



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

THIAGO DE MELO SANTIAGO

**UMA NOVA INTERPRETAÇÃO ACERCA DO IMPACTO DA FRENAGEM
MAGNÉTICA E DA INTERAÇÃO DE MARÉ NA EVOLUÇÃO DA ROTAÇÃO
ESTELAR**

FORTALEZA
2024

THIAGO DE MELO SANTIAGO

UMA NOVA INTERPRETAÇÃO ACERCA DO IMPACTO DA FRENAGEM MAGNÉTICA E
DA INTERAÇÃO DE MARÉ NA EVOLUÇÃO DA ROTAÇÃO ESTELAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S226n Santiago, Thiago de Melo.

Uma nova interpretação acerca do impacto da frenagem magnética e da interação de maré na evolução da rotação estelar / Thiago de Melo Santiago. – 2024.

212 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.

1. rotação estelar. 2. frenagem magnética. 3. interações de maré de equilíbrio. 4. mecânica estatística não extensiva. I. Título.

CDD 530

THIAGO DE MELO SANTIAGO

UMA NOVA INTERPRETAÇÃO ACERCA DO IMPACTO DA FRENAGEM MAGNÉTICA E
DA INTERAÇÃO DE MARÉ NA EVOLUÇÃO DA ROTAÇÃO ESTELAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em: 13/09/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Profa. Dra. Maria Liduína das Chagas
(Examinadora externa)
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará
(UNIFESSPA)

Prof. Dr. Luiz Daniel Alves Rios
(Examinador externo)
Universidade Vale do Acaraú (UVA)

Prof. Dr. Antônio Carlos da Silva Miranda
(Examinador externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco
(UFRPE)

Prof. Dr. Francisco Jânio Cavalcante
(Examinador externo)
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Ceará (IFCE)

A todas e todos que conseguem se encantar com a beleza e os "mistérios" do Céu e trabalham para que as outras pessoas também possam se encantar.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas e todos que me ajudaram a chegar até aqui, mas não poderia deixar de citar as pessoas que mais me conduziram por esse caminho:

Ao Ser do qual emana o meu ser;

Ao prof. Dr. Daniel Brito de Freitas por ter aceitado a incumbência de me orientar e de permitir realizar um sonho pessoal e profissional;

A minha esposa Amanda que tanto me incentivou e que restaurou o equilíbrio da Força;

Aos meus pais e a todos os familiares que sempre estiveram próximos a mim nessa caminhada e, em especial, a minha querida Tia Mazé (*in memoriam*) que foi brilhar em um outro plano;

Aos amigos Diego Rabelo, Ariel Adorno, Vinnie dos Santos, Luci Pinheiro, Antônio Nunes, Wilami Teixeira e Jean Carlos, que sempre torceram e fizeram parte desse desafio do meu doutorado em vários momentos;

Aos amigos da UFCA, Felipe Cavalcante, Ângela Pinheiro, Antônio Carlos, Job Saraiva, Noelia Souza, Mário Pacheco, José Euclides, João Hermínio (*in memoriam*), Steve Vicentim e Allana Kellen, que sempre me incentivaram para a realização dessa formação;

Aos meus amigos e colegas do *Stellar Team* pela recepção, amizade, e pelas conversas que me permitiram aprender tanto com eles;

À CAPES, cujo apoio permitiu que o presente trabalho fosse realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001;

E, por fim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente com um *sim*, ou mesmo com um *não*, para que eu pudesse estudar a física das estrelas. Fica aqui o meu muito obrigado!

*"Cada um de nós, na perspectiva cósmica, é precioso.
Se um ser humano discordar de você, deixe-o viver.
Em 100 bilhões de galáxias você não encontrará outro."
(Carl Sagan, Cosmos , p. 370)*

RESUMO

A rotação estelar é uma propriedade física que controla a evolução estelar e influencia a evolução de sistemas planetários no que tange a formação de atmosferas e o estabelecimento de condições de habitabilidade nesses planetas. Os mecanismos de perda e/ou de transferência de momento angular pelos campos magnéticos ao longo da evolução estelar ainda estão sob intenso debate. A frenagem magnética por ventos estelares é um dos mecanismos mais duradouros que atua na redução do momento angular das estrelas. Com os dados fotométricos e os parâmetros orbitais que vem sendo disponibilizados, principalmente por missões espaciais como a Kepler e *Transiting Exoplanet Survey Satellite*-TESS, é possível testarmos modelos que consideram a influência da frenagem magnética por ventos estelares juntamente com os efeitos de maré decorrentes da interação estrela-planeta, em um contexto de marés de equilíbrio. No presente estudo, propomos a utilização de um modelo estatístico não extensivo caracterizado por um índice q para descrever a evolução da rotação de estrelas sob frenagem magnética sem a presença de planetas e de estrelas companheiras, bem como, considerando a superposição dos possíveis efeitos de maré decorrentes da interação estrela-planeta. Os desvios dos valores de q a partir do índice de Skumanich foram calculados a partir do cruzamento de catálogos contendo dados fotométricos obtidos pela missão Kepler, resultando em uma amostra contendo 16 220 estrelas ativas nos estágios de gigante vermelha e da sequência principal. No estudo considerando as interações de maré, partimos de um conjunto de dados compreendendo 152 sistemas planetários, totalizando 200 exoplanetas com massas entre 0,4 massa terrestre e 20 massas de Júpiter, períodos orbitais entre 0,3 e 225 dias e medidas de semi-eixo maior inferiores a uma unidade astronômica, refinamos a nossa amostra para nos restringir a sistemas com uma única estrela e com massas estelares abaixo do limite de Kraft, considerando vários regimes de período de rotação orbital e rotação estelar. Em contexto somente de frenagem magnética, verificou-se que o índice de frenagem encontra-se no intervalo $1 \leq q \leq 3$, sendo consistente, portanto, com a predições do modelo de vento estelar magnetizado e apresentando transições entre os valores extremos para estrelas mais massivas do que 1,3 massa solar e rotadores rápidos da sequência principal. A partir da análise do índice q considerando a interação de maré, nota-se uma forte anticorrelação entre o índice de marés em relação à massa e o raio planetário e , na maioria dos sistemas examinados, o impacto desta interação é reduzido para valores com $q < 4$ e, portanto, a evolução da rotação estelar é predominantemente impulsionada pelo vento estelar magnetizado, colocando a interação de maré em um papel secundário. Além disso, para os sistemas planetários com índice $q > 4$, a evolução rotacional das estrelas que hospedam planetas com medidas de semieixo maior inferiores ao raio de corrotação permanece amplamente afetada pela interação de marés.

Palavras-chave: rotação estelar; frenagem magnética; interações de maré; mecânica estatística não extensiva.

ABSTRACT

Stellar rotation is a physical property that controls stellar evolution and influences the evolution of planetary systems in terms of the formation of atmospheres and the establishment of habitable conditions on these planets. The mechanisms of loss and/or transfer of angular momentum by magnetic fields throughout stellar evolution are still under intense debate. Magnetic braking by stellar winds is one of the longest-lasting mechanisms that acts to reduce the angular momentum of stars. With the photometric data and orbital parameters that have been made available mainly by space missions such as Kepler and *Transiting Exoplanet Survey Satellite*-TESS, it is possible to test models that consider the influence of magnetic braking by stellar winds together with tidal effects resulting from star-planet interaction in a context of equilibrium tides. In the present study, we propose the use of a non-extensive statistical model characterized by a q index to describe the rotation evolution of stars under magnetic braking without the presence of planets and companion stars, as well as considering the superposition of possible tidal effects resulting from star-planet interactions. The deviations of the q values from the Skumanich index were calculated by crossing catalogs containing photometric data obtained by the Kepler mission, resulting in a sample of 16,220 active stars in the red giant and main sequence stages. From a data set comprising 152 planetary systems, totaling 200 exoplanets with masses between 0.4 Earth masses and 20 Jupiter masses, orbital periods between 0.3 and 225 days and semi-major axis measurements less than one astronomical unit, we refined our sample to restrict ourselves to systems with a single star and with stellar masses below the Kraft limit, considering various regimes of orbital rotation period and stellar rotation. In the context of magnetic braking as the only effect present, it was found that the braking index is in the range $1 \leq q \leq 3$, therefore being consistent with the predictions of the magnetized stellar wind model and presenting transitions between the extreme values for stars more massive than 1.3 solar masses and fast main sequence rotators. From the analysis of the tidal interaction index q , a strong anticorrelation is noted between the tidal index in relation to mass and the planetary radius and, in most of the systems examined, the impact of this interaction is reduced to values with $q < 4$ and therefore the evolution of stellar rotation is predominantly driven by the magnetized stellar wind, placing the tidal interaction in a secondary role. Furthermore, for planetary systems with index $q > 4$, the rotational evolution of stars inhabiting planets with semi-major axis measurements smaller than the corotation radius remains largely affected by tidal interaction.

Keywords: stellar rotation; star-planet interaction; equilibrium tides interactions; non-extensive statistical mechanics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Galileu Galilei e uma de suas ilustrações das manchas solares	19
Figura 2 – Retratos de Harriot, Fabricius e Scheiner.	20
Figura 3 – Distribuição anual acumulada do número de detecções de exoplanetas por diferentes técnicas.	23
Figura 4 – Cronologia das missões espaciais de exoplanetologia.	24
Figura 5 – Distribuição dos exoplanetas segundo a medida do semieixo maior a	27
Figura 6 – Distribuição de algumas propriedades dos sistemas planetários.	28
Figura 7 – Diagrama dos tipos de interação estrela-planeta, seus efeitos e observáveis.	29
Figura 8 – Espectro de absorção de uma estrela e as suas linhas espectrais.	35
Figura 9 – Largura de um pico de absorção para uma dada linha espectral.	36
Figura 10 – Alargamento de uma linha espectral produzido pela rotação estelar.	37
Figura 11 – Curva de luz de uma estrela rotante.	39
Figura 12 – Periodograma de Lomb-Scargle para a curva de luz de KIC 2157356.	40
Figura 13 – Registros do número de manchas solares entre os anos 1700 e 2005.	41
Figura 14 – A irradiância total do Sol registrada durante um ciclo de atividade.	42
Figura 15 – A estrutura do Sol.	43
Figura 16 – Astrofotografias solares obtidas na região visível do espectro.	44
Figura 17 – Perfis de opacidade, temperatura e densidade do Sol.	45
Figura 18 – Cromosfera solar.	46
Figura 19 – Projeção da velocidade de rotação.	47
Figura 20 – Perfil radial da frequência de rotação do Sol.	48
Figura 21 – Distribuição de massa com simetria axial.	48
Figura 22 – Geometria esferoidal.	52
Figura 23 – Tipos de esferoides.	53
Figura 24 – Aceleração centrífuga de um ponto material sobre a superfície de um esferoide em rotação.	56
Figura 25 – Geradores elétricos homopolares.	59
Figura 26 – Fluxo do campo magnético em uma superfície imaginária no interior de um plasma.	63
Figura 27 – Estrutura dos fluxos no interior solar.	64
Figura 28 – Diagrama de Maunder.	65
Figura 29 – Estrutura dos campos magnéticos gerados pelo dínamo solar.	66
Figura 30 – Célula convectiva ciclônica ou Ω -loop de Parker.	67
Figura 31 – Intensificação do campo magnético e a sua polaridade em manchas solares.	70
Figura 32 – Migração das regiões ativas pelo mecanismo de Babcock-Leighton.	70
Figura 33 – Astrofotografia de alta resolução de uma mancha solar.	71
Figura 34 – Formação de grânulos na fotosfera solar.	72

Figura 35 – Fáculas observadas no limbo solar.	73
Figura 36 – Imagem de alta resolução de fáculas no limbo solar.	74
Figura 37 – A formação das fáculas solares.	75
Figura 38 – Congelamento das linhas de campo da magnetosfera estelar.	78
Figura 39 – Linhas de campo da magnetosfera estelar.	79
Figura 40 – Diagrama de Hertzsprung-Russel.	85
Figura 41 – Trilha evolutiva de uma estrela do tipo solar.	86
Figura 42 – Distribuição de velocidades projetadas segundo a classe espectral.	88
Figura 43 – Distribuição de velocidades em diferentes classes de luminosidade.	89
Figura 44 – Estágios da formação estelar.	92
Figura 45 – Evolução dos discos circunstelares.	95
Figura 46 – Trilha evolutiva de uma estrela recém-formada.	97
Figura 47 – A evolução do momento angular de uma estrela do tipo solar.	100
Figura 48 – Diagrama esquemático dos processos de travamento de disco.	104
Figura 49 – Superfície do índice de frenagem magnética ($\frac{\rho}{\rho_{\odot}}, \frac{P}{P_{\odot}}, q_w$).	127
Figura 50 – Perfis variacionais do índice de frenagem magnética q_w para as razões de período rotacional (P/P_{\odot}) e de densidade média (ρ/ρ_{\odot}).	127
Figura 51 – Distâncias características na interação gravitacional de dois corpos.	129
Figura 52 – Órbitas de partículas no interior da estrela.	130
Figura 53 – Distâncias envolvidas na construção do potencial gravitacional.	131
Figura 54 – Deformação causada pelo efeito de maré e os parâmetros orbitais.	132
Figura 55 – Elementos geométricos de uma órbita kepleriana.	137
Figura 56 – Anomalias e circunferência auxiliar.	138
Figura 57 – Desalinhamento dos bojos de maré na interação estrela-planeta.	142
Figura 58 – Características da amostra selecionada para o estudo do índice de frenagem magnética	146
Figura 59 – Distribuição da massa estelar no intervalo $0,2-4M_{\odot}$	147
Figura 60 – Raios e medidas do semieixo maior dos exoplanetas contidos na amostra original.	150
Figura 61 – Distribuição de massa estelar na amostra original.	151
Figura 62 – Distribuição de massa planetária na amostra original.	151
Figura 63 – Distribuição de períodos de rotação estelar na amostra original.	152
Figura 64 – Diagrama esquemático das principais características e locais de interesse envolvidos em um sistema estrela-planeta submetido a interações magnéticas e de maré.	156
Figura 65 – Índice de frenagem magnética q_w em função da massa estelar.	162
Figura 66 – Índice de frenagem magnética q_w em função da temperatura efetiva.	163
Figura 67 – Índice de frenagem magnética q_w em função do período rotação P	163

Figura 68 – Distribuição da razão dos períodos P_{orb}/P_{rot} em função do período orbital P_{orb} e da razão dos momentos angulares L_*/L_{orb}	166
Figura 69 – A distribuição do período orbital P_{orb} segundo o período de rotação estelar P_{rot} e o fator de qualidade de dissipação das marés (Q).	168
Figura 70 – Logaritmo do índice q_t de maré como função dos logaritmos de L_*/L_{orb} e P_{orb}/P_{rot}	170
Figura 71 – Análise gráfica da correlação entre q_t e a massa planetária M_p segregada pela massa estelar e em escala logarítmica.	171
Figura 72 – Análise gráfica da correlação entre q_t e o raio planetário R_p segregada pela massa estelar e em escala logarítmica.	172
Figura 73 – Índice de interação de maré q_t em função do módulo da frequência de maré ω_{tide} considerando o dataset#01.	173
Figura 74 – Índice de interação de maré q_t em função do fator de qualidade dissipativo Q considerando o dataset#01.	173
Figura 75 – Relação entre o semieixo maior e o raio de corrotação nas três subamostras.	176
Figura 76 – Períodos de rotação em função de idades asterossísmicas modeladas em grade.	177
Figura 77 – Razão dos períodos rotacionais $P_{rot}^{tidal}/P_{rot}^{wind}$ em função da idade estelar.	179

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Classificação dos exoplanetas por tamanho do raio.	26
Tabela 2	– Classificação dos exoplanetas por massa.	26
Tabela 3	– Comparativo de técnicas de medição de velocidade de rotação estelar.	38
Tabela 4	– O momento angular específico j durante a formação estelar	99
Tabela 5	– Observáveis e as suas opções de filtragem (<i>flags</i>) para as subamostras (<i>datasets</i>). 148	
Tabela 6	– Ajustes não lineares da Eq. (8.4) para o <i>dataset#01</i> e os três intervalos de massa estelar. O número total de estrelas por amostra encontra-se na segunda coluna.	177
Tabela 7	– Os parâmetros dos sistemas planetários como segue: Período orbital (P_{orb}), Semieixo maior (a), Raio planetário (R_p), Massa planetária (M_p), excentricidade (e), Temperatura efetiva (T_{eff}), Raio estelar (R_*), Massa estelar (M_*), Período de rotação (P_{rot}), Idade estelar (Idade), Índice de interação de maré (q_t) e a razão dos momentos angulares orbitais e de rotação estelar (L_*/L_{orb}). Os índices sobrescritos indicam os conjuntos de dados nos quais o exoplaneta está presente.	206

LISTA DE SÍMBOLOS

δ	Ângulo de defasagem
i	Ângulo de inclinação da direção do eixo de rotação com relação à linha de visada
Υ	Ângulo de inclinação da direção perpendicular ao plano orbital com relação ao eixo de rotação da estrela
E	Anomalia excêntrica
\mathcal{M}	Anomalia média
θ_p	Anomalia verdadeira
B_0	Campo magnético na superfície da estrela
G	Constante gravitacional
\mathcal{E}	Energia mecânica
e	Excentricidade
Q	Fator de qualidade de dissipação
ω_{tide}	Frequência de maré
J_c	Densidade de corrente elétrica
q	Índice entrópico de frenagem magnética ou de maré
M_J	Massa de Júpiter
M_{\oplus}	Massa terrestre
M_{\odot}	Massa solar
M_*	Massa estelar
M_p	Massa planetária
J	Momento angular
j	Momento angular específico
L_*	Momento angular estelar
L_{orb}	Momento angular orbital
I_0	Momento de inércia da estrela com formato esférico
I_*	Momento de inércia estelar
k_l	Número de Love para o termo de ordem l
ϵ	<i>Oblateness</i>
P_{rot}	Período de rotação estelar
P_{orb}	Período orbital

r_A	Raio de Alfvén
r_{cor}	Raio de corotação
r_g	Raio de giração
R_*	Raio estelar
R_p	Raio planetário
R_\oplus	Raio terrestre
R_\odot	Raio solar
a	Semieixo maior
T_{eff}	Temperatura efetiva
τ_c	Tempo característico
τ	Tempo de defasagem
t_{syn}	Tempo de sincronização
N	Topologia do campo magnético
v_A	Velocidade de Alfvén
Ω_*	Velocidade angular de rotação da estrela
Ω_{orb}	Velocidade angular orbital do planeta
$\langle \Omega_{orb} \rangle$	Velocidade angular orbital média

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Uma proximidade histórica	18
1.2	O que o censo exoplanetário nos diz?	23
1.3	Os tipos de interações estrela-planeta	27
1.4	A complexidade na evolução da rotação estelar	30
1.5	Objetivo da tese	31
1.6	Escopo da tese	33
2	A ROTAÇÃO ESTELAR	34
2.1	Rotação e variabilidade estelar	34
2.2	A atmosfera solar	41
2.3	Rotadores não rígidos	46
2.4	Rotação e Magnetismo estelar	58
2.5	Os ventos estelares e frenagem magnética	76
2.6	Rotação e evolução de estrelas de baixa massa	84
3	UMA NOVA LEITURA ESTATÍSTICA ACERCA DOS CENÁRIOS DE INTERAÇÃO ESTRELA-PLANETA	107
3.1	A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs e formalismo não-extensivo de Tsallis	107
3.2	A necessidade de generalização da Mecânica Estatística BG	109
3.3	A rotação estelar segundo uma abordagem não extensiva	113
4	EVOLUÇÃO DA ROTAÇÃO ESTELAR SOB A AÇÃO DO ÍNDICE DE FRENAGEM MAGNÉTICA NÃO EXTENSIVO	117
4.1	A frenagem magnética e a evolução estelar	117
4.2	O modelo de Kawaler para a perda de momento angular estelar	119
4.3	Uma medida para o desvio da lei de frenagem magnética de Skumanich	125
5	REVISITANDO O MODELO DE DARWIN PARA A INTERAÇÃO DE MARÉS	128
5.1	As interações de maré de equilíbrio	128
5.2	Elementos orbitais	135
5.3	Dissipação de marés	141
6	SELEÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS AMOSTRAS	146
6.1	Amostra para o estudo do desvio do índice de frenagem magnética de Skumanich	146
6.2	Amostra para o estudo do índice de interação de maré	147
7	UM NOVO ÍNDICE PARA A DESCRIÇÃO NÃO EXTENSIVA DA INTERAÇÃO DE MARÉ	153
7.1	O <i>Spin-down</i> de estrelas e as interações de maré	153

7.2	A modelagem dos efeitos na evolução de marés devido à proximidade de planetas	155
7.2.1	<i>Índice de interação de maré q_t</i>	156
7.2.2	<i>Determinação do índice q_t a partir do modelo de marés de equilíbrio</i>	158
8	RESULTADOS E DISCUSSÕES	162
8.1	Análise dos desvios do índice de frenagem em estrelas ativas sem a presença de companheiros estelares ou planetários	162
8.2	Análise da influência das interações de maré na evolução da rotação estelar	165
8.2.1	<i>Os estados de spin-órbita</i>	165
8.2.2	<i>Análise da dissipação de marés</i>	167
8.2.3	<i>A influência dos parâmetros de spin-órbita sobre o índice de interação de marés</i>	169
8.2.4	<i>O impacto dos parâmetros planetários e da maré de equilíbrio no índice q_t</i>	171
8.2.5	<i>O impacto na rotação estelar</i>	174
9	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	180
	REFERÊNCIAS	182
	APÊNDICES	205

1 INTRODUÇÃO

Neste esse estudo, discutimos a importância da rotação estelar como um fenômeno que está intrinsecamente associado à estrutura e à evolução estelar, bem como, a sua relação com tópicos recentemente estudados em exoplanetologia, como a interação estrela-planeta.

Por ser um fenômeno que desempenha um papel importante tanto na formação quanto no comportamento das estrelas ao longo de suas vidas, o estudo da rotação fornece informações sobre a física subjacente dos sistemas estelares e contribui para uma compreensão mais ampla da astrofísica.

Desde a primeira detecção do primeiro exoplaneta orbitando uma estrela anã fria, temos encontrado vários sistemas planetários onde os planetas estão bem próximos da estrela que os hospeda, implicando que há fortes interações entre esses corpos (Vidotto, 2020). Conforme será discutido em detalhes mais adiante, essas interações podem repercutir tanto na rotação da estrela quanto no movimento orbital dos planetas.

Neste capítulo, inicialmente apresentamos um breve histórico entre as primeiras evidências observacionais da rotação estelar, destacando o papel das manchas solares nessas evidências e como os planetas foram inicialmente associados às mudanças de brilho do Sol. Em seguida, apresentamos o contexto ao qual se insere nosso estudo e, por fim, não menos importante, apresenta-se o escopo da tese ora apresentada.

1.1 Uma proximidade histórica

Nos próximos parágrafos, apresenta-se um breve histórico da evolução do pensamento científico com relação à rotação estelar, mas antes de iniciar essa revisão histórica, faz-se necessário explicar o título dessa seção.

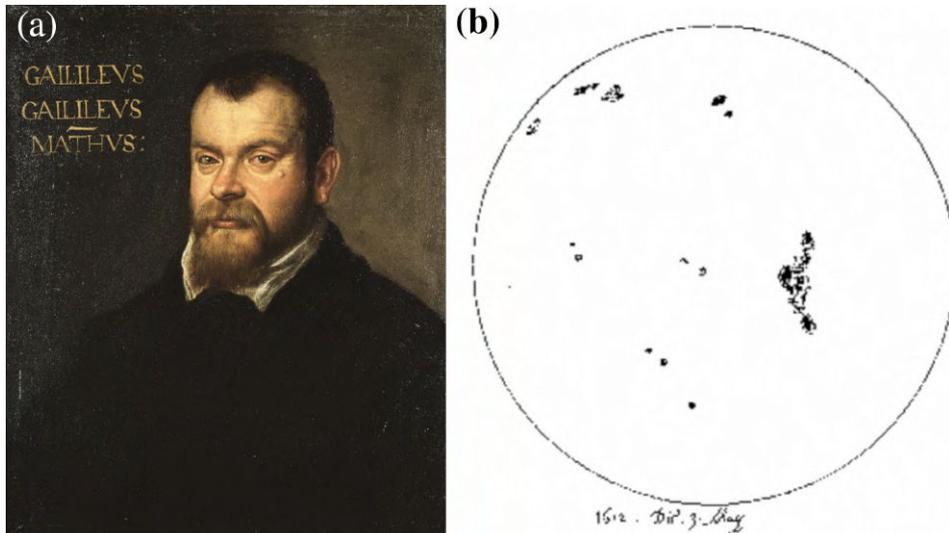
Em tempos remotos, a observação das manchas solares chegou a ser erroneamente associada ao movimento de planetas. Séculos depois, com todos os recursos tecnológicos que nos proporcionaram várias descobertas e com o desenvolvimento dos modelos de estrutura e evolução estelar, nos deparamos "ironicamente", com estudos que investigam com lucidez um novo tipo de associação entre o movimento dos planetas e a atividade estelar. Eis aí, portanto, contextos históricos diferentes que aproximam o estudo desses dois tópicos: a rotação estelar e a exoplanetologia.

Durante os séculos em que o pensamento aristotélico fora dominante (XII a XV, conforme Grant (1978)), as estrelas incrustadas em uma esfera celeste cristalina representavam a ideia de imutabilidade e incorruptibilidade de um céu (Shea, 1970, p. 518) há muito venerado e observado pelos humanos. Foram necessários o surgimento de novas ideias, de coragem para defendê-las, das novas observações e dos instrumentos para tal e, por que não dizer, do ceifamento de vidas, para que ideias como a do heliocentrismo fossem resgatadas e viessem a questionar o pensamento ainda dominante no início do século XVII.

As descobertas de Galileu Galilei (Fig. 1a), por exemplo, representam algumas

das boas-novas que mudaram a nossa forma de olhar para o céu, literalmente. Em *Sidereus Nuncius* e em alguns textos posteriores, o cientista italiano relatou o que viu quando empregou um instrumento óptico, aprimorado por ele mesmo, para observar o céu (Galilei, 2010).

Figura 1 – Galileu Galilei e uma de suas ilustrações das manchas solares



(a) Retrato em óleo sobre tela de 1602 cuja autoria ainda é contestada. No entanto, acredita-se que ela pode ser atribuída a Domenico Robusti ou a Francesco Apollodoro di Porcia. (b) Uma das ilustrações feitas por Galileu das manchas solares em 1612 e comunicadas na carta a Maffeo Barberini em 02 de junho de 1612. Fonte: extraídos de: (a) (Galilei, 1964b, p. 256) e (b) (NMM, 2023)

Na carta que escreve à Cristina de Lorena, a Grã-duquesa de Toscana (Galilei, 1983), encontramos um relato da pressão sofrida por aqueles que evangelizavam em prol das verdades que eram passíveis de observação na Natureza. Nesse texto, Galileu faz uma conciliação de suas descobertas com as escrituras bíblicas, confirmando o sistema heliocêntrico copernicano através de suas observações e demonstrando a compatibilidade das suas conclusões com as mesmas escrituras que os seus opositores citavam para acusá-lo ou refutá-lo. Dentre os vários fenômenos relatados durante a referida carta, transcrevemos aqui o trecho em que a rotação do Sol e as manchas solares (Fig. 1b) são mencionados por Galileu:

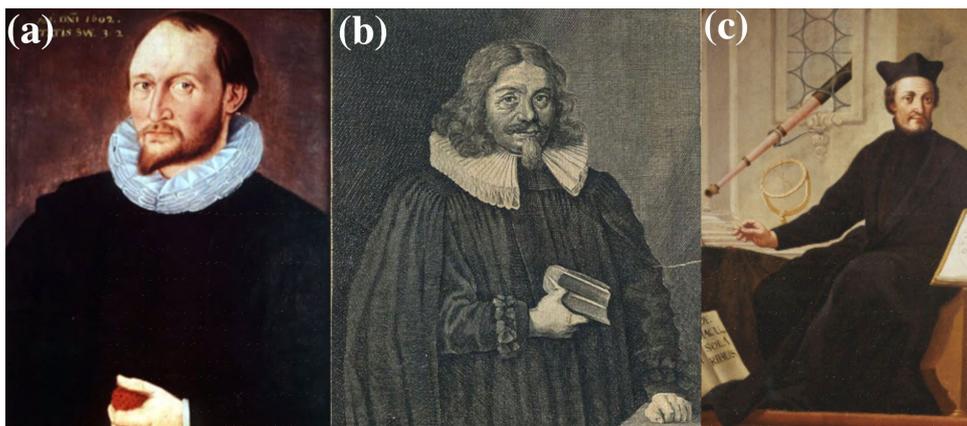
Suponha-se, portanto, em primeiro lugar, que no milagre de Josué imobilizou-se todo o sistema dos movimentos celestes, de acordo com o parecer dos autores supramencionados, e isto para que não se confundissem todas as organizações e se introduzisse sem necessidade grande confusão em todo o curso da Natureza ao ser imobilizado um só daqueles. Passo, em segundo lugar, a considerar como o corpo solar, se bem que parado no mesmo lugar, gira, no entanto, sobre si mesmo fazendo uma revolução completa em cerca de um mês, assim como concludentemente me parece ter demonstrado nas minhas Cartas sobre as Manchas Solares. Vemos com nossos olhos que este movimento é inclinado para o meio dia na parte superior do globo solar e, por isso, na parte inferior, inclina-se para o aquilão do mesmo modo precisamente como se dão as revoluções de todos os orbes dos planetas. [...](Galilei, 1983, p. 121).

Ao relatar o surgimento e o desaparecimento dessas manchas enquanto elas aparentavam se mover no disco solar, Galileu dá testemunho da mutabilidade dos corpos celestes e infere a rotação solar como explicação para o movimento das manchas (Pires, 2008, p. 119 e 121) e (Swerdlow, 2006, p. 264). Antes de se corresponder com a duquesa, Galileu teria escrito,

em 1612, três cartas que foram publicadas no ano seguinte com o título *Istoria e Dimostrazioni intorno alle Macchie Solari e loro Accidenti* (Tassoul, 2000, p. 1).

Além de Galileu, outros estudiosos de sua época se dedicaram à observação das manchas solares e da rotação solar. Muito além das discussões sobre o pioneirismo do estudo dessas manchas (Mitchell, 1916; Galilei; Scheiner, 2010; Swerdlow, 2006), podemos destacar os trabalhos de Johann Fabricius, Christopher Scheiner e Thomas Harriot (Tassoul, 2000, p. 1).

Figura 2 – Retratos de Harriot, Fabricius e Scheiner.



(a) Thomas Harriot retratado por volta de 1602. (b) Johann Fabricius (c) Cristopher Scheiner retratado por Christoph Thomas Scheffler. Fonte: extraídos de: (a) (Nature, 2023), (b) (HAO, 2023a) e (c) (HAO, 2023b).

Johann Fabricius¹, enquanto estava em Leiden, na Holanda, adquiriu telescópios e, como conhecia a aplicação destes instrumentos por parte de Galileu através da obra *Sidereus Nuncius*, os levou para o seu pai David, também astrônomo, na Alemanha. Através destes instrumentos, pai e filho começaram a fazer observações. Joahnn foi o primeiro da dupla a observar as manchas solares durante o amanhecer do dia 09 de março de 1611 e, nas semanas seguintes, pai e filho fizeram observações diárias do fenômeno.

As observações de Fabricius foram relatadas no livro *Maculis in Sole observatis et apparente earum cum Sole conversione, Narratio* no mês de junho de 1611 (Tassoul, 2000, p. 1), onde ele afirma que as manchas observadas pertenciam ao Sol e que elas poderiam variar de forma e velocidade enquanto se moviam através do disco solar, correlacionando esse movimento originado pela rotação do Sol (Charbonneau, 2014a, p. 690).

No final do mesmo ano, Christopher Scheiner, um padre jesuíta e astrônomo, também reportou a observação de manchas solares e as interpretou, inicialmente, como a sombra projetada de pequenos corpos próximos que giravam em torno do Sol. Além disso, Scheiner não acreditava que a rotação do Sol fosse responsável pelo movimento atribuído às manchas, uma vez que elas não retornavam à mesma posição. O relato de Scheiner e suas interpretações foram publicados inicialmente em três cartas sob o pseudônimo de *Apelles hiding behind the painting* e, por meio delas, Johannes Kepler e Galileu tomaram conhecimento que Scheiner ou "Apelles" também

¹ Também se encontra a variante do latim medieval Johannes para se designar o primeiro nome, enquanto Fabricius é a versão latina de Goldsmid (Casanovas, 1997)

repetira o feito e escreveram cartas em resposta, se manifestando sobre o assunto (Pires, 2008, p. 120), (Swerdlow, 2006, p. 262) e (Mitchell, 1916).

Kepler também havia observado as manchas em 1607, mas utilizando uma câmara escura. Pretendendo registrar o trânsito do planeta Mercúrio e, sem querer correr o risco de perder tal efeméride, Kepler pediu a um assistente que iniciasse as observações do Sol quatro dias antes da data prevista para o fenômeno. Kepler e o seu assistente utilizaram câmaras escuras diferentes e, no dia previsto, foi Kepler quem registrou uma mancha solar, mas a interpretou como sendo o trânsito do planeta que ele já esperava (Casanovas, 1997).

Isso é um fato curioso, pois mesmo sem conhecer a existência de manchas solares, Kepler, no ano seguinte, iria afirmar que o Sol girava em torno do seu eixo, na obra *Astronomia Nova* (Kepler, 1992, p. 386). Embora não tivesse evidências empíricas dessa rotação, ele acreditava que esse movimento era emanado do Sol até os planetas, conferindo-lhes o movimento em suas órbitas.

Kepler se correspondia com o pai de Fabricius e já sabia das observações das manchas solares feitas pelo correspondente e o filho dele quando tomou conhecimento do relato de Scheiner, em 1611. Ele ficou contente em saber que Fabricius estava correto em suas observações e também por saber que tal descoberta poderia confirmar a sua teoria de rotação solar. Concordava com Fabricius a respeito do fato das manchas estarem na superfície solar, provando geometricamente que Scheiner estava errado ao considerar o comportamento das manchas no limbo ou borda do disco solar (Casanovas, 1997).

Também há relatos de observações das manchas solares pelo inglês Thomas Harriot no período entre 1610 a 1613. Escritos encontrados no século XVIII em uma propriedade do astrônomo continham cerca de duas centenas de desenhos dessas manchas (Casanovas, 1997). Harriot, assim como Fabricius, Galileu e Scheiner, se utilizou do "recém-inventado"² telescópio, também conhecido à época por *occhiale* (Galilei, 1964a), *tubus* ou *perspicillum batavicum* (Casanovas, 1997).

Scheiner, por conta de suas concepções religiosas, era levado a interpretar o fenômeno das manchas solares sob uma visão aristotélica e isso o permitiu a seguir trabalhando com um longo período de observações do fenômeno, enquanto Galileu interrompeu os seus estudos ainda em 1613, por conta da reação dos seus opositores (Engvold; Zirker, 2016). No entanto, no período em que trabalharam de forma concomitante e independente, Galileu e Scheiner fizeram muitas observações das características das manchas que estão em concordância com o que sabemos atualmente.

² Até algumas décadas atrás, a invenção do telescópio era largamente atribuída a Galileu, mas sempre houve uma discussão polêmica envolvendo outros nomes como Jacob Metius of Alkmaar, Sacharias Janssen e Hans Lipperhey. No entanto, a existência de um documento datado de 1608 contendo um pedido de patente dessa invenção em favor de Lipperhey coloca este último em uma situação mais privilegiada, embora, para alguns autores, isso representa um positivismo histórico (Helden, 1977, p. 5, 25). Segundo Biagioli (2006, p. 121), a autoria da invenção do telescópio passou a ter nuances regionais ou nacionalistas, podendo as autoridades locais "[...]emitirem um privilégio (através de uma "carta-patente") a uma pessoa que não era necessariamente o inventor original, mas simplesmente aquela que disponibilizou ou aperfeiçoou essa tecnologia dentro da jurisdição das autoridades que concedem o privilégio."

Scheiner, por exemplo, foi o primeiro a notar o efeito de escurecimento do limbo, onde o disco solar é mais brilhante na região central do que nas bordas, tal que há uma atenuação radial do brilho em direção ao limbo. Galileu negara o fato inicialmente, mas depois mudou sua posição. Ambos descreveram a morfologia das manchas, destacando a parte central mais escura, chamada de *umbra*, e uma parte mais periférica, mais clara, chamada de *penumbra* (Engvold; Zirker, 2016).

Posteriormente, em 1630, o jesuíta alemão publica o livro *Rosa Ursina* onde descreve os seus resultados mais importantes, reconhecendo que as manchas estavam, de fato, na superfície do Sol e que o movimento de rotação da estrela era responsável pela movimentação dessas manchas. Essa mudança de pensamento, não significou que Scheiner tivesse aceitado o heliocentrismo, mas sim adotado uma posição mais progressista, considerando o sistema Tychoiano ou híbrido, em que o Sol, orbitado pelos demais planetas, giraria em torno da Terra. Esse posicionamento o permitiu prosseguir com o estudo do período rotação solar e estimá-lo em 27 dias (Engvold; Zirker, 2016), o que está em concordância com as medidas atuais para essa grandeza.

É importante ressaltar que relatos de observação à olho nu das manchas solares já haviam sido feitos na antiguidade e na idade média, principalmente nas civilizações asiáticas (Yau; Stephenson, 1988) e ganharam uma maior notoriedade no início do século XVII com o uso dos telescópios (Casanovas, 1997; Zahn, 2009). No entanto, essas observações eram explicadas como o trânsito de Mercúrio ou Vênus (Galilei; Scheiner, 2010). Conforme veremos mais adiante, o estudo das manchas e da rotação solar teve que aguardar mais de dois séculos para que contribuições significativas sobre o fenômeno fossem realizadas (Tassoul, 2000, p. 2).

Diante desse breve histórico, chama-nos a atenção essa relação histórica entre as manchas solares e o suposto trânsito de planetas no disco solar. De fato, em seu argumento inicial, Scheiner estava equivocado ao interpretar as manchas solares como corpos transitando a projeção do Sol, ao passo que se tratava de um fenômeno ocorrendo na superfície do Sol, conforme defendido por Galileu e demais cientistas.

No entanto, o argumento inicial de Scheiner pode ser utilizado atualmente para explicar um dos fatores que está associado à variação de brilho que ocorre em estrelas distantes. O trânsito planetário, conforme veremos mais adiante na Seção 1.2, assim como as manchas, pode diminuir o brilho que captamos de uma estrela distante, o que dificulta a distinção desses fenômenos astronômicos.

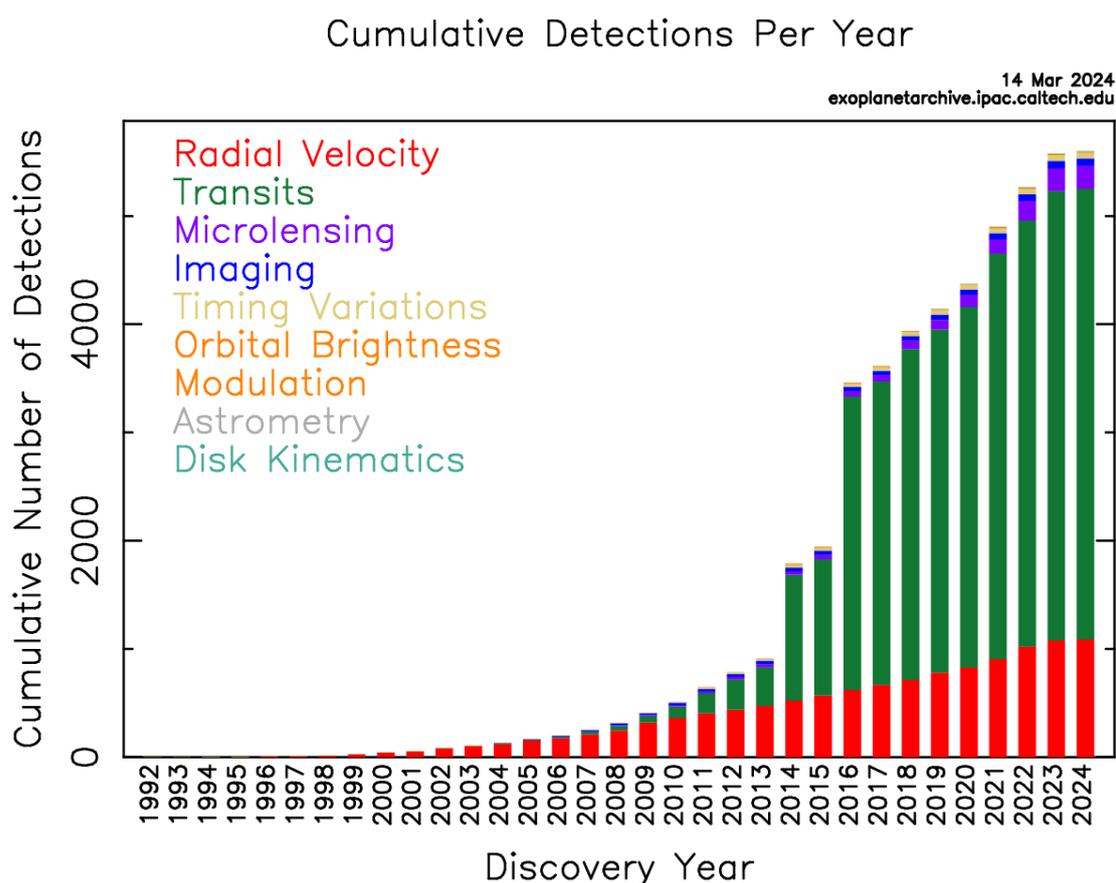
Além disso, a interação gravitacional entre a estrela e o planeta, da qual resultam os efeitos de maré, pode influenciar a atividade magnética estelar, causando, dentre outros efeitos, interferências fotométricas (Vidotto, 2020). Na próxima seção, apresentaremos alguns dados que corroboram a importância do estudo destas interações.

1.2 O que o censo exoplanetário nos diz?

Desde as primeiras descobertas de exoplanetas no início dos anos 90 (Mayor; Queloz, 1995), astrônomos e astrofísicos tem se dedicado a investigar estes corpos celestes e a buscar por aqueles que possam oferecer condições de habitar vida. Desde o lançamento do primeiro observatório espacial, o telescópio Hubble (NASA, 2021c), várias outras missões tem projetado e lançado seus satélites ao espaço a fim de ampliarem nossa visão do cosmos.

Até o dia 14 de março de 2024, o número de exoplanetas confirmados era de 5.599. Na Fig. 3, pode-se observar que o método de trânsito fotométrico é o responsável pelo maior número de detecções, contabilizando 4.166 detecções confirmadas de exoplanetas, correspondendo a cerca de 74% das detecções realizadas (NASA, 2024a).

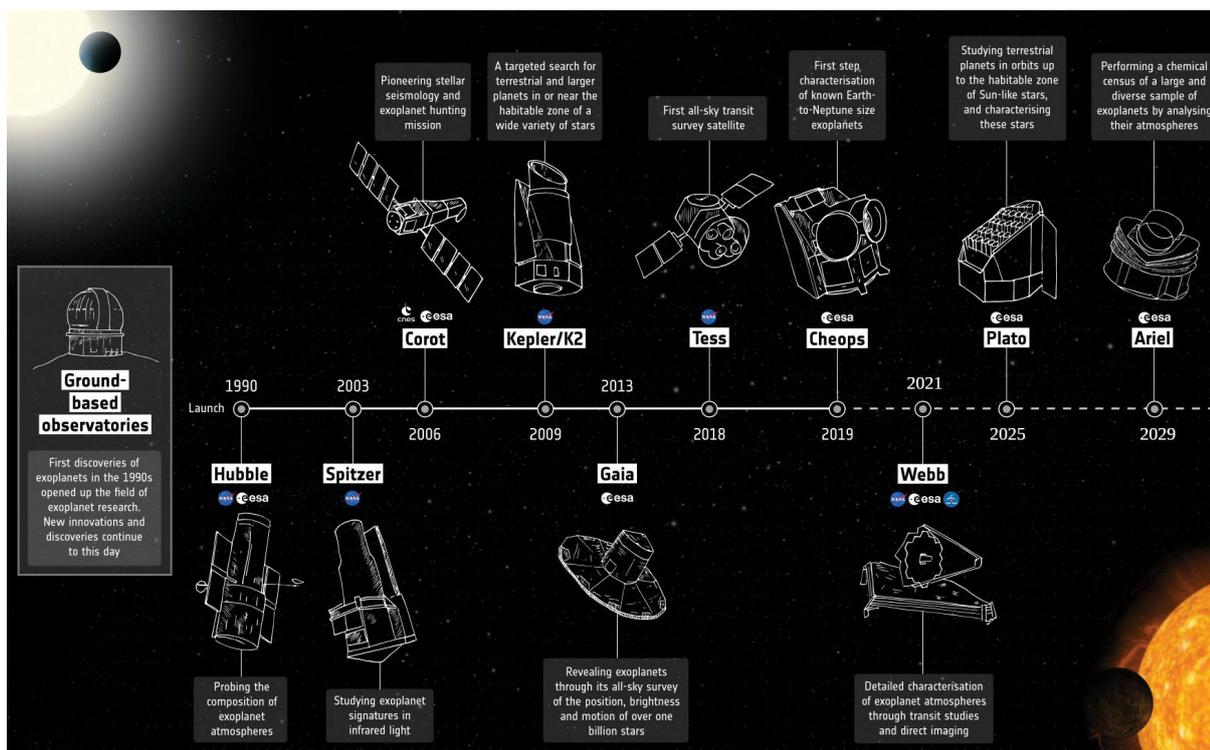
Figura 3 – Distribuição anual acumulada do número de detecções de exoplanetas por diferentes técnicas.



Dentre as várias técnicas de detecção de exoplanetas, o método de trânsito fotométrico se destaca, sendo responsável por cerca de 74% das detecções. Fonte: extraído e adaptado de (NASA, 2024b).

Grande parte dessas detecções se devem as missões espaciais Kepler e *Transiting Exoplanet Survey Satellite* (TESS). Na Fig. 4 podemos observar várias missões espaciais que já foram lançadas e aquelas que já estão sucedendo, como a *James Webb Space Telescope* (JWST), ou que irão sucedê-las nos próximos anos, como a missão *Planetary Transits and Oscillation of stars* (PLATO), por exemplo.

Figura 4 – Cronologia das missões espaciais de exoplanetologia.



Missões das agências espaciais americana e europeia em uma linha do tempo. A grande expectativa é o lançamento da missão *Plato* que está previsto para o ano de 2026.

Fonte: extraído e adaptado de (ESA, 2021).

A missão Kepler, por exemplo, durante o cumprimento de seu objetivo primário, entre os anos de 2009 e 2013, fez um mapeamento estatístico de trânsitos planetários a fim de determinar a frequência de ocorrência de planetas similares a Terra em torno de estrelas pertencentes a nossa galáxia (Borucki *et al.*, 2010). Em 2012, o satélite Kepler havia passado por problemas com uma de suas quatro rodas de reação, uma espécie de giroscópio que controla a orientação do satélite e, conseqüentemente, a direção para qual as suas câmeras apontavam. No entanto, a missão continuou operacional devido ao fato de que as outras três rodas de reação eram suficientes para manter a orientação do satélite. Já em 2013, mais uma das rodas de reação do satélite parou de funcionar e o obrigou a encerrar o seu objetivo primário naquele ano. Pouco mais de um ano após o encerramento, o satélite Kepler voltou a operar mas com limitações, dando início a uma nova missão designada de K2 (Larson *et al.*, 2014) e foi finalizada em 2018 (NASA, 2024d). Até o momento em que essa tese está sendo escrita, a missão Kepler, juntamente com a sua missão estendida K2, detectou um total de 3.327 planetas confirmados (NASA, 2024e).

A missão TESS foi concebida em 2005 a partir de discussões entre alguns pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), mais especificamente do *Kavli Institute for Astrophysics and Space Research* e do *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics* (Ricker, 2021). O lançamento do satélite ocorreu em 18 de abril de 2018 e o período decorrido até o início das operações foi de cerca de 98 dias. Durante esse período de comissionamento,

foram necessários 42 dias para que o satélite se posicionasse em sua órbita final (Ricker, 2021) e, assim, estivesse disponível para fazer os testes e a calibração dos equipamentos (Parker *et al.*, 2018). O satélite iniciou a aquisição de dados científicos no dia 25 de julho de 2018 e a primeira imagem divulgada foi capturada no dia 07 de agosto de 2018 (NASA, 2021a).

Em 04 julho de 2020 a TESS concluiu o seu objetivo primário e agora está em uma fase estendida da missão cuja duração é de 26 meses. Tal fase tem o objetivo de melhorar os dados científicos da missão, incluindo atualizações nos modos de coleção de dados e de seleção de alvos, bem como a realização de observações no plano da eclíptica³ (MIT, 2022).

No primeiro ano da missão estendida (julho de 2020 a julho 2021), as observações foram destinadas ao hemisfério celeste sul novamente, enquanto no segundo ano (julho de 2021 a setembro de 2022), partes do hemisfério celeste norte serão revisitadas e uma faixa de 240° da eclíptica será observada pela primeira vez (MIT, 2022).

As missões Kepler e TESS utilizam o método de trânsito fotométrico para a detecção dos exoplanetas. O método de trânsito fotométrico envolve o monitoramento do brilho das estrelas para eventos periódicos de escurecimento do disco estelar, que ocorrem quando um exoplaneta passa em frente da sua estrela hospedeira a partir do ponto de vista terrestre, causando uma ligeira diminuição temporária no brilho da estrela observada. Com essa técnica é possível obtermos as medidas do raio planetário, a medida de semieixo maior e, conseqüentemente, o período orbital (Perryman, 2018, p. 153). Esta técnica também permite medidas do período de rotação estelar, conforme será discutido na Seção 2.1.

Para obtermos uma medida indireta da massa do exoplaneta, é necessária a medição da velocidade radial da estrela. O método da velocidade radial mede as mudanças Doppler no espectro de uma estrela causadas pela atração gravitacional de um planeta em órbita. A partir dessas mudanças, é possível inferir a massa mínima ou projetada, bem como outras características orbitais do planeta, como o período orbital, a excentricidade e o semieixo maior. Para a medida da massa real do planeta é necessário o conhecimento do ângulo de inclinação orbital obtida pela técnica de trânsito fotométrico, por exemplo (Perryman, 2018, p. 17, 18 e 21).

Quando combinadas, estas técnicas fornecem uma compreensão abrangente dos parâmetros físicos e orbitais de um exoplaneta, desempenhando assim um papel crucial na expansão do nosso conhecimento sobre os sistemas planetários.

Os exoplanetas podem ser classificados por tamanho ou massa. Na classificação de tamanho proposta por Borucki *et al.* (2011) encontram-se quatro nomenclaturas conforme apresentado na Tabela 1: Já em uma classificação por massa, temos mais categorias que se apresentam na Tabela 2. Atualmente, contamos 1.819 planetas gigantes gasosos, 1.938 do tipo Netuno, 1.711 superterras e 203 planetas do tipo Terra (NASA, 2024c).

Os planetas do tipo Júpiter que possuem período orbital inferiores a 10 dias e excedem $0,1M_J$ recebem a designação de Júpiteres quentes (Yee; Winn; Hartman, 2021). Como

³ A eclíptica é uma linha imaginária que representa o caminho aparente do Sol, ao longo do ano, na esfera celeste. Ela também pode ser interpretada como a intersecção do plano da órbita da Terra com a esfera celeste. Trata-se de um círculo máximo que forma um ângulo de $23^{\circ}27'$ em relação ao equador celeste (Filho; Saraiva, 2017).

Tabela 1 – Classificação dos exoplanetas por tamanho do raio.

Designações	Raio planetário (R_{\oplus})
Tipo Terra ou terrestre	$R_p \leq 1,25$
Super-Terra	$1,25 < R_p \leq 2,0$
Tipo Netuno	$2,0 < R_p \leq 6,0$
Tipo Júpiter	$6,0 < R_p \leq 15$

Fonte: extraído e adaptado de Borucki *et al.* (2011).

Tabela 2 – Classificação dos exoplanetas por massa.

Designações	Massa planetária (M_{\oplus})
Sub Terra	$10^{-8} \leq M_p < 0,1$
Tipo Terra	$0,1 < M_p \leq 2$
Super Terra	$2 < M_p \leq 10$
Tipo Netuno	$10 < M_p \leq 100$
Tipo Júpiter	$100 < M_p \leq 10^3$
Super Júpiter	$10^3 < M_p \leq 13M_J$

Fonte: extraído e adaptado de Stevens e Gaudi (2013).

esses períodos de curta duração são um reflexo de um pequeno raio orbital (vide 3ª lei de Kepler), a distância desses planetas até a estrela hospedeira é algo incomum quando se observa os raios médios das órbitas dos planetas no Sistema Solar. Mercúrio, por exemplo, é planeta mais próximo do Sol e tem um período orbital de cerca de 88 dias. Os planetas do tamanho de Júpiter, portanto, desempenham um papel fundamental na compreensão das propriedades e da formação dos sistemas planetários, convertendo-se em verdadeiros laboratórios para o estudo das interações de maré e das interações magnéticas estrela-planeta (Castro-González *et al.*, 2024).

Na Fig. 5 podemos observar como se distribuem os diferentes tipos de exoplanetas com relação ao tamanho e ao semi-eixo maior. Observa-se que a maioria dos exoplanetas possuem órbitas com semieixo maior inferior à 1 ua e cerca de 22% do número atual de gigantes gasosos apresenta uma medida de semieixo maior igual a 0,05 ua. Essas características facilitam as detecções pela técnica de trânsito fotométrico. Corpos massivos como as estrelas e os Júpiteres quentes, cujas dimensões não são nada desprezíveis com relação à distância que os separam, estão sujeitos a volumosos gradientes de força gravitacional, possibilitando intensas formações de marés. Um gráfico semelhante, porem complementar à Fig. 5, pode ser observado na Fig. 6, onde podemos observar diferentes tipos de exoplanetas distribuídos por massa e medida de semieixo maior.

Analisando a Fig. 6, observa-se que a maioria dos planetas de tipos Júpiter e Netuno estão dentro ou próximos ao limite da região de influência magnética da estrela hospedeira. Esse fato reflete a importância do estudo da interação estrela-planeta sob a perspectiva das interações de maré e da interação magnética entre esses corpos. Na próxima seção, apresentaremos uma categorização dos tipos de interação estrela-planeta.

Figura 5 – Distribuição dos exoplanetas segundo a medida do semieixo maior a .

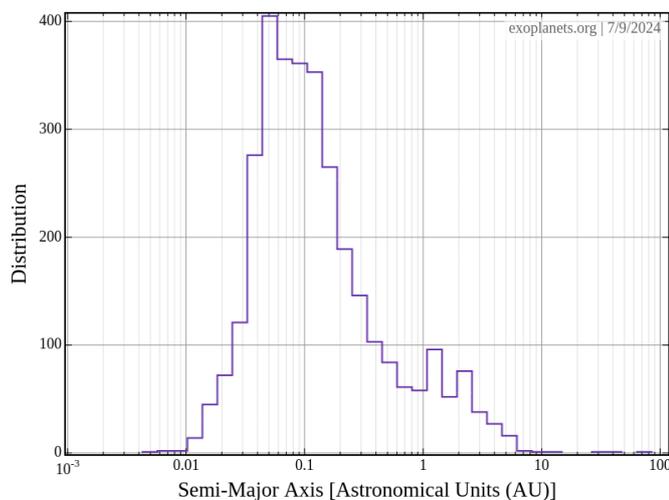


Gráfico gerado no dia 09 de julho de 2024 no website *exoplanets.org*. Observa-se um pico para $a = 0,05$ ua e percebe-se que a maioria dos exoplanetas confirmados até a referida data apresenta medidas de semieixo-maior inferiores a 1 ua. Fonte: extraído e adaptado de (Wright, 2024).

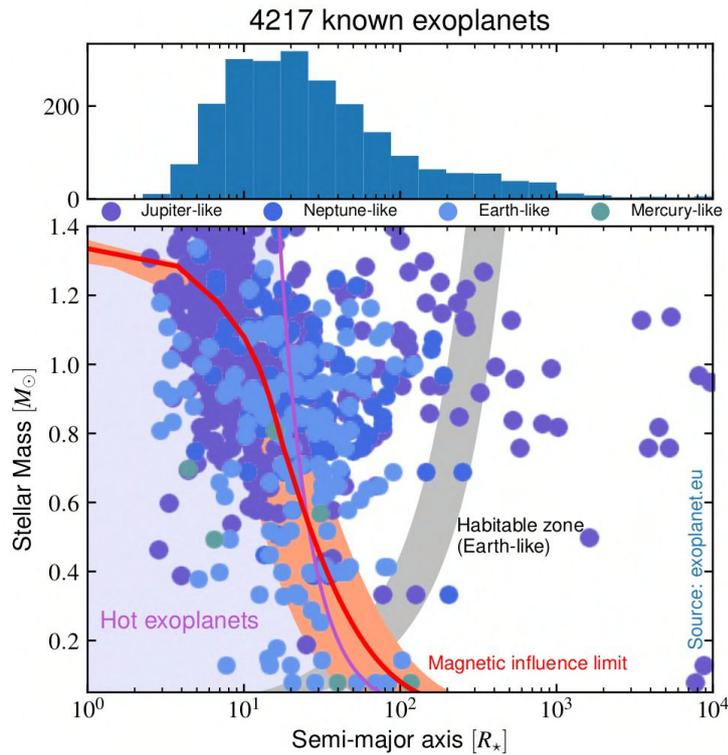
1.3 Os tipos de interações estrela-planeta

As interações estrela-planeta podem levar a assinaturas observáveis tanto na estrela quanto no planeta. Essas interações podem ser categorizadas em diferentes tipos. Conforme mencionado por Vidotto (2020), existem quatro tipos diferentes de interações entre um planeta e sua estrela hospedeira que podem caracterizar um sistema exoplanetário. Na Fig. 7, encontramos uma reprodução do diagrama sugerido por esta autora. Tal diagrama relaciona esses quatro tipos de interações estrela-planeta com as suas consequências e os observáveis a elas associados.

Os resultados de cada uma destas interações podem afetar o planeta ou a estrela de diferentes maneiras, como a migração orbital ou a criação de pontos quentes cromosféricos. Por sua vez, esses efeitos podem produzir uma variedade de observáveis em todo o espectro eletromagnético, variando do rádio ao ultravioleta (UV) e raios X. Basicamente, eles dependem da fase evolutiva, bem como das propriedades físicas do sistema, incluindo a atividade das estrelas hospedeiras, distância orbital e idade (Vidotto *et al.*, 2014). Na verdade, essas interações podem ser subdivididas em dois grupos dependendo de onde ocorrem as assinaturas observáveis.

No primeiro grupo estão as interações onde as assinaturas observáveis estão na estrela. A primeira delas é a interação das marés que surge quando as forças gravitacionais entre a estrela e o planeta causam forças de maré, levando a mudanças na forma da estrela e nas assinaturas observáveis (Strugarek *et al.*, 2014). Em segundo lugar, a interação magnética, por outro lado, é observada quando a estrela e o planeta estão suficientemente próximos (Strugarek *et al.*, 2014). Uma consideração essencial nesta interação é a distância orbital relativa à superfície Alfvén da estrela. Conforme será discutido na Sec. 2.5, a superfície de Alfvén serve como um limite que separa a região do vento estelar onde as forças magnéticas dominam (dentro da superfície) da região onde prevalecem as forças inerciais (além da superfície). Dentro da

Figura 6 – Distribuição de algumas propriedades dos sistemas planetários.



