



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS CRATEÚS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

YURI KAMAGOE FREITAS FREIRE

UM SURVEY SOBRE RESULTADOS RECENTES EM COLORAÇÃO BACKBONE

CRATEÚS

2024

YURI KAMAGOE FREITAS FREIRE

UM SURVEY SOBRE RESULTADOS RECENTES EM COLORAÇÃO BACKBONE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus Crateús da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas

CRATEÚS

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F935s Freire, Yuri Kamagoe Freitas.
Um survey sobre resultados recentes em coloração backbone / Yuri Kamagoe Freitas Freire. – 2024.
54 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Crateús,
Curso de Ciência da Computação, Crateús, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas.

1. Coloração de grafos circular. 2. Número cromático Backbone. 3. Coloração Backbone. I. Título.
CDD 004

YURI KAMAGOE FREITAS FREIRE

UM SURVEY SOBRE RESULTADOS RECENTES EM COLORAÇÃO BACKBONE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus Crateús da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

MSc. Luiz Alberto do Carmo Viana

Prof. MSc. Alexandre Azevedo Cezar
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Meus pais que sempre se sacrificaram para que eu tivesse um futuro. Minha avó que sempre me ensinou a persistir e nunca desistir.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Gilberto Freire e Maria Katiana, por todo amor, carinho e suporte durante toda essa jornada.

À minha esposa Ana Soares por todo suporte e por sempre ter acreditado em meu potencial.

Ao meu orientador, professor Rennan Dantas, por todo acompanhamento e auxílio no desenvolvimento do presente trabalho, além da paciência apresentada durante essa fase que foi desenvolver este trabalho, fase tal que atravessou uma pandemia.

À Universidade Federal do Ceará, pela oportunidade de fazer a graduação e ser minha casa durante todo esse período.

Aos meus amigos e colegas que me acompanharam, me apoiaram e compartilharam experiências durante a graduação. Em especial Matheus Cavalcante, Rennan Lourenço e Thiago Freitas.

À todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Não existe triunfo sem perda, não há vitória sem sofrimento, não há liberdade sem sacrifício. ”

(J.R.R. Tolkien)

RESUMO

Seja $G = (E(G), V(G))$ um grafo e $H = (E(H), V(H))$ um subgrafo de G , para naturais q e k , uma q -backbone k -coloração do par (G, H) é uma coloração própria $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tal que para todo uv , $|c(u) - c(v)| \geq q$ se uv pertence a $E(H)$. O número cromático q -backbone de (G, H) , $BBC_q(G, H)$, é o menor inteiro positivo k tal que o par é q -backbone k -colorível. Dado um grafo G e um subgrafo gerador H de G , uma q -backbone k -coloração circular de (G, H) é uma k -coloração c de G tal que $q \leq |c(u) - c(v)| \leq k - q$ para cada aresta $uv \in E(H)$. O número cromático q -backbone circular de (G, H) , denotado por $CBC_q(G, H)$, é o menor inteiro k para o qual existe uma q -backbone k -coloração circular de (G, H) . Este presente trabalho se propõe a apresentar um *survey* onde organizamos pesquisas dentro do campo de Coloração Backbone. Temos como objetivo principal a apresentação de resultados recentes de BBC e CBC para diferentes estruturas de Backbone.

Palavras-chave: Coloração de grafos circular. Número cromático Backbone. Coloração Backbone

ABSTRACT

Let $G = (E(G), V(G))$ be a graph and $H = (E(H), V(H))$ be a subgraph of G , for any integers q and k , a q -backbone k -coloring of a pair (G, H) is a proper coloring $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ such that for each uv , $|c(u) - c(v)| \geq q$ if uv belongs to $E(H)$. The q -backbone chromatic number of (G, H) , $BBC_q(G, H)$, is the smallest positive integer k such that the graph is q -backbone k -colorable. Given a graph G and a spanning subgraph H of G , a circular q -backbone k -coloring of (G, H) is a k -coloring c of (G, H) such that $q \leq |c(u) - c(v)| \leq k - q$ for each edge $uv \in E(H)$. The circular q -backbone chromatic number of (G, H) , denoted by $CBC_q(G, H)$, is the smallest integer k for which there is a circular q -backbone k -coloring of (G, H) . This paper proposes to present a survey where we organize researches in the Backbone coloring. Our main objective is to present recent results of BBC and CBC for different backbone structures.

Palavras-chave: Graph Coloring. Chromatic Number. Backbone Coloring

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de coloração em um mapa da Europa.	13
Figura 2 – Exemplo de um par (G, H) com backbone H (arestas em negrito).	14
Figura 3 – Um diagrama do grafo G	16
Figura 4 – Outro diagrama do grafo G	17
Figura 5 – Exemplo de um grafo não simples.	17
Figura 6 – Dois grafos não idênticos.	18
Figura 7 – Grafo G e seu complemento G'	18
Figura 8 – Diagrama do K_5	18
Figura 9 – Exemplo de grafos G e G' , onde G' é subgrafo gerador de G	19
Figura 10 – Exemplo de um grafo G e um grafo G' induzido pelo conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$	19
Figura 11 – Exemplo de grafo G	20
Figura 12 – Exemplo de grafos G e um caminho W destacado em negrito.	20
Figura 13 – Exemplo de grafos G e um ciclo destacado em negrito.	21
Figura 14 – Exemplo de um grafo G formado por 3 componentes.	21
Figura 15 – Exemplo de grafo G e um caminho hamiltoniano destacado em negrito.	21
Figura 16 – Exemplo de grafo G e um emparelhamento M destacado em negrito.	22
Figura 17 – Exemplo de grafo estrela.	22
Figura 18 – Exemplo de grafos G e uma árvore geradora do grafo G	23
Figura 19 – Exemplo de um grafo G bloco e seus blocos.	24
Figura 20 – Exemplo de grafos G bipartido.	24
Figura 21 – Diagrama do $K_{3,3}$	25
Figura 22 – Grafo split particionado em uma clique e em um conjunto independente.	25
Figura 23 – Exemplos de representações G e G' , onde G é a representação planar e G' é representação não plana.	26
Figura 24 – Exemplo de grafos G e G' , onde G é o grafo original e G' é seu dual.	26
Figura 25 – Exemplo de grafo periplanar.	26
Figura 26 – Exemplo de rotulação de um grafo.	27
Figura 27 – Exemplo de uma coloração BBC sobre o par (G, H)	28
Figura 28 – Exemplo de uma coloração CBC sobre o par (G, H)	29
Figura 29 – 3–vértice u	38

Figura 30 – Grafo split.	41
Figura 31 – Grafo split com K_5 destacado.	41
Figura 32 – Caminho hamiltoniano do grafo split.	42
Figura 33 – Coloração de vértices do grafo split considerando o caminho hamiltoniano.	42
Figura 34 – Exemplo em que $BBC_2(G, M) = 4$	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Contextualização	13
1.2	Organização do trabalho	14
1.3	Objetivos	15
1.3.1	<i>Objetivo geral</i>	15
1.3.2	<i>Objetivo específico</i>	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Grafos e definições	16
2.2	Coloração de grafos	27
2.3	Coloração Backbone	28
2.4	Método da Descarga	29
2.4.1	<i>Notações e definições</i>	29
3	TRABALHOS RELACIONADOS	31
3.1	Resultados gerais	31
3.2	Floresta Backbone	31
3.3	Constelação Backbone	33
3.4	Emparelhamento Backbone	34
4	RESULTADOS RELACIONADOS A BACKBONE COLORING (BBC)	37
4.1	Coloração Backbone para Grafos Planares Livres de Triângulo	37
4.2	Determinando números de coloração q-Backbone em um grafo split	40
4.3	Coloração 2-backbone de grafos periplanares com um emparelhamento backbone	43
5	RESULTADOS RELACIONADOS A <i>CIRCULAR BACKBONE COLORING</i> (CBC)	46
5.1	Coloração Backbone de grafos com Galáxias Backbone	46
5.2	Coloração Backbone Circular: Emparelhamento e árvore backbones de grafos planares.	48
6	CONCLUSÃO	52
6.1	Resultados alcançados	52
6.2	Limitações encontradas	52

6.3	Trabalhos futuros	53
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados pontos iniciais do trabalho. A Seção 1.1 apresenta uma breve introdução do trabalho, enquanto a Seção 1.2 explica a organização do conteúdo. Por fim, a a Seção 1.3 apresenta o objetivo geral e o objetivo específico da pesquisa.

1.1 Contextualização

A Teoria dos Grafos é uma área que está presente em diversos âmbitos do cotidiano humano. Ao longo dos anos, vários problemas dessa área vêm sendo estudados. Neste trabalho, estudaremos de forma principal a Coloração de Grafos, uma subárea da Teoria dos Grafos cujo primeiro resultado se relaciona principalmente com a coloração de países num mapa datado no início de 1852 (KUBALE, 2004).

Ao longo do tempo, percebeu-se que se cada país fosse colorido com exatamente uma cor, então o mapa todo poderia ser colorido com 4 cores, de forma que países vizinhos não fossem coloridos com a mesma cor. Essa observação foi então publicada na forma de um desafio e mais tarde ficou conhecido como o Teorema das Quatro Cores (FRITSCH *et al.*, 1998).

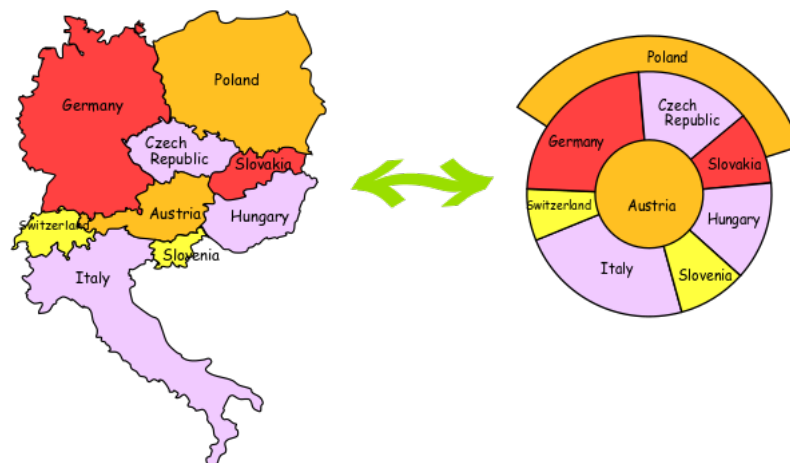


Figura 1 – Exemplo de coloração em um mapa da Europa.

Fonte: Pierce Rod (2022).

Existem diversos tipos de coloração de grafos. No presente trabalho abordaremos a Coloração Backbone de forma principal. A coloração backbone tem sua origem do problema de atribuição de canais proposto por (HALE, 1980). No problema de atribuição de canais, deve ser atribuído a cada canal um conjunto de transmissores com interferência mínima. Um grafo G é construído com os transmissores representados pelos vértices de G e dois vértices

são adjacentes em G quando dois transmissores correspondentes interferem um com o outro. Seja H um subgrafo de G tal que cada aresta em H é formada por dois vértices com com alta interferência. Podemos definir (G, H) como um par e o subgrafo de H um **backbone** de G (BROERSMA *et al.*, 2007). A Figura 2 apresenta um exemplo de grafo G , um subgrafo H de G e o grafo que representa par (G, H) .

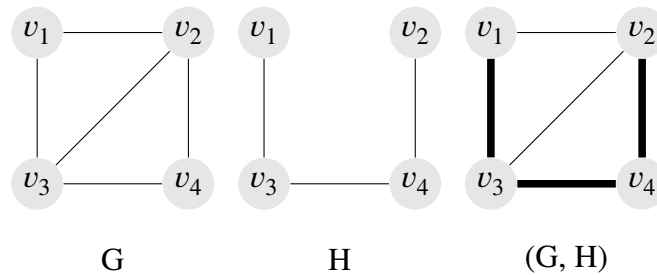


Figura 2 – Exemplo de um par (G, H) com backbone H (arestas em negrito).

O presente estudo visa contribuir com a comunidade acadêmica, com a expansão do conhecimento sobre coloração backbone. Esta pesquisa busca ainda difundir a coloração backbone bem como a sua importância para a Teoria dos Grafos.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentaremos nossa Fundamentação Teórica, onde encontram-se definições importantes para uma melhor compreensão da leitura. No Capítulo 3 encontram-se os Trabalhos Relacionados, onde são expostos resultados sobre Coloração Backbone encontrados na literatura. Neste trabalho apresentamos resultados publicados posteriormente ao ano de 2016. No Capítulo 4 temos os resultados referentes a valores BBC e no Capítulo 5 apresentamos resultados referentes a valores CBC . Por fim no Capítulo 6 apresentamos comentários de conclusão, um breve resumo sobre resultados alcançados e algumas questões em aberto, além de informações que podem levar ao desenvolvimento de trabalhos futuros.

Este trabalho visa organizar o conhecimento acadêmico sobre Coloração Backbone, assim contribuindo com a estruturação de novos resultados sobre o assunto e expondo sua importância para a Teoria dos Grafos. Iremos considerar como trabalhos recentes aqueles publicados após o ano de 2016, ano no qual encontramos o *survey* mais recente sobre o tema.

1.3 Objetivos

Nesta seção são mostrados os objetivos deste trabalho. Ela será dividida em Objetivo geral e Objetivo específico.

1.3.1 Objetivo geral

- O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um estudo de coloração backbone por meio de um survey.

