao projetar uma viga, por exemplo, precisa garantir que o momento de inércia seja suficiente para que a viga não se deforme excessivamente sob as cargas que vai suportar. Isso é particularmente importante em estruturas como pontes, edifícios e componentes mecânicos, onde a flexão pode comprometer a integridade e a funcionalidade da estrutura (Gere e Goodno, 2017).

Além disso, o momento de inércia também é relevante no cálculo de tensões de flexão, pois aparece na fórmula que determina a tensão máxima em uma seção transversal, ou seja, quanto maior o momento de inércia, menor será a tensão de flexão para um dado momento fletor (Hibbeler, 2017).

Por definição, os momentos de inércia em relação ao eixo X e Y de uma área diferencial  $dA$  são calculados da seguinte forma:

$$dI_X = y^2 dA \rightarrow I_X = \int y^2 dA \quad (96)$$

$$dI_Y = x^2 dA \rightarrow I_Y = \int x^2 dA \quad (97)$$

Para definir o momento de inércia de uma área em qualquer eixo é usado o Teorema

dos Eixos Paralelos, que após definido o eixo de referência para melhor ser trabalhado, tem-se a seguinte fórmula para ser calculado:

Caso seja usado como referência o eixo centroide  $\bar{I}_x$ , temos a seguinte equação matemática:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_y^2 \quad (98)$$

Caso seja usado como referência o eixo centroide  $\bar{I}_y$ , temos a seguinte equação matemática:

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_x^2 \quad (99)$$

Para calcular o momento de inércia de uma seção transversal, é usado diferentes métodos, dependendo da forma da seção. Para seções simples, como retângulos ou círculos, existem fórmulas diretas. Por exemplo, o momento de inércia de um retângulo em relação ao eixo neutro que passa pelo seu centro é dado por:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Onde b é a base e h é a altura do retângulo (Beer, 2015).

Para seções compostas, como as vigas em "I", o cálculo é um pouco mais complexo, pois é preciso considerar o momento de inércia de cada parte da seção e aplicar o teorema dos eixos paralelos para ajustar o momento de inércia ao eixo neutro da seção composta (Megson, 2013).

Na prática, esta grandeza é utilizada para garantir que as estruturas sejam capazes de resistir às forças aplicadas sem sofrer deformações indesejadas. Em projetos de vigas, por exemplo, é escolhido a forma e o tamanho da seção transversal com base no momento de inércia necessário para suportar as cargas. As vigas em "I" são especialmente populares pois combinam um grande momento de inércia com uma quantidade relativamente pequena de material, o que as torna eficientes e econômicas (Gere e Goodno, 2017).

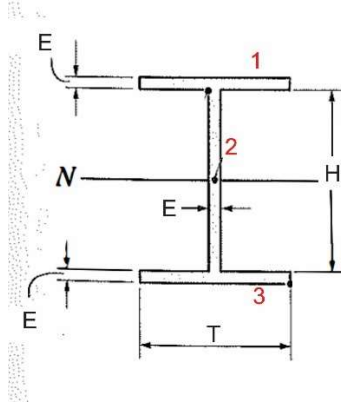
Outro exemplo é no projeto de eixos rotativos, onde o momento de inércia influencia a resistência do eixo à torção. Eixos com um grande momento de inércia são mais

resistentes e, portanto, mais adequados para aplicações onde altas forças de torção estão presentes (Ugural e Fenster, 2011).

### 3.5.3 Tensão de Flexão nas vigas

Para o cálculo da tensão de flexão foi preciso decidir o perfil das vigas, no caso da viga na figura 13, temos um perfil em (I), mostrado a seguir:

Figura 17 – Dimensões do perfil



Fonte: Adaptado do Hibbeler, 2017.

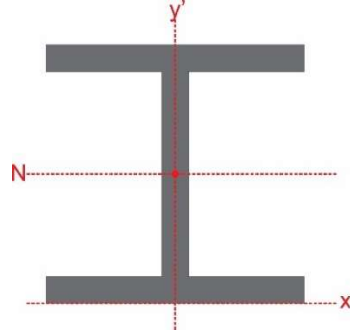
Com base neste perfil, é possível perceber que  $N$  atravessa a linha neutra dessa figura geométrica composta. Ela é composta pois é possível dividir ela em três retângulos, onde  $1=3 \cong 2$ . Todas as medidas apresentadas na cota estão em (mm).

Para encontrar a tensão de flexão máxima precisamos do momento fletor máximo da viga que já foi encontrado no tópico anterior, tido isso em vista precisa-se encontrar o centroide da figura, que se encontra no centro geométrico da figura pois ela é simétrica, ou seja,

$$C_{ent} = \frac{H}{2} + E \quad (100)$$

Para o cálculo do momento de inercia foi usado o eixo  $x'$  como referência pois como o centroide passa no centro geométrico da figura, o diferencial ( $dy$ ) irá variar com a altura, apresentada na figura a seguir:

Figura 18 – Centroide do perfil I



Fonte: Autor (2024).

Tendo isso em vista, usando o teorema dos eixos paralelos, é usado a seguinte fórmula:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_y^2 \quad (101)$$

Em que,

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12}bh^3 \quad (102)$$

Visto que é uma figura composta e que o retângulo 1=3≅2, e que (b) é a base do retângulo e (h) é a altura do retângulo. Para o retângulo 1 e 3,  $b = T$ ;  $h = E$ .

A distância (d) é calculada a partir da distância do centro de massa da figura até o centro de massa do retângulo abordado, ou seja,

$$d = \frac{H}{2} + \frac{E}{2} \quad (103)$$

Isso é válido para ambos, tendo isso em vista, substituindo na fórmula do momento de inércia, temos,

$$I_{x13} = 2 \left[ \left( \frac{TE^3}{12} \right) + \left( \frac{E}{2} + \frac{H}{2} \right)^2 TE \right] \quad (104)$$

E para o retângulo 2,

$$b = E; h = H$$

A distância (d) é zero, pois é o próprio centro de massa da figura, logo o momento de inércia para este retângulo fica,

$$I_{x2} = \frac{EH^3}{12} \quad (105)$$

Para o cálculo do momento de inércia do perfil todo somamos  $I_{x13} + I_{x2}$ , resultando:

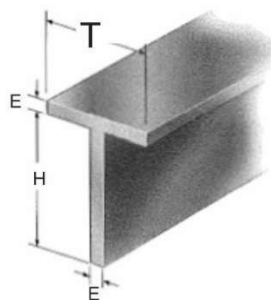
$$I_x = \frac{EH^3}{12} + 2 \left[ \left( \frac{TE^3}{12} \right) + \left( \frac{E}{2} + \frac{H}{2} \right)^2 TE \right] \quad (106)$$

Com isso, é possível calcular a tensão de flexão máxima na viga aplicando na fórmula,

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x} * \left( \frac{H}{2} + E \right)}{\frac{EH^3}{12} + 2 \left[ \left( \frac{TE^3}{12} \right) + \left( \frac{E}{2} + \frac{H}{2} \right)^2 TE \right]} \quad (107)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para a viga da figura 14, tem um perfil diferente, em (T), porém com as mesmas cotas de medidas, apresentado a seguir:

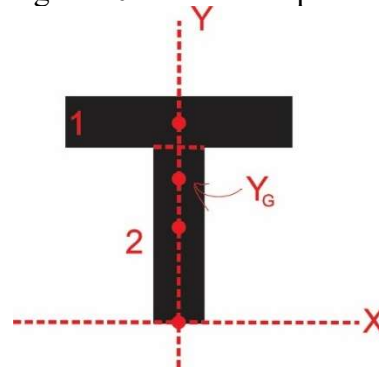
Figura 19 – Dimensões perfil em T



Fonte: Adaptado do Hibbeler (2017).

Neste perfil o centro de gravidade encontra-se deslocado, logo é preciso já determinar o eixo referência para ser trabalhado, que adiantando vai ser o eixo x, é possível também perceber que é um perfil de viga composta, apresentado logo a seguir,

Figura 20 – Centroide perfil em T



Fonte: Autor (2024).

Como o eixo referência é o x e apenas o y vai variar, o ponto destacado é localizado na coordenada  $(0, Y_G)$ , ou seja, o  $X_G = 0$ . Então para o cálculo do centro de gravidade temos a seguinte relação matemática:

$$Y_G = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2} \quad (108)$$

Para o retângulo 1, tem,  $b = T; h = E$ .

Logo,

$$A_1 = TE \quad (108)$$

$$Y_1 = H + \frac{E}{2} \quad (109)$$

E para o retângulo 2,  $b = E; h = H$ .

Logo,

$$A_2 = HE \quad (110)$$

$$Y_2 = \frac{H}{2} \quad (111)$$

Substituindo, ficamos com o centro de gravidade da seguinte forma,



$$Y_G = \frac{TE\left(H + \frac{E}{2}\right) + HE\left(\frac{H}{2}\right)}{TE + HE} \quad (112)$$

Para o cálculo do momento de inércia usando o teorema dos eixos paralelos, tem-se que a distância (d) do centro do retângulo até o  $Y_G$  é calculado de duas formas distintas para cada retângulo do perfil composto. Para o retângulo 1 tem-se que (d) pode ser calculado da seguinte forma:

$$d_1 = H + \frac{E}{2} - Y_G \quad (113)$$

Logo, o momento de inércia dele pode ser calculado da seguinte forma:

$$I_{x1} = \frac{1}{12}TE^3 + TE d_1^2 \quad (114)$$

Visto que o centro de gravidade dele se encontra no centro da figura geométrica, como mostrado na figura.