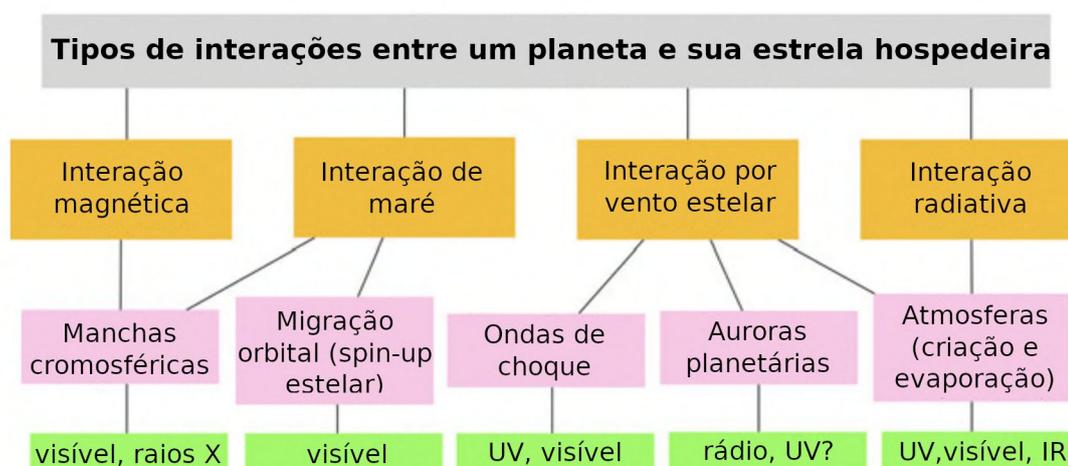
Os planetas dos tipos Júpiter e Netuno constam como os mais numerosos dentre os exoplanetas confirmados. É possível observar um grande espalhamento dos exoplanetas do tipo Júpiter com relação à medida de semieixo maior quando comparamos com o grupo de exoplanetas do tipo Netuno. A linha sólida em vermelho define o limite de influência magnética da estrela, enquanto a região em cinza delimita a região de zona habitável. Fonte: extraído e adaptado de (Strugarek, 2023, p. 3).

superfície de Alfvén, o vento estelar é caracterizado como sub-Alfvénico, e as correntes de "alças" de Alfvén se formam, estabelecendo uma conexão direta entre a estrela e o planeta. Porém, no regime super-Alfvénico, esta ligação direta deixa de existir (Strugarek *et al.*, 2015).

No segundo grupo estão as interações onde as assinaturas observáveis estão no planeta. A interação vento estelar-planeta é outro tipo de interação que pode produzir assinaturas observáveis no planeta. Esta interação pode levar a fenômenos como a emissão de rádio planetária, a formação de choques em arco "laterais" e a migração planetária (Shkolnik; Llama, 2018; Ahuir *et al.*, 2021). Em particular, o vento solar que rodeia a Terra e o vento estelar que rodeia um exoplaneta próximo (Júpiter quente) diferem significativamente. Como os planetas próximos estão "estacionados" dentro da zona de aceleração dos ventos estelares, suas localizações próximas sugerem que eles interagem com ventos de maior densidade, campos magnéticos ambientais mais elevados e velocidades de vento geralmente mais baixas do que a da Terra (Vidotto *et al.*, 2014; Vidotto, 2020). Por último, a interação radiativa estrela-planeta também pode produzir assinaturas observáveis no planeta. Este tipo de interação pode levar a fenômenos como a fotoevaporação da atmosfera planetária e a inflação dos planetas (Luo *et al.*, 2023).

As interações de maré são essenciais para moldar o spin e a evolução orbital de exoplanetas, especialmente aqueles próximos de suas estrelas hospedeiras. Para exoplanetas com

Figura 7 – Diagrama dos tipos de interação estrela-planeta, seus efeitos e observáveis.



Os retângulos na cor laranja elencam as interações estrela-planeta cujos efeitos estão dispostos nos retângulos de cor rosa, sendo relacionados por suas respectivas causas através dos segmentos de reta. Nos retângulos verdes estão indicadas a faixa de frequência do espectro eletromagnético para a observação de cada um desses efeitos. Fonte: Extraído e adaptado de (Vidotto, 2020).

períodos orbitais mais longos (> 10 dias), as marés afetam principalmente a evolução da rotação, enquanto a escala de tempo para a evolução orbital influenciada pela maré é consideravelmente maior. A seleção de um modelo para interações de maré é um aspecto crucial para compreender a evolução de maré desses sistemas.

Teorias estabelecidas, como a teoria clássica de Darwin sobre marés corporais (Darwin, 1879; Darwin, 1880), utilizam séries de Fourier para expandir o potencial gravitacional de um corpo deformado, definindo componentes estáticos e dinâmicos de marés com base na resposta do corpo à influência gravitacional de seu companheiro. Diferentes abordagens como aquelas observadas nos trabalhos de Ferraz-Mello (2013) e Ogilvie (2014), por exemplo, exploram as consequências da teoria de Darwin, em particular, a maré de equilíbrio como uma deformação quase hidrostática da estrela hospedeira sob a ação do potencial de maré gerado por seu planeta. Esses modelos incluem defasagens *ad hoc* para considerar a natureza variável no tempo das interações de maré, oferecendo *insights* sobre a dinâmica complexa que governa a evolução dos exoplanetas (Ferraz-Mello; Rodríguez; Hussmann, 2008).

Além disso, destaca-se a importância de se investigar a superposição das interações de maré com outros mecanismos cuja influência na evolução da rotação estelar já são conhecidos, como a frenagem por ventos magnetizados, e também da aplicação de modelos matemáticos que possam revelar ou caracterizar aspectos de complexidade inerentes à rotação estelar.

1.4 A complexidade na evolução da rotação estelar

Conforme destacado por Carvalho *et al.* (2008), a rotação estelar é um dos observáveis mais relevantes na astrofísica estelar, influenciando a evolução estelar e fornecendo informações valiosas sobre o magnetismo estelar, mistura de abundâncias químicas no interior estelar, interação de maré em binários próximos e engolfamento de anãs marrons e de planetas.

Conforme será discutido no Cap. 2, acredita-se que as estrelas nasçam com alguma taxa de rotação inicial e, dependendo do tipo espectral, sofrem uma diminuição dessa rotação em determinadas fases evolutivas. A maioria das estrelas nascem juntas em aglomerados ou associações, muitas vezes chamadas coletivamente de populações estelares e esses ambientes fornecem laboratórios naturais para o estudo e/ou validação de modelos de estrutura e evolução estelar que incluam a rotação em sua conjuntura (Gossage, 2021).

Segundo Ahuir, Brun e Strugarek (2020), o *spin-down* estelar é o resultado de um processo complexo que envolve rotação, dínamo, vento estelar e magnetismo. É amplamente aceito que a frenagem magnética é um conceito fundamental para entender as perdas de momento angular devido aos ventos estelares magnéticos para várias classes de estrelas, como estrelas de campo da sequência principal e de aglomerados. Esse mecanismo foi inicialmente sugerido por Schatzman (1962), que apontou que rotadores lentos têm envelopes convectivos. Conforme mencionado por Kraft (1967), o comportamento da velocidade rotacional média de estrelas de sequência principal abaixo de $1,5M_{\odot}$ (tipo espectral F0) é impulsionado, principalmente, pelo vento magnético.

Além disso, à medida que uma estrela evolui, as órbitas dos planetas passam por mudanças devido a interações de maré e ocorrem perdas de massa estelar, forças de atrito e arrasto gravitacional, acreção de massa e evaporação sobre ou pelo planeta. A rotação estelar modifica a estrutura da estrela e, portanto, mudam a maneira como esses diferentes processos ocorrem. Por outro lado, as mudanças nas órbitas, subsequentemente, têm um impacto na rotação da estrela (Privitera *et al.*, 2016).

Trabalhos como o de Privitera *et al.* (2016), demonstram que os modelos de rotação estelar sem interações de maré e sem frenagem magnética causada por vento durante a fase de gigante vermelha podem reproduzir bem as rotações de superfície da maior parte das gigantes vermelhas. No entanto, modelos sem nenhuma interação falham ao explicarem rotadores rápidos na parte superior do ramo dessa fase evolutiva, subestimando as velocidades rotacionais. Esses autores sugerem que, para essas estrelas, alguma interação com um corpo celeste companheiro é altamente provável e os atuais modelos estelares de rotação com planetas confirmam que a interação de maré pode reproduzir suas altas velocidades de superfície.

Vários estudos apresentam discrepâncias entre a teoria e as observações da rotação de estrelas, onde as distribuições de velocidade observadas não conseguem ser representadas por uma distribuição Gaussiana ou Maxwelliana com um bom nível de significância (Carvalho *et al.*, 2008; Ourabah, 2022). Tais distribuições estatísticas que se ajustem aos rotadores rápidos

não levam em conta as baixas taxas de rotação. Por outro lado, um ajuste destas distribuições para rotadores lentos não consegue explicar as estrelas de rotação rápida e isso tem levado os pesquisadores à buscarem por outros tipos de distribuições como as leis de potência (Carvalho *et al.*, 2008), que são frequentemente observadas em sistemas complexos (Nussenzveig, 2017, p. 14).

Sistemas complexos é o termo utilizado para designar sistemas que compreendem muitas partes interagentes com a capacidade de gerar uma novo de tipo de comportamento coletivo macroscópico, cujas manifestações são a formação espontânea de estruturas temporais, espaciais ou funcionais distintas (Bertin, 2012; Thurner; Hanel; Klimekl, 2018).

Segundo Thurner, Hanel e Klimekl (2018), tanto a Mecânica Estatística, quanto a Teoria da Informação, geralmente não são aplicadas a maioria dos sistemas complexos pois eles são sistemas estatísticos que não apresentam ergodicidade, independência e estatística multinomial.

Assim, a utilização de estatísticas generalizadas como a de Tsallis (1988), por exemplo, se apresentam como alternativa fundamental para se investigar a complexidade subjacente aos fenômenos associados à evolução da rotação estelar (Soares *et al.*, 2006; Carvalho *et al.*, 2008; Freitas; de Medeiros, 2013; Silva *et al.*, 2023), inclusive no contexto da interação estrela-planeta como proposto nesta tese.

1.5 Objetivo da tese

Conforme discutiremos adiante, as leis de decaimento rotacional para o processo de frenagem magnética com expoentes generalizados, como aquela proposta por Freitas e de Medeiros (2013), são capazes de reproduzir a evolução da rotação de estrelas com campos magnéticos saturados e insaturados. Assim, partimos da hipótese de que esse tipo de generalização possa ser extrapolada para descrever outros aspectos associados à evolução da rotação estelar. Propondo-se que o expoente que controla a evolução da velocidade rotacional possa refletir tanto as mudanças estruturais ocorridas pela estrela em diferentes estágios evolutivos, bem como, indicar o impacto de outros tipos de interações, como as interações de maré ocorrendo em sistemas do tipo estrela-planeta, elaboramos modelos que incorporam observáveis relevantes para se calcular tal expoente. Com essa premissa validada, tornar-se-ia possível investigar a complexidade subjacente à rotação estelar, revelando se há super ou subaditividade, ou mesmo aditividade, nos mecanismos de frenagem magnética e de dissipação de marés. Além disso, a generalização desse expoente regendo a evolução rotacional permite a conveniente compactação dos parâmetros estelares e orbitais que influenciam esses fenômenos.

O presente trabalho propõe a adoção de dois índices para representar o expoente generalizado em circunstâncias onde a evolução da rotação estelar está sujeita apenas à frenagem magnética ou em superposição com as interações de maré decorrentes da presença de planetas, respectivamente. O primeiro deles, chamado de índice de frenagem magnética é utilizado para

investigar o processo de frenagem magnética de estrelas ativas, sem a presença de planetas e em estágios evolutivos tanto na sequência principal, quanto no ramo das gigantes. O segundo, denominado índice de interação de marés, investiga o impacto da interação estrela-planeta no âmbito das marés de equilíbrio, em superposição com os efeitos da frenagem magnética da estrela.

Considerando as mudanças estruturais pelas quais as estrelas passam ao deixar a sequência principal para o ramo das gigantes, espera-se que o índice de frenagem magnética apresente algum tipo de transição entre esses dois estágios evolutivos. Já para o índice de interação de marés, preconiza-se que a superposição das interações de maré ao processo de frenagem magnética possa contribuir para o aumento das correlações de longo alcance, refletidas diretamente pelo aumento dos valores desse índice quando os efeitos das interações de maré forem preponderantes.

Assim, nosso objetivo geral é propor a utilização de um expoente generalizado capaz de descrever a evolução rotacional de estrelas de baixa massa e que possa refletir tanto as mudanças estruturais ocorridas em diferentes estágios evolutivos, bem como, descrever o impacto das interações de maré ocorrendo em sistemas do tipo estrela-planeta. Para atingirmos esse fim, seguimos com os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um modelo que considere a variação do momento de inércia da estrela e que permita calcular o índice de frenagem a partir de observáveis como densidade e período de rotação estelar;
- Selecionar uma amostra contendo estrelas ativas em dois estágios evolutivos diferentes e sem a presença de planetas para considerar somente a frenagem magnética;
- Desenvolver um modelo que considere as interações de maré, em condições de equilíbrio, e que permita calcular o índice de interação de maré a partir de observáveis estelares e orbitais;
- Selecionar uma amostra contendo sistemas planetários com uma única estrela;
- Avaliar o efeito dissipativo das interações de maré e o comportamento do índice de interação de marés com os fatores que influenciam a dissipação de maré;
- Comparar o comportamento do índice de interação de marés entre sistemas mono e multiplanetários, bem como, investigar o seu comportamento em diferentes intervalos de massa estelar;
- Comparar o valores do índice de frenagem magnética com aqueles obtidos para o índice de interação de maré;
- Analisar as relações empíricas girocronológicas em diferentes tipos espectrais e intervalos de massa.

1.6 Escopo da tese

No Capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos para se contextualizar a problemática associada ao presente estudo;

No Cap. 2, realizamos uma revisão bibliográfica de trabalhos que tratam da rotação estelar e os seus efeitos, incluindo o problema da perda de momento angular no contexto da evolução estelar e da interação estrela-planeta;

No Cap. 3, apresenta-se o formalismo não extensivo de Tsallis, discutindo a sua origem e o seu potencial de aplicação na Astrofísica;

No Cap. 4, utilizamos o formalismo não extensivo como uma forma de generalização dos modelos de perda de momento angular através do mecanismo de frenagem magnética e propomos um modelo para o índice de frenagem magnética q_w que inclui a variação do momento de inércia para estrelas de baixa massa, em estágios evolutivos diferentes, sem considerar a influência gravitacional de outras estrelas ou planetas;

No Cap. 5, aprofundamos-nos nas interações de maré no âmbito das marés de equilíbrio. Apresentamos os elementos orbitais relevantes para o desenvolvimento de um modelo que possa relacionar parâmetros orbitais e estelares e discutimos o efeito dissipativo nas marés de equilíbrio;

No Cap. 6, detalhamos os critérios de seleção e caracterizamos as amostras investigadas;

No Cap. 7 apresentamos o modelo não extensivo utilizado para definirmos o índice q_t de maré;

No Cap. 8, analisamos inicialmente o comportamento de um dos modelos em um contexto somente de frenagem magnética. Em seguida, investigamos o impacto das interações de maré na rotação de estrelas através do índice q_t de maré, acrescentando na modelagem, portanto, esse tipo de interação entre estrela e planeta superposta com o mecanismo de frenagem magnética;

E finalmente, no Capítulo 9, apresentamos as nossas conclusões e perspectivas para a continuação desse trabalho.

2 A ROTAÇÃO ESTELAR

Partindo do histórico das primeiras observações da rotação estelar, pretende-se apresentar os principais tópicos necessários à compreensão deste trabalho, introduzindo os conceitos básicos do estudo da rotação estelar e a sua relação com a variabilidade, o magnetismo e a evolução estelar. Também se discute o processo de perda do momento angular estelar e a sua conexão com a interação estrela-planeta.

2.1 Rotação e variabilidade estelar

As estrelas cujo brilho sofre alterações são chamadas de variáveis. Com relação à intensidade, as variações de brilho estelar podem ocorrer tanto em escalas da ordem de algumas partes por milhão como atingir valores de cerca de milhares de vezes ou mais. Essas variações também podem ocorrer em diferentes escalas de tempo, de frações de segundo a séculos (Percy, 2007, p. 48).

Embora ainda se discuta a melhor forma de classificar as estrelas variáveis (Percy, 2007), atualmente, elas podem ser classificadas segundo o mecanismo astrofísico que produz a variabilidade. Segundo os mecanismos intrínsecos, essas estrelas podem ser agrupadas como eruptivas, pulsantes, cataclísmicas e de fontes intensas de raios-X. Já para variabilidade extrínseca, agrupam-se aquelas com eventos de microlente gravitacional, de sistemas eclipsantes e as rotantes (Samus' *et al.*, 2017; AAVSO, 2022).

A rotação estelar é uma propriedade física que, além de permitir a compreensão acerca da formação, da estrutura e da evolução estelar (Rozelot, 2009), (Maeder, 2009, p. v), influencia a evolução de sistemas planetários no que tange a formação de atmosferas e o estabelecimento de condições de habitabilidade nesses planetas (Martins *et al.*, 2020).

Em 1667, o astrônomo francês Ismael Boulliaud sugeriu que a variabilidade observada na luz de estrelas como a *Mira Ceti* poderia ser causada devido à rotação estelar, onde haveria a alternância do brilho entre os hemisférios da estrela com e sem a presença de manchas. Embora essa explicação não esteja correta para explicar o fenômeno que caracteriza alguns tipos de estrelas variáveis, alguns autores (Tassoul, 2000, p. 2) acham que é um fato interessante para demonstrar a origem do interesse dos astrônomos pela rotação estelar.

Em 1750, Thomas Wright também propôs que, além do Sol, outras estrelas deveriam apresentar rotação axial e, mais de cem anos depois, William de Wiveleslie Abney sugeriria que a velocidade de rotação axial dessas estrelas poderia ser determinada pelo alargamento das linhas espectrais devido ao efeito Doppler na medida em que as regiões do limbo estelar se afastassem ou se aproximassem do observador (Soares, 2000, p. 1).

Para velocidades de rotação não-relativísticas, o deslocamento do comprimento de onda λ da radiação produzida no limbo estelar, por conta da rotação de uma estrela com velocidade equatorial v , pode ser escrito em termos da velocidade radial ou projetada $v \sin i$

através de:

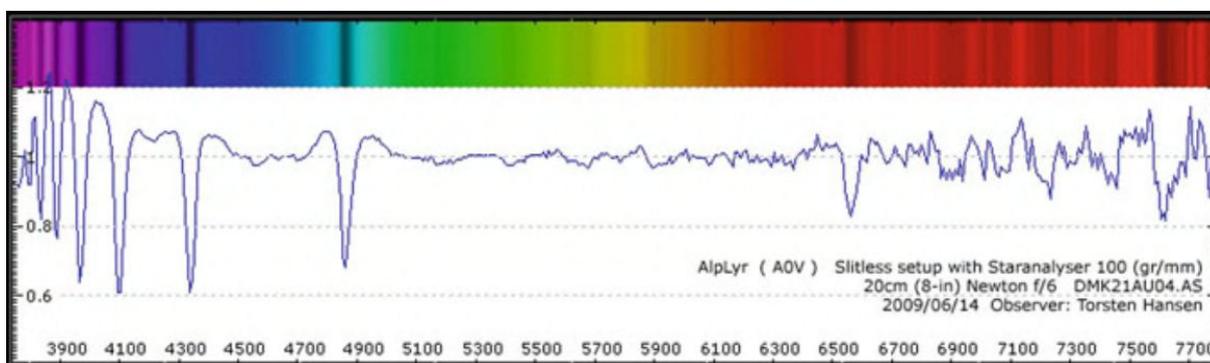
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v \sin i}{c} \quad (2.1)$$

Apesar dos efeitos da rotação serem pequenos¹ no espectro luminoso contínuo, o mesmo não ocorre no espectro discreto (Gray, 2005, p. 458), ou seja, quando são analisadas as linhas espectrais de absorção, por exemplo.

Na Fig. 8, temos um exemplo do espectro de absorção de uma estrela contendo linhas espectrais, as quais Abney se referiu. Na parte superior desta figura, temos uma fotografia do espectro, onde se observam algumas faixas escuras indicando que, para aqueles comprimentos de onda (λ), a luz está sendo absorvida na fotosfera da estrela. Já na parte inferior, temos o gráfico da intensidade da luz absorvida para cada λ . Os picos invertidos indicam a intensidade da absorção de luz ocorrendo para os fótons em pequenas faixas centradas em um dado comprimento de onda, caracterizando uma linha espectral.

Um dado conjunto de linhas espectrais pode ser observado em várias estrelas com temperaturas semelhantes e, por isso, são utilizados para classificar a classe espectral de uma estrela. Estrelas do tipo M, por exemplo, tem temperaturas próximas a 3000K e se caracterizam por apresentarem linhas de átomos neutros (Sr I, Fe I), bandas moleculares do óxido de titânio (TiO) e óxido de vanádio (VO) e um contínuo no vermelho (Carroll, 2017, p. 204, 205), (Maciel, 2018, p. 21, 22).

Figura 8 – Espectro de absorção de uma estrela e as suas linhas espectrais.



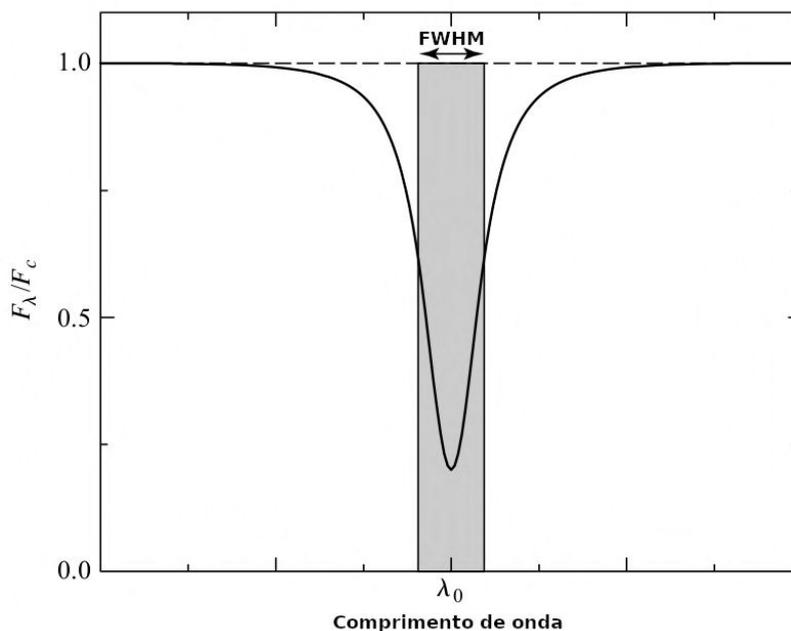
O espectro acima é da estrela Vega (classe espectral A) e foi obtido por uma grade de difração em um telescópio newtoniano amador por Torsten Hansen. Na parte superior da figura, uma fotografia do espectro revela faixas escuras indicando que está havendo uma absorção de luz naquelas regiões. A parte inferior apresenta o quantitativo dessa absorção para cada um dos comprimentos de onda em unidades de Å. Note a forte absorção para os comprimentos 3900 Å, 4000 Å, 4100 Å, 4300 Å (Fe e Ca). Fonte: Extraído de (Harrison, 2011, p. 40).

Abney acreditava que as estrelas em rotação teriam picos de absorção mais largos (faixas escuras mais largas na fotografia do espectro), porém centrados no mesmo comprimento de onda característico λ_0 para aquela linha espectral, conforme ilustrado na Fig. 9. Ao aproximarmos o pico como sendo uma curva gaussiana centrada em λ_0 , a sua largura pode ser medida

¹ Em casos onde a velocidade de rotação se aproxima da velocidade de ruptura, esse efeitos não são negligenciáveis (Gray, 2005, p. 458). A velocidade de ruptura é aquela em que a força inercial produzida pela rotação estelar se iguala à força gravitacional da estrela.

em termos da largura à meia altura do pico (FWHM). O alargamento ($\Delta\lambda$) pode ser caracterizado pela largura à meia altura do pico dividido pelo fator 2,355 ($\Delta\lambda = \text{FWHM}/(2\sqrt{2\ln 2})$).

Figura 9 – Largura de um pico de absorção para uma dada linha espectral.



A largura de um pico de absorção de uma linha espectral posicionada em λ_0 . Ao aproximarmos o formato do pico por uma curva gaussiana, identificamos $\Delta\lambda$ como sendo o desvio padrão (σ) da gaussiana. Fonte: Extraído e adaptado de (Carroll, 2017, p. 267).

No caso da rotação do Sol, por volta dos anos 50 do século XIX, Richard Carrington² e Gustav Spörer, de forma independente, fizeram várias observações do movimento aparente das manchas solares e confirmaram que a camada visível mais externa do Sol não gira como um corpo rígido, ou seja, há uma rotação diferencial na superfície, e que o período de rotação varia em função da latitude da superfície solar.

Por conta disso, para as manchas localizadas em regiões de diferentes latitudes, há diferentes tendências na movimentação. Para aquelas manchas situadas a latitudes abaixo de 20° há uma movimentação preferencial em direção ao equador solar, enquanto para as manchas situadas em latitude maiores a migração tende para o polo da estrela. Esse fenômeno foi confirmado por Jaako Tuominen em 1942 (Tassoul, 2000, p. 2).

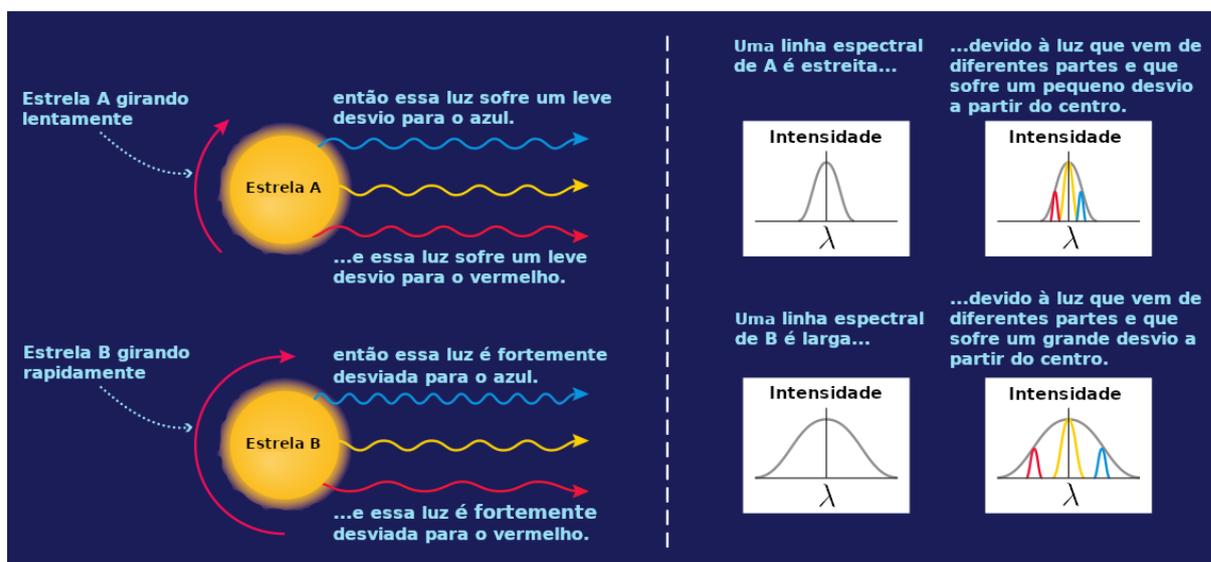
O aprimoramento do espectrógrafo ou espectrômetro permitiu a Hermann Carl Vogel, por volta de 1871, utilizar o deslocamento Doppler do espectro da luz solar (Tassoul, 2000, p. 2) para inferir as velocidades na linha de visada (Townley, 1906, p. 106) da superfície solar, ou seja, a velocidade radial ($v \sin i$) de rotação e verificou que as taxas eram as mesmas que aquelas obtidas por meio das observações das manchas solares (Fosmire, 2014, p. 2238).

² Carrington é considerado o primeiro cientista a associar a ocorrência de fenômenos magnéticos na Terra em virtude da atividade magnética do Sol. Para uma revisão histórica e científica dos trabalhos desse astrônomo, o leitor pode consultar (Oliveira, 2020)

Para as outras estrelas, a ideia de Abney, publicada em 1877, foi criticada por Vogel que alegava que o alargamento deveria acontecer para todas as linhas espectrais, o que na época ainda não era verificado. As linhas espectrais dos metais eram muito tênues para que se pudesse observar o alargamento delas.

Duas décadas após criticar Abney, Vogel observou no espectro de α *Aquiliae* o alargamento de todas as linhas, inclusive a dos metais (Hearnshaw, 2014, p. 117). O efeito Doppler, como sugerido por Abney e verificado por Vogel, explica o alargamento das linhas espectrais, conforme ilustrado na Fig. 10.

Figura 10 – Alargamento de uma linha spectral produzido pela rotação estelar.



Quando uma estrela está em rotação, a luz proveniente de diferentes partes do disco estelar sofre desvios em seus comprimentos de onda. Quando uma parte da superfície girante se aproxima da borda do disco, ou seja, quando a sua velocidade projetada aponta para o observador, o comprimento de onda da luz proveniente daquela região sofre um desvio para o azul. Ao mesmo tempo, uma parte oposta da superfície se afasta da borda do disco estelar com a velocidade projetada no sentido oposto ao observador, fazendo com que a luz emitida daquela região apresente um desvio nos comprimentos de onda em direção a região vermelha do espectro. Fonte: Extraído e adaptado de (Bennett *et al.*, 2013, p. 165).

É importante ressaltar que o alargamento das linhas espectrais também pode ser provocado por outros mecanismos tais como a macro turbulência (Gray, 2005, p. 425) e o alargamento colisional (Carroll, 2017, p. 270).

Após o trabalho de Vogel, há vários outros trabalhos que se dedicaram ao estudo da rotação estelar e estes foram citados por (Soares, 2000, p. 2), mas conforme esse autor, o primeiro estudo sistemático de rotação estelar fora realizado por Shajn e Struve no trabalho intitulado *On the Rotation of the Stars*, publicado em 1929 (Shajn; Struve, 1929 apud Soares, 2000).

Além disso, Struve teria sido o primeiro a sugerir a orientação aleatória dos eixos de rotação das estrelas (Struve, 1945 apud Soares, 2000). Esse trabalho de Struve iria influenciar Chandrasekhar ao propor a distribuição de velocidades rotacionais (Chandrasekhar; Münch, 1950 apud Cordeiro, 2018), permitindo que a média e a média quadrática da velocidade equatorial

pudessem ser determinadas a partir dos valores médios da componente $v \sin i$ (Soares, 2000, p. 2), medidos a partir das observações.

Entre os anos de 1950 e 1960, as medidas de velocidade rotacional projetada eram limitadas pela única técnica de observação disponível (espectroscopia por grades de difração ou por prismas (Hearnshaw, 2009, p. 36)) e as observações para esta finalidade se restringiam a estrelas com massa superiores a $1,5M_{\odot}$ tanto na sequência principal, quanto pós sequência principal (Tassoul, 2000, p. 4).

Atualmente, a rotação de uma estrela pode ser medida a partir de técnicas espectroscópicas, interferométricas, de determinações de abundância química, astrosismológicas e fotométricas. Na tabela 3, apresentamos uma comparação entre algumas dessas técnicas (Bouvier, 2013).

Tabela 3 – Comparativo de técnicas de medição de velocidade de rotação estelar.

Quesito	Espectroscopia	Fotometria	Interferometria	Sismologia
Grandeza	$v \sin i$	$P_{rot}, dP_{rot}/d\theta$	$v, dv/d\theta$	$P_{rot}, \Omega(r)$
Precisão	$\approx 10\%$	$\approx 0,1-10\%$	$\approx 10-30\%$?
Aplicação	todas as estrelas	estrelas com manchas	estrelas próximas e brilhantes	estrelas brilhantes
Limitações	resolução espectral	duração e taxa de amostragem das curvas de luz	estrelas com rotação rápida	curvas de luz
Instrumentos	ESO/HARPS, VLT/Flames	mosaicos de CCD; CoRoT, Kepler	ESO/VLTI; GSU/Chara	CoRoT, Kepler

Fonte: Extraído e adaptado de (Bouvier, 2013, p. 144).

A técnica de fotometria de abertura ou simplesmente, fotometria, consiste em fazer uma série de registros do fluxo luminoso de um objeto durante um grande intervalos de tempo, construindo uma série temporal chamada de curva de luz³.

As curvas de luz permitem: a medição de distância de supernovas ou estrelas variáveis pulsantes, a extração de propriedades estelares de binárias eclipsantes, a observação de eventos de microlentes causados por exoplanetas e por objetos compactos, tais como estrelas de nêutrons ou buracos negros na galáxia e também permitem a observação de fenômenos de trânsito fotométrico ocasionados por exoplanetas (Hartman; Bakos, 2016). Na seção 1.2 detalharemos o sistema fotométrico utilizado pelas missões KEPLER e TESS.

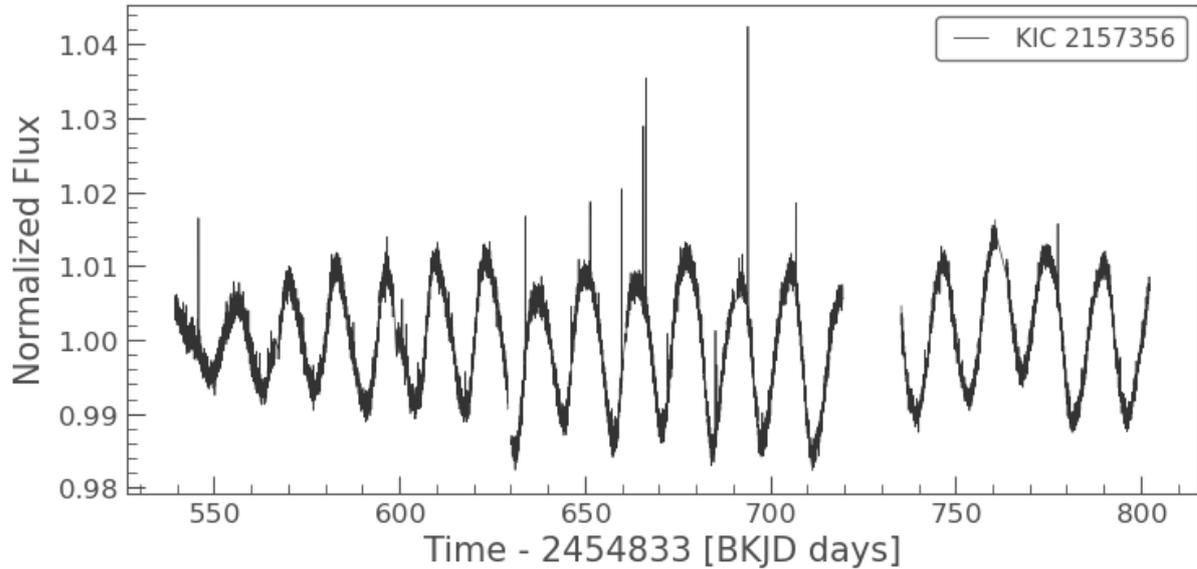
Observando a Tab. 3, nota-se que o período P_{rot} de rotação estelar de estrelas com manchas pode ser medido por fotometria. Conforme explicaremos na seção 2.4, as manchas são indicativos de atividade magnética e, juntamente com outros tipos de inomogeneidades fotosféricas, contribuem para a variabilidade estelar.

A rotação estelar provoca mudanças na área projetada das inomogeneidades do brilho superficial, o que concorre para a modulação rotacional do fluxo óptico. Além disso,

³ Uma curva de luz é uma série temporal de medições do fluxo luminoso ou da intensidade luminosa.

a própria evolução dessas inhomogeneidades contribuem para as variações de fluxo luminoso (Lanza, 2016). Na Fig. 11, observamos uma curva de luz de uma estrela do tipo M, modulada por um sinal aparentemente senoidal causado pela presença de manchas.

Figura 11 – Curva de luz de uma estrela rotante.



Curva de luz da estrela KIC 2157356 observada pela missão Kepler. Note que há algumas interrupções na série temporal. O gráfico foi obtido através através da biblioteca lightkurve (Cardoso *et al.*, 2018) com os dados exportados do arquivo público do Barbara A. Mikulski Archive Space Telescope (MAST)(MAST, 2021).

As oscilações do fluxo em torno da linha de base (fluxo igual a 1) indicam a modulação. Podemos analisar essa curva de luz no espaço de frequências a fim de obter o(os) período(os) característicos de rotação das manchas. Isso é realizado por meio da construção de um *periodograma*, um estimador útil na análise espectral de séries temporais (Morettin; Tolo, 2006, p. 203).

O periodograma de *Lomb-Scargle* (Lomb, 1976; Scargle, 1982) é muito utilizado em Astronomia, e vem sendo aplicado para a detecção e caracterização de periodicidade em séries temporais amostradas de forma desigual ou com interrupções. Tal periodograma é um método que permite o cálculo de um estimador de densidade de potência de espectral semelhante ao método de Fourier (VanderPlas, 2018).

Para uma série temporal formada por N medidas de $X_i \equiv X(t_i)$ obtidas nos instantes t_i com $i = 1, \dots, N$, com média nula e variância σ^2 , o periodograma de Lomb-Scargle (P_{LS}) é calculado a partir de:

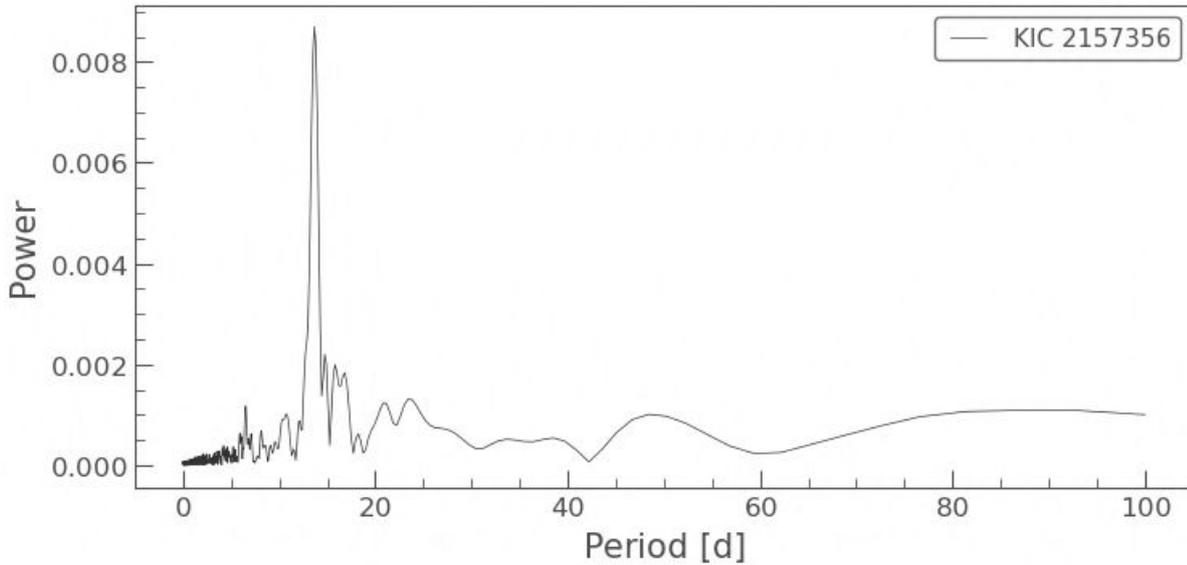
$$P_{LS} = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{\left[\sum_{i=1}^N X_i \cos \omega(t_i - \tau) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \cos^2 \omega(t_i - \tau)} + \frac{\left[\sum_{i=1}^N X_i \sin \omega(t_i - \tau) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \omega(t_i - \tau)} \right\}. \quad (2.2)$$

O periodograma indica a potência espectral para os sinais periódicos contidos na curva de luz. Aplicando-se um algoritmo de construção do periodograma de Lomb-Scargle para a curva de luz

apresentada na Fig. 11, podemos mensurar o período de rotação da estrela.

Na Fig. 12, é apresentado um periodograma de Lomb-Scargle obtido por um método da biblioteca *lightkurve*, onde observamos que existe um pico pronunciado para o período de 13,7 dias. Esse valor é próximo daquele obtido para a estrela KIC 2157356 por McQuillan e colaboradores (McQuillan; Aigrain; Mazeh, 2013). Uma vez obtido o período de rotação,

Figura 12 – Periodograma de Lomb-Scargle para a curva de luz de KIC 2157356.



Periodograma de Lomb-Scargle obtido por meio da biblioteca *lightkurve* (Cardoso *et al.*, 2018) com a curva de luz da estrela KIC 2157356 exportada do arquivo público do Barbara A. Mikulski Archive Space Telescope (MAST)(MAST, 2021).

juntamente com a medida do raio da estrela (R_{\star}), podemos estimar o módulo da velocidade equatorial ($v = \Omega R_{\star}$) através da equação:

$$P_{rot} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R_{\star}}{v}. \quad (2.3)$$

Para a estrela KIC 2157356, com raio $R_{\star} = 0,44R_{\odot}$ (Gaidos *et al.*, 2018; Gaidos *et al.*, 2016), a Eq. 2.3 nos dá $v = 1,6\text{km/s}$.

Conforme discutido anteriormente, as manchas estelares se movimentam devido à rotação da estrela. No caso do Sol, observa-se que a aparição dessas manchas é um processo cíclico. Na Fig. 13, podemos observar os registros anuais do número de manchas solares observadas entre os anos de 1700 e 2005.

Devido às manchas, a irradiância total do Sol sofre uma modulação. Na Fig. 14 podemos observar esse comportamento. Diante do que foi apresentado nesta seção, percebe-se que a variabilidade estelar influencia fortemente o fluxo luminoso de uma estrela. Na Tabela 3, vimos que a fotometria oferece uma maior precisão quando comparada a outras técnicas que medem grandezas relacionadas à rotação estelar. Segundo Sulis e colaboradores, a fotometria de alta-resolução que está embarcada nas principais missões espaciais não é limitada pelo ruído dos

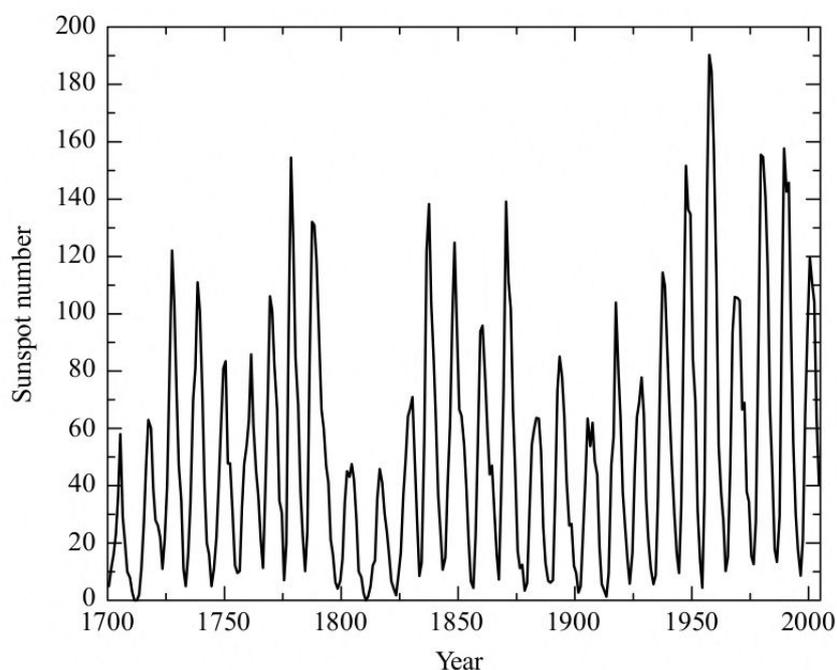
instrumentos mas sim pela variabilidade estelar e isso prejudica a detecção de trânsitos planetários (Sulis *et al.*, 2020).

Estrelas com massa semelhante ao Sol, mesmo estando em calma, apresentam variabilidade decorrente dos fenômenos de granulação e oscilações de natureza sismológicas em pequenas escalas de tempo (inferiores a 1 dia). Os sinais chegam a apresentar variações de várias dezenas de partes por milhão (ppm) em períodos de minutos (Sulis *et al.*, 2020). Os fenômenos associados à esse tipo variabilidade ocorrem em diferentes partes da atmosfera estelar. Na próxima seção, examinaremos a estrutura da atmosfera solar, vista como um modelo, permitindo-nos inferir mais sobre outras estrelas anãs da sequência principal.

2.2 A atmosfera solar

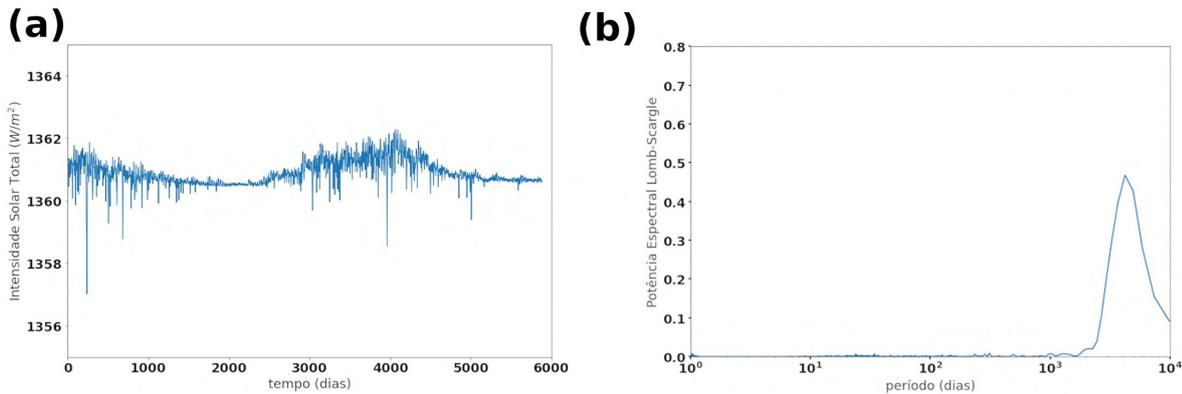
A radiação eletromagnética emitida pelas estrelas nos permite conhecer várias propriedades físicas e químicas desses corpos celestes. A partir de técnicas fotométricas é possível medir o fluxo luminoso e, baseado nessa grandeza, obter a luminosidade ou brilho de uma estrela, por exemplo. Vários processos podem influenciar a luminosidade da estrela e, conseqüentemente, o fluxo medido na Terra. Dentre esses processos, destacamos as manchas estelares.

Figura 13 – Registros do número de manchas solares entre os anos 1700 e 2005.



Analisando o gráfico podemos perceber que o aparecimento das manchas solares é cíclico. Em tempos de calma solar, não há um número significativo de mancha, o que corresponde aos vales da curva. Na medida em que a atividade magnética do Sol se intensifica, começa a ocorrer um aumento expressivo do número de manchas, atingindo um valor máximo, correspondente aos picos. A distância entre dois máximos ou dois mínimos consecutivos é de cerca de 11 anos (cerca de 4015 dias).Fonte: Extraído de (Carroll, 2017, p. 381).

Figura 14 – A irradiância total do Sol registrada durante um ciclo de atividade.



(a) A irradiância total do sol oscila próximo ao valor da constante solar ($1360\text{W}/\text{m}^2$) e sofre uma modulação. (b) O periodograma de Lomb-Scargle aplicado à série temporal da irradiância total do sol apresenta um pico próximo a 4000 dias (≈ 11 anos). Os dados da irradiância solar, referentes ao período de fev/2003 a fev/2020 foram extraídos de (SOHO, 2021) e analisados pelo autor por meio do método *LombScargleFast* da biblioteca *gatspy* (VanderPlas, 2022). Fonte: elaborada pelo autor.

A maior componente do espectro visível da radiação produzida pelo Sol se origina em uma região específica da atmosfera solar, chamada de fotosfera (Gray, 2005, p. 1). Trata-se da camada mais interna da atmosfera solar (Schrijver; Zwaan, 2000, p. 1), com cerca de 400km de espessura e que apresenta um gradiente de temperatura e de densidade (Ryden, 2010, p. 172).

Na Fig. 15 podemos observar um perfil radial das camadas que compõe a atmosfera do Sol, as zonas de transporte de energia e o núcleo dessa estrela. Além da fotosfera, a cromosfera e a coroa compõem a atmosfera solar.

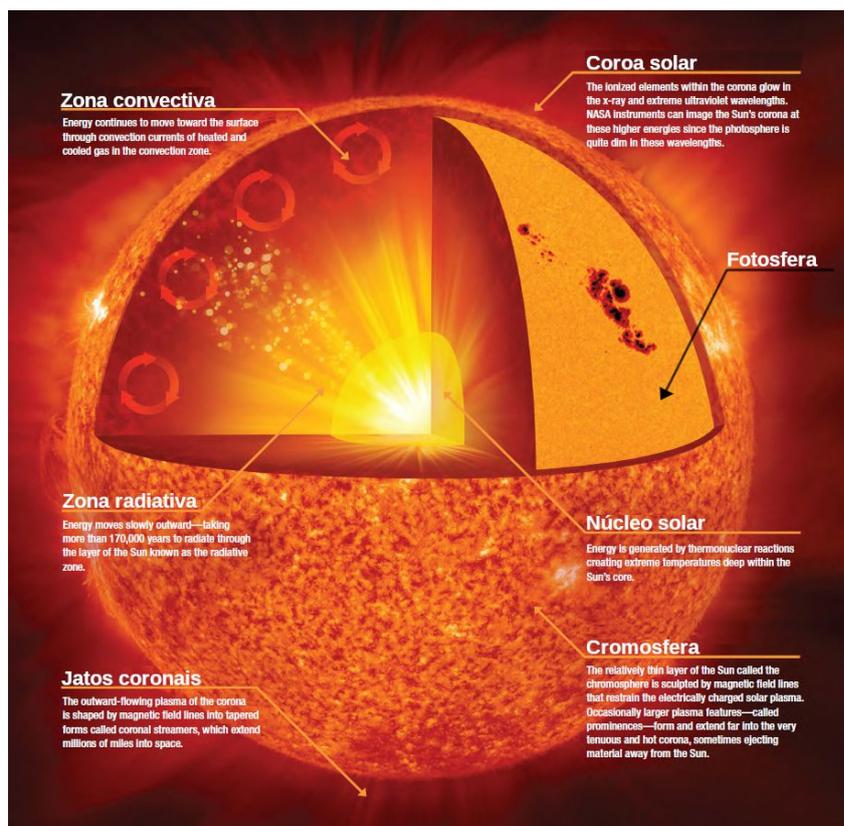
A partir do núcleo solar, encontramos um gradiente decrescente de temperatura e pressão até uma parte da atmosfera solar. No núcleo, região da estrela onde ocorre a fusão nuclear a uma temperatura de cerca de 16 milhões de kelvins (Maciel, 2018, p. 50), temos a produção de energia que sustenta a estrela. Os fótons produzidos pelas reações nucleares são absorvidos e emitidos repetidamente, transportando a energia pelo plasma adjacente e produzindo uma região de equilíbrio radiativo, chamada de zona radiativa.

Com o decréscimo da temperatura e da pressão, a energia passa a ser transportada pelo movimento de massas do plasma aquecido interiormente para regiões mais externas, ou seja por convecção, delimitando uma região em que o processo de transporte de energia convectivo é dominante: a zona convectiva.

O gradiente de temperatura e de densidade com relação à profundidade da fotosfera também produz um gradiente do grau de ionização dos átomos de hidrogênio que, por sua vez, produz uma opacidade ao longo dessa camada (Ryden, 2010, p. 173). O processo é controlado, principalmente, pela quantidade de íons H^- que consegue se formar em tais gradientes.

Na base da fotosfera, a sua região mais profunda, a temperatura é maior e permite que ocorra com maior probabilidade a ionização dos átomos de hidrogênio após se chocarem com os elétrons livres, levando os átomos a adquirirem um segundo elétron. Esses íons possuem uma

Figura 15 – A estrutura do Sol.



Partindo do núcleo solar, temos as zonas radiativas e convectivas e as camadas que compõem a atmosfera solar: fotosfera, cromosfera e coroa solar. Na fotosfera, destacam-se regiões escuras cujas temperaturas são menores que temperatura da fotosfera, delimitando as manchas solares. Fonte: Extraído e adaptado de (NASA, 2021b).

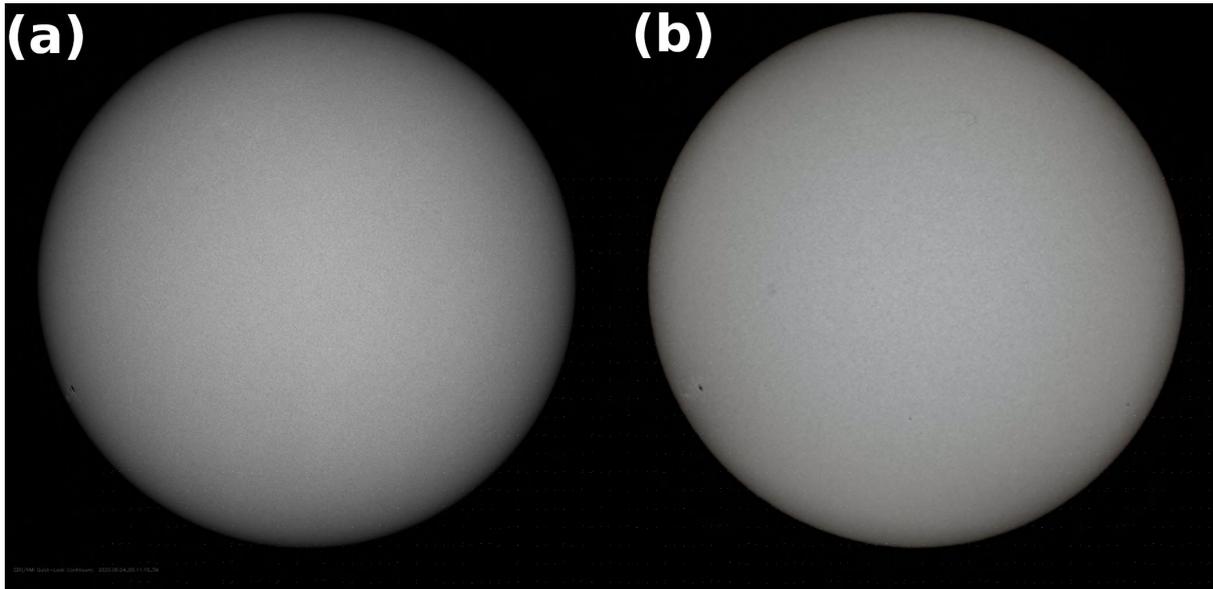
energia de ionização de $0,75\text{eV}$ para o segundo elétron que é facilmente fornecida por fótons com comprimentos de onda nas regiões do ultravioleta, visível e uma parte do infravermelho. Dessa forma, os íons H^- absorvem esses fótons nas partes mais inferiores da fotosfera, produzindo a opacidade. Conforme a profundidade diminui, ou seja, atinge-se o topo da fotosfera, a densidade e a temperatura diminuem, diminuindo as colisões e a produção de H^- e, assim, os fótons podem emergir do topo da fotosfera (Ryden, 2010, p. 173).

Assim, quando observamos o Sol pelo telescópio, seja pela projeção da imagem em um anteparo, pela ocular acompanhada de um filtro solar ou mesmo pela imagem formada por um sensor do tipo *charge-coupled device* (CCD) ou *complementary metal-oxide semiconductor* (CMOS) comum, estamos observando a fotosfera solar. Na Fig. 16, temos duas imagens obtidas por esses fótons produzidos na região visível do espectro eletromagnético. As imagens foram obtidas na mesma data e flagram uma mancha solar emergindo da borda esquerda do Sol.

Observando-se com maior atenção as imagens (a) e (b) da Fig. 16, percebe-se que há um leve escurecimento da fotosfera na região das bordas em relação a parte central do disco solar. Tal região foi definida na seção 1.1 como o limbo solar.

A diminuição do gradiente de pressão e temperatura continua pela fotosfera até o início da cromosfera, conforme podemos observar na Fig. 17. A cromosfera é uma camada

Figura 16 – Astrofotografias solares obtidas na região visível do espectro.



O Sol observado no dia 04 de junho de 2020 através de duas perspectivas: (a) Astrofotografia do tipo *HMI Intensity-gram* obtida pelo *Solar Dynamics Observatory* (SDO) da NASA obtida às 00h11min (UTC). (b) Astrofotografia amadora obtida às 16h04min (19h04min UTC) pelo autor através um telescópio Maksutov 127mm de abertura com filtro solar Baader e uma câmera fotográfica DSLR semi-profissional em foco primário. A exposição foi realizada com 1/800s em ISO 100 em frame único. Como as imagens foram obtidas por uma diferença de cerca de 19 horas, a mancha solar aparece mais à frente em (b), saindo do limbo solar. Fonte: Extraídos do SDO (NASA, 2020) e do arquivo de astrofotografias do autor, respectivamente.

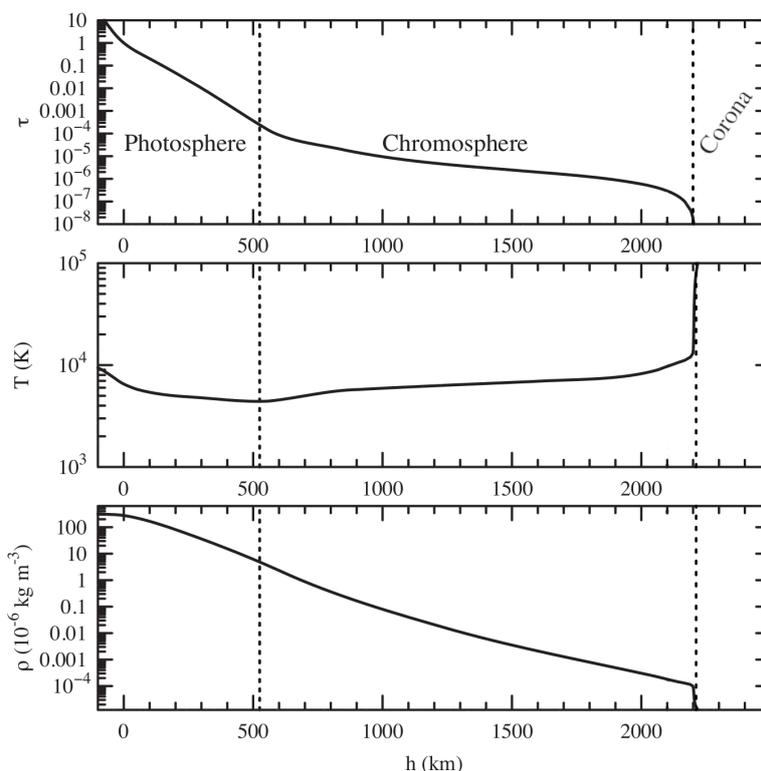
com emissão expressiva na linha de $H\alpha$ (656,3nm) e temperatura ascendente conforme nos distanciamos do núcleo solar, chegando atingir em seu topo uma temperatura $T \approx 60.000K$. No painel central da Fig. 17, vemos que a densidade na cromosfera é menor do que na fotosfera, dando continuidade ao comportamento decrescente monótono que se inicia na base da fotosfera.

O estabelecimento de um limite exato entre cada uma dessas camadas não é tarefa fácil, mas estima-se que a cromosfera tenha uma espessura de 1.000 a 2.000 km. Nessa camada, os efeitos de ondas sonoras produzidas no interior solar são observáveis pois elas atingem amplitudes da ordem de grandeza de suas velocidades, perdendo a capacidade de propagação senoidal e formando uma frente de choque que realiza um trabalho termodinâmico aumentando a temperatura do gás nessa camada (Mullan, 2009, p. 234).

Na Fig. 18, observamos o topo da cromosfera solar no comprimento de onda de 304Å (ultravioleta extremo) e a presença de estruturas que parecem se desprender da atmosfera solar. Além daquelas indicadas pelas setas, temos as espículas, que são menores e formadas por estreitas colunas de gases com comportamento dinâmico (Ryden, 2010, p. 178).