1.3.2 Objetivo específico

- O objetivo específico deste trabalho é compilar, apresentar e discutir resultados relacionados à coloração backbone publicados posteriormente ao ano de 2016 a fim de contribuir para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos e definições importantes para o entendimento da presente pesquisa baseado nos livros de Bondy e Murty (BONDY; MURTY., 2008), uma fonte clássica de pesquisa para a área de Teoria dos Grafos, e de Chartrand e Zhang (CHARTRAND; ZHANG, 2019), além da dissertação (CEZAR, 2016). A Seção 2.1 aborda, de forma breve, algumas definições, exemplos e propriedades de Teoria dos Grafos. A Seção 2.2 apresenta definições de coloração de grafos. A Seção 2.3 apresenta o conceito de coloração backbone. A Seção 2.4 apresenta conceitos de Método da Descarga, bem como exemplo de uso.

2.1 Grafos e definições

Para o entendimento desse trabalho é necessário conhecer o básico da estrutura matemática denominada grafo. Um **grafo** G pode ser compreendido como uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de **vértices**, o conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, é o conjunto de **arestas** e ψ_G é uma função que associa cada aresta de G a um par (não necessariamente distinto) de vértices de G .

Tomemos como exemplo um grafo G , onde seus vértices são definidos por $V(G) = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, suas arestas são definidas por $E(G) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ e a incidência de suas arestas, ψ_G , é definida por: $\psi_G(e_1) = v_1v_2$, $\psi_G(e_2) = v_1v_3$, $\psi_G(e_3) = v_2v_3$, $\psi_G(e_4) = v_2v_4$, $\psi_G(e_5) = v_4v_1$. Um diagrama do grafo G é mostrado na Figura 3.

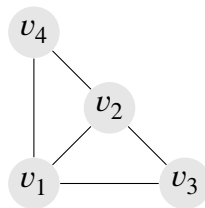


Figura 3 – Um diagrama do grafo G .

Cada vértice é indicado por um círculo ou um ponto e cada aresta é representada por uma linha juntando dois pontos que representam suas extremidades. O número de vértices num grafo G é a **ordem** de G . Não existe uma forma única de se desenhar um grafo; a posição relativa dos pontos que representam os vértices e das linhas que representam as arestas não possuem importância. Outro diagrama do grafo G , por exemplo, é dado na Figura 4. O diagrama de um grafo meramente representa a relação de incidência mantida entre os vértices e as arestas.

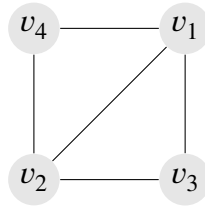


Figura 4 – Outro diagrama do grafo G

Um grafo é denominado **finito** se tanto o conjunto de vértices, como o conjunto de arestas são finitos. Neste trabalho de conclusão de curso trabalharemos apenas com grafos finitos. Nós denominamos como **trivial** um grafo que possui apenas um vértice e como **não trivial** todos os outros. Um grafo possui um **laço** ou **loop** caso exista uma aresta ligando um vértice a ele mesmo. Na Figura 5 temos um exemplo de grafo com loop. Um grafo é denominado **simples** se não possui loops e não possui mais de uma aresta interligando o mesmo par de vértices. Nessa pesquisa trabalharemos apenas com grafos simples.

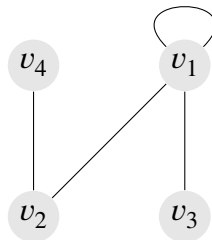


Figura 5 – Exemplo de um grafo não simples.

Nós utilizamos os símbolos $v(G)$ e $\varepsilon(G)$ para denotar o número de vértices e arestas no grafo G . Ao longo do texto, a letra G denota um grafo. Além disso, quando apenas um grafo está sendo discutido, normalmente denotamos este grafo por G . Podemos omitir a letra G das notações relacionadas à teoria dos grafos e escrevemos, por exemplo, V, E, v e ε ao invés de $V(G), E(G), v(G)$ e $\varepsilon(G)$.

Dois grafos G e H são **idênticos** ($G = H$) se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $\psi_G = \psi_H$. Se dois grafos são idênticos, eles podem claramente ser representados por diagramas idênticos. Na Figura 6 vemos dois grafos que aparentam ser iguais, contudo o rotulamento dos vértices é distinto, logo tais grafos não são idênticos.

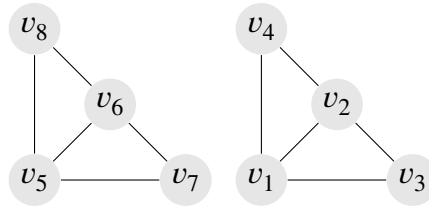


Figura 6 – Dois grafos não idênticos.

O complemento G^C de um grafo simples G é o grafo simples com o conjunto de vértices V , onde dois vértices são adjacentes em G^C se e somente se eles não forem adjacentes em G . Na Figura 7 temos o exemplo de um Grafo G e seu complemento G' .

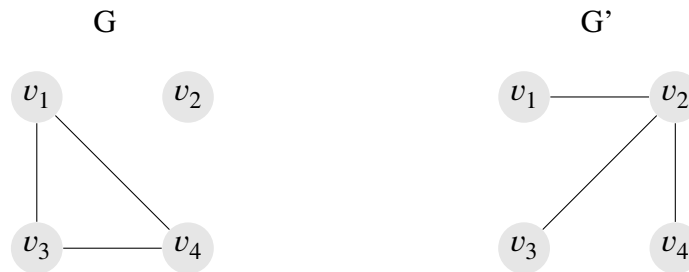


Figura 7 – Grafo G e seu complemento G' .

Um grafo simples no qual todos os pares distintos de vértices são ligados por uma aresta é chamado grafo **completo**. Na Figura 8 temos um exemplo de grafo completo, o K_5 . Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

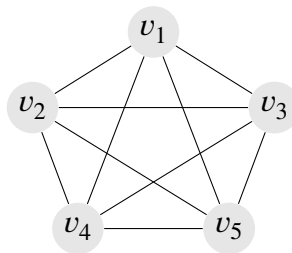


Figura 8 – Diagrama do K_5 .

Um grafo H é **subgrafo** de G (escreve-se $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, e ψ_H é uma restrição de ψ_G para $E(H)$. Quando $H \subseteq G$ e $H \neq G$, nós escrevemos $H \subsetneq G$ e chamamos H de **subgrafo próprio** de G . Se H é subgrafo de G , G é supergrafo de H . Um **subgrafo gerador** (ou **supergrafo gerador**) de G é o subgrafo (ou supergrafo) H com $V(H) = V(G)$.

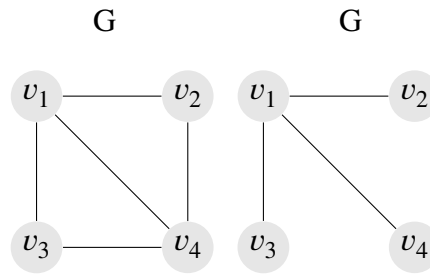


Figura 9 – Exemplo de grafos G e G' , onde G' é subgrafo gerador de G .

Tome V' como um subconjunto não vazio de V . O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é denotado por V' e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G que possuem as extremidades em V' é chamado subgrafo de G **induzido** por V' e é denotado por $G[V']$. Nós dizemos que $G[V']$ é um subgrafo induzido de G . O subgrafo induzido $G[V \setminus V']$ é denotado por $G - V'$; esse é o subgrafo obtido a partir de G pela deleção de vértices em V' junto com suas arestas incidentes. Na Figura 10 temos um exemplo de grafo G Inclui cinco vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e de um grafo G' (subgrafo induzido) induzido por $\{v_1, v_2, v_3\}$, mantendo as arestas entre os vértices $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_1, v_3\}$.

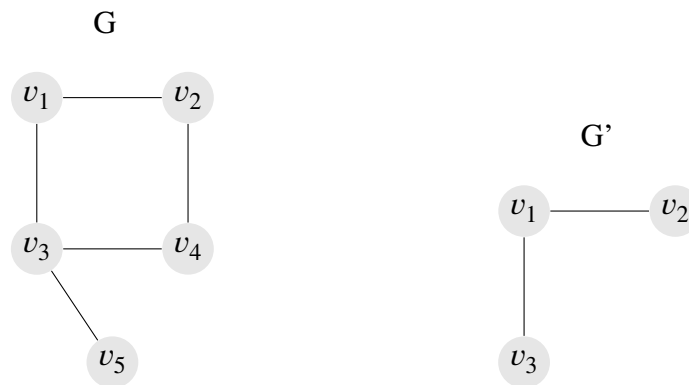


Figura 10 – Exemplo de um grafo G e um grafo G' induzido pelo conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$.

O **grau**, $d_G(v)$, de um vértice v em G é o número de arestas de G incidentes com v . Um vértice de grau 1 é chamado de **folha**. Denotamos $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ como o **grau mínimo** e **grau máximo**, respectivamente, de vértices de G . A Figura 11 apresenta um grafo G , cujo $\Delta(G) = 4$, pois o vértice v_3 está conectado a 4 outros vértices (v_1, v_2, v_4, v_5) e $\delta(G) = 2$, pois os vértices v_1, v_2, v_4 e v_5 possuem exatamente 2 arestas incidentes.

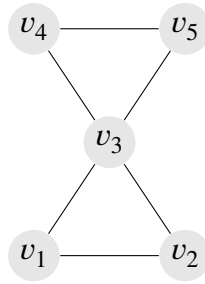


Figura 11 – Exemplo de grafo G .

Um **passeio** em G é uma sequência finita não nula $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, tal que, para $1 \leq i \leq k$, as extremidades de e_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que W é um **passeio** de v_0 para v_k , ou um (v_0, v_k) -passeio. O inteiro k é o tamanho de W . Se as arestas e_1, e_2, \dots, e_k de um passeio W são distintas, W é chamado de **trilha**. Se, em adição, os vértices v_0, v_1, \dots, v_k são distintos em W , W é chamado de **caminho**. Na Figura 12 temos um exemplo de um grafo G e um caminho W destacado em negrito.

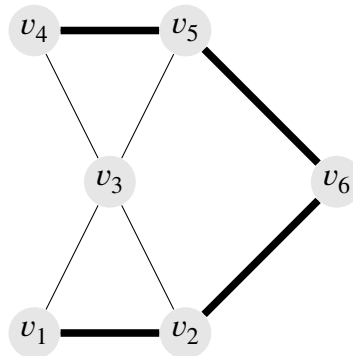


Figura 12 – Exemplo de grafos G e um caminho W destacado em negrito.

Um passeio é **fechado** se possui tamanho positivo e sua origem e fim são o mesmo. Uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são distintos é um **ciclo** e um ciclo de tamanho k é chamado **k-ciclo**. Na Figura 13 temos um exemplo de um grafo G e um ciclo destacado em negrito.

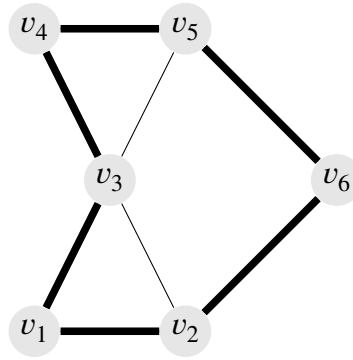


Figura 13 – Exemplo de grafos G e um ciclo destacado em negrito.

Dois vértices u e v de G são **conexos** se existe um (u, v) -caminho em G . Conectividade é uma relação de equivalência num conjunto de vértices V . Portanto existe uma partição de V em subconjuntos não vazios V_1, V_2, \dots, V_w tal que dois vértices u e v são conexos se e somente se tanto u como v pertencem ao mesmo conjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ são chamados de **componentes** de G . Na Figura 14 temos um exemplo de um grafo G composto por 3 componentes.

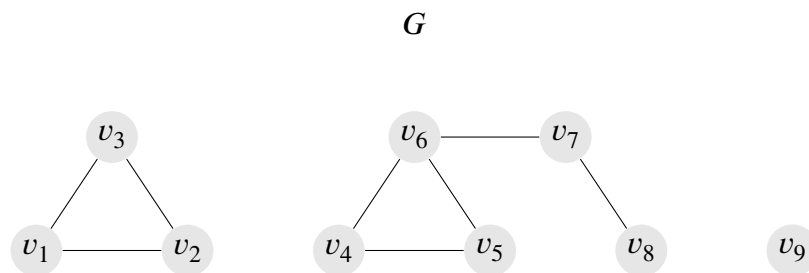


Figura 14 – Exemplo de um grafo G formado por 3 componentes.

Um caminho **hamiltoniano** de um grafo G é um caminho que contém todos os vértices de G . A Figura 15 apresenta um grafo G e um caminho hamiltoniano destacado em negrito. A **cintura** de um grafo G é o tamanho do menor ciclo em G ; se G não possui ciclos nós definimos a cintura de G como sendo infinita. Um grafo G é **acíclico** se G não possui ciclos.

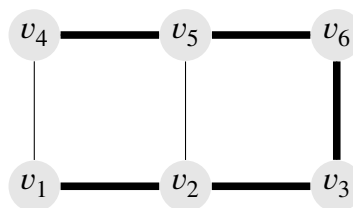


Figura 15 – Exemplo de grafo G e um caminho hamiltoniano destacado em negrito.

Um subconjunto M de E é chamado de **emparelhamento** em G se seus elementos forem arestas e nenhuma delas for adjacente em G . As duas extremidades de uma aresta em M são ditas **emparelhadas** sob M . A Figura 16 apresenta um grafo G e um emparelhamento M destacado em negrito.

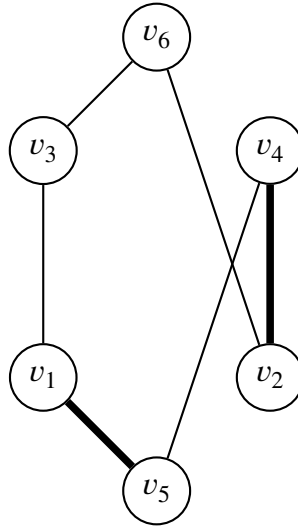


Figura 16 – Exemplo de grafo G e um emparelhamento M destacado em negrito.

Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico. Uma **floresta** é um grafo acíclico e todas as suas componentes são árvores. Uma **estrela** com n vértices é uma árvore com $n - 1$ folhas. Na Figura 17 temos um exemplo de grafo estrela. O vértice restante é chamado de **vértice central da estrela**. No caso da estrela ser constituída de apenas uma aresta, nós decidimos qual vértice é o central. Uma **galáxia** é um grafo cujas componentes conexas são estrelas (HAVET *et al.*, 2014).

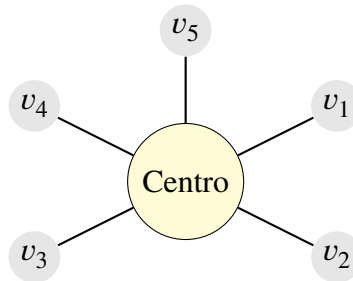
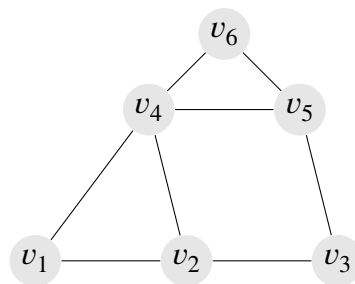
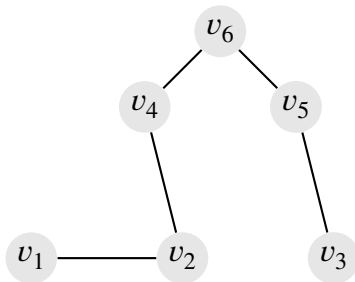


Figura 17 – Exemplo de grafo estrela.

Uma **árvore geradora** de um grafo é um subgrafo que contém todos os vértices do grafo original e é em si uma árvore (um grafo conexo acíclico). Na Figura 18 temos o exemplo

de um grafo G e de uma árvore geradora de G . Uma **árvore geradora linear** é um tipo especial de árvore geradora para um determinado grafo existe distribuição de pesos atribuídos a todas as arestas de forma que a soma dos pesos das arestas incidentes em um vértice seja a mesma para todos os vértices na árvore. Em outras palavras, a soma dos pesos das arestas ao redor de cada vértice é constante. Por exemplo, se o peso da primeira aresta é a e a diferença comum entre as arestas consecutivas é d , então o peso da i -ésima aresta é $a + (i - 1)d$. Uma **floresta geradora linear** é um subgrafo gerador de um digrafo G , que é uma floresta linear.

Grafo G Árvore Geradora de G Figura 18 – Exemplo de grafos G e uma árvore geradora do grafo G .

Se G possui exatamente uma componente, G é **conexo**; caso contrário G é **desconexo**. O número de componentes de G é denotado por $\omega(G)$. Um **corte de vértice** de G é um subconjunto V' de V tal que $G - V'$ é desconexo. Um **k-corte de vértice** é um corte de vértice de k elementos. Um vértice v de G é um **vértice de corte** se E pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios E_1 e E_2 de forma que $G[E_1]$ e $G[E_2]$ tenham apenas o vértice v em comum.

Um grafo conexo que não possui vértices de corte é denominado **bloco**. O **bloco de um grafo** é um subgrafo maximal que não possui vértice de corte. Todo bloco com pelo menos três vértices é 2-conexo. Denotamos por $b(G)$ o número de blocos do grafo G (LI; WU, 2021).

Uma **decomposição em blocos** de um grafo G é o conjunto de blocos de G (EKIM; EREY, 2014). Todo grafo é a união de seus blocos, como é mostrado na Figura 19.

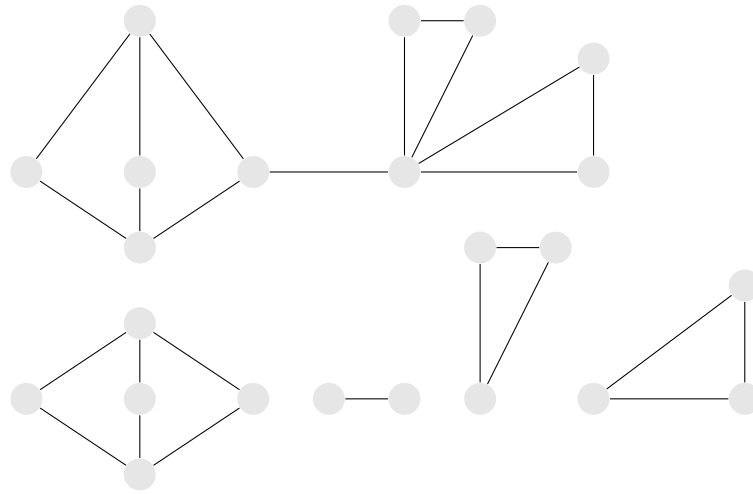


Figura 19 – Exemplo de um grafo G bloco e seus blocos.

Um subconjunto S de V é um **conjunto independente** de G se nenhum par de vértices de S são adjacentes em G . Um conjunto independente S é máximo se G não tem conjunto independente S' com $|S'| > |S|$. Uma **clique** de um grafo simples G é um subconjunto K de V tal que $G[K]$ é completo. Um grafo **bipartido** é aquele cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y , de modo que cada aresta tenha uma extremidade em X e outra em Y ; tal partição (X, Y) é chamada de **bipartição do grafo**. O grafo definido pelos vértices e arestas de um cubo apresentado na Figura 20 é bipartido;

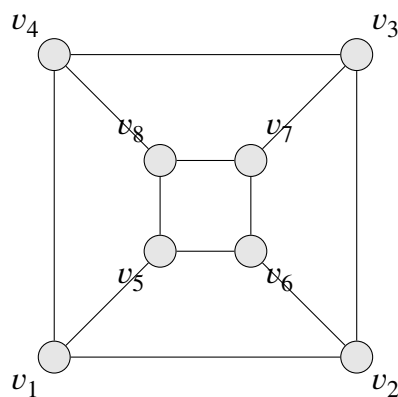


Figura 20 – Exemplo de grafos G bipartido.

Um grafo **bipartido completo** é um grafo bipartido simples com bipartição (X, Y) , no qual cada vértice de X está conectado a cada vértice de Y ; se $|X| = m$ e $|Y| = n$, tal grafo é

denotado por $K_{m,n}$. O grafo apresentado na Figura 21 é o grafo bipartido completo $K_{3,3}$.

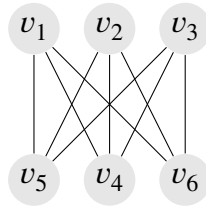


Figura 21 – Diagrama do $K_{3,3}$.

K é uma clique de G se e somente se K é um conjunto independente de G^c , assim os dois conceitos são complementares. Um **grafo split** é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique C e um conjunto independente I (HAMMER; SIMEONE, 1981). Na Figura 22, vemos a clique apresentada na esquerda e o conjunto independente apresentado na direita.

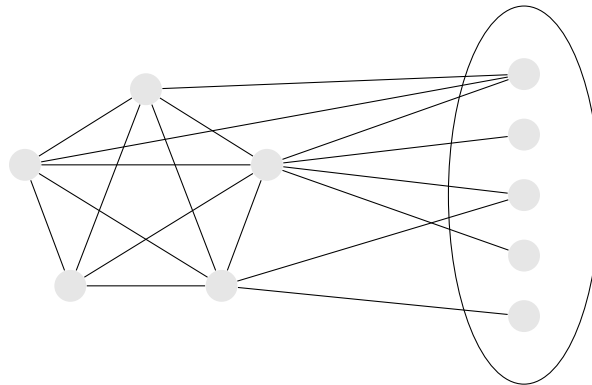


Figura 22 – Grafo split particionado em uma clique e em um conjunto independente.

Dois vértices são ditos **adjacentes** se ambos incidem numa mesma aresta, assim como duas arestas são ditas adjacentes se ambas incidem num mesmo vértice. Duas arestas no diagrama de um grafo podem se interceptar em um ponto que não é um vértice. Grafos que possuem um diagrama cujas arestas se interceptam somente em vértices são denominados **grafos planares**. Na Figura 21 temos um exemplo clássico de um grafo não planar, o $K_{3,3}$. Contudo um grafo pode ser planar e possuir algum diagrama que seja não plano.

Na Figura 23 temos um exemplo de duas representações de um mesmo grafo planar: G é a representação plana e G' é a representação não plana. Em G percebemos que nenhuma aresta se intercepta com outra aresta, o contrário, porém, ocorre em G' uma vez que a aresta v_4v_3 interceptam-se com a aresta v_1v_2 .

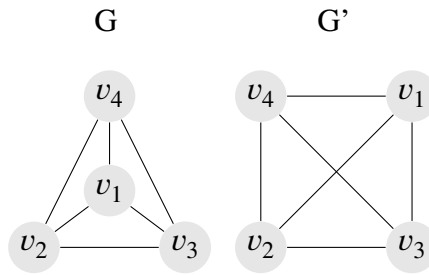


Figura 23 – Exemplos de representações G e G' , onde G é a representação planar e G' é representação não plana.

Dado um grafo planar G , pode-se definir outro grafo G^* como: correspondente a cada face f de G , existem vértices f^* de G^* , e correspondente a cada aresta e de G existem arestas e^* de G^* ; dois vértices f^* e g^* são unidos por aresta e^* em G^* se e somente se as faces f e g correspondentes a estes vértices são separadas por uma aresta e em G . O grafo G^* é chamado grafo **dual** de G . Um grafo plano e seu dual podem ser vistos na Figura 24.

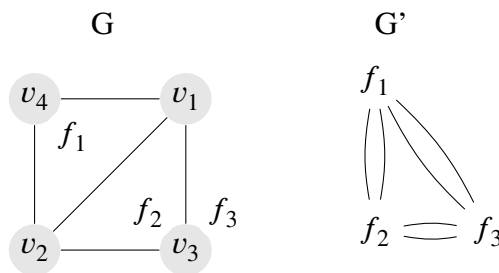


Figura 24 – Exemplo de grafos G e G' , onde G é o grafo original e G' é seu dual.

Um grafo é dito **periplanar** quando possui uma imersão no plano tal que todos os seus vértices pertencem a uma mesma face. Na Figura 25 é apresentado um exemplo de grafo periplanar.

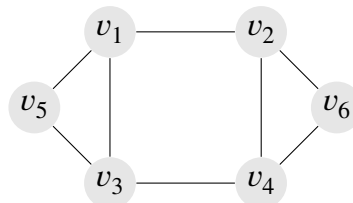


Figura 25 – Exemplo de grafo periplanar.

Uma **rotulação** de um grafo é uma atribuição de um rótulo a um grafo ou a seus componentes. Em Teoria dos Grafos, podemos rotular partes dos grafos (arestas e vértices) a

fim de obedecer determinadas propriedades. Na Figura 26 temos um exemplo de um tipo de rotulação de grafos onde os rótulos utilizados são cores, tal rotulação é chamado de **coloração de grafos**. Abordaremos algumas definições e propriedades de coloração de grafos na próxima seção.

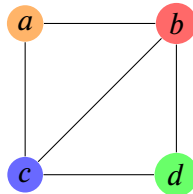


Figura 26 – Exemplo de rotulação de um grafo.

2.2 Coloração de grafos

Os problemas em coloração de grafos que têm recebido maior atenção envolvem coloração de vértices de um grafo. Nesse trabalho de conclusão de curso, abordaremos apenas coloração de vértices. Uma **coloração própria** de um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G , somente uma cor para cada vértice, de forma que vértices adjacentes sejam coloridos com cores distintas (BONDY; MURTY., 2008).

De uma maneira mais formal uma coloração própria de um grafo G é uma função $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ se u for adjacente a v em G . Se cada cor usada for uma dentre k cores, então nós nos referimos à coloração própria como uma k -coloração. Numa **k-coloração** podemos então assumir que estritamente as cores $1, 2, \dots, k$ estão sendo usadas.

Um grafo G é **k-colorível** se existe uma coloração de G com um conjunto de k cores. O menor inteiro positivo k para o qual G é k -colorível é denominado **número cromático** de G e é denotado por $\chi(G)$. O número cromático do grafo G é portanto o menor número de conjuntos independentes em que $V(G)$ pode ser particionado. Um grafo G com número cromático k é um grafo **k-cromático**. Portanto, se $\chi(G) = k$, então existe uma k -coloração de G mas não uma $(k - 1)$ -coloração. Um grafo G é k -colorível se e somente se $\chi(G) \leq k$. Todo grafo de ordem n é n -colorível.

2.3 Coloração Backbone

Para inteiros positivos k e q , com $q < k$, uma **q-backbone k-coloração** de um par (G, H) é uma coloração própria $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tal que, para todo $uv \in E(H)$, nós temos $|c(u) - c(v)| \geq q$. Se tal coloração for possível, dizemos então que (G, H) é **q-backbone k-colorível**. O **número cromático q-backbone** de (G, H) , $BBC_q(G, H)$, é o menor inteiro positivo k tal que o grafo é q -backbone k -colorível. Tomando o grafo G e o backbone H apresentados na Figura 27 e a coloração do par (G, H) com a configuração a seguir: $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 3$, $c(v_3) = 5$, $c(v_4) = 7$, $c(v_5) = 3$, perceba que temos uma coloração 2-backbone, uma vez que $|c(u) - c(v)| \geq 2$ para todo $uv \in E(H)$. Perceba também que é possível utilizar menos cores para colorir o par supracitado, vamos considerar a nova coloração com configuração a seguir: $c(v_1) = 3$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 1$, $c(v_4) = 4$, $c(v_5) = 1$, observe que ainda obtemos uma coloração 2-backbone, uma vez que $|c(u) - c(v)| \geq 2$ para todo $uv \in E(H)$, e que não é possível colorir o par da Figura 27 com menos cores, logo $BBC_2(G, H) = 4$. Caso quiséssemos dar uma coloração 3-backbone ao par (G, H) , basta atribuir cores de forma que para todo $uv \in E(H)$, $|c(u) - c(v)| \geq 3$.