Para o retângulo 2, segue-se o mesmo raciocínio, porém o centro d figura geométrica dele se encontra exatamente na medida  $H/2$ , logo,

$$d_2 = Y_G - \frac{H}{2} \quad (115)$$

Desta forma, o momento pode ser calculado desta forma:

$$I_{x2} = \frac{1}{12}EH^3 + EH d_2^2 \quad (116)$$

Somando  $I_{x1} + I_{x2}$ , temos o momento de inércia da figura:

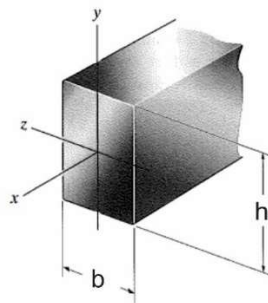
$$I_x = \frac{1}{12}TE^3 + TE d_1^2 + \frac{1}{12}EH^3 + EH d_2^2 \quad (117)$$

Com isto, é possível calcular a tensão de flexão máxima substituindo na fórmula:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x} * \frac{TE(H+\frac{E}{2})+H}{TE+} (\frac{H}{2})}{\frac{1}{12}TE^3+TEd_1^2+\frac{1}{12}EH^3+EHd_2^2} \quad (118)$$

Para a viga da figura 15, seguimos com outro perfil, mas com a mesma linha de raciocínio para o cálculo do centro de gravidade e do momento de inércia, a seguir é apresentado o perfil da viga,

Figura 21 – Dimensões perfil cúbico



Fonte: Adaptado do Hibbeler (2017).

Para este perfil o centro de gravidade se encontra literalmente no meio dela, ficando da seguinte forma:

$$Y_G = \frac{h}{2} \quad (119)$$

Visto que a distância (d) é igual a zero, tem-se que:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 \quad (120)$$

Com isso, tem-se todas as variáveis para o cálculo da tensão de flexão máxima, visto que o momento fletor máximo já foi encontrado, ficando da seguinte forma:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x} * \frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3} \quad (121)$$

Desta forma tem-se as tensões de flexões máximas para os três perfis de vigas abordados neste trabalho.

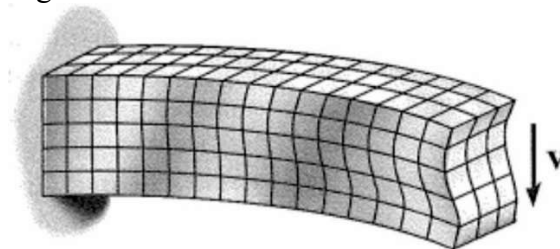
### 3.6 Tensão de Cisalhamento

Por último, tem-se o conceito de tensão de cisalhamento, que age paralelamente à superfície tentando deslizar uma camada do material sobre outra. Esse fenômeno é particularmente importante quando lida com estruturas sujeitas a forças cortantes, torques e outros tipos de esforços que tendem a provocar esse tipo de deformação (Beer, 2015).

A tensão de cisalhamento, geralmente representada pela letra grega  $\tau$ , é definida pela razão entre a força cortante  $V$  e a área  $A$  sobre a qual essa força atua, essa equação permite calcular a tensão de cisalhamento em qualquer ponto de uma seção transversal onde uma força cortante esteja atuando (Hibbeler, 2017).

Essa fórmula representa a tensão de cisalhamento média. Em seções transversais mais complexas, como em vigas retangulares ou circulares, a distribuição da tensão de cisalhamento pode variar ao longo da seção (Gere e Goodno, 2017).

Figura 22 – Tensão cisalhamento



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Para o cálculo do cisalhamento é preciso encontrar quatro variáveis da seguinte forma:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad (122)$$

Onde:

$\tau$  = Tensão de Cisalhamento

$V$  = Força de cisalhamento interno resultante da cortante

$Q = \bar{y}'A'$

$I$  = Momento de inércia da área inteira

$t = \text{Largura da área}$

A variável (Q) representa o momento de primeira ordem da área A' em torno do eixo neutro, ele também é calculado a partir da porção superior ou inferior da área seccionada a partir da linha neutra da figura. Para esta fórmula foi considerado apenas tensões que agem no plano longitudinal da viga, porém ela também pode ser aplicada para determinar a tensão de cisalhamento transversal na área de seção transversal da viga (Hibbeler, 2017).

A distribuição da tensão de cisalhamento dentro de uma seção transversal nem sempre é uniforme, por exemplo, em uma viga retangular sob uma força cortante, a tensão de cisalhamento atinge seu valor máximo no centro da seção e diminui para zero nas bordas. Isso ocorre porque as camadas internas da seção resistem mais ao deslizamento do que as camadas externas, criando essa variação (Beer, 2015).

Em seções circulares, como em eixos, a distribuição é diferente, mas o conceito permanece o mesmo, a tensão de cisalhamento varia ao longo do raio da seção, sendo máxima na superfície do eixo e mínima no centro (Hibbeler, 2017).

Ao dimensionar componentes sujeitos a cisalhamento, é fundamental garantir que a tensão de cisalhamento máxima não exceda a resistência ao cisalhamento do material, isso é feito aplicando um fator de segurança e considerando as condições de carregamento mais críticas, por exemplo, em uma junta aparafusada, o diâmetro do parafuso é escolhido de forma a garantir que ele possa suportar a força aplicada sem se romper (Beer, 2015).

Além disso, em estruturas como vigas, onde as forças cortantes são comuns, deve considerar não apenas a tensão de cisalhamento, mas também outros tipos de tensões, como a tensão normal devido à flexão, para garantir a segurança e a eficiência do projeto (Hibbeler, 2017).

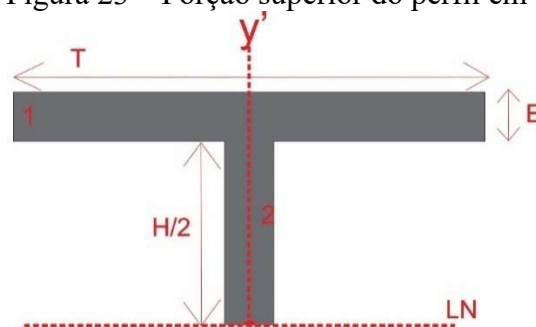
### **3.6.1 Tensão de Cisalhamento nas Vigas**

Para a viga da figura 13 com o perfil em (I), já foi abordado o esforço cortante máximo, o centro de gravidade e o momento de inércia, então para este momento de cálculo da tensão de cisalhamento máximo é preciso encontrar a variável (Q) ou momento estático do perfil geométrico, seguindo a fórmula a seguir:

$$Q = y' A' \quad (123)$$

Para calcular o momento estático, é preciso usar a porção superior ou inferior do perfil da viga em relação a linha neutra, linha essa que passa no centro de gravidade do perfil de viga, como esta viga é simétrica, a linha neutra passa no centro geométrico dela, para esse cálculo foi usado a porção superior, como mostrado na figura a seguir:

Figura 23 – Porção superior do perfil em T



Fonte: Autor (2024).

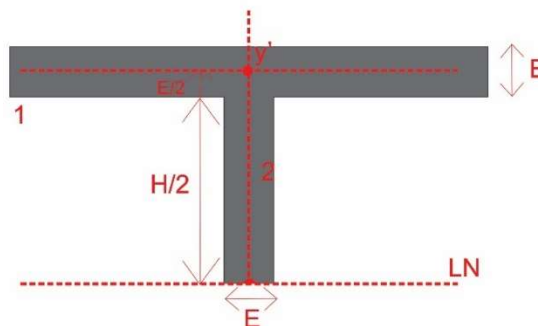
Visando a facilitação dos cálculos, a porção superior foi dividido em dois retângulos, 1 e 2, visto que,

Para o retângulo 1, tem-se que: Como a linha neutra atravessa o centro geométrico da figura, a largura da área seccionada ( $t$ ) tem o mesmo valor da espessura, logo:

$$t = E \quad (124)$$

Logo, o valor de  $y'$  vai ser da seguinte forma:

Figura 24 – Dimensões da porção superior



Fonte: Autor (2024).

$$y'_1 = \frac{H}{2} + \frac{E}{2} \quad (125)$$

E a área  $A'$ . segue da seguinte forma:

$$A'_1 = TE \quad (126)$$

Logo,

$$Q_1 = y'_1 * A'_1 \quad (127)$$

$$Q_1 = \left(\frac{H}{2} + \frac{E}{2}\right) TE \quad (128)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o retângulo 2, temos:

$$y'_2 = \frac{\frac{H}{2}}{2} = \frac{H}{4} \quad (129)$$

$$A'_2 = E \frac{H}{2} \quad (130)$$

Logo,

$$Q_2 = \frac{H}{4} E \frac{H}{2} = \frac{EH^2}{8} \quad (131)$$

Com isso, para o momento estático geral, é preciso somar ambos:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (132)$$

$$Q = \left[\left(\frac{H}{2} + \frac{E}{2}\right) TE\right] + \frac{EH^2}{8} \quad (133)$$

Tendo em vista isso, é possível encontrar a tensão de cisalhamento seguindo a seguinte formula:

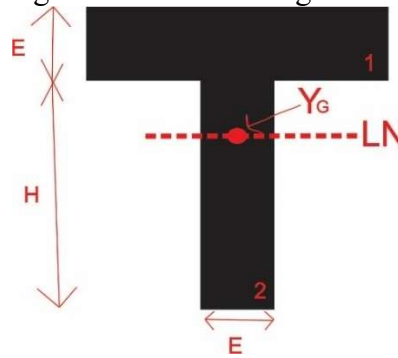
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}Q}{It} \quad (134)$$

Logo, como o cortante máximo e o momento de inércia já foi descoberto, temos a seguinte lógica substituindo:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} \left[ \left( \frac{H+E}{2} \right) TE \right] + \frac{EH^2}{8}}{IE} \quad (135)$$

Para o perfil de viga da figura 14, temos uma viga em T, não foi preciso seccionar, então usa-se o perfil todo, como mostrado na figura a seguir:

Figura 25 – Centro de gravidade viga em T



Fonte: Autor (2024).