Os filamentos e as proeminências são vistas diferentes do mesmo tipo de fenômeno. No limbo solar, o plasma assumindo o formato de grandes arcos recebe o nome de proeminência, enquanto no restante do disco solar, com orientações paralelas à linha de visada, é visualizado como se fosse um filamento, o que justifica o nome dessa estrutura. As regiões mais claras na Fig. 18, com fortes emissões nas linhas de Ca e K, são as *plages* e estão espacialmente associadas às

Figura 17 – Perfis de opacidade, temperatura e densidade do Sol.



Partindo da base da fotosfera ($h = 0\text{km}$) em direção ao topo da atmosfera ($h > 2000\text{km}$) solar, observamos nos painéis (de cima para baixo) o comportamento da opacidade (em termos da profundidade óptica), da temperatura e da densidade do plasma. Fonte: Extraído e adaptado de (Ryden, 2010, p. 179).

manchas solares (Mullan, 2009, p. 223).

Após a cromosfera, encontramos a coroa solar, camada mais externa da atmosfera solar onde a temperatura continua a se elevar, atingindo milhões de kelvins. A coroa solar emite radiação com intensidade de cerca de um milhão de vezes menos intensa do que a fotosfera e por isso a sua visualização é possível durante um eclipse solar. Acredita-se que as ondas sonoras que atravessam a cromosfera promovam o depósito de energia em formato de calor na coroa solar, mas outros mecanismos também são investigados. O fato é que a coroa solar apresenta uma temperatura que supera 10^6K e é capaz fornecer energia cinética suficiente para que o plasma estelar possa ser ejetado da estrela na forma de ventos estelares (Ryden, 2010, p. 178), conforme veremos na Seção 2.5.

É importante salientar que essa configuração estrutural é válida somente para estrelas com massa semelhantes a do Sol ($M \approx 1,0M_{\odot}$). Nas estrelas da sequência principal com massa acima de $1,0M_{\odot}$, a zona radiativa é mais externa do que a zona convectiva, enquanto para as estrelas com massa inferior, a zona convectiva é mais externa (Kippenhahn; Weigert; Weiss, 2012, p. 258). Estrelas de tipo tardio na sequência principal, de classes espectrais K e M, por exemplo, tem zonas convectivas mais externas e mais espessas (Hansteen, 2009, p. 195).

Já havíamos mencionado que é na fotosfera solar onde observamos as manchas solares e, conforme apresentado nesta seção, também notamos a presença de outras estruturas

Figura 18 – Cromosfera solar.

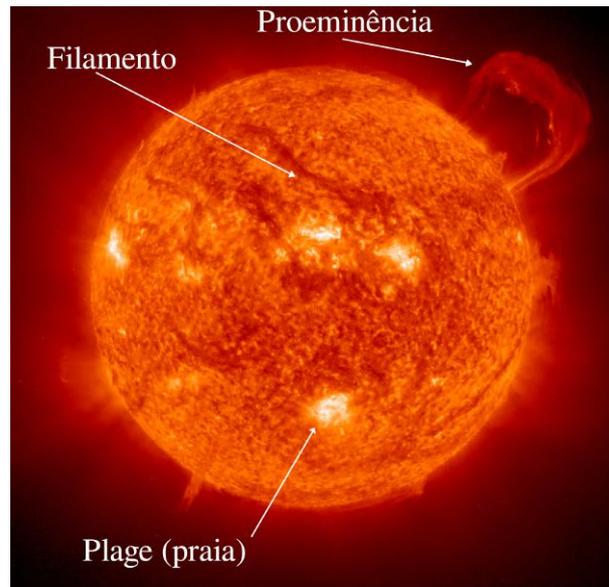


Imagem obtida no ultra-violeta extremo (304Å) mostrando os principais tipos de estruturas que são visualizados na cromosfera solar. Essa imagem foi obtida em 14 de setembro de 1999 pela sonda SOHO. Pode-se observar duas grandes proeminências, uma delas vista de lado, no limbo solar, enquanto a outra aparece perpendicular ao disco solar, mas paralela à linha de visada, diminuindo assim o fluxo luminoso observado nessa direção. Essa diminuição do fluxo captado pela câmera produz na imagem uma estrutura com brilho menor do que o restante do disco solar que se assemelha a um filamento. Fonte: Extraído e adaptado de (Ryden, 2010, p. 176) e (NASA, 2023a).

nas demais camadas da atmosfera solar, no entanto, até o momento, omitimos a causa dessas estruturas: o magnetismo estelar. Na seção 2.4 apresentaremos os mecanismos responsáveis pela produção do magnetismo estelar, mas antes, se faz necessária uma pequena digressão sobre a rotação de corpos não rígidos.

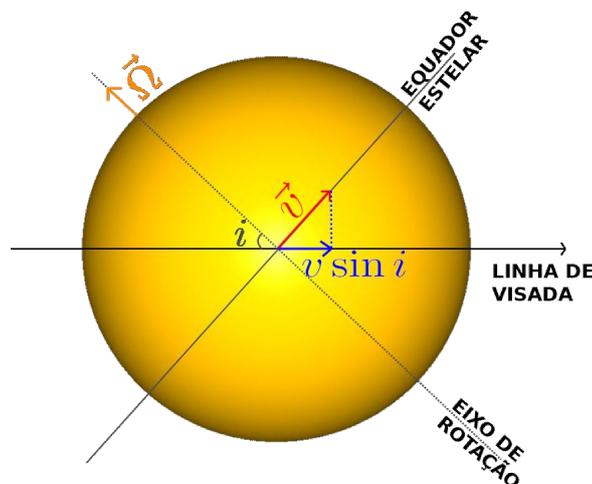
2.3 Rotadores não rígidos

Para iniciarmos o estudo da rotação estelar, faz-se necessário definir e apresentar algumas grandezas. Na Fig. 19, temos uma representação de uma estrela girando de forma idealizada, como um corpo rígido, com velocidade angular Ω em torno de um eixo orientado $\hat{\Omega}$ projeta a sua velocidade tangencial equatorial v na direção com que a observamos (linha de visada). Sendo i o ângulo de inclinação do eixo de rotação com relação a linha de visada, a componente de velocidade tangencial naquela direção será $v \sin i$, onde v é o módulo da velocidade no equador estelar. Na subseção 2.1, mencionamos que a componente da velocidade equatorial de rotação $v \sin i$ é um outro tipo de observável que nos permite sondar a velocidade rotacional de uma estrela. Além dessas grandezas, definimos o período rotacional P_{rot} , o momento de inércia I_0 e o momento angular J .

Considerando a estrela com uma geometria esférica, seu momento de inércia pode ser escrito na forma:

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2, \quad (2.4)$$

Figura 19 – Projeção da velocidade de rotação.



Quando o eixo de rotação da estrela não é perpendicular à linha de visada, a velocidade tangencial que conseguimos medir é a componente $v \sin i$ (Tassoul, 2000, p. 11). Fonte: elaborada pelo autor.

em que M é a massa da estrela e R o seu raio. Já o momento angular estelar pode ser escrito na forma:

$$J = I_0 \Omega. \quad (2.5)$$

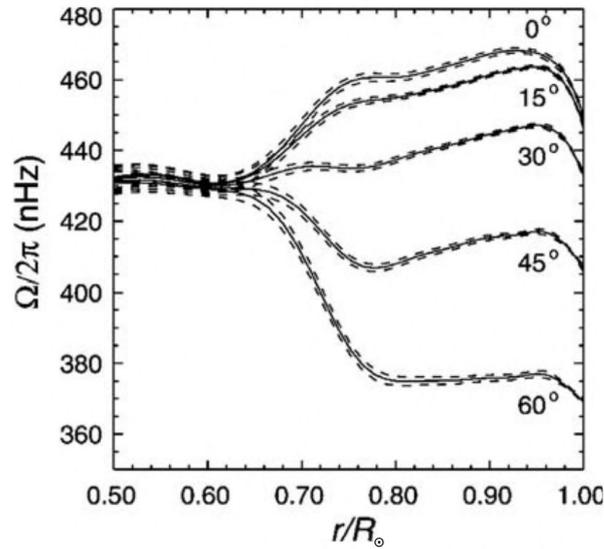
No entanto, na subseção 2.1, mencionamos que a velocidade de rotação das manchas solares apresenta uma dependência com a latitude em que elas estão situadas no disco solar. Tal fato permite-nos inferir que o Sol não rotaciona inteiramente como um corpo rígido, apresentando uma rotação diferencial. No entanto, a rotação diferencial não ocorre somente na fotosfera. A Fig. 20 apresenta a dependência radial da frequência média de rotação para diferentes latitudes do disco solar a partir de uma distância r a partir do centro da estrela. Obviamente, as medidas de frequência das camadas mais internas não realizadas através das observações das manchas, sendo, portanto, provenientes da heliosismologia (Meyer-Vernet, 2007, p. 136).

Observando a Fig. 20, podemos extrapolar o comportamento da frequência rotacional para camadas esféricas com raios inferiores a $0,5R_{\odot}$, constatando que cessa a sua dependência com a latitude e que a parte mais interna do Sol gira como um corpo rígido (Meyer-Vernet, 2007, p. 136).

Um corpo fluido como uma estrela, girando em torno do seu próprio eixo, pode estar sujeito à deformações inerciais e também devido a interações gravitacionais com outros corpos massivos na sua vizinhança. O efeito inercial é mais expressivo em estrelas com altas velocidades de rotação, como é o caso de Achernar, cuja velocidade equatorial pode chegar a 300 km/s (Souza *et al.*, 2014). A expansão do equador e o achatamento dos polos faz com que um corpo auto gravitante perca a sua forma esférica e assuma o formato de um esferoide (Fig. 22 (a)).

Um esferoide é um corpo produzido pela rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos característicos. Para descrever matematicamente o potencial gravitacional produzido

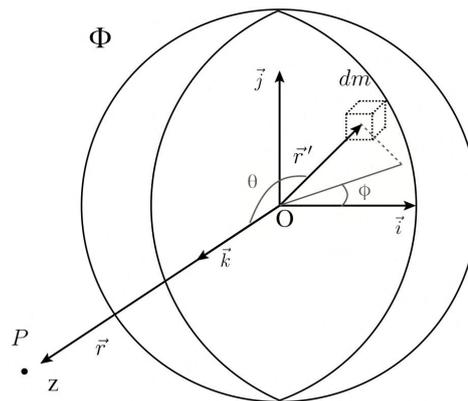
Figura 20 – Perfil radial da frequência de rotação do Sol.



O Sol apresenta uma pronunciada rotação diferencial para as camadas mais externas enquanto que, para regiões mais internas, comporta-se como um corpo rígido. Nas camadas mais externas, como a fotosfera, por exemplo, a região equatorial da estrela se move mais rapidamente do que a região polar. Fonte: Extraído e adaptado de (Meyer-Vernet, 2007, p. 136).

por esses corpos, iremos, inicialmente, considerar o potencial gravitacional $\Phi(\mathbf{r})$ gerado por uma distribuição contínua de massa com simetria axial expressa por $\rho(\mathbf{r}')$ conforme mostrado na Fig. 21. O procedimento adotado será o mesmo utilizado por Fitzpatrick (2012). O potencial

Figura 21 – Distribuição de massa com simetria axial.



Representação de uma distribuição contínua de massa com simetria em torno do eixo Z em um sistema de coordenadas esféricas de origem O. Fonte: Extraído e adaptado de (Ilisie, 2020, p. 159).

gravitacional produzido por essa distribuição de massa em um ponto P é então expresso pela Eq. (2.6):

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (2.6)$$

em que \mathbf{r}' indica a posição de um elemento de massa $dm = \rho(r', \theta', \phi')d^3\mathbf{r}'$. O elemento de

volume $d^3\mathbf{r}'$ em coordenadas esféricas é escrito como $d^3\mathbf{r}' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$. Considerando a simetria axial em torno do eixo Z , a densidade é independente de ϕ e, por isso, podemos reescrever a Eq. (2.7) na forma:

$$\Phi(r, \theta) = -G \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \rho(r', \theta') \sin \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\phi' d\theta' dr'. \quad (2.7)$$

Avaliando a integral mais interna em ϕ' no intervalo de 0 a 2π , a partir do teorema do valor médio para integrais (Leithold, 2002, p. 341), temos que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\phi' = \langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle 2\pi, \quad (2.8)$$

permitindo, assim, reescrevermos a Eq. (2.7) na forma:

$$\Phi(r, \theta) = -2\pi G \int_0^\infty \int_0^\pi r'^2 \rho(r', \theta') \sin \theta' \langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle d\theta' dr'. \quad (2.9)$$

O termo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ pode ser convenientemente escrito como sendo:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2}, \quad (2.10)$$

em que o produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ é dado por:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r\hat{\mathbf{r}} \cdot r'\hat{\mathbf{r}}' = rr' (\sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta'). \quad (2.11)$$

No caso de simetria azimutal, a escolha de ϕ é indiferente, assim, para o caso em que $\phi = 0$, a Eq. (2.11) se reduz a:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r\hat{\mathbf{r}} \cdot r'\hat{\mathbf{r}}' = rr' (\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta'). \quad (2.12)$$

Representando o termo entre parênteses na Eq. (2.12) por F :

$$F = \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta', \quad (2.13)$$

pode-se reescrever a Eq. (2.10) na seguinte forma:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left[1 - 2\frac{r'}{r}F + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.14)$$

Supondo $r > r'$, podemos expandir a Eq. (2.14) em uma série de Taylor para os termos em r'/r , obtém-se que:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)F + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3F^2 - 1) + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \right], \quad (2.15)$$

restando-nos, portanto, avaliar o termo $\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle$. Através da Eq. (2.15), podemos escrever:

$$\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle = \frac{1}{r} \left[\langle 1 \rangle + \left(\frac{r'}{r} \right) \langle F \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3\langle F^2 \rangle - 1) + \mathcal{O} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right]. \quad (2.16)$$

Como esses valores médios são avaliados no intervalo azimutal (de 0 a 2π , conf. a Eq. 2.8), temos que $\langle 1 \rangle = 1$, $\langle \cos \phi' \rangle = 0$ e $\langle \cos^2 \phi' \rangle = 1/2$, bem como, os seguintes valores médios para os termos em F (Eq. 2.13):

$$\langle F \rangle = \sin \theta \sin \theta' \underbrace{\langle \cos \phi' \rangle}_{=0} + \cos \theta \cos \theta' = \cos \theta \cos \theta', \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \langle (\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')^2 \rangle \\ &= \langle (\sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' + 2 \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' \cos \theta \cos \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta')^2 \rangle \\ &= \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \underbrace{\langle \cos^2 \phi' \rangle}_{=1/2} + 2 \sin \theta \sin \theta' \underbrace{\langle \cos \phi' \rangle}_{=0} \cos \theta \cos \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta) (1 - \cos^2 \theta') + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta') + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{3} \cos^2 \theta - \frac{3}{3} \cos^2 \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \right) + \frac{2}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{3} \cos^2 \theta - \frac{3}{3} \cos^2 \theta' + 3 \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{3}{2} \cos^2 \theta' + \frac{9}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{3}{2} \cos^2 \theta' + \frac{9}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \theta' \right) \right], \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim, a Eq. (2.16) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle &= \frac{1}{r} \left[\langle 1 \rangle + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta \cos \theta' \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considerando que os polinômios de Legendre $P_n(x)$ são definidos por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right], \quad (2.20)$$

em que n identifica a ordem do polinômio e varia no intervalo $[0, +\infty[$. Assim, os três primeiros polinômios são:

$$P_0(x) = 1, \quad (2.21)$$

$$P_1(x) = x, \quad (2.22)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad (2.23)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \quad (2.24)$$

Esses polinômios são mutuamente ortogonais e, por isso, satisfazem à condição:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \int_0^\pi P_n(\cos \theta)P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\delta_{nm}}{n + 1/2}, \quad (2.25)$$

em que δ_{nm} é a função delta de Dirac ($\delta_{nm} = 1$, quando $n = m$ e $\delta_{nm} = 0$, quando $n \neq m$). Como os polinômios de Legendre formam um conjunto completo, qualquer função de x bem definida no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ pode ser representada pela soma ponderada dos polinômios de Legendre, assim como qualquer função de θ , bem definida no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, pode ser expressa por um somatório ponderado de $P_n(\cos \theta)$.

Concluimos que a Eq. (2.19) pode ser expressa por:

$$\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta'), \quad (r > r') \quad (2.26)$$

$$\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta'), \quad (r' > r) \quad (2.27)$$

que nos possibilita reescrever a Eq. (2.9), na forma:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (2.28)$$

em que $\Phi_n(r)$ é escrita como sendo:

$$\begin{aligned} \Phi_n(r) = & \frac{-2\pi G}{r^{n+1}} \int_0^r \int_0^\pi r'^{n+2} \rho(r', \theta') P_n(\cos \theta) \sin \theta' d\theta' dr' \\ & - 2\pi G r^n \int_r^\infty \int_0^\pi r'^{1-n} \rho(r', \theta') P_n(\cos \theta) \sin \theta' d\theta' dr'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Utilizando novamente a completeza dos polinômios $P_n(\cos \theta)$:

$$\rho(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (2.30)$$

e a Eq. (2.25) permite que escrevamos $\rho_n(r)$ na forma:

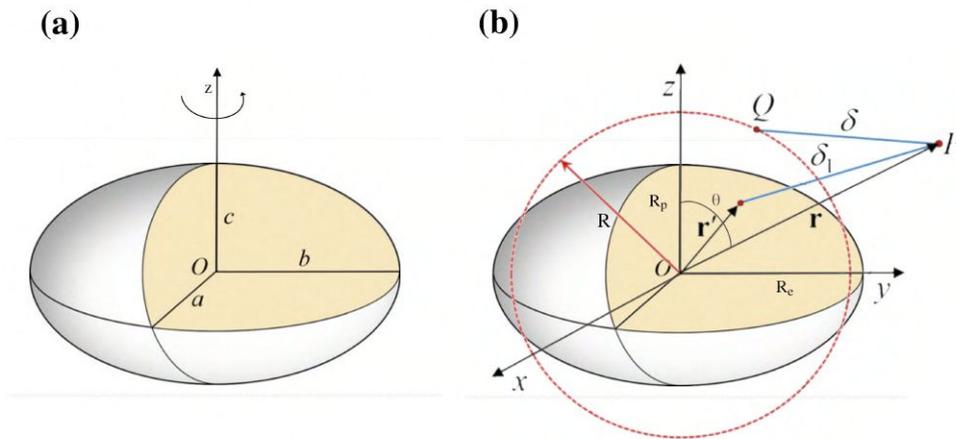
$$\rho_n(r) = (n + 1/2) \int_0^\pi \rho(r, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.31)$$

e, assim, a Eq. (2.29) pode ser, finalmente, reescrita na forma:

$$\Phi_n(r) = -\frac{2\pi G}{(n+1/2)r^{n+1}} \int_0^r r'^{n+2} \rho_n(r') dr' - \frac{2\pi G r^n}{n+1/2} \int_r^\infty r'^{1-n} \rho_n(r') dr'. \quad (2.32)$$

Assim, a Eq. (2.32) nos permite determinar o potencial gravitacional $\Phi(r, \theta)$ gerado por uma distribuição de massa com simetria axial. Para escrevermos o potencial produzido por um esferoide de densidade γ uniforme e raio médio R , consideramos que o esferoide foi produzido pela rotação de uma elipse em torno do eixo z conforme apresentado na Fig. (22(a)).

Figura 22 – Geometria esferoidal.



Corpos não rígidos em rotação estão sujeitos à deformação causada por efeitos inerciais. Para um corpo auto gravitante em rotação ele pode assumir um formato esferoide que, matematicamente, pode ser concebido como uma elipse rotacionada em torno do z . (a) Um esferoide homogêneo com semieixos de medidas a , b e c . (b) Uma superfície imaginária esférica de raio R pode ser aproximada da superfície do esferoide. Um ponto P está a uma distância r a partir da origem O e a sua direção é representada pelo ângulo θ formado a partir do eixo z . As distâncias R_p e R_e representam os raios do esferoide no polo e no equador, respectivamente. Fonte: Extraído e adaptado de (Bannikova, 2022, p. 247)

Na Fig. 22(a) observamos que o esferoide possui três semieixos característicos com as respectivas medidas: a , b e c . No caso em que $a = b$ e $a > c$, o esferoide passa a ser chamado de oblato, assumindo o formato apresentado na Fig. 23(a), enquanto que se $a = b$ mas $a < c$ o esferoide passa a ser denominado de prolato (Fig. 23(b)). A medida da deformação que leva à forma esferoidal pode ser expressa pela grandeza ϵ , sendo denominada de *ellipticity*⁴ ou *oblateness*. Ela é definida em termos das distâncias R_p e R_e que representam os raios do esferoide no polo e no equador, respectivamente:

$$\epsilon = \frac{R_e - R_p}{R}. \quad (2.33)$$

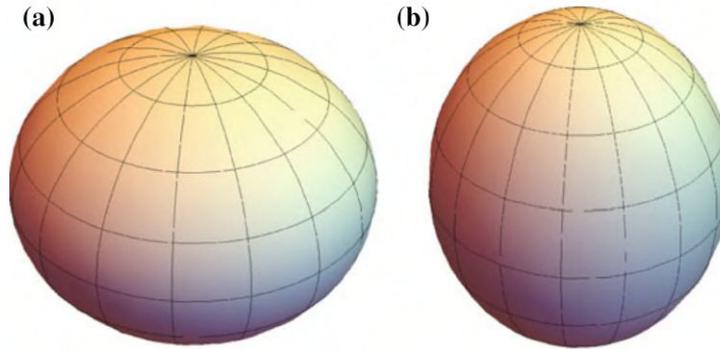
em que R é o raio médio do esferoide que possui a mesma medida do raio da esfera de aproximação (círculo em vermelho na Fig. 22(b)).

Considerando que a superfície de equilíbrio do esferoide satisfaça a relação (Fitzpatrick, 2012, p. 29):

$$r = R_\theta = R \left[1 - \frac{2}{3} \epsilon P_2(\cos \theta) \right] \quad (2.34)$$

⁴ Esse termo, assim como *flattening*, é encontrado em vários textos que tratam do assunto.

Figura 23 – Tipos de esferoides.



A depender da relação entre os parâmetros os esferoides podem assumir as formas: (a) oblato (b) prolato. Fonte: Extraído e adaptado de (Bannikova, 2022, p. 253)

em que r é a distância do ponto à origem O , $P_2(\cos \theta)$ é o polinômio de Legendre de segunda ordem (Eq. (2.23)) para o ângulo θ , conforme apresentado na Fig. 22(b). Estando P sobre a superfície de equilíbrio do esferoide (Chandrasekhar; Roberts, 1963), $r = R_\theta(\theta)$. A Eq. (2.34) pode ser interpretada como uma aproximação em segunda ordem para r expandido em termos dos polinômios de Legendre (Hofmann-Wellenhof, 2005, p. 77) e em primeira ordem para ϵ .

Observando a Fig. 22(b), percebe-se que para $\theta = 0$, o ponto P estará situado sobre o eixo de simetria z . Caso P esteja sobre a superfície do esferoide, temos que $r = R_\theta$ e, como $P_2(x = \cos 0) = 1$ (conforme a Eq. 2.23), a Eq. (2.34) permite que escrevamos o raio R_p na forma:

$$R_p = R \left(1 - \frac{2}{3} \epsilon \right), \quad (2.35)$$

enquanto o raio no equador do esferoide pode ser obtido para o caso em que $\theta = \pi/2$, sendo expresso por:

$$R_e = R \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon \right). \quad (2.36)$$

Partindo das Eqs. (2.28) e (2.29) e fazendo algumas multiplicações simultâneas nos numeradores e denominadores de alguns dos seus termos, podemos obter a seguinte expressão:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad (2.37)$$

em que M é a massa total do esferoide que coincide com a massa da esfera de aproximação, ou seja, $M = (4\pi/3)\gamma R^3$. O fator J_n é então expresso por:

$$J_n = \frac{-2\pi R^3}{M} \int_0^r \int_0^\pi \left(\frac{r'}{R} \right)^{n+2} \rho(r', \theta') P_n(\cos \theta) \sin \theta' d\theta' \frac{dr'}{R}, \quad (2.38)$$

Como $\rho(r', \theta') = \gamma$ e a parte radial é calculada com r no intervalo $0 \leq r \leq R_\theta(\theta)$, J_n é reescrito

como sendo:

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{3}{2} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \int_0^{R_\theta(\theta)} \frac{r'^{n+2}}{R^{n+3}} dr' \sin \theta' d\theta' \\ &= -\frac{3}{2(n+3)} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \left[\frac{R_\theta(\theta)}{R} \right]^{n+3} \sin \theta' d\theta'. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Através da Eq. (2.34), esse resultado torna-se:

$$J_n \approx -\frac{3}{2(n+3)} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \left[P_0(\cos \theta) - \frac{2}{3}(n+3)\epsilon P_2(\cos \theta) \right] \sin \theta' d\theta', \quad (2.40)$$

em que o fator J_n tem o seu valor aproximado por conta do truncamento da expansão do termo entre colchetes para a primeira ordem de ϵ . Com o auxílio da Eq. (2.25), considerando a aproximação de primeira ordem em ϵ , percebe-se que o fator J_n é diferente de zero para os casos em que $n = m = 0$ e $n = m = 2$, tal que a Eq. (2.37) se resume a:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM}{R} \left[J_0 \left(\frac{R}{r} \right) + J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.41)$$

em que J_0 , independentemente da forma com que ρ dependa de r' e θ' (desde que ela seja simétrica ao eixo z), é calculado a partir da Eq. (2.38) tal que:

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{2\pi R^3}{M} \int_0^r \int_0^\pi \left(\frac{r'}{R} \right)^2 \rho(r', \theta') P_0(\cos \theta) \sin \theta' d\theta' \frac{dr'}{R} \\ &= -\frac{1}{M} \int_0^r \int_0^\pi \rho(r', \theta') \underbrace{P_0(\cos \theta)}_{=1} \underbrace{2\pi r'^2 \sin \theta' d\theta' dr'}_{dV} \\ &= -\frac{1}{M} \int_0^r \int_0^\pi dM = -1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim, a expressão mais genérica para o potencial gerado por um esferoide com distribuição de massa axialmente simétrica, pode ser escrita na forma:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} + J_2 \frac{GMR^2}{r^3} P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.43)$$

Já para uma distribuição axialmente simétrica e uniforme, $\rho(r', \theta') = \gamma$, o fator J_2 é calculado pela Eq. (2.40), tal que:

$$J_2 = \frac{2}{5}\epsilon, \quad (2.44)$$

possibilitando-nos reescrever, finalmente, a Eq. (2.37), para o potencial gravitacional externo gerado por um esferoide uniforme de massa M , raio médio R e *oblateness* ϵ :

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} + \frac{2}{5}\epsilon \frac{GMR^2}{r^3} P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.45)$$

A Eq. (2.45) nos permite avaliar o potencial do esferoide na superfície ($r = R_\theta$):

$$\Phi(R_\theta, \theta) = -\frac{GM}{R_\theta} + \frac{2}{5}\epsilon \frac{GMR^2}{R_\theta^3} P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.46)$$

e, substituindo-se novamente a Eq. (2.34) em (2.46), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Phi(R, \theta) &= -\frac{GM}{R} \left[1 - \frac{2}{3} \epsilon P_2(\cos \theta) \right]^{-1} + \frac{2}{5} \epsilon \frac{GM}{R} \left[1 - \frac{2}{3} \epsilon P_2(\cos \theta) \right]^{-3} P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&\approx -\frac{GM}{R} \left[1 + \frac{2}{3} \epsilon P_2(\cos \theta) \right] + \frac{2}{5} \epsilon \frac{GM}{R} \left[1 + 2\epsilon P_2(\cos \theta) \right] P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&\approx -\frac{GM}{R} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \epsilon P_2(\cos \theta) - \frac{2}{5} \epsilon \left[1 + 2\epsilon P_2(\cos \theta) \right] P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \\
&\approx -\frac{GM}{R} \left\{ 1 + \left[\frac{2}{3} \epsilon - \frac{2}{5} \epsilon \right] P_2(\cos \theta) - \frac{4}{5} \epsilon P_2^2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \\
&\approx -\frac{GM}{R} \left[1 + \frac{4}{15} \epsilon P_2(\cos \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right], \tag{2.47}
\end{aligned}$$

em que o termo contendo $P_2^2(\cos \theta)$ pode ser negligenciado. Assim, um corpo como uma estrela ou planeta formado por um fluido incompressível de massa M , raio médio R e *oblateness* ϵ produz um potencial $\Phi(r, \theta)$ expresso pela Eq. (2.45).

É importante notar que o potencial gravitacional na superfície de uma estrela, concebida nessas condições, só será constante se a estrela estiver em equilíbrio. Forças gravitacionais tangenciais sendo aplicadas à superfície produzem um desequilíbrio no potencial pois elas não conseguem ser contrabalanceadas pela pressão do fluido que atua perpendicularmente à superfície. Analisando a Eq. (2.47), percebe-se que o equilíbrio na forma esférica só ocorreria quando $\epsilon = 0$. Isso mostra que o formato esferoide corresponde ao estado de equilíbrio resultante da ação de forças adicionais à auto gravidade e à pressão interna do fluido, tais como forças centrífugas devido à rotação ou às interações de maré (Fitzpatrick, 2012, p. 31). Na seção 5.1 discutiremos a contribuição das interações de maré ao potencial gravitacional, mas nesse momento, consideraremos somente o efeito da rotação.

Um ponto material sobre a superfície de um esferoide de massa M , raio médio R e *oblateness* ϵ , girando com velocidade angular Ω em torno do seu eixo de simetria, estando portanto em um referencial não inercial, está sujeito à uma aceleração centrífuga \mathbf{g}_c , conforme mostrado na Fig. 24. Descrevendo \mathbf{g}_c em um referencial que se move juntamente com o esferoide, temos que:

$$\mathbf{g}_c = r\Omega^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_r + r\Omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \tag{2.48}$$

Nesse referencial, a aceleração resultante g é expressa por:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_g + \mathbf{g}_c, \tag{2.49}$$

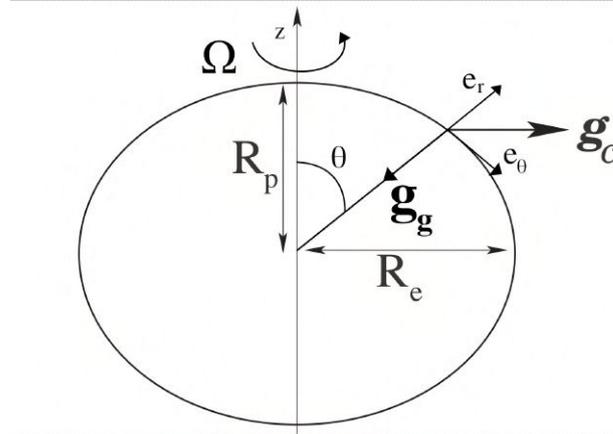
em que $\mathbf{g}_g = -\nabla\Phi$ é a aceleração gravitacional e, semelhantemente, $\mathbf{g}_c = -\nabla\chi$, tal que:

$$\chi(r, \theta) = -\frac{\Omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta = \frac{\Omega^2 r^2}{3} [P_2(\cos \theta) - 1], \tag{2.50}$$

sendo interpretado como um potencial centrífugo (Fitzpatrick, 2012, p. 79). Assim, a aceleração g pode ser representada por:

$$\mathbf{g} = -\nabla(\Phi + \chi). \quad (2.51)$$

Figura 24 – Aceleração centrífuga de um ponto material sobre a superfície de um esferoide em rotação.



A depender da relação entre os parâmetros os esferoides podem assumir as formas: (a) oblato (b) prolato. Fonte: Extraído e adaptado de (Fitzpatrick, 2012, p. 80)

Escrevendo-se o potencial centrífugo $\chi(r, \theta)$ descrito pela Eq. (2.50) na forma:

$$\chi(r, \theta) = -\frac{GM}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \zeta [P_2(\cos \theta) - 1], \quad (2.52)$$

em que o parâmetro adimensional ζ é definido por:

$$\zeta = \frac{\Omega^2 R^3}{3GM}, \quad (2.53)$$

de forma a relacionar a razão entre as acelerações centrífuga e gravitacional em $r = R$. Para o Sol, esse valor é da ordem de 10^{-5} (Meyer-Vernet, 2007, p. 137). Considerando o equilíbrio na superfície do esferoide em rotação, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\Phi(R_\theta, \theta) + \chi(R_\theta, \theta) = c, \quad (2.54)$$

em c é uma constante. Assim, substituindo-se a Eq. (2.34) nas Eqs. (2.43) e (2.52), pode-se reescrever a Eq. (2.54) na forma:

$$-\frac{GM}{R} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\epsilon - J_2\right) P_2(\cos \theta) \right] + \frac{GM}{R} \zeta [P_2(\cos \theta) - 1] \approx c, \quad (2.55)$$

de onde se conclui que:

$$\epsilon = \frac{3}{2} (J_2 + \zeta). \quad (2.56)$$

E conforme a Eq. (2.44), para o caso de um esferoide de densidade uniforme, a *oblateness* na Eq. (2.56) é expressa por:

$$\epsilon = \frac{15}{4} \zeta, \quad (2.57)$$

que, com o auxílio das Eqs. (2.33) e (2.53), permite-no escrever:

$$\frac{R_e - R_p}{R} = \frac{5 \Omega^2 R^3}{4 GM}, \quad (2.58)$$

mostrando que a forma esferoidal é resultado da rotação em torno do eixo de simetria e que a deformação é proporcional ao quadrado da velocidade angular de rotação (Fitzpatrick, 2012, p. 80).

Considerando as Eqs. (2.4), (2.38) para $n = 2$ e (2.44), podemos representar a *oblateness* ϵ de um esferoide de densidade uniforme $\rho(r', \theta') = \gamma$ através de:

$$\epsilon = -\frac{1}{I_0} \int r^2 \gamma (\cos \theta) d^3 \mathbf{r} = -\frac{1}{2I_0} \int r^2 \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) d^3 \mathbf{r}, \quad (2.59)$$

De forma geral, o momento de inércia \mathcal{I}_{\parallel} em relação ao eixo z de um corpo com densidade uniforme γ , em coordenadas esféricas, é dado por:

$$\mathcal{I}_{\parallel} = \int (x^2 + y^2) \gamma d^3 \mathbf{r} = \int r^2 \gamma (1 - \cos^2 \theta) d^3 \mathbf{r}, \quad (2.60)$$

enquanto o momento de inércia \mathcal{I}_{\perp} desse corpo em relação a um eixo perpendicular à z , como o eixo x , por exemplo, se expressa por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\perp} &= \int (y^2 + z^2) \gamma d^3 \mathbf{r} = \int r^2 \gamma (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) d^3 \mathbf{r} \\ &= \int r^2 \gamma \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \int r^2 \gamma (1 + \cos^2 \theta) d^3 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que $\sin^2 \phi$ foi considerado tendo um valor médio igual a $1/2$ em todo o volume integrado. Fazendo-se a diferença das Eqs. (2.60) e (2.61) e comparando-se esse resultado com a Eq. (2.59), percebe-se que ϵ pode ser representado em termos dos momentos de inércia:

$$\epsilon = \frac{\mathcal{I}_{\parallel} - \mathcal{I}_{\perp}}{I_0}. \quad (2.62)$$

A Eq. (2.62), com o auxílio da Eq. (2.4) permite que o potencial gravitacional dado pela Eq. (2.45) seja reescrito em função dos momentos de inércia \mathcal{I}_{\parallel} e \mathcal{I}_{\perp} :

$$\Phi(r, \theta) \approx -\frac{GM}{r} + \frac{G(\mathcal{I}_{\parallel} - \mathcal{I}_{\perp})}{r^3} P_2(\cos \theta), \quad (2.63)$$

em que foram desprezados os termos de segunda ordem. Essa equação corresponde à fórmula de MacCullagh (Lowrie, 2011, p. 82) para o caso em que os momentos de inércia em relação aos eixos perpendiculares ao eixo de simetria são idênticos. O primeiro termo dessa equação é chamado de potencial gravitacional monopolar que é gerado como se toda a massa do esferoide estivesse contida no centro de massa enquanto ao segundo recebe a denominação de quadrupolar que resulta do efeito da rotação sobre a distribuição de massa do esferoide (Fitzpatrick, 2012, p. 116).

Uma vez analisado o efeito inercial que pode influenciar a forma do corpo de uma estrela, devemos considerar agora que o constituinte fluido de uma estrela pode também estar sujeito a movimentos convectivos. Conforme mencionado na Seção 2.2, o Sol, assim como as demais estrelas, é constituído por uma plasma submetido a um gradiente de temperatura e pressão e, por se tratar de um corpo fluido, constata-se a presença de movimentos convectivos. No entanto, em estrelas de alta massa na sequência principal, o comportamento convectivo é bem diferente.

Em uma estrela de baixa massa rotante, o movimento convectivo está submetido a mais um efeito inercial, a força de Coriolis. Essa força atua na turbulência da zona convectiva dessas estrelas fazendo com que ocorra uma redistribuição do momento angular e mudando o comportamento global da rotação estelar, levando assim as camadas mais externas à rotação diferencial que foi evidenciada na Fig. 20. A rotação diferencial é apontada como um dos principais fatores que controla o mecanismo de geração do campo magnético em estrelas como o Sol (Reinhold; Reiners; Basri, 2013). Na próxima seção, analisaremos os tipos de dínamos turbulentos que operam para produzir o magnetismo solar.

2.4 Rotação e Magnetismo estelar

Segundo Mestel (2012, p. 1), o estudo do magnetismo fora da Terra está associado à descoberta do efeito Zeeman e atribuí a Hale o pioneirismo desse campo de estudo pela investigação da existência de campos magnéticos nas manchas solares, embora Bigelow já tivesse especulado que a estrutura da coroa solar observada durante um eclipse solar fosse similar a de linhas de campo magnético de uma esfera magnetizada.

As estruturas apresentadas na Seção 2.2 são de origem magnética e a teoria do dínamo é o modelo mais utilizado para explicar a produção dos intensos campos magnéticos nas estrelas. Ela propõe que o campo magnético estelar seja produzido pelos movimentos de matéria no plasma estelar e, por isso, rotação e magnetismo estelar estão interligados (Rozelot, 2009).

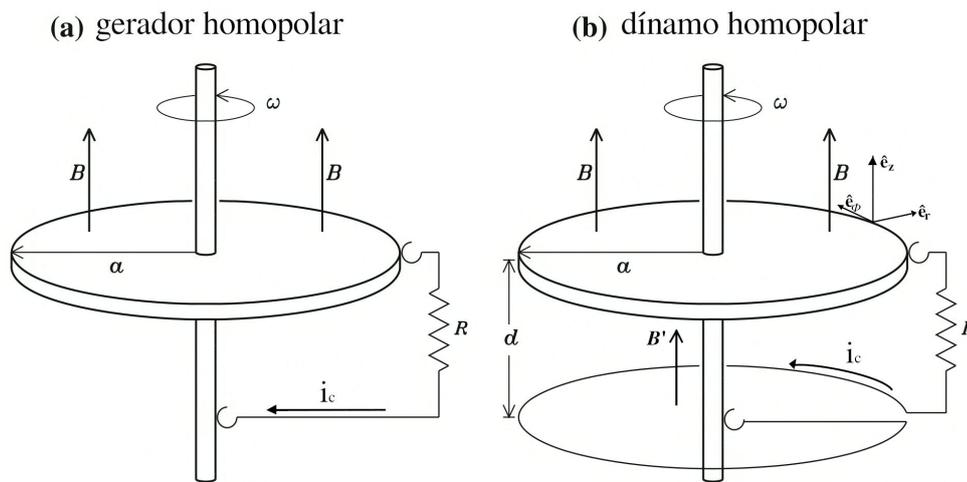
Charbonneau e Sokoloff (2023) afirmam que os estudos sobre o dínamo solar remetem às comunicações de Larmor no início do século XX, quando apontava para o fato de que a única maneira visual de se observar os campos magnéticos, como Hale havia feito, seria por meio da indução eletromagnética em um meio solar condutivo que estivesse em movimento.

Uma das figuras pioneiras no desenvolvimento da teoria do dínamo para estrelas foi Eugene Parker. Ele publicou um artigo seminal intitulado *Hydromagnetic dynamo models*, no qual propôs um mecanismo de dínamo para a geração do campo magnético do Sol, sugerindo que o movimento dos gases ionizados dentro dessa estrela, combinado com a rotação diferencial do interior solar, poderia levar à amplificação dos campos magnéticos por meio de um processo de dínamo (Parker, 1955). Esse trabalho lançou as bases para a compreensão da geração de campos magnéticos estelares, propondo um modelo constituído por dois circuitos magnéticos que interagem entre si. O primeiro aumentaria o campo magnético do segundo e vice-versa. O

primeiro circuito estaria associado a um campo magnético do tipo dipolar (poloidal) que seria transformado em um campo magnético azimutal associado ao segundo circuito pela rotação diferencial do sol. O campo magnético do segundo circuito poderia ser considerado como um campo toroidal oculto em algum lugar do interior solar (Charbonneau; Sokoloff, 2023).

Para entendermos o princípio básico de um dínamo, iremos recorrer à análise que Charbonneault (2013) faz dos dispositivos mostrados na Fig. 25. A diferença fundamental entre

Figura 25 – Geradores elétricos homopolares.



Dispositivos geradores de corrente elétrica inventados por Michael Faraday: (a) gerador homopolar (b) dínamo homopolar. Um campo magnético externo B é aplicado perpendicularmente a um disco metálico em rotação em torno de um eixo vertical com velocidade angular ω . Um fio condutor cria um circuito com resistência R entre a borda do disco e o eixo. A diferença estrutural entre eles se dá pelo formato de espira em que o circuito se apresenta no dínamo homopolar. Fonte: Extraído e adaptado de (Charbonneau, 2013, p. 31).

esses dois dispositivos que convertem energia mecânica em energia elétrica é a capacidade de amplificação do campo magnético inicial B por parte do dínamo homopolar. Um disco condutor de raio a é colocado em rotação em torno de um eixo vertical com velocidade angular ω . Estando o disco imerso em uma região onde se aplica um campo magnético uniforme de intensidade B , os portadores livres de carga nesse disco estão sujeitos à força de Lorentz que atua radialmente para fora do disco criando uma corrente elétrica i_c que pode circular através do circuito de resistência R composto por um fio condutor e o eixo de rotação.

No gerador homopolar (Fig. 25a), i_c percorre o fio condutor sem maiores consequências para o campo magnético resultante na região onde está o disco. Já no dínamo homopolar (Fig. 25b), devido ao fato do fio condutor estar em um formato de espira coplanar ao disco, a corrente elétrica induz um campo secundário B' que se soma ao campo B , cuja direção e sentido são dados pela regra da mão direita. Assim, concluímos que o dínamo é mais do que um mecanismo de conversão de energia mecânica em energia elétrica, ele é capaz de amplificar o campo magnético.

Considerando que os portadores estejam carregados com carga q no disco e com velocidade tangencial $\mathbf{v} = (\omega r)\hat{\mathbf{e}}_\phi$ e submetidos a um campo $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{e}}_z$, a força de Lorentz

$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que atua neles será expressa por:

$$\mathbf{F} = (q\omega r B_0)\hat{\mathbf{e}}_r. \quad (2.64)$$

a corrente i_c será relacionada com a força eletromotriz através de:

$$\varepsilon = \oint \left(\frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{r} B_0 \right) \hat{\mathbf{e}}_r = \int_0^a \omega B_0 r dr = \frac{\omega B_0 a^2}{2}. \quad (2.65)$$

No gerador homopolar (Fi. 25a), ao desprezamos a autoindutância do circuito, a corrente resultante no circuito de resistência R será $i_c = \varepsilon/R$. Nesse dispositivo, a energia mecânica fornecida para a movimentação do disco é convertida em energia elétrica mas há um efeito dissipativo na resistência elétrica.

No circuito do dínamo homopolar, a espira sendo percorrida por i_c produz um campo magnético secundário \mathbf{B}' que tem a mesma orientação do campo externo \mathbf{B} . O fluxo magnético Φ_B deste segundo campo através da área do disco é dado por:

$$\Phi_B = \mathcal{M} i_c = \pi a^2 B' \quad (2.66)$$

em que \mathcal{M} é a indutância. Dessa relação, percebemos que a intensidade do campo B' é proporcional a corrente i_c e como há um fluxo desse campo no disco, uma nova força eletromotriz ($\mathcal{L} di_c/dt$) será gerada, dessa vez, se opondo afim de anular o efeito do fluxo. Assim, a diferença de potencial no circuito do dínamo homopolar será expressa por:

$$\varepsilon - \mathcal{L} \frac{di_c}{dt} = R i_c, \quad (2.67)$$

em que \mathcal{L} é a autoindutância. Assim, substituindo as Eqs. (2.65) e (2.66), a Eq. (2.67) pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{L} \frac{di_c}{dt} = \frac{\omega a^2}{2} \left(B_0 + \frac{\mathcal{M} i_c}{\pi a^2} \right) - R i_c. \quad (2.68)$$

Analisando a equação acima, percebe-se que, em um instante inicial $t = 0$ em que $i_c = 0$, a corrente no circuito cresce devido à presença do termo $(\omega a^2 B_0)/2 > R i_c$. Em um instante posterior t' , quando o campo secundário adquirir uma intensidade comparável a do campo externo, poderemos remover este último ($B_0 = 0$) sem interrompermos o processo de indução. Nesse instante, a Eq. (2.68) pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L} \frac{di_c}{dt} = \left(\frac{\omega \mathcal{M}}{2\pi} - R \right) i_c, \quad (2.69)$$

cuja solução é uma exponencial do tipo:

$$i_c(t) = i_c(t') \exp \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}} \left(\frac{\omega \mathcal{M}}{2\pi} - R \right) t \right\}, \quad (2.70)$$

de onde se conclui que a corrente i_c continuará crescendo desde que a velocidade angular do disco seja maior do que um valor crítico ω_c , tal que:

$$\omega > \omega_c = \frac{2\pi R}{\mathcal{M}}. \quad (2.71)$$

A partir dessa análise do dínamo homopolar, Charbonneau (2013, p. 33) destaca algumas características observadas nesse dispositivo que são semelhantes àquelas observadas na dinâmica do dínamo estelar tais como: a existência de uma velocidade angular crítica para que a autoindutância se sobreponha à dissipação ôhmica, a possibilidade de haver circuitos que não produzem a amplificação do campo magnético e a necessidade de um campo magnético externo somente no início do processo.

No caso do dínamo estelar, os processos que resultam na criação e na amplificação dos campos magnéticos são bem mais complexos e, por isso, é necessária uma abordagem da magneto-hidrodinâmica do plasma estelar para que possamos interpretar a Eq. (2.72), conhecida como a equação de indução da magneto-hidrodinâmica (Charbonneau, 2013, p. 14). A ideia é que o movimento de um fluido eletricamente condutor, sob ação de um campo magnético, se constitua numa corrente que, por sua vez, gere um campo magnético adicional.

O problema do dínamo consiste em encontrar o campo de velocidade do fluxo que seja capaz de sustentar um campo magnético contra a dissipação ôhmica semelhante aquela que ocorre no dínamo homopolar. Esse campo de velocidade pode ser dado *a priori* e estabelecido sem considerar a dinâmica subjacente, como é feito no problema do dínamo cinemático ou resultar de uma solução de um conjunto completo de equações de magneto-hidrodinâmica. O dínamo solar pode ser descrito pelas duas abordagens, mas seguindo a apresentação de Charbonneau (2013), faremos uma breve apresentação da abordagem cinética (ou de campo médio) do dínamo solar para explicar a formação dos dois tipos de campo magnéticos de larga escala do Sol.

Campos magnéticos em um fluido com campo de velocidade \mathbf{v} e condutividade elétrica σ são descritos pela equação

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.72)$$

em que $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ é o campo de velocidade do fluido que permite determinarmos o campo magnético $B(\mathbf{r}, t)$. Segundo Meyer-Vernet (2007, p. 139), o fato da Eq. (2.72) ser linear em \mathbf{B} implica que o campo magnético não pode ser criado do nada, ou seja, sem uma pequena semente de campo magnético já existente, sendo possível somente amplificá-lo ou reduzi-lo e, além disso, esta equação isolada não permite a determinação da intensidade que o campo magnético pode crescer, sendo aplicável apenas em casos em que o campo magnético seja suficientemente pequeno para não causar perturbações no movimento.

Analisando o membro direito da equação acima, podemos perceber que o primeiro termo está associado ao decaimento magnético causado pela dissipação ôhmica que atua em uma escala de distância L e que ocorre em uma escala de tempo $\tau_\sigma = \mu_0 \sigma L^2$, enquanto o segundo termo está associado à indução. L é o comprimento de escala característico de um plasma e o seu valor máximo é dado pelo comprimento de Debye que, por sua vez, mede o comprimento máximo de regiões não neutras no plasma. Se a velocidade não variar em escalas menores, o segundo termo do membro direito da Eq. (2.72) irá variar o campo em uma escala de tempo

L/v que será mais curta que τ_σ , caso $\mu_0\sigma vL > 1$. Essa quantidade é definida como o número de Reynolds magnético:

$$R_m \equiv \mu_0\sigma vL, \quad (2.73)$$

que pode ser interpretado como uma medida da razão entre a inércia do fluido e a sua viscosidade, mas no contexto da física de plasmas, passa a ser associado com uma razão entre a convecção produzida no interior estelar e a difusão causada pela perda condutiva do plasma (Meyer-Vernet, 2007, p. 88). Assim, quando a difusão magnética for muito pequena, temos $R_m \gg 1$. Quando isso ocorre, a condutividade elétrica do plasma tende ao infinito e a Eq. (2.72) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.74)$$

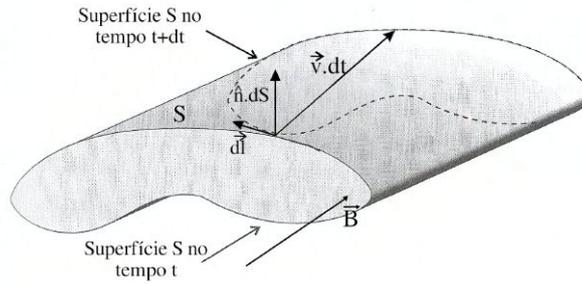
de onde pode-se concluir que a variação do fluxo do campo magnético Φ_B de qualquer contorno fechado l envolvendo uma superfície S (Fig. 26) que segue o movimento do fluido com velocidade \mathbf{v} é igual a:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{d}{dt} \iint \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S} = \iint_S \frac{d}{dt} [\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS] = \iint_S \left[\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \mathbf{B} \cdot \frac{d(\hat{\mathbf{n}} dS)}{dt} \right] \\ &= \iint_S \left[\left(\nabla \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \mathbf{B} \cdot \frac{d(\hat{\mathbf{n}} dS)}{dt} \right] \\ &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_S \nabla \cdot \mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{=0} + \iint_S \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}) \\ &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_S \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}) \\ &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \oint_l d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

portanto, o fluxo do campo magnético se conserva para $R_m \gg 1$. Essa propriedade é derivada do teorema de Alfvén (Charbonneau, 2013, p. 25) e desempenha um papel fundamental nas condições de contorno para a solução das equações magneto-hidrodinâmicas (Goedbloed, 2004, p. 144). Além disso, a conservação do fluxo magnético, também chamada de congelamento de fluxo, implica que as linhas de campo magnético devem se mover juntamente com o plasma, o que nos permite definir um tubo de fluxo como sendo um volume cilíndrico cujas laterais são definidas pelas linhas de campo magnético. As próprias linhas de campo podem ser consideradas como tubos de fluxo infinitesimais (Fitzpatrick, 2022, p. 200).

Em uma escala global, o campo magnético resultante do Sol pode ser descrito de maneira a explorar a simetria axial do corpo que geralmente coincide com o eixo de rotação.

Figura 26 – Fluxo do campo magnético em uma superfície imaginária no interior de um plasma.



Uma superfície S em um instante de tempo t é atravessada por uma linha de campo magnético cuja tangente é representada pelo vetor \mathbf{B} . Como S viaja com a mesma velocidade \mathbf{v} do fluido, depois de um intervalo de tempo $t + dt$, ela estará a uma distância $\mathbf{v}dt$. Como o fluxo do campo magnético também é calculado na superfície lateral, um elemento infinitesimal de área $\hat{\mathbf{n}}dS$ perpendicular à superfície lateral pode ser escrito como o produto $\mathbf{v}dt \times d\mathbf{l}$.
Fonte: Extraído e adaptado de (Machado, 2002, p. 603).

Nesse caso, podemos descrever o campo magnético em termos das coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e, pela simetria azimutal, podemos reduzir a descrição para as coordenadas r e θ :

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times (A(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi) + B(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.76)$$

em que a componente A do vetor potencial define a componente poloidal do campo magnético que fica contida nos planos meridionais (r, θ) enquanto a componente azimutal B é chamada de campo toroidal. A vantagem dessa representação é que ela permite que utilizemos a Eq. (2.72) lidando com esses dois campos separadamente na mesma equação (Charbonneau, 2013, p. 38). Considerando o campo de velocidade \mathbf{v} dado por:

$$\mathbf{v}(r, \theta, t) = \mathbf{v}_p(r, \theta) + \varpi\Omega(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.77)$$

em que $\mathbf{v}_p = v_r(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta$ e Ω é a velocidade de rotação, a Eq. (2.76) pode ser substituída na Eq. (2.72), resultando nas equações de evolução:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi A), \quad (2.78)$$

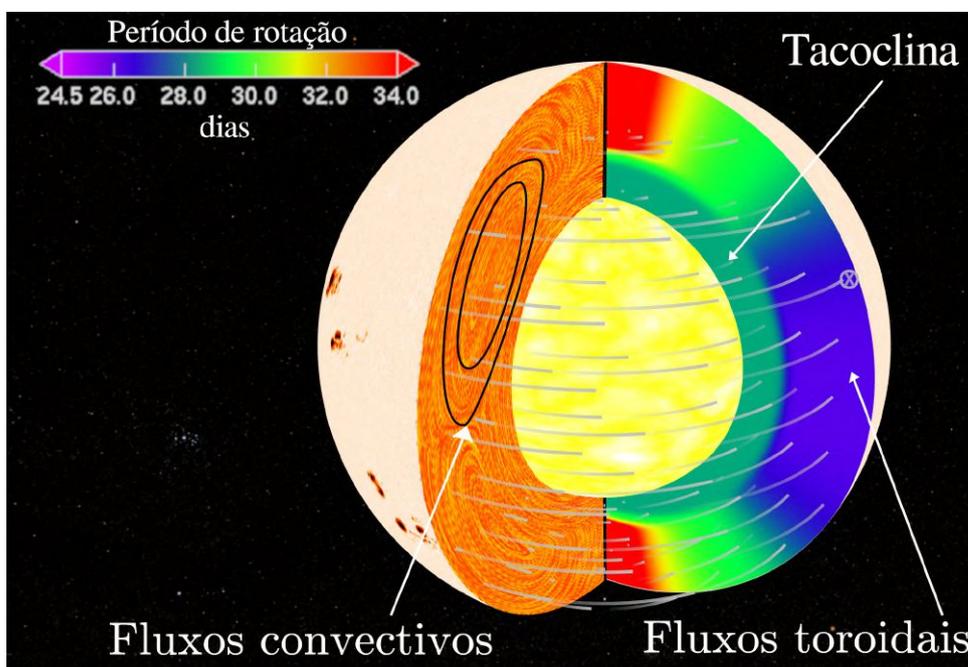
$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left(\frac{B}{\varpi} \right) - B \nabla \cdot \mathbf{v}_p + \varpi (\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega \quad (2.79)$$

em que $\varpi = r \sin \theta$. Analisando as Eqs. (2.78) e (2.79), pode-se concluir que o campo toroidal pode ser produzido pelo campo poloidal, mas o campo poloidal decai independentemente do campo toroidal (Charbonneau, 2010). Embora tenhamos usado argumentos de simetria axial para escrever as equações anteriores, Cowling demonstrou que não é possível que um campo magnético simetricamente rotacional possa manter o dínamo ativo e Elsasser também afirmou que somente a ação da rotação diferencial é incapaz de manter o dínamo solar, sendo necessária a existência de um fluxo meridional que considere efeitos de turbulência em pequena escala (Solanki; Inhester; Schüssler, 2006).

Na Fig. 27, observam-se dois tipos de fluxos que ocorrem no Sol que seguem a direção das linhas dos campos poloidais e toroidais. Um deles é longitudinal, paralelo ao equador solar, fluindo no mesmo sentido da rotação do Sol e é chamado de fluxo toroidal, enquanto o outro se dá no plano meridional.

O plasma aquecido na base da zona convectiva realiza movimentos turbulentos nesta camada que resultam no movimento ascendente que caracteriza o fluxo meridional e isso também induz a formação de campos magnéticos. Uma vez que esses campos passam a atuar no próprio plasma, correntes elétricas são produzidas que, por sua vez, produzirão novos campos magnéticos. A direção desses campos magnéticos também é determinada pelo movimento do plasma no interior estelar. Parte desse fluxo é produzida pela própria rotação da estrela. Do lado

Figura 27 – Estrutura dos fluxos no interior solar.



Seção transversal do Sol indicando os sentidos dos fluxos de plasma na zona convectiva. A escala colorida indica o período de rotação em função da latitude e do raio. Fonte: Extraído e adaptado de (NASA, 2023b).

esquerdo do leitor na Fig. 27, temos uma escala de cores que representam o período de rotação do plasma em uma dada região. Por meio dessa escala, concluímos que o plasma na região equatorial se move com velocidade angular maior (menor período) do que na região dos polos. Isso é causado pela rotação diferencial do Sol, uma vez que a estrela não se movimenta como um corpo rígido na camada convectiva.

Observando ainda a Fig. 27, nota-se uma região mais interna, onde a velocidade angular de rotação é uniforme e, a partir da qual, o gradiente de velocidade tangencial ou de cisalhamento é mais acentuado e independente da latitude (Howe, 2009). Essa fina camada é chamada de tacoclina e ela está situada na base da camada convectiva. Atualmente, acredita-se que o dínamo solar esteja localizado na base da zona convectiva (Bushby; Mason, 2004) e

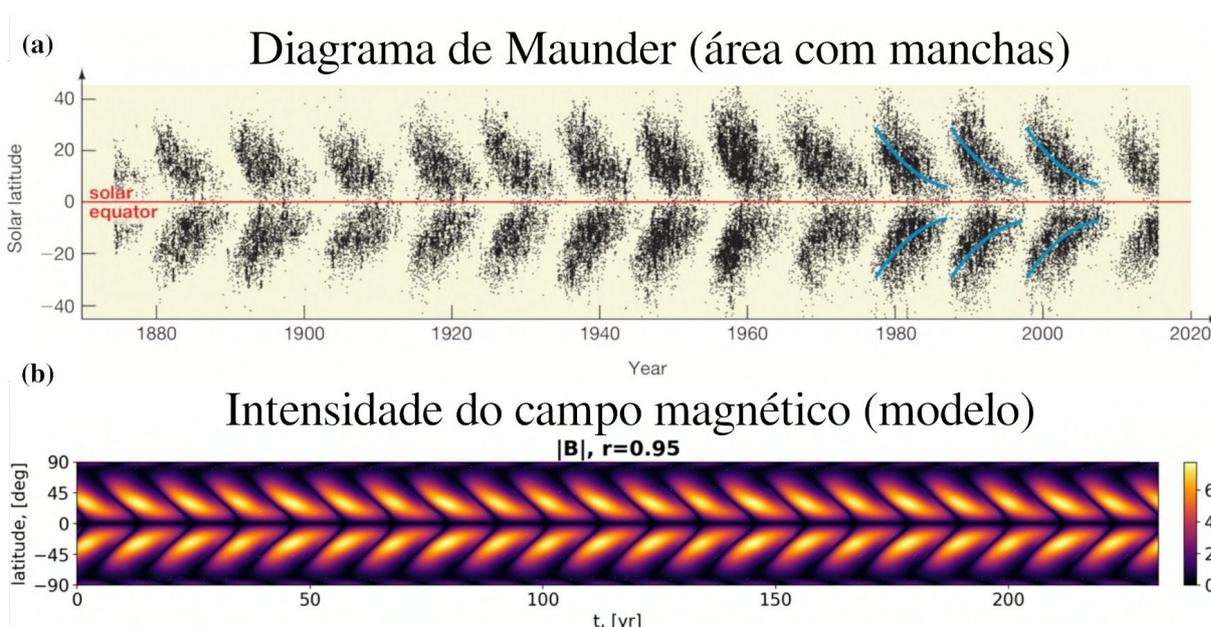
trabalho recentes propõem modelos de dínamos que investigam o papel da tacoclina na geração dos campos toroidais (Zhang; Jiang, 2022).