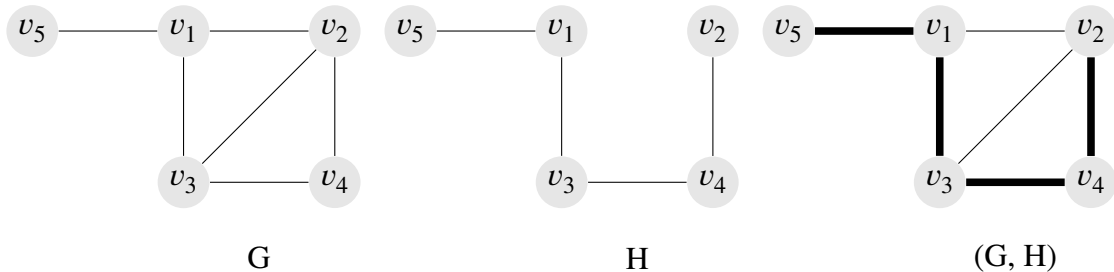


Figura 27 – Exemplo de uma coloração BBC sobre o par (G, H) .

Similarmente, para inteiros positivos k e q , uma **q-backbone k-coloração circular** de um par (G, H) é uma coloração própria $\phi: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tal que para todo $vw \in E(H)$ temos $k - q \geq |\phi(v) - \phi(w)| \geq q$. Se tal coloração existe, então dizemos que (G, H) é circularmente q -backbone k -colorível. O **número cromático q-backbone circular** de (G, H) , $CBC_q(G, H)$, é o menor inteiro positivo k tal que o grafo é q -backbone k -colorível (HAVET *et al.*, 2012). Tomando o grafo G e o backbone H apresentados na Figura 28 e a coloração do par (G, H) cuja configuração se dá a seguir: $c(v_1) = 3$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 7$, $c(v_4) = 5$, perceba que temos uma coloração 2-backbone circular, uma vez que $k - q \geq |\phi(v) - \phi(w)| \geq q$ é verdade para todo $vw \in E(H)$. Perceba também que é possível utilizar menos cores para colorir o par

supracitado, vamos considerar a nova coloração com configuração a seguir: $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 3$, $c(v_4) = 5$, observe que ainda obtemos uma coloração 2-backbone circular, uma vez que $k - q \geq |\phi(v) - \phi(w)| \geq q$ é verdade para todo $vw \in E(H)$, e que não é possível colorir o par da Figura 28 com menos cores, logo $CBC_2(G, H) = 5$.

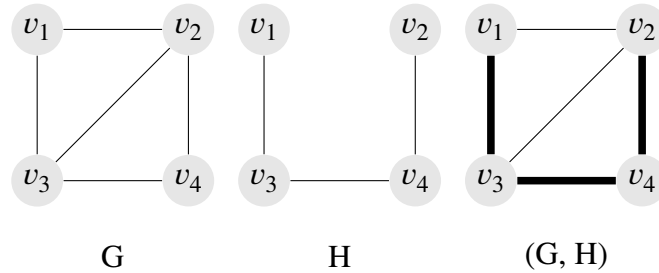


Figura 28 – Exemplo de uma coloração CBC sobre o par (G, H) .

2.4 Método da Descarga

Essa seção é baseada no trabalho de (SALAVATIPOUR, 2003). Nela apresentamos o funcionamento do método da descarga estabelecido no referido trabalho e um exemplo prático.

2.4.1 Notações e definições

Seja Π uma classe de grafos planares e suponha que queremos provar que todo grafo em Π tem uma propriedade específica P . Nós tomamos arbitrariamente um grafo $G \in \Pi$ e atribuímos algumas cargas aos elementos de G (isto é, aos vértices, arestas ou faces). Usando a Fórmula de Euler, $|V| + |F| - |E| = 2$, nós mostramos que a carga total é um valor constante para as cargas inicialmente atribuídas aos elementos de G . Então redistribuímos as cargas de acordo com algumas regras de descarregamento que nós definimos, enquanto preservamos a carga total. Após a fase de descarregamento descrita anteriormente, mostramos que ou a carga total está diferente (o que é impossível) ou G possui alguma estrutura específica que implica a propriedade P .

Geralmente, nós provamos que estruturas específicas implicam uma propriedade P antes de aplicar o Método da Descarga. A forma mais comum de fazer isso é começar a prova por contradição, assumindo que existem grafos em Π que não satisfazem a propriedade em P .

Exemplo 1 (SALAVATIPOUR, 2003) *Todo grafo planar simples $G = (V, E)$ tem um vértice de grau no máximo 5.*

Demonstração. Tome G um grafo plano. Seja F o conjunto de faces de G . Para todo vértice $v \in V$ com grau $d(v)$, atribuímos $d(v) - 6$ unidades de carga e para cada face $f \in F$ com tamanho $|f|$, atribuímos $2|f| - 6$ unidades de carga. Note que em $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} |f|$. Assim, utilizando a Fórmula de Euler, a carga total é: $\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2|f| - 6) = 2|E| - 6|V| + 4|E| - 6|F| = 6(|E| - |V| - |F|) = -12$. Como o grafo é simples, toda face tem tamanho pelo menos 3. Assim, todas as faces contribuem para a carga total com uma carga não-negativa. Dessa forma, uma vez que a carga total é negativa, deve existir pelo menos um vértice com carga negativa. Portanto, para algum vértice $v : d(v) - 6 < 0$. Então $d(v) \leq 5$, como queríamos.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Esse capítulo apresentará, de forma breve, alguns resultados a respeito do problema de Coloração Backbone publicados até o ano de 2016. As seções a seguir são organizadas de acordo com o tipo de resultado analisado, do resultado mais geral ao resultado mais específico.

3.1 Resultados gerais

Em (HAVET *et al.*, 2012), três limites gerais são apresentados para BBC e CBC , para qualquer par (G, H) e um inteiro $q \geq 2$. O primeiro descreve que a seguinte desigualdade é válida: $q \cdot \chi(H) - (q - 1) = BBC_q(H, H) \leq BBC_q(G, H) \leq BBC_q(G, G) = q \cdot \chi(G) - (q - 1)$. Esse Teorema é consequência direta da definição de coloração backbone. O segundo limite geral descreve que a desigualdade a seguir é válida: $BBC_q(G, H) \leq (\chi(G) + q - 2)\chi(H) - (q - 2)$. Além disso, para $q \geq 4$ o limite superior é apertado.

Por fim, a respeito do parâmetro CBC temos que para qualquer grafo $H \subseteq G$ tal que $2 \leq \chi(H) \leq \chi(G)$ e $q \geq 2$ a seguinte desigualdade é válida: $CBC_q(G, H) \leq (\chi(G) + q - 2) \cdot \chi(H)$. Um resultado interessante também foi provado por (HAVET *et al.*, 2012) no qual sendo H um subgrafo gerador conexo de G , então $CBC_q(G, H) = 2q$ se, e somente se, G é bipartido.

3.2 Floresta Backbone

Em (BU *et al.*, 2013) foi provado que para quaisquer k e ℓ inteiros positivos, existem um grafo G com cintura maior que ℓ e $\chi(G) = k$ e uma floresta geradora T de G tal que $BBC_2(G, T) = 2k - 1$. Podemos dar um destaque a esse resultado, visto que ele provê informação adicional à dada por (BROERSMA *et al.*, 2007). Não existe apenas um grafo G com um backbone de árvore tal que $BBC_2(G, T) = 2\chi(G) - 1$. Existe uma infinidade de grafos para os quais essa igualdade é válida, mesmo com a propriedade adicional de que esses grafos tenham uma cintura larga (CEZAR, 2016).

Bu et al. estudaram a coloração de grafos livres de ciclos especiais, ou seja, grafos sem ciclos especiais como subgrafo induzido. Os autores mostraram que o $BBC_2(G, T) \leq 4$ para diferentes estruturas de G , onde G é planar e livre de ciclos especiais. Em (BU; ZHANG, 2011), O resultado foi mostrado para G sendo um grafo sem ciclos C_4 . Em (BU; LI, 2011) foi mostrado com G sendo um grafo sem ciclos C_6 tal que nenhum par de ciclos C_3 compartilhem uma aresta e para G sendo um grafo sem ciclos C_7 tal que nenhum par de ciclos C_3 compartilhem uma

aresta. Em (BU; BAO, 2015) o resultado foi obtido para G sendo um grafo sem ciclos C_8 tal que nenhum par de ciclos C_4 compartilhem uma aresta e para G sendo um grafo sem ciclos C_9 tal que nenhum par de ciclos C_4 compartilhem uma aresta.

Para obter os resultados cujo o valor fosse $BBC_2(G, T) \leq 4$, os autores recorreram à provas por contradição. Foi suposta a existência de uma estrutura G denominada contraexemplo minimal que é o menor grafo em que $BBC_2(G, T) \leq 4$ não é verdade. Pelo fato de G supostamente ser o menor contraexemplo possível para esses resultados, temos que o $\chi(G) \geq 5$. A partir das prerrogativas dessa estrutura foram feitas basicamente três afirmações:

Afirmção 1. G não contém uma folha

Afirmção 2. G não contém um 2-vértice

Afirmção 3. Um 3-vértice é um vértice de corte, e $G - u$ tem precisamente duas componentes.

As provas dessas afirmações são obtidas por contradição. Supõe-se por contradição que $BBC_2(G, T) \leq 4$ não é verdade e que existe um grafo G que seja contraexemplo do teorema, de forma que o tamanho de G seja o menor possível. Na Afirmação 1 é feita a remoção de uma folha do grafo G , dando origem a um grafo G^* . Pela minimalidade de G existe uma árvore geradora T^* de G^* , tal que (G^*, T^*) tem uma coloração onde $BBC_2(G, T) > 4$. Seja T a união de T^* com a folha removida, então T é uma árvore geradora de G . É então feita uma coloração da estrutura, de forma que seja uma coloração onde $BBC_2(G, T) > 4$, alcançando assim a contradição desejada. As Afirmações 2 e 3 são realizadas de forma semelhante, mudando apenas a estrutura que é removida do grafo G : uma aresta uv na Afirmação 2 e um vértice u na Afirmação 3. Em todos os casos o autor encontra a contradição mostrando que é possível colorir a estrutura que supostamente deveria ser um contraexemplo, concluindo então que tal contraexemplo não existe. Para finalizar a prova do teorema, é utilizado o Método da Descarga. As regras de descarga são pensadas de forma que a estrutura envie cargas de quem tem mais carga para quem tem menos carga.

Para grandes valores de q , (HAVET *et al.*, 2014) também provaram que se G é um grafo planar e H é uma floresta em G , então $BBC_q(G, H) \leq q + 6$ e mostraram que para $q \geq 4$ essa desigualdade é apertada. Por outro lado, eles conjecturaram que se $q = 3$, essa desigualdade não é apertada.

(BROERSMA *et al.*, 2007) também provaram dois resultados sobre complexidade, mostrando que, dado um inteiro ℓ , os seguintes resultados são válidos:

Teorema 3.2.1 *Decidir se $BBC_2(G, T) \leq \ell$ é resolvido em tempo polinomial, para qualquer $\ell \leq 4$, onde T é uma árvore geradora de G .*

Teorema 3.2.2 *Decidir se $BBC_2(G, P) \leq \ell$ é NP -completo, para qualquer $\ell \geq 5$, onde P é um caminho hamiltoniano de G .*

(HAVET *et al.*, 2012) estudaram a complexidade para alguns problemas de decisão a respeito de grafos com árvores como backbone. O seguinte resultado vale:

Teorema 3.2.3 • *Decidir se $BBC_2(G, T) \leq 5$ é um problema NP -completo, onde T é uma árvore geradora de G .*

- *Decidir se $BBC_q(G, T) \leq q + 5$ é um problema NP -completo, para qualquer $q \geq 5$, onde T é uma árvore geradora de G .*

3.3 Constelação Backbone

Nesta subseção, consideraremos casos onde o backbone é uma **constelação**, também chamado de floresta de estrelas. Dado um inteiro positivo k e um inteiro q tal que $q \geq 2$, (BROERSMA *et al.*, 2007) definiram o parâmetro $S_q(k)$ como o maior valor possível de $BBC_q(G, S)$ para qualquer grafo G tal que $\chi(G) = k$ e qualquer constelação S subgrafo de G .

$$S_q(k) = \begin{cases} q + 1, & \text{se } k = 2; \\ \lceil \frac{3}{2}k \rceil + q - 2, & \text{se } 3 \leq k \leq 2q - 3; \\ k + 2q - 2, & \text{se } 2q - 1 \leq k \leq 2q \text{ onde } q = 2; \\ k + 2q - 2, & \text{se } 2q - 2 \leq k \leq 2q - 1 \text{ onde } q \geq 3; \\ 2k - 1, & \text{se } k = 2q \text{ onde } q \geq 3; \\ 2k - \lfloor \frac{k}{q} \rfloor, & \text{se } k \geq 2q + 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Curiosamente, em outro artigo, (BROERSMA *et al.*, 2009) mostraram que para grafos split G com número cromático $\chi(G) = k$, temos:

$$BBC_q(G, S) \leq \begin{cases} k + q, & \text{se } k = 3 \text{ e } q \geq 2 \text{ ou } k \geq 4 \text{ e } q = 2; \\ k + q - 1, & \text{em outros casos.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Os quais são limites superiores bastante bons para q -coloração backbone de (G, S) , pois não são tão distantes do valor $\chi(G)$.