Como a linha neutra passa pela área de espessura E, o valor de t é o mesmo da espessura, logo:

$$t = E \quad (136)$$

Para o  $y'$ , nós vamos precisar da distância do  $y_G$  até o centro do retângulo 1, logo temos:

$$y' = (H + E) - \frac{E}{2} - y_G \quad (137)$$

Para a área  $A'$ , é usado a área do retângulo 2, pois a linha neutra passa por ele, ficando da seguinte forma:

$$A' = EH \quad (138)$$

Substituindo, o valor do momento estático fica da seguinte forma:

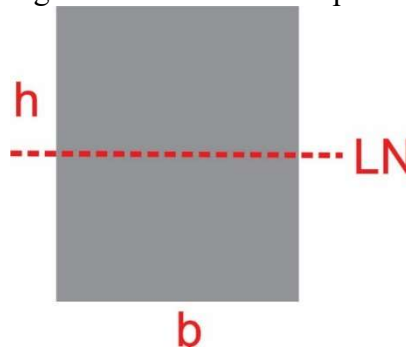
$$Q = \left[ (H + E) - \frac{E}{2} - y_G \right] EH \quad (139)$$

Desta forma podemos encontrar o valor da tensão de cisalhamento máximo da seguinte forma:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} \left[ (H + E) - \frac{E}{2} - y_G \right] EH}{IE} \quad (140)$$

Para o perfil da viga 16, tem-se um perfil de formato retangular, logo a linha neutra passa no centro dela, como mostrado na figura a seguir:

Figura 26 – Linha neutra perfil cúbico



Fonte: Autor (2024).

Com a linha neutra passando no centro da figura, a largura da seção  $t$  é a mesma medida da base, logo:

$$t = b \quad (141)$$

Para o cálculo do momento estático, o  $y'$  se encontra exatamente na metade da altura  $h$ , logo

$$y' = \frac{h}{2} \quad (142)$$



E a área fica da seguinte forma:

$$A' = bh \quad (143)$$

Substituindo, temos que o momento estático fica da seguinte forma:

$$Q = \frac{h}{2}bh = \frac{bh^2}{2} \quad (144)$$

Logo, para encontrar a tensão de cisalhamento máximo, temos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} \frac{bh^2}{2}}{Ib} \quad (145)$$

Com isso, temos todas as variáveis para dar continuidade ao trabalho proposto.

## 4 METODOLOGIA

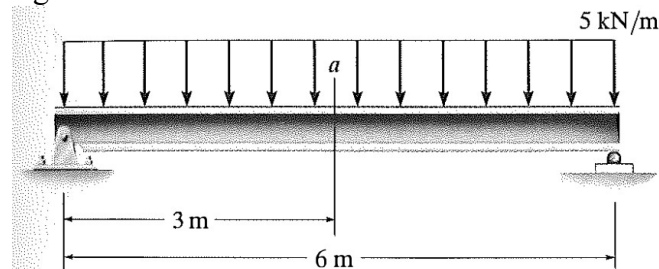
Este trabalho busca explorar a implementação de planilhas eletrônicas para o cálculo, especificamente em vigas, analisando as vantagens, as limitações e o impacto dessa tecnologia na prática da engenharia.

Para elaboração do mesmo, foi implementado com um programa específico pra elaboração de planilhas eletrônicas devido seu uso mais simplificado verificando a solidez dos resultados obtidos, diagramas e tabelas.

### 4.1 Viga Bi Apoiada com Carregamento Contínuo

Para o primeiro exemplo de viga foi usado um problema já elaborado pelo livro Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017). O exercício proposto para a validação do código é mostrado a seguir:

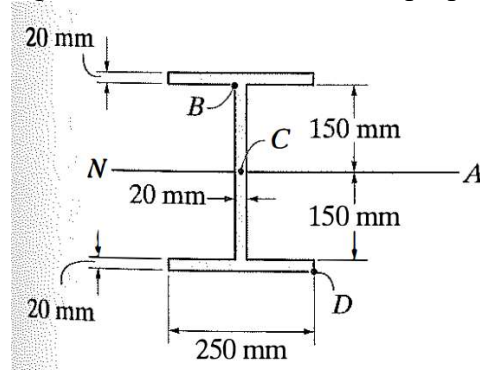
Figura 27 – EP1



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

Para este caso foram utilizados os seguintes valores,  $w = 5 \text{ kN}$  e  $L = 6 \text{ m}$ .

Figura 28 – Perfil do exercício proposto 1



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

$$E = 20mm$$

$$T = 250mm$$

$$H = 300mm$$

Todos esses valores foram armazenados nas células da planilha, podendo ser alterados a qualquer momento, desta forma, se alterados, todos os valores são atualizados de maneira automática.

Figura 29 – Valores na planilha

	A	B	C
1	<b>VIGA BI APOIADA COM</b>		
2	Força(KN)	5	
3	L(m)	6	
4	Espessura(E) em milimetro	20	0,02
5	Comprimento(T) em milimetro	250	0,25
6	Altura(H) em milimetro	300	0,3

Fonte: Autor (2024).

Para armazenar a força equivalente, foi implementado um código em outra célula dedicada a armazenar apenas esse valor, com o seguinte código:

$$B8 = B2 * B3$$

Onde a célula B2 armazena o valor da força e B3 o comprimento, logo a célula B8 armazena a  $F_{eq}$ , de acordo com a fórmula (7).

De acordo com as fórmulas (12) e (14) é tido que as reações são iguais a metade do valor da  $F_{eq}$ , logo foi armazenado em células também com o seguinte código:

$$B10 = B11 = B8/2$$

Figura 30 – Reações armazenadas em células

	A	B	C
1	<b>VIGA BI APOIADA COM</b>		
2	Força(KN)	5	
3	L(m)	6	
4	Espessura(E) em milímetro	20	0,02
5	Comprimento(T) em milímetro	250	0,25
6	Altura(H) em milímetro	300	0,3
7			
8	Feq(KN)	30	
9			
10	By(KN)	15	Sentido Correto
11	Ay(KN)	15	Sentido Correto

Fonte: Autor (2024).

De acordo com as fórmulas (42) e (72), é possível notar que o cortante e o momento fletor variam de acordo com o trecho da viga, ou seja, a medida que o comprimento varia esses valores mudam, então foi preciso implementar uma maneira de automatizar isso. Nesse caso, para todo valor de L foi implementado a viga dividida em 10 partes iguais, da seguinte maneira:

$$E3 = E3 + \left( \frac{\$B\$3}{10} \right)$$

Isso significa que vai dividir o valor de L por 10 e vai fixar esse valor, sempre somando com o valor anterior, criando assim uma tabela com todos os valores percorridos da viga em 10 partes iguais.

Com isso, foi usado os valores gerados por esse código substituindo na equação (42) da seguinte forma:

$$F3 = \$B\$11 - (\$B\$2 * E3)$$

Para que a equação se repetisse para todos os trechos, clica com o botão direito e arrasta até o final da tabela gerada. Posteriormente, substituímos os valores dos segmentos na equação (72) da seguinte forma:

$$G3 = (\$B\$11 * E3) - ((\$B\$2/2) * (E3^2))$$

Com isso podemos gerar a seguinte tabela:

Tabela 1 – Comprimento em função do cortante e fletor do EP 1

x(m)	V(KN)	M(KN.m)
0	15	0
0,6	12	8,1
1,2	9	14,4
1,8	6	18,9
2,4	3	21,6
3	0	22,5
3,6	-3	21,6
4,2	-6	18,9
4,8	-9	14,4
5,4	-12	8,1
6	-15	0

Fonte: Autor (2024).

Usando o comando:

$$J2 = \text{MAIOR}(F3:F13;1)$$

$$J3 = \text{MAIOR}(G3:G13;1)$$

Podemos destacar o valor máximo do esforço cortante e do momento fletor, ambos armazenados nas células:

Tabela 2 – Cortante e Fletor Máximo do EP 1

Cortante Máxima	15
Momento Interno Máximo	22,5

Fonte: Autor (2024).

Dando prosseguimento, de acordo com a fórmula (100), o centroide vai ser armazenado em outra célula, utilizando as medidas fornecidas pelo usuário, como mostrado na figura, logo usando o comando para calcular a fórmula, temos:

$$J4 = C4 + (C6/2)$$

Logo após descoberto o valor, é armazenado em outra célula o momento de inercia que vai ser calculado de acordo com a fórmula (106), com o seguinte comando:

$$J5 = ((1/12) * C4 * (C6^3)) + 2 * ((1/12) * C5 * (C4^3) + ((J4^2) * C5 * C4))$$

Dando procedimento, com os valores do Cortante Máximo e do Momento Fletor Máximo, é possível encontrar também o Momento Estático, como mostrado na fórmula (133), armazenando em outra célula, da seguinte forma:

$$J6 = ((C6/4) * C4 * (C6/2)) + (((C6/2) + (C4/2)) * C5 * C4)$$

Criando uma tabela da seguinte forma:

Tabela 3 – Variáveis calculadas EP1

<b>Cortante Máxima</b>	<b>15</b>
<b>Momento Interno Máximo</b>	<b>22,5</b>
<b>Centróide do Perfil da Viga</b>	<b>0,17</b>
<b>Momento de Inércia</b>	<b>3,3433E-04</b>
<b>Momento Estático</b>	<b>1,0250E-03</b>

Fonte: Autor (2024).

Dado exposto, com todas as variáveis descobertas, é possível calcular a Tensão de Flexão Máxima (107) e a Tensão de Cisalhamento Máximo (134), respectivamente das seguintes formas:

$$J8 = \frac{J3 * J4}{J5}$$

$$J9 = \frac{J2 * J6}{J5 * C4}$$

Ambas armazenadas em células diferentes, resultando a seguinte forma:

Tabela 4 – Flexão e Cisalhamento máximo EP1

<b>Tensão de Flexão Máxima</b>	<b>1,1441E+04</b>
<b>Tensão de Cisalhamento Máxima</b>	<b>2,2994E+03</b>

Fonte: Autor (2024).