No início dessa seção, utilizamos o dispositivo de Faraday para apresentar conceitualmente como funciona o mecanismo de dínamo que amplifica o campo magnético inicial às custas da energia mecânica fornecida e de uma dissipação de energia pelo fator resistivo. No interior estelar o processo é mais complexo, mas os efeitos magnéticos de larga escala conseguem ser descritos por mecanismos semelhantes, através dos campos poloidal e toroidal gerados pelo dínamo estelar e há poucas dúvidas de que esse seja o mecanismo responsável pelo ciclo solar magnético (Hathaway, 2015).

Na seção 2.1, mencionamos que o número médio de manchas atinge uma intensidade máximo em um processo cíclico com período de cerca de 11 anos, mas ao se observar a polaridade e a intensidade do campo magnético em pares de manchas solares em um mesmo hemisfério, percebe-se que neste período ocorre também uma inversão de polaridade das linhas de campo magnético dessas manchas, sendo necessário um ciclo de 22 anos para que elas passem a apresentar a mesma polaridade e intensidade máxima de campo magnético (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 265).

Na Fig. 28 podemos observar que a intensidade do campo magnético reproduz o diagrama de Maunder, também conhecido como diagrama borboleta. No painel superior, percebe-se que, conforme tempo avança, as áreas com manchas tendem a se concentrar no equador solar e esse comportamento se repete dentro de um ciclo de 11 anos. Os dois processos básicos que estão

Figura 28 – Diagrama de Maunder.

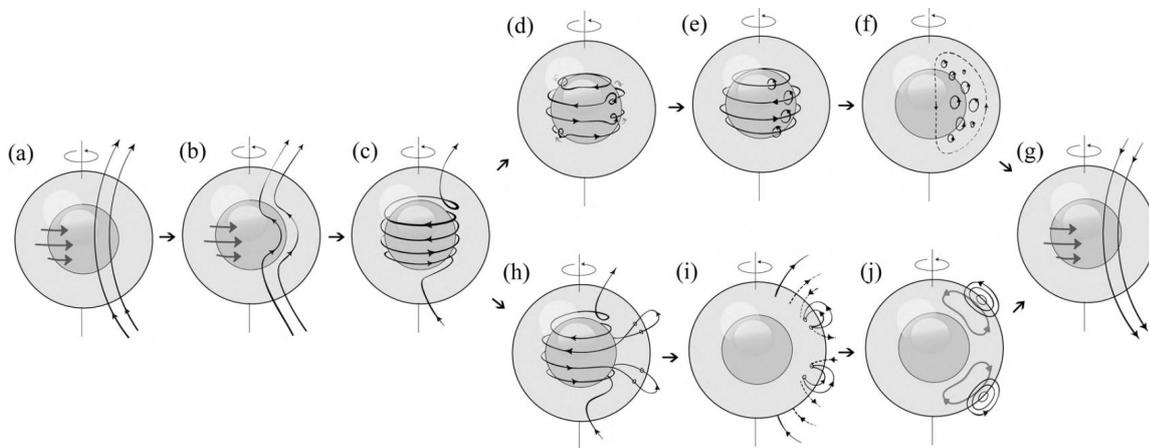


(a) Diagrama borboleta tradicional, onde os pontos contendo a informação da área manchada são marcados nas coordenadas de latitude em que são observadas as manchas no disco solar. (b) A intensidade do campo magnético resultante de um modelo de dínamo que considera a sincronização de maré reproduzindo um comportamento semelhante ao dínamo solar atingindo um mínimo de intensidade a cada 11 anos. Fonte: Extraído e adaptado de (a) (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 266) e (b) (Klevis; Stefani; Jouve, 2023).

envolvidos na maioria dos modelos de dínamo são baseados nos movimentos de cisalhamento que fortalecem o campo magnético e o alinham com o fluxo (efeito- ω) e movimentos helicoidais que levantam e torcem o campo magnético em um plano diferente como aqueles produzidos pelo efeito- α ou pelo mecanismo de Babcock-Leighton (Hathaway, 2015).

O efeito- ω consiste na deformação das linhas do campo magnético poloidal e isso leva um tempo de cerca de 11 anos até que se chega ao ponto em que ocorre a inversão da polaridade do campo magnético solar. O cisalhamento das camadas de plasma devido à rotação diferencial distorcem as linhas do campo magnético poloidal, tornando-as em linhas de campo toroidais, conforme podemos observar na Fig. 29. A transformação do campo poloidal em campo toroidal é chamada de efeito- ω em alusão à rotação estelar (SANCHEZ *et al.*, 2014).

Figura 29 – Estrutura dos campos magnéticos gerados pelo dínamo solar.

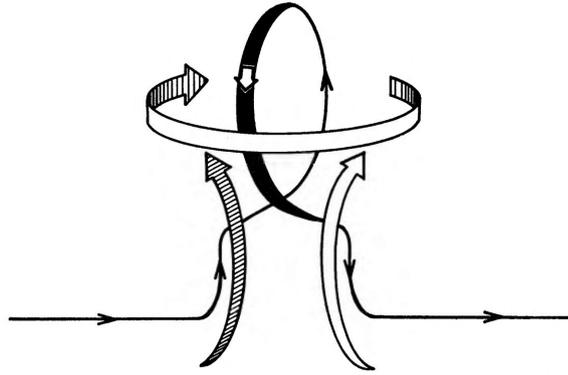


Esquema representativo dos principais processos que ocorrem no ciclo solar magnético envolvendo os campos magnéticos produzidos pelo dínamo solar. (a) as linhas do campo magnético poloidal em uma configuração inicial. (b) Com a rotação diferencial, essas linhas vão sendo deformadas e em (c) atingindo um estágio em que o campo magnético de grande escala torna-se helicoidal, fortalecendo a componente azimutal do campo magnético, ou seja, o campo toroidal. A produção do campo poloidal pode seguir duas vias: o efeito- α seguindo pelos estágios (d), (e) e (f) ou pelo mecanismo de Babcock-Leighton ilustrado nos estágios (h), (i) e (j). Como são processos cíclicos, ele conduzem à configuração inicial das linhas de campo poloidal conforme mostrado em (g) mas com polaridade reversa. Fonte: Extraído e adaptado de (SANCHEZ *et al.*, 2014).

Os movimentos turbulentos helicoidais de pequena escala que estão associados com a força de Coriolis e que também caracterizam o efeito- α são capazes de contorcer as linhas do campo toroidal, conforme mostrado nas configurações (d), (e) e (f) na Fig. 29. Eles foram propostos inicialmente por Parker (Parker, 1955) e, depois dos trabalhos de Steenbeck, Krause e Rädler que demonstraram que os movimentos ciclônicos turbulentos podem sozinhos produzir campos magnéticos, Parker obteve equações de dínamo baseadas no modelo de células convectivas ciclônicas como aquela apresentada na Fig. 30. Essas células emergem na superfície do Sol e são responsáveis pela torção das linhas de campo toroidal (Parker, 1970).

Como havíamos mencionado, além da Eq. (2.72) que descreve a indução magnética, precisa-se de outras equações para que se possa considerar a conservação de massa, de momento e de energia. O conjunto de equações necessárias à magneto-hidrodinâmica torna-se completo

Figura 30 – Célula convectiva ciclônica ou Ω -loop de Parker.



Surgimento de uma célula convectiva ciclônica torcendo o campo toroidal formando um laço com projeção no plano meridional da estrela. A linha de campo magnético sofre uma projeção vertical. À medida em que a torção continua produzindo novos laços, eles se superpõem intensificando o campo que resulta na formação do campo poloidal. As setas largar indicam o sentido do movimento ciclônico do fluido. Fonte: Extraído e adaptado de (Parker, 1970)

com:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) e = \frac{1}{\rho} \{ \nabla \cdot [(\chi + \chi_r) \nabla T] + \phi_u + \phi_B \}, \quad (2.82)$$

nas quais ρ é a densidade do fluido, e é a energia interna, p é a pressão do gás, $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de estresse viscoso, χ e χ_r são as condutividades térmicas cinética e radiativa, respectivamente, enquanto ϕ_u e ϕ_B são as funções de dissipação viscosa e ôhmica. $\mathbf{\Omega}$ é a velocidade de rotação e \mathbf{g} é a aceleração da gravidade em um referencial inercial. Adotando-se um referencial em rotação juntamente com a estrela, apenas o termo da aceleração de Coriolis aparece no membro direito da Eq. (2.81) (Charbonneau, 2014b). Um parâmetro importante para mensurar a influência da rotação é o número de Rossby (Ro) que é definido por:

$$Ro \equiv \frac{v'_{rms}}{2\Omega L} \equiv \frac{P_{rot}}{\tau_c}, \quad (2.83)$$

que consiste na razão entre as forças centrífugas e de Coriolis da eq. (2.81), tal que v'_{rms} é a velocidade quadrática média do fluido, chamada de velocidade típica e L é comprimento de escala já definido no início da seção, podendo ser reescrito como sendo a razão do período de rotação e tempo de rotatividade convectiva τ_c (Charbonneau, 2014b). É interessante notar que quando $Ro \ll 1$, os desvios da rotação do corpo rígido são fracos e o fluido consegue sustentar uma forma de movimento ondulatorio interno, chamado de ondas inerciais, cuja força restauradora é a força de Coriolis (Davidson, 2017, p. 102).

A sugestão de Parker e a formulação de campo médio para o eletromagnetismo permitem que o campo poloidal seja regenerado pela ação de torção da convecção ciclônica sobre um campo inicialmente toroidal e as equações de dínamo podem ser escritas na forma:

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} = (\eta + \eta_T) \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) \langle A \rangle - \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi \langle A \rangle) + \alpha \langle B \rangle, \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} = & (\eta + \eta_T) \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) \langle B \rangle + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi \langle B \rangle)}{\partial r} \frac{\partial (\eta + \eta_T)}{\partial r} - \varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left(\frac{\langle B \rangle}{\varpi} \right) - \langle B \rangle \nabla \cdot \mathbf{v}_p \\ & + \varpi \left(\nabla \times (\langle A \rangle \hat{\mathbf{e}}_\phi) \right) \cdot \nabla \Omega + \nabla \times \left[\alpha \nabla \times (\langle A \rangle \hat{\mathbf{e}}_\phi) \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

em que η_T é a difusidade turbulenta e $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ representam o campo médio das componentes poloidal e toroidal, respectivamente.

Comparando as Eq. (2.84) e (2.85) com as Eqs. (2.78) e (2.79), pode-se perceber que nesse último modelo de dínamo, as equações estão mutuamente acopladas e o decaimento da componente do campo poloidal depende da componente toroidal. Além disso, observa-se o surgimento de novos termos que contém o parâmetro α . Esse parâmetro mede a intensidade do efeito- α e é um pseudotensor cujas componentes são oriundas de modelo de turbulência que permitem que a média de correlações cruzadas de velocidade possa ser calculada (Charbonneau, 2010). No regime cinemático, a aproximação de correlação (Charbonneau; Sokoloff, 2023) permite que α assuma a forma:

$$\alpha = -\frac{\tau_c}{3} \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla \times \mathbf{v}' \rangle, \quad (2.86)$$

em que τ_c é o tempo de correlação dos movimentos turbulentos e \mathbf{v}' é o fator turbulento da teoria de campo médio. Nota-se, portanto, que α é independente da intensidade do campo magnético médio $\langle \mathbf{B} \rangle$.

Segundo Bushby e Mason (2004), geralmente se aceita que o efeito- α seja suprimido à medida que o campo magnético aumenta de intensidade, mas a intensidade limite do campo para a qual o campo poloidal deixe de ser regenerado ainda não está elucidada. Esse efeito é conhecido como a extinção do efeito- α ou α -*quenching*. Assim, quando $\langle \mathbf{B} \rangle$ gerado pelo dínamo atinge uma magnitude tal que sua energia por unidade de volume é comparável à energia cinética dos movimentos turbulentos do fluido subjacente, o parâmetro α passa a ser escrito na forma:

$$\alpha = -\frac{\alpha_0}{1 + \left(\langle \mathbf{B} \rangle / B_{eq} \right)^2} \quad (2.87)$$

com α_0 sendo o valor desse parâmetro na ausência de campo magnético (regime linear) e B_{eq} denota a intensidade do campo de equipartição (Charbonneau; MacGregor, 1996). Considerando essa dependência de α com $\langle \mathbf{B} \rangle$, podemos observar que o fenômeno de extinção do efeito- α torna as Eqs. 2.84 e (2.85) não-lineares. Nesse regime, diz-se que o dínamo encontra-se saturado (Charbonneau, 2010).

Conforme destacado por Bushby e Mason (2004), a importância relativa de diferentes mecanismos de extinção não lineares permanece uma questão em aberto, portanto, mecanismos de extinção parametrizados são provavelmente melhor vistos como uma forma conveniente de forçar o dínamo a saturar no regime não linear. No Capítulo 4, veremos como a saturação pode afetar a rotação estelar.

Com a previsão da extinção severa do efeito- α pelo modelo de Parker, questiona-se como ainda é possível se observar intensos campos magnéticos na superfície do Sol. Segundo Charbonneau (2014b), esse tipo de dificuldade motivou o estudo de mecanismos alternativos de dínamo operando na tacoclina, onde a amplificação e o armazenamento de intensos campos magnéticos são, em princípio, mais fáceis do que na zona de convecção subjacente que é fortemente turbulenta. O modelo de dínamo Babcock-Leighton é uma dessas alternativas. Na Fig. (29(h), (i) e (j)), podemos observar o mecanismo de Babcock-Leighton para a geração do campo magnético poloidal resultando nas regiões magnéticas bipolares na superfície solar como aquelas encontradas nos pares de manchas solares (Fig. 31a).

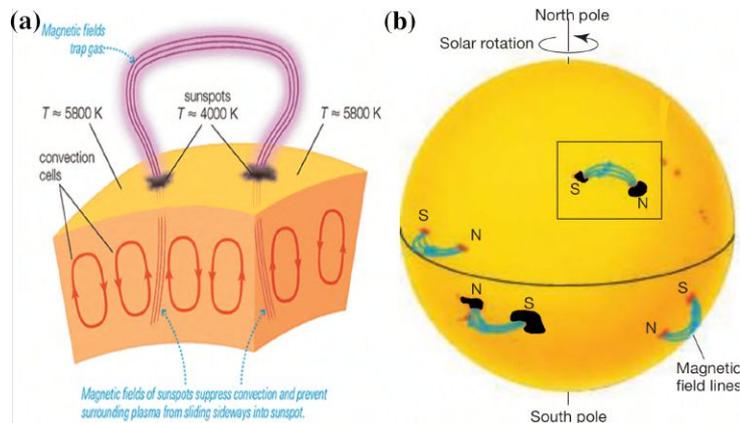
Na Fig. 31a, observam-se as linhas de campo migrando de uma mancha do par para a outra. Adotando-se uma convenção na qual as linhas de campo magnético deixam uma mancha com polaridade magnética S e voltam a entrar na superfície através da outra mancha com polaridade N (Fig. 31b), percebe-se que, em um dado hemisfério, a intensidade do campo magnético é maior em uma das manchas e, por isso, diz-se que há uma polaridade dominante nas manchas. Em um mesmo ciclo magnético, quando há uma dominância da polaridade N no hemisfério norte, por exemplo, haverá uma dominância da polaridade S no hemisfério sul do Sol. Isso se inverte com a mudança cíclica do campo magnético do Sol, significando que em um ciclo posterior, a dominância da polaridade das manchas seria S no hemisfério norte do Sol, enquanto no hemisfério sul observaríamos uma dominância da polaridade N. Esse comportamento é chamado de lei de Hale-Nicholson (Hale; Nicholson, 1925).

O mecanismo de Babcock-Leighton propõe que o decaimento dessas regiões ativas bipolares seja o responsável pela produção do fluxo poloidal, atuando na superfície de forma semelhante ao efeito- α (Bushby; Mason, 2004). Como se trata de um modelo de dínamo de transporte de fluxo, o mecanismo de Babcock-Leighton explica a migração das manchas de uma determinada polaridade em direção aos polos, enquanto as manchas de polaridade dominante se deslocam em direção ao equador (Passos *et al.*, 2014). Na Fig. 32, podemos observar como esse mecanismo atua.

Ainda há várias discussões sobre qual desses mecanismos é de fato o responsável pela restituição do campo poloidal e também pela intensificação de campo na superfície solar, produzindo os pares de manchas solares (Bushby; Mason, 2004). O fato é que se observa, aos pares, as manchas apresentando polaridades opostas, conforme mostrado na Fig. 31.

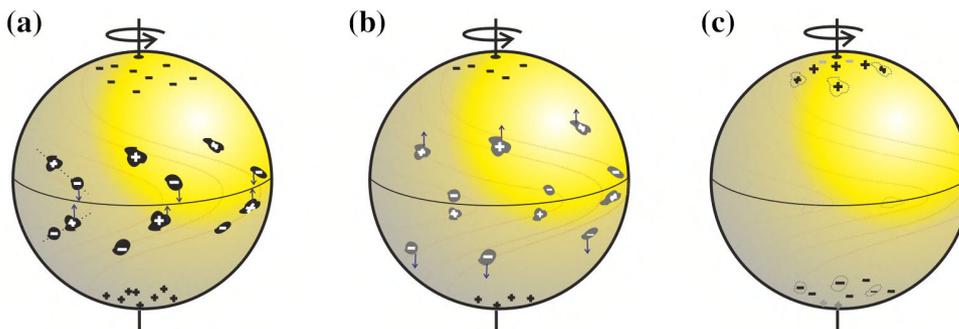
A intensificação das linhas de campo magnético em certas regiões da fotosfera impede que o plasma aquecido atinja esses locais (denominados de regiões ativas) e, assim, a fotosfera se torna localmente mais fria e, portanto, mais escura em relação à sua vizinhança.

Figura 31 – Intensificação do campo magnético e a sua polaridade em manchas solares.



(a) Linhas de campo magnético produzidas pelo fluxo meridional emergem da superfície solar. Os pares de manchas geralmente ocupam a mesma latitude. A torção dessas linhas intensifica o campo magnético na superfície. (b) A bipolaridade dos pares de manchas solares. Entre a manchas de um mesmo par, há uma dominância de polaridade que pode ser invertida com relação ao hemisfério ao qual as manchas se encontram e com o ciclo magnético. Fonte: Extraído e adaptado de (a) (Bennett *et al.*, 2013, p. 505) e (b) (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 264).

Figura 32 – Migração das regiões ativas pelo mecanismo de Babcock-Leighton.



(a) Regiões bipolares se distribuem em ambos hemisférios do Sol com os pares de manchas apresentando uma inclinação em relação ao equador da estrela. Os sinais \pm foram utilizados para diferenciar a polaridade do campo magnético. (b) O fluxo meridional conduz as manchas de polaridade dominante em direção ao equador onde ocorre um cancelamento difusivo da bipolaridade, enquanto os membros de polaridade oposta, menos dominantes nos pares, são conduzidos aos polos. (c) O processo resulta na geração de um campo poloidal. Fonte: Extraído e adaptado de (Charbonneau; Sokoloff, 2023).

As manchas solares são regiões cuja temperatura central é menor do que o resto superfície da fotosfera (cerca de 2000K a menos) (Thomas; Weiss, 2008, p. 38), (Gershberg, 2005, p. 17) e, por isso, apresentam menor luminosidade.

Na Fig. 33 podemos observar as duas regiões de maior contraste que compõem uma mancha solar, a umbra e a penumbra. Campos magnéticos com densidade de fluxo acima de 2200G resultam na formação da umbra e campos com densidade de fluxo superiores formam os filamentos ao redor da penumbra (Berger; Voort; Löfdahl, 2007). Também podemos observar que na fotosfera há uma espécie de textura granular (3). Essa textura é formada por pequenas áreas de brilho uniforme delimitadas por contornos de menor brilho e recebem o nome de grânulos. Os grânulos são células convectivas que atingem a fotosfera, assemelhando-se à bolhas em água fervente (Bennett *et al.*, 2013, p. 496).

Figura 33 – Astrofotografia de alta resolução de uma mancha solar.

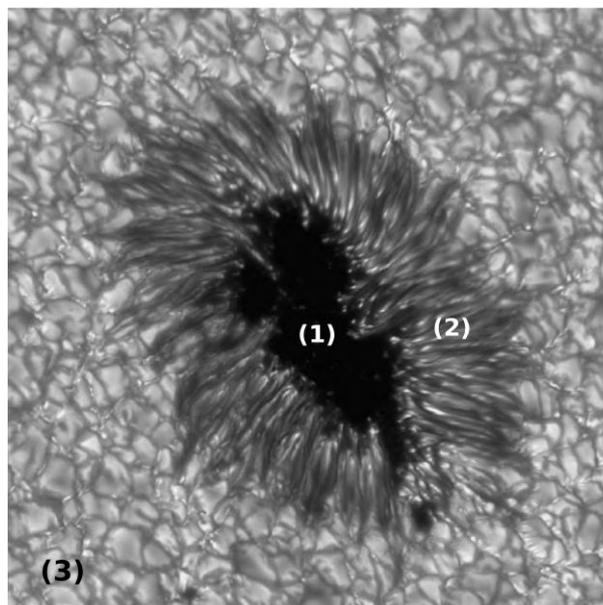


Imagem da região ativa AR10030 obtida na região visível do espectro através do telescópio de 1 metro de abertura do *Institute for Solar Physics* da Universidade de Estocolmo em 15 jul. de 2002. Na região mais escura encontramos a umbra (1), imediatamente delimitada por uma região um pouco mais clara, a penumbra (2). Em imagens como essa, na qual é possível uma maior resolução espacial, observamos a textura formada na fotosfera a partir dos grânulos (3). Fonte: Extraído e adaptado de (Thomas; Weiss, 2008).

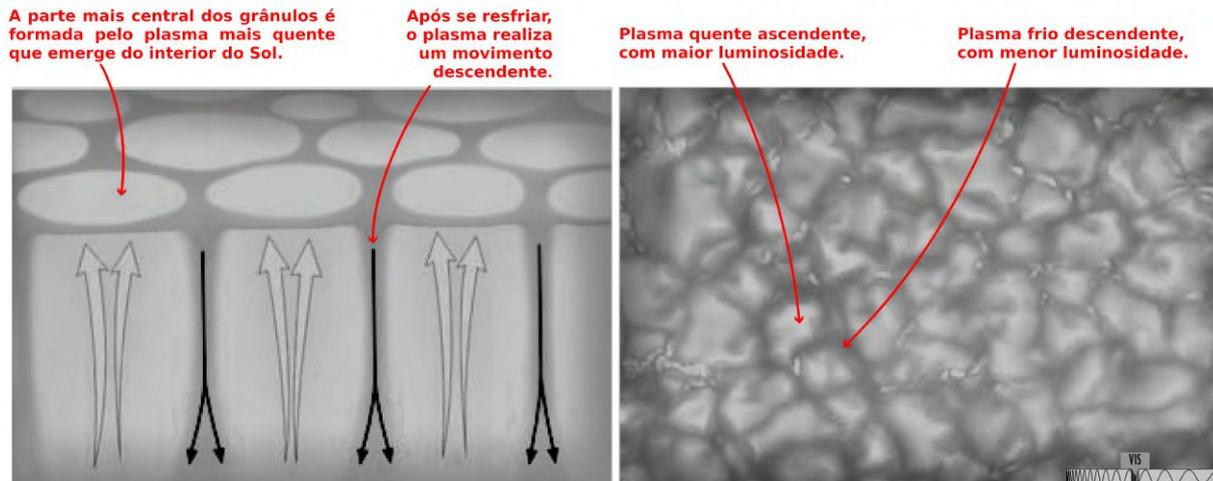
A granulação é geralmente vista como um ruído *flicker* já que sua potência espectral se comporta como uma lei de potência em um intervalo de frequência associado a escala de tempo característica dos movimentos convectivos (Sulis *et al.*, 2020). Apesar de aparentarem ter um tamanho pequeno, os grânulos são estruturas que podem ter um diâmetro de aproximadamente 1000km e tempo de vida de 10-20 minutos (Shapiro; Peter; Solanki, 2019, p. 60). Células convectivas maiores que os grânulos e com tempo de vida maior caracterizam os fenômenos de meso e supergranulação (Priest, 2014). Na Fig. 34(a) podemos observar o processo de formação dos grânulos.

Em situações de calma solar⁵, há um fluxo convectivo na fotosfera onde plasma mais interior (com maior temperatura) realiza um movimento vertical em direção ao topo da fotosfera, onde se resfria e passa a se espalhar horizontalmente. Em seguida, realizando um movimento vertical descendente, o plasma escoo lateralmente ao grânulo e volta para o interior da estrela (Mullan, 2009, p. 268). Com o arrefecimento, o plasma diminui a sua luminosidade e, por isso, observamos os contornos dos grânulos mais escuros, como mostrado na Fig. 34(b).

O fluxo convectivo ou granular expelle os campos magnéticos para o espaço intergranular (Wijn *et al.*, 2008) onde tais campos se intensificam (Danilovic; Schüssler; Solanki, 2010). O espaço intergranular é caracterizado por apresentar uma baixa pressão, uma vez que o plasma está com menor temperatura ali, mas também pelos fortes campos magnéticos cujos fluxos atingem densidades da ordem de quilogauss (Soloviev *et al.*, 2019; Rubio; Suárez, 2019)

⁵ Sol calmo ou *quiet Sun* é a área da superfície solar que não encontramos manchas ou regiões ativas. Isso não quer dizer que não existam campos magnéticos nessa área (Rubio; Suárez, 2019).

Figura 34 – Formação de grânulos na fotosfera solar.



(a) Seção transversal da fotosfera esquematizando o movimento do plasma nas células convectivas que dão origem aos grânulos. A parte mais luminosa do grânulo está acima de um fluxo ascendente de plasma aquecido. Quando o plasma se arrefece no topo da fotosfera, ele passa a fazer um movimento descendente, formando um corredor de escoamento de plasma que fica abaixo das partes escuras que contornam os grânulos. (b) Imagem no espectro visível da superfície da fotosfera solar, onde as células convectivas são vistas do topo. As regiões claras, de maior luminosidade, correspondem à parte mais central dos grânulos, enquanto as regiões mais escuras, com menor luminosidade, correspondem aos corredores de escoamento do plasma arrefecido. Fonte: Extraído e adaptado de (Bennett *et al.*, 2013, p. 501)

e contribuem para as inomogeneidades de brilho associadas aos contornos dos grânulos (Lanza, 2016, p. 43).

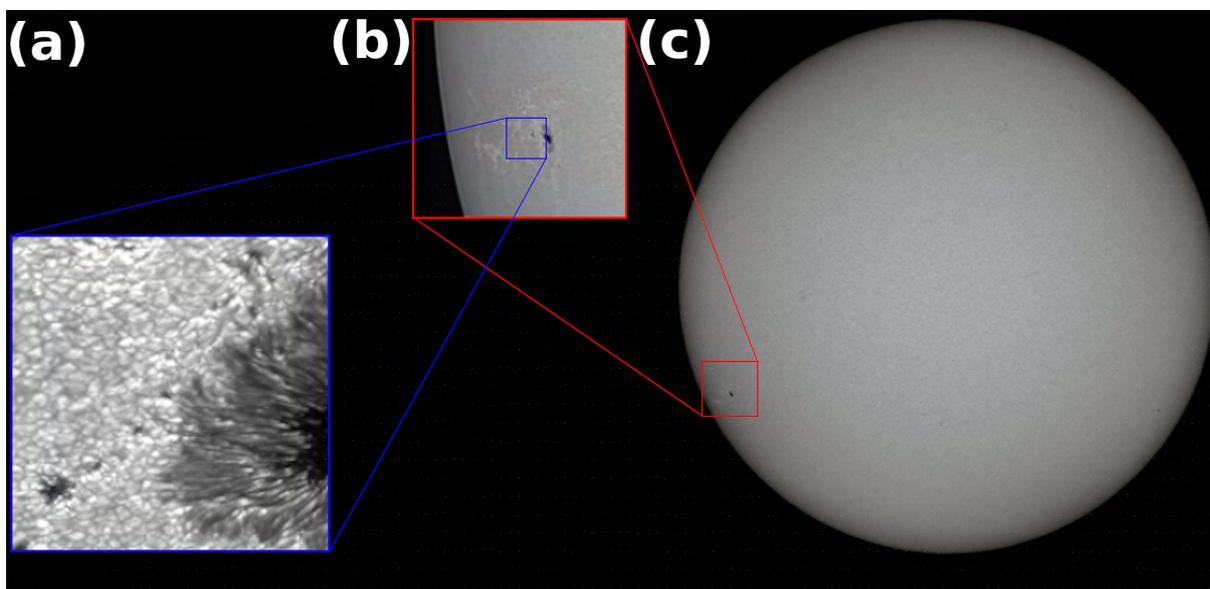
Quando há um tubo de fluxo de campo magnético intenso concentrado e perpendicular à superfície, caracterizando uma região ativa, os movimentos verticais ascendentes e descendentes do plasma não são afetados diretamente, porém o movimento horizontal passa a ser impedido e, assim, a convecção no grânulo é interrompida. Como a pressão exercida pelo campo magnético não consegue ser contrabalanceada pela pressão do gás na fotosfera, o plasma acaba sendo expulso do interior da região do tubo, o que dá origem as manchas solares (Mullan, 2009, p. 271).

Além das manchas solares, do escurecimento do limbo e do espaço intergranular, o Sol apresenta outros tipo de inomogeneidades no brilho da sua fotosfera como aquelas formadas pelas fáculas (Aschwanden, 2019, p. 649), (Thomas; Weiss, 2008, p. 46). As fáculas, assim como as manchas, são regiões ativas, porém são brilhantes. Elas podem se manifestar em toda fotosfera solar (Schrijver; Zwaan, 2000, p. 2) e, semelhantemente as manchas, são produzidas por tubos de fluxo magnético (Soloviev *et al.*, 2019), porém com diâmetro e intensidade magnética menores (Mullan, 2009, p. 271).

Quando a densidade de fluxo magnético nesses tubos atinge intensidades superiores a 150 – 200G, a pressão produzida pelo campo produz uma compressão lateral nos grânulos que dá origem a um aumento de luminosidade. As fáculas, que apesar de serem indistinguíveis em outras regiões do disco solar, são regiões brilhantes que podem ser observadas com mais facilidade no limbo solar (Ambastha, 2003, p. 132). Na Fig. 35 podemos observar as fáculas em

várias escalas de resolução.

Figura 35 – Fáculas observadas no limbo solar.



(a) Astrofotografia de alta resolução da fotosfera solar mostrando os grânulos com regiões de maior intensidade luminosa formando as fáculas. (b) Astrofotografia amadora obtida no dia 04 de jun. de 2020 às 16h04min (19h04min UTC) pelo autor através de uma câmera planetária (ZWO ASI 120MC-S) mostrando as fáculas na vinhança de uma mancha solar. A imagem resultou do processamento de x frames e foi obtida na mesma data e em um horário próximo àquele em que a imagem (c) foi obtida. (c) Astrofotografia amadora obtida através de uma câmera fotográfica DSLR, semi-profissional, em foco primário. A exposição foi realizada com 1/800s em ISO 100 em frame único. A imagem (a) não tem correspondência com aquelas obtidas em (b) e (c), mas corresponde às fáculas solares observadas em 24 de jul. de 2002 e foi adicionada à figura para fins didáticos. As imagens (b) e (C) foram obtidas através um telescópio Maksutov 127mm de abertura com filtro solar Baader. Fontes: (a) Extraída e adaptada de (Scharmer; Löfdahl, 2021) e as demais foram extraídas e adaptadas do arquivo de astrofotografias do autor.

É amplamente aceita a existência de três diferentes tipos de estruturas magnéticas nas regiões faculares: elementos magnéticos de pequena escala, nós faculares e os poros (Solov'ev; Kirichek, 2018). Os elementos magnéticos de pequena escala tem tamanho semelhante aos grânulos e intensidade de campo magnético que aproxima a igualdade entre a pressão feita pelo campo magnético e aquela exercida pelo plasma fora do tubo magnético.

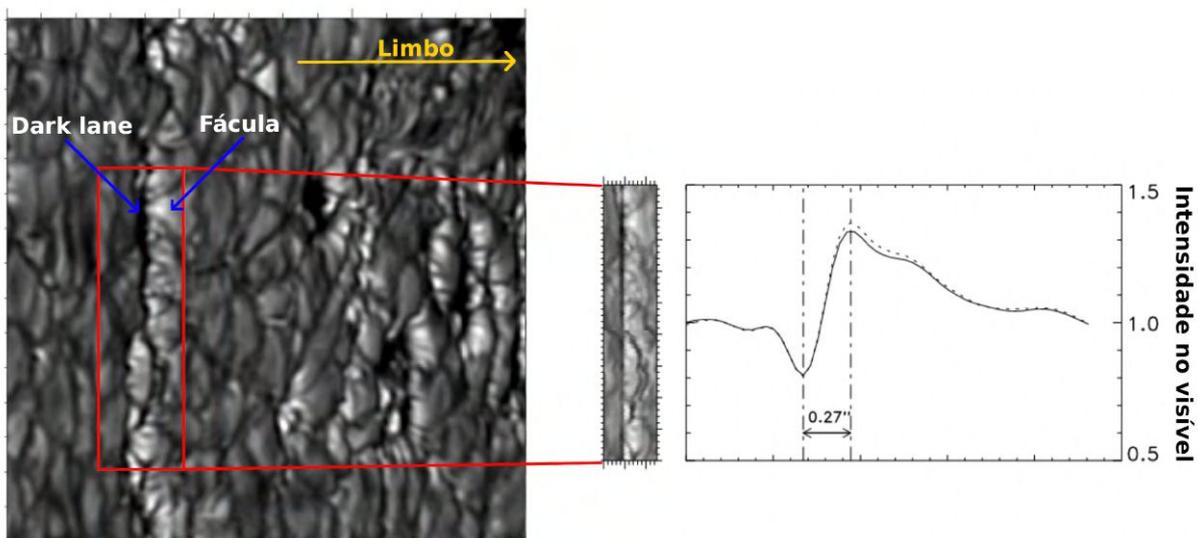
Os campos magnéticos que produzem as fáculas, chamados de campos faculares, geralmente se antecipam ao aparecimento das manchas solares e desaparecem depois, no entanto, as fáculas individuais tem um tempo de vida de cerca de 1 hora de duração. Assim, enquanto atuam os campos faculares, as fáculas individuais aparecem e desaparecem caracterizando um fenômeno dinâmico cujo comportamento coletivo é observável nas áreas ativas (Soloviev *et al.*, 2019). Esses campos estão associados às *plages* ou praias que são regiões com brilho destacado, observadas na cromosfera (Wiegmann; Thalmann; Solanki, 2014, p. 9).

Na primeira década do século atual já havia uma certa discussão sobre a descrição das fáculas (Keller *et al.*, 2004). Apesar de Spruit já ter proposto um modelo no final do século XX, chamado de *hot-wall*, em que considerava o efeito do magnetismo sobre a opacidade do plasma para explicar as fáculas (Spruit, 1976), ainda não havia telescópios capazes de fornecer

imagens de alta resolução para verificar a validade de tal modelo. Alguns autores, como o próprio Spruit, por exemplo, interpretavam de forma geométrica as fáculas, como se fossem depressões na fotosfera (depressões de Wilson) que, uma vez estando no limbo solar, revelariam regiões mais internas de plasma aquecido (Keller *et al.*, 2004; Berger *et al.*, 2007).

Trabalhos posteriores, unindo imagens de alta resolução da fotosfera solar (Lites *et al.*, 2004) como a da Fig. 36 e simulações de magneto-hidrodinâmica (Keller *et al.*, 2004), mostraram que o brilho das fáculas não é produzido pelo aquecimento do plasma interior ao tubo de fluxo magnético, mas na parede do grânulo. A radiação que emerge das paredes laterais

Figura 36 – Imagem de alta resolução de fáculas no limbo solar.

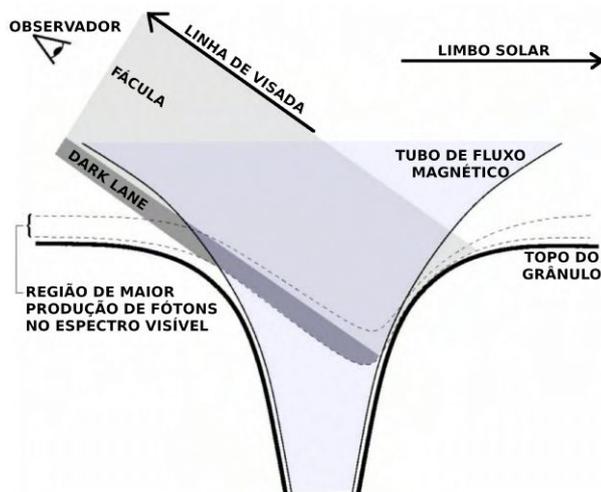


(a) Fáculas formadas à esquerda do limbo solar. (b) Seção transversal da intensidade do fluxo na região do visível. Há diminuição da intensidade na região da *dark lane*, seguida de um máximo na região das fáculas que é seguida de uma diminuição na direção dos limbo solar, indicando uma transição suave das paredes quentes granulares para a fotosfera em baixa atividade. Fonte: Extraída e adaptada de (Steiner, 2007) e (Hirzberger; Wiehr, 2005).

dos grânulos pode aquecer o interior dos tubos de fluxo, bem como ser observada diretamente emergindo das paredes, quando os grânulos se encontram no limbo solar (Shapiro; Peter; Solanki, 2019, p. 67). Além disso, as fáculas podem vir acompanhadas de regiões escuras voltadas também para o centro do disco solar, essas regiões recebem o nome de *dark lanes* ou faixas escuras com contraste maior que o espaço intergranular de grânulos em regiões não ativas (Keller *et al.*, 2004).

As *dark lanes* são formadas pela radiação originada nas regiões mais frias dos grânulos mas dentro do tubo de fluxo magnético (Wijn *et al.*, 2008). Na Fig. 37 podemos compreender como as fáculas seriam formadas segundo este modelo. Na região do limbo solar, a linha de visada do observador se comporta de forma semelhante a esboçada na Fig. 37, onde é possível detectarmos fótons que emergem tanto de regiões superiores dos grânulos quanto de regiões laterais do tubo de fluxo. Observa-se que a maior parte da radiação que emerge da parte mais superior da parede granular é produzida fora da região que limita a ação do campo magnético local. Já a radiação emergente da região mais inferior da lateral do grânulo é produzida

Figura 37 – A formação das fáculas solares.



Nesse diagrama temos dois grânulos cujas paredes são representadas pela linha preta mais espessa. Entre eles, temos o espaço intergranular e o tubo de fluxo magnético (região azulada) é delimitado pelas linhas mais finas. A região da fotosfera compreendida pelas linhas pontilhadas é aquela responsável pela produção da maior parte da radiação visível. O fluxo do campo magnético e a temperatura diminuem na parte mais inferior do tubo, porém a profundidade ótica continua correspondendo à unidade ($\tau = 1$), o que permite que os fótons dessa região mais fria possam ser emitidos (Steiner, 2005). As regiões sombreadas representam a linha de visada para as fáculas (cinza claro) e as *dark lanes* (cinza escuro). Fonte: Extraída e adaptada de (Keller *et al.*, 2004).

dentro desse campo, e por isso tem menor intensidade, produzindo um escurecimento maior na região intergranular. O aumento de brilho que caracteriza a fácula é originado principalmente na região delimitada pelas linhas pontilhadas que está próxima ao topo do grânulo, mas que fica situada fora da região de campo magnético (Keller *et al.*, 2004).

Berger e seus colaboradores, de forma semelhante, concluíram que as fáculas não se apresentavam por meio do modelo de depressões de Spruit, mas sim de grânulos cujas regiões laterais opostas ao limbo são mais brilhantes devido à diminuição da opacidade causada pelas linhas de campo magnético diretamente em frente (segundo a linha de visada) aos grânulos (Berger *et al.*, 2007).

Como as fáculas estão sempre associadas as manchas solares, poderia-se pensar que não haveria um aumento resultante do brilho do Sol, uma vez que as manchas diminuiriam o brilho da estrela, compensando tal aumento. No entanto, o aumento de brilho produzido pelas fáculas consegue superar (0,1%) a diminuição do brilho ocasionada pela presença das manchas e isso explica o ligeiro aumento da irradiância do Sol quando ele se encontra no máximo de sua atividade (Keller *et al.*, 2004).

Na seção 2.2, apresentamos as *plages* como sendo estruturas presentes na cromosfera solar. Tais estruturas estão associadas com os mesmos campos magnéticos que produzem as fáculas e podem ser utilizadas também como marcadores de atividade magnética em estudos que investigam a evolução estelar e a sua relação com a rotação. Na Seção 2.6, veremos como esses marcadores podem ser utilizados para descrever o estágio evolutivo de um estrela.

2.5 Os ventos estelares e frenagem magnética

Na Seção 2.2, vimos que a cromosfera e a coroa solar sofrem um aumento de temperatura à medida que se afasta da fotosfera estelar. De acordo com Mestel (2012, p. 263), Bierman e Schwartzschild propuseram que ondas sonoras produzidas pela turbulência abaixo da fotosfera fossem responsáveis pelos choques nas camadas mais externas da atmosfera solar, mas hoje se acredita que esse efeito só ocorra na base da cromosfera, enquanto que o aquecimento nas camadas mais externas, como a coroa, seja de origem hidromagnética. As altas temperaturas e os intensos campos magnéticos nessas regiões favorecem a formação dos ventos estelares.

Vento estelar é a denominação dada a um fluxo contínuo de partículas a partir de uma estrela através do acoplamento dos mecanismo hidrodinâmicos com o transporte radiativo que é um dos mecanismos responsáveis pela perda de massa estelar (Maciel, 2005, p. 15).

Na ausência de campo magnético, a rotação sozinha teria pouco efeito na perda de massa em rotadores lentos (Lamers; Cassinelli, 1997, p. 255). A perda de massa devido à inércia rotacional pode ser avaliada, a partir de um referencial não inercial, por meio da situação em que a força gravitacional pode se contrapor a maior força centrífuga resultante da rotação no equador da estrela, tendo a velocidade angular de ruptura Ω_{rup} como um parâmetro crítico.

$$\Omega_{rup} = (GM)^{1/2} R^{3/2}, \quad (2.88)$$

em que M e R representam a massa e o raio da estrela, respectivamente. Assim, quando a velocidade angular de rotação da estrela é superior a Ω_{rup} , ocorre o desprendimento de matéria a partir da superfície da estrela. A perda de massa nessa situação pode ser expressa pela equação:

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = 4\pi \Phi_m, \quad (2.89)$$

em que Φ_m é o fluxo de massa da estrela por unidade de ângulo sólido. Desconsiderando a rotação estelar, a força resultante F que atua em uma partícula de massa m do vento sob aceleração dv/dt , a força por unidade de volume f pode ser escrita na forma:

$$\frac{f}{\rho} = \frac{dv(r, t)}{dt} = \frac{\partial v(r, t)}{\partial t} \frac{dt}{dr} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial v(r, t)}{\partial r} \frac{dr(t)}{dt} = v(r) \frac{dv}{dr}, \quad (2.90)$$

em que ρ é a densidade do plasma. Considerando um vento emergindo sob a ação apenas das forças gravitacional e hidrostática, temos que:

$$\frac{f}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM}{r^2}. \quad (2.91)$$

Igualando-se as Eqs. (2.90) e (2.91), obtemos a equação de momento para o gás em um vento estacionário ($dv/dt = 0$), ou seja, com a velocidade do plasma em um dado ponto r independente do tempo:

$$v(r) \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (2.92)$$

que vetorialmente pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r = 0. \quad (2.93)$$

Já na presença de um campo magnético, mesmo que este tenha uma intensidade moderada e esteja congelado com o vento no plasma estelar, ele pode contribuir com o aumento da perda de massa, bem como, a perda de momento angular e de energia da estrela (Lamers; Cassinelli, 1997, p. 255). Assim, para contabilizarmos esse efeito, considera-se inicialmente a força de Lorentz por unidade de volume \mathbf{f}_L em unidades gaussianas:

$$\mathbf{f}_L = \rho_c\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}_c \times \mathbf{B}, \quad (2.94)$$

em que ρ_c é a densidade volumétrica de carga e J_c é a densidade de corrente no plasma. Em um plasma, a força eletrostática $\rho_c\mathbf{E}$ é muito menor que o termo $\mathbf{J}_c \times \mathbf{B}$ (Boyd, 2003, p. 58), assim, a força \mathbf{f}_L se reduz a:

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c}\mathbf{J}_c \times \mathbf{B}. \quad (2.95)$$

Adicionando-se a Eq. (2.95) ao membro direito da Eq. (2.93) multiplicada por ρ , obtemos a equação de momento:

$$\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} + \nabla p + \rho\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{c}\mathbf{J}_c \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.96)$$

Essa equação nos permite obter as duas constantes de movimento para o vento: o momento angular e a energia mecânica. A fim de se obter uma expressão para o momento angular específico, iremos derivar a equação de movimento azimutal a partir da Eq. (2.96). Para tal, seguiremos o procedimento adotado por Lamers e Cassinelli (1997, p. 258).

Na Figura 38, temos uma visão superior do plano equatorial de uma estrela em rotação. Na medida em que a estrela rotaciona as linhas de campo magnético \mathbf{B} se curvam criando um formato espiral na magnetosfera. Conforme discutido na Secção 2.4, o congelamento do fluxo magnético faz com que a matéria ionizada flua ao longo de uma dada linha de campo com velocidade \mathbf{v} sem cruzar as demais linhas. Próximo à estrela, as linhas de campo radial acompanham o movimento como um corpo rígido, fazendo assim, o plasma corrotacionar com a estrela e esse processo faz com que ocorra a transferência de momento angular por meio do campo magnético para o plasma (Lamers; Cassinelli, 1997, p. 258). Considerando a simetria esférica, um vento descrito em termos das coordenadas polares (r, θ, ϕ) tem o seu movimento no plano do equador da estrela especificado pela velocidade e pelo campo magnético que se expressam por:

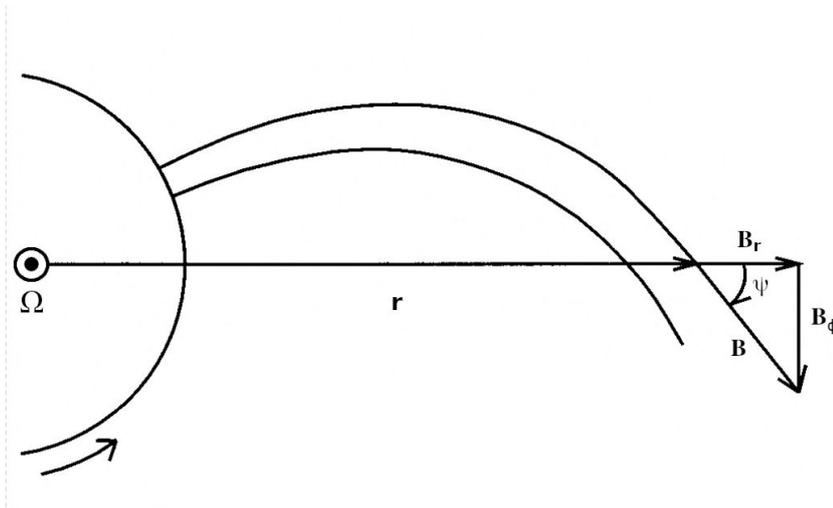
$$\mathbf{v} = v_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + v_\phi(r)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{B} = B_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + B_\phi(r)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.98)$$

em que os versores $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ indicam as direções radial e azimutal, respectivamente. Dada a simetria esférica, as componentes da velocidade do campo magnético são dependentes apenas do raio e,

como o movimento está restrito ao plano equatorial, também não há componentes na direção de \hat{e}_θ . O campo magnético radial consegue promover a corrotação até uma certa distância r_{cor} chamada de raio de corrotação.

Figura 38 – Congelamento das linhas de campo da magnetosfera estelar.



Plano equatorial visto de cima. Fonte: Extraída e adaptada de (Lamers; Cassinelli, 1997, p. 259).

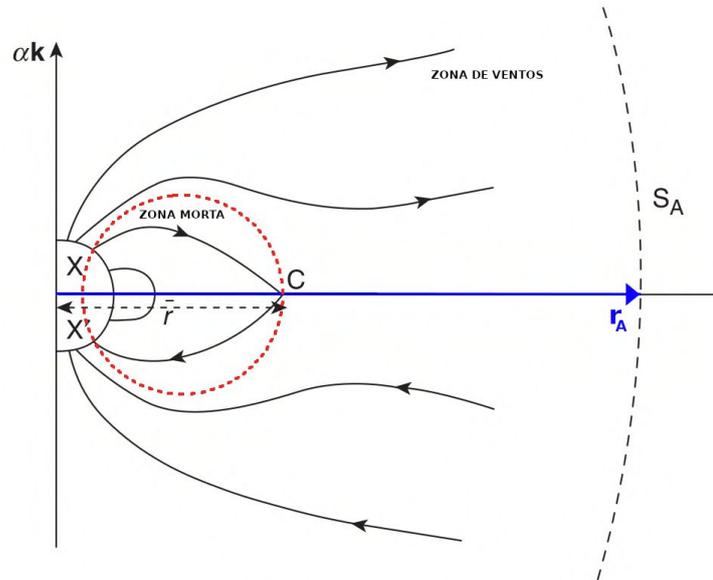
Em um plasma pode-se verificar a presença de vários tipos de ondas. O movimento do plasma paralelo às linhas do campo magnético está associado à dinâmica das ondas sonoras, enquanto o movimento perpendicular às linhas do campo está associado à dinâmica de um tipo de mecanismo de propagação chamado onda de Alfvén (Fitzpatrick, 2022, p. 106). As ondas de Alfvén viajam com velocidade de grupo v_A cuja intensidade se expressa em unidades gaussianas por

$$v_A = \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2}. \quad (2.99)$$

Quando o vento estelar atinge um ponto a uma distância r_A da estrela tal que a sua velocidade se iguala à velocidade de Alfvén, a densidade de energia cinética do gás se iguala à densidade de energia magnética (Preusse *et al.*, 2006). Essa distância r_A é chamada de raio de Alfvén e define uma superfície imaginária S_A chamada superfície de Alfvén. Na Figura 39 podemos observar que na região delimitada por S_A , as linhas de campo se encontram abertas permitindo o transporte de momento e de energia pelas ondas magnetosônicas. Já a região contendo as linhas de campo magnético fechadas é chamada de zona morta, onde o gás se mantém aprisionado. Conforme Mestel (2012, p. 263), as linhas de campo poloidal que não se estendem muito longe da estrela conseguem manter o plasma aprisionado, enquanto as linhas de campo abertas ou radiais que, na ausência do plasma aquecido, estariam fechadas mesmo estando longe da estrela, serão incapazes de conter o gás quente que flui para fora da atmosfera estelar, deformando e abrindo as linhas de campo magnético.

Conforme discutido na Seção 2.4, as partículas do plasma não podem atravessar as paredes do tubo de fluxo e, por isso, as linhas de campo forçam que o vento corrotacione

Figura 39 – Linhas de campo da magnetosfera estelar.



Fonte: Extraída e adaptada de (Mestel, 2012, p. 264).

com a estrela. Como o fluxo é contínuo, há então um transporte contínuo de momento angular a partir da estrela. Uma vez que o campo magnético produz um torque positivo no vento, a estrela sente um torque negativo que faz a sua velocidade de rotação diminuir. Esse processo é chamado de frenagem magnética por ventos estelares. Na seção anterior, também foi mencionado o fato de que o campo magnético poloidal sofre uma torção dando a origem à componente toroidal. Esta última componente é a responsável pelo torque necessário para estabelecer a corotação da estrela com o vento (Mestel, 2012, p. 264).

A deformação das linhas de campo magnético pela rotação causa uma perturbação que se propaga com a velocidade v_A , enquanto o vento se desloca com velocidade v decorrente da pressão hidrostática. Enquanto $v \ll v_A$, o plasma estará contido na atmosfera estelar em corotação efetiva. Quando $v \geq v_A$, o vento deixa a atmosfera estelar e, mesmo que represente uma pequena quantidade de perda de massa, resulta em uma grande quantidade de momento angular perdida (Mestel, 2012, p. 267).

A partir das Eqs. (2.98) e (2.99), podemos escrever o módulo da velocidade de Alfvén em termos das componentes do campo magnético na forma:

$$v_A^2 = v_{Ar}^2 + v_{A\phi}^2 = \frac{B_r^2}{4\pi\rho} + \frac{B_\phi^2}{4\pi\rho}. \quad (2.100)$$

Em um referencial estacionário, a densidade de corrente \mathbf{J} satisfaz a lei de Ohm na forma:

$$\mathbf{J}_c = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), \quad (2.101)$$

em que σ é a condutividade elétrica. Na Seção 2.4 vimos que a condutividade em um plasma no regime ideal ($R_m \gg 1$) tende ao infinito e, dessa forma, para que J seja finito, é necessário que

$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ tenda a zero e, a partir da Eq. (2.101), temos a seguinte relação:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.102)$$

Através da Eq. (2.74), considerando o estado estacionário ($\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$), temos que:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.103)$$

Em coordenadas esféricas, a componente azimutal que satisfaz a Eq. (2.103) é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r (v_r B_\phi - v_\phi B_r) \right] = 0, \quad (2.104)$$

de onde podemos concluir que:

$$r (v_r B_\phi - v_\phi B_r) = C. \quad (2.105)$$

Considerando que na superfície da estrela a velocidade radial $v_r(r = R) \ll v_\phi(r = R)$, podemos negligenciar a componente radial de forma que a velocidade tangencial na superfície v_0 seja $v_0 = v_\phi(r = R) = \Omega R$. De forma semelhante, a componente azimutal $B_\phi(r = R)$ é muito menor que a componente radial $B_r(r = R)$, assim o campo magnético na superfície B_0 é praticamente radial, $B_0 = B_r(r = R)$. Com essas condições de contorno, a Eq. (2.105) pode ser reescrita na forma:

$$r (v_r B_\phi - v_\phi B_r) = R (0 - v_0 B_0) = -R^2 B_0 \Omega. \quad (2.106)$$

Conforme demonstrado na Seção 2.4, o teorema de Alfvén estabelece que o fluxo magnético Φ_B através de uma superfície esférica imaginária de raio r é constante e, por isso, pode-se escrever que:

$$r^2 B_r = R^2 B_0, \quad (2.107)$$

e substituindo a Eq. (2.107) no membro direito de (2.106), obtém-se que:

$$\frac{B_\phi}{B_r} = \frac{v_r - r\Omega}{v_r}, \quad (2.108)$$

permitindo relacionarmos as componentes radial e azimutal do campo magnético em uma distância r . Na Fig. 38, percebe-se que a tangente do ângulo ψ formado entre a direção de \mathbf{B} e $\hat{\mathbf{e}}_r$ corresponde à Eq. 2.108. No caso em que $\psi = 0$, ocorre então a corrotação, e o conjunto vento e estrela giram como um corpo rígido nas imediações da estrela. Analisando a Eq. 2.108, percebe-se que quando $r \gg R$, ou seja, $v_\phi \ll r\Omega$, a componente B_ϕ sofre uma inversão de sentido, causando o curvamento das linhas de campo no sentido oposto ao da rotação da estrela.

Utilizando-se a lei de Ampère em unidades gaussianas:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}_c, \quad (2.109)$$

podemos reescrever a Eq. (2.95) na forma de:

$$\frac{1}{c} (\mathbf{J}_c \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{B_\phi}{r} \frac{d}{dr} (r B_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{B_r}{r} \frac{d}{dr} (r B_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.110)$$

considerando que as derivadas em termos de θ e ϕ são nulas por conta do fluxo equatorial e, no plano equatorial, $B_\theta = 0$ e $\sin \theta = 1$. Assim, vemos que a força de Lorentz produz uma aceleração na direção radial orientada para fora da estrela, enquanto a sua componente azimutal produz o torque sobre o vento estelar.

Analisando-se agora o primeiro termo da equação de movimento (2.96), podemos escrevê-lo na forma da identidade vetorial:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \rho \left[\frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right] \\ &= \rho \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (v_r^2 + v_\phi^2) - \frac{v_\phi}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_r \\ &\quad + \rho \left[\frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Substituindo as Eqs. (2.110) e (2.111) na Eq. (2.96), podemos desmembrar a equação resultante nas direções radial e azimutal. Para a componente radial, tem-se que:

$$\rho \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (v_r^2 + v_\phi^2) - \rho \frac{v_\phi}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) + \frac{dp}{dr} + \rho \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{B_\phi}{r} \frac{d}{dr} (rB_\phi) = 0. \quad (2.112)$$

Considerando a identidade:

$$\frac{v_\phi}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) = \frac{v_\phi}{r} \left(v_\phi + r \frac{dv_\phi}{dr} \right) = \frac{v_\phi^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (v_\phi^2), \quad (2.113)$$

reescrevemos o primeiro termo da Eq. (2.112), a fim de expressá-la na forma de:

$$\rho v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{dp}{dr} + \rho \frac{GM}{r^2} - \rho \frac{v_\phi^2}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{B_\phi}{r} \frac{d}{dr} (rB_\phi) = 0, \quad (2.114)$$

em que os três primeiros termos são idênticos ao da Eq. (2.92) que trata da equação de momento do vento desconsiderando a rotação estelar. Já o quarto e o último termo correspondem à força centrífuga e à força radial magnética por unidade de volume, respectivamente.

Já para a equação de movimento na direção azimutal, tem-se que:

$$\rho v_r \frac{d}{dr} (rv_\phi) = \frac{B_r}{4\pi} \frac{d}{dr} (rB_\phi). \quad (2.115)$$

Pela equação de continuidade de massa $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ aplicada ao plano equatorial e pelas Eqs. (4.8) e (2.97) temos que:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r^2) = 0, \quad (2.116)$$

implicando que o fluxo $\Phi_m = \rho v_r r^2$ seja constante.

Assim, através das Eqs. (2.107) e (2.116), podemos reescrever a Eq. (2.115) na forma:

$$\frac{d}{dr} \left[rv_\phi - \frac{B_r}{4\pi \rho v_r} rB_\phi \right] = 0$$

implicando que a quantidade:

$$rv_\phi - \frac{B_r}{4\pi\rho v_r} r B_\phi = \mathcal{L}_{eq} \quad (2.117)$$

em que \mathcal{L}_{eq} é uma constante de integração. Como o primeiro termo no membro esquerdo da Eq. (2.117) é o momento angular específico transportado pelo gás e o segundo termo representa o torque por unidade de massa associado à tensão magnética, podemos interpretar essa soma que resulta na constante \mathcal{L}_{eq} como sendo o momento angular total por unidade de massa transportado pelo vento para fora da atmosfera estelar no plano equatorial (Lamers; Cassinelli, 1997, p. 262).