Em relação aos resultados de complexidade, (BROERSMA *et al.*, 2009) também provaram que, para um grafo G e constelação S , determinar se $BBC_q(G, S) \leq \ell$ é um problema que pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq q + 2$, e um problema NP -completo se $\ell \geq q + 2$.

Em seus estudos, (HAVET *et al.*, 2012) trabalhou com estrelas com graus limitados. Alguns dos resultados que eles alcançaram são:

Teorema 3.3.1 *Dado um grafo planar G e uma constelação S com grau máximo 3, decidir se $BBC_q(G, S) \leq q + 3$ é um problema NP -completo.*

Teorema 3.3.2 *Dado um grafo planar G e uma constelação S com grau máximo 2, decidir se $BBC_q(G, S) \leq 5$ é um problema NP -completo.*

3.4 Emparelhamento Backbone

Nesta subsecção apresentaremos alguns resultados em que arestas do backbone formam um emparelhamento. Dado um inteiro positivo k e um inteiro q tal que $q \geq 2$, (BROERSMA *et al.*, 2007) definiram o parâmetro $M_q(k)$ como o maior valor possível $BBC_q(G, M)$ para qualquer grafo G tal que $\chi(G) = k$ e qualquer emparelhamento M de G . A respeito desse parâmetro eles mostraram que:

$$M_q(k) = \begin{cases} k + q - 1, & \text{se } 2 \leq k \leq q; \\ 2k - 2, & \text{se } q + 1 \leq k \leq 2q; \\ 2k + 3, & \text{se } k = 2q + 1; \\ 2tq, & \text{se } k = t(q + 1) \text{ onde } t \geq 2; \\ 2tq + 2c - 1, & k = t(q + 1) + c \text{ onde } t \geq 2 \text{ e } 1 \leq c \leq \frac{q+3}{2}; \\ 2tq + 2c - 2, & k = t(q + 1) + c \text{ onde } t \geq 2 \text{ e } \frac{q+3}{2} \leq c \leq q. \end{cases} \quad (3.3)$$

Eles também estudaram casos onde G é um grafo split com $\chi(G) = k$, o que resultou

em :

$$BBC_q(G, M) = \begin{cases} k+1, & \text{se } k \geq 4 \text{ e } q \leq \min\{\frac{k}{2}, \frac{k+5}{3}\}; \\ k+2, & \text{se } k = 9 \text{ ou } k \geq 11 \text{ e } \frac{k+6}{3} \leq q \leq \lceil \frac{1}{2}k \rceil; \\ \lceil \frac{1}{2}k \rceil + q, & \text{se } k = 3, 5, 7 \text{ e } q \geq \lceil \frac{1}{2}k \rceil; \\ \lceil \frac{1}{2}k \rceil + q + 1, & \text{se } k = 4, 6 \text{ ou } k \geq 8 \text{ e } q \geq \lceil \frac{1}{2}k \rceil + 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

(MIŠKUF *et al.*, 2010) estudaram as propriedades de grafos com graus limitados.

Em seus trabalhos , os seguintes resultados foram mostrados:

Teorema 3.4.1 *Seja M um emparelhamento em um grafo G . Se G é um ciclo C_n , então $BBC_2(G, M) = 3$. Além disso, se $G = K_n$ para algum $n \geq 3$, então $BBC_2(G, M) = n$.*

Teorema 3.4.2 *Seja G um grafo com grau máximo Δ . Se M é um emparelhamento em G , então $BBC_2(G, M) \leq \Delta + 1$.*

Em (MIŠKUF *et al.*, 2010) também foi encontrado um erro de demonstração que posteriormente foi corrigido e publicado no trabalho de (ARAUJO *et al.*, 2019). A respeito de resultados de complexidade, em (BROERSMA *et al.*, 2003), é mostrado que:

Teorema 3.4.3 *Seja M um emparelhamento perfeito de um grafo planar G . Decidir se $BBC_2(G, M) \leq \ell$, para $\ell \leq 3$ é um problema polinomial. Para $\ell \geq 4$ é um problema NP-completo.*

(HAVET *et al.*, 2012) também estudaram alguns resultados de complexidade referentes a emparelhamentos backbone, tanto em Coloração Backbone tradicional (BBC), quanto em Coloração Backbone Circular (CBC). Abaixo temos alguns resultados alcançados por eles:

Teorema 3.4.4 *Seja M um emparelhamento perfeito de um grafo G .*

- *Decidir se $BBC_q(G, M) \leq q + 2$ é um problema NP-completo.*
- *Decidir se $CBC_2(G, M) \leq 4$ é um problema NP-completo.*
- *Decidir se $CBC_2(G, M) \leq 5$ é um problema NP-completo.*

Durante a pesquisa também foram encontrados alguns trabalhos que, embora não tenhamos dissertado sobre, se relacionam indiretamente com o tema do presente trabalho. Os trabalhos estarão listados a seguir:

1. On list backbone coloring of graphs (PIMPASALEE; NAKPRASIT, 2018);
2. Strengthening strong immersions with Kempe chains (GIBSON, 2018)
3. Steinberg-like theorems for backbone colouring (ARAUJO *et al.*, 2015)

4 RESULTADOS RELACIONADOS A BACKBONE COLORING (BBC)

Nesse capítulo faremos uma breve exposição de alguns resultados recentes encontrados na literatura sobre Coloração Backbone (*BBC*). Na Seção 4.1 apresentamos o trabalho *Backbone Coloring for Triangle-free Planar Graphs*, cujo foco principal é provar que se G é um grafo planar, conexo e livre de triângulo ou G é um grafo conexo com $mad(G) < 3$, então existe uma árvore geradora T de G , tal que $BBC_2(G, T) \leq 4$. Na Seção 4.2 apresentamos o trabalho *Determining number of coloring λ -backbone on split graph* cujo objetivo principal é apresentar os passos para determinar uma coloração λ -backbone num grafo split. Na Seção 4.3 apresentamos o trabalho Coloração 2-backbone de grafos periplanares com um emparelhamento backbone, cujo objetivo principal é mostrar que para um grafo G periplanar e H um emparelhamento em G , mostramos que é sempre possível encontrar uma 4-coloração 2-backbone de (G, H) .

4.1 Coloração Backbone para Grafos Planares Livres de Triângulo

Nesta seção abordaremos o trabalho Backbone Coloring for Triangle-free Planar Graphs (BU; ZHANG, 2017). Neste capítulo é provado que se G é um grafo planar livre de triângulo, então existe árvore geradora T de G tal que $\chi_b(G, T) \leq 4$.

Proposição 4.1.1 *Seja f uma k -coloração própria de um grafo G usando o conjunto de cores $C = \{1, 2, \dots, k\}$. A partir de f podemos definir uma nova coloração f' de G do seguinte modo: $f'(v) = (k + 1) - f(v)$ para cada vértice $v \in V(G)$. Não é difícil mostrar que f' também é uma k -coloração própria de G com o mesmo conjunto de cores C . Chamamos f' de coloração simétrica de f e vice versa (BROERSMA et al., 2003).*

Proposição 4.1.2 *Seja G um grafo conexo, não bipartido e H um subgrafo gerador de G . Então $BBC_2(G, H) \geq 4$.*

Teorema 4.1.3 *Seja G um grafo planar, conexo e livre de triângulo, então existe uma árvore geradora T de G tal que $BBC_2(G, T) \leq 4$.*

Para concluir o Colorário 4.1.5 (apresentado no fim desta Seção), os autores utilizaram a Proposição 4.1.2 e o Teorema 4.1.3 como ferramentas fundamentais para a prova. Para a realização da prova do Teorema 4.1.3, os autores recorreram à provas por contradição. Foi suposta a existência de uma estrutura G' denominada contraexemplo minimal que é o menor

grafo, ou seja $\sigma(G') = |V| + |E|$ menor possível, tal que a propriedade apresentada no Teorema 4.1.3 não é verdade.

A partir das prerrogativas dessa estrutura foram feitas três afirmações: G' não contém uma folha, G' não contém um 2-vértice e 3-vértice u é um vértice de corte e $G' - u$ tem precisamente duas componentes conexas (Afirmação 4.1.4). Para outros grafos G' com estruturas diferentes das estruturas das afirmações, a prova é realizada utilizando o Método da Descarga. As regras de descarga são pensadas de forma que a estrutura envie cargas de quem tem mais carga para quem tem menos carga. Dentre as afirmações supracitadas, neste trabalho apresentaremos somente a prova da Afirmação 4.1.4.

Afirmação 4.1.4 3-vértice u é um vértice de corte e $G' - u$ tem precisamente duas componentes conexas.

Assim, tome $G^* = G' - u$. Suponha por contradição que u não é vértice de corte, ou seja, G^* é conexo. Temos que $\sigma(G^*) < \sigma(G')$. Pela minimalidade de G' , existe árvore geradora T^* de G^* tal que (G^*, T^*) possui uma coloração backbone f que pode ser realizada com até 4 cores. Definimos $T_i = T^* \cup e_i$, $i = \{1, 2, 3\}$. Claramente, T_i é uma árvore geradora de G' . Tomando x, y e z como os vizinhos de u (Figura 29), vamos colorir u com uma cor em $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{f(x), f(y), f(z)\}$, tal que as cores atribuídas a u e a um dos vértices $\{x, y, z\}$ diferem em pelo menos 2. Sem perda de generalidade, assumimos que $|f(u) - f(x)| \geq 2$, então obtemos uma 4-coloração backbone do par (G', T_1) , onde T_1 é a árvore que contém a aresta e_1 . Essa contradição prova que um 3-vértice u é um vértice de corte.

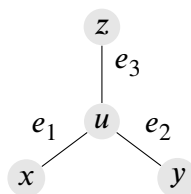


Figura 29 – 3-vértice u

A seguir provaremos que $G' - u$ tem precisamente duas componentes conexas. Suponha por contradição que $G' - u$ tenha mais de duas componentes, uma vez que u é vértice de corte, como apresentado na Figura 29. Tome G'_1 , G'_2 e G'_3 sendo três componentes conexas de $G' - u$, onde G'_1 contém x , G'_2 contém y e G'_3 contém z . Para $i \in \{1, 2, 3\}$, existe árvore geradora T_i de G'_i tal que (G'_i, T_i) tem uma coloração backbone f_i , utilizando 4 cores, pela minimalidade de G' . Seja

$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \{e_1, e_2, e_3\}$, a árvore geradora de G' . Assuma $f_1(x) \in \{1, 2\}$, $f_2(y) \in \{1, 2\}$ e $f_3(z) \in \{1, 2\}$, caso contrário consideramos a coloração simétrica de f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Colorimos u com a cor 4 para obter uma 4-coloração backbone de (G', T) . Alcançamos a contradição.

Por fim, derivaremos uma contradição para completar a prova. Será feita por meio do método da descarga no qual as estruturas acima são empregadas. A seguir, definimos a função de carga inicial ch em $V \cup F$ tomando $ch(x) = d(x) - 4$ para $x \in V \cup F$. Então:

$$\sum_{x \in V \cup F} ch(x) = \sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) \quad (4.1)$$

Aplicando a fórmula de Euler $|V| - |E| + |F| = 2$ na função de carga temos:

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8 \quad (4.2)$$

Uma vez que o método de descarga preserva a carga total de G' , se pudermos definir regras de descarga adequadas para mudar a função de carga inicial para uma função de carga final ch' em $V \cup F$ tal que $ch'(x) \geq 0$ para todo $x \in V \cup F$, então obtemos uma contradição óbvia:

$$0 \leq \sum_{x \in V \cup F} ch'(x) = \sum_{x \in V \cup F} ch(x) = -8 \quad (4.3)$$

O que completa a nossa prova.

Para $x, y \in V \cup F$, iremos usar $\tau(x \rightarrow y)$ para representar a soma dos pesos enviados de x para y . Agora, vamos introduzir as regras de descarga necessárias do seguinte modo:

(R) Para cada face $f = [v_1 v_2 \dots v_{d(f)}]$ com $d(f) \geq 5$, enviaremos $ch(f)/d(f)$ de f para v_i , $i = \{1, 2, \dots, d(f)\}$.

O resto dessa seção é devotada a verificar se $ch'(x) \geq 0$ para todo $x \in V \cup F$. Primeiramente note que as regras de descarga descritas acima foram projetadas de forma que $ch'(x) \geq 0$ para todo $x \in F$ (faces de tamanho 4 possuem carga zero e não enviam carga) e $ch'(x) \geq 0$ para todo 4^+ -vértices $x \in V$. Pelas afirmações de que G' não contém uma folha e G' não contém um 2 -vértice, precisamos apenas verificar se $ch'(x) \geq 0$ para todo 3 -vértice em G .

Tome $d(x) = 3$. Pela Afirmação 4.1.4, x é um vértice de corte e $G - x$ tem precisamente duas componentes conexas. Toda face f , por ser livre de triângulo, possui carga pelo menos 0 e como ela divide carga entre seus vértices, não fica negativa, portanto, $ch'(f) \geq 0$. Note que x aparece duas vezes na face mais externa denotada por f' de G e que temos $d(v) \geq 3$ para todo $v \in V(G)$. Como G é livre de triângulo temos que $d(f') \geq 10$.

Temos:

$$\tau(x \rightarrow y) = \frac{d(f') - 4}{d(f')} \cdot 2 \geq \frac{10 - 4}{10} \cdot 2 = \frac{6}{5} > 1 \quad (4.4)$$

De modo que $ch'(v) > 3 - 4 + 1 = 0$. Isso completa a prova do Teorema 4.1.3. Combinando o Teorema 4.1.3 e a Proposição 4.1.2, temos o seguinte.