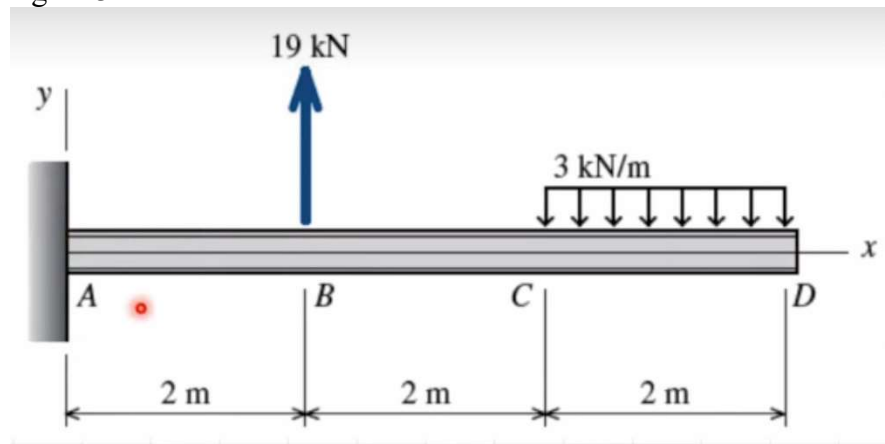
Finalizando a primeira viga com os valores já prefixados, porém podem ser

alterados de qualquer maneira.

## 4.2 Viga Engastada em Balanço

Para este exemplo foi usado valores já predeterminados de exercícios do livro Resistência dos Materiais do Hibbeler, 2017 e Análise Estrutural do Kassimali, 2017. Seguindo a mesma logística da outra viga, armazenando os valores em células e implementando as fórmulas já demonstradas, validando os resultados obtidos. Segue para os valores já determinados para o teste do código fonte:

Figura 31 – EP 2



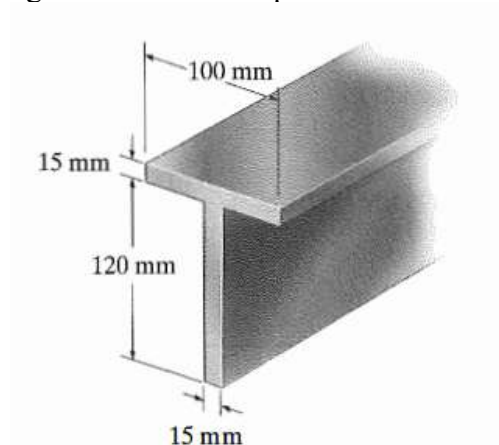
Fonte: Análise Estrutural, Kassimali (2017).

$$F = 3\text{KN}/m$$

$$F1 = 19\text{KN}$$

$$L = 6m$$

Figura 32 – Medidas perfil em T



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

$$T = 100\text{mm}$$

$$E = 15\text{mm}$$

$$H = 120\text{mm}$$

Todos esses valores foram armazenados nas células da planilha, podendo ser alterados, desta forma, se alterados, todos os valores são atualizados de maneira automática.

Figura 33 – Armazenamento EP2

	A	B	C
1	<b>VIGA ENGASTA</b>		
2	F(KN)	3	
3	L(m)	6	
4	F1(KN)	19	
5	Espessura(E) em milímetro	15	0,015
6	Comprimento(C) em milímetro	100	0,1
7	Altura(H) em milímetro	120	0,12

Fonte: Autor (2024).

As células C5, C6 e C7 mostradas na figura acima, são as mesmas medidas convertidas em metros.

Para o cálculo da  $F_{eq}$  do carregamento mostrado na viga, foi usado a fórmula (15) sendo armazenado em outra célula, visto que, os demais valores foram armazenados de forma organizada nas células para assim facilitar os cálculos.

Tendo o valor da  $F_{eq}$ , é possível calcular os valores das reações usando as fórmulas (16), (20) e (22), sendo eles respectivamente, as reações de apoio no eixo X e Y, e a somatória



do momento no ponto A, com isso em vista, todos os valores ficaram armazenados da seguinte forma:

Figura 34 – Forças EP2

	A	B	C
9			
10	Feq(KN.m)	6	
11	Ay(KN)	-13	Sentido Oposto
12	Ma(KN.m)	8	Sentido Certo

Fonte: Autor (2024).

Foi programado para que se o valor fosse negativo, o programa fornece o sentido correto ou oposto, com a seguinte linha de programação:

$$C11 = C12 = SE(B11 < 0; "Sentido Oposto"; "Sentido Certo")$$

O uso do “se” é como um valor lógico, ou seja, se for verdade retorna um valor, se não, retorna outro valor, neste caso o valor verdadeiro é se o resultado for negativo, senão é falso, ou seja, o resultado é positivo.

Esta viga foi seccionada em 3 partes iguais, como abordado na figura 11, então foi preciso fazer uma implementação diferente para cada uma dessas partes. Para isto foi feita uma primeira análise, em que para o cálculo do esforço cortante e momento fletor, o valor irá mudar de acordo com o trecho da viga, ou seja, a medida que o trecho vai mudando, os valores também mudam. Desta forma, o trecho AB, a variação é praticamente nula, mas mesmo assim foi usado o valor da viga dividido por três, a medida que vai percorrendo a viga é somada com o valor anterior sendo implementado como uma somatória, da mesma forma o trecho BC.

Obtido os valores do comprimento X, é aplicado para o trecho AB, as fórmulas (45) e (75), obtendo a seguinte tabela:

Figura 35 – Trecho AB EP2

	D	E	F	G
1	<b>ADA EM BALANÇO</b>			
2		Trecho AB		
3		x(m)	V(KN)	M(KN.m)
4		0	-13	8
5		2	-13	-18

Fonte: Autor (2024).

Para o cálculo do trecho segmentado e os valores do comprimento X e sua variação, foi usado o seguinte código:

$$E4 = \$B\$3/3$$

Para o cálculo do esforço cortante e momento fletor foram usados os códigos, respectivamente:

$$F4 = \$B\$11$$

$$G4 = \$B\$12 + (\$B\$11 * E4)$$

A função do (\$) é segurar, ou congelar, o valor da célula determinado, fazendo com que assim a medida que avance seja possível fazer um somatório.

Com os valores do comprimento X, é aplicado para o trecho BC, as fórmulas (48) e (79), obtendo a seguinte tabela:

Figura 36 – Trecho BC EP2

	D	E	F	G
6				
7		Trecho BC		
8		x(m)	V(KN)	M(KN.m)
9		0	6	-18
10		2	6	-6

Fonte: Autor (2024).

Da mesma forma segue-se a implementação para o trecho BC, seguindo suas fórmulas já determinadas e atualizando as células.

Para o trecho CD, com o carregamento distribuído sobre ele, é preciso uma análise mais minuciosa pois o cortante e o momento fletor irá variar de forma mais perceptível já que não é uma carga pontual, então a viga que já foi dividida em três partes iguais, no trecho CD foi dividido em seis partes iguais, sendo mais preciso os resultados, seguindo a formula a seguir:

$$E14 = E14 + (\$B\$3/15)$$

Desta forma, é realizado um somatório quando arrastado a mesma fórmula durante toda a tabela. Usando os valores obtidos dos trechos, é aplicado então as fórmulas (51) e (83), que fica da seguinte forma implementando a cortante e o momento fletor, respectivamente:

$$F14 = \$F\$10 - \$B\$2 * E14$$

$$G14 = \$G\$10 + (\$F\$14 * E14) - ((\$B\$2/2) * (E14^2))$$

Gerando a seguinte tabela:

Figura 37 – Trecho CD EP2

	D	E	F	G
12		Trecho CD		
13		x(m)	V(KN)	M(KN.m)
14		0	6	-6
15		0,4	4,8	-3,84
16		0,8	3,6	-2,16
17		1,2	2,4	-0,96
18		1,6	1,2	-0,24
19		2	0	0

Fonte: Autor (2024).

Após esses cálculos foi montado a tabela geral para que assim pudesse ser plotado.

Usando o comando:

$$B17 = \text{MAIOR}(\text{ABS}(K3:K12); 1)$$

$$B18 = \text{MAIOR}(\text{ABS}(J3:J12); 1)$$

Podemos destacar o valor máximo do esforço cortante e do momento fletor, ambos armazenados nas células. Com isso pode-se gerar os diagramas seguindo os mesmos procedimentos já apresentados.

Dando prosseguimento, de acordo com a fórmula (112), o centroide vai ser armazenado em outra célula, utilizando as medidas fornecidas pelo usuário, como mostrado na figura, logo usando o comando para calcular a fórmula, temos:

$$B14 = (((C7^2) * C5/2) + ((C7 + C5/2) * C6 * C5))/((C7 * C5) + (C6 * C5))$$

Logo após descoberto o valor, é armazenado em outra célula o momento de inercia que vai ser calculado de acordo com a fórmula (117), com o seguinte comando:

$$B15 = ((C5 * C7^3/12) + (C5 * C7 * (B14 - C7/2)^2)) + ((C6 * C5^3/12) + (C6 * C5 * (C7 + C5/2 - B14)^2))$$

Dando procedimento, com os valores do Cortante Máximo e do Momento Fletor Máximo, é possível encontrar também o Momento Estático, como mostrado na fórmula (139), armazenando em outra célula, da seguinte forma:

$$B16 = ((C5 * C7^2)/2) + (C6 * C5 * (C7 + C5/2))$$

Organizando todos os valores obtidos, tem-se a seguinte tabela

Figura 38 – Valores das variáveis EP2

	A	B
14	Centróide(m)	0,090681818
15	Inércia(m4)	5,91597E-06
16	Estático	0,00029925
17	Momento Fletor Máximo	18
18	Cortante Máxima	13

Fonte: Autor (2024).