Weber e Davis (1967) definem o número de Mach alfvénico radial M_A da seguinte forma:

$$M_A^2 = \frac{4\pi\rho v_\phi^2}{B_r}, \quad (2.118)$$

e, através das Eqs. (2.106) e (2.117), escrevem a velocidade azimutal v_ϕ na forma:

$$v_\phi = \Omega r \frac{M_A^2 \mathcal{L}_{eq} r^{-2} \Omega^{-1} - 1}{M_A^2 - 1} \quad (2.119)$$

Esses autores afirmam que M_A na superfície Sol é muito menor do que 1 podendo crescer em uma ordem de grandeza a uma distância de 1 unidade astronômica. Weber e Davis também discutem uma posição r para a qual $M_A = 1$, definindo-a como o ponto crítico alfvénico ou raio de Alfvén r_A . Assim, quando $r \rightarrow r_A$ o denominador de (2.119) tende a zero e, para que v_ϕ não divirja, é necessário que o numerador da Eq. (2.119) tenda a zero no mesmo ponto e, assim, resulta que:

$$\mathcal{L}_{eq} = \Omega r_A^2. \quad (2.120)$$

Sendo \mathcal{L}_{eq} uma constante que mede a quantidade de momento angular da estrela J por unidade de massa M transportada pelo vento, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{dJ}{dM} = \mathcal{L}_{eq}, \quad (2.121)$$

Considerando a taxa de variação do momento angular da estrela escrita na forma:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dM}{dt} \frac{dJ}{dM}, \quad (2.122)$$

podemos escrever, para o plano do equador ($\theta = \pi/2$), a taxa de variação de momento angular da estrela. Substituindo as Eqs. (2.120) e (2.121) na Eq. (2.122), obtemos a seguinte relação:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dM}{dt} \Omega r_A^2. \quad (2.123)$$

Essa é a taxa com que o momento angular da estrela é perdido no plano do equador. Para obtermos a taxa de perda de momento para toda a superfície da estrela \mathcal{L} , é necessário integrarmos $\mathcal{L}(\theta)$ em toda a superfície esférica, variando-se a colatitude θ . Reescrevendo a Eq. (2.117) em termos da coordenada θ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta) &= r \sin \theta v'_\phi - \frac{B_r}{4\pi\rho v_r} r \sin \theta B'_\phi \\ &= r v_\phi \sin^2 \theta - \frac{B_r}{4\pi\rho v_r} r B_\phi \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.124)$$

na qual $v'_\phi = v_\phi \sin \theta$ e $B'_\phi = B_\phi \sin \theta$ são escritos em termos das componentes no caso equatorial. Assim, comparando as Eqs.(2.117) e (2.124), percebe-se que:

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_{eq} \sin^2 \theta. \quad (2.125)$$

Definindo-se o momento angular específico total j que flui para fora da estrela em termos de:

$$j = \frac{1}{4\pi r^2} \oint \mathcal{L}(\theta) dS, \quad (2.126)$$

em que dS é um elemento de área na superfície esférica de raio r . Em coordenadas esféricas, um elemento de área situado em um coordenada θ é escrito $ds = r \sin^2 \theta d\theta d\phi$ e, assim, o momento angular específico total pode ser reescrito na forma:

$$j = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \mathcal{L}(\theta) r^2 \sin \theta d\theta. \quad (2.127)$$

Substituindo a Eq. (2.125) na Eq. (2.127):

$$\begin{aligned} j &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}_{eq} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{eq} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{eq} \int_1^{-1} (1 - u^2) du \\ &= \frac{2}{3} \mathcal{L}_{eq}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Como j é constante, procedemos de forma semelhante ao que realizamos para obter a Eq. (2.121) e, portanto, escrevemos:

$$j = \frac{dJ}{dM} = \frac{2}{3} \mathcal{L}_{eq}, \quad (2.129)$$

e, através das Eqs. (2.120) e (2.122), a taxa com que o momento angular total é perdido em toda a superfície da estrela é expressa por:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dM}{dt} \Omega r_A^2. \quad (2.130)$$

Essa é a mesma expressão que Weber e Davis (1967) obtiveram para determinar a taxa de frenagem magnética do Sol. A Eq. (2.130) será utilizada como ponto de partida no modelo de Kawaler (1988), conforme discutiremos no Capítulo 4.

Analisando-se a Eq. (2.130), percebe-se que quanto mais rápido a estrela girar, ou seja, quando Ω crescer, maior será a taxa com que a estrela irá perder o seu momento angular. Além disso, quanto maior for a taxa de perda de massa, maior será o processo de frenagem. Como a perda de massa é um processo contínuo, quanto maior for o intervalo de tempo decorrido desde a formação da zona convectiva de uma estrela de baixa massa, maior será a duração do processo

de frenagem e isso pode explicar o porquê de tais estrelas apresentarem baixas velocidades de rotação durante uma fase significativa de sua evolução.

Na próxima seção discutiremos como a rotação está associada à evolução estelar e como a frenagem magnética pode explicar as distribuições de velocidade rotacional entre diferentes estágios evolutivos e tipos espectrais.

2.6 Rotação e evolução de estrelas de baixa massa

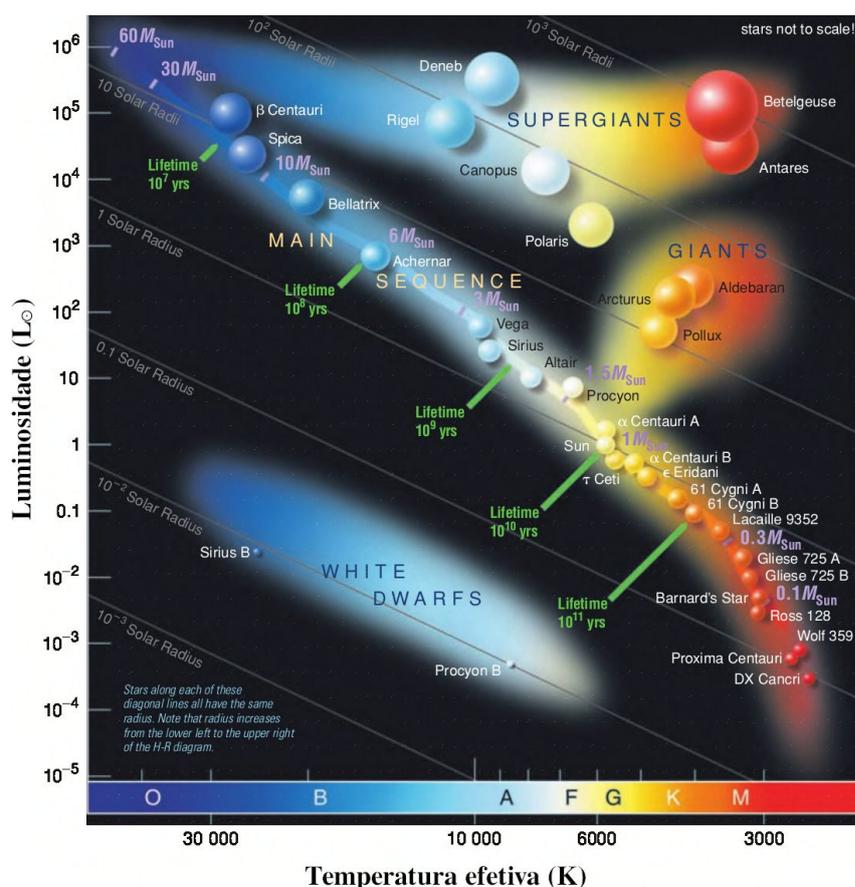
A rotação estelar é uma consequência da tendência de conservação do momento angular presente antes mesmo da formação da estrela. Uma estrela se forma a partir de uma nuvem molecular em colapso que pode estar em rotação e, à medida que a região central da nuvem se contrai, a sua taxa de rotação aumenta devido à conservação do momento angular (Ekström, 2023, p. 2878). Apesar da estrela ser formada a partir da autogravitação dessa nuvem, o que nos levaria a desprezar o efeito de torques externos, as observações demonstram que o momento angular estelar pode sofrer variações durante a evolução da estrela.

Antes de analisarmos a relação existente entre a rotação e a idade estelar, faremos uma breve digressão sobre a evolução estelar de estrelas de baixa massa ($M \leq 2M_{\odot}$). Isso se faz necessário pois, durante o seu processo evolutivo, a estrela passa por várias modificações estruturais que podem influenciar a rotação estelar. Por outro lado, a própria rotação também pode influenciar a evolução estelar. Iniciaremos analisando as transformações pelas quais as estrelas passam em seus estágios finais de existência e, em seguida, discutiremos o processo formativo delas.

O diagrama de Hertzsprung-Russel (H-R) nos permite avaliar propriedades fundamentais das estrelas em diferentes estágios evolutivos. Relacionando a luminosidade e a temperatura efetiva (classe espectral) das estrelas, esse diagrama também permite que relacionemos o raio e a massa estelar. Na Fig. 40 podemos observar uma classe de luminosidade onde as estrelas se distribuem aproximadamente na diagonal do diagrama e passam uma parte significativa do seu tempo de existência, a sequência principal. Nesse estágio, as estrelas utilizam o processo de fusão nuclear de núcleos de hidrogênio para formar núcleos de hélio como fonte de energia para suprir o equilíbrio hidrostático nessa fase evolutiva.

As estrelas posicionadas acima da sequência principal apresentam uma degenerescência com relação à luminosidade para uma mesma temperatura efetiva. Nessa região, temos dois grupos de estrelas: gigantes e supergigantes. Tratam-se de estágios evolutivos pós-sequência principal. O fato dessas estrelas serem mais frias e mais luminosas do que o Sol indica que elas apresentam raios maiores do que o raio solar. Sendo um estágio evolutivo posterior ao da sequência principal, deduz-se que a estrela sofre um aumento de raio ao sair da sequência principal. De fato, essas estrelas já exauriram o conteúdo de hidrogênio em seus núcleos e estão executando outros tipos de reação a fim de manterem a sua estabilidade ante a contração gravitacional (Bennett *et al.*, 2013, p. 532). A Fig. 41 apresenta a trilha evolutiva, pós-sequência

Figura 40 – Diagrama de Hertzsprung-Russel.



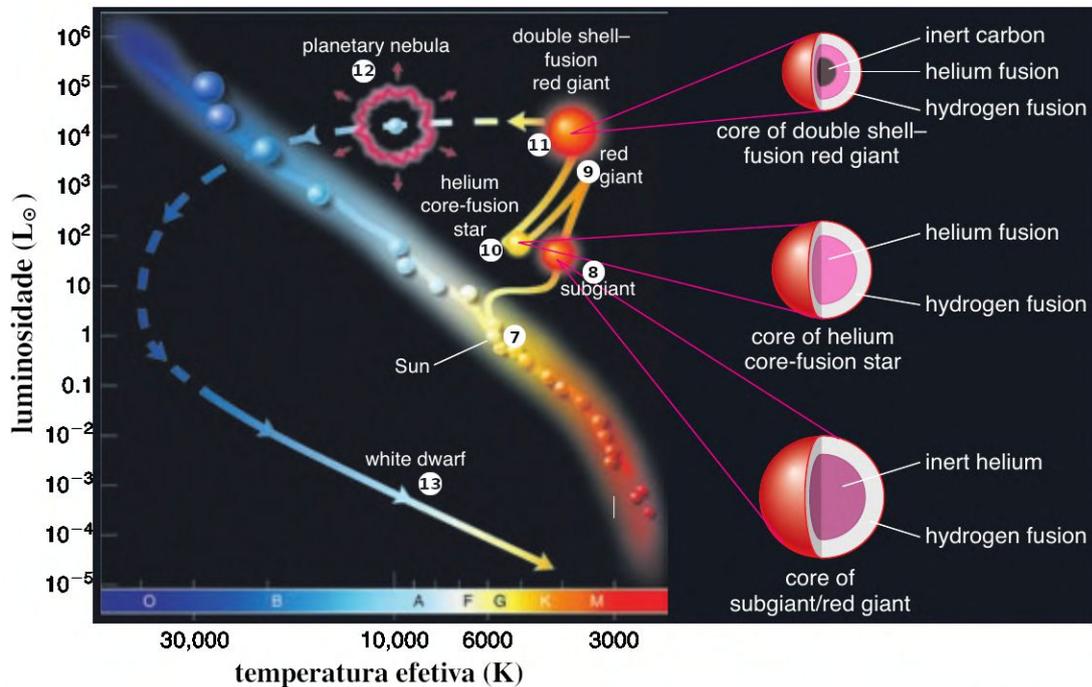
O tempo de permanência das estrelas na sequência principal está indicado pelas setas verdes. Um estrela do tipo solar ($M \sim M_{\odot}$) passa cerca de 10 bilhões de anos na sequência principal. As retas em cinza estabelecem os valores dos raios estelares. Os tipos espectrais iniciais (O, B, A e F0-5) e os tardios (F6-9, G, K, M) estão especificados pela escala de cores. Fonte: Extraída e adaptada de (Bennett *et al.*, 2013, p. 529).

principal, para uma estrela do tipo solar. Os estágios evolutivos estão enumerados iniciando a partir do estágio 07 que marca a saída da sequência principal. À direita do diagrama H-R, é possível observar uma representação da estrutura do núcleo em alguns dos estágios.

Quando as estrelas de baixa massa deixam de realizar as reações de fusão em seu núcleo, elas passam por uma mudança no seu equilíbrio hidrostático, saindo da sequência principal, conforme indicado pelo estágio 07 na Fig. 41. Com o seu núcleo sofrendo uma redução de tamanho e as suas camadas atmosféricas se expandindo e diminuindo de temperatura, a estrela aumenta o raio e a sua luminosidade. Assim, uma estrela de baixa massa, ao sair da sequência principal, passa para o ramo das subgigantes (estágio 08), levando cerca de um bilhão de anos para atingir a classe de luminosidade das estrelas gigantes (estágio 09) (Bennett *et al.*, 2013, p. 567).

Enquanto isso ocorre, a fusão do hidrogênio ocorre fora do núcleo, mas em uma região adjacente e com uma taxa de fusão mais rápida cuja pressão térmica produzida contribuirá para expandir o envelope convectivo. Isso resulta tanto no aumento do raio estelar, quanto no aumento de luminosidade. À medida que as camadas mais externas se expandem elas diminuem

Figura 41 – Trilha evolutiva de uma estrela do tipo solar.



A partir do momento em que o processo de fusão nuclear dos núcleos de hidrogênio é interrompido pela escassez desses núcleons, a estrela deixa o estágio 07 de equilíbrio hidrostático e passa por sucessivas mudanças até chegar a sua forma remanescente de anã-branca (estágio 13). Em alguns desses estágios, o núcleo pode passar "brevemente" por períodos de equilíbrio hidrostático. Fonte: Extraída e adaptada de (Bennett *et al.*, 2013, p. 571).

a temperatura efetiva. Enquanto o núcleo segue se contraindo, a sua temperatura vai aumentando até atingir cerca de 10^8 K. Nessa temperatura, a fusão dos núcleos de hélio já se torna possível e o processo de fusão passa a ocorrer novamente no núcleo da estrela. Uma vez iniciada a fusão do hélio, o núcleo não consegue se expandir rapidamente, havendo um súbito aumento da temperatura e produzindo o *flash* de hélio no estágio 09 da Fig. 41. Nesse processo, em busca de um novo equilíbrio hidrostático, a pressão térmica no núcleo sobrepõe-se à gravidade e o núcleo passa a se expandir, diminuindo a sua temperatura e quantidade de energia produzida. Com a diminuição da energia produzida, as camadas mais externas enfrentam agora uma contração que resulta no aumento da temperatura efetiva.

Conforme a quantidade de massa perdida nas camadas mais externas devido à diminuição da atração gravitacional durante a expansão, as estrelas poderão apresentar raios menores e temperaturas maiores, embora apresentem luminosidade similares (estágio 10) (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 335). Esse processo se caracteriza por um deslocamento da posição da estrela para a esquerda no diagrama H-R, no chamado ramo horizontal. É importante ressaltar que dois processos de fusão nuclear estão ocorrendo ao mesmo tempo na estrela em regiões ligeiramente diferentes, conforme (Bennett *et al.*, 2013, p. 569).

A fusão do hélio produz núcleos de carbono que vão se acumulando no núcleo da estrela (estágio 11) e, conforme a taxa de reação vai diminuindo, o núcleo se contrai e aumenta tanto a sua temperatura, quanto a das camadas vizinhas onde ainda ocorre a fusão de núcleos de

hidrogênio e de hélio. Nesse processo, as camadas mais externas voltam a se expandir seguindo o ramo assintótico das gigantes. Enquanto a temperatura do núcleo não for alta o suficiente para realizar a fusão dos átomos de carbono, o núcleo continuará se contraindo e, para estrelas com a massa do Sol, nunca atingirá o patamar de $6 \cdot 10^8$ K necessário para iniciar a fusão do carbono nuclear. As camadas subjacentes produzem energia mais rapidamente, expandindo o restante das camadas externas e as perdendo para o espaço.

À medida que o núcleo esgota o conteúdo da fusão, ele se contrai e se aquece, movendo-se para a esquerda no diagrama H–R. A temperatura do núcleo é intensa o suficiente para produzir uma radiação na faixa do ultravioleta que ioniza os resquícios das camadas externas, produzindo uma emissão de radiação dos gases que é característica dos objetos que são chamados de nebulosas planetárias (estágio 12) (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 336). Em seguida, a luminosidade diminui e o núcleo que restou da estrela tem o colapso gravitacional contrabalanceado pela pressão de degenerescência, estando com temperatura da ordem de $3 \cdot 10^8$, caracterizando o estágio de anã branca (estágio 13).

Devido a essa variação no raio após as estrelas deixarem a sequência principal e conforme a Eq. (2.5), espera-se que o momento de inércia e, conseqüentemente, o momento angular sofram alterações nesse estágio evolutivo. É importante notar que outros fenômenos, como os ventos magnetizados, podem influenciar o momento angular de estrelas de baixa massa, antes (Maeder, 2009, p. 543), durante e após a sequência principal (Ceillier *et al.*, 2017).

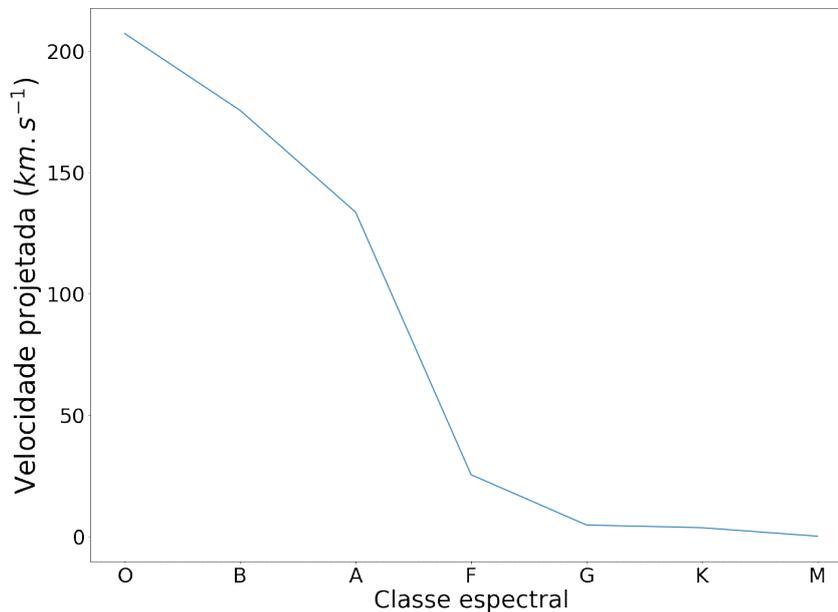
Desde as primeiras medidas espectroscópicas de $v \sin i$ no início do século XX, tem sido relatada a existência de correlações entre $v \sin i$, assim como de outras grandezas, com a classe espectral à qual a estrela pertence. Na Fig. 42, podemos observar o comportamento do valor médio da componente $v \sin i$ para algumas estrelas distribuídas em diferentes tipos de classes espectrais. A queda abrupta da velocidade média projetada ocorrendo na parte central do tipo espectral F foi chamada por Kraft (1967) de *break* ou ruptura, ocorrendo para a temperatura efetiva de cerca de 6200 K e para estrelas com massa de $1,3 M_{\odot}$.

Otto Struve, em 1930, foi o primeiro a apontar que a rotação rápida de estrelas individuais é característica em tipos espectrais do tipo inicial, enquanto a rotação lenta está associada aos tipos espectrais tardios como F intermediários e posteriores da sequência principal (Tassoul; Tassoul, 2004, p. 177). As estrelas da sequência principal pertencentes aos tipos espectrais O, B, A e a primeira parte do tipo F, também chamadas de tipo inicial ou *early-type stars*⁶, possuem velocidades de rotação da ordem de algumas centenas de quilômetros por segundo, enquanto as estrelas de menor temperatura, como aquelas dos tipos espectrais da segunda parte do tipo F, G, K e M (*late-type*), tem velocidades de rotação variando desde

⁶ No início do séc. XX, acreditava-se que as estrelas com temperatura maior estavam no início da sua vida, enquanto aquelas com menores temperaturas, já teriam evoluído e encontravam-se em uma fase final da sua existência. Os termos *early* e *late* faziam referência a esses estágios evolutivos. Apesar de ser uma nomenclatura equivocada, ainda é mantida por questões de tradição e pode ser utilizada em situações nas quais se faz uma comparação entre estrelas com diferentes temperaturas efetivas. Por exemplo, uma estrela do tipo B e subclasse 0 é do tipo *early*, porém, quando comparada a uma estrela do tipo O subclasse 0 (maior temperatura), é chamada, relativamente, de mais tardia (*latest*) do que a última.

algumas unidades até algumas dezenas de quilômetros por segundo.

Figura 42 – Distribuição de velocidades projetadas segundo a classe espectral.



As velocidades projetadas de rotação sofrem uma diminuição abrupta para as estrelas da classe espectral F. O gráfico foi produzido a partir da média dos valores médios de $v \sin i$ para as estrelas pertencentes a uma mesma classe espectral extraídos do catálogo de velocidades de rotação estelar no *VizieR* (Glebocki; Gnacinski, 2005), envolvendo 659 estrelas. Fonte: elaborada pelo autor.

Em meados da década de 50 do séc. XX, as evidências observacionais e teóricas já davam suporte para a ideia de que a estrutura de uma estrela fosse determinada pela sua composição química original, pela sua massa e pela sua idade (Tassoul; Tassoul, 2004, p. 152). A distribuição das velocidades de rotação ao longo da sequência principal é bastante notável, mas para estrelas fora da sequência principal, conforme Tassoul (2004, p. 179), o fato de que estrelas gigantes do tipo inicial girarem mais lentamente do que as estrelas com mesmo tipo espectral na sequência principal levaram a Sandage e Slettebak a correlacionarem esse fenômeno com a evolução estelar. A diferença rotacional se daria em virtude da conservação do momento angular, pois tais estrelas teriam aumentado o seu raio ao deixarem a sequência principal e, devido ao aumento da inércia rotacional, a velocidade de rotação diminuiria.

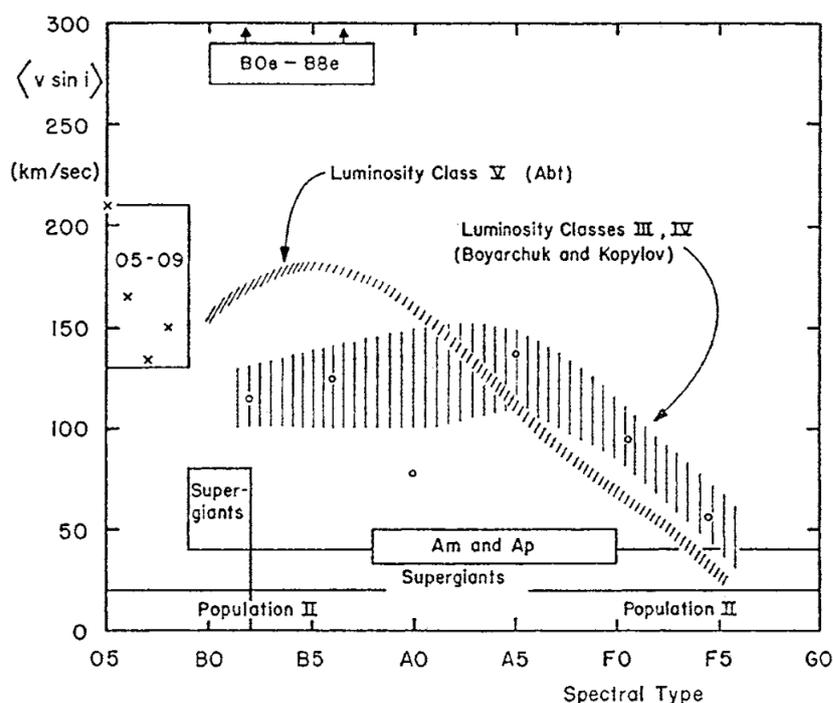
Tassoul (2004, p. 179) analisa o gráfico da Fig. 43 que fora apresentado no trabalho de Slettebak (1970, p. 5), no qual, o autor reúne diversas medidas de velocidade projetada de estrelas de diferentes classes espectrais e em diferentes classes de luminosidade. O gráfico mostra que estrelas de tipo espectral Am⁷ e Ap⁸, em sua maioria, bem como as supergigantes, apresentam velocidades de rotação inferiores aquelas encontradas em tipos espectrais correspondentes na sequência principal. Com velocidades de rotação ainda menores, encontram-se as estrelas da população II que são estrelas encontradas em regiões específicas da galáxia e

⁷ São estrelas cujas linhas de absorção são intensas e variáveis correspondendo a metais como zinco e bário, por exemplo. Elas recebem uma denominação espectral complementar, adicionando a letra "m" ao tipo espectral A.

⁸ São estrelas de tipo espectral A com um campo magnético mais intenso (possivelmente variável) que as estrelas de tipo espectral correspondente na sequência principal.

caracterizadas por apresentarem baixa metalicidade (Maciel, 2018, p. 35). No outro extremo do gráfico, setas indicam que que estrelas do tipo espectral B com linhas de emissões do hidrogênio (Be) apresentam velocidades projetadas superiores a 300 km.s^{-1} , mostrando que essas estrelas apresentam velocidades de rotação maiores que as suas correspondentes na sequência principal e de outras classes de luminosidade.

Figura 43 – Distribuição de velocidades em diferentes classes de luminosidade.



A classe de luminosidade V corresponde à sequência principal. Nesta classe, até o centro da faixa de temperatura que compreende o tipo espectral F, ou seja de F0 a F9, a velocidade de rotação segue diminuindo. Para uma estrela de tipo espectral F0, por exemplo, percebe-se que nas classes de luminosidade III (gigantes normais) e IV (subgigantes) a velocidade de rotação é maior do que uma estrela correspondente na sequência principal. O mesmo ocorrendo para estrela do tipo Be. Por outro lado, estrelas Am e Ap, assim como as estrelas supergigantes, são rotacionadoras mais lentos que as suas correspondentes de tipo espectral na sequência principal. Esse comportamento das estrelas gigantes pode ser interpretado como um efeito evolutivo. Extraído de: (Slettebak, 1970, p. 5).

Segundo Tassoul (2004, p. 180), Helmut Abt, assim como outros astrofísicos, associaram a baixa rotação como sendo uma condição necessária para a abundância química anormal em estrelas Am e Ap, mas a explicação para a baixa rotação em estrelas Am seria atribuída à interação de maré em sistemas binários de estrelas, pois a maior parte das estrelas desse tipo, conhecidas à época, se encontrava acompanhada de uma segunda estrela. Já para as estrelas do tipo Ap, o mecanismo por trás da baixa rotação aparentava ser de outra natureza, uma vez que nessas estrelas a intensidade do campo magnético também era uma peculiaridade.

Segundo Schwarzschild (1961), no início do século XX, havia várias discussões acerca do transporte de energia a partir do núcleo para a superfície da estrela. Alguns modelos afirmavam que o processo seria somente convectivo e outros atribuíam o transporte somente ao mecanismo radiativo. Com a descoberta do processo de fusão nuclear, tornou-se possível ter mais informações a respeito da estrutura do interior estelar durante a sequência principal, bem

como, investigar quantitativamente as transformações evolutivas da estrela conforme as reações nucleares evoluíssem (Schwarzschild, 1956).

Schwarzschild (1961) afirma que se o processo de geração de energia fosse realizado pela cadeia próton-próton, o núcleo estelar não estaria envolto de uma região convectiva, enquanto que se o processo ocorresse pela via do ciclo CNO, o núcleo estaria envolto de uma camada convectiva, havendo portanto, uma transição com relação aos envelopes convectivos a depender do tipo de reação nuclear. As estrelas do tipo inicial, anteriores ao tipo F, teriam envelopes em equilíbrio radiativo, enquanto as estrelas de tipo tardio, teriam envelopes convectivos. A partir desse comportamento, sugeriu-se que a zona convectiva, presente na camada na parte mais exterior das estrelas de tipo tardio e mais internamente nas estrelas de tipo inicial, tenha uma importante influência na diminuição da velocidade de rotação de certos tipos de estrelas (Rozelot, 2009, p. 3).

Segundo Tassoul (2004, p. 180), a descoberta do forte magnetismo em estrelas do tipo Ap conduziu ao mecanismo de frenagem magnética como uma forma de explicar a rotação lenta daquelas estrelas. No entanto, à época, ainda não estaria claro se parte do momento angular seria perdida antes ou durante a sequência principal. Conforme já apresentado na Seção 2.5, Schatzman (1962) propôs então que o processo de frenagem magnética realizado pelos ventos estelares ocorresse somente para estrelas que tivessem um envelope convectivo profundo e, com isso, o tipo espectral poderia ser utilizado tanto para separar os regimes de rotação quanto o tipo de transporte de energia abaixo da fotosfera das estrelas.

Conforme discutido na Seções 2.2 e 2.4, a atividade estelar é fortemente influenciada pelos fenômenos magnéticos que ocorrem na zona convectiva e que se estendem para atmosfera estelar. Na cromosfera solar, por exemplo, a presença de plagues está estreitamente relacionadas ao aumento de intensidade das linhas de Fraunhofer H e K de emissão de Ca II (Sowmya *et al.*, 2023). Através de observações das linhas de emissão de Ca II em estrelas do tipo solar nos aglomerados abertos das Plêiades, Híades e Ursa Maior, Skumanich (1972) verificou a existência de uma relação entre a velocidade de rotação e a idade estelar, de forma que tanto a emissão na referida linha espectral, quanto a velocidade de rotação, decaíam com o inverso da raiz quadrada da idade estelar, essa relação é conhecida como a lei empírica de Skumanich e se expressa matematicamente por:

$$\Omega = Ct^{-1/2}, \quad (2.131)$$

em que Ω é a velocidade angular, t é a idade da estrela e C uma constante de ajuste. Como o momento angular J pode ser expresso por:

$$J = I\Omega \quad , \quad (2.132)$$

ao considerarmos o momento de inércia I constante, podemos afirmar que a variação temporal do momento angular será proporcional à variação da velocidade angular de rotação da estrela:

$$\frac{dJ}{dt} = I \frac{d\Omega}{dt}. \quad (2.133)$$

Derivando-se temporalmente a lei de Skumanich, concluímos que a taxa de variação de Ω é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{C}{2}t^{-3/2} \\ &= -C'\Omega^3,\end{aligned}\tag{2.134}$$

com C e C' constantes. Substituindo-se a Eq. (2.134) na Eq. (2.133), obtém-se que:

$$\frac{dJ}{dt} \propto -\Omega^3.\tag{2.135}$$

Percebe-se, portanto, que a lei de Skumanich reproduz a previsão da perda de momento angular proposta anteriormente por Schatzman e que, para estrelas do tipo G, a taxa de perda de momento angular \dot{J} é proporcional a Ω^3 . É importante ressaltar que a relação empírica de Skumanich, na qual vários estudos são baseados, é válida em um intervalo de velocidade de 1 a 30 km/s, mas a sua aplicabilidade para estrelas da sequência principal pertencentes a sistemas binários, onde se observa velocidades de rotação superiores a 100 km/s, é questionável (Ivanova; Taam, 2003).

Em outros regimes de rotação, como em rotadores rápidos, por exemplo, a relação empírica de Skumanich na Eq. (2.131) pode ter o seu expoente da velocidade angular de rotação modificado, assumindo valores em um intervalo de 0,5 a 4 (Mestel, 1984, p. 56). Em trabalhos posteriores, como o de Keppens, MacGregor e Charbonneau (1995), encontra-se uma lei de escala que, para rotadores lentos, reproduz a taxa de perda de momento angular proveniente da lei de Skumanich. Já para velocidades de rotação maiores, os autores obtiveram uma lei de potência do tipo $\dot{J} \propto \Omega^2$, atribuindo essa modificação no expoente ao efeito centrífugo da rotação. Todos esses trabalhos se utilizaram do modelo de vento estelar proposto por Weber e Davis (1967) que foi discutido na Seção 2.5.

No entanto, observações posteriores em aglomerados abertos demonstraram que a ruptura de Kraft desaparecia para estrelas de diferentes tipos espectrais. É amplamente aceito que estrelas pertencentes a um mesmo aglomerado tenham a mesma idade. Aglomerados globulares contém estrelas mais antigas do que os aglomerados abertos. Nesses tipos de aglomerados, era possível encontrar estrelas anãs do tipo K e M com velocidades de rotação variando desde valores menores que 10 km/s chegando até 150 km/s. A lei de Skumanich superestimava a taxa de redução de velocidade angular *spin-down* para estrelas com idade de cerca de 10^8 anos e, assim, não explicava a presença desses rotadores rápidos no aglomerado aberto das Plêiades (Stauffer; Hartmann, 1987). A partir da segunda metade da década de 80 do século passado, com maiores conjuntos de dados de velocidades rotacionais de estrelas jovens e de baixa massa, os pesquisadores passaram a investigar a perda de momento angular antes mesmo do estágio de sequência principal (Stauffer, 1987, p. 182).

O processo de formação estelar resulta de uma grande variação de densidade, com o gás de uma nuvem molecular com densidade de cerca de 10^{-23} g cm⁻³ sendo comprimido para um corpo cuja densidade média é de 1,4 g.cm⁻³, como no caso do Sol. As estrelas mais massivas da sequência principal, como aquelas de tipo espectral O e B são formadas em nuvens

moleculares gigantes, enquanto estrelas de baixa massa, tipos espectrais G, K e M, estão tipicamente associadas a nuvens moleculares menores e escuras (Cernicharo, 1991, p. 287).

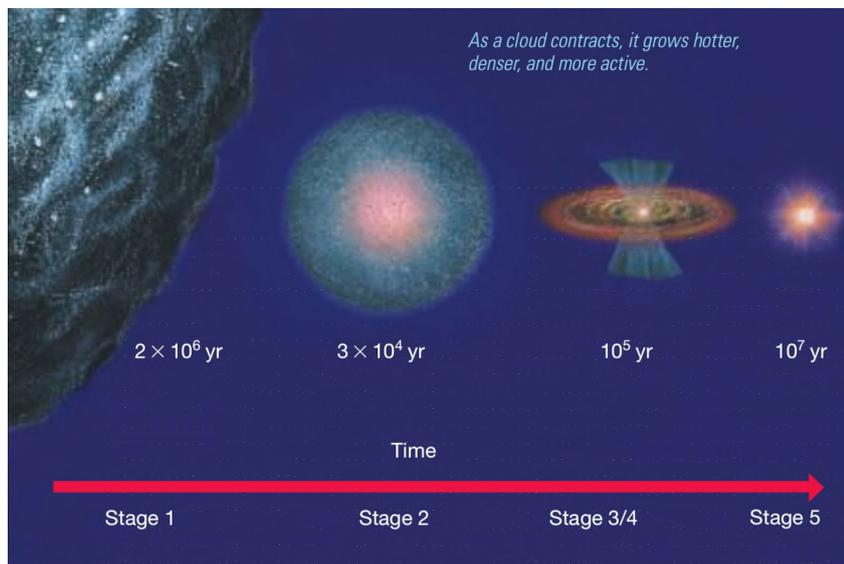
O estudo dos estágios iniciais de evolução de estrelas de baixa massa oferece mais vantagens do que para as estrelas de alta massa e isso pode ser constatado a partir da comparação dos tempos de escala envolvidos na formação de estrelas (Lada, 1991, p. 329). O tempo de queda livre para que a matéria da nuvem colapse até formar um objeto estelar jovem é dado por (Maeder, 2009, p. 484):

$$\tau_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}, \quad (2.136)$$

em que ρ é densidade da nuvem molecular. Para uma nuvem com densidade média de 10^{-20} g.cm⁻³, esse tempo é da ordem de $4 \cdot 10^5$ anos. Conforme veremos, o colapso resulta na formação de um objeto estelar jovem chamado de protoestrela.

Durante a formação estelar, podemos diferenciar três fases: pré-estelar, protoestrelar e pré-sequência principal (Maeder, 2009, p. 475). Na Fig. 44, podemos observar um esquema ilustrativo desses estágios:

Figura 44 – Estágios da formação estelar.



Estágios 1 e 2 compreendem a fase pré-estelar: a formação estelar se inicia com uma contração de uma nuvem de gás e poeira e à medida que a nuvem vai se contraindo ocorre a fragmentação de regiões menores. Os estágios 3 e 4 marcam a formação da protoestrela e dos discos de acreção. No estágio 5, a protoestrela continua evoluindo e a sua contração é influenciada em grande parte pela taxa com a qual ela pode irradiar a sua energia interna para o espaço, mas isso ocorre de uma forma mais lenta. Fonte: Extraída e adaptada de (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 319).

Na fase pré-estelar ocorre a contração e a fragmentação da nuvem molecular, ambos controlados pelo critério de Jeans. Segundo Chaisson (2017, p. 316), uma nuvem típica pode formar dezenas, centenas e até milhares de fragmentos, cada um destinado a formar uma estrela ou grupo de estrelas. A nuvem de gás e poeira poderá colapsar a partir de um certo valor de massa (massa de jeans) e raio (raio de Jeans) em um processo que pode durar até milhões de anos,

dependendo da densidade inicial da nuvem. Além disso, é importante ressaltar que a presença de campos magnéticos e turbulências podem retardar esse processo.

Segundo Maeder (2009, p. 484), as observações indicam a existência de nuvens com massa superiores a massa de Jeans mas que estão em equilíbrio hidrostático, fato que pode sugerir que a ação de campos magnéticos e da turbulência possa produzir efeitos que se oponham à contração gravitacional. Tais campos podem contribuir para a sustentação das nuvens e podem ser um obstáculo à rápida formação de estrelas. Os valores atuais dos campos no meio interestelar estão abaixo de cerca de $10 \mu\text{G}$ e os campos geralmente são mais elevados em regiões mais densas e se intensificam ainda mais durante a fase do colapso protoestelar.

A densidade de energia u_B de um campo magnético B se expressa por:

$$u_B = \frac{B^2}{8\pi}, \quad (2.137)$$

enquanto a densidade de energia gravitacional média u_G de uma nuvem homogênea de massa M e raio R se expressa por:

$$u_G = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)} = \frac{9}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (2.138)$$

Quando essas duas densidades são comparáveis, assume-se que u_G é produzida por uma massa M_B , assim, igualando-se as Eqs. (2.137) e (2.138), obtém-se que:

$$M_B = \left(\frac{5}{18G} \right)^{\frac{1}{2}} BR^2, \quad (2.139)$$

então, qualquer nuvem com massa superior a M_B conseguirá colapsar e o tempo de queda livre não será influenciado. Caso $M < M_B$, a nuvem é suportada pelo campo magnético que progressivamente se difunde para fora da nuvem. Isso demonstra o fato de que campos magnéticos podem desempenhar um papel importante logo no início da formação estelar. No entanto, alguns trabalhos recentes sugerem que os efeitos da turbulência interestelar são maiores durante o colapso e a fragmentação das nuvens (Maeder, 2009, p. 486).

A fragmentação hierárquica de uma nuvem de gás foi proposta pela primeira vez por Hoyle como um análogo gravitacional ao decaimento de redemoinhos turbulentos (Zinnecker, 1984). À medida que a densidade na nuvem em contração aumenta, a massa de Jeans diminui e partes da nuvem original tornam-se gravitacionalmente instáveis por si só. Portanto, essas partes podem começar a se contrair, fazendo com que a nuvem original se fragmente (Kippenhahn; Weigert; Weiss, 2012, p. 307).

Devido à rotação, o processo de fragmentação hierárquica pode ser retardado. Durante a contração, os fragmentos podem adquirir momento angular suficiente para que forças inerciais possam surgir. Isto poderia prevenir ou, pelo menos, atrasar o processo de contração e a fragmentação em escalas menores, de modo que apenas algumas etapas de fragmentação pudessem ocorrer. Com uma maior duração do processo, os fragmentos poderiam interagir e talvez se unir aos demais (Maeder, 2009, p. 492).

No estágio 2 da Fig. 44, temos um fragmento que continua se contraindo e, mesmo que esteja mais denso, a sua temperatura não difere muito da nuvem que o originou pois a radiação conseguem escapar sem ser reabsorvida e, em seu centro, o fragmento apresenta uma temperatura de cerca de 100 K. Após algumas dezenas de milhares de anos, a contração do fragmento resulta em uma região central mais densa e opaca à radiação (estágio 3 da Fig. 44), dando início a fase protoestelar (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 317).

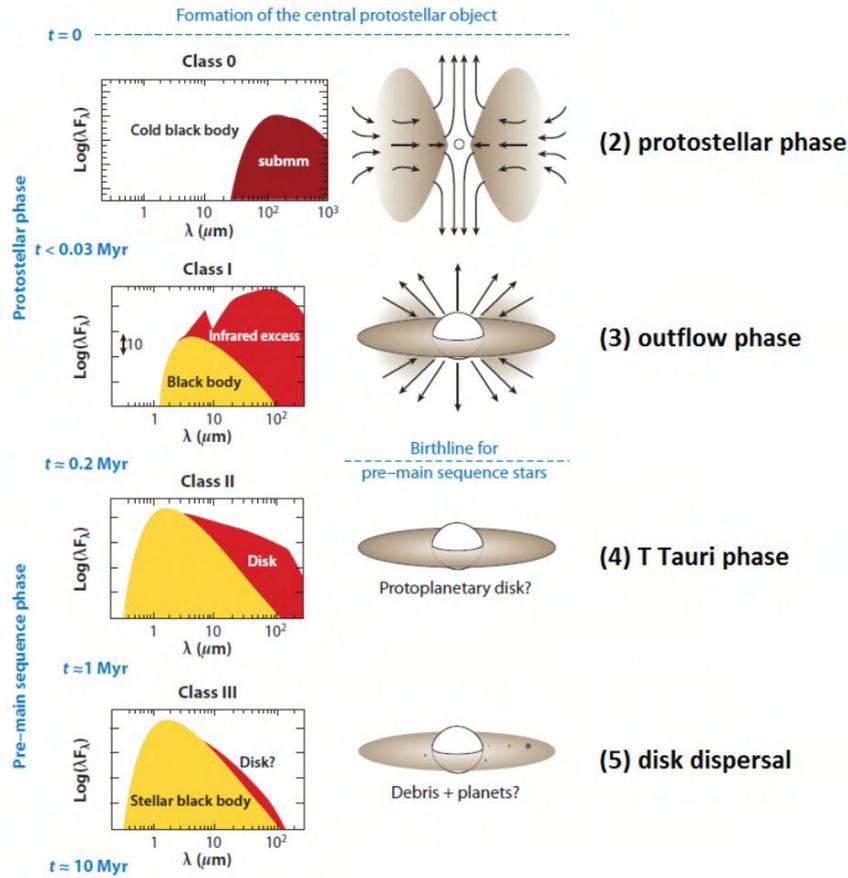
Nessa fase, ocorre a evolução do fragmento até o estágio em que o crescimento da pressão interna no núcleo central interrompe a rápida contração e a fragmentação, assim o núcleo central atinge o equilíbrio hidrostático e evolui quase adiabaticamente. No entanto, a matéria ao seu redor continua colapsando (Kippenhahn; Weigert; Weiss, 2012, p. 316). No final do estágio 3, podemos diferenciar duas regiões, a central e a superficial. A parte central está com uma temperatura da ordem de 10^6 K enquanto a superficial encontra-se a 10^3 K, elas compõem o que se entende por protoestrela. Com essa temperatura central ainda não ocorrem as reações de fusão nuclear e, por isso, a luminosidade produzida é gerada pela energia cinética do gás devido à contração gravitacional (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 317). As protoestrelas são consideradas como um objeto estelar jovem e podem girar rapidamente devido ao aumento de velocidade angular adquirido na contração da nuvem.

Outra característica marcante da fase protoestelar para estrelas de baixa massa é a presença de discos circunstelares de acreção (Fig. 45). Tais discos fornecem assinaturas observáveis das protoestrelas envoltas por ele e permitem a dissipação de momento angular para que possa ocorrer a acreção de matéria à protoestrela e contribuem para a rotação axial da protoestrela (Maeder, 2009, p. 497).

A poeira circunstellar associada aos objetos estelares jovens também tem uma extensão espacial consideravelmente maior do que a de uma fotosfera estelar. Consequentemente, a emissão de poeira circunstellar, que está em equilíbrio radiativo com o campo de radiação do objeto estelar jovem, exibirá uma ampla gama de temperaturas e a emissão radiativa que emerge terá uma distribuição espectral muito mais ampla do que a de um corpo negro de temperatura única. Por esta razão, pode ser muito difícil, se não impossível, colocar de forma significativa um objeto estelar jovem em um diagrama H-R (Lada, 1991, p. 343).

Os discos circunstelares podem ser classificados conforme o seu estágio evolutivo. Na Fig. 45, podemos observar quatro classes e a duração de cada uma delas desde a formação da protoestrela. Observa-se que a classe 0 é caracterizada espectralmente por apresentar emissão na região do infravermelho distante e na faixa de rádio. Os fluxos de acreção são considerados esféricos e com temperatura inferior a 70 K. Podemos observar a presença de fluxo de matéria também para fora da protoestrela, ao longo do eixo de rotação. A energia de acreção é convertida em energia cinética dos jatos bipolares ou vento discal. Quando os discos passam a emitir na faixa do infravermelho próximo e intermediário, as classes são distintas conforme o índice espectral nessa região, definido como $\alpha = d \log \lambda F_\lambda / d \log \lambda$, que mede a inclinação do gráfico de distribuição de energia espectral mostrado no lado esquerdo da Fig. 45. Assim, temos as classes

Figura 45 – Evolução dos discos circunstellares.



A classificação dos discos circunstellares segue um critério de luminosidade na região do infravermelho. A partir da formação do objeto central o tempo passa a ser contabilizado. Na fase protoestelar, temos as classes 0 e I, enquanto na fase pré-sequência principal temos as classes II e III. Nota-se que a partir da classe I, o excesso de infravermelho começa a diminuir com a evolução do disco. Fonte: Extraída e adaptada de (Online, 2024).

I ($\alpha \geq 0,3$), II ($-1,6 \leq \alpha \leq -0,3$) e III ($\alpha < -1,6$) (Dunham *et al.*, 2014, p. 197).

A rotação também influencia na formação dos discos. No plano equatorial, a força centrífuga se opõe à acreção, enquanto na direção do eixo de rotação a matéria cai livremente. Considerando uma nuvem interestelar com momento de inércia $I \sim Mr^2$ e velocidade de rotação Ω , o momento angular específico j pode se aproximado por:

$$j = r^2\Omega = r^2\frac{v}{r} \sim vr, \quad (2.140)$$

em que v é a velocidade tangencial a uma distância r do eixo de rotação. A acreção ocorre até que a intensidade da força centrífuga se iguale à gravidade:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (2.141)$$

resultando em $j^2 \sim GMr$ no equador na nuvem. Para um caso mais geral, com acreção ocorrendo para diferentes direções descritas por ϑ com relação ao eixo de rotação, a porção de matéria da nuvem terá um momento angular específico expresso por:

$$j_{\vartheta} \sim \Omega r^2 \sin^2 \vartheta, \quad (2.142)$$

e, no plano do equador ($\vartheta = 0$), a matéria em equilíbrio descreve um movimento circular de raio r_ϑ da ordem de:

$$r_\vartheta \sim \frac{j_\vartheta}{GM}. \quad (2.143)$$

Assim, para $\vartheta = 0$, o momento angular é negligenciável e a matéria consegue ser acretaada à protoestrela. Para $\vartheta = \pi/2$, o momento j_ϑ é máximo e a matéria permanece em equilíbrio no plano equatorial a uma distância r_ϑ maior que o raio estelar. O material que chega de ambos os lados colide no plano meridional da nuvem e produz o achatamento do disco. Isso demonstra que o disco pode ser contido pela rotação ao invés da pressão hidrostática (Maeder, 2009, p. 500).

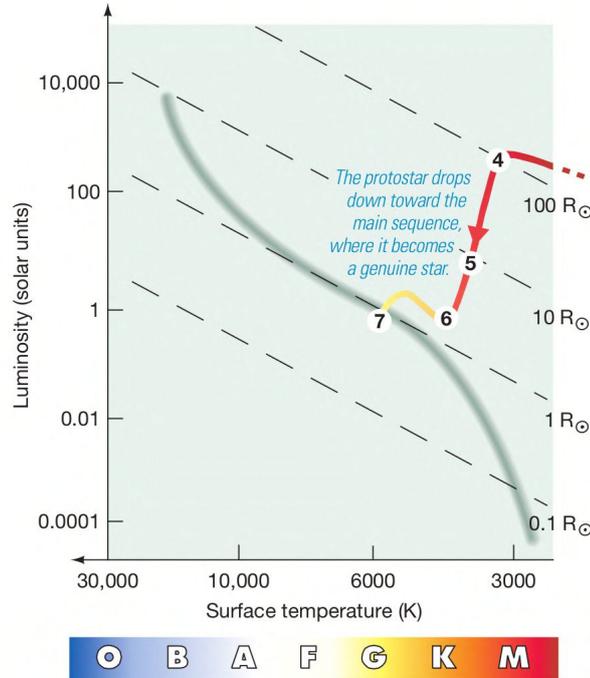
Nos discos de classe 0 e I da Fig. 45, observamos a existência de um fluxo de partículas para fora da protoestrela. Eles se dão em sentidos opostos e são chamados de jatos. Especula-se que esses jatos sejam gerados por intensos campos magnéticos axiais que se formam em consequência da rotação da protoestrela. Além disso, as linhas do campo magnético penetram o disco e podem fazer com que a matéria do disco corrotacione magneticamente com a protoestrela, caracterizando o travamento do disco (*disk locking*) e transferindo momento angular da protoestrela para a parte mais exterior ao disco (Maeder, 2009, p. 486). Conforme discutido nas Seções 2.4 e 2.5, as linhas de campo magnético podem conduzir o fluxo de partículas carregadas estabelecendo um vento protoestelar que proporciona uma transferência de momento angular para o material ejetado diminuindo também a rotação da protoestrela (Bennett *et al.*, 2013, p. 551).

O disco evolui rotacionalmente juntamente com a protoestrela. Considerando o transporte de momento angular das camadas mais internas que giram mais rápido para as camadas mais externas que giram mais lentamente, as camadas interiores perdem assim velocidade e são acretaadas, enquanto as camadas mais externas se expandem. Acredita-se que esse transporte ocorra por meio de forças viscosas turbulentas e, como se trata de um processo dissipativo, a energia potencial do sistema se torna mais negativa e ocorre um movimento majoritário de matéria em direção à protoestrela (Maeder, 2009, p. 502). Dependendo do nível de rotação e da densidade da região central da protoestrela, o disco formado poderá se condensar em duas ou três estrelas. Caso a massa do disco seja suficientemente baixa, a protoestrela será uma única estrela com protoplanetas em órbita (Comins; Kaufmann, 2014, p. 377). O processo de ionização das moléculas do gás, a radiação e as partículas que fluem da protoestrela exercem uma força externa suficiente para impedir a entrada deste gás e poeira. Como resultado, o acúmulo de massa na protoestrela cessa e ela entra na fase de pré-sequência principal (Comins; Kaufmann, 2014, p. 377).

O estágio 4 da Fig. 44 marca o início da fase pré-sequência principal. A protoestrela continua se contraindo, porém mais lentamente, e a temperatura da parte central e da superfície continua aumentando, com um raio mais definido de modo a permitir a sua medida e com a determinação da sua luminosidade, podemos seguir a sua trilha evolutiva no diagrama de H-R (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 319), conforme apresentado na Fig. 46. A região do diagrama H-R em que aparecem os objetos estelares nesse estágio é chamada de *birthline*

(Hartmann; Cassen; Kenyon, 1997). Estrelas de baixa massa seguem o seu processo evolutivo na pré-sequência principal segundo uma trilha evolutiva chamada de trilha de Hayashi (Pinsonneault; Ryden, 2023, p. 160), semelhante aquela apresentada na Fig. 46.

Figura 46 – Trilha evolutiva de uma estrela recém-formada.



Desde a *birthline* até a sequência principal, as estrelas de baixa massa seguem uma trilha evolutiva chamada de trilha de Hayashi. A protoestrela inicialmente com um raio de cerca de $100R_{\odot}$, segue se contraindo até atingir o estágio 7 com $1R_{\odot}$, correspondente à sequência principal. Fonte: Extraída de (CHAISSON; McMILLAN, 2017, p. 320).

A pré-sequência principal se diferencia da fase protoestelar, principalmente, pelo fato de que a luminosidade do objeto não se deve mais à acreção de matéria à protoestrela, mas sim pelo mecanismo de Kelvin–Helmholtz, com a luminosidade sendo produzida pela conversão da energia gravitacional em energia térmica. Para uma protoestrela de massa M , raio R e luminosidade L no centro de uma nuvem colapsante, o tempo τ_{KH} para a conversão total da energia potencial gravitacional é da ordem de:

$$\tau_{KH} \sim \frac{GM^2}{RL} \sim 3 \times 10^7 \text{anos} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \quad (2.144)$$

de onde podemos concluir que, para uma estrela do tipo solar, uma contração quase-estática levaria $\tau_{KH} = 30$ mega-anos para a conversão de energia gravitacional em radiação (Pinsonneault; Ryden, 2023, p. 159).

Na transição entre os estágios 4 e 5 da Fig. 44, na qual a protoestrela continua a sua evolução e o disco protostelar encontra-se na classe II, se caracteriza pela observação dos objetos estelares T Tauri. Os T Tauri são objetos estelares jovens de tipos espectrais variando de G a M na fase de pré-sequência principal (Machado; Lago; Lima, 1999, p. 69) com baixa massa que apresentam forte emissão na linha $H\alpha$ e uma forte absorção na linha do lítio (Stahler, 2023, p.

3000). Também se observa uma grande variabilidade irregular e a presença de intensos campos magnéticos. Os objetos T Tauri podem ser classificados como clássicos quando apresentarem forte emissão no infravermelho por parte dos seus discos e um excesso de ultravioleta e óptico a partir do material acretado (Classe II). Já os T Tauri fracos (Classe III) são aqueles que já perderam os seus discos gasosos, restando apenas resíduos que podem vir a formar os planetas e não estão mais acretando matéria ao objeto estelar central (Johnstone *et al.*, 2013).

Antes do trabalho de Vogel e Kuhl (1981), os escassos trabalhos que tratavam da medida de velocidade de rotação de objetos estelares T Tauri contavam com amostras pequenas para relatarem que estes objetos eram rotadores rápidos (Mestel, 1984, p. 49). De fato, tais trabalhos indicavam uma grande fração de T Tauri com massa inferior à $1,5M_{\odot}$ inicia o seu estágio na sequência principal com velocidades acima de 40 km/s e alguns deles excedia o valor de 150 km/s (Stauffer; Hartmann, 1986). Vogel e Kuhl mediram a velocidade rotacional de 64 objetos na fase de pré-sequência principal e concluíram que 24, dentre os 28 objetos T Tauri que compunham a amostra, apresentavam velocidades abaixo do intervalo de 25 a 35 km/s, ou seja, eram rotadores lentos e com massas inferiores a $1,5M_{\odot}$. A lei de Skumanich (Eq. 4.1) era validada para estrelas do tipo solar com idades entre 10^8 - 10^{10} anos, mas quando aplicada aos objetos estelares da pré-sequência principal, a extrapolação para objetos estelares com idades entre $4 \cdot 10^6$ - 10^7 resultava em velocidades rotacionais com valores acima do que era observado (Vogel; Kuhl, 1981).

Segundo Mestel (1984, p. 49), os resultados de Vogel e Kuhl (1981) indicavam que uma perda significativa de momento angular já teria ocorrido na fase de contração. Esse é o chamado problema do momento angular, pois torna-se necessário explicar como a condensação de uma nuvem gigantesca de gás pode ocorrer sem que haja um aumento da sua velocidade de rotação, também chamado de *spin-up* (Mestel, 2012, p. 496). Era necessário propor um ou vários mecanismos que explicassem a transferência ou a redistribuição de momento angular e a observação dos objetos T Tauri possibilitava testar algumas hipóteses sobre tais mecanismos (Stauffer; Hartmann, 1987).

Por outro lado, também é possível se observar o *spin-up* de objetos T Tauri de baixa massa à medida que eles se aproximam da sequência principal, com um momento angular significativamente maior nos estágios finais de formação estelar (Stauffer; Hartmann, 1987). Nas fases mais jovens, ou seja, com idades inferiores a 3 mega-anos, uma grande fração de objetos T Tauri gira mais lentamente do que o esperado, com velocidades que representam apenas 10% da velocidade de ruptura. No entanto, objetos T Tauri de baixa massa com idades de 5 – 10 mega-anos giram mais rapidamente, demonstrando que, nessa escala de tempo, o momento angular se conserva durante a contração na pré-sequência principal. Vale salientar que nessa mesma escala tempo ocorre a dissipação dos discos protoestelares (Karim *et al.*, 2016).

Comparando-se o tempo τ_{KH} obtido pela Eq. (2.144) com o tempo de queda livre τ_{ff} obtido pela Eq. (2.136), observa-se que para estrelas de baixa massa como o Sol, $\tau_{ff} < \tau_{KH}$ e, portanto, o colapso de queda livre terminaria antes da chegada do objeto ao estágio de sequência

Tabela 4 – O momento angular específico j durante a formação estelar

Objeto/estrela	$j(cm^{-2}s^{-1})$
Núcleos densos de nuvens	10^{21-22}
T Tauri	10^{16-17}
Sol	10^{15}

Fonte: Extraída e adaptada de (Mathieu, 2004).

principal. Essa é a vantagem de se estudar a evolução rotacional de estrelas de baixa massa. O fato de que $\tau_{ff} < \tau_{KH}$ permite que o objeto estelar jovem, juntamente com o disco formado ao seu redor, possam ser observados no estágio de pré-sequência principal. Já para as estrelas de alta massa, isso não ocorre. Com uma massa $M = 50M_{\odot}$, por exemplo, temos que $\tau_{KH} \approx 10^4$ anos, com as estrelas chegando à sequência principal e iniciando a fusão de hidrogênio antes do término do processo de colapso. Além disso, objetos estelares de alta massa geralmente estão acompanhados de outros objetos além de destruírem rapidamente os discos circunstelares com a pressão da radiação (Lada, 1991, p. 330). Assim, podemos concluir que os objetos estelares jovens de baixa massa como os T Tauri são estratégicos para se investigar o problema do momento angular em estágios iniciais e finais da formação estelar.

Conforme discutido nos parágrafos anteriores, os objetos T Tauri são encontrados, inicialmente, como rotadores lentos devido a uma grande perda de momento angular da nuvem colapsante que os originou. Na Tabela 4, temos as ordens de grandeza para os momentos angulares específicos em algumas das etapas evolutivas de um estrela do tipo solar. É possível notar que há uma redução no momento angular específico da nuvem conforme a estrela evolui. Os objetos T Tauri tem um momento angular específico que representa uma minúscula fração do momento angular inicial da nuvem, variando entre cerca de 10^{-6} a 10^{-5} . Embora ocorram o colapso e a acreção, fenômenos que contribuem para o aumento do momento angular, eles não tem a mesma duração que outros mecanismos responsáveis pela distribuição de momento angular.