Corolário 4.1.5 *Se G é um grafo conexo, não bipartido e livre de triângulo, então existe uma árvore geradora T de G tal que $BBC_2(G, T) = 4$.*

O trabalho também apresenta um resultado (Teorema 4.1.6) sobre *mad* de um grafo. O *mad* (*maximum average degree*) de um grafo G ($mad(G)$) é definido por:

$$mad(G) = \max_{H \subseteq G} \{2|E(H)|/|V(H)|\}.$$

Teorema 4.1.6 *Se G é um grafo com $mad(G) < 3$, então existe uma árvore geradora T de G tal que $BBC_2(G, T) \leq 4$.*

Para alcançarem o segundo resultado desejado no trabalho (Corolário 4.1.7) os autores utilizaram a Proposição 4.1.2 e o Teorema 4.1.6 como ferramentas fundamentais para a prova. A prova do Teorema 4.1.6 é análoga à prova do Teorema 4.1.3, de forma que os autores recorreram à provas por contradição onde foi suposta a existência de uma estrutura denominada contraexemplo minimal que é o menor grafo, ou seja $\sigma(G) = |V| + |E|$ menor possível, tal que o Teorema 4.1.6 não é verdade. A partir das prerrogativas dessa estrutura foram feitas afirmações análogas às do Teorema 4.1.3. Ao fim é realizada a combinação do Teorema 4.1.6 com a Proposição 4.1.2 que resulta no corolário a seguir:

Corolário 4.1.7 *Se G é um grafo conexo, não bipartido com $mad(G) < 3$, então existe uma árvore geradora T de G tal que $BBC_2(G, T) \leq 4$.*

4.2 Determinando números de coloração q -Backbone em um grafo split

Nesta seção abordaremos o trabalho *Determining numbers of coloring λ -backbone on split graph* (TSULUTSYA *et al.*, 2020). Em uma q -backbone k -coloração de um par (G, H) temos uma coloração própria $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tal que, para todo $uv \in E(H)$, nós temos $|c(u) - c(v)| \geq q$. No trabalho apresentado nesta seção, tomaremos o valor λ como q . Este trabalho apresenta o processo ou os passos para determinar o número de uma coloração q -backbone em um grafo split. Quanto aos passos temos o seguinte: considere a estrutura de grafos split, pegue um exemplo de subgrafo gerador (backbone) do grafo split que contenha uma clique e

um caminho hamiltoniano e faça uma coloração de vértices do backbone (caminho hamiltoniano) do grafo split. A seguir detalharemos cada ponto do passo a passo aplicado a um exemplo.

A. Grafos split

Um grafo split é um grafo G cujos vértices podem ser particionados em uma clique e um conjunto independente. Os grafos split fazem parte da classe de grafos perfeitos, portanto um grafo split satisfaz $\chi(G) = \omega(G)$. Na Figura 30 temos um exemplo de grafo split.

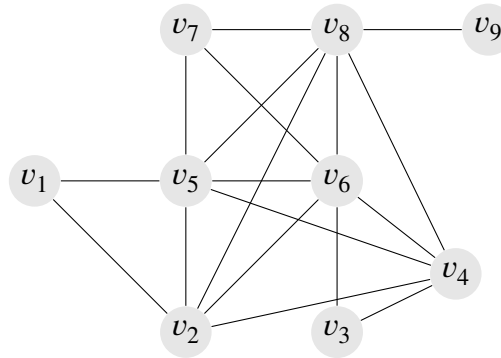


Figura 30 – Grafo split.

A Figura 31 representa grafo split da Figura 30 com K_5 destacado, as linhas em negrito indicam a clique K_5 e o conjunto de vértices $\{v_1, v_3, v_7, v_9\}$ representa o conjunto independente do grafo split em questão.

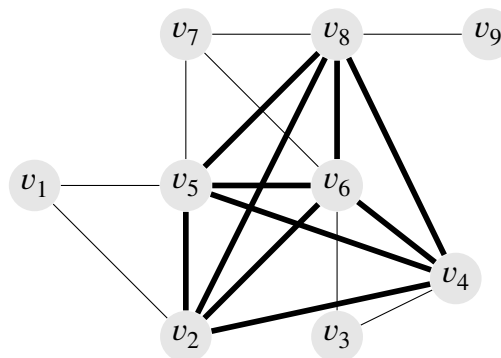


Figura 31 – Grafo split com K_5 destacado.

B. Caminho hamiltoniano como Backbone

No próximo passo o autor dá um exemplo de subgrafo gerador (backbone) do grafo split da Figura 30, onde este grafo contém um K_5 (mostrado na Figura 31) e um caminho hamiltoniano. Em seguida o autor determinará o caminho hamiltoniano do grafo split.

Na Figura 32, a linha espessa mostra o caminho hamiltoniano a partir de um grafo

split, visto que o caminho formado pelos vértices da linha destacada é um caminho aberto que passa por cada vértice exatamente uma vez e não retorna ao vértice original.

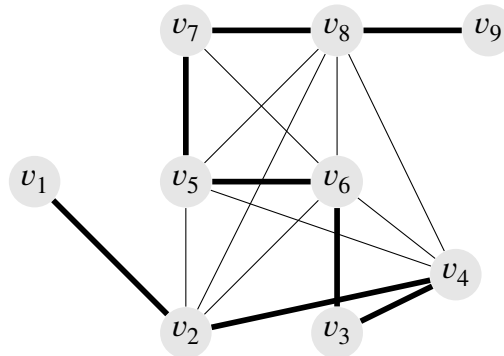


Figura 32 – Caminho hamiltoniano do grafo split.

C. Coloração q -Backbone num grafo split

Neste passo daremos uma coloração aos vértices do grafo split. Como foi supracitado, o backbone trabalhado consiste em um caminho hamiltoniano em um grafo split. Tomando o grafo split da Figura 31 como P , temos que o fato de $\chi(P) = 5$ é ditado por P possuir uma clique de tamanho 5, uma vez que cliques são grafos perfeitos e obedecem à propriedade $\chi(G) = \omega(G)$, logo P necessitaria exatamente 5 cores para colorir o grafo. A Figura 33 ilustra uma 5-coloração do grafo P .

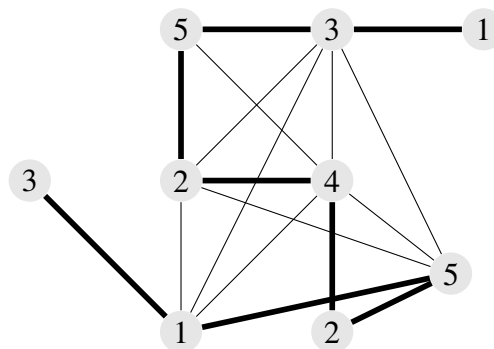


Figura 33 – Coloração de vértices do grafo split considerando o caminho hamiltoniano.

Com base na discussão, pode-se concluir que para determinar a coloração q -Backbone obtivemos as etapas a seguir:

1. Escolhemos um grafo split.
2. Pegamos um exemplo de subgrafo gerador (backbone) do grafo split que contenha uma clique e um caminho hamiltoniano.

3. Damos uma coloração de vértices ao backbone do grafo split (caminho hamiltoniano). Com base no etapas acima, a construção do grafo split requer clique e conjunto independente, visto que um grafo split é formado por ambos. Note que $|c(v) - c(u)| \geq 2$, para todo par de vértices do caminho hamiltoniano, o que mostra que a coloração apresentada obedece às propriedades de uma coloração q -backbone.

4.3 Coloração 2-backbone de grafos periplanares com um emparelhamento backbone

Nesta seção abordaremos o trabalho Coloração 2-backbone de grafos periplanares com um emparelhamento backbone (ARAÚJO *et al.*, 2017). Nesse trabalho é mostrado que dado G um grafo periplanar e H um emparelhamento em G , $BBC_2(G, H) \leq 4$. Também é mostrado que o limitante é apertado, isto é, existem grafos G e H tais que $BBC_2(G, H) = 4$. A seguir apresentaremos algumas definições importantes para o entendimento do trabalho.

Dado um par (G, H) , um subpar (G', H') de (G, H) , escrevemos $(G', H') \subseteq (G, H)$, é um par tal que $G' \subseteq G$ e $H' \subseteq H$. Além disso, se (G', H') é um subpar de (G, H) com $H' \subsetneq H$ ou $G' \subsetneq G$, dizemos que (G', H') é um subpar próprio de (G, H) . Dado um par (G, H) , um subgrafo $G' \subseteq G$ e uma coloração ϕ do subpar (G', H') , onde $H' = H[V(G')]$, definimos, para cada $u \in V(G) \setminus V(G')$, o conjunto das cores disponíveis para u em ϕ como:

$$A_\phi(u) = I_\ell \setminus \{(\phi(N_{G'}(u)) \cup \{[\phi(v)] \mid v \in N_{H'}(u)\})\}$$

$A_\phi(u)$ seleciona o conjunto de cores disponíveis da seguinte forma: sendo I_ℓ o conjunto com todas as cores, ele exclui do conjunto I_ℓ tanto as cores presentes na vizinhança do vértice u em G' , quanto as cores presentes na vizinhança do vértice u em H' .

Um par (G, H) é dito **(k, q)-minimal** se $BBC_q(G, H) > k$, mas $BBC_q(G', H') \leq k$ para todo subpar próprio (G', H') de (G, H) .

Os focos principais do trabalho a ser apresentado nesta seção são as Proposições 4.3.3 e 4.3.4 as quais apresentam limites $BBC_2(G, M)$ quando G é um grafo periplanar e M é um emparelhamento de G . Na Proposição 4.3.3 é mostrado que sendo G um grafo periplanar e M um emparelhamento backbone de G , o $BBC_2(G, M) \leq 4$. Na Proposição 4.3.4 é mostrado que esse limitante é apertado, sendo o valor do $BBC_2(G, M) = 4$. Para obterem os resultados principais descritos nas Proposições 4.3.3 e 4.3.4, os autores utilizam os Lemas 4.3.1 e 4.3.2 como ferramentas auxiliares nas provas.

Lema 4.3.1 *Se (G, H) é um par $(k, 2)$ -minimal, então G é conexo.*

Demonstração: Supomos, por contradição, que G não seja conexo. Assim, tomemos $C \subset V(G)$ sendo uma componente conexa de G . Podemos observar pela definição de (k, q) -minimalidade que $(G, H) - C$ e $(G, H)[C]$ admitem k -colorações 2-backbone ϕ e ϕ' respectivamente. Combinando ϕ e ϕ' , obtemos uma k -coloração 2-backbone de (G, H) , contradizendo a $(k, 2)$ -minimalidade de (G, H) onde temos que $BBC_2(G, H) > k$.

Lema 4.3.2 *Seja (G, M) um par onde M é um emparelhamento backbone de G . Se (G, M) é $(4, 2)$ -minimal, então $\delta(G) \geq 2$ e, além disso se $d_G(v) = 2$, então existe um vértice $w \in V(G)$ tal que $d_G(w) \geq 4$ e $vw \in M$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.3.1, G deve ser conexo. Observe que se $\delta(G) < 2$, então não existe a possibilidade de existir um vértice isolado. Dessa forma podemos perceber que ou G possui apenas um único vértice ou G possui exatamente um par de vértices que são adjacentes entre si, u e v . Sendo assim, de qualquer forma, é sempre possível encontrar uma 3-coloração 2-backbone em (G, M) , contradizendo a $(4, 2)$ -minimalidade de (G, M) . Observe que uma vez que $|c(u) - c(v) \geq 2|$, precisamos de uma 3-coloração 2-backbone. Podemos perceber então que caso exista vértice de grau 0 ou 1, podemos sempre tomar 3-coloração 2-backbone para o par (G, M) , logo $\delta(G) \geq 2$. Nos parágrafos seguintes mostraremos que se $d(v) = 2$, v possui um vizinho u no emparelhamento M e que $d(u) \geq 4$.

A seguir mostraremos que se $d_G(v) = 2$, para algum vértice $v \in V(G)$, então existe um vértice $u \in V(G)$ tal que $uv \in M$. Suponha por contradição que existe $v \in V(G)$ tal que $d_G(v) = 2$, v é vizinho de dois vértices u e w e que v não é extremidade de nenhuma aresta em M . Ao removermos v e tentarmos colorir $(G, M) - v$, percebemos que conseguimos colorir com 4 cores, visto que (G, M) é $(4, 2)$ -minimal. Ao colocarmos v novamente em $(G, M) - v$, existem duas possibilidades: ou v está presente no emparelhamento M ou v não está. Podemos perceber também que existem pelo menos duas cores disponíveis para colorir o vértice v : $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{\phi(u), \phi(w)\}$. Caso v não esteja no emparelhamento, é sempre possível colorir (G, M) com 4 cores, o que contradiz sua $(4, 2)$ -minimalidade, então necessariamente, sem perda de generalidade, $uv \in M$.

Mostremos então, que $d_G(u) \geq 4$. Suponha por contradição que $d_G(u) \leq 3$. Dado que (G, M) é $(4, 2)$ -minimal, tome uma 4-coloração 2-backbone c' sobre $(G - u - v, M - uv)$. Como sabemos que $d_G(v) = 2$ e que u e v foram desconsiderados para a coloração c' , percebemos

que para colorir o vértice v temos pelo menos 3 cores disponíveis. De forma semelhante, como $d_G(u) \leq 3$, vemos que há em c' pelo menos 2 cores disponíveis para colorir o vértice u . Dessa forma conseguimos estender esta 4-coloração 2-backbone para u e v , alcançando uma contradição. Observe que u não possui outro vizinho em M diferente de v e vice versa. Sendo assim, quando o grau do vértice v é 2 e ele deve ter um vizinho u no emparelhamento com $d_G(u) \geq 4$.