Dado exposto, com todas as variáveis descobertas, é possível calcular a Tensão de Flexão Máxima (118) e a Tensão de Cisalhamento Máximo (140), respectivamente das seguintes formas:

$$B20 = B17 * \frac{C7 + C5 - B14}{B15}$$

$$B21 = \frac{B18 * B16}{B15 * C5}$$

Resultando em:

Figura 39 – Flexão e Cisalhamento EP2

	A	B
20	Tensão de Flexão Máxima	134843,1152
21	Tensão de Cisalhamento Máximo	43838,99502

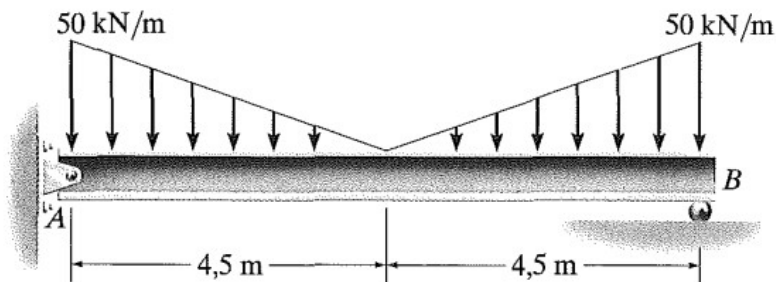
Fonte: Autor (2024)

Finalizando a primeira viga com os valores já prefixados, porém podem ser alterados de qualquer maneira.

### 4.3 Viga Bi Apoiada com Dois Carregamentos Lineares

Para o terceiro exemplo de viga foi usado um problema já elaborado pelo Resistência dos Materiais do Hibbeler (2017). O exercício proposto para a validação do código é mostrado a seguir:

Figura 40 – EP3

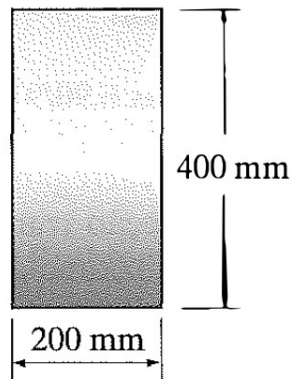


Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

$$F = 50 \text{ kNm}$$

$$L = 9 \text{ m}$$

Figura 41 – Perfil EP3



Fonte: Resistência dos Materiais, Hibbeler (2017).

$$b = 200\text{mm}$$

$$h = 400\text{mm}$$

Todos esses valores foram armazenados nas células da planilha, podendo ser alterados, desta forma, se alterados, todos os valores são atualizados de maneira automática.

Figura 42 – Valores EP3

	A	B	C
1	<b>VIGA BI APOIADA COM DOIS CA</b>		
2	F(KN)	50	
3	L(m)	9	
4	Base(b) em milímetro	200	0,2
5	Altura(h) em milímetro	400	0,4

Fonte: Autor (2024).

As células C4, C5 mostradas na figura acima, são as mesmas medidas convertidas em metros.

Para o cálculo da  $F_{eq}$  do carregamento mostrado na viga, foi usado a fórmula (25) sendo armazenado em outra célula, visto que, os demais valores foram armazenados de forma organizada nas células para assim facilitar os cálculos, ficando da seguinte forma:

$$B7 = (B2 * B3)/4$$

As demais reações são armazenadas nas demais células seguindo as fórmulas (32) e (37) respectivamente sendo as reações no ponto A e B, visto as fórmulas as reações têm o

mesmo valor da  $F_{eq}$ , logo é apenas repetido os valores:

Figura 43 – Forças EP3

	A	B
6		
7	$F_{eq}(KN.m)$	112,5
8	$A_y(KN)$	112,5
9	$B_y(KN)$	112,5

Fonte: Autor (2024)

Esta viga foi seccionada em 2 partes iguais, como abordado na figura 12, então foi preciso fazer uma implementação diferente para cada uma dessas partes. Para isto foi feito uma primeira análise, em que para o cálculo do esforço cortante e momento fletor, o valor irá mudar de acordo com o trecho da viga, ou seja, a medida que o trecho vai mudando, os valores também mudam.

Desta forma, o trecho AB, a variação foi feita para a viga já dividida ao meio foi dividida em 5, da mesma forma para o trecho BC, usando o código de implementação da seguinte forma:

$$E3 + (\$B\$3/10)$$

Usando esse código de implementação, arrasta o código durante toda a tabela, de forma automática.

Após isso para o trecho AC, é usado as fórmulas (58) e (87), para calcular o esforço cortante e o momento fletor, respectivamente, que foi implementado da seguinte forma:

$$F3 = \$B\$8 - (\$B\$2 * E3) + ((\$B\$2/\$B\$3) * (E3^2))$$

$$G4 = (\$B\$8 * E3) - ((\$B\$2/2) * (E3^2)) + ((\$B\$2/(3 * \$B\$3)) * (E3^3))$$

E para o trecho CB, é usado as fórmulas (65) e (91), para calcular o cortante e o momento fletor, respectivamente da seguinte forma:

$$F11 = \left( -\frac{\$B\$2}{\$B\$3} \right) * (E11^2)$$

$$G11 = (-B\$2/B\$3) * (E11^2)$$

Resultando as seguintes tabelas:

Tabela 5 – Trechos, Cortantes e Fletores EP3

x(m)	V(KN)	M(KM.m)
0	112,5	0
0,9	72	82,35
1,8	40,5	132,3
2,7	18	157,95
3,6	4,5	167,4
4,5	0	168,75
x(m)	V(KN)	M(KM.m)
0	0	168,75
0,9	-4,5	167,4
1,8	-18	157,95
2,7	-40,5	132,3
3,6	-72	82,35
4,5	-112,5	0

Fonte: Autor (2024).

Para destacar os maiores valores do cortante e do fletor é usado o seguinte código respectivamente:

$$B11 = \text{MAIOR}(\text{ABS}(K3:K14); 1)$$

$$B12 = \text{MAIOR}(\text{ABS}(J3:J14); 1)$$

Dado o exposto, é calculado a inercia do perfil da viga com a fórmula (120) e armazenado na fórmula da seguinte fórmula:

$$B13 = (C4 * C5^3)/12$$

Para o cálculo do momento de estática é usado a fórmula (144), implementando da seguinte forma:

$$B14 = (C5/4) * C4 * (C5/2)$$

Os resultados foram organizados da seguinte maneira:



Figura 44 – Variáveis EP3

	A	B
11	Momento Máximo	168,75
12	Cortante Máximo	112,5
13	Inércia	0,001066667
14	Estática	0,004

Fonte: Autor (2024)

Dando continuidade, para o cálculo da tensão flexão máxima e a tensão de cisalhamento máximo, tem-se as seguintes fórmulas (121) e (145), respectivamente, armazenando em células, implementando da seguinte forma:

$$B16 = B11 * C4/B13$$

$$B17 = (B12 * B14)/(B13 * C4)$$

Respectivamente tem-se a tensão de flexão e a tensão de cisalhamento, dispostos da seguinte forma:

Figura 45 – Flexão e Cisalhamento EP3

Tensão de Flexão Máximo	31640,625
Tensão de Cisalhamento Máximo	2109,375

Fonte: Autor (2024).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O principal resultado do trabalho é a criação de uma planilha capaz de calcular as tensões de vigas corretamente. A eficácia desta planilha foi testada com exemplos de estruturas comuns e exercícios corriqueiros de Resistências dos Materiais. Com vigas tendo o perfil I, T e retangular, como já abordada.

Visto isso, este tópico é dedicado a mostrar os resultados obtidos com a implementação comparados com o cálculo feito manualmente para verificar a coerência e a veracidade dos valores. O objetivo é gerar os diagramas obtidos através dos resultados e destacar os valores máximos da flexão e do cisalhamento para o dimensionamento das vigas.

### 5.1 Exemplo 1

Para o primeiro exemplo, temos a viga Bi Apoiada com um carregamento contínuo com os seguintes valores do comprimento da viga em metros, o esforço cortante e o momento fletor.

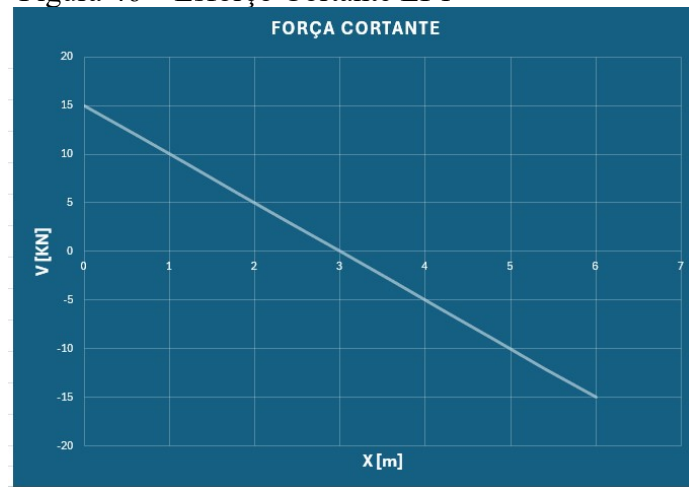
Tabela 6 – Trechos EP1

x(m)	V(KN)	M(KN.m)
0	15	0
0,6	12	8,1
1,2	9	14,4
1,8	6	18,9
2,4	3	21,6
3	0	22,5
3,6	-3	21,6
4,2	-6	18,9
4,8	-9	14,4
5,4	-12	8,1
6	-15	0

Fonte: Autor (2024).