Na Fig. 47, podemos distinguir diferentes processos que influenciam a evolução do momento angular e a duração de cada um deles. Os processos de acreção e contração contribuem para o aumento do momento angular específico e para o aumento da velocidade angular na superfície da estrela em formação, respectivamente. Além da duração, a natureza desses processos é bem diferente. O primeiro produz um torque externo positivo que tende a aumentar o momento angular específico (Amard; Matt, 2023), enquanto o segundo decorre da conservação do momento angular. Além disso, mecanismos hidrodinâmicos como o acoplamento do *core* radiativo ao envelope convectivo, a circulação meridional também contribuem para o aumento da velocidade angular mesmo com a conservação do momento angular (Maeder, 2009, p. 540).

Dentre os processos com capacidade de diminuir o momento angular específico da estrela em formação, a frenagem magnética pelos ventos estelares é o mais duradouro, iniciando

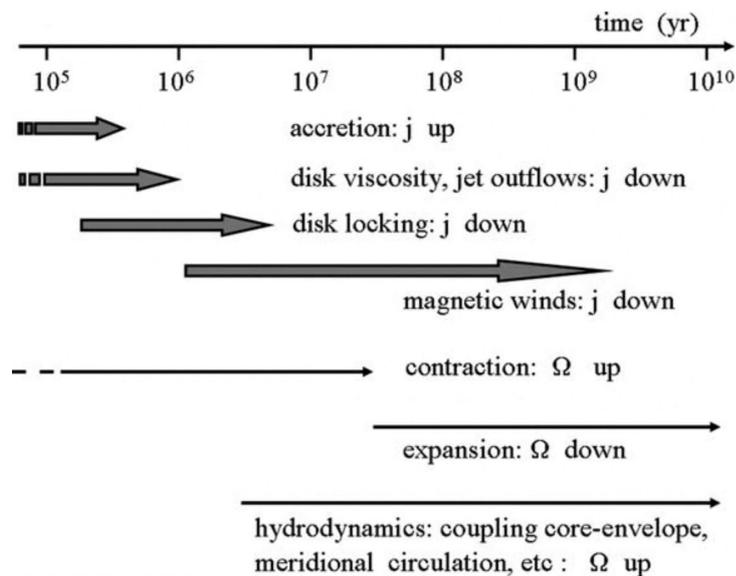
no final da fase protoestelar, passando pelo início da sequência principal, também chamada de idade zero da sequência principal (ZAMS) e se estendendo até a alguns bilhões de anos durante a sequência principal.

Conforme já havíamos mencionado, a lei de Skumanich expressa pela Eq. (4.1) estabelece uma relação entre a rotação e a idade da estrela e, na sequência principal, observa-se uma diminuição da velocidade de rotação com o aumento da idade estelar. Caso a lei de Skumanich fosse válida para o estágio de pré-sequência principal, a velocidade rotacional média das estrelas de diferentes tipos espectrais em um dado aglomerado não deveria variar, uma vez que todas as estrelas teriam a mesma idade. Como isso não era observado, sugeriu-se que o mecanismo de frenagem magnética por ventos estelares pudesse apresentar algum tipo de dependência com relação à massa da estrela ou ao seu momento angular inicial (Stauffer; Hartmann, 1987).

Conforme relatado por Bouvier (1991, p. 46), a maioria dos objetos T Tauri com massa maior que $1M_{\odot}$ tem desenvolvido um grande *core* radiativo, enquanto aqueles com massas menores tem interiores completamente convectivos. Bouvier também afirma que se não houver nenhuma perda de momento angular significativa, os objetos T Tauri mais massivos podem apresentar um processo de *spin-up* mais rapidamente do que os menos massivos, uma vez que o tempo de Kelvin-Helmholtz é mais curto para esses objetos e eles desenvolvem o *core* radiativo mais cedo, reduzindo o momento de inércia da estrela.

Comparando estrelas do tipo K no aglomerado das Plêiades cuja idade é de $7 \cdot 10^7$

Figura 47 – A evolução do momento angular de uma estrela do tipo solar.



Em uma escala de 10^5 - 10^{10} giga-anos, podemos observar tanto o aumento quanto a diminuição do momento angular específico. As setas espessas indicam a mudança de momento angular estelar específico j , enquanto as mudanças na velocidade angular estelar Ω na superfície que ocorrem com o momento angular conservado são indicadas pelas setas mais finas. O comprimento das setas indica o intervalo de tempo que tais mudanças ocorrem. Fonte: Extraída de (Maeder, 2009, p. 540).

anos com estrelas de mesmo tipo espectral no aglomerado das Híades cuja idade é de $2 \cdot 10^8$ anos, Stauffer e Hartmann (1986) verificaram que ocorria uma diminuição da velocidade média de rotação para as estrelas do aglomerado de maior idade. No entanto, dentro do aglomerado das Plêiades, ao compararem as velocidades médias de rotação das estrelas de tipos K e G, eles observaram que as estrelas do tipo K giravam mais rapidamente do que aquelas de tipo G. Isso indicava que as estrelas do tipo G seriam frenadas mais rapidamente do que aquelas do tipo K. Os autores argumentaram que isso ocorreria devido a frenagem magnética realizadas pelos ventos estelares que afeta principalmente o envelope convectivo mais externo. Como a espessura do envelope convectivo é menor nas estrelas do tipo G do que nas estrelas totalmente convectivas do tipo K, a frenagem magnética se daria em uma escala de tempo diferente para essas estrelas (Stauffer; Hartmann, 1987).

Segundo Kawaler (1988), nas estrelas de baixa massa, o espesso envelope convectivo contém uma grande fração do momento de inércia e do momento angular da estrela e naquelas mais massivas, com envelopes convectivos mais finos, verifica-se uma fração menor do momento angular. Assim, o torque produzido pelos ventos em estrelas de baixa massa atua em uma região contendo uma grande quantidade momento de inércia, resultando em uma escala de tempo de *spin-down* mais longa do que aquela observada em estrelas de maior massa. Esta interpretação implica que o envelope convectivo é girado separadamente do núcleo radiativo. À medida que as partes externas giram para baixo, o núcleo em contração continua a girar para cima, e a estrela deve desenvolver um gradiente acentuado na velocidade angular na base da zona de convecção.

Modelos como o de Kawaler (apresentado no Capítulo 4) consideram essa diferença de movimento entre o envelope convectivo e o *core* radiativo, permitindo investigar as consequências de alguns mecanismos de distribuição de momento angular durante a evolução da estrela sob frenagem magnética até a sequência principal e compará-las com modelos de evolução estelar e com os dados observacionais. Além disso, o modelo de Kawaler permite avaliar a perda de momento angular na sequência principal, sendo capazes de reproduzir a redução de momento angular compatível com a lei de Skumanich. No entanto, as estimativas de Kawaler predizem uma frenagem mais rápida do que aquela que se verifica, motivando a formulação de novos modelos que considerassem especificidades do magnetismo estelar, como a saturação do dínamo estelar (Chaboyer; Demarque; Pinsonneault, 1995).

A frenagem magnética é um conceito fundamental para se compreender as perdas de momento angular e a sua atuação durante as fases pré-sequência principal e durante a sequência principal, determina essencialmente a evolução da rotação estelar em estrelas do tipo solar, atuando numa escala de tempo muito mais longa do que outros mecanismos de *spin-down* (Maeder, 2009, p. 545). No Cap. 4, analisaremos o comportamento do mecanismo de frenagem magnética por ventos estelares, considerando a saturação de dínamo para estrelas de baixa massa sem a presença de planetas e em dois estágios evolutivos diferentes.

A frenagem magnética pelos ventos estelares não é suficiente para causar a redução de momento angular observada no início da pré-sequência principal. É necessário um mecanismo

mais eficiente, atuando em uma escala de tempo menor e que seja suficiente para causar tal redução e, conforme apresentado na Fig. 47, o travamento de disco é apontado como um dos responsáveis pela perda de momento angular nesse no início desses estágio evolutivo (Maeder, 2009, p. 543).

O travamento de disco é termo utilizado para designar o acoplamento magnético de uma estrela com o seu disco de acreção. Os discos protoestelares exercem uma grande influência na dissipação de momento angular. No início dessa seção já havíamos mencionado a presença de campos magnéticos no interior das nuvens moleculares e que tais campos poderiam influenciar a duração da formação estelar. À medida que ocorre o colapso dessas nuvens para formar estrelas do tipo solar e de massas menores, o dínamo convectivo intensifica esses campos magnéticos que resultam no acoplamento da protoestrela com o disco. Vale ressaltar que dínamos presentes no disco circunestelar também podem produzir campos magnéticos (Mestel, 2012, p. 501).

De forma geral, existem dois tipos de modelos de travamento de disco, um deles considera produção de ventos magnetizados a partir do disco (*X-winds*) enquanto o segundo tipo é baseado no modelo de Ghosh e Lamb (1978), posteriormente aplicado por Königl (1991) para objetos T Tauri. O modelo de *X-winds* é desenvolvido sob a suposição de que o sistema estrela-disco exista, em média, em um estado de equilíbrio rotacional, no qual a estrela em acreção não está sob ação de um torque, enquanto os modelos baseados na abordagem de Ghosh e Lamb fornecem um método para calcular o torque na estrela, devido à interação estrela-disco, para qualquer estado do sistema. Dependendo das condições, a estrela em formação pode sofrer *spin-up* ou *spin-down*, existindo a previsão de um estado de travamento de disco, no qual o torque resultante na estrela é zero (Matt *et al.*, 2010). Na figura 48, apresenta-se um esquema ilustrativo do mecanismo de acreção que nos permite observar os fatores envolvidos em ambos os modelos.

Observa-se que a matéria do disco circunestelar é acretada à protoestrela a partir de uma posição r_t em uma região mais interna do disco. A distância r_t é o ponto onde as densidades de energia do campo magnético e da matéria acretada se igualam. A magnetosfera estelar é forte o suficiente para romper o disco de acreção em r_t e, por isso, recebe a denominação de raio de truncamento do disco (Matt; Pudritz, 2008). Para distâncias inferiores a r_t , a matéria acretada é dominada pelo campo magnético, movendo-se com velocidades próximas à velocidade de queda livre, seguindo as linhas do campo até os polos magnéticos para se juntarem com a atmosfera protoestelar e formar os choques de acreção. Nessa região, as linhas de campo magnético acompanham a rotação do disco e proporcionam a transferência de momento angular do disco para a estrela (Mestel, 2012, p. 499). Vale ressaltar que o truncamento do disco ocorre para $r \leq r_t$ pois a magnetosfera estelar é capaz de promover um *spin-down* do material do disco, de modo que ele não seja mais apoiado centrifugamente contra a gravidade, caindo em direção à protoestrela.

Uma porção de massa M_a proveniente do raio de truncamento e acretada à protoestrela de massa M e raio R em um dado intervalo de tempo dt remove uma quantidade de

momento angular específico do disco, realizando um torque positivo \dot{J}_a sobre a estrela, chamado de toque de acreção, que resulta no processo de *spin-up*. Esse toque pode ser calculado a partir da expressão:

$$\dot{J}_a = \frac{d}{dt} \left[(M_a r_t^2) \Omega_d \right] = \dot{M}_a \Omega_d(r_t) r_t^2, \quad (2.145)$$

em que $\Omega_d(r_t)$ é a velocidade angular de rotação do disco no raio de truncamento é constante e em regime Kepleriano (equilíbrio entre a interação gravitacional e a inércia rotacional), ou seja,

$$\Omega_d = (GM)^{-1/2} r_t^{-3/2}. \quad (2.146)$$

Conforme Matt e Pudritz (2008), para uma taxa de *spin-up* que corresponda a 10% da velocidade de ruptura da protoestrela, conforme observada em boa parte dos objetos T Tauri, o tempo necessário para acreção de matéria a uma taxa \dot{M}_a constante seria da ordem de 10^5 anos.

Na Fig. 48, observa-se que nas distâncias $r > r_t$, as linhas de campo magnético não conseguem acompanhar a rotação do disco, sendo arrastadas em sentido contrário o que produz um torque negativo sobre a estrela. Por conta disso, as linhas de campo são torcidas e a intensidade do torque magnético sobre a protoestrela é proporcional ao nível de torção (Matt; University; Canada., 2004). De forma semelhante aquela que foi realizada na Seção 2.5, pode-se definir uma distância r_{cor} , a partir do centro da protoestrela, na qual a velocidade angular de rotação do disco Ω_d seja igual à velocidade de rotação da protoestrela Ω . Assim, por meio da Eq. (2.146), a velocidade angular $\Omega_d(r = r_{cor})$ é expressa por:

$$\Omega_d(r = r_{cor}) = \Omega = r_{cor}^{-3/2} (GM)^{-1/2}, \quad (2.147)$$

de onde podemos concluir que o raio de corotação é expresso por:

$$r_{cor} = \Omega^{-2/3} (GM)^{1/3} R^{-1}. \quad (2.148)$$

O fluxo magnético que conecta a estrela à região do disco entre r_t e r_{cor} também irá provocar um *spin-up* da estrela, enquanto o fluxo que conecta o disco em distâncias $r > r_{cor}$ removerá o momento angular da estrela transferindo o momento angular para o disco, resultando no *spin-down* da estrela. O modelo de Ghosh e Lamb assume que $r_t \approx r_{cor}$ (Matt; Pudritz, 2008) e o torque total \dot{J}_m produzido por aquela região sobre a estrela é capaz de se contrapor ao toque positivo produzido pela região de acreção.

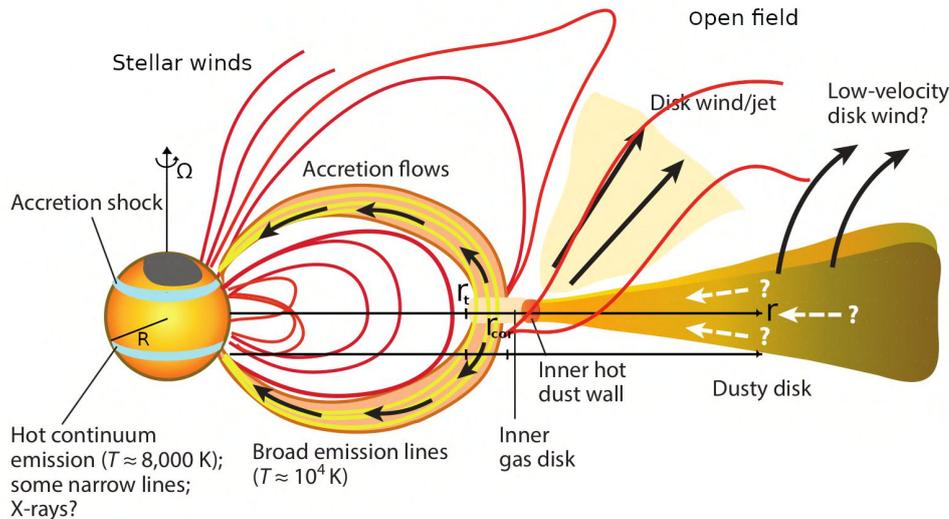
Assim, verifica-se que a protoestrela sofre a ação de torques que são exercidos pelas linhas de campo magnético ancoradas à ela e ao disco. O torque total \dot{J} sobre a estrela é expresso por:

$$\dot{J} = I \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \frac{dI}{dt} = \dot{J}_a + \dot{J}_m. \quad (2.149)$$

Assim, conhecendo-se o termo dI/dt da Eq. (2.149) a partir de modelos de evolução estelar, juntamente com os torques, é possível obter uma expressão para a velocidade angular da estrela. Quando $\dot{J} = 0$, ou seja, $\dot{J}_a = -\dot{J}_m$, a velocidade angular torna-se constante, sendo expressa por:

$$\Omega_{eq} = C \dot{M}_a^{3/7} (GM)^{5/7} \mu^{-6/7}, \quad (2.150)$$

Figura 48 – Diagrama esquemático dos processos de travamento de disco.



Representação do mecanismo de acreção sob influência de campos magnéticos durante uma faixa evolutiva de 1 a 10 mega-anos para estrelas de baixa massa. No modelo de travamento de disco negligenciando os ventos estelares e/ou discos, o acoplamento se dá entre os campos magnéticos produzidos pela protoestrela e pelo disco. O raio de truncamento r_t define a região de acreção, enquanto o raio de corotação r_{cor} define o sinal do torque aplicado à estrela. Para os modelos que explicam o travamento magnético pela ação dos *X-winds*, o torque negativo sobre a protoestrela produzido por ventos magnetizados lançados a partir da parte mais interna do disco seria capaz de se contrapor ao torque de *spin-up* produzido pela acreção. Fonte: Extraída e adaptada de (Hartman; Bakos, 2016).

em que C é uma constante próxima à unidade e $\mu \equiv BR^3$ é o momento de dipolo magnético e com a intensidade do campo magnético B na superfície da estrela. Nesse estado de equilíbrio, a taxa de rotação do objeto central depende da taxa de acreção e, se essa taxa for constante, a protoestrela gira na mesma taxa que a parte mais interna do disco. O sistema é então dito travado magneticamente. Esse tipo de modelo para a interação magnética estrela-disco mostra que as protoestrelas em acreção podem girar mais lentamente do que a velocidade de ruptura, permitindo uma percepção de que a presença de um disco de acreção leva a taxas de rotação menores (Matt; Pudritz, 2005).

Outra forma de se explicar o travamento de disco é por meio dos *X-winds*. Os *X-winds* são ventos magnetizados produzidos na parte mais interna do disco, conforme mostrado na Fig. 48. Nas imediações do raio de corotação, as linhas do campo magnético dipolar são comprimidas e se conectam a uma região muito pequena, chamada de ponto X ao invés de se conectarem ao disco em regiões mais afastadas do que r_{cor} . A partir do ponto X, as linhas de campo se tornam abertas e os jatos de partículas as seguem removendo momento angular do disco (Shu *et al.*, 1994). Tais linhas podem forçar o gás nas camadas superiores do disco a corrotacionar e, se as linhas de campo se curvarem para fora, acima de um ângulo crítico, o aumento da velocidade azimutal em relação ao movimento Kepleriano local cria uma aceleração centrífuga suficiente para superar a gravidade, resultando na produção do vento (Hartman; Bakos, 2016). Tal modelo também assume uma configuração de equilíbrio e pode-se chegar a mesma expressão para a velocidade angular dada pela Eq. (2.150) (Matt; Pudritz, 2008).

No entanto, Matt e Pudritz (2005) questionaram se a forma dipolar do campo magnético poderia ocorrer para $r \gg r_{cor}$, já que as linhas de campo estão abertas nessa região, sem estarem conetadas ao disco, os autores tinham dúvidas se os ventos impulsionados por elas fossem capazes de remover momento angular suficiente para neutralizar o torque de acreção. Em trabalhos posteriores, esses autores mostraram que para os ventos serem capazes de contrabalancear o torque de acreção, eles deveriam ser responsáveis por uma taxa de ejeção de massa que correspondesse a aproximadamente 10% da taxa de acreção, o que seria improvável de ser obtido considerando apenas as formas de energia rotacional, térmica e magnética da estrela (Ireland; Matt; Zanni, 2022). Segundo Ferreira (2013) o mecanismo de travamento magnético pelos ventos discais não é suficiente para promover o *spin-down* da protoestrela e aponta o mecanismo adicional de ejeção magnetosférica capaz de remover o momento angular do sistema como um todo. Segundo Gallet, Zanni e Amard (2019), a interação magnetosférica estrela-disco é o principal paradigma para interpretar a evolução do momento angular dos objetos T Tauri clássicos.

Na Fig. 48, também encontra-se ilustrado que o choque de acreção é causado pelo afunilamento da matéria em velocidades próximas a de queda livre, atingindo a superfície protoestelar e produzindo radiação intensa, na faixa do ultravioleta extremo e raios X, por exemplo. Essa radiação é capaz de fotoevaporar o conteúdo gasoso do disco, afetando assim a sua estrutura interna que, por sua vez, pode afetar as órbitas de planetas de curto período e, portanto, o seu processo de formação (Takasao *et al.*, 2022). É importante ressaltar que os mecanismos pelos quais o momento angular é transportado em discos protoestelares e protoplanetários não são bem compreendidos atualmente e isso também pode impactar na migração planetária (Hartman; Bakos, 2016).

A formação de estrelas binárias e as interações de maré entre as protoestrelas, que transferem o momento angular do movimento axial para o orbital, bem como os fluxos bipolares e o acoplamento magnético do objeto em contração com seu disco de acreção também são apontados como fenômenos que podem explicar o problema do momento angular no início da pré-sequência principal (Maeder, 2009, p. 540). As interações de maré, por exemplo, representam um dos tipos de interação entre estrelas e planetas e podem ser responsáveis pela perda ou transferência de momento angular entre esses corpos.

A maioria dos estudos sobre a evolução das marés de planetas próximos considerou sistemas individuais e geralmente se negligencia o efeito da frenagem magnética. No entanto, verifica-se que, em alguns casos envolvendo sistemas planetários com júpiteres quentes, a frenagem magnética se mostrou essencial para se descrever a evolução dos elementos orbitais desses planetas cujo momento angular orbital pode ser da mesma ordem de grandeza do momento angular de rotação das suas estrelas hospedeiras (Lanza; Damiani; Gandolfi, 2011 apud Damiani; Lanza, 2015b). Um fato interessante no nosso sistema solar é o de que o momento angular de Júpiter é muito maior que o momento angular do Sol, o que poderia sugerir que os planetas pudessem reter uma grande fração do momento angular transferido no processo de formação das

estrelas.

A interação estrela-planeta refere-se aos processos e efeitos dinâmicos que ocorrem entre uma estrela e os seus planetas em órbita. Esta interação desempenha um papel crucial na formação das propriedades e na evolução da estrela e dos planetas. A evolução da rotação estelar em sistemas estrela-planetas envolve a intrincada interação das marés e da frenagem magnética (Privitera *et al.*, 2016). À medida que uma estrela com um exoplaneta próximo experimenta forças de maré, a atração gravitacional do planeta pode causar a deformação da estrela, levando a interações de maré que influenciam tanto a estrela como as órbitas do planeta (Privitera *et al.*, 2016; Busetti; Beust; Harley, 2018; Benbakoura *et al.*, 2019).

Além disso, o travamento magnético, impulsionado pelo campo magnético da estrela interagindo com o seu vento estelar, pode abrandar a rotação da estrela ao longo do tempo. Esta interação dinâmica entre as forças das marés e o travamento magnético afeta a evolução rotacional da estrela e a sua dinâmica orbital com o planeta. Assim, é fundamental a investigação e a compreensão destes processos para se avaliar o seu impacto na evolução a longo prazo dos sistemas estrela-planetas (Freitas; de Medeiros, 2013; Benbakoura *et al.*, 2019).

A fim de se investigar o impacto dessas interações, também faz-se necessária a utilização de dados observacionais que dizem respeito aos parâmetros orbitais dos sistemas planetários. Além disso, é importante que se apliquem modelos generalizados que permitam descrever aspectos não-lineares e outras propriedades características de sistemas complexos que possam estar presentes na interação estrela-planeta. No próximo capítulo, apresenta-se o formalismo da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis que tem sido aplicado para descrever a rotação estelar e o mecanismo de frenagem magnética.

3 UMA NOVA LEITURA ESTATÍSTICA ACERCA DOS CENÁRIOS DE INTERAÇÃO ESTRELA-PLANETA

Antes de utilizarmos uma abordagem estatística não extensiva para descrever as interações de maré de equilíbrio, faz-se necessária a contextualização do papel das distribuições estatísticas na descrição dos fenômenos astrofísicos, mais especificamente, na rotação estelar.

Dentre as várias generalizações da estatística de Boltzmann-Gibbs, o formalismo de Tsallis tem se destacado com diversas aplicações em sistemas complexos e não lineares, incluindo fenômenos em sistemas de partículas e termodinâmica fora do equilíbrio. Além da astrofísica, a sua abordagem pode aplicada em ciências sociais, biologia e até em teoria da informação, permitindo uma compreensão mais profunda de dinâmicas que fogem do comportamento clássico, ao mesmo tempo que proporciona uma alternativa ao formalismo de Boltzmann-Gibbs.

Nesse capítulo, vamos discutir a necessidade da generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs e apresentamos como o formalismo de Tsallis tem sido aplicado para descrever a evolução da rotação estelar.

3.1 A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs e formalismo não-extensivo de Tsallis

Os pilares da física teórica contemporânea compreendem, a mecânica newtoniana, o eletromagnetismo clássico, a teoria da relatividade, a mecânica quântica e a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) (Tsallis, 2009). Na astrofísica, a mecânica estatística é fundamental na descrição dos fenômenos associados à estrutura e à evolução estelar como na distribuição de energia e de velocidades de partículas e, conseqüentemente, a pressão exercida por elas no interior estelar. A hipótese básica adotada é a do equilíbrio termodinâmico e, independentemente da natureza das partículas, as condições de alta temperatura e baixa densidade do interior estelar permitem que se utilize a estatística BG (Tsallis, 1995).

Dentro da mecânica estatística BG, encontramos o conceito central de entropia. Embora tenha sido introduzida por Clausius no contexto da termodinâmica clássica em 1865, a conexão dessa grandeza macroscópica com a descrição microscópica de um sistema foi proposta e explorada anos depois por Boltzmann e Gibbs (Tsallis; Gell-Mann; Sato, 2005). Ela se insere na formulação matemática como um funcional que se extremiza, determinando os estados de equilíbrio (Callen, 1985, p. 329). O segundo postuldo da Mecânica Estatística de equilíbrio trata da própria definição de entropia S_{BG} que consiste em um funcional de parâmetros extensivos (energia E , volume V e número de constituintes N , por exemplo) definidos em todos os estados de equilíbrio do sistema e que, na ausência de um vínculo interno, maximizam tal funcional sobre a variedade de estados de equilíbrio possíveis (Callen, 1985, p. 27):

$$S_{BG}(E, V, N) = k_B \ln W(E, V, N), \quad (3.1)$$

em que W representa o número de microestados equiprováveis permitidos ao sistema isolado, com temperatura T , e k_B é a constante de Boltzmann. Em sistemas discretos cujos os estados de

equilíbrio não são equiprováveis (ensemble canônico), a entropia S_{BG} é expressa por:

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (3.2)$$

em que o índice i identifica cada um dos microestados que ocorrem com probabilidade p_i . A Eq. (3.2) também é chamada de entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon. Para o caso contínuo no espaço de fase, a entropia (diferencial) é expressa por meio de:

$$S_{BG} = -k_B \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \ln \rho(x) dx, \quad (3.3)$$

onde $\rho(x)$ é a densidade de probabilidade para que uma variável aleatória contínua x seja encontrada no intervalo $(x, x + dx)$ (Goldstein *et al.*, 2020, p. 520).

A entropia S_{BG} permite o estudo de sistemas com grandes quantidades de constituintes (10^{23}) sem a necessidade de se conhecer ou computar a equação de movimento de cada um desses constituintes e pode ser aplicada aos sistemas físicos pertencentes a cada um dos pilares mencionados por meio da aplicação da teoria de probabilidades. As distribuições de probabilidade exponencial e gaussiana são assinaturas da mecânica estatística BG e tais distribuições maximizam a entropia S_{BG} e asseguram o estado de equilíbrio (Tirnakli; Borges, 2016).

De fato, aplicando-se o princípio da maximização da entropia à Eq. (3.3) e, considerando as condições de normalização e de existência de uma média μ e de uma variância σ^2 , ambas constantes, verifica-se que as distribuições:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.4)$$

e

$$\rho(x) = \frac{1}{Z} g(x) e^{-\beta x}, \quad (3.5)$$

com $\beta = 1/k_B T$, $Z = \int g(x) e^{-\beta x} dx$ e $g(x)$ representando a densidade de estados associados à variável x , maximizam a Eq. (3.3) (Park; Bera, 2009). No caso em que x representa uma das componentes da velocidade v_i de uma molécula de massa m em um gás ideal em equilíbrio térmico à temperatura T , a Eq. (3.4) corresponde à distribuição de velocidade de Maxwell, ou seja, as componentes de velocidade de um dado número de moléculas por unidade de volume com velocidades entre v_i e $v_i + dv_i$ obedecem a uma distribuição gaussiana com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = \beta m$ (Reif, 2009, p. 249). Já para o caso em que tomamos x como sendo a energia E_r de um dado microestado r , a Eq. (3.5) corresponde à distribuição de Maxwell-Boltzmann (Casquilho; Teixeira, 2012, p. 119). Assim, tanto a distribuição de velocidades, quanto a distribuição de energia de Maxwell-Boltzmann são exemplos de distribuições estatísticas que maximizam o funcional entrópico S_{BG} e que estão associadas aos fenômenos que estão em um estado de correspondência ao equilíbrio termodinâmico.

A relevância de propriedades estatísticas de sistemas complexos é universalmente aceita e a densidade de probabilidade de uma variável assume a forma gaussiana se ela resulta de

um grande número de variáveis independentes e aditivas (Callen, 1985, p. 456). A relação entre os tipos de distribuições estatísticas e a forma do funcional entrópico suscita a necessidade de se diferenciar os conceitos de aditividade e extensividade.

Segundo Penrose (1979) *apud* Tsallis (2023), um funcional entrópico é aditivo se a entropia $S(A + B)$ de um sistema composto por dois subsistemas A e B , independentes, puder ser expresso como a soma das entropias de A e B , separadamente, com as respectivas entropias $S(A)$ e $S(B)$, satisfazendo a relação:

$$S(A + B) = S(A) + S(B). \quad (3.6)$$

A entropia S_{BG} em qualquer uma das formas nas Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3) satisfaz a relação (3.6) e, por isso, ela é considerada aditiva.

Em certas condições, a extensividade de S_{BG} é verificada, ou seja, quando a entropia do sistema cresce com o seu tamanho, $S \propto N$. Isso ocorre quando os N elementos que compõem o sistema são probabilisticamente independentes e $N \rightarrow \infty$. No entanto, existem sistemas mais complexos para os quais S_{BG} é não-extensiva com relação à N (Tsallis; Gell-Mann; Sato, 2005).

Por outro lado, há sistemas em que não se verifica a aditividade do funcional entrópico apesar da extensividade ser verificada e, por isso, a entropia total não será soma da entropia das partes de um sistema. Nas próximas subseções, discutimos alguns casos em que a descrição estatística de Boltzmann-Gibbs não se adequa e apresentamos uma entropia com caráter não-aditivo e não-extensivo com relação à energia do sistema, o funcional entrópico de Tsallis (Tsallis, 1988).

3.2 A necessidade de generalização da Mecânica Estatística BG

Em sistemas físicos cujas interações são de longo alcance, a mecânica estatística BG falha em sua descrição de forma parcial ou total (Levin *et al.*, 2014). Sistemas sem uma configuração com um mínimo de energia, com energias de interação comparáveis à energia interna ou mesmo sem um estado de equilíbrio são exemplos dessa limitação (Papa, 1998). Também se observam os casos em que a estatística de Boltzmann-Gibbs não consegue reproduzir as distribuições de caudas longas (Kaniadakis; Lissia; Scarfone, 2004). Conforme Kafri (2016), esta tem sido uma justificativa para a pesquisa intensiva de entropias não-extensivas (ou seja, entropia de Tsallis e outras como Rényi e Kaniadakis), embora esse autor sustente que é possível observar distribuições de cauda longa na termodinâmica de equilíbrio. Segundo TSALLIS (2002), a mecânica estatística não-extensiva foi introduzida com o objetivo de estender o domínio de aplicabilidade de métodos estatísticos aos sistemas com tal limitação.

Essa formulação não-extensiva associada ao caráter generalista da termodinâmica tem permitido um avanço no estudo de diversos tipos de sistemas complexos naturais, artificiais e sociais (Deppman *et al.*, 2018; Haddad, 2017; Tsallis, 2011). Além disso, sistemas termodinâmicos com propriedades de invariância de escala contendo estruturas fractais ou multifractais se

caracterizam pelas interações e correlações que existem em diferentes escalas. Esses sistemas frequentemente exibem comportamento não-extensivo, o que enseja a utilização das estatísticas de Tsallis para descrevê-los (Deppman *et al.*, 2018).

A invariância de escala de um sistema geralmente é observada quando a forma matemática da distribuição de alguma propriedade x do sistema pode ser representada por uma lei de potência:

$$\rho(x) = Cx^{-\alpha} \quad (3.7)$$

em que C é uma constante e α representa o expoente de escala que caracteriza o sistema. Quando sistemas diferentes compartilham desse mesmo expoente, diz-se que eles são de uma mesma classe de universalidade, o que sugere que há características em comum entre os mecanismos microscópicos subjacentes responsáveis pelo comportamento invariante de escala observado (Stanley *et al.*, 2000).

Quando o expoente $\alpha \rightarrow 1$ na Eq. (3.7), a função distribuição é chamada de Lei de Zipf para a frequência de palavras. Ela recebe esse nome devido ao comportamento de lei de potência observado pelo linguista e filólogo George Kingsley Zipf ao fazer uma investigação sobre as propriedades estatísticas adjacentes à linguagem humana em diferentes idiomas (Cancho; Vitevitch, 2018). Trata-se de uma lei empírica que descreve a distribuição de frequência de elementos em uma variedade de conjuntos de dados, especialmente em línguas naturais. Ela afirma que a frequência de uma palavra é inversamente proporcional à sua classificação na tabela de frequência. A tabela de classificação de frequência atribui um número segundo a utilização da palavra, 1 para a mais utilizada, 2 para a segunda mais utilizada e assim sucessivamente (Eliazar, 2020, p. 1). Dessa forma, a frequência de utilização da palavra mais utilizada corresponde ao dobro da frequência da segunda palavra mais utilizada e ao triplo da terceira mais utilizada e assim sucessivamente.

A Lei de Zipf é uma lei de potência que aparece em muitos tipos de sistemas, sendo uma distribuição estatística comum em cidades, populações ou empresas e ela nos permite compreender as formas com que os sistemas se auto-organizam ou estabelecem estratégias de otimização (Corominas-Murtra; Solé, 2010). No entanto, a sua capacidade em descrever o comportamento de sistemas com poucas ou muitas categorias de classificação pode não se ajustar aos dados reais, conforme observou Mandelbrot e que, por sua vez, propôs uma relação mais geral com a adição de um parâmetro extra γ (Ahmad *et al.*, 2020):

$$\rho(x) = \frac{C}{(\gamma + x)^\alpha}, \quad (3.8)$$

chamada de lei de Zipf-Mandelbrot, em que C é uma constante e o parâmetro γ permite um melhor ajuste da distribuição aos dados reais e quando $\gamma \rightarrow 0$ a Eq. (3.8) reproduz a lei de Zipf original. Essa generalização da Lei de Zipf tem larga utilização, podendo ser aplicada desde o estudo de sistemas eleitorais (Lyra *et al.*, 2003) até de rotação estelar (Freitas; de Medeiros, 2013).

Para sistemas como aqueles estudados por Kouvatsos e Assi (2011), verifica-se que a lei de Zipf-Mandelbrot maximiza o funcional entrópico de Shannon que é semelhante ao de Boltzmann-Gibbs (Eq. 3.2) quando a base do logaritmo é igual a 2 e k_B é tomado como a unidade. A demonstração dessa maximização é apresentada no trabalho de (Pevarić; Pevarić", 2019).

A entropia de Shannon, introduzida por Claude Shannon em seu artigo seminal de 1948 "A Mathematical Theory of Communication", é um conceito fundamental na teoria da informação que quantifica a incerteza ou aleatoriedade em um conjunto de resultados possíveis (Michalowicz; Nichols; Bucholtz, 2013, p. 27). Ela fornece uma medida da quantidade média de informações produzidas por uma fonte estocástica de dados (Ben-Naim, 2017, p. 63). Ela também é utilizada para se determinar a eficiência da codificação e transmissão de dados, estabelecendo as bases para a comunicação digital e a compressão de dados (She; Liu; Fan, 2019).

A entropia de Shannon, assim como a de Boltzmann-Gibbs, pode ser generalizada pela entropia S_q de Tsallis (Maszczyk; Duch, 2008; Kaniadakis; Lissia; Scarfone, 2004), cujo funcional entrópico é expresso por:

$$S_q = k \left(\frac{1 - \sum_{n=1}^W p_i^q}{q - 1} \right), \quad (3.9)$$

tal que $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ e $q \in \mathbb{R}$. Note que a Eq. (3.9) se reduz à Eq. (3.2) no limite em que o índice $q \rightarrow 1$ e, portanto, é uma generalização minimalista que conserva a maioria das propriedades da entropia de Boltzmann-Gibbs, ou seja, $S_1 = S_{BG}$, porém, ela deixa de ser aditiva para o caso $q \neq 1$, uma vez que:

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1 - q}{k} S_q(A) S_q(B), \quad (3.10)$$

onde $S_q(A)$ e $S_q(B)$ corresponde a entropia de Tsallis para os sistemas A e B , respectivamente.

A distribuição de probabilidade que maximiza a S_q é expressa por:

$$\rho_q(x) = A_q e_q^{-B_q(x-x_0)^2}, \quad (3.11)$$

onde A_q e B_q são constantes e a função e_q^t é definida como sendo:

$$e_q^t \equiv [1 + (1 - q)t]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (3.12)$$

recebendo o nome de q-exponencial ou de exponencial generalizada, enquanto a Eq. (3.11) é chamada de q-gaussiana (Umarov; Tsallis, 2022, p. 36 e 55).

De forma semelhante, Tsallis define a função inversa da q-exponencial como sendo:

$$\ln_q t \equiv \frac{t^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad (3.13)$$

chamada de q-logaritmo e definida para $t > 0$ (Umarov; Tsallis, 2022, p. 29) e, a partir dela, podemos reescrever a Eq. (3.9) na forma:

$$S_q = k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i}, \quad (3.14)$$

que se assemelha a entropia de Boltzmann-Gibbs mas não é aditiva.

Segundo Tsallis, Bemsiki e Mendes (1999), dentro da termoestatística não-extensiva, o índice entrópico q desempenha um papel central ao medir o grau de correlações espaço-temporais que podem se estabelecer entre os constituintes de um sistema. Esse é o significado físico de q . Quando $q \rightarrow 1$, tais correlações são fracas ou inexistentes, a entropia extensiva padrão é recuperada ($S_q = S_{BG}$) e o fator exponencial usual também o é. Mas, se q difere da unidade, as correlações podem ser fortes e a entropia torna-se superextensiva para $q < 1$, e subextensiva para $q > 1$. O índice entrópico q também pode refletir alguma multifractalidade no sistema. O índice q indica o tipo de correlação em um dado sistema e quando não há um q que satisfaça um certo conjunto de correlações, é necessário que se busque outro funcional entrópico. Por vezes, é necessário sacrificar a aditividade de um funcional entrópico para satisfazer a sua extensividade. O q não é um parâmetro necessariamente obtido por um ajuste (*fitting*) mas que pode ser calculado a partir de primeiros princípios (Caruso; Tsallis, 2008).

É importante notar que, o fato de S_q ser não-aditiva não implica que ela não possa ser extensiva na termodinâmica. A mecânica estatística possui dois ingredientes fundamentais: a Energia e a Entropia. Na mecânica estatística não-extensiva a entropia é não aditiva mas ela é extensiva. O motivo pelo qual o formalismo de Tsallis ser chamado de não-extensivo se deve ao fato de que S_q ser não-extensivo com relação à energia.

Segundo Silva Jr. (1998), devido ao seu caráter termodinâmico e a sua aplicabilidade em sistemas fora do equilíbrio, o formalismo de Tsallis pode ser aplicado a sistemas autogravitantes (Taruya; Sakagami, 2003), em alguns tipos de plasmas turbulentos (Egolf; Hutter, 2018) e em sistemas criticamente auto-organizados (Aschwanden *et al.*, 2016).

Algumas fontes astrofísicas investigadas sob o formalismo não-extensivo de Tsallis podem ser observadas nos trabalhos como de Plastino e Plastino (1993), Rosa, de Jesus e Moret (2013), Freitas e de Medeiros (2013), Freitas, Cavalcante e Santiago (2022) e Batista *et al.* (2023). Essa abordagem tem se mostrado satisfatória na descrição da rotação estelar em regimes saturados e não-saturados e também na assimetria da atividade magnética solar. Trabalhos como de Pavlos *et al.* (2015) e Oliveira e Galvão (2018) utilizam do formalismo de Tsallis para o estudo de astrofísica de plasmas no vento solar e Esquivel e Lazarian (2010) o aplicam para o estudo da turbulência no meio interestelar.

O formalismo de Tsallis, enraizado na mecânica estatística não-extensiva, é uma importante ferramenta para se estudar sistemas complexos caracterizados por interações de longo alcance, multifractalidade e estados considerados fora de equilíbrio (tsallis, 2015).

Em trabalhos como de Freitas *et al.* (2013), Freitas *et al.* (2016), Freitas *et al.* (2017), os autores mostram que a análise de multifractalidade é uma ferramenta poderosa para estimar correlações entre os parâmetros estelares e estatísticos, entre eles o período de rotação versus o expoente de Hurst, verificando que a correlação de longo alcance devido ao período de rotação das estrelas é dimensionada pelo expoente de Hurst, em concordância com o trabalho de Skumanich (Skumanich, 1972).

O estudo da complexidade em astrofísica tem se ampliado nas últimas décadas. Por meio do rápido desenvolvimento dos meios de aquisição de dados astronômicos seja por telescópios terrestres ou espaciais. Além disso, a utilização de computadores cada vez mais potentes e novas técnicas de redução de dados abriram recentemente novas possibilidades para esse tipo de estudo (Regev, 2009, p. 396).

A complexidade em astrofísica abrange os fenômenos intrincados e em multiescala que governam o comportamento e a evolução de objetos celestes. Este campo aborda a interação de vários processos físicos, desde a dinâmica gravitacional e magneto-hidrodinâmica até a transferência radiativa e reações nucleares que, coletivamente, modelam o cosmos.

3.3 A rotação estelar segundo uma abordagem não extensiva

A mecânica estatística de Tsallis proporciona a utilização de uma distribuição estatística que é mais compatível com o comportamento rotacional das estrelas. Conforme discutido na seção 3.2, a distribuição de Boltzmann-Gibbs tem uma distribuição de probabilidade exponencial, enquanto a distribuição do formalismo não extensivo de Tsallis possui uma gaussiana deformada (q-gaussiana) que por sua vez, não somente, é capaz de reproduzir o comportamento da distribuição de Boltzmann-Gibbs, como pode descrever as distribuições estatísticas do tipo lei de potência que são observadas em diversos tipos de fenômenos.

Conforme mencionado na Seção 2.4 e posteriormente discutido com mais detalhes no Cap. 4, o campo magnético estelar pode apresentar um estado de saturação. Tal estado traz à tona dois tipos de comportamento para a velocidade de rotação estelar Ω : um decaimento exponencial e outro segundo uma lei de potência. Isso faz com que o formalismo de Tsallis seja adequado para descrever o comportamento rotacional das estrelas de baixa massa sujeitas ao processo de frenagem magnética.

A fim de aplicar o formalismo da mecânica estatística de Tsallis, de Freitas e de Medeiros (2013) partem das Eqs. (4.23), (4.27) e (4.28), assumindo o momento de inércia estelar aproximadamente constante durante a fase de sequência principal, obtendo as seguintes equações para a velocidade angular ¹:

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} = \exp\left[-\frac{(t-t_0)}{\tau_1}\right], \quad (t_0 \leq t < t_{sat}) \quad (3.15)$$

no regime saturado, com

$$\tau_1 \equiv \left[f(\Lambda) \omega_{sat}^{4aN/3} \right]^{-1}, \quad (3.16)$$

sendo definido como o tempo característico do processo de *spin-down* que ocorre quando a estrela atinge a sequência principal em uma idade t_0 e velocidade Ω_0 tal que $\Omega_0 \geq \omega_{sat}$, portanto, no regime saturado. O fator $f(\Lambda)$ engloba todos os parâmetros do modelo (R, M, \dot{M}, N) e é

¹ No trabalho de de Freitas e de Medeiros (2013), as equações estão escritas em termos da velocidade equatorial v . Como $v = \Omega R$, preferimos escrevê-las em termos da velocidade angular Ω .

idêntico ao membro direito da Eq. (4.24), exceto pelo sinal negativo, que na Eq. (3.15) aparece evidenciado na exponencial.

A estrela permanece perdendo velocidade no regime saturado até que o processo de *spin-down* resulte em uma velocidade $\Omega(t) = \omega_{sat}$ (Reiners; Mohanty, 2012). A idade em que isso ocorre é representada por t_{sat} , sendo obtido por meio da Eq. (3.15) no limite em que $t \rightarrow t_{sat}$:

$$t_{sat} = t_0 + \tau_1 \ln \left(\frac{\Omega_0}{\omega_{sat}} \right). \quad (3.17)$$

Quando uma estrela deixa o regime saturado e entra no regime não-saturado ($\Omega < \omega_{sat}$), processo de *spin-down* continua e a equação de velocidade angular é expressa por:

$$\frac{\Omega(t)}{\omega_{sat}} = \left[1 + \frac{(t - t_{sat})}{\tau} \right]^{-3/4aN}, \quad (t \geq t_{sat}) \quad (3.18)$$

com o tempo característico τ expresso por:

$$\tau \equiv \left[\frac{4aN}{3} f(\Lambda) \omega_{sat}^{4aN/3} \right]^{-1}. \quad (3.19)$$

É importante notar que a estrela continua perdendo momento angular no regime não-saturado, mas a velocidade angular $\Omega(t)$ segue uma lei de potência de expoente $-3/4aN$.

De Freitas e de Medeiros (2013) observaram que a Eq. (3.18) (regime não-saturado) se assemelha a Lei de Zipf generalizada por Mandelbrot (Eq. 3.8) que já foi apresentada na seção 3.2. Os autores exploram o caso em que o expoente α dessa lei de potência tende ao infinito, fazendo com que a lei de potência da Eq. (3.18) consiga reproduzir a exponencial que descreve o regime saturado na Eq. (3.15).

Aplicando a discussão de Tsallis (2004) sobre a hipótese da sensibilidade exponencial às condições iniciais em um contexto da mecânica não-extensiva (Tsallis, 1988), de Freitas e de Medeiros (2013) argumentam que uma equação diferencial linear do tipo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega}{\omega_{sat}} \right) = -\lambda_1 \left(\frac{\Omega}{\omega_{sat}} \right), \quad (3.20)$$

que admite uma solução do tipo: $\Omega(t) = \omega_{sat} e^{-\lambda_1(t-t_0)}$, onde λ_1 representa o coeficiente de Lyapunov clássico. Conforme discutido no trabalho de Lyra *et al.* (2003), o comportamento exponencial pode ser representado por uma dinâmica de lei de potência mais lenta nos pontos críticos, onde correlações de longo alcance ocorrem.

Como há uma mudança na lei de decaimento da velocidade angular Ω durante o *spin-down*, passando de um comportamento exponencial (Eq. 3.15) para uma lei de potência (Eq. 3.18), de Freitas e Medeiros (2013) propuseram uma expressão semelhante à Eq. (3.20) visando caracterizar a distribuição de velocidade de rotação estelar de forma mais geral, descrevendo também a rotação no regime não-saturado:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega}{\omega_{sat}} \right) = -\lambda_q \left(\frac{\Omega}{\omega_{sat}} \right)^q, \quad (\lambda_q \geq 0, q \geq 1). \quad (3.21)$$

A Eq. (3.21) é semelhante a forma parametrizada por Mayor e Mermilliod (1991) e, ao ser integrada com o auxílio da Eq. (3.12), chegamos a uma solução do tipo:

$$\Omega(t) = \omega_{sat} [1 + (q - 1)\lambda_q(t - t_{sat})]^{1/(1-q)} \quad (3.22)$$

em que λ_q é o coeficiente de Lyapunov não-extensivo (Tsallis, 2004). Importante notar que a Eq. (3.22) está escrita em termos de uma q-exponencial, conforme definida na Eq. (3.12).

Essa abordagem não-extensiva permite que a lei de decaimento da velocidade angular para o caso não-saturado (Eq. 3.18) seja descrita por uma equação diferencial não-linear com solução dada pela Eq. (3.22). Importante notar que quando $q \rightarrow 1$ nessa solução, pode-se recuperar uma solução exponencial do tipo da Eq.(3.15) (Freitas; de Medeiros, 2013).

Conforme discutido na seção 2.4, para $q = 1$, a mecânica estatística não-extensiva recupera as propriedades da termodinâmica do equilíbrio (Boltzmann-Gibbs) e para valores $q > 1$ a entropia de Tsallis descreve os sistemas fora do equilíbrio termodinâmico. De Freitas e de Medeiros (2013) propõem que o regime rotacional não-saturado de rotação esteja também, nesse sentido, fora do equilíbrio.

Comparando-se os expoentes das Eqs. (3.22) e (3.18), temos que:

$$q = 1 + \frac{4aN}{3}, \quad (3.23)$$

enquanto $q = 1$ recupera o comportamento exponencial do regime saturado.

Assim, pode-se definir o expoente q como o índice de frenagem magnética e, para o caso não-saturado, a Eq. (4.28) permite-nos afirmar que a taxa de decaimento do momento angular \dot{J} estelar seja do tipo:

$$\dot{J} \propto -\Omega^q. \quad (3.24)$$

podemos interpretá-lo como sendo uma medida da eficiência da frenagem magnética. Esse tipo de interpretação já vem sendo empregada em diferentes trabalhos (Kawaler, 1988; Skumanich, 1972; Freitas; de Medeiros, 2013).

A partir do trabalho de de Freitas e de Medeiros (2013), percebe-se que a perda de momento \dot{J} depende da velocidade angular Ω segundo uma lei de potência mais geral do que aquela prevista pela lei de Skumanich (Eq. 4.3) e, pela equação Eq. (3.22), percebe-se que:

$$\Omega \propto t^{1/(1-q)}, \quad (3.25)$$

sendo capaz de reproduzir a lei de Skumanich para $q = 3$, conforme a Eq. (4.1).

O índice entrópico q , característico do formalismo de Tsallis, foi então associado ao índice de frenagem magnética e relacionado com os parâmetros da teoria do dínamo (a, N), propondo então uma abordagem não-extensiva para a evolução da rotação estelar baseada no torque de Kawaler modificado (Kawaler, 1988; Chaboyer; Demarque; Pinsonneault, 1995). De Freitas e de Medeiros (2013) também demonstraram uma forte correlação de q com a massa estelar.

Esta abordagem foi pioneira ao descrever o comportamento rotacional de estrelas de campo do tipo espectral F e G em regime de campo magnético insaturado com idades no intervalo de 1 a 10 giga-anos, com massas superiores a $0,9M_{\odot}$ e inferiores a $2M_{\odot}$ na vizinhança solar, em que os autores utilizaram um catálogo elaborado por Holmberg *et al.* (2007) contendo cerca de 14.000 estrelas na sequência principal para extrair a sua amostra final contendo 5780 estrelas com essas características (Freitas; de Medeiros, 2013).

Em um trabalho posterior, de Freitas *et al.* (2015) utilizaram a mesma abordagem não-extensiva generalizando o torque proposto por Reiners e Mohantly (2012). Considerando um regime de campo magnético não-saturado, o índice q da lei de potência para o decaimento da velocidade pode ser escrito como $1 + 8a/(4N - 5)$. Em ambos os modelos propostos por de Freitas *et al.* (2013, 2015), o regime de saturação pode ser restabelecido no contexto não extensivo, ao se assumir o limite $q \rightarrow 1$.

Conforme já discutido anteriormente, percebe-se que fenômenos associados à rotação estelar e à atividade magnética apresentam características de sistemas complexos, tais como a multifractalidade e invariância de escala. Ao levarmos em consideração a interação entre uma estrela e os seus planetas, desperta-se o interesse pela investigação da existência de tais características nos fenômenos que resultam dessa interação. Nos próximos capítulos, aplicaremos o formalismo de Tsallis para analisar a evolução da rotação de estrelas ativas sem a presença de planetas e em um contexto de interação de marés em sistemas planetários.

4 EVOLUÇÃO DA ROTAÇÃO ESTELAR SOB A AÇÃO DO ÍNDICE DE FRENAGEM MAGNÉTICA NÃO EXTENSIVO

Conforme discutido no capítulo anterior, o formalismo da mecânica estatística de Tsallis pode ser aplicado na descrição de vários tipos de sistemas. Neste capítulo, propomos a aplicação desse formalismo para realizarmos a medida do desvio do expoente contido na lei de potência que descreve a perda de momento angular de estrelas ativas através do mecanismo de frenagem magnética, sem considerar a presença de estrelas companheiras ou de planetas.

Inicialmente, discutimos a frenagem magnética no contexto da evolução da rotação de estrelas de baixa massa. Em seguida, apresentamos o modelo de Kawaler e a sua posterior modificação para explicar a discrepância de velocidade em aglomerados de estrelas jovens. Esse modelo permite que apliquemos uma abordagem da mecânica estatística não extensiva ao comportamento das leis de decaimento da velocidade angular durante o mecanismo de frenagem que consegue descrever o comportamento rotacional das estrelas durante a fase da sequência principal. Trata-se, portanto, de um passo importante e preparatório para se chegar ao estudo da rotação estelar considerando um novo efeito: a interação estrela-planeta.

Conforme discutido na seção 2.6, a aplicabilidade da lei de Skumanich vem sendo questionada para estrelas evoluídas. Considerando que essa lei tem sido amplamente validada em estrelas do tipo solar, um teste seguro para se verificar a sua eficácia pode ser realizado através da aplicação do modelo de Kawaler modificado em estrelas com massas próximas à massa solar, porém inferiores à ruptura de Kraft e em diferentes estágios evolutivos. Isso possibilita verificar se realmente há um desvio dessa lei com relação ao estágio evolutivo.

Partindo dessa abordagem, pretende-se determinar o desvio do valor do índice de frenagem magnética q_w a partir do valor canônico $q = 3$ de Skumanich para estrelas gigantes e de sequência principal e, conforme será apresentado na seção 8.1, as estrelas pós-sequência principal apresentam um desvio considerável da lei de Skumanich.

4.1 A frenagem magnética e a evolução estelar

Após a dissipação dos discos protoestelares, a frenagem magnética é o mecanismo básico responsável pela perda de momento angular em estrelas de baixa massa ($0,4M_{\odot}$ - $4M_{\odot}$). Esse processo resulta da interação do vento estelar com o campo magnético estelar e foi inicialmente proposto por Schatzman (1962). A massa ejetada no vento estelar interage com o campo magnético estelar e, mesmo sendo uma quantidade pequena, a taxa de momento angular perdido por unidade de massa é bem expressiva. Dessa forma, mesmo que uma quantidade de massa perdida pela estrela seja pequena, a redução da velocidade angular da estrela é significativa.

Na sequência principal, existem dois regimes rotacionais distintos quando se observa a temperatura efetiva. Um deles, com temperaturas inferiores a 6200 K, é característico das estrelas frias que são rotadores lentos e seus períodos rotacionais são da ordem de algumas

semanas. Tais períodos são bem mais lentos do que aqueles esperados caso a estrela conservasse o seu momento angular durante a sua contração antes da sua entrada na sequência principal e também daqueles observados em aglomerados de estrelas mais jovens (van Saders; Pinsonneault, 2012).

Por outro lado, estrelas do tipo inicial na sequência principal e com temperaturas efetivas maiores do que 6200 K giram com maior velocidade e os períodos de rotação são menores do que 10 dias. Essa mudança no regime rotacional é conhecida como a ruptura de Kraft, já comentada na seção 2.6 e, em termos da massa estelar, ela ocorre por volta de $1,3M_{\odot}$ (Kraft, 1967). A explicação mais aceita para essa mudança de regime é aquela que propõe a diminuição ou o desaparecimento do envelope convectivo em estrelas do tipo inicial cuja consequência seria a inaptidão em produzir ventos estelares, impossibilitando a perda de momento angular pelo processo de frenagem magnética (Freitas *et al.*, 2014; Silva *et al.*, 2013).

É amplamente aceito que a evolução rotacional de estrelas de sequência principal seja controlada pela perda de momento angular causada pelos ventos magnéticos (Kawaler, 1988) e que não devem ocorrer mudanças estruturais observáveis, como a mudança do raio estelar, durante essa fase de evolução marcada pelo equilíbrio hidrostático.

No entanto, quando as estrelas deixam a sequência principal em direção ao ramo das gigantes vermelhas, as mudanças estruturais são mais sensíveis. Essas estrelas passam a ter um raio maior, embora constante, ao deixarem a sequência principal. A expansão do envelope convectivo contribui para o aumento do momento de inércia (Weber; Davis, 1967). Assim, ao evoluir para aquele ramo, a estrela sofreria um aumento do momento de inércia que, por sua vez, poderia levar a uma diminuição da rotação estelar (Krishnamurthi *et al.*, 1997). Além disso, é possível que objetos acima da ruptura de Kraft possam apresentar envelopes convectivos no ramo das subgigantes e, portanto, produzirem ventos estelares.

Após o trabalho de Kraft (1967), Skumanich (1972) mostrou que a rotação, a atividade magnética e a abundância de lítio para estrelas de aglomerado semelhantes ao Sol diminuíam com a raiz quadrada da idade estelar. Como as intensidades das linhas de emissão da linha Ca^+ são linearmente proporcionais à intensidade do campo magnético na superfície estelar, então pode-se inferir que os campos magnéticos superficiais são proporcionais à velocidade angular Ω que é empiricamente dada por:

$$\Omega \propto t^{-1/2}, \quad (4.1)$$

em que t é a idade da estrela. Essa equação é conhecida como a lei de Skumanich (Skumanich, 1972).

Conforme definido na seção 2.4, Eq. (2.5), o momento angular estelar J é escrito na forma:

$$J = I\Omega, \quad (4.2)$$

em que I é o momento de inércia. Assim, se o momento de inércia for independente do tempo, a taxa de variação do momento angular \dot{J} é proporcional à velocidade angular e, pela Eq. 4.1,

percebe-se que:

$$\dot{J} = I\dot{\Omega} = KI\dot{t}^{-3/2} = -K\Omega^3, \quad (4.3)$$

em que K é uma constante que engloba as constantes de proporcionalidade advindas da lei de Skumanich e o momento de inércia.

Percebe-se portanto que, considerando o momento de inércia constante, a taxa de perda de momento angular, segundo a lei de Skumanich, é dada por uma lei de potência que só depende da velocidade angular com o expoente igual a 3.

Muitos esforços foram feitos a fim de se entender o mecanismo responsável pela perda de momento angular estelar. Trabalhos pioneiros como aqueles de Mestel (1968, 1984) e Mestel e Spruit (1987) levaram a Kawaler (1988) desenvolver um modelo atribuindo a perda de momento angular através da ejeção de matéria das estrelas. O vento estelar seria então aprisionado pelas linhas de campo magnético e então forçado a corrotacionar com a estrela causando uma mudança no momento angular e, conseqüentemente, uma frenagem magnética que diminui a velocidade de rotação estelar. Esse modelo será analisado com mais detalhes na próxima seção.

4.2 O modelo de Kawaler para a perda de momento angular estelar

O modelo de Kawaler (1988) traz uma adaptação do modelo de Mestel (1984) em que formula uma expressão geral para a taxa de perda do momento angular através dos ventos estelares magnetizados como função da configuração do campo magnético, taxa de rotação e as propriedades do modelo estelar visando a aplicação em modelos de evolução estelar.

Em seu trabalho, Kawaler considera dois tipos de geometria para o campo magnético, a radial e a dipolar, tendo comparado seus resultados com os modelos de pré-sequência principal computados para estrelas sem rotação e massas no intervalo de $0,4 - 3,0M_{\odot}$.

Segundo esse modelo, a perda de massa dM radialmente simétrica de uma casca esférica que atravessa a superfície de Alfvén (S_A) durante um intervalo de tempo dt acarreta em uma taxa de perda de momento angular dJ que depende da geometria do campo magnético, sendo expressa pelas seguintes equações:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dM}{dt} R^2 \Omega \left[\left(\frac{r_A}{R} \right)_{\text{radial}} \right]^2 \quad (4.4) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dM}{dt} R^2 \Omega \left[\left(\frac{r_A}{R} \right)_{\text{dipolar}} \right]^1. \quad (4.5)$$

Note que a Eq. 4.4 é a mesma que foi apresentada na Seção 2.5. O termo r_A/R está relacionado com a intensidade do campo, enquanto o seu expoente é determinado pelo tipo de geometria do campo magnético na superfície S_A . O raio de corotação r_A é definido como o raio médio de S_A .