Os Lemas 4.3.1 e 4.3.2 são auxiliares para o resultado principal desta seção (Proposição 4.3.3). O resultado principal, bem como a demonstração desta proposição podem ser encontrados em (ARAÚJO *et al.*, 2017). A Proposição 4.3.4 mostra que o limite apresentado na Proposição 4.3.3 é apertado, demonstrando que existe grafo periplanar G e emparelhamento M de G tal que $BBC_2(G, M) = 4$.

Proposição 4.3.3 *Se G é um grafo periplanar e M é um emparelhamento backbone de G , então:*

$$BBC_2(G, M) \leq 4.$$

Proposição 4.3.4 *Existe grafo periplanar G e emparelhamento M de G tal que*

$$BBC_2(G, M) = 4.$$

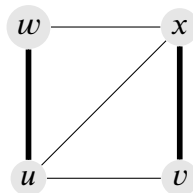


Figura 34 – Exemplo em que $BBC_2(G, M) = 4$.

Demonstração: Considere o par (G, M) como na Figura 34, onde $V(G) = \{u, v, x, w\}$, $E(G) = \{uv, vx, xw, wu, ux\}$ e $E(M) = \{wu, vx\}$. Observe que pelo menos 3 cores são necessárias em uma coloração 2-backbone de (G, M) , uma vez que $E(M) \neq \emptyset$. Contudo em nenhum caso utilizando 3 cores conseguimos uma coloração 2-backbone de (G, M) .

Para fins de ilustração, tome o caso em que $c(w) = c(v) = 1$. Como $wu \in E(M)$, então $c(u) \geq 3$. Como $vx \in E(M)$, então $c(x) \geq 3$. Por fim, como $ux \in E(G)$, é necessário que $c(u) \neq c(x)$, de forma que uma quarta cor se torna necessária para colorir o par (G, M) .

5 RESULTADOS RELACIONADOS A CIRCULAR BACKBONE COLORING (CBC)

Este capítulo é devotado a apresentar os resultados mais recentes encontrados na literatura sobre Coloração Backbone Circular (CBC). Na Seção 5.1 apresentamos o trabalho *Backbone Coloring of Graphs with Galaxy Backbones*, cujo foco principal é provar que se G é um grafo 3-cromático e F é uma galáxia, então $CBC_q(G, F) \leq 2q + 2$. Na Seção 5.2 apresentamos o trabalho *Circular Backbone Colorings: on matching and tree backbones of planar graphs* cujo objetivo principal é provar que se G é um grafo planar, livre de C_4 e H é uma floresta geradora linear de G , então $CBC_2(G, H) \leq 7$.

5.1 Coloração Backbone de grafos com Galáxias Backbone

Nesta seção abordaremos o trabalho (ARAUJO *et al.*, 2019). Neste trabalho, primeiramente é provado que se G é um grafo 3-cromático e F é uma galáxia, então $CBC_q(G, F) \leq 2q + 2$. Em seguida é provado que $CBC_3(G, M) \leq 7$ e $CBC_q(G, M) \leq 2q$ para todo $q \geq 4$, sempre que M é um emparelhamento de um grafo planar G . Além disso, os autores discutem que ambos os limites são apertados. Também é provado que $BBC_2(G, M)$ pode ser computado em tempo polinomial, sempre que G for um grafo periplanar com emparelhamento backbone M . Por fim, é mostrado um erro na prova de que $BBC_2(G, M) \leq \Delta(G) + 1$, para qualquer emparelhamento arbitrário M de um grafo G (MIŠKUF *et al.*, 2010) e ainda foi apresentado como consertá-la. Nosso foco principal será o primeiro resultado do artigo apresentado no teorema a seguir.

Teorema 5.1.1 *Se G é um grafo 3-cromático e F é uma galáxia, então $CBC_q(G, F) \leq 2q + 2$.*

Demonstração: Seja $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ uma 3-coloração de G . Definimos $L_i = \{v \in V(G) \mid c(v) = i \text{ e } d_F(v) = 1\}$ e para cada $v \in L_i$, suponha \bar{v} como o vértice tal que $v\bar{v} \in E(F)$. Note que para $v \in L_i$, é necessário que $d_F(v) = 1$. Agora definimos uma coloração circular q -backbone $c' : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2q + 2\}$ como a seguir:

(i) Se $v \in c^{-1}(1)$, então $c'(v) = 1$.

(ii) Se $v \in c^{-1}(2)$, então

$$c'(v) = \begin{cases} q + 1, & \text{se } v \in L_2 \text{ e } c(\bar{v}) = 1 \\ 2q + 2, & \text{se } v \in L_2 \text{ e } c(\bar{v}) = 3 \\ q + 3, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(iii) Se $v \in c^{-1}(3)$, então

$$c'(v) = \begin{cases} 2, & \text{se } v \in L_3 \text{ e } c(\bar{v}) = 2 \\ q + 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Primeiro provamos que c' é uma coloração própria. De fato, sejam $C_1, C_2, C_3 \subset V(G)$ partições de uma 3-partição induzida por c e suponha $C'_i = \{v \in V(G) : c'(v) = i\}$, para cada $i \in \{1, 2, q+1, q+2, q+3, 2q+2\}$. Observe que $C'_{q+1}, C'_{q+3}, C'_{2q+2} \subset C_2$, uma vez que todos os vértices com cores $q+1, q+3$ e $2q+2$ inicialmente possuíam cor 2 em c . Analogamente $C_{q+2}, C_2 \in C_3$ e $C_1 = C'_1$. Então C'_i é um conjunto independente, para todo $i \in \{1, 2, q+1, q+2, q+3, 2q+2\}$, uma vez que cada um dos conjuntos foi originado de um conjunto independente e assim permanecendo independentes. Isso nos mostra que c' deve ser uma coloração própria de G . Agora, provaremos que ela é uma coloração backbone circular. Para isto, provamos que, dado um vértice central v , todos os seus vizinhos no backbone são coloridos com cores apropriadas. Primeiro observe que v , sendo ele vértice central, possui três possibilidades de cor: Caso 1 quando $c(v) = 1$, Caso 2 quando $c(v) = q+3$ e Caso 3 quando $c(v) = q+2$.

Caso 1. $c(v) = 1$:

No primeiro caso, as cores permitidas para sua vizinhança em F são $q+1$ ou $q+2$, uma vez que pela regra (ii), $q+1$ colore vértices cujo central possui cor 1, a coloração $2q+2$ não pode ser aplicada, pois $2q+2$ colore vértices cujo central possui cor 3 e não pode ser $q+3$, pois $q+3$ não colore folhas e sim centrais. Além de $q+1$ e $q+2$ obedecem a propriedade de coloração circular, como visto na Inequação 5.1 e na Inequação 5.2.

$$2q+2 - q \geq |(q+1) - 1| \geq q \tag{5.1}$$

$$2q+2 - q \geq |(q+2) - 1| \geq q \tag{5.2}$$

Caso 2. $c(v) = q+3$

No segundo caso, toda a sua vizinhança em F são coloridos com cores 1 ou 2. Nada impede que um vértice de cor 2 possua um vizinho de cor 1 e, pelo caso (i), todo vértice de cor 1, mantém-se de cor 1 no backbone, tornando assim possível a existência de um vizinho de cor 1 em F . A existência de um vizinho de cor 2 é dada pelo caso (iii), onde colore as folhas cujo o vértice central possui cor 2, uma vez que originalmente $q+3$ possuía cor 2 e é vértice central.

Tomando as cores disponíveis para vizinhança de v , vemos que ambas satisfazem a propriedade de coloração circular, como visto na Inequação 5.3 e na Inequação 5.4.

$$2q+2-q \geq |(q+3)-1| \geq q \quad (5.3)$$

$$2q+2-q \geq |(q+3)-2| \geq q \quad (5.4)$$

Caso 3. $c(v) = q + 2$

Por fim, no último caso, todos seus vizinhos em F são coloridos com cores 1 ou $2q + 2$. Note pela Inequação 5.5 e pela Inequação 5.6 que c' é uma coloração q -backbone circular de (G, F) . Para casos em que não temos vértices centrais de grau 3, o valor do limite do Teorema diminui.

$$2q+2-q \geq |(q+2)-1| \geq q \quad (5.5)$$

$$2q+2-q \geq |(2q+2)-(q+2)| \geq q \quad (5.6)$$

Por fim, após a análise de todos os casos podemos concluir que c' é uma q -coloração backbone circular de (G, F) .

5.2 Coloração Backbone Circular: Emparelhamento e árvore backbones de grafos planares.

Nesta seção abordaremos o trabalho (ARAÚJO *et al.*, 2018). Neste trabalho, primeiramente é provado que se G é um grafo planar, livre de C_4 e H é uma floresta geradora linear de G , então $CBC_2(G, H) \leq 7$. Em seguida é provado que se G é um grafo planar que não contenha 2 faces de tamanho 3 compartilhando uma aresta e H é um emparelhamento de G , então $CBC_2(G, H) \leq 6$. Por fim, os autores diminuem o limite apresentado em (ARAÚJO *et al.*, 2015) e mostram que se G é um grafo planar livre de C_4 e C_5 e H é um emparelhamento de G , então $CBC_2(G, H) \leq 5$. Para o restante do trabalho denotaremos $CBC_2(G, H)$ apenas como $CBC_2(G, H)$, tornando implícito o valor de $k - 2 \geq |\phi(v) - \phi(w)| \geq 2$ para todo $vw \in E(H)$.

Todos os teoremas do referido trabalho afirmam que $CBC_2(G, H) \leq k$, para pares (G, H) satisfazendo a uma dada condição e um particular inteiro positivo k . Dizemos que um par (G, H) é k -minimal quando $CBC_2(G, H) > k$ e $CBC_2(G', H') \leq k$ para todo subpar próprio

(G', H') de (G, H) . Nesta seção apresentaremos o resultado principal do trabalho, teoremas que o compõem, ademais o desenvolvimento das provas dos mesmos.

Proposição 5.2.1 *Seja (G, M) um par k -minimal no qual $k \geq 4$ e M é um emparelhamento. As seguintes afirmações valem.*

1. $\delta(G) \geq k - 2$.
2. Se $d_G(u) = k - 2$, então existe $w \in V(G)$ tal que $uw \in M$ e $d_G(w) \geq k$.

Teorema 5.2.2 *Se G é um grafo planar sem ciclos de tamanho 4 ou 5 como subgrafo e M é um emparelhamento de G , então $CBC(G, M) \leq 5$.*

Lema 5.2.3 (ARAUJO et al., 2015) *Seja G um grafo planar sem ciclos de tamanho 4 ou 5 tal que $G \neq K_3$. Então,*

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 3) \leq \frac{3f_3(G)}{2} - 6 \quad (5.7)$$

Utilizaremos o Teorema 5.2.2 e o Lema 5.2.3 como pilares, tanto para o desenvolvimento do raciocínio do trabalho em questão, quanto para o entendimento do mesmo em sua plenitude.

Tome $(\widehat{G}, \widehat{M})$ um contraexemplo 5-minimal para o Teorema 5.2.2, isto é, \widehat{G} é um grafo planar livre de C_4 ou C_5 como subgrafo, \widehat{M} é um emparelhamento de G , $CBC_2(\widehat{G}, \widehat{M}) \geq 6$ e $CBC_2(G', M') \leq 5$ para todo subpar próprio (G', M') de $(\widehat{G}, \widehat{M})$. Claramente, $\widehat{G} \neq K_3$, uma vez que $|c(u) - c(v)| \geq 2$ pois estamos trabalhando com $CBC_2(G, H)$. No pior caso teríamos os vértices com cores 1, 3 e 5, necessitando no máximo de 5 cores, o que contradiz $CBC_2(\widehat{G}, \widehat{M}) \geq 6$.

Para mostrar que \widehat{G} não satisfaz a Inequação 5.7 e contradiz o Lema 5.2.3, usaremos o Método da Descarga, demonstrando, portanto, que o contraexemplo minimal não pode existir. Pela Proposição 5.2.1 (com $k = 5$), já possuímos um resultado estrutural simples sobre \widehat{G} . Temos que:

1. $\delta(\widehat{G}) \geq 3$, e
2. Se $d_{\widehat{G}}(u) = 3$, então existe $u^* \in V(\widehat{G})$ tal que $uu^* \in \widehat{M}$ e $d_{\widehat{G}}(u^*) \geq 5$.

Para o restante da prova, usaremos apenas $d(u)$ para denotar $d_{\widehat{G}}(u)$. Para desenvolver o restante da prova utilizaremos o Método da Descarga. Tome qualquer imersão de \widehat{G} no plano. Vamos atribuir cargas para cada vértice e cada face dessa imersão. Denotaremos $F_3(G)$ como

o conjunto das faces de tamanho 3 presentes no grafo G , $f_3(G)$ como a quantidade de faces de tamanho 3 presentes no grafo G e $f_3(u)$ como a quantidade de faces de tamanho 3 em que o vértice u incide. Daremos a carga $d_{\hat{G}}(v) - 3$ para cada vértice $v \in V(\hat{G})$, carga $-\frac{3}{2}$ para cada face $f \in F_3(\hat{G})$, e carga 0 para quaisquer outras faces. Em sequência, iremos redistribuir essas cargas entre os vértices e faces de \hat{G} de forma que, ao fim, cada vértice e cada face possua carga não negativa enquanto a soma total das cargas não muda. Por causa disso, concluímos que

$$\sum_{v \in V(\hat{G})} (d_{\hat{G}}(v) - 3) - \frac{3f_3(\hat{G})}{2} \geq 0 \quad (5.8)$$

Para redistribuirmos as cargas, aplicaremos as seguintes regras de descarga:

Regra 1: Para cada $u \in V(\hat{G})$ tal que $d(u) = 3$, envie carga $\frac{1}{2}$ de u^* para u .