Seguindo os passos destacados para gerar os diagramas é obtido os seguintes resultados:

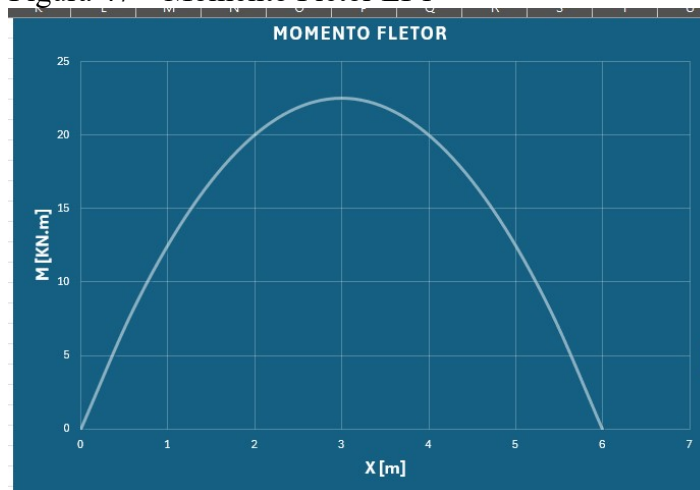
Figura 46 – Esforço Cortante EP1



Fonte: Autor (2024).

Observando o diagrama apresentado, é possível notar que, como o esforço cortante é uma função do primeiro grau, como mostrado na equação (42), é uma força com plotado como uma reta decrescente que varia em decorrência da viga está toda sob efeito de uma carga distribuída, logo, tanto as reações de apoio como o esforço que a carga distribuída exerce influenciam no esforço cortante. Após a análise é possível notar que o maior valor para este esforço é de 15kN que está localizado exatamente no ponto A.

Figura 47 – Momento Fletor EP1



Fonte: Autor (2024).

Outro fator importante diz respeito às propriedades do diagrama do momento fletor, pois para o cálculo deste é preciso integrar o esforço cortante, logo irá resultar numa função do segundo grau, em que quando plotado é possível ver uma curva parabólica, isso é visto na

equação (72). Após os cálculos, o maior valor apresentado para o momento fletor é de 22,5KN.m localizado exatamente na metade da viga devido ela está sob efeito de dois apoios e uma carga distribuída sob todo o comprimento da viga.

Figura 48 – Flexão e Cisalhamento Máximo EP1

Tensão de Flexão Máxima	1,1441E+04
Tensão de Cisalhamento Máxima	2,2994E+03

Fonte: Autor (2024).

Tendo como base os resultados acima, foi possível calcular a tensão de flexão máxima que a viga suporta, que ocorre em um ponto na área da secção transversal mais afastado do eixo neutro no perfil da viga. Onde, tendo como base a equação (107), a deformação máxima que esta viga está sofrendo em decorrência do momento fletor é de  $1,1441 \times 10^4$  Mpa.

Para a tensão de cisalhamento, de acordo com a equação (134), o esforço vertical que a viga está suportando depende do esforço cortante para determinar o valor, neste caso foi encontrado o valor máximo de  $2,2994 \times 10^3$  Mpa.

## 5.2 Exemplo 2

Para este exemplo tem-se uma Viga Engastada com uma carga pontual e um carregamento contínuo, de acordo com os procedimentos apresentados, os valores dos esforços cortantes e momento fletor em cada trecho da viga ficam dispostos da seguinte forma:

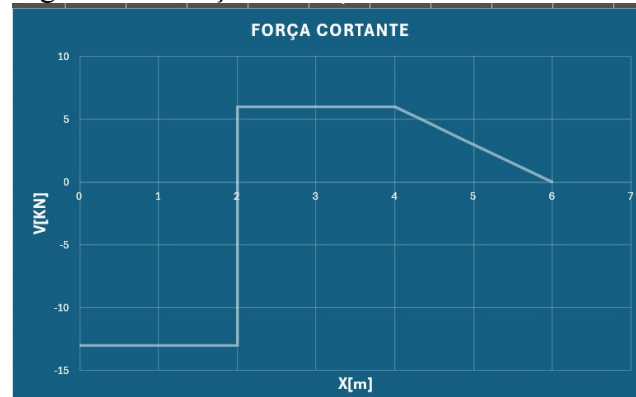
Tabela 7 – Trechos EP2

x(m)	V(KN)	M(KN.m)
0	-13	8
2	-13	-18
2	6	-18
4	6	-6
4	6	-6
4,4	4,8	-3,84
4,8	3,6	-2,16
5,2	2,4	-0,96
5,6	1,2	-0,24
6	0	0

Fonte: Autor (2024).

Tendo isso em vista é possível plotar um diagrama desses esforços usando as ferramentas disponíveis, visto que no eixo X vai ser representado o comprimento da viga em metros e no eixo Y irá variar sendo os valores dos esforços já mencionados.

Figura 49 – Força Cortante EP2



Fonte: Autor (2024).

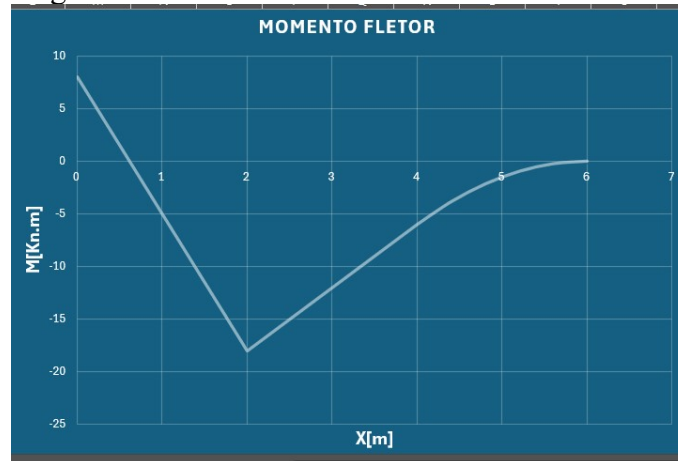
Após analisar cuidadosamente o diagrama de comprimento versus esforço cortante, é possível notar que no primeiro trecho da viga, segmento AB, não se tem cargas distribuídas, logo o cortante vai depender apenas das cargas concentradas, neste caso é a reação de apoio no ponto A, logo o esforço cortante será constante pois não irá variar, esforço esse com o valor constante de -13kN.

Chegando no trecho BC, no ponto B tem-se uma força pontual para cima, causando uma descontinuidade no diagrama, resultando num esforço constante no valor de 6kN, visto que não apresenta uma carga distribuída, logo dependera apenas dessa carga pontual.

Logo adiante, no trecho CD, é apresentado uma carga distribuída, logo de acordo com a equação (51), é possível perceber que o esforço cortante é uma função do primeiro grau que depende do valor de X, resultando em uma reta decrescente onde no ponto D a cortante é zero.

Dado exposto, o valor máximo do Esforço Cortante dessa viga é 6kN.

Figura 50 – Momento Fletor EP2



Fonte: Autor (2024).

Para a análise do diagrama acima tem-se que o momento fletor é diferente pois para obter os tais valores é preciso fazer uma integração da equação do esforço cortante, logo, em trechos que o esforço é constante, o resultado será uma função do primeiro grau, e onde o esforço varia, nesse caso como uma função do primeiro grau, o resultado do momento fletor se da forma como uma função do segundo grau. Tendo isso em vista é possível realizar análise nos trechos da viga da seguinte forma.

No primeiro trecho, AB, é possível perceber que o diagrama inicia com o valor de 8KN.m, pois de acordo com a equação (22), é possível calcular as reações de equilíbrio, logo o momento no ponto A não é nulo. De acordo com a equação (75), a equação do primeiro grau mostra que é uma reta decrescente, como visto no diagrama com o valor de -18KN.m.

Para o trecho BC, é feito a mesma análise pois se trata de uma equação do primeiro grau tendo em base a equação (79), resultando numa reta crescente atingindo o valor máximo de -6KN.m.

No trecho CD, por se tratar de um carregamento contínuo, o gráfico do momento fletor trata-se de uma função do segundo graus, tendo como base a equação (83), logo será uma curva suave como resultado, atingindo o valor máximo de 0KN.m por não existir nenhum momento na extremidade da viga.

Logo, o valor máximo atingido por esta viga do momento fletor será 8KN.m.

Figura 51 – Flexão e Cisalhamento Máximo EP2

Tensão de Flexão Máxima	134843,1152
Tensão de Cisalhamento Máximo	43838,99502

Fonte: Autor (2024).

Tendo como base os resultados acima, foi possível calcular a tensão de flexão máxima que a viga suporta, que ocorre em um ponto na área da secção transversal mais afastado do eixo neutro no perfil da viga. Onde, tendo como base a equação (118), a deformação máxima que esta viga está sofrendo em decorrência do momento fletor é de 134843Mpa.

Para a tensão de cisalhamento, de acordo com a equação (140), o esforço vertical que a viga está suportando depende do esforço cortante para determinar o valor, neste caso foi encontrado o valor máximo de 43838Mpa.

### 5.3 Exemplo 3

Para este exemplo foi escolhido uma viga Bi Apoiada com dois carregamentos lineares com a forma triangular, dado exposto os cálculos já apresentados, aplicando as fórmulas para o esforço cortante e o momento fletor nos determinados trechos, é possível organizar a seguinte tabela com os valores para que assim fosse encontrado os valores máximos, visto que a viga foi seccionada em duas partes iguais.