Por definição, a velocidade v com que o vento estelar chega à superfície de Alfvén S_A atinge o valor v_A :

$$v_A \equiv \frac{B_r}{\sqrt{4\pi\rho}} = v \quad em \quad (r = r_A). \quad (4.6)$$

Nessa região, a componente radial do campo magnético tem a sua intensidade representada por B_r e a atmosfera estelar apresenta uma densidade $\rho(r = r_A)$. Kawaler escala a velocidade v em S_A com a velocidade de escape da seguinte forma:

$$v = K_v \sqrt{\frac{2GM}{r_A}}, \quad (4.7)$$

afirmando que, para o caso $K_v=1$, as velocidades são comparáveis aquelas obtidas para o vento térmico de Mestel (1984).

Devido à simetria esférica, a taxa de perda de massa dM/dt ou, simplesmente \dot{M} , pode ser escrita na forma:

$$\dot{M} = 4\pi r_A^2 \rho v_A. \quad (4.8)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da Eq. (4.6) e, em seguida, substituindo nela a Eq. (4.8) para se eliminar a densidade ρ , obtém-se que:

$$\dot{M}v = B_r^2 r_A^2. \quad (4.9)$$

Na seção 2.5, vimos que para o campo magnético radial, com $r = r_A$, tem-se que:

$$B_r r_A^2 = B_0 R^2, \quad (4.10)$$

em que B_0 é o campo magnético na superfície da estrela de raio R . Assim, substituindo a Eq. (4.10) na Eq. (4.9), chegamos na seguinte expressão para (r_A/R) :

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}} = B_0 R (\dot{M}v)^{-1/2}, \quad (4.11)$$

e, em seguida, substituindo a Eq. (4.7) na equação acima, obtemos;

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}}^3 = B_0^4 R^5 (\dot{M}K_v)^{-2} (2GM)^{-1}, \quad (4.12)$$

Semelhantemente, para o campo magnético do tipo dipolar, temos a seguinte relação:

$$B_r r_A^3 = B_0 R^3, \quad (4.13)$$

que, ao ser aplicada na Eq. (4.9), permite a obtenção da seguinte expressão para a razão (r_A/R) neste tipo de geometria:

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{dipolar}} = B_0^{1/2} R^{1/2} (\dot{M}v)^{-1/4}, \quad (4.14)$$

que por sua vez, através da Eq. (4.7), pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{dipolar}}^7 = B_0^4 R^5 (\dot{M}K_v)^{-2} (2GM)^{-1}. \quad (4.15)$$

Percebe-se que os membros direitos das Eqs. (4.12) e (4.15) são idênticos e, por isso, o termo r_A/R foi evidenciada nas Eqs. (4.4) e (4.5) pois elas se relacionam conforme a Eq. (4.16):

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{dipolar}} = \left[\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}}\right]^{3/7}, \quad (4.16)$$

permitindo a unificação das Eqs. (4.4) e (4.5), deixando a cargo de um parâmetro N a indicação do tipo de geometria do campo magnético (Kawaler, 1988). A expressão generalizada para a taxa de variação do momento angular é dada por:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dM}{dt} R^2 \Omega \left[\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}}\right]^N, \quad (4.17)$$

permite que utilizemos a razão (r_A/R) para o caso radial em uma única expressão que considera ambos os tipo de geometria, onde N pode assumir os valores: $N = 2$ (radial) e $N = 3/7$ (dipolar).

A Eq. (4.12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}} = B_0^{4/3} R^{5/3} (\dot{M} K_v)^{-2/3} (2GM)^{-1/3}, \quad (4.18)$$

que, em seguida, Kawaler (1988) a normaliza em termos das propriedades solares com unidades no sistema métrico (CGS) e a apresenta da seguinte forma¹:

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}} = 24,93 K_v^{-2/3} B_0^{4/3} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{5/3} \left(\frac{\dot{M}}{-10^{-14} M_\odot \text{ano}^{-1}}\right)^{-2/3} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3}, \quad (4.19)$$

em que a taxa de perda de massa \dot{M} é dada em unidades de $-10^{-14} M_\odot/\text{ano}$ e que passa a ser representada pela quantidade positiva \dot{M}_{14} .

Admitindo-se que a intensidade do campo magnético seja uma lei de potência do tipo $B_0 \propto a$:

$$B_0 = K_B \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-2} \Omega^a, \quad (4.20)$$

em que a é o expoente que caracteriza a dependência do campo superficial com a velocidade angular Ω da estrela e K_B é uma das constantes de calibração do modelo. Assim, a Eq. (4.19) pode ser reescrita em termos de Ω :

$$\left(\frac{r_A}{R}\right)_{\text{radial}} = 24,93 K_v^{-2/3} K_B^{4/3} \Omega^{4a/3} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1} (\dot{M}_{14})^{-2/3} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3}, \quad (4.21)$$

que, ao ser aplicada à Eq. (4.17), permite-nos obter a parametrização de Kawaler para a taxa da perda de momento angular:

¹ Esta equação está ligeiramente diferente da Eq. (5) presente no artigo de Kawaler (1988), onde o expoente de K_v está equivocadamente igual a $-1/2$. Apesar disso, o modelo não foi prejudicado pois foi assumido que $K_v = 1$. Além disso, há um erro de digitação na mesma equação, mais especificamente no termo pelo qual \dot{M} encontra-se dividido por $-10^{-14} M_\odot/\text{ano}^{-1}$.

$$\frac{dJ}{dt} = -K_W \Omega^{1+(4aN/3)} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{2-N} (\dot{M}_{14})^{1-(2N/3)} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-N/3}, \quad (4.22)$$

em que $K_W \equiv 2.035 \times 10^{33} (24,93 K_v^{-2/3})^N K_B^{4/3}$.

Por meio da Eq. (4.22), percebemos que no modelo de Kawaler a taxa da perda de momento angular é devida à presença de um vento estelar proporcional a $\Omega^{1+4aN/3}$. Nesta relação o decaimento da velocidade angular está associado à relação de dínamo a e a geometria do campo magnético N .

Em seu estudo, Kawaler assume $a = 1$ e N no intervalo $1 \leq N \leq 2$ a fim de determinar a influência da configuração do campo magnético. Além disso, analisa as taxas de aumento (*spin-up*) e de diminuição (*spin-down*) de rotação em duas situações envolvendo mudanças evolutivas e a redistribuição do momento angular na fase de contração pré-sequência principal.

Na primeira delas, considera-se que o momento angular é completamente redistribuído no interior estelar, a estrela gira como um corpo rígido e o aumento de velocidade rotacional deve-se à diminuição do momento de inércia durante à contração. Já na segunda situação, o momento angular se conserva localmente em regiões mais internas da estrela e o movimento de corpo rígido fica somente no envelope convectivo mais externo.

Durante a fase de contração gravitacional que antecede à entrada da estrela na sequência principal, se não houver perda de momento angular, a estrela gira como um corpo rígido e o seu momento angular constante poder ser escrito a partir da Eq. (2.5), de onde concluímos que a diminuição do momento de inércia estelar I resultaria no aumento da velocidade angular de rotação Ω , caracterizando, portanto, o *spin-up* da estrela. No entanto, esse processo deveria cessar quando a estrela atingisse a sequência principal (Kawaler, 1988).

A partir do momento em que a estrela tem a sua a contração gravitacional finalizada, ocorre o equilíbrio hidrostático entre as forças causadas pela pressão do gás e pela gravidade, Nesse momento, chamado de idade zero da sequência principal², é razoável considerar que I e R sejam constantes. Assim, derivando-se a Eq. (2.5) com relação ao tempo, temos:

$$\frac{dJ}{dt} = I \frac{d\Omega}{dt}, \quad (4.23)$$

que ao ser substituída na Eq. (4.22), fornece a expressão:

$$\Omega^{-(1+4aN/3)} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{-K_W}{I} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{2-N} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-N/3} \left(\frac{\dot{M}}{-10^{-14} M_\odot \text{ano}^{-1}}\right)^{1-(2N/3)}, \quad (4.24)$$

onde os termos do membro direito são todos constantes, uma vez que consideramos M aproximadamente constante, já que as frações de massa perdidas são bem pequenas e consideramos que a taxa com que a massa é perdida \dot{M} seja constante. Isso permite integrar a Eq. (4.24) considerando

² Esse termo na língua inglesa é descrito como *zero age main sequence* com a respectiva sigla: ZAMS.

o membro direito como sendo igual a uma constante K e, assim, para a velocidade angular escrevemos:

$$\Omega^{-(1+4aN/3)} \frac{d\Omega}{dt} = K_2, \quad (4.25)$$

que, ao ser integrada, permite-nos afirmar que:

$$\Omega \propto t^{-3/4aN}. \quad (4.26)$$

É importante ressaltar que para campo magnético de configuração $N = 1$ e o expoente de dínamo $a = 1$, a Eq. (4.26) reproduz a lei de Skumanich (Eq. 4.1).

Kawaler (1988) afirma que em idades estelares superiores a 10^8 anos, as velocidades rotacionais são independentes do momento angular inicial e isso permite a calibração de modelos de ventos para explicar o *spin-down* de estrelas de baixa massa, mas reconhece a limitação do modelo em situações em que o momento angular pode ser redistribuído por outros mecanismo tais como as instabilidades rotacionais induzidas. Além disso, o autor aponta que nos aglomerados de estrelas jovens há um grande espalhamento de velocidades rotacionais para a mesma massa estelar e o explica como sendo uma consequência da forte sensibilidade do modelo com relação ao momento angular inicial e afirma que qualquer mecanismo de redistribuição do momento angular em estrelas de baixa massa deve atuar em escalas de tempo da ordem de 10^8 anos.

De fato, Sills *et al.* (2000) afirma que modelos como o de Kawaler predizem um processo rápido de *spin-down* em rotadores rápidos, fato que não é amparado pelas observações como aquelas mencionadas no trabalho de Pinsonneault, Kawaler e Demarque (1990).

Modelos de rotação que consideram a difusão, a mistura e o transporte de momento angular do interior para a superfície estelar explicam essa aparente contradição a partir da saturação do campo magnético gerado pelo dínamo estelar. Ao se supor a existência de um valor limite ω_{sat} para a velocidade angular, acima do qual, o campo magnético na superfície da estrela permanecesse constante (saturado), poder-se-ia inferir que a taxa de perda de momento angular no envelope convectivo fosse reduzida e, assim, os rotadores rápidos teriam um processo de *spin-down* mais lento (Keppens; MacGregor; Charbonneau, 1995).

Analisando os resultados de Kawaler, os trabalhos Stauffer e Hartaman (1987) e de Bouvier (1991, p. 41), Chaboyer *et al.* (1995) entenderam que a discrepância entre essas velocidades poderia ser explicada por meio da existência de um regime rotacional no qual a frenagem magnética sofresse uma redução mais lenta. Para tal, propuseram uma modificação no modelo de Kawaler.

Assim, a parametrização anterior deveria ser modificada segundo o nível de saturação do campo magnético da seguinte forma³:

³ Essas equações estão escritas de uma forma ligeiramente diferente das Eqs. (3) e (4) encontradas no trabalho de Chaboyer *et al.* (1995). No presente trabalho, preferimos utilizar ω_{sat} para a velocidade angular de saturação (ω_{crit}), Ω para a velocidade angular e K_w como uma constante que engloba o produto $f_k \times 2.036 \times 10^{33} (1,452 \times 10^9)^N$ em unidades do sistema (CGS) que estão presentes no trabalho original.

$$\frac{dJ}{dt} = -K_w \Omega^{1+(4aN/3)} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{2-N} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-N/3} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-14}}\right)^{1-(2N/3)} \quad (\Omega < \omega_{sat}), \quad (4.27)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -K_w \Omega \omega_{sat}^{4N/3} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{2-N} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-N/3} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-14}}\right)^{1-(2N/3)} \quad (\Omega \geq \omega_{sat}), \quad (4.28)$$

em que K_w o termo representa a quantidade total da perda de momento angular, tendo o seu valor determinado através do ajuste do modelo no ponto em que reproduz a velocidade de rotação solar para a idade do Sol. O termo ω_{sat} introduz o nível de saturação na perda de momento angular, ou seja, se a velocidade de rotação da estrela for maior ou igual a ω_{sat} , o campo magnético não sofre variações. Segundo Chaboyer, Demarque e Pinsonneault (1995), a falta de valores confiáveis para ω_{sat} levou esses autores a deixarem-na como um parâmetro livre no modelo.

Reiners e Mohanty (2012) relatam a incapacidade dos modelos que incorporam a saturação, como o de Chaboyer (1995), em satisfazer simultaneamente a evolução rotacional de estrelas baixa massa ($\leq 0,5M_\odot$) e propõe um modelo no qual o campo magnético na superfície assume uma intensidade $B_0 \propto \Omega^a$. Comparando essa intensidade com aquela proposta por Kawaler e expressa na Eq. (4.20), pode-se perceber que o modelo de Reiners e Mohanty (2012) é mais sensível ao raio estelar do que o modelo modificado de Kawaler. Além disso, esses autores assumem que ω_{sat} seja independente da massa.

Nesse ponto, é importante chamar atenção para a possível associação da saturação do dínamo estelar com a existência de processos não-lineares subjacentes (Brandenburg; Subramanian, 2005, p. 7). Conforme Vilhu (1984), a saturação do dínamo estelar inibe o aumento do magnetismo com o aumento da rotação mas esse tipo de explicação é criticado por autores como Jardine e Unruh (1999) que afirmam que a velocidade de rotação para a qual ocorre a saturação é dependente do tipo de indicador de atividade magnética observado. Trabalhos recentes, como o de Reiners *et al.* (2022), sugerem a existência de um limite de saturação definido pela energia cinética disponível no movimento convectivo da estrela. Tal fato se reflete também nas simulações computacionais, como a de Leidi *et al.* (2023), onde se considera a conversão da energia cinética em energia magnética dentro da camada convectiva, observando um regime de saturação não linear do dínamo quando a razão entre a energia magnética e a energia cinética atinge valores médios entre 20-30%.

Na seção 3.1, vimos que o formalismo de Tsallis é uma ferramenta adequada para lidar com sistemas não extensivos e não lineares, inclusive turbulências. Observa-se que a aplicação desse formalismo no estudo da rotação estelar pode trazer mais informações sobre a complexidade subjacente dos processos físicos envolvido na interação rotação-atividade magnética. Segundo de Freitas *et al.* (2014), a relação entre a rotação estelar e a não extensividade sugere que a distribuição da rotação estelar vai além da natureza matemática do formalismo, dependendo da mecânica estatística utilizada.

É amplamente aceito na literatura que a frenagem magnética em rotadores lentos segue a lei de Skumanich. No entanto, nos modelos anteriores o momento de inércia foi con-

siderado constante e espera-se que a evolução estelar traga mudanças estruturais que possam modificar a inércia rotacional da estrela.

Assim, torna-se oportuna a aplicação de um modelo que se utilize da abordagem não extensiva e que englobe a variação do momento de inércia para se analisar o desvio do índice de frenagem magnética a partir do valor canônico $q = 3$ de Skumanich. Assim, na próxima seção, propomos um modelo com essas características que pode ser aplicado a uma amostra de estrelas em estágios evolutivos diferentes.

4.3 Uma medida para o desvio da lei de frenagem magnética de Skumanich

Inicialmente, apresentamos as equações de partida que permitem modelar o índice de frenagem magnética em um contexto não extensivo e desenvolve-se os cálculos analíticos necessários para a obtenção de uma expressão que permita a avaliação do modelo por meio de parâmetros observáveis. Utilizando a equação proposta por de Freitas (2021) com base nas parametrizações de Mayor e Mermilliod (1991) e Freitas e de Medeiros (2013):

$$\dot{\Omega} = -\frac{\Omega_0}{\tau} \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^q, \quad q \geq 1, \quad (4.29)$$

e considerando q independente do tempo, o índice de frenagem pode ser expresso por:

$$q = \frac{\ddot{\Omega}\Omega}{\dot{\Omega}^2}. \quad (4.30)$$

Como q é um expoente generalizado e, conforme veremos, será utilizado posteriormente para se medir a superposição dos efeitos da interação de marés (Cap. 7) com a frenagem magnética, achamos oportuno definir q_w como sendo o índice de frenagem magnética para enfatizar a sua utilização em um contexto em que a frenagem magnética seja o único mecanismo influenciando a perda de momento angular estelar. Assim, o expoente q na Eq. (4.29) e, portanto, na definição (4.30), é assumido como $q \equiv q_w$.

A partir da fórmula de MacCullagh (Sec. 2.3), o achatamento (*oblatness*) ϵ para uma estrela rotante pode ser relacionado com I e I_0 , os momentos de inércia de uma esfera com e sem movimento de rotação, respectivamente.

$$\epsilon = \frac{I - I_0}{I_0}, \quad (4.31)$$

$$\epsilon = \frac{R^3 \Omega^2}{GM}, \quad (4.32)$$

Por meio das Eqs. (4.31) e (4.32), encontra-se uma expressão para o momento de inércia em função da velocidade angular:

$$I = I_0 \left(1 + \frac{R^3 \Omega^2}{GM} \right) \quad (4.33)$$

Como a derivada temporal do momento angular pode ser expressa por:

$$\dot{J} = I\dot{\Omega} + \dot{I}\Omega \quad (4.34)$$

A partir das Eqs. (4.33) e (4.34):

$$\dot{J} = I_0 \dot{\Omega} \left(1 + \frac{3R^3 \Omega^2}{GM} \right). \quad (4.35)$$

e assumindo que a taxa de perda do momento angular é dada pela seguinte lei de potência:

$$\dot{J} = K_m \Omega^m, \quad (4.36)$$

em que m é um parâmetro que controla a taxa de perda de momento e K_m está associado ao modelo que descreve esta perda para o campo magnético não-saturado. É importante salientar que, no modelo proposto, não foi necessário fazer qualquer tipo de conjectura sobre a forma funcional de K_m , admitindo apenas que seja invariável no tempo.

$$\dot{\Omega} = \frac{K_m}{I_0} \left(\frac{\Omega^m}{1 + \frac{3R^3 \Omega^2}{GM}} \right) \quad (4.37)$$

$$\ddot{\Omega} = \frac{K_m}{I_0} \left(\frac{\Omega^{m-1} \dot{\Omega}}{1 + \frac{3R^3 \Omega^2}{GM}} \right) \left(m - \frac{\frac{6R^3 \Omega^2}{GM}}{1 + \frac{3R^3 \Omega^2}{GM}} \right) \quad (4.38)$$

Assim, aplicando as Eqs. (4.37) e (4.38) em (4.30), obtém-se:

$$q_w(\Omega, R, M) = m - \frac{\frac{6R^3 \Omega^2}{GM}}{1 + \frac{3R^3 \Omega^2}{GM}} \quad (4.39) \quad q_w(\Omega, R, M) = 3 - \frac{\frac{6R^3 \Omega^2}{GM}}{1 + \frac{3R^3 \Omega^2}{GM}}. \quad (4.40)$$

Considerando $\Omega = 2\pi/P$, o índice q pode ser reescrito como:

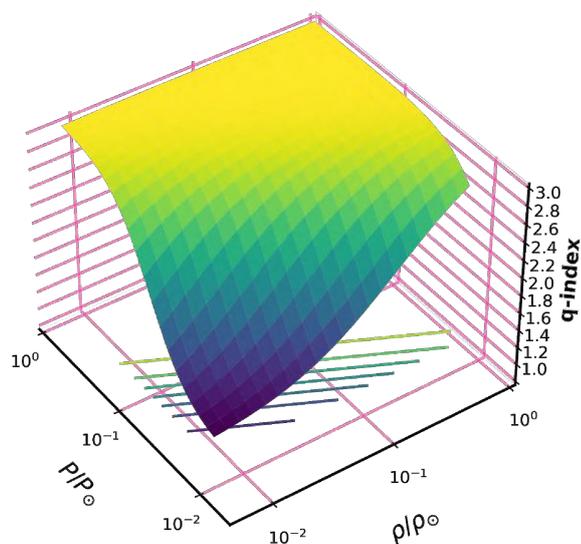
$$q_w(P, \rho) = 3 - \frac{2}{1 + \frac{1}{3\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{\rho_\odot} \right) \left(\frac{P}{P_\odot} \right)^2}, \quad (4.41)$$

com

$$\frac{\rho}{\rho_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-3}. \quad (4.42)$$

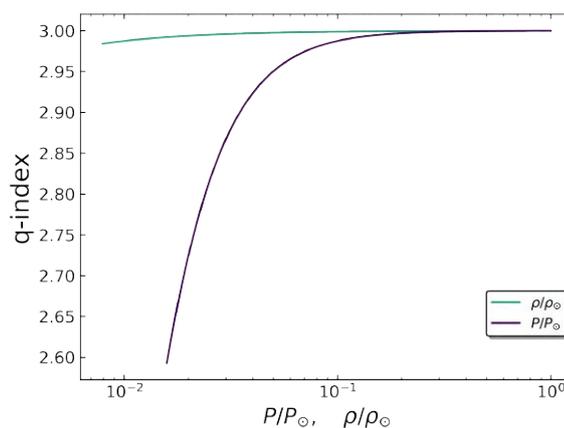
A superfície gerada pela função $q_w\left(\frac{\rho}{\rho_\odot}, \frac{P}{P_\odot}\right)$ é mostrada na Fig. 49 enquanto as curvas de q_w para cada uma das razões P/P_\odot e ρ/ρ_\odot são apresentadas na Fig. 50. Podemos perceber uma maior sensibilidade do índice q_w com relação o período rotacional.

Figura 49 – Superfície do índice de frenagem magnética ($\frac{\rho}{\rho_{\odot}}, \frac{P}{P_{\odot}}, q_w$).



No plano inferior temos as curvas de nível do índice de frenagem magnética. Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 50 – Perfis variacionais do índice de frenagem magnética q_w para as razões de período rotacional (P/P_{\odot}) e de densidade média (ρ/ρ_{\odot}).



A curva de q_w para uma dada razão é obtida mantendo-se a outra razão constante. Para o perfil variacional de q_w com relação a ρ/ρ_{\odot} , faz-se $P/P_{\odot} = 1$, enquanto para q_w versus P/P_{\odot} , tomou-se $\rho/\rho_{\odot} = 1$. Fonte: elaborada pelo autor.

5 REVISITANDO O MODELO DE DARWIN PARA A INTERAÇÃO DE MARÉS

Nesse capítulo, damos mais um passo para estudarmos a influência das interações de maré na dinâmica orbital de sistemas planetários e na rotação estelar. Inicialmente, discutimos as interações de maré em condições de equilíbrio, desenvolvendo o potencial de maré e definindo os números de Love. Em um segundo momento, apresentamos os elementos orbitais que são relevantes para a descrição da dinâmica orbital e, em seguida, discutimos o efeito dissipativo causado pelas marés de equilíbrio e definimos a grandeza Q que indica a intensidade da dissipação de energia no sistema estrela-planeta visando apresentar as equações de partida para o modelo proposto no Cap. 7.

5.1 As interações de maré de equilíbrio

As interações das marés entre os corpos celestes são reconhecidas como impulsadores significativos na evolução dinâmica em sistemas planetários. Entre essas interações, o estudo das marés geradas nas estrelas pelos seus planetas em órbita tem uma importância particular. A compreensão desses efeitos fornece informações valiosas sobre a dinâmica, a estrutura e a evolução de estrelas e planetas em sistemas binários ou mesmo multiplanetários.

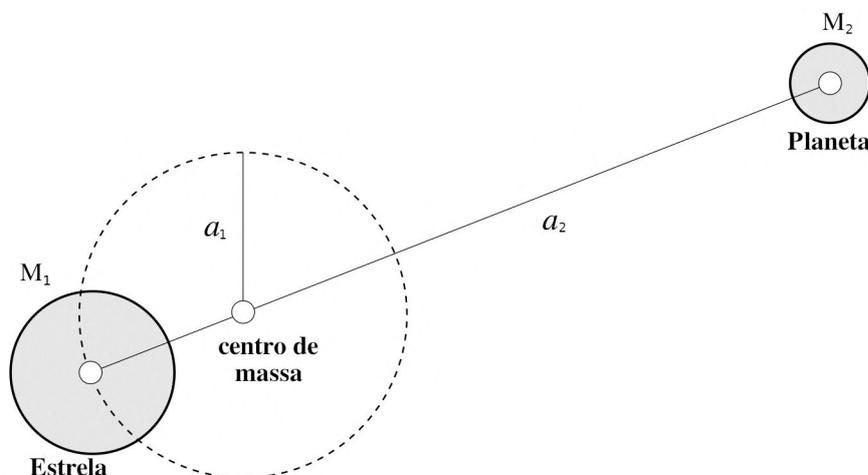
A influência das marés pode ser decomposta em duas partes: a maré de equilíbrio que se caracteriza pelo equilíbrio hidrostático e resposta não ondulatória à deformação e a maré dinâmica, caracterizada pelas oscilações forçadas de maré ressonante, na forma de ondas inerciais em zonas de convecção ou como ondas de gravidade interna em zonas de radiação (Vries; Barker; Hollerbach, 2023).

Na vanguarda dos estudos de marés está a abordagem das marés de equilíbrio, que serve como uma estrutura fundamental para a compreensão das interações gravitacionais entre os corpos celestes. Neste tipo de abordagem, quando lidamos com corpos perfeitamente elásticos, não há qualquer tipo de efeito dissipativo. No entanto, estrelas e planetas são corpos distantes dessa idealização.

Além das contribuições de Kepler, Galileu, Newton, Laplace, Kelvin para o estudo e predições das marés, destacam-se as contribuições seminais de George H. Darwin para o assunto, com o artigo intitulado *A Numerical Estimate of the Rigidity of the Earth*, onde demonstra que, além dos oceanos, o interior sólido da Terra se deforma (Ekman, 1993, p. 594). A partir desse trabalho, Darwin fez contribuições sobre a intrincada interação entre as forças gravitacionais, a dinâmica rotacional e as propriedades viscoelásticas dos corpos celestes e suas observações sobre as origens e o comportamento das marés de equilíbrio permitiram avanços subsequentes na teoria das marés.

O desenvolvimento matemático para obtenção do potencial de maré ora apresentado seguirá, em boa parte do texto, a sequência de exposição encontrada no livro de Murray (1999). Esse desenvolvimento nos levará a concluir que o potencial de maré, assim como o potencial

Figura 51 – Distâncias características na interação gravitacional de dois corpos.



Com o centro de massa (baricentro) localizado no centro da circunferência em linha tracejada, representa-se a órbita da estrela com o semi-eixo maior a_1 , enquanto o planeta, cuja distância ao centro de massa é representada por a_2 , tem um semi-eixo maior em relação à estrela dado por $a = a_1 + a_2$. Fonte: Extraído e adaptado de (Murray, 1999, p. 131).

gerado pelo esferoide em rotação analisado na Seç. 2.3, pode ser representado por uma expansão em polinômios de Legendre.

Ao considerarmos o efeito da gravitação, sem tratarmos os corpos como pontos materiais, nos deparamos com situações em que diferentes partes de uma estrela, planeta e/ou satélite estão sujeitas a uma variação da intensidade da força gravitacional. Uma maré surge em um corpo devido à influência de outro em decorrência desse gradiente gravitacional e, quando os corpos envolvidos não são considerados perfeitamente rígidos (Sec. 2.3), eles sofrem deformações que são evidenciadas pela formação de um bojo de maré (Murray, 1999, p. 140). Considerando a influência gravitacional de um planeta sobre uma estrela, a força gravitacional média entre esses corpos $\langle F \rangle$, em uma perspectiva de massa pontuais, é escrita na forma:

$$\langle F \rangle = G \frac{M_1 M_2}{r^2}, \quad (5.1)$$

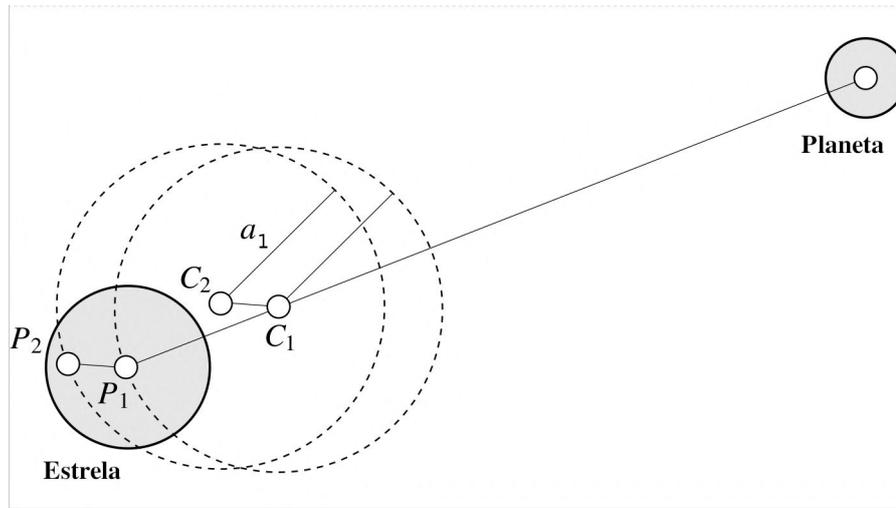
onde r é a distância de separação entre o centro desses corpos. Ao assumirmos que ambos realizam órbitas circulares em torno do centro de massa (Fig. 51), a razão entre as distância desses dois corpos é inversamente proporcional às massas:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{M_1}{M_2}, \quad (5.2)$$

com o semi-eixo maior a da órbita do planeta em relação à estrela dado por $a = a_1 + a_2$.

Na Fig. 52, considera-se o movimento de uma partícula P_1 , localizada no centro da estrela. Com relação ao centro de massa, C_1 , percebe-se que ela descreve um círculo de raio a_1 . Ao negligenciarmos a rotação estelar, qualquer outro ponto P_2 na estrela descreverá um círculo de mesmo raio, mas centrado em outro ponto C_2 que dista de C_1 a mesma distância de separação

Figura 52 – Órbitas de partículas no interior da estrela.



As partículas no interior de uma estrela descrevem movimentos circulares de raios idênticos a a_1 mas centrados em pontos diferentes. Uma partícula localizada em P_1 descreve uma circunferência em torno de C_1 , enquanto outra localizada em P_2 tem como centro o ponto indicado por P_2 . Fonte: Extraído e adaptado de (Murray, 1999, p. 132).

entre P_1 e P_2 . Estendendo esse argumento para todas as partículas da estrela, percebe-se que elas estão sujeitas as mesmas forças centrífugas (intensidade e direção coincidentes). No entanto, essas partículas não estão sujeitas à mesma força gravitacional \mathbf{F} , tal que a força gravitacional média $\langle \mathbf{F} \rangle$ é capaz de suprir a contraposição somente das forças centrífugas às quais as partículas estão sujeitas:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \text{força centrífuga} \neq \mathbf{F} \quad (5.3)$$

e a diferença entre as forças gravitacional e força gravitacional média dá origem a força de maré F_{tidal} :

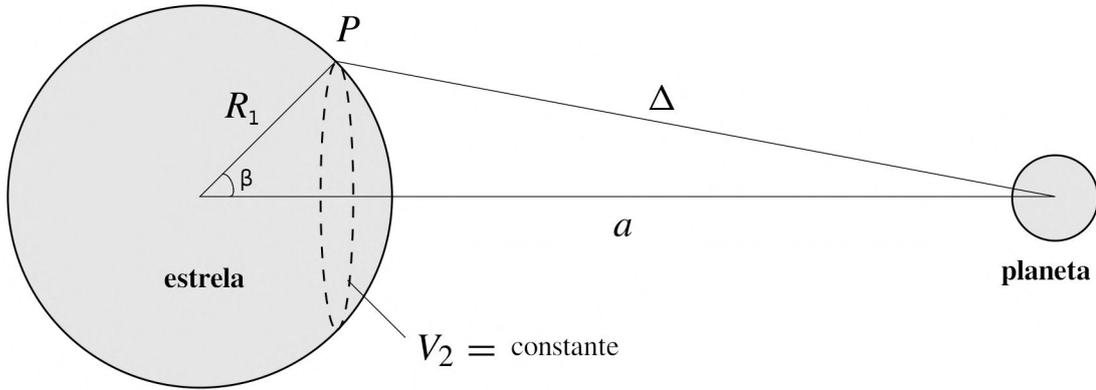
$$\mathbf{F}_{\text{tidal}} = \mathbf{F} - \langle \mathbf{F} \rangle. \quad (5.4)$$

Apesar de termos omitido a contribuição da rotação estelar para a deformação da estrela, podemos tratar as deformações ocasionadas pelo efeito de maré e pela rotação, separadamente, desde que essas deformações sejam pequenas. Isso pode ser obtido por meio da teoria do potencial, supondo que o bojo de maré possa ser considerado como uma massa puntual em um dado ponto P da superfície da estrela. Dessa forma, o potencial gravitacional W , produzido por um planeta sobre um ponto P da superfície da estrela, escrito em unidades de energia por massa, pode ser representado na forma:

$$W = -G \frac{M_2}{\Delta}, \quad (5.5)$$

em que Δ representa a distância do ponto P do centro do planeta de massa M_2 . Na Fig. 53, podemos observar a relação entre Δ , o raio da estrela R_1 e o semi-eixo maior a do planeta. O ângulo β determina uma circunferência (linha tracejada), sobre a qual, todos os pontos estão a um mesmo potencial gravitacional de valor constante W_2 . Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo formado na Fig. 53, obtemos a seguinte expressão:

Figura 53 – Distâncias envolvidas na construção do potencial gravitacional.



Considerando o planeta como sendo um corpo de massa M_2 puntiforme, o potencial gravitacional W_2 gerado por ele em um ponto P da estrela separado por Δ a partir do seu centro pode ser escrito em termos semi-eixo maior a , o raio R_1 da estrela e latitude do ponto P indicada pelo ângulo β . Fonte: Extraído e adaptado de (Murray, 1999, p. 133).

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= R_1^2 + a^2 - 2aR_1 \cos \beta \\ &= a^2 \left[1 - 2 \left(\frac{R_1}{a} \right) \cos \beta + \left(\frac{R_1}{a} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (5.6)$$

Assim, a Eq. (5.5) pode ser reescrita na forma:

$$W = -G \frac{M_2}{a} \left[1 - 2 \left(\frac{R_1}{a} \right) \cos \beta + \left(\frac{R_1}{a} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

Como a razão $R_1/a \ll 1$, podemos expandir o termo entre colchetes da Eq. (5.7), via série de Taylor, para uma função do tipo $(1 - x)^{-1/2}$, fazendo $x = 2(R_1/a) \cos \beta - (R_1/a)^2$, temos que:

$$W = -G \frac{M_2}{a} \left[\underbrace{1}_{w_0} + \underbrace{\left(\frac{R_1}{a} \right) \cos \beta}_{w_1} + \underbrace{\left(\frac{R_1}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1)}_{w_2} + \dots \right], \quad (5.8)$$

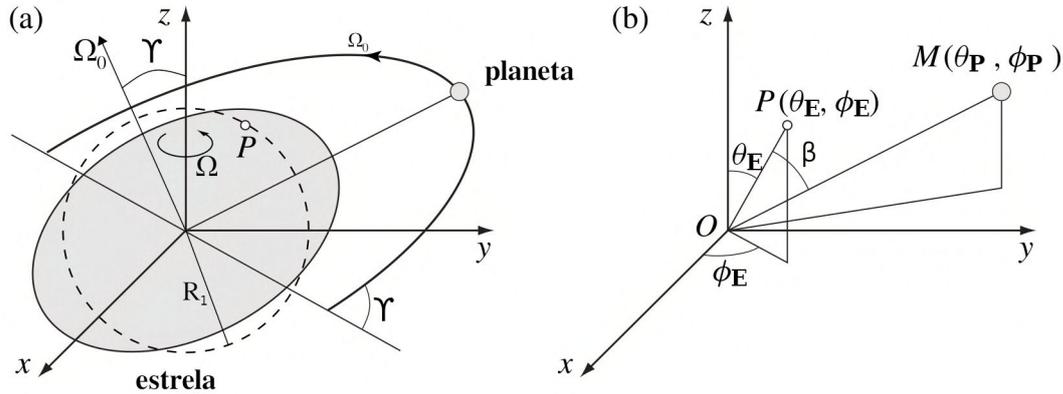
Analisando a Eq. (5.8), percebe-se que o primeiro termo da expansão, W_0 , é independente do ângulo β e, portanto, trata-se de um potencial uniforme para toda a estrela. Já o segundo termo, W_1 , relaciona-se com a força que produz a aceleração uniforme do movimento orbital Kepleriano da estrela, pois

$$-\nabla W_1 = -\nabla \left[-G \frac{M_2}{a} \left(\frac{R_1}{a} \right) \cos \beta \right] = -\frac{\partial}{\partial (R_1 \cos \beta)} \left[-G \frac{M_2}{a} \left(\frac{R_1}{a} \right) \cos \beta \right] = G \frac{M_2}{a^2}, \quad (5.9)$$

que através da Eq. (5.1) para $r = a$, conclui-se se tratar da aceleração $\langle F \rangle / M_1$.

Os termos restantes na Eq. (5.8) podem, então, ser associados ao potencial de maré Ψ . Isso pode ser constatado através da Eq. (5.4), dividindo-se ambos os membros pela massa M_1 da estrela, uma vez que a força \mathbf{F} pode ser escrita como $-M_1 \nabla W$ e, com o auxílio das Eqs. (5.1), (5.8) e (5.9), para o caso em que $r = a$, temos que:

Figura 54 – Deformação causada pelo efeito de maré e os parâmetros orbitais.



(a) O bojo de maré formado em uma estrela pela ação de um planeta que a orbita. A superfície de equilíbrio, representada pela linha contínua envolvendo o bojo, é comparada com aquela que delimita a superfície da estrela sem deformação (linha tracejada) com raio R_1 . O plano orbital do planeta, não necessariamente, coincide com o plano com plano equatorial das estrela, formando um ângulo Υ com este último. O planeta, considerado como uma massa puntual, realiza a sua órbita com velocidade angular Ω_{orb} , enquanto a estrela rotaciona em torno do eixo z com velocidade angular Ω_* . (b) Para um sistema de coordenadas fixo no centro da estrela, mesmo que ela esteja em rotação, as coordenadas de longitude (azimute) dos vetores \vec{OP} e \vec{OM} são descritas em relação ao eixo x , fixo no espaço. Fonte: Extraído e adaptado de (Murray, 1999, p. 134).

$$\frac{\mathbf{F}_{tidal}}{M_1} = -\nabla\Psi = -\nabla(W_0 + W_1 + W_2 + \dots) + \underbrace{\nabla\left(G\frac{M_1M_2}{a^2}\right)}_{=0} \approx -\nabla W_2. \quad (5.10)$$

Analisando a Eq. (5.8), podemos notar que o termo W_2 do potencial pode ser convenientemente reescrito na forma:

$$W_2 = -\frac{GM_2}{a^3}R_1^2P_2(\cos\beta), \quad (5.11)$$

em que $P_2(\cos\beta)$ é o polinômio de Legendre de segundo grau, expresso pela Eq. (2.23) com $x = \cos\beta$. De forma semelhante, podemos escrever as demais componentes (W_3, W_4, \dots) em termos dos polinômios de Legendre com ordem $l > 2$, tal que o potencial de maré para um ponto P na superfície da estrela pode ser representado por:

$$\Psi = -\frac{GM_2}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R_1}{a}\right)^l P_l(\cos\beta), \quad (5.12)$$

onde o termo de ordem mais baixa ($l = 2$) do potencial Ψ é representado por W_2 . Vale ressaltar que o ângulo β pode ser escrito em termos de alguns parâmetros orbitais do planeta. Conforme apresentado na Fig. 54 (b), o produto escalar dos vetores \vec{OP} e \vec{OM} , escritos em coordenadas polares, nos permite escrever:

$$\cos\beta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OM}}{|\vec{OP}||\vec{OM}|} = \cos\theta_E \cos\theta_P + \sin\theta_E \sin\theta_P \cos(\phi_E - \phi_P) \quad (5.13)$$

em que os pares coordenadas (θ_E, ϕ_E) e (θ_P, ϕ_P) indicam a posição do ponto P na superfície da estrela e das coordenadas orbitais do planeta, respectivamente. Assim, o polinômio de Legendre

de segunda ordem, por exemplo, com auxílio da Eq. (5.13), pode ser escrito em termos dos parâmetros orbitais:

$$\begin{aligned}
 P_2(\cos \beta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_E - 1) \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_P - 1) \\
 &+ \frac{3}{4} \sin^2 \theta_E \sin^2 \theta_P \cos 2(\theta_E - \theta_P) \\
 &+ \frac{3}{4} \sin 2\theta_E \sin 2\theta_P \cos(\theta_E - \theta_P). \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Admitindo-se a rotação estelar e o movimento orbital do planeta com velocidades angulares constantes (Fig. 54(a)), podemos escrever $\theta_E = \Omega_* t$ e $\theta_P = \Omega_{orb} t$ a fim de avaliarmos a evolução temporal desse polinômio. Analisando-se a Eq. (5.14) e a Fig. 54(b), observa-se que, para um ponto P na superfície da estrela com coordenada θ_E fixa, o polinômio $P_2(\cos \beta)$ torna-se uma função de ϕ_E , θ_P e ϕ_P . Uma vez que $\cos^2 \theta_P = (1/2)(1 + \cos 2\theta_P)$, percebe-se que no primeiro termo do membro direito da Eq. (5.14), temos uma modulação causada por $\cos 2\theta_P$ e, portanto, com uma frequência angular 2Ω . O segundo termo oscila com frequência $2(\Omega_* - \Omega_{orb})$, enquanto o terceiro fica modulado por uma frequência angular de $(\Omega_* - \Omega_{orb})$. Se considerássemos o sistema Terra-Lua, esses três termos seriam os responsáveis pelas marés quinzenais, semidiárias e diárias observadas na Terra, respectivamente (Murray, 1999, p. 135).

Multiplicando-se o membro direito da Eq. (5.11) pela massa M_1 e pelo quadrado do raio R_1 da estrela tanto no numerador, como no denominador, podemos reescrevê-la na seguinte forma:

$$W_2 = -\zeta g P_2(\cos \beta), \quad (5.15)$$

onde ζ é expresso por:

$$\zeta = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a} \right)^3 R_1 \quad (5.16)$$

e g , a aceleração gravitacional na superfície da estrela, expressa por:

$$g = \frac{GM_1}{R_1^2}. \quad (5.17)$$

Segundo Murray e Dermott (1999, p. 134), o termo $\zeta P_2(\cos \beta)$ é definido como a amplitude da maré de equilíbrio para qualquer valor de β sobre a superfície de um planeta e, aqui, o escrevemos para a superfície de uma estrela. Analisando-se a Eq. (5.14), percebe-se que a amplitude da maré de equilíbrio é máxima para os ângulos $\beta = 0$ ou $\beta = \pi$ e mínima em $\beta = \pi/2$ ou $3\pi/2$, o que demonstra as regiões onde o bojo de maré é formado, conforme mostrado na Fig. 54 (a).

A maré de equilíbrio se caracteriza pelo comportamento estático que o bojo assume, com uma resposta instantânea à interação de maré. Isso se aplica nas situações em que o período orbital do corpo que produz a maré é muito mais longo do que o tempo de resposta característico do interior do corpo respondente (da sua atmosfera e oceanos, se presentes) ou quando os corpos interagentes estão estáticos em um referencial giratório, como no caso de um planeta e de um satélite sincronizados (Tremaine, 2023, p. 403).

A intensidade ou a altura desse bojo depende, em parte, da distribuição de massa interna ao corpo e isso faz com que esse efeito de maré, em princípio, possa ser utilizado como uma sonda para a estrutura interna de um corpo celeste, como a Terra, por exemplo. Embora isso não seja prático de se aplicar a outros corpos, uma vez que a única maré cuja altura é possível de se medir em todo o sistema solar é aquela que ocorre na Terra, é possível que sondemos o interior de outros corpos a partir da rotação. Como a rotação de um corpo atua na distribuição de massa de forma semelhante ao efeito das marés, uma medição da deformação rotacional desse corpo pode ser usada para determinar a sua distribuição de densidade interna que, por sua vez, pode ser usada para estimar a resposta desse corpo a um potencial de maré (Murray, 1999, p. 130).

A deformação de um corpo celeste sob ação de uma interação de maré pode ser caracterizada através de três parâmetros adimensionais que descrevem as propriedades elásticas desse corpo. Dois deles, h e k , são chamados de números de Love e foram introduzidos por Augustus Edward H. Love (Love, 1909) e o terceiro, l , por Toshi Shida (Munk; MacDonald, 1960, p. 24). Para pequenas deformações, pode-se assumir um comportamento linear entre o *stress* e o *strain* no corpo distorcido, de maneira que a deformação seja proporcional ao potencial de maré externo resultante na superfície. Os números de Love são tipicamente representados por números complexos que correspondem aos coeficientes dessa proporcionalidade e dependem da densidade, da estrutura reológica do corpo e da frequência da excitação (Rambaux; Castillo-Rogez, 2013, p. 173).

Embasado no trabalho *On the rigidity of the earth* de William Thomson de 1863, o Lord Kelvin, Love obteve as seguintes expressões para a deformação das marés em um planeta homogêneo e elástico:

$$h = \frac{5f}{2f + 1}, \quad (5.18)$$

$$k = \frac{3f}{2f + 1}, \quad (5.19)$$

$$l = \frac{3f}{2(2f + 1)}, \quad (5.20)$$

com

$$f = \frac{g\rho\bar{R}}{19\tilde{\mu}}, \quad (5.21)$$

onde g é a gravidade superficial de um corpo de raio médio \bar{R} com densidade média ρ e módulo de cisalhamento ou de rigidez $\tilde{\mu}$ (Varga; Süle; Illés-Almár, 2009). É importante notar que, para um corpo fluido com densidade uniforme, $\mu \rightarrow 0$ e, pelas Eqs. (5.21) e (5.19), temos que $k_2 = 3/2$ (Rambaux; Castillo-Rogez, 2013, p. 174). Em planetas gasosos, a densidade aumenta em direção ao centro e, para estes, os números de Love são menores, normalmente $0,1 \leq k_2 \leq 0,6$. Os números de Love para estrelas são menores, no caso do Sol, por exemplo, $k_2 \approx 0,030$ (Claret,

2019 apud Tremaine, 2023). Trabalhos como de Hellard *et al.* (2019), propõem modelos para a obtenção de k_2 a partir das curvas de luz obtidas pela técnica de trânsito fotométrico.

O parâmetro k descreve a proporcionalidade entre o potencial de maré e a perturbação causada no potencial produzido pelo corpo deformado, enquanto h e l representam as deformações ou deslocamentos radial e horizontal, respectivamente. Para corpos idealizadamente rígidos, esses parâmetro são nulos, enquanto para corpos com rigidez finita e sem efeitos dissipativos, os números de Love e Shida são estritamente reais e positivos (Walker, 2017, p. 5).

Assim, para cada componente do potencial de maré (Eq. 5.12), existe uma resposta independente e linearmente relacionada, que pode ser quantificada utilizando uma função perturbativa ΔV_l tal que:

$$k_l \equiv \frac{\Delta V_l}{W_l}, \quad (5.22)$$

em que k_l representa o número de Love k para todas as ordens $l \geq 2$ dos termos da expansão do potencial Ψ . Assim, o potencial perturbativo total na superfície será expresso por:

$$\mathcal{R}(r = R_1) = \sum_{l=2}^{\infty} \Delta V_l = - \sum_l k_l \frac{GM_2}{a} \left(\frac{R_1}{a}\right)^l P_l(\cos \beta). \quad (5.23)$$

Segundo Mignard (1979, p. 303), o potencial perturbativo \mathcal{R} para um ponto localizado em \mathbf{r} , exterior ao corpo onde a maré é produzida, será a solução exterior da equação de Laplace, tendo a Eq. (5.23) como uma condição de contorno. Assim, o potencial adquire um fator de decaimento proporcional a $r^{-(l+1)}$, que é oriundo do teorema de Dirichlet para ($r > R_1$):

$$\mathcal{R}(r) = -\frac{GM_2}{a} \sum_l k_l \left(\frac{R_1}{r}\right)^{l+1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^l P_l(\cos \beta) \quad (5.24)$$

e, portanto, apresenta um decaimento mais rápido para um ponto a uma distância r da estrela (Rambaux; Castillo-Rogez, 2013, p. 173).

Murray e Dermott (1999, p. 152) afirmam que, devido ao fato de que tanto a deformação da maré quanto a deformação rotacional darem origem a uma superfície esferoidal que pode ser modelada por meio de um polinômio de Legendre de segunda ordem, o potencial pode ser generalizado para se contabilizar ambas as deformações. Ao considerarmos a rotação da estrela, além da deformação causada pela maré, teremos uma deformação adicional gerada pelo efeito inercial, conforme discutido na Seç. 2.3. Esse tipo de investigação pode ser verificada nos trabalhos de Landin, Mendes e Vaz (2009) e Dewberry e Lai (2022).

O potencial perturbativo pode influenciar tanto a rotação da estrela quanto os parâmetros orbitais do planeta. Na próxima seção, iremos apresentar alguns desses parâmetros e as suas respectivas equações de evolução para um dado potencial perturbativo.

5.2 Elementos orbitais

Ao considerarmos um sistema de dois corpos com massas M_1 e M_2 que interagem através da ação de uma força central $-F(r)\hat{\mathbf{r}}$, o movimentos desses corpos podem ser descritos

em termos de um referencial colocado no centro de massa com massa total $M = M_1 + M_2$, onde a posição \mathbf{r} de um corpo orbitante de massa reduzida $\mu = M_1 M_2 / M$ reproduz as mesmas equações de movimento dos corpos anteriores. Nesse sistema, a evolução temporal é então descrita pela seguinte equação de movimento:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (5.25)$$

onde $r = |\mathbf{r}|$. É importante notar que o momento angular total do sistema \mathbf{L} nessa descrição pode ser expresso através de:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + \mathbf{L}_{rel} \quad (5.26)$$

em que L_{cm} e L_{rel} representam os momentos angulares do centro de massa e da massa reduzida em relação ao centro de massa, respectivamente, com L_{rel} sendo expresso por:

$$\mathbf{L}_{rel} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (5.27)$$

Escolhendo-se um sistema inercial cuja velocidade seja a mesma do centro de massa ($\mathbf{L}_{cm} = \mathbf{0}$) e derivando-se a Eq. (5.26) com relação ao tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mu \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

concluimos que L é uma constante do movimento. De forma semelhante, a energia mecânica \mathcal{E} total do sistema será igual a energia mecânica \mathcal{E}_{rel} relativa ao centro de massa, expressa por:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{rel} = \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{GM}{r}. \quad (5.29)$$

Tanto a energia \mathcal{E} quanto o momento angular \mathbf{L} são constantes do movimentos e, pela Eq. (5.27), percebemos que o vetor \mathbf{L}_{rel} é perpendicular ao plano da órbita. A partir dessas duas grandezas é possível constatar que a forma da órbita é uma cônica e, para a energia do sistema no intervalo $-(GM_1 M_2)^2 \mu / 2L_{rel}^2 < \mathcal{E} < 0$, a órbita assume a forma de uma elipse (Symon, 1971, p. 129) como aquela observada na Fig. 55(a), onde se destacam os elementos de uma órbita kepleriana. Utilizando as coordenadas polares definidas no plano do movimento, as coordenadas r e θ_p de um planeta se relacionam através de:

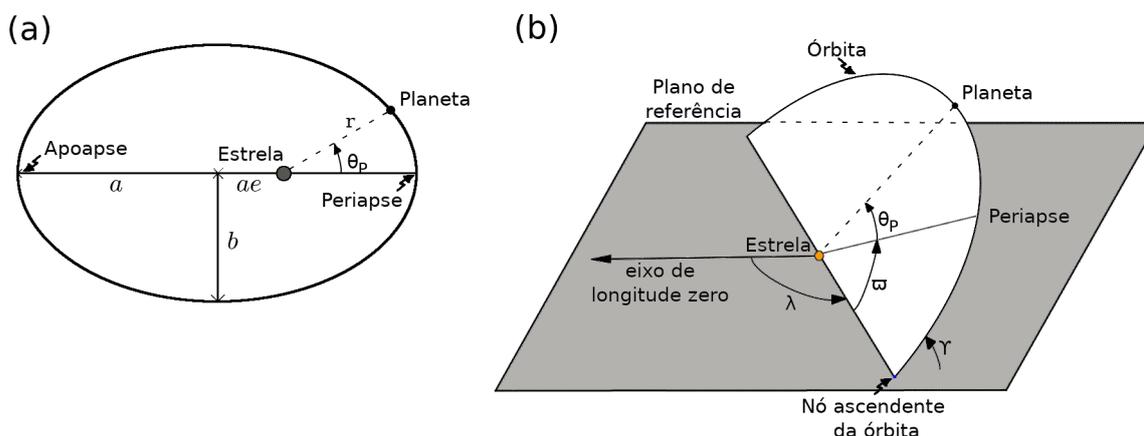
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta_p}, \quad (5.30)$$

em que a é o semieixo maior, e é a excentricidade da órbita planetária que é percorrida com velocidade média Ω_{orb} expressa por:

$$\Omega_{orb} = \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{1/2}. \quad (5.31)$$

Além da coordenada θ_p , chamada de anomalia verdadeira, podemos utilizar outras duas coordenadas angulares, \mathcal{M} e E , para auxiliar na obtenção da dependência temporal da posição do planeta ao longo de sua órbita. Conforme apresentado na Fig. 56, podemos aproximar

Figura 55 – Elementos geométricos de uma órbita kepleriana.



(a) Uma elipse com semieixos maior e menor representados pelas distâncias a e b , respectivamente. A estrela está posicionada em um dos seus focos representando o centro de força que atua sobre um planeta a uma distância r . A posição angular do planeta é indicada pelo ângulo θ_p , também chamado de anomalia verdadeira. O ponto da órbita mais próximo à estrela é denominado de periapse, enquanto o ponto mais afastado é chamado de apoapse. (b) O plano orbital do planeta, não necessariamente, coincide com o plano com plano equatorial das estrelas, formando um ângulo Υ com este último. A intersecção da órbita com o plano equatorial de referência é chamado de nó e, uma vez definido o sentido da revolução do planeta, esse nó pode ser chamado de ascendente ou descendente. Quando o planeta passa em um nó se elevando sobre o plano de referência, o nó é chamado de ascendente. A direção do nó ascendente é indicada por um ângulo λ formado por um dado eixo no plano de referência. A direção do periapse a partir da estrela pode ser descrita por um ângulo ϖ formado entre o segmento de reta que liga a estrela ao nó ascendente. Fonte: Extraído e adaptado de (Lissauer; Pater, 2019, p. 26).

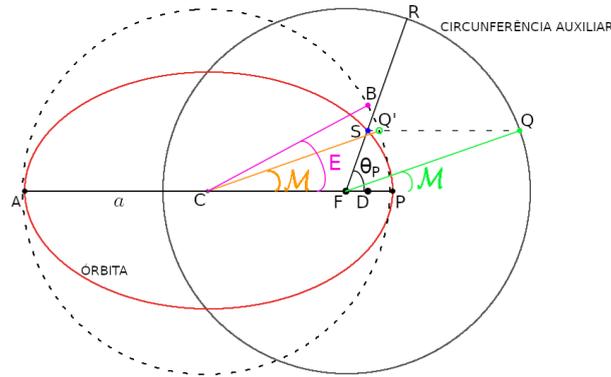
a órbita elíptica por outra circular cujo raio seja igual a medida do semieixo maior a da elipse. Consideremos inicialmente que em um instante t_{per} o planeta passe pelo periapse P de sua órbita elíptica e que, em um instante t posterior, ele se encontre no ponto S de coordenadas r e θ_p em relação ao foco F . Podemos estabelecer uma correspondência orbital como se o planeta estivesse realizando uma órbita circular com velocidade orbital média Ω_{orb} descrita pela circunferência auxiliar centrada em F . Utilizando o ângulo \mathcal{M} para indicar a posição angular do planeta em um ponto Q da circunferência auxiliar no qual o planeta estaria em um mesmo instante de tempo t após passar pelo periapse P , podemos escrever:

$$\mathcal{M} = \Omega_{orb}(t - t_{per}) \quad (5.32)$$

com Ω_{orb} expressa pela Eq. (5.31). Assim, \mathcal{M} representa a distância angular a partir da direção do periapse que um corpo fictício teria ao se mover em uma órbita circular, com velocidade constante Ω_{orb} , no mesmo intervalo de tempo que o planeta realizaria em sua órbita elíptica até atingir o ponto S . Esse ângulo recebe a denominação de anomalia média.

Deslocando-se a circunferência auxiliar para a esquerda a fim de centrá-la no ponto C , obtemos uma circunferência equivalente representada pela linha tracejada na Fig. 56 cujo diâmetro coincide com o eixo da elipse. O ponto Q' é correspondente ao ponto Q e o segmento $\overline{CQ'}$ forma o mesmo ângulo \mathcal{M} com a direção do periapse. Fazendo-se a projeção vertical do ponto S em um ponto B , imediatamente acima na circunferência auxiliar, percebe-se que o segmento \overline{CB} forma um ângulo E com a direção do periapse. O ângulo E é chamado de anomalia

Figura 56 – Anomalias e circunferência auxiliar.



A órbita elíptica centrada no ponto C com semi-eixo maior a e excentricidade e apresenta o centro de força localizado no foco F e é percorrida por um planeta com período P_{orb} . A posição S do planeta ao longo dessa órbita é descrita geometricamente pelas coordenadas r e θ_p , onde r corresponde a distância representada pelo segmento \overline{FS} e θ_p indica a anomalia verdadeira em um instante t após passar pelo periapse no instante t_{per} . Os pontos A e P representam o apoapse e o periapse, respectivamente. A circunferência auxiliar, inicialmente centrada em F , nos permite obter uma relação cinemática para as coordenadas r e θ_p . A ideia é considerar que o planeta estivesse realizando uma órbita circular de raio \overline{FR} igual ao semi-eixo maior a da elipse e com o mesmo período. A anomalia média \mathcal{M} é a coordenada angular desse movimento análogo, com o ponto Q representando a posição que o planeta estaria no mesmo instante t caso se deslocasse com velocidade angular média $\Omega_{orb} = 2\pi/P_{orb}$. Ao centrarmos o círculo auxiliar no ponto C (representado pela linha tracejada), indicamos a posição correspondente do planeta no ponto Q' , percebendo que os segmentos $\overline{CQ'}$ e \overline{FQ} são paralelos. O ponto B representa a interseção da vertical que passa pelo ponto S com a circunferência auxiliar e o segmento \overline{CB} forma um ângulo E com relação ao centro e ao eixo da elipse. Fonte: Extraído e adaptado de (Fitzpatrick, 2012, p. 48).

excêntrica e , pelos triângulos CBD e FSD , podemos relacioná-la com a anomalia verdadeira:

$$r \cos \theta_p = a(\cos E - e). \quad (5.33)$$

Através da Eq. (5.30), podemos ainda reescrever a Eq. (5.33) na forma:

$$\cos \theta_p = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (5.34)$$

de onde concluímos que a anomalia verdadeira pode ser expressa em termos de E :

$$\theta_p = \arccos\left(\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}\right), \quad (5.35)$$

cujas derivadas, em termos da anomalia excêntrica, resulta na seguinte expressão:

$$\frac{d\theta_p}{dE} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{1 - e \cos E}. \quad (5.36)$$

Segundo Fitzpatrick (2012, p. 47), as anomalias excêntrica e média se relacionam por:

$$\mathcal{M} = E - e \sin E, \quad (5.37)$$

cujas derivadas, em termos da anomalia excêntrica, se expressa por:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dE} = 1 - e \cos E, \quad (5.38)$$

e, assim, podemos relacionar a anomalia média com a anomalia verdadeira através de:

$$\frac{d\mathcal{M}}{d\theta_p} = \frac{d\mathcal{M}}{dE} \frac{dE}{d\theta_p} = \frac{d\mathcal{M}}{dE} \left(\frac{1}{\frac{d\theta_p}{dE}} \right), \quad (5.39)$$

que, com auxílio das Eqs. (5.36) e (5.38), obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d\mathcal{M}}{d\theta_p} = \frac{(1 - e \cos E)^2}{(1 - e^2)^{1/2}} \quad (5.40)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (5.34) para o $\cos E$ na equação acima, obtemos $d\mathcal{M}/d\theta_p$ em função da anomalia verdadeira:

$$\frac{d\mathcal{M}}{d\theta_p} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \theta_p)^2}. \quad (5.41)$$

Para dois corpos isolados e simetricamente esféricos, a órbita elíptica é estável e, além disso, a direção do periapse permanece fixa no espaço, ou seja, o ângulo ϖ indicado na Fig. 55(b), permanece constante. No entanto, quando se considera a interação do sistema binário com outros corpos, ϖ pode variar caracterizando a precessão orbital (Fitzpatrick, 2012, p. 66). Além disso, se o corpo central não for perfeitamente esférico, apresentando uma protuberância equatorial (esferoide oblato), o momento de quadrupolo ($l = 2$) resultante da expansão do seu potencial gravitacional faz com que a órbita do corpo secundário entre em precessão (Murray, 1999, p. 152). Isso é comumente visto em planetas orbitando estrelas em rotação rápida ou satélites orbitando planetas.