Regra 2: Para cada vértice $u \in V(\hat{G})$ e cada face $f \in F_3(u)$, envie carga $\frac{1}{2}$ de u para f .

O procedimento de descarga primeiro aplica a Regra 1 (simultaneamente) a todos os vértices u , e, somente após isso, aplica a Regra 2 (simultaneamente) a todas as faces de $F_3(G)$. Note que as cargas de todas as faces que não estão presentes em $F_3(G)$ permanecem zero.

Para cada $x \in V(\hat{G}) \cup F_3(\hat{G})$, denotamos por $\mu_0(x), \mu_1(x), \mu_2(x)$ a carga de x antes da Regra 1 ter sido aplicada, antes da Regra 2 ter sido aplicada e após a Regra 2 ter sido aplicada respectivamente. Lembre-se de que $\mu_0(u) = d(u) - 3$ para cada vértice $u \in V(\hat{G})$, e $\mu_0(f) = -\frac{3}{2}$ para cada $f \in F_3(\hat{G})$. Pelo fato de \hat{M} ser um emparelhamento, nenhum vértice envia carga para mais de um outro vértice e a condição do grau dos vértices u^* implica que:

- **Caso 1.** Se $d(u) = 3$, então $\mu_1(u) = \frac{1}{2}$;
- **Caso 2.** Se $d(u) = 4$, então $\mu_1(u) = \mu_0(u) = 1$, pois as regras só afetam a carga vértices com graus iguais a 3 ou graus pelo menos 5; e
- **Caso 3.** Se $d(u) = 5$, a regra 1 os afeta, pois terão de enviar carga $\frac{1}{2}$ para seu vizinho de tamanho 3 no backbone (emparelhamento), logo

$$\mu_1(u) \geq \mu_0(u) - \frac{1}{2} = d(u) - 3 - \frac{1}{2} = \frac{2d(u) - 6 - 1}{2} = \frac{2d(u) - 7}{2}.$$

Além disso, nenhuma das faces tem sua carga alterada pela Regra 1, então $\mu_1(f) = \mu_0(f)$ para todas as faces em $F_3(\hat{G})$. Seja u um vértice qualquer. Note que, desde que \hat{G} não possua ciclos de tamanho 4, nenhum par de faces em $F_3(\hat{G})$ podem compartilhar uma aresta, do

contrário 2 faces de tamanho 3 compartilhando uma aresta iriam compor um ciclo de tamanho 4. Isso implica que $f_3(u) \leq \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor$ (5.9). Pode-se verificar que, para cada um dos casos anteriores em $d(u)$, que $\mu_1(u) \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor$. Além disso, $\mu_1(u) \geq \frac{1}{2} \cdot f_3(u)$, pois já é sabido que $f_3(u) \leq \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor$ (5.9), ao multiplicarmos cada lado da inequação por $\frac{1}{2}$, obtemos a Inequação (5.10). Como $\mu_1(u) \geq \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor$ e $\frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \cdot f_3(u)$, temos que $\mu_1(u) \geq \frac{1}{2} \cdot f_3(u)$ como é mostrado na Inequação (5.11).

$$f_3(u) \leq \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2} \cdot f_3(u) \leq \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor \quad (5.10)$$

$$\mu_1(u) \geq \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{d(u)}{2} \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \cdot f_3(u) \quad (5.11)$$

Isso significa que após enviar carga $\frac{1}{2}$ para cada $f \in F_3(u)$, o vértice u permanece com carga não negativa, isto é, $\mu_2(u) \geq 0$. Por outro lado, cada $f \in F_3(\hat{G})$ recebe $\frac{1}{2}$ unidade de carga de cada vértice em f , portanto temos que $\mu_2(f) = \mu_1(f) + \frac{3}{2} = \mu_0(f) + \frac{3}{2} = 0$. Considerando que não temos vértices com grau 0, 1 e 2, pois pela Proposição 5.2.1 a estrutura do grafo G possui somente em vértices com grau pelo menos 3. Podemos perceber também que para vértices com grau pelo menos 5 há carga suficiente para distribuir com seu vizinho no emparelhamento, tomando $d(u) = 5$ temos que $\mu_0(u) = 2$ e para vértices com grau maior que 5 a quantidade de carga sobressalente é maior ainda. Note que a Inequação 5.7 pode ser reescrita como:

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 3) - \frac{3f_3(G)}{2} \leq -6 \quad (5.12)$$

A premissa é que a carga do sistema é 0, como mostrado na Inequação 5.8 o que contradiz o Lema 5.2.3, portanto o contraexemplo minimal não pode existir. Isso finaliza a prova do Teorema 5.2.2.

6 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentará de forma resumida o que foi abordado neste trabalho de conclusão de curso. Na Seção 6.1 apresentamos os resultados encontrados de acordo com a proposta, na Seção 6.2 apresentamos algumas limitações encontradas durante o desenvolvimento do presente trabalho e na Seção 6.3 apresentamos alguns dos trabalhos futuros e temas em aberto para futuras pesquisas.

6.1 Resultados alcançados

Este trabalho apresentou um *survey* sobre Coloração Backbone, onde trazemos um conjunto com resultados mais recentes presentes na literatura. Neste trabalho consideramos como **mais novos** os resultados publicados após 2015, uma vez que o último trabalho que compila resultados referentes a Coloração Backbone foi publicado em 2015. Dessa forma, este trabalho também pode servir como ponto de partida para novos pesquisadores que desejam iniciar seu caminho na área de Teoria dos Grafos, tendo como foco a Coloração Backbone.

Após a análise dos artigos sobre Coloração de Backbone publicados após 2015, selecionamos aqueles que abordam a Coloração Backbone de forma semelhante aos trabalhos relacionados. Dessa forma apresentamos esses artigos e expandimos algumas provas presentes dentro dos mesmos a fim de facilitar o entendimento dos trabalhos. Com isso conseguindo ampliar mais o assunto dentro da literatura de forma a estimular novos trabalhos.

6.2 Limitações encontradas

Durante a evolução deste trabalho foram encontradas algumas limitações que dificultaram a execução do que foi proposto no Trabalho de Conclusão de Curso 1. Tivemos alguns pontos nos quais existiram grau demasiado de dificuldade. Um desses pontos foi durante a procura dos resultados mais recentes. Hoje a literatura abrange uma gama de trabalhos relacionados à Coloração de Grafos, porém grande parte é voltada para resultados não relacionados diretamente ao tema proposto neste trabalho, o que tornou a filtragem de resultados relevantes bastante trabalhosa.

Além disso alguns artigos, ou possuíam escritas confusas, ou possuíam natureza bastante resumida e dificultaram o entendimento. Dessa forma neste trabalho procuramos facilitar o entendimento destes resultados por meio da expansão de algumas provas e uma escrita mais

clara para o leitor.

6.3 Trabalhos futuros

Nesta seção abordamos alguns pontos que podem servir como ponto de partida para trabalhos futuros.

- O trabalho (TSULUTSYA *et al.*, 2020) tem foco no problema de determinar o número λ -Backbone em um grafo split. O trabalho deixa em aberto a possibilidade de expandir este estudo do número λ -Backbone em outros grafos tais como grafos cubo utilizando maiores valores de backbone.
- No trabalho (ARAUJO *et al.*, 2017) é provado que, para qualquer grafo periplanar G e um emparelhamento M , é possível encontrar uma 4-coloração do grafo de forma que $|c(u) - c(v)| \geq 2$ onde $uv \in M$. Os autores deixam alguns questionamentos em aberto, tais como:
 1. É possível colorir grafos planares arbitrários com 4 cores obedecendo a propriedade de coloração backbone sem aplicar restrições à família de grafos?
 2. É possível relaxar a particularização do valor de q e obter resultados similares? Mais formalmente, existe uma constante c tal que $BBC_q(G, M) \leq q + c$?
- No trabalho (ARAUJO *et al.*, 2018) é deixada uma questão em aberto: "Existe um par (G, H) tal que G é um grafo planar, H é uma floresta de G , e $CBC(G, H) = 7$? Além disso, existe um par (G, H) tal que G é um grafo planar, M é um emparelhamento de G , e $CBC(G, M) = 6$?"
- Outra sugestão de trabalho futuro é investigar os resultados obtidos no trabalho de (TSULUTSYA *et al.*, 2020), realizar uma tradução mais acurada e tentar melhorar a busca por uma q -coloração.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, C.; ARAUJO, J.; SILVA, A.; CEZAR, A. Backbone coloring of graphs with galaxy backbones. **Electronic Notes in Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 346, p. 53–64, 2019.
- ARAUJO, J.; BENEVIDES, F.; CEZAR, A.; SILVA, A. Circular backbone colorings: On matching and tree backbones of planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 251, p. 69–82, 2018.
- ARAUJO, J.; HAVET, F.; SCHMITT, M. Steinberg-like theorems for backbone colouring. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 50, p. 223–229, 2015.
- ARAUJO, J. C.; ARAUJO, C. S.; CEZAR, A. A. Coloração ao 2-backbone de grafos periplanares com um emparelhamento backbone. In: **2º Encontro de Teoria da Computação**. [S. l.]: Anais do XXXVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2017. p. 174–177.
- BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory**. [S. l.]: Springer, 2008. v. 244.
- BROERSMA, H.; FOMIN, F. V.; GOLOVACH, P. A.; WOEGINGER, G. J. Backbone colorings for networks. In: SPRINGER. **International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science**. [S. l.], 2003. p. 131–142.
- BROERSMA, H.; FOMIN, F. V.; GOLOVACH, P. A.; WOEGINGER, G. J. Backbone colorings for graphs: Tree and path backbones. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 55, n. 2, p. 137–152, 2007.
- BROERSMA, H. J.; FUJISAWA, J.; MARCHAL, L.; PAULUSMA, D.; SALMAN, A.; YOSHIMOTO, K. λ -backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 309, n. 18, p. 5596–5609, 2009.
- BROERSMA, H. J.; FUJISAWA, J.; YOSHIMOTO, K. Backbone colorings along perfect matchings. **Preprint**, v. 8308, p. 101–108, 2003.
- BROERSMA, H. J.; MARCHAL, L.; PAULUSMA, D.; SALMAN, A. Backbone colorings along stars and matchings in split graphs: their span is close to the chromatic number. **Discussiones mathematicae graph theory**, Zielona Gora, Technical University Press, v. 29, n. 1, p. 143–162, 2009.
- BU, Y.; BAO, X. Backbone coloring of planar graphs for c_8 -free or c_9 -free. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 580, p. 50–58, 2015.
- BU, Y.; LI, Y. Backbone coloring of planar graphs without special circles. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 412, n. 46, p. 6464–6468, 2011.
- BU, Y.; LIU, D. D.-F.; ZHU, X. Backbone coloring for graphs with large girths. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 313, n. 18, p. 1799–1804, 2013.
- BU, Y.; ZHANG, S. Backbone coloring for c_4 -free planar graphs. **SCIENTIA SINICA Mathematica**, Science China Press, v. 41, n. 2, p. 197–206, 2011.
- BU, Y.-h.; ZHANG, S.-m. Backbone coloring for triangle-free planar graphs. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series**, Springer, v. 33, n. 3, p. 819–824, 2017.

- CAMPOS, V.; HAVET, F.; SAMPAIO, R.; SILVA, A. Backbone colouring: Tree backbones with small diameter in planar graphs. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 487, p. 50–64, 2013.
- CEZAR, A. A. Circular backbone coloring for graphs without cycles of size four. 2016.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic graph theory**. [S. l.]: CRC press, 2019.
- EKIM, T.; EREY, A. Block decomposition approach to compute a minimum geodetic set. **RAIRO-Operations Research**, EDP Sciences, v. 48, n. 4, p. 497–507, 2014.
- FRITSCH, R.; FRITSCH, R.; FRITSCH, G.; FRITSCH, G. **Four-Color Theorem**. [S. l.]: Springer, 1998.
- GIBSON, T. A. Strengthening strong immersions with kempe chains. **arXiv preprint arXiv:1805.03729**, 2018.
- HALE, W. K. Frequency assignment: Theory and applications. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 68, n. 12, p. 1497–1514, 1980.
- HAMMER, P. L.; SIMEONE, B. The splittance of a graph. **Combinatorica**, Springer, v. 1, n. 3, p. 275–284, 1981.
- HAVET, F.; KING, A.; LIEDLOFF, M.; TODINCA, I. (circular) backbone colouring: tree backbones in planar graphs. 2012.
- HAVET, F.; KING, A. D.; LIEDLOFF, M.; TODINCA, I. (circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 169, p. 119–134, 2014.
- JENSEN, T.; TOFT, B. Graph coloring problems, wiley-interscience series in discrete mathematics and optimization, john wiley & sons inc. 1995.
- KUBALE, M. **Graph colorings**. [S. l.]: American Mathematical Soc., 2004. v. 352.
- LI, L.; WU, B. The number of blocks of a graph with given minimum degree. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, Hindawi, v. 2021, 2021.
- MIŠKUF, J.; ŠKREKOVSKI, R.; TANCER, M. Backbone colorings of graphs with bounded degree. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 158, n. 5, p. 534–542, 2010.
- PIERCE ROD. **Coloring (The Four Color Theorem)**. 2022. Disponível em: <http://www.mathsisfun.com/activity/coloring.html>. Acesso em: 31 jul. 2023.
- PIMPASALEE, W.; NAKPRASIT, K. M. On list backbone coloring of graphs. **Ars Combinatoria**, v. 140, p. 123–134, 2018.
- SALAVATIPOUR, M. R. Graph colouring via the discharging method. Citeseer, 2003.
- TSULUTSYA, F. B.; ALISAH, E.; ILAHI, L. K. Determining numbers of coloring λ -backbone on split graph. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S. l.], 2020. v. 1569, n. 4, p. 042074.