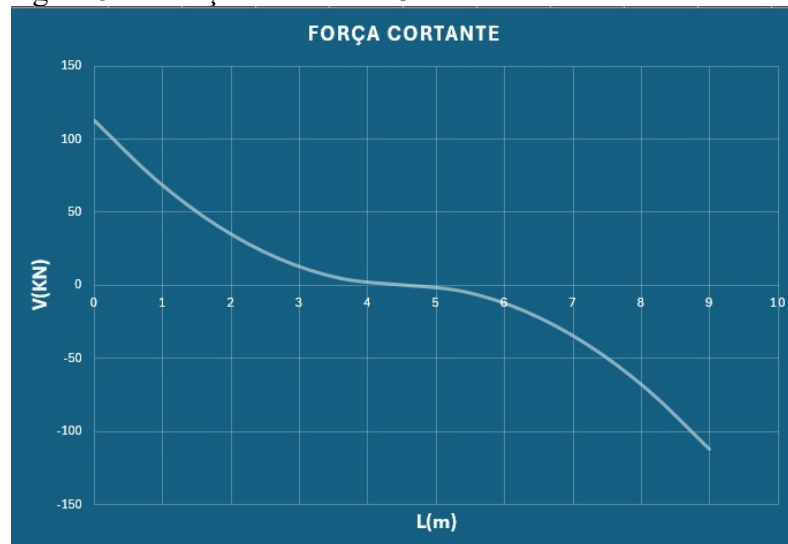
Tabela 8 – Trechos EP3

x(m)	V(KN)	M(KN.m)
0	112,5	0
0,9	72	82,35
1,8	40,5	132,3
2,7	18	157,95
3,6	4,5	167,4
4,5	0	168,75
4,5	0	168,75
5,4	-4,5	167,4
6,3	-18	157,95
7,2	-40,5	132,3
8,1	-72	82,35
9	-112,5	0

Fonte: Autor (2024).

Tendo isso em vista é possível plotar um diagrama desses esforços usando as ferramentas disponíveis, visto que no eixo X vai ser representado o comprimento da viga em metros e no eixo Y irá variar sendo os valores dos esforços já mencionados.

Figura 52 – Força Cortante EP3



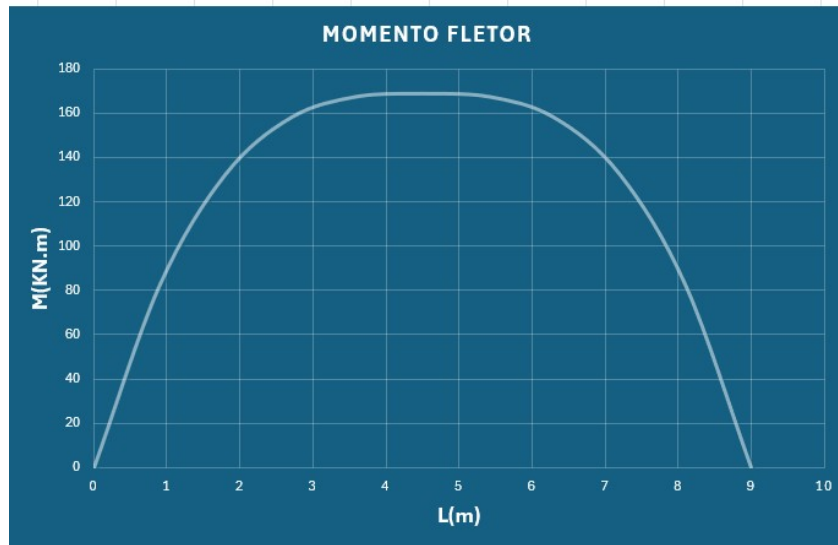
Fonte: Autor (2024).

Assim sendo, para o primeiro trecho, AC, de acordo com a equação (58) é possível perceber que se trata de uma função do segundo grau, logo, para o primeiro trecho o esforço cortante irá variar de acordo com o comprimento da viga por esta sob efeito de um carregamento distribuído apresentando uma leve curva, aonde chegando na metade do comprimento da viga o valor é zerado. Ou seja, o valor máximo alcançado para este trecho é de 112,5KN.

Para o segundo trecho, CB, de acordo com a equação (65) nota-se que trata de outra função do segundo grau que depende do comprimento da viga pois está sob efeito de outro carregamento contínuo, analisando o gráfico tratasse de uma curva decrescente em que o valor máximo absoluto é o mesmo do ponto A, logo o valor máximo é nulo porém o valor absoluto máximo é 112,5KN.



Figura 53 – Momento Fletor EP3



Fonte: Autor (2024).

Analisando o diagrama do momento fletor, é visto que a curva se trata de uma função do terceiro grau, logo que o momento fletor é basicamente a integralização do esforço cortante, logo, por conta do cortante ser uma função do segundo grau, integrando tem-se uma função do terceiro, mostrado, para o trecho AC, na equação (87). Analisando o diagrama é possível perceber que a curva se dá de forma crescente até a metade da viga atingindo seu valor máximo de 168,75KN.m.

Continuando no trecho CB, tem-se que se segue outra equação (91), porém igualmente do terceiro grau. Dado exposto é visto que a curva volta a decrescer até o valor mínimo que é nulo, logo o valor máximo permanece de 168,75KN.m.

Figura 54 - Flexão e Cisalhamento EP3

<b>Tensão de Flexão Máximo</b>	<b>31640,625</b>
<b>Tensão de Cisalhamento Máximo</b>	<b>2109,375</b>

Fonte: Autor (2024).

Tendo como base os resultados acima, foi possível calcular a tensão de flexão máxima que a viga suporta, que ocorre em um ponto na área da secção transversal mais afastado do eixo neutro no perfil da viga. Onde, tendo como base a equação (121), a deformação máxima que esta viga está sofrendo em decorrência do momento fletor é de 31640,625Mpa.

Para a tensão de cisalhamento, de acordo com a equação (145), o esforço vertical

que a viga estão suportando depende do esforço cortante para determinar o valor, neste caso foi encontrado o valor máximo de 2109,375Mpa.

## 6 CONCLUSÃO

A efetivação dos cálculos usando planilhas eletrônicas para a abordagem dos esforços cortantes, momentos fletores, tensões de flexão e cisalhamento em vigas, demonstrou uma aproximação eficaz, visto que, os resultados obtidos foram corroborados com cálculos feitos manualmente e baseado na literatura. Este trabalho apresenta uma metodologia detalhada para a utilização de funções avançadas e a automação por meio das células, facilitando o dimensionamento estrutural das vigas, com o uso desta ferramenta amplamente utilizada para diversos objetivos.

O objetivo da produção deste projeto, é criar planilhas que permitem a introdução de dados intuitivamente, possibilitando a visualização imediata dos resultados dos cálculos. Estas planilhas foram projetadas para, além dos cálculos dos esforços sob a viga em diversos pontos ao longo da viga, plotar em forma de diagramas os resultados obtidos e destacar os valores máximos alcançados com fundação nas condições de carregamento e medidas definidas pelo usuário.

A variabilidade do *software* em relação a diversas ferramentas, associada a suas funções de gráfico, permitiu que os resultados obtidos fossem vistos nos diagramas do esforço cortante e momento fletor. Estas representações são fundamentais para o entendimento da estrutura da viga, facilitando o reconhecimento dos pontos críticos e auxiliando no dimensionamento correto dos princípios estruturais.

Analisando os resultados obtidos, a planilha atingiu com sucesso a equivalência dos valores obtidos manualmente e automaticamente, mostrando assim a viabilidade para o dimensionamento de vigas sujeitas aos carregamentos programados. A clareza dos cálculos realizados destacou a consideração da automação nos resultados, a utilização das células permitiu a realização de cálculos repetitivos e complexos, como Momento de Inércia e Centróide, reduzindo o tempo para o dimensionamento de vigas e minimizando a probabilidade de erros. É visto também que este trabalho atingiu o objetivo de facilitar os cálculos que foram estudados em Resistência dos Materiais e Mecânica Estática.

Em suma, a efetivação dos cálculos usando a planilha para o estudo de esforços cortantes, momentos fletores, flexão e cisalhamento em vigas, se mostrou vantajoso, é esperado que este trabalho incentive a admissão de métodos acessíveis e eficientes, contribuindo para a consolidação dos resultados.

Esta abordagem abre oportunidades para futuras pesquisas e melhorias, as planilhas

desenvolvidas podem ser adaptadas e expandidas para outros tipos de análises mais complexas junto com a utilização de outras ferramentas e outras técnicas de planejamento mais avançados.

## REFERÊNCIAS

- ALBRIGHT, S. C.; WINSTON, W. L. **Modelagem e aplicações de planilhas: fundamentos da ciência prática de gerenciamento**. Cengage Learning, 2017.
- BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON, Russell Jr.; DEWOLF, John T.; MAZUREK, David F. **Mecânica dos Materiais**. 7. ed. McGraw-Hill, 2015.
- DIAS, L.; SILVA, R. **Customização de planilhas para aplicações de engenharia estrutural**. Revista de Engenharia Civil e Gestão, 2019.
- GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos Materiais**. 3º ed. Cengage Learning, 2017.
- GOMES, P.; ALMEIDA, F. **Projeto colaborativo em engenharia civil por meio de ferramentas digitais**. Revista Internacional de Educação em Engenharia, 2021.
- GONÇALVES, J.; SANTOS, R. **Visualização de dados em engenharia: O uso de gráficos em planilhas eletrônicas**. Revista de Tecnologia e Inovação, 2018.
- HIBBELER, R. C. **Mecânica para Engenharia: Estática e Dinâmica**. 14º ed. Pearson, 2017.
- KASSIMALI, Aslam. **Structural Analysis**. 6ª ed. CRC Press, 2017.
- MARTINS, A.; ALMEIDA, F. **Integração de planilhas em processos de projeto de engenharia civil**. Jornal de Design de Engenharia, 2021.
- MARTINS, A.; RIBEIRO, J. **Promover a inovação em engenharia através de ferramentas digitais**. Diário de Gestão de Engenharia, 2018.
- MEGSON, T. H. G. **Structural and Stress Analysis**. Butterworth-Heinemann, 2013.
- MENDES, T.; CARVALHO, S. **Integração de planilhas e análise de elementos finitos em projetos estruturais**. Computadores e Estruturas, 2020.
- MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia: Estática**. 7º ed. LTC, 2015.
- PANKO, R. R. **O que sabemos sobre erros de planilhas**. Diário de Computação do Usuário Final, 1998.
- SMITH, R.; PETERSON, D. **Métodos de cálculo manuais versus automatizados em engenharia estrutural**. Engenharia Estrutural Internacional, 2017.
- TIMOSHENKO, S.; GERE, J. M. **Teoria da Elasticidade**. McGraw-Hill, 2015.
- UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. **Advanced Strength and Applied Elasticity**. Prentice Hall, 2011.

## LISTA DE FÓRMULAS

$\sum Fy = 0$ (1)	$\sum Fx = 0$ (2)	$\sum M_o = 0$ (3)
$\sum M_o = F x d$ (4)	$Feq = B x H$ (5)	$Feq = \frac{B x H}{2}$ (6)
$Feq = L x F$ (7)	$\sum Fx = 0$ (8)	$Ax = 0$ (9)
$\sum Ma = 0$ (10)	$B_y x L - Feq x \frac{L}{2} = 0$ (11)	$B_y = \frac{Feq}{2}$ (12)
$A_y + B_y = 0$ (13)	$A_y = -B_y = -\frac{Feq}{2}$ (14)	$Feq = \frac{L}{3} x F$ (15)
$\sum Fx = 0$ (16)	$A_x = 0$ (17)	$\sum Fy = 0$ (18)
$Ay + F1 - Feq = 0$ (19)	$Ay = Feq - F1$ (20)	$M_A - F1 x \frac{L}{3} + Feq x \frac{5L}{6} = 0$ (21)
$M_A = F1 x \frac{L}{3} - Feq x \frac{5L}{6}$ (22)	$A_t = \frac{BxH}{2}$ (23)	$Feq = \frac{F x \frac{L}{2}}{2}$ (24)
$Feq = \frac{F x L}{4}$ (25)	$\sum Fx = 0$ (26)	$Ax = 0$ (27)
$\bar{X} = \frac{B}{3}$ (28)	$\sum M_A = 0$ (29)	$Feq x \frac{L}{6} + Feq x \frac{5L}{6} - B_y x L = 0$ (30)
$Feq x L = B_y x L$ (31)	$B_y = Feq$ (32)	$\sum Fy = 0$ (33)
$Ay + B_y - Feq - Feq = 0$ (34)	$Ay + B_y = 2 x Feq$ (35)	$Ay = 2 x Feq - B_y$ (36)
$Ay = Feq$ (37)	$\frac{dV}{dx} = -w$ (38)	$V = \int -w dx$ (39)
$\sum Fy = 0$ (40)	$Ay - Fx - V(x) = 0$ (41)	$V(x) = Ay - Fx$ (42)
$0 \leq x \leq \frac{L}{3}$ (43)	$V_{AB} = V_A + \int_A^B -w dx$ (44)	$V_{AB} = V_A = Ay$ (45)
$V_{BC} = V_B + \int_B^C -w dx$ (46)	$V_B = V_{AB}$ (47)	$V_{BC} = V_B + F1$ (48)
$\int_C^D -w dx = -Fx$ (49)	$V_{CD} = V_{BC} - Fx$ (50)	$V_{CD} = V_B + F1 - Fx$ (51)
$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ (52)	$w(x) = F - \frac{2Fx}{L}$ (53)	$w(0) = F$ (54)
$w\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ (55)	$V_{AC} = V_A + \int_A^C -w dx$ (56)	$V_A = Ay$ (57)
$V_{AC} = Ay - \left(Fx - \frac{Fx^2}{L}\right)$ (58)	$V_A = Ay$ (59)	$V_C = 0$ (60)
$w(x) = \frac{2Fx}{L}$ (61)	$w(0) = 0$ (62)	$w\left(\frac{L}{2}\right) = F$ (63)

$V_{CB} = V_C + \int_C^B -w(x)dx$ (64)	$V_{CB} = -\frac{Fx^2}{L}$ (65)	$V_C = 0$ (66)
$V_B = \frac{FL}{4}$ (67)	$\frac{dM}{dx} = V$ (68)	$M = \int Vdx$ (69)
$\sum M = 0$ (70)	$-Ay * x + Fx * \frac{x}{2} + M(x) = 0$ (71)	$M(x) = -F \frac{x^2}{2} + Ay * x$ (72)
$M_{AB} = M_A + \int_A^B Vdx$ (73)	$\sum M_A = 0$ (74)	$M_{AB} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * x$ (75)
$M_{AB} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right)$ (76)	$M_{AB} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3}$ (77)	$M_{BC} = M_B + \int_B^C Vdx$ (78)
$M_{BC} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * x$ (79)	$M_{BC} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3}$ (80)	$M_{BC} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3}$ (81)
$M_{CD} = M_C + \int_C^D Vdx$ (82)	$M_{CD} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3} + \left(V_{BC} * x - \frac{Fx^2}{2}\right)$ (83)	$M_{CD} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3}$ (84)
$M_{CD} = \left(F1 * \frac{L}{3}\right) - \left(Feq * \frac{5L}{6}\right) + Ay * \frac{L}{3} + V_{BC} * \frac{L}{3} + \left(V_{BC} * \frac{L}{3} - \frac{FL^2}{6}\right)$ (85)	$M_{AC} = M_A + \int_A^C Vdx$ (86)	$M_{AC} = Ay * x - \frac{Fx^2}{2} + \frac{Fx^3}{3L}$ (87)
$M_{AC} = 0$ (88)	$M_{AC} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} + \frac{FL^2}{24}$ (89)	$M_{CB} = M_C + \int_C^B Vdx$ (90)
$M_{CB} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} + \frac{FL^2}{24} - \frac{Fx^3}{3L}$ (91)	$M_{CB} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8} + \frac{FL^2}{24}$ (92)	$M_{CB} = \frac{Ay*L}{2} - \frac{FL^2}{8}$ (93)
$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}dA}{\int dA}$ (94)	$\bar{y} = \frac{\int \bar{y}dA}{\int dA}$ (95)	$dI_X = y^2 dA \rightarrow I_X = \int y^2 dA$ (96)
$dI_Y = x^2 dA \rightarrow I_Y = \int x^2 dA$ (97)	$I_X = \bar{I}_X + Ad_y^2$ (98)	$I_Y = \bar{I}_Y + Ad_x^2$ (99)
$C_{ent} = \frac{H}{2} + E$ (100)	$I_X = \bar{I}_X + Ad_y^2$ (101)	$\bar{I}_X = \frac{1}{12}bh^3$ (102)

$d = \frac{H}{2} + \frac{E}{2}$ (103)	$I_{x13} = 2 \left[ \left( \frac{TE^3}{12} \right) + \left( \frac{E}{2} + \frac{H}{2} \right)^2 TE \right]$ (104)	$I_{x2} = \frac{EH^3}{12}$ (105)
$I_X = \frac{EH^3}{12} + 2 \left[ \left( \frac{TE^3}{12} \right) + \left( \frac{E}{2} + \frac{H}{2} \right)^2 TE \right]$ (106)	$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x} * \left( \frac{H}{2} + E \right)}{\frac{EH^3}{12} + 2 \left[ \left( \frac{TE^3}{12} \right) + \left( \frac{E}{2} + \frac{H}{2} \right)^2 TE \right]}$ (107)	$Y_G = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 A_2}$ (108)
$A_1 = TE$ (108)	$Y_1 = H + \frac{E}{2}$ (109)	$A_2 = HE$ (110)
$Y_2 = \frac{H}{2}$ (111)	$Y_G = \frac{TE \left( H + \frac{E}{2} \right) + HE \left( \frac{H}{2} \right)}{TE + HE}$ (112)	$d_1 = H + \frac{E}{2} - Y_G$ (113)
$I_{x1} = \frac{1}{12} TE^3 + TE d_1^2$ (114)	$d_2 = Y_G - \frac{H}{2}$ (115)	$I_{x2} = \frac{1}{12} EH^3 + EH d_2^2$ (116)
$I_X = \frac{1}{12} TE^3 + TE d_1^2 + \frac{1}{12} EH^3 + EH d_2^2$ (117)	$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x} * \frac{TE \left( H + \frac{E}{2} \right) + H \left( \frac{H}{2} \right)}{TE + HE}}{\frac{1}{12} TE^3 + TE d_1^2 + \frac{1}{12} EH^3 + EH d_2^2}$ (118)	$Y_G = \frac{h}{2}$ (119)
$I_X = \frac{1}{12} bh^3$ (120)	$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x} * \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} bh^3}$ (121)	$\tau = \frac{VQ}{It}$ (122)
$Q = y' A'$ (123)	$t = E$ (124)	$y'_1 = \frac{H}{2} + \frac{E}{2}$ (125)
$A'_1 = TE$ (126)	$Q_1 = y'_1 * A'_1$ (127)	$Q_1 = \left( \frac{H}{2} + \frac{E}{2} \right) TE$ (128)
$y'_2 = \frac{H}{2} = \frac{H}{4}$ (129)	$A'_2 = E \frac{H}{2}$ (130)	$Q_2 = \frac{H}{4} E \frac{H}{2} = \frac{EH^2}{8}$ (131)
$Q = Q_1 + Q_2$ (132)	$Q = \left[ \left( \frac{H}{2} + \frac{E}{2} \right) TE \right] + \frac{EH^2}{8}$ (133)	$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} Q}{It}$ (134)
$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} \left[ \left( \frac{H}{2} + \frac{E}{2} \right) TE \right] + \frac{EH^2}{8}}{IE}$ (135)	$t = E$ (136)	$y' = (H + E) - \frac{E}{2} - y_G$ (137)
$A' = EH$ (138)	$Q = \left[ (H + E) - \frac{E}{2} - y_G \right] EH$ (139)	$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} \left[ (H + E) - \frac{E}{2} - y_G \right] EH}{IE}$ (140)
$t = b$ (141)	$y' = \frac{h}{2}$ (142)	$A' = bh$ (143)
$Q = \frac{h}{2} bh = \frac{bh^2}{2}$ (144)	$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x} \frac{bh^2}{2}}{Ib}$ (145)	



APENDICE A – INTERFACE DAS PLANILHAS