No caso da protuberância produzida pelas marés, Hut (1980) demonstrou que, para um sistema binário de estrelas, o equilíbrio de maré pode ser atingido somente se as condições de coplanaridade, a circularidade e a corrotação forem verificadas e a estabilidade da órbita ocorrerá somente se o momento angular orbital for superior ao triplo da soma dos momentos angulares de rotação dessas estrelas.

A coplanaridade ocorre quando há o alinhamento dos momentos angulares de rotação e orbital, ou seja, quando o ângulo $\Upsilon = 0$ nas Figs. 54(a) e 55(b), enquanto a circularidade diz respeito a baixa excentricidade da órbita ($e \rightarrow 0$), ou seja, a órbita passa a ser circular. Já a corrotação corresponde ao regime em que o período orbital do corpo P_{orb} secundário torna-se igual ao período de rotação P_{rot} do corpo primário. Para um sistema estrela-planeta, a corrotação pode ser descrita pelo raio de corrotação r_{cor} que corresponde ao raio orbital r para o qual o período orbital seria igual ao período de rotação do estrela.

Quando a distância r é inferior a r_{cor} , as forças de maré podem reduzir o semieixo maior a , enquanto que se r for distância real do planeta à estrela é maior, as forças das marés proporcionam um aumento de a (Privitera *et al.*, 2016). Na Seç. 1.2, vimos que os planetas do tipo Júpiter quente estão em órbitas com medidas de semieixo maior poucas ordens de grandeza acima do raio da estrela hospedeira, correspondendo geralmente a valores com $a < 0,1$ ua. Trabalhos como de Pont (2009 apud Lanza, 2010) demonstram que estrelas hospedando Júpiteres quentes apresentam rotações mais rápidas do que estrelas sem planetas próximos, sugerindo

que a interação das marés pode impulsionar a rotação estelar em direção à sincronização com o período orbital planetário, já que se espera que o torque das marés aumente para planetas mais próximos e mais massivos. Nota-se, portanto, que os parâmetros orbitais como a e e , podem evoluir.

Segundo (Zahn, 1977), o tempo de sincronização para que a interação de marés de equilíbrio equalize os períodos, ou seja, as velocidades é definido como:

$$\frac{1}{t_{syn}} = -\frac{1}{(\Omega_* - \Omega_{orb})} \frac{d\Omega_*}{dt} \quad (5.42)$$

em que Ω_* e Ω_{orb} representam as velocidades angulares de rotação e orbital do planeta, respectivamente.

As equações de movimento envolvendo as derivadas temporais dos parâmetros orbitais como \dot{a} e \dot{e} são obtidas a partir do hamiltoniano escrito em termos do potencial \mathcal{R} , atuando como uma função de perturbação conforme descrito por Kaula (1962).

$$\dot{a} = \frac{2}{\Omega_{orb} a} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{M}} \quad (5.43)$$

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{\Omega_{orb} a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{M}} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{\Omega_{orb} a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \quad (5.44)$$

Essas equações fazem parte de um conjunto de equações chamadas de equações planetárias de Legendre (Tremaine, 2023, p. 62). A derivada $\partial \mathcal{R} / \partial \mathcal{M}$ pode ser obtida através do produto das derivadas $\partial \mathcal{R} / \partial \theta_p$ e $\partial \theta_p / \partial \mathcal{M}$ que, por sua vez, estão relacionadas com as Eqs. (5.24) e (5.41), respectivamente.

No caso de sistemas binários envolvendo corpos fluidos, como estrelas e/ou estrelas e planetas gasosos, a aplicabilidade rigorosa da teoria do equilíbrio de marés a sistemas binários reais, no entanto, é limitada por três aspectos: à circularidade da órbita relativa dos dois corpos, à sincronização da rotação axial com a revolução do corpo secundário e à coplanaridade dos planos equatoriais de cada um dos corpos com o plano orbital. Caso alguma dessas três condições não seja verificada, as marés levantadas por cada um dos corpos em seu respectivo companheiro provocará movimentos oscilatórios no interior desses corpos que são considerados referenciais não-inerciais e, por isso, o movimento estará sujeito à força de Coriolis, com deslocamentos longitudinais e latitudinais de fluido, caracterizando as marés dinâmicas (Kopal, 1978, p. 80).

Além disso, muitos fenômenos ou processos observados em sistemas binários envolvendo estrelas com envelopes radiativos não poderiam ser explicados de outra forma senão pela abordagem das marés dinâmicas, pois a excitação dinâmica e o amortecimento radiativo dos modos g de baixa frequência dominam a interação das marés (Lai, 1997). No entanto, processos dissipativos originados pela viscosidade turbulenta podem ser investigados a partir das marés de equilíbrio nas regiões convectivas das estrelas (Zahn, 1984).

Na próxima seção, analisa-se a influência da dissipação de marés de equilíbrio sobre os parâmetros orbitais. Embora o potencial perturbativo a ser apresentado na Seç. 5.3 considere a

rotação da estrela, as deformações causadas nela se devem, exclusivamente, à interação de maré com o planeta.

5.3 Dissipação de marés

De um modo geral, as interações de maré experimentam dois mecanismos dissipativos principais: o atrito turbulento em regiões convectivas e a dissipação térmica atuando nos modos gravito-inerciais excitados em zonas radiativas. No caso das marés de equilíbrio geradas em estrelas de tipo tardio ou em planetas do tipo gigante gasoso, a dissipação turbulenta é o principal mecanismo atuante (Remus; Mathis; Zahn, 2012).

Conforme discutido anteriormente, a resposta de um determinado corpo celeste em que se formou um bojo de maré pode repercutir na evolução dinâmica do sistema. Devido à dissipação de maré na interação entre um satélite e um planeta, por exemplo, pode ocorrer uma modificação na evolução orbital do satélite e a uma mudança na taxa de rotação do planeta (Murray, 1999, p. 131). No sistema Terra-Lua, onde o Sol também tem um papel significativo, a dissipação das marés na Terra leva a um prolongamento do dia e do mês à medida que o momento angular é transferido do giro planetário para a órbita (Ogilvie, 2014). O mesmo pode ocorrer em sistemas binários de estrelas como descrito nos trabalhos de Alexander (1973) e de Zahn (1977) e, entre uma estrela e um planeta gasoso, conforme discutido por Ogilvie e Lin (2007).

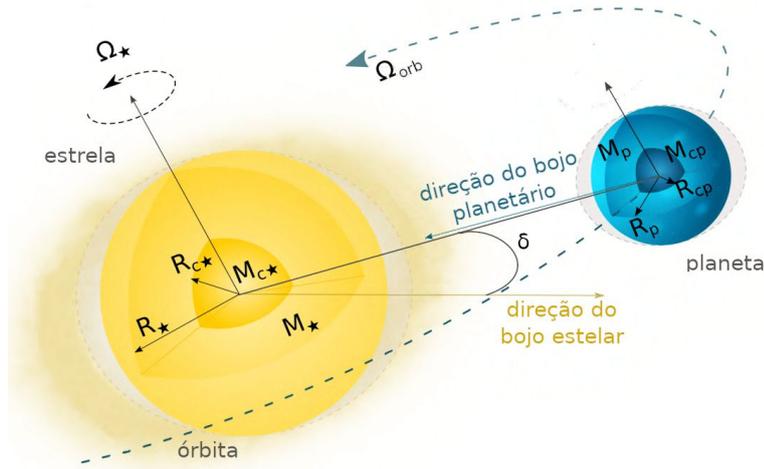
Como as estrelas são corpos fluidos, o campo gravitacional de algum planeta próximo pode induzir uma deformação que se soma à deformação causada pela rotação estelar, contribuindo assim para acentuar a perda de simetria esférica. Como esse efeito gravitacional é também dependente do tempo, conforme o planeta orbita a estrela, diferentes tipos de oscilações podem ocorrer no interior estelar (Lanza; Ferraz-Mello; Team, 2016, p. 163).

Os processos dissipativos na estrela fazem com que a protuberância da maré não seja colinear com os centros dos corpos interagentes (*tidal lag*), podendo ficar atrasada ou adiantada por um ângulo δ dependendo se a velocidade angular orbital instantânea do corpo que produz a maré for maior ou menor do que a velocidade angular de rotação da estrela (Lecar; Wheeler; McKee, 1976). Na Fig. 57, podemos ver os bojos de maré formados pela a rotação e pela interação gravitacional desalinhados.

Tais processos também convertem a energia rotacional e/ou orbital em calor provocando mudanças irreversíveis na dinâmica de sistemas planetários (Tremaine, 2023, p. 397). O torque resultante transfere o momento angular entre a rotação estelar e a revolução orbital. Como a energia é dissipada, os parâmetros orbitais mudam e aproximam-se assintoticamente de um estado de equilíbrio ou levam a uma espiral acelerada das duas estrelas (Hurley; Tout; Pols, 2002) ou do planeta (Fellay *et al.*, 2023).

Conforme discutido na seção anterior, na abordagem de marés de equilíbrio, o processo dissipativo não é oscilatório. No entanto, podemos modelá-lo a partir de um oscilador harmônico amortecido forçado. A fim de obtermos uma relação entre o número de Love k_2 e

Figura 57 – Desalinhamento dos bojos de maré na interação estrela-planeta.



As setas indicam as direções dos bojos de maré estelar e planetário respectivamente. Nota-se que a reta que une o centro dos dois corpos não coincide simultaneamente com essas direções e o ângulo δ indica a defasagem entre a linha de ação da força de maré sobre a estrela e o bojo nela originado. Fonte: Extraído e adaptado de (Alvarado-Montes *et al.*, 2021).

os parâmetros que caracterizam o processo dissipativo, seguiremos a abordagem de Tremaine (2023, p. 406).

Supondo que a interação de maré atue como uma força externa de amplitude F com uma frequência ω_f em um sistema com taxa de amortecimento ν e frequência natural ω_0 , pode-se escrever a seguinte equação de movimento para um elemento de fluido:

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega_f t, \quad (5.45)$$

em que $\nu > 0$ e cuja parte real da solução é expressa por:

$$x = A \cos(\omega_f t + \delta), \quad (5.46)$$

onde δ é a diferença de fase e, para o qual, se assume que $|\delta| \geq \pi/2$, tal que:

$$\tan \delta = \frac{\nu\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}. \quad (5.47)$$

A amplitude A da Eq. (5.46) pode ser escrita na forma:

$$A = \frac{F \operatorname{sgn}(\omega_0^2 - \omega_f^2)}{[(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + \nu^2 \omega_f^2]^{1/2}} \quad (5.48)$$

onde a função sinal $\operatorname{sgn}()$ permite que A seja positiva ou negativa e o sinal da defasagem δ seja relacionado com o sinal de A , tal que:

$$\operatorname{sgn}(AF) = -\operatorname{sgn}(\omega_f \delta) = \operatorname{sgn}(\omega_0^2 - \omega_f^2) \quad (5.49)$$

A potência da força externa é expressa por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &= (F \cos \omega_f t) \dot{x} = -FA\omega_f \cos \omega_f t \sin(\omega_f t + \delta) \\ &= -\frac{1}{2}FA\omega_f [\sin(2\omega_f t + \delta) + \sin \delta], \end{aligned} \quad (5.50)$$

que nos permite integrar para obter o trabalho instantâneo:

$$\mathcal{W}(t) = FA \left[\frac{1}{4} \cos(2\omega_f t + \delta) - \frac{1}{2} \omega_f t \sin \delta \right] + C, \quad (5.51)$$

em que C representa uma constante de integração. O trabalho total realizado durante o período de oscilação $P = 2\pi/\omega_f$ é expresso por:

$$\Delta\mathcal{W} = \mathcal{W}(t + 2\pi/\omega_f) - \mathcal{W}(t) = -\pi FA \operatorname{sgn}(\omega_f) \sin \delta, \quad (5.52)$$

cujo sinal é sempre positivo pois ele representa a reposição de energia que foi perdida por meio da dissipação. Assim, para amortecimentos fracos ($|\delta| \ll 1$), o máximo de energia armazenada no sistema será obtido por:

$$\mathcal{W}^* = \mathcal{W}(t)_{max} - \mathcal{W}(t)_{min} = \frac{1}{2}|FA|. \quad (5.53)$$

A razão entre a energia armazenada \mathcal{W}^* e aquela fornecida ao sistema $\Delta\mathcal{W}$ é definida como o fator de qualidade de maré Q :

$$Q \equiv \frac{2\pi\mathcal{W}^*}{\Delta\mathcal{W}}, \quad (5.54)$$

e utilizando as Eqs. (5.52) e (5.53), o fator de qualidade pode se expresso na forma:

$$Q = -\frac{\operatorname{sgn}(FA\omega_f)}{|\sin \delta|} \simeq \frac{1}{|\delta|}. \quad (5.55)$$

Conforme justificado por Tremaine (2023, p. 407), o modelo do oscilador harmônico amortecido e forçado pode ser utilizado para descrever a dissipação de marés pois, quando as forças de maré são fracas, a resposta dos corpos pode ser decomposta em modos normais de oscilação, com cada uma das componentes atuando como um oscilador harmônico amortecido. Assim, cada modo normal tem uma autofrequência ω_0 e um fator de qualidade Q . Ainda segundo este autor, a maré de equilíbrio é baseada na suposição de que a frequência de forçamento ω_f é muito menor que a frequência natural ω_0 .

Assim, para $\omega_f \ll \omega_0$, as Eqs. (5.47) e (5.48) podem ser reescritas nas formas:

$$\tan \delta = -\frac{\nu\omega_f}{\omega_0^2} \quad (5.56)$$

e

$$A = \frac{F}{\omega_0^2}, \quad (5.57)$$

a partir das quais, concluímos que A terá o mesmo sinal de F e que a defasagem δ terá um sinal oposto ao da frequência ω_f , já que $\nu > 0$. Como admitimos $|\delta| \ll 1$, a Eq. (5.56), com o auxílio da Eq. (5.55), pode reescrita como sendo:

$$\delta = -\frac{\operatorname{sgn}(\omega_f)}{Q}. \quad (5.58)$$

Na descrição da dissipação de marés de equilíbrio, tomamos a frequência da força externa como sendo a própria velocidade angular orbital, ou seja, $\omega_f = \Omega_{orb}$.

Segundo Ogilvie (2014), uma forma adequada para se considerar os efeitos dissipativos a partir de um potencial de maré se dá posicionando um sistema de coordenadas com um dos eixos coincidindo com o eixo de rotação da estrela, conforme já mostrado na Fig. 54(a), com o eixo z na mesma direção que o vetor velocidade angular $\mathbf{\Omega}_*$ da estrela de massa M_* e raio R_1 . Assim, um planeta de massa M_p orbitando essa estrela com velocidade angular $\mathbf{\Omega}_{orb}$, descrevendo uma órbita com excentricidade e e semieixo maior a define um plano orbital inclinado em relação ao plano equatorial da estrela e cuja direção perpendicular indicada por $\mathbf{\Omega}_{orb}$ forma um ângulo Υ em relação ao eixo z desse sistema. As coordenadas polares esféricas de um ponto P na superfície da estrela é especificada pelo par (θ, ϕ) conforme mostrado na Fig. 54(b). O potencial de maré pode ser escrito na forma:

$$\Psi = \text{Re} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{GM_p}{a} A_{l,m,n}(e, \Upsilon) \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_l^m(\theta, \phi) \exp\{-in\Omega_{orb}t\}, \quad (5.59)$$

cuja decomposição dos polinômios de Legendre em termos dos harmônicos esféricos sólidos $Y_l^m(\theta, \phi)$ e de uma expansão de Fourier resulta nos coeficientes complexos adimensionais $A_{l,m,n}$ que são funções de e e de Υ . Além disso, $\Omega_{orb} = (GM/a^3)^{1/2}$ é a velocidade angular orbital do planeta, com $M = M_* + M_p$. Os inteiros l, m indicam a ordem dos harmônicos esféricos, enquanto m representa os harmônicos temporais do movimento orbital

De forma semelhante como procedemos na Seç. 5.1, considerando apenas o termo quadrupolar ($l = 2$) do potencial Ψ , temos que:

$$\Psi = \text{Re} \left[\frac{GM_p}{a} A_{2,m,n}(e, \Upsilon) \left(\frac{r}{a}\right)^2 Y_2^m(\theta, \phi) \exp\{-in\Omega_{orb}t\} \right] \quad (5.60)$$

e, assim, o respectivo potencial perturbativo gerado a partir da estrela de raio R_1 será

$$\mathcal{R} = \text{Re} \left[k_2 \frac{GM_p}{a^3} B_{2,m,n}(e, \Upsilon) \left(\frac{R_1}{r}\right)^5 Y_2^m(\theta, \phi) \exp\{-in\Omega_{orb}t\} \right] \quad (5.61)$$

e, pela Eq. (5.22), o número de Love k_2 poderia ser obtido:

$$k_2 = \frac{\mathcal{R}(r = R_1)}{\Psi(r = R_1)} = \frac{\text{Re}(B_{2,m,n})}{\text{Re}(A_{2,m,n})} \quad (5.62)$$

Como a dissipação resulta em uma defasagem δ , o potencial perturbativo \mathcal{R} para o termo quadrupolar é então expresso na forma:

$$\mathcal{R} = \text{Re} \left[k_2 \frac{GM_p}{a^3} B_{2,m,n}(e, \Upsilon) \left(\frac{R_1}{r}\right)^5 Y_2^m(\theta, \phi) \exp\{-i(n\Omega_{orb}t + \delta)\} \right], \quad (5.63)$$

em que admitimos um número de Love complexo $k_2^m = k_2 \exp\{-i\delta\}$. Considerando τ como sendo intervalo de tempo necessário para percorrer o ângulo δ com velocidade angular Ω_{orb} , a exponencial presente na Eq. (5.63) pode ser escrita como sendo:

$$\exp\{-i(n\Omega_{orb}t + \delta)\} = \exp\{-i\Omega_{orb}(nt - \tau)\}, \quad (5.64)$$

onde τ , com auxílio da Eq. (5.58) para $\omega_f = \Omega_{orb}$, pode ser reescrito através de:

$$\tau = -\frac{\delta}{\Omega_{orb}} = -\frac{\text{sgn}(\Omega_{orb})}{\Omega_{orb}Q} = \frac{1}{|\Omega_{orb}|Q} \quad (5.65)$$

De forma semelhante, o número de Love complexo pode ser expresso por

$$k_2^m = k_2 \exp\{-i\Omega_{orb}\tau\} = k_2(\cos \Omega_{orb}\tau - i \sin \Omega_{orb}\tau), \quad (5.66)$$

e, considerando $\Omega_{orb}\tau \ll 1$ tal que $\sin \Omega_{orb}\tau \approx \Omega_{orb}\tau$, a parte imaginária de k_2^m pode ser expressa por:

$$\text{Im}(k_2^m) = -k_2\Omega_{orb}\tau, \quad (5.67)$$

que a partir da Eq. (5.65), permite-nos concluir que está relacionada com a dissipação, mais especificamente, com o fator de qualidade:

$$\text{Im}(k_2^m) = -\frac{k_2}{Q}. \quad (5.68)$$

Conforme mencionado na Seç. 5.1, as equações de movimento envolvendo as derivadas temporais dos parâmetros orbitais como \dot{a} , \dot{e} podem ser obtidas a partir de \mathcal{R} na Eq. (5.24) para o potencial Ψ , com o hamiltoniano escrito em termos do potencial perturbativo \mathcal{R} , conforme descrito por Kaula (1962). Para o potencial de maré expresso pela Eq. (5.59), considerando τ como sendo o tempo de retardo do bojo da estrela sob o efeito da maré, Ogilvie (2014) obtém as seguintes equações para os termos de ordem mais baixa ($l = 2, 0 \leq m \leq 2, 1 \leq n \leq 3$) de Ψ para e e a , bem como, para a variação percentual da velocidade de rotação estelar:

$$\frac{\dot{a}}{a} = -3k_{2,2,2} \frac{M_p}{M_*} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_{orb} \quad (5.69)$$

$$\frac{\dot{\Omega}_*}{\Omega_*} = \frac{3}{2} k_{2,2,2} \frac{L_{orb}}{L_*} \frac{M_p}{M_*} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_{orb} \quad (5.70)$$

$$\frac{\dot{e}}{e} = -\frac{3}{16} (4k_{2,2,2} - 6k_{2,0,1} + k_{2,2,1} - 49k_{2,2,3}) \frac{M_p}{M_*} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_{orb}. \quad (5.71)$$

nas quais, encontramos fatores do tipo $k_{l,m,n}$ que representam o número de Love k para os termos de ordem mais baixa nas expansões do potencial da Eq. (5.59) e a razão do momentos angulares orbital L_{orb} e estelar L_* é expressa por:

$$\frac{L_{orb}}{L_*} = \frac{GM_*M_p \sqrt{1-e^2}}{I_*\Omega_*\Omega_{orb}a}. \quad (5.72)$$

No próximo capítulo, especificamos os critérios de seleção e a caracterização das amostras utilizadas para a investigação dos modelos propostos.

6 SELEÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS AMOSTRAS

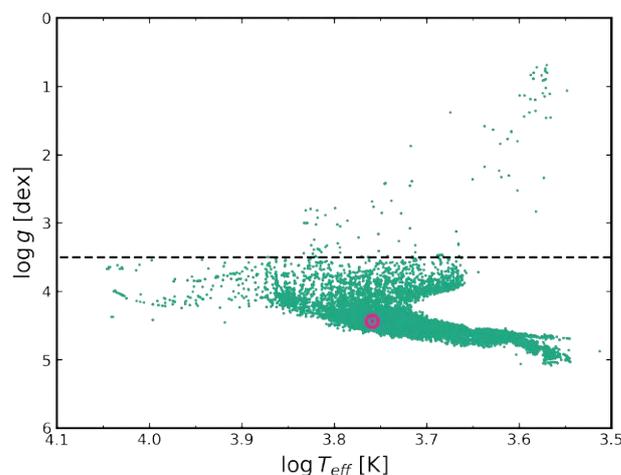
6.1 Amostra para o estudo do desvio do índice de frenagem magnética de Skumanich

O desvio do índice de frenagem magnética de estrelas gigantes e de sequência principal, a partir do valor canônico $q = 3$ de Skumanich, foi calculado por meio do modelo que foi apresentado na Seção 4.3, relacionando o índice de frenagem com os parâmetros observacionais de densidade média e o período de rotação. Além disso, conforme a Eq. (4.34), o modelo também considera mudanças no momento de inércia da estrela. O modelo proposto na Eq. (4.41) foi avaliado através do cruzamento dos catálogos de Mathur *et al.* (2017) e Reinhold *et al.* (2013), ambos baseados na análise das curvas de luz obtidas pela missão Kepler.

O catálogo de Mathur *et al.* (2017) apresenta as propriedades estelares de 197.096 alvos observados entre os quadrantes Q1-Q17. Dentre as propriedades estelares disponíveis, destacam-se a densidade média, a massa, o raio e a temperatura efetiva. Já o catálogo de Reinhold *et al.* (2013) contém 40.661 estrelas ativas e cerca de 24.114 delas com o período de rotação determinado. Esse catálogo utilizou somente dados do *quarter* Q3 para a obtenção de dados com menos influência de erros instrumentais nas medidas, cerca de 165.548 curvas de luz no total.

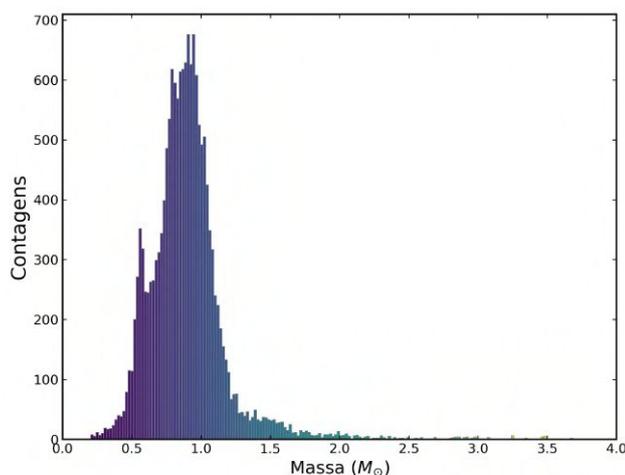
A amostra resultante do cruzamento dos catálogos é constituída de um pouco mais de 16.000 estrelas ativas com temperaturas efetivas entre 3257 K e 11117 K, massas distribuídas no intervalo $0,2-4M_{\odot}$ e períodos medidos com erro menor do que 10%. Conforme apresentado na Fig. 58, a amostra foi dividida em duas classes de luminosidade: estrelas gigantes e estrelas de sequência principal. A maior parte dessas estrelas está na sequência principal (16.112 estrelas) pois somente algumas estrelas gigantes (108 estrelas) tem o período rotacional bem definido.

Figura 58 – Características da amostra selecionada para o estudo do índice de frenagem magnética



Logaritmo da gravidade superficial *versus* a temperatura efetiva. A linha pontilhada para $\log g = 3,5$ separa a amostra de dois grupos: estrelas gigantes ($\log g \leq 3,5$) e estrelas de sequência principal com baixa massa ($\log g > 3,5$). O símbolo \odot indica a posição do Sol nesse diagrama. Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 59 – Distribuição da massa estelar no intervalo $0,2-4M_{\odot}$.



O valor médio para essa distribuição é de $0,9M_{\odot}$. Fonte: elaborada pelo autor.

6.2 Amostra para o estudo do índice de interação de maré

Os dados relacionados aos sistemas planetários foram obtidos no repositório do NASA Exoplanet Archive¹. A pesquisa selecionou conjuntos de dados com informações sobre parâmetros cruciais como período de rotação estelar, excentricidade, raios estelar e planetário, período orbital, massa estelar e planetária e semieixo maior. O período de rotação estelar é um dado escasso no catálogo de sistemas planetários, portanto, os sistemas de filtragem que contêm este parâmetro reduzem drasticamente o tamanho da nossa amostra. Na Tabela 5 são mostrados os critérios ou *flags* utilizados para a filtragem. É importante mencionar que a seleção da amostra segue um critério de temperatura definido pela limite de Kraft ($T_{eff} < 6250$ K). Este limite superior na massa das estrelas resultou em uma restrição com relação às medidas de semieixo maior, selecionando sistemas cuja distância entre a estrela e o planeta é inferior a 1 ua. Além disso, tal restrição limitou a massa planetária entre 0,4 massas terrestres e 20 massas de Júpiter.

Os conjuntos de parâmetros planetários e estelares foram determinados seguindo as referências fornecidas principalmente por Bonomo *et al.* (2017), juntamente com Barros *et al.* (2022). Empregando este processo de filtragem baseado em critérios e permitindo a utilização de conjuntos de parâmetros não padronizados, foi compilado um conjunto de dados original compreendendo 200 exoplanetas diferentes distribuídos em 152 sistemas planetários. Esses registros foram extraídos até novembro de 2023.

Quando a busca na base de dados não estabelece nenhuma opção de filtragem ou restrição, o campo *flag* é deixado em branco, e aqui o sinalizamos pela palavra *any*. O valor 1 para a opção de filtro *number of stars* indica o número de estrelas em um determinado sistema, enquanto para a opção de filtragem *default parameter set* esse valor indica que a pesquisa deve ser restrita apenas aos valores tomados como um padrão na literatura.

¹ <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html>

Tabela 5 – Observáveis e as suas opções de filtragem (*flags*) para as subamostras (*datasets*).

Opção de filtragem	<i>dataset #01</i>	<i>dataset #02</i>	<i>dataset #03</i>
default parameter set	any	1	1
number of stars	1	1	1
controversial flag	any	0	0
orbital period (P_{orb})	not null	not null	not null
orbital period limit	any	any	0
semi-major axis (a)	not null	not null	not null
semi-major axis limit	any	any	0
planet radius (R_p)	not null	not null	not null
planet radius limit	any	any	0
planet mass (M_p)	not null	not null	not null
planet mass limit	any	any	0
eccentricity (e)	not null	not null	not null
eccentricity limit	any	any	0
stellar radius (R_*)	not null	not null	not null
stellar radius limit	any	any	0
stellar mass (M_*)	not null	not null	not null
stellar mass limit	any	any	0
stellar age	any	not null	not null
stellar age limit	any	any	0
stellar rot. period (P_{rot})	not null	not null	not null
stellar rot. per. limit	any	any	0

Fonte: elaborada pelo autor

A opção de filtragem representada pelo nome do observável seguido da palavra *limit* refere-se ao tipo de valor atribuído a esse observável. Nestes casos, quando é atribuído uma sinalização igual a 0 para este tipo de filtro, aceita-se o valor médio seguido dos limites inferior e superior de incerteza para aquela grandeza. Se nenhuma sinalização for atribuída (indicado pela palavra *any*), o conjunto de dados só poderá conter estimativas para os valores mínimos ou máximos desta grandeza. O sinalizador *not null* força a pesquisa no banco de dados a retornar apenas aqueles registros contendo dados não faltantes para um determinado observável, enquanto a sinalização de valor igual a 0 para a opção *controversial flag* indica que apenas valores sem disputa na literatura foram selecionado para tais grandezas.

Embora tenhamos 5.599 exoplanetas confirmados até o momento em que esse texto é escrito, muitos estão em sistemas cuja estrela hospedeira não tem idade calculada catalogada ou período de rotação. Também é possível encontrar estrelas com parâmetros estelares bem definidos, mas em sistemas cujos parâmetros ainda não são conhecidos ou ainda não foram considerados como um valor único de referência na literatura. Por exemplo, é possível encontrar catálogos com diferentes valores de idade para uma mesma estrela hospedeira. Quando isso ocorre, os dados são sinalizados para diferenciar os valores das grandezas consideradas como conjunto de parâmetros padrão ou autoconsistente. No nosso conjunto de dados inicial, os registros para uma determinada estrela ou sistema planetário continham frequentemente valores considerados

padrão, mas faltavam informações importantes sobre grandezas estelares investigados no presente trabalho, tais como idade ou período de rotação. O sistema WASP-89b é um exemplo.

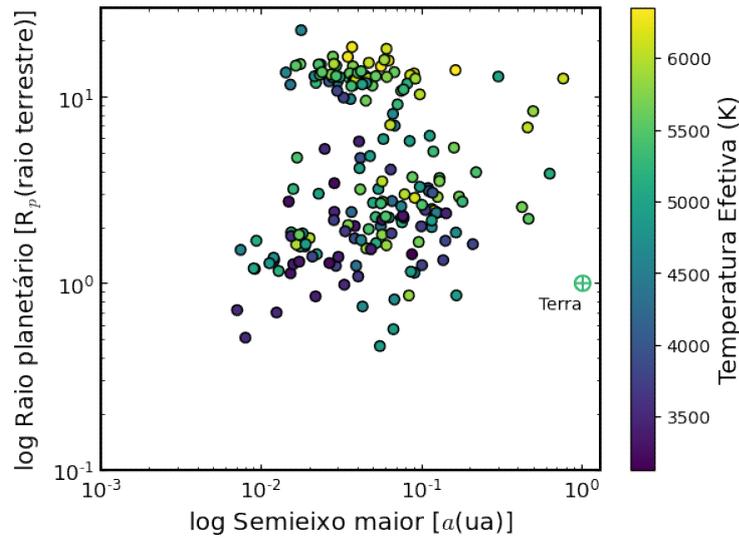
Para esse sistema, o conjunto de parâmetros considerados padrão é atribuído a Hellier *et al.* (2015), e a idade da estrela é de 1,3 Ga, mas não há informações sobre o período de rotação da estrela. No mesmo catálogo consultado, observamos que para WASP-89 b, um conjunto de parâmetros não padrão atribuídos ao catálogo por Bonomo *et al.* (2017) continha dados tanto para idade quanto para período estelar. Neste último caso, o WASP-89 tem uma idade estelar bem definida expressa pela medida $t_{age} = 12.5^{+1.5}_{-3.1}$ Ga. Nestes casos, as opções de filtragem para o dataset#01 (descritas na Tabela 5) poderiam permitir a seleção de sistemas como este, contendo parâmetros não autoconsistentes. Restringimos ainda mais o conjunto de dados original, selecionando apenas sistemas com um conjunto de parâmetros padrão para aumentar a confiança em nossas análises e investigar se isso poderia influenciar nossos resultados.

As principais missões espaciais que contribuíram para a identificação desses exoplanetas foram o *Transiting Exoplanet Survey Satellite* (TESS), responsável pela detecção de 86 exoplanetas, e o Telescópio Espacial Kepler, que detectou 55 no conjunto de dados original. Ambas as missões utilizaram o método de trânsito para detecção. Ao analisar esses sistemas planetários, observou-se que uma maioria substancial consistia de estrelas únicas, abrangendo aproximadamente 82% do total. Os 18% restantes correspondem a sistemas multiestrelas, sendo três sistemas circumbinários (Kepler-1647 b, Kepler-1661 b e TOI-1338 b). Como mostrado na Fig. 60, estrelas com temperaturas efetivas mais altas tendem a hospedar planetas com um raio mais significativo do que planetas semelhantes a Júpiter. Além disso, vale a pena notar que o conjunto de dados compreende predominantemente sistemas de um único planeta, representando 99 casos.

Removemos sistemas planetários com mais de uma estrela do conjunto de dados original, pois este é um assunto muito complexo e será tratado numa próxima comunicação. Então, subtraindo os 27 sistemas múltiplos, nossa amostra ficou reduzida a 167 exoplanetas distribuídos em 125 sistemas. Esse conjunto de dados será chamado de dataset#01 e está apresentado na Tabela 7.

Como o dataset#01 contém alguns sistemas planetários cujos parâmetros não são considerados valores padronizados na literatura e também possui 18 sistemas planetários sem idade estelar catalogada, decidimos refinar ainda mais a nossa amostra, criando um subconjunto formado apenas por sistemas planetários com conjuntos padronizados de parâmetros do dataset#01, dando origem ao dataset#02 com 84 exoplanetas distribuídos em 62 sistemas, todos eles com dados de idade estelar disponíveis. Como também pode ser visto na Fig. 69, o dataset#01 (painel superior) mostra quatro sistemas síncronos ($P_{rot} = P_{orb}$). Após a filtragem, dois deles, juntamente com outros 62 sistemas que não atenderam aos critérios de filtragem, foram excluídos do dataset#02 (painel central) que engloba apenas dois sistemas síncronos. No dataset#01, caracterizado pela utilização de dados com opção de filtragem sinalizados como 0 ou 1 para o conjunto de parâmetros padronizados (*default parameter set*), o sistema

Figura 60 – Raios e medidas do semieixo maior dos exoplanetas contidos na amostra original.



Representamos o raio planetário em função da distância do planeta à estrela (até ~ 1 ua) o conjunto de dados original. A figura sugere uma distribuição planetária em dois grupos. O primeiro grupo é caracterizado pela presença de planetas com raios menores orbitando estrelas com grande variação na temperatura efetiva, enquanto o segundo mostra planetas com raios maiores orbitando estrelas com temperaturas mais altas e mais uniformemente distribuídas. A escala de cores indica a temperatura efetiva da estrela hospedeira. Nota-se uma ampla distribuição de tamanhos, indo desde planetas do tipo sub-Terra até super-Júpiteres (~ 2 raios de Júpiter) hospedados em estrelas com temperaturas distribuídas de até 6250 K. Fonte: elaborada pelos autor.

TOI-1710 é visivelmente acompanhado pelos planetas CoRoT-4b e K2-3d, ambos sinalizados como 0 para o conjunto de parâmetros padrão e Kepler-102f sinalizado como 1 para esta mesma opção de filtragem. Como Kepler-102f não possui um valor de massa bem definido, tendo apenas um valor estimado para o limite superior de sua massa, ele é sinalizado como 1 para o limite de massa do planeta (*stellar mass limit*). Este é o motivo pelo qual esse planeta não é observado no *dataset#03*, onde a opção de filtragem exigida para *default parameter set* é sinalizada com *flag=1* e para *stellar mass limit* temos *flag=0*. Há apenas um sistema síncrono presente em todos os conjuntos de dados indicados pelo exoplaneta TOI-1710b.

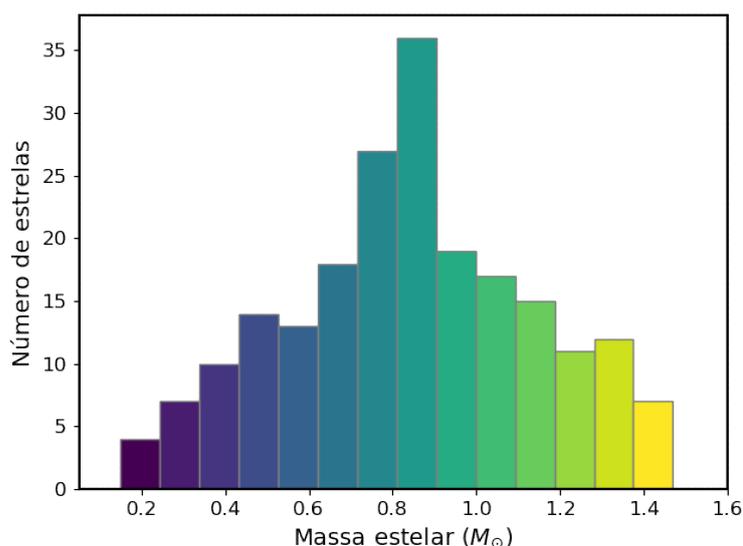
Visando utilizar dados mais precisos para avaliar o modelo ora apresentado, refinamos ainda mais os dados do *dataset#02*, criando um novo subconjunto, *dataset#03*, composto apenas por sistemas planetários cujos parâmetros tinham valores bem definidos. Este conjunto de dados mais restritivo contém 51 exoplanetas distribuídos em 39 sistemas. Por outro lado, ao impor as restrições delineadas em *dataset#03*, apenas um dos sistemas sincronizados se manifesta dentro da amostra reduzida.

Na Fig. 61, podemos analisar a distribuição de massa das estrelas contidas na amostra original, concluindo que todas elas se encontram abaixo do limite de Kraft, enquanto na Fig. 62, temos a distribuição de massa dos planetas hospedados por essas estrelas.

Nossa amostra compreende dados de rotação e período orbital necessários para o modelo descrito na Seção 7.2. Na Fig. 63, podemos observar que os períodos de rotação estelar estão distribuídos no intervalo de 1 a 168 dias, porém 90% das estrelas da amostra original

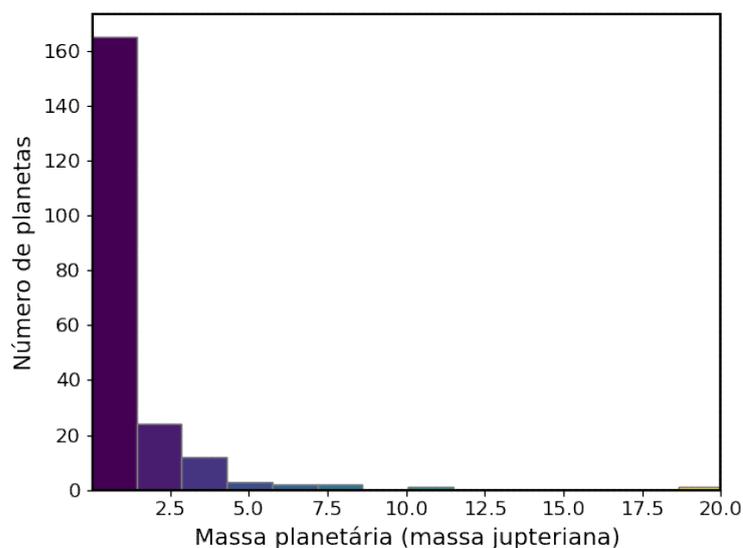
possuem período de rotação inferiores ou iguais a 50 dias. Em particular, as medições do período de rotação do Kepler e do TESS são distorcidas para valores inferiores a 45 dias (Martins *et al.*, 2023). Neste contexto, a nossa amostra contém um pequeno número de 23 estrelas com períodos de rotação superiores ao limite declarado. Segundo Martins *et al.* (2023), as estrelas da sequência principal com períodos de rotação superiores a 45 dias estão se tornando escassas, com base em diversas investigações observacionais e projeções teóricas.

Figura 61 – Distribuição de massa estelar na amostra original.



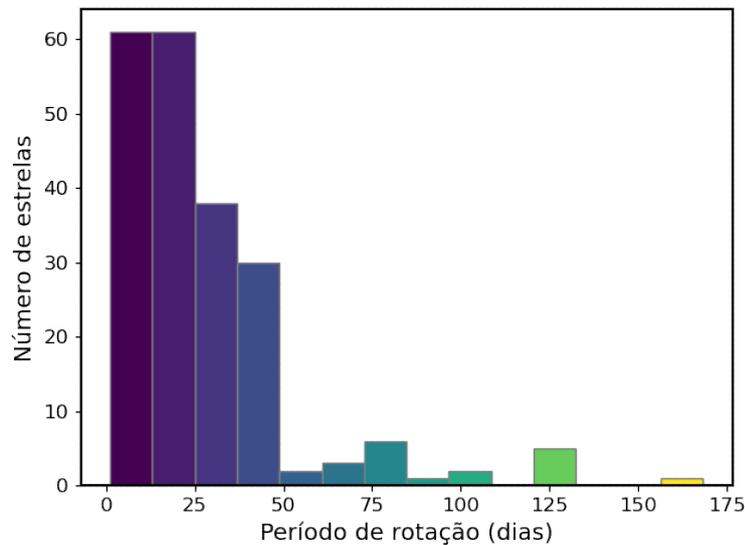
A amostra contém apenas estrelas abaixo do limite de Kraft ($1,5 M_{\odot}$). Nota-se um pico para as estrelas com massas entre $0,8M_{\odot}$ e $0,9M_{\odot}$. Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 62 – Distribuição de massa planetária na amostra original.



A maioria dos planetas (84%) apresenta massa inferior a 2 massas de Júpiter. No intervalo da distribuição, o planeta menos massivo, LHS 1678 b, possui $M_p = 0,35M_{\oplus}$, enquanto Kepler-39 b apresenta-se no extremo oposto desse intervalo, com $M_p = 20,1M_{\oplus}$. Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 63 – Distribuição de períodos de rotação estelar na amostra original.



Os períodos de rotação estão distribuídos no intervalo de 1 a 168 dias com 90% das estrelas da amostra original com período de rotação inferiores ou iguais a 50 dias. A estrela GJ 3473 é o rotador mais lento da amostra original, com período de rotação de 168,3 dias, enquanto a estrela WASP-121 se destaca como o rotador mais rápido, com período rotacional de 1,13 dia. Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, os dados de idade extraídos principalmente dos trabalhos de Bonomo *et al.* (2017, 2019, 2023), Psaridi *et al.* (2023), Barros *et al.* (2022), Alsubai *et al.* (2017) e Hay *et al.* (2016) contribuíram com 34, 3, 1, 3 e 3 estrelas com idades bem definidas, totalizando 33% da amostra dataset#01, respectivamente. Esta informação é crucial para compreender a composição dos conjuntos de dados e a distribuição dos dados de idade dentro deles. Esses autores obtiveram a maioria das idades estelares neste estudo usando um método de evolução diferencial bayesiana de Monte Carlo. Esta abordagem ajusta simultaneamente parâmetros estelares como raio, massa e idade, ao mesmo tempo que ajusta a distribuição espectral de energia estelar e emprega as Isócronas MESA e *Stellar Tracks* (Paxton *et al.*, 2015). Finalmente, ressalta-se que todos os planetas estão próximos da estrela hospedeira com $a < 1$ ua, conforme observado na Fig. 60.

7 UM NOVO ÍNDICE PARA A DESCRIÇÃO NÃO EXTENSIVA DA INTERAÇÃO DE MARÉ

Expandindo a abordagem não-extensiva que foi aplicada ao índice de frenagem magnética q_w no Cap. 4, propõe-se um modelo baseando-se em um índice q_t análogo, então apresentado como índice de interação de maré, a fim de caracterizarmos a evolução da rotação estelar sob dissipação de marés devido à presença de um ou mais exoplanetas em sistemas constituídos por estrelas com temperatura efetiva abaixo do limite de Kraft (< 6250 K) em uma amostra contendo cerca de 200 exoplanetas distribuídos em 152 sistemas planetários.

Analizamos as correlações do índice de maré com a razão dos momentos angulares e dos períodos, além de observar o comportamento deste índice com relação à massa planetária em sistemas com estrelas de diferentes massa. Além disso, observamos o comportamento do expoente de decaimento da velocidade de rotação estelar com relação à idade estelar.

7.1 O *Spin-down* de estrelas e as interações de maré

Conforme discutido na Seção 1.2, os planetas do tipo Júpiter quente se encontram bem próximos às suas estrelas hospedeiras. A teoria de acreção de núcleo sustenta que esses tipos de exoplanetas são formados a partir dos protoplanetas no disco protoplanetário que se originam a partir de um núcleo sólido que, ao atingir uma massa crítica, começa a agregar um enorme envelope gasoso em volta desse núcleo. Modelos de acreção mais recentes incluem a migração planetária como um dos mecanismos de evolução do planeta no disco protoplanetário pois a acreção e a migração são fenômenos concomitantes (Mordasini *et al.*, 2008).

Os planetas podem migrar devido a interações gravitacionais com outros corpos em seu sistema planetário. Em um contexto de formação planetária, eles podem interagir com o disco protoplanetário por meio de forças gravitacionais e, conseqüentemente, pelas forças de maré, variando o momento angular. Essa interação pode fazer com que a órbita do planeta mude, levando-o à migração (Barnes, 2010, p. 188).

Segundo Damiani e Lanza (2015b, 2015a), mesmo nos casos em que o processo de migração no disco protoplanetário se torna ineficaz, o contato de maré entre o planeta e a estrela pode, no entanto, desencadear alterações seculares subseqüentes nas órbitas dos exoplanetas. Como o torque das marés depende do inverso da sexta potência do semieixo maior, ele é particularmente significativo para Júpiteres quentes. Estimar a eficácia da dissipação das marés e as suas conseqüências ao longo da história evolutiva da estrela é, portanto, essencial para avaliar as possibilidades de migração (Barker; Ogilvie, 2009). No entanto, devido às lacunas na nossa compreensão sobre o processo preciso que causa a dissipação das marés, a sua eficácia e as conseqüências da perda de momento angular da estrela hospedeira devido à frenagem magnética, é um desafio tirar conclusões sobre esses processos nos sistemas estrela-planeta.

Mesmo sem um conhecimento detalhado da lei de perda de momento angular ou dos

mecanismos de dissipação de marés, é possível avaliarmos o resultado geral da evolução das marés, considerando que o momento angular total do sistema estrela-planeta não é conservado já que a frenagem magnética exerce um torque na estrela (Damiani; Lanza, 2015b; Benbakoura *et al.*, 2019). Assim, uma relação semelhante ao torque devido ao vento magnetizado como aquela representada pela Eq. (3.24) pode ser usada para representar a lei de torque para efeitos de interação de marés:

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{tidal} \propto \bar{\Omega}^{q_t}. \quad (7.1)$$

onde $\bar{\Omega}_*$ é definido como a diferença entre a velocidade angular estelar e a velocidade orbital média do planeta, ou seja, $\bar{\Omega}_* = \Omega_* - \langle \Omega_{orb} \rangle$. Esta condição é assumida para evitar um contrassenso quando a estrela não rotacionar. Assim, mesmo que $\Omega_* = 0$, haveria um torque de maré não nulo devido a presença do planeta e o torque de maré seria nulo somente quando $\bar{\Omega}_* = 0$. Nesse caso, o expoente q_t da expressão acima difere daquele proposto por Freitas e de Medeiros (2013) e da Eq. (3.24), uma vez que as interações de maré passam a se superpor aos efeitos da frenagem magnética. Espera-se que a taxa de perda de momento angular nos dois casos seja diferente e envolva parâmetros diferentes. Enquanto $(dJ/dt)_{wind}$ (Eq. 3.24) para estrelas sem planetas envolve apenas os parâmetros estelares, a Eq. (7.1) é escrita para sistemas planetários, incluindo a rotação estelar e os parâmetros orbitais.

Autores como Damiani e Lanza (2015b) e Ahuir *et al.* (2021) consideram que o momento angular estelar controla a evolução da rotação estelar quando o torque causado pelo vento tem uma amplitude substancialmente maior que o torque de maré. Este comportamento é o caso de taxas de rotação estelar típicas de planetas e estrelas jovens que não estão muito próximas da ressonância média de movimento de 2:1 (Damiani; Lanza, 2015a). Além desta condição, é possível que os torques originados pelas marés e pelo vento estelar sejam iguais em magnitude, ou ainda, que o torque das marés exceda o torque do vento.

No primeiro caso, a migração do planeta pode ser retardada pela entrada do sistema num estado estacionário onde a evolução das marés prossegue a uma frequência de rotação estelar quase constante (Lanza, 2022, p. 105). Enquanto houver momento angular orbital suficiente em relação ao momento angular rotacional estelar para manter o equilíbrio do torque, o torque da maré deve ter sinal oposto e comparável em magnitude ao torque do vento para que o estado estacionário seja estabelecido (Spada *et al.*, 2011).

Quando o torque de maré se sobrepõe ao torque gerado pelo vento magnetizado, a dissipação das marés define o tempo característico associado aos estágios finais da evolução, quando o planeta realiza um movimento em espiral em direção à estrela. Esta condição acontece com momento angular quase constante. Como consequência, existe, portanto, uma probabilidade muito baixa de observar planetas massivos nessa fase da evolução. Por outro lado, planetas de baixa massa podem ter uma duração do processo de migração orbital maior que o tempo de vida da sua estrela hospedeira na sequência principal (Barker; Ogilvie, 2009).

Mais detalhes sobre essas três condições podem ser encontrados em (Damiani; Lanza,

2015b), onde os autores revisitam o modelo de Darwin (Darwin, 1879; Darwin, 1880).

Um estudo mais detalhado do comportamento entre a interação das marés e os ventos magnetizados é crucial, especialmente quando se trata de sistemas próximos, como as anãs do tipo M, onde a zona habitável está próxima da estrela e esses ventos podem levar à erosão atmosférica (Chebly; Alvarado-Gómez; Poppenhaeger, 2022).

Conforme discutido no Capítulo 4, o desvio da lei de Skumanich é impulsionado fracamente pela densidade estelar e pelo período de rotação para sistemas sem planetas. A fim de propormos um índice análogo para incluir a interação de maré entre uma dada estrela e os seus planetas, é necessário estabelecer uma relação entre o expoente generalizado q , presente na Eq. (4.30) com os parâmetros estelares e orbitais.

7.2 A modelagem dos efeitos na evolução de marés devido à proximidade de planetas

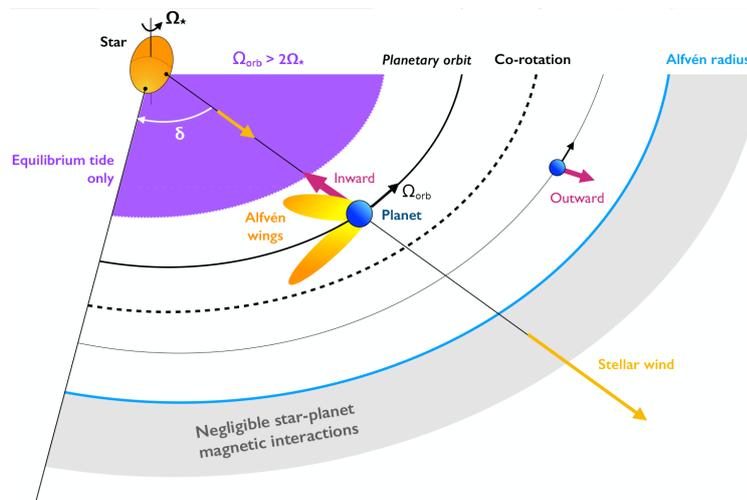
De acordo com o regime linear, são reconhecidos dois tipos de marés: marés de equilíbrio e marés dinâmicas (Ogilvie, 2014). As marés de equilíbrio envolvem o movimento de protuberâncias de maré na superfície estelar em grande escala. Por outro lado, as marés dinâmicas podem ser desencadeadas quando estão próximas dos modos gravitacionais internos ou modos inerciais dentro da estrela, exigindo uma força restauradora (Zahn, 2008).

Marés dinâmicas, na forma de modos gravitacionais, podem ser induzidas na zona radiativa estelar, enquanto marés de equilíbrio e ondas inerciais são geradas no envelope convectivo das estrelas. Notavelmente, no contexto da ruptura de Kraft, que delinea a transição na evolução estelar, apenas os dois últimos tipos de marés são pertinentes. Especificamente, para que os modos ou ondas inerciais sejam ativados, o período orbital da estrela deve ser maior que a metade do período de rotação, ou seja, $P_{orb} > P_{rot}/2$ (Ogilvie, 2014; Ahuir *et al.*, 2021). Quando $P_{orb} = P_{rot}/2$, temos o limite de excitação da maré e $P_{orb} = P_{rot}$ implica o raio de corotação. Na Fig. 64 podemos observar a região de influência desses dois tipos de marés.

As teorias das marés de equilíbrio são cruciais para a compreensão das interações das marés, concentrando-se no ajuste da figura de equilíbrio de um corpo deformado causado pelo potencial gravitacional de um corpo externo. O trabalho pioneiro de Darwin (1880) estabeleceu a base para estas teorias. A abordagem hidrodinâmica, exemplificada por a teoria da maré lenta proposta por Ferraz-Mello (2013) e outros modelos como o de Maxwell aplicado por Rodríguez, Callegari e Correia (2016), baseiam-se no conceito de maré de equilíbrio estático, assumindo inicialmente viscosidade zero (Gomes; Ferraz-Mello, 2020). Estas teorias então progridem para considerar marés de equilíbrio dinâmico, incorporando efeitos de viscosidade não nula na resposta do corpo deformado. Esses estudos refinaram ainda mais essas teorias, investigando aspectos como a sincronização das marés, a evolução rotacional e a interação das forças das marés nos corpos celestes, oferecendo informações valiosas sobre a intrincada dinâmica das marés em equilíbrio (Eggleton; Kiseleva; Hut, 1998; Ferraz-Mello, 2013).

Modelar os efeitos da evolução das marés devido a planetas próximos envolve a

Figura 64 – Diagrama esquemático das principais características e locais de interesse envolvidos em um sistema estrela-planeta submetido a interações magnéticas e de maré.



O planeta (em azul) orbita a estrela (em laranja) com uma velocidade angular orbital (Ω_{orb}). Como resultado da presença de um planeta, a estrela apresenta um bojo de maré desalinhado com a linha que une os centros dos dois corpos celestes, o que induz um ângulo de defasagem δ . Se Ω_{orb} for maior do que o dobro da taxa de rotação estelar Ω_* ($P_{orb} < P_{rot}/2$), as ondas inerciais não podem ser excitadas na zona convectiva da estrela e nenhuma maré dinâmica é levantada dentro do envelope convectivo da estrela (veja a área roxa). O movimento relativo entre o planeta e o vento estelar ambiente (representado com as setas laranjas) leva à formação de alças de Alfvén (lôbulos em laranja dispostos ao redor do planeta) se o planeta estiver em uma região inferior ao raio de Alfvén (em azul). Além dessa distância, nenhuma alça de Alfvén pode conectar a estrela e o planeta (veja a área cinza). Para interações de maré e magnéticas, um planeta situado abaixo do raio de corotação (veja a linha tracejada preta) sofre uma migração para dentro, e a rotação da estrela aumenta. Para um planeta situado além dessa distância, ele migra para fora levando consigo parte do momento angular da estrela. Ao migrar para o interior da sua órbita, a condição para que o planeta não espirale em direção à estrela é que a razão dos momentos angulares orbital e estelar seja maior ou igual a 3. Fonte: Extraída e adaptada de (Ahuir *et al.*, 2021).

compreensão da intrincada dinâmica entre os planetas e as suas estrelas hospedeiras. O índice de interação de marés, um novo parâmetro teórico desenvolvido neste capítulo, desempenha um papel crucial na quantificação do impacto das forças de maré na evolução orbital dos planetas. Em particular, estudos como o de Gallet *et al.* (2017) mostraram que planetas próximos podem induzir efeitos de maré significativos na rotação estelar, levando à migração de planetas e potenciais colisões. A evolução desses sistemas é influenciada por fatores como a relação de massa entre o planeta e a estrela, a eficiência da migração interna e a excitação de ondas inerciais de maré e campos magnéticos. Ao incorporar o índice de interação de marés nos modelos, podemos prever melhor a evolução a longo prazo de planetas próximos e os seus efeitos na rotação estelar, fornecendo informações valiosas sobre a dinâmica dos sistemas exoplanetários.

7.2.1 Índice de interação de maré q_t

Expandindo a abordagem realizada por Freitas (2021), Freitas, Cavalcante e Santiago (2022) que foi apresentada no Cap. 4, de modo a incluir a interação de maré, podemos chegar a uma maior compreensão dos mecanismos físicos que controlam o *spin-down* das estrelas que hospedam planetas, uma vez que as estrelas e os seus planetas evoluem juntos. Ao se empregar a

Eq. (7.2), proposta por Freitas (2021), podemos assumir que a taxa de perda de momento angular é uma lei de potência semelhante a $(dJ/dt)_{tidal} \propto \overline{\Omega_*}^{q_t}$. Neste contexto, utilizamos a abordagem parametrizada da equação diferencial proposta por Mayor e Mermilliod (1991) e Freitas e de Medeiros (2013) formalmente escrita como uma equação não linear para se investigar a evolução da rotação estelar sob a influência da interação das marés. Assim, com $\overline{\Omega_*} = \Omega_* - \langle \Omega_{orb} \rangle$, temos que

$$\dot{\overline{\Omega_*}} = \dot{\Omega_*} = -\frac{\Omega_0}{\tau_c} \left(\frac{\Omega_*}{\Omega_0} \right)^{q_t}, \quad (7.2)$$

onde τ_c é definido como um tempo característico, Ω_0 representa a velocidade angular no tempo $t = 0$ e Ω_* é a velocidade angular estelar no tempo $t = t_{age}$, ou seja, agora. O índice de interação de marés q_t proposto aqui pode ser definido derivando-se $\dot{\overline{\Omega_*}}$ da Eq. (7.2). Considerando que q não depende do tempo, depois de algum algebrismo, ele pode ser expresso na forma:

$$q_t = \frac{\ddot{\overline{\Omega_*}} \overline{\Omega_*}}{\dot{\overline{\Omega_*}}^2}. \quad (7.3)$$

Esta equação representa uma forma geral do índice entrópico q , que pode ser usada para explicar os efeitos do vento estelar e da interação de marés na taxa de rotação estelar, diferindo apenas na definição de Ω_* e suas derivadas. Assim, os próximos passos envolvem a definição de Ω_* e suas derivadas de primeira e segunda ordem. Para esse fim, proporemos um modelo de interação de marés que melhor se ajuste à nossa amostra, ou seja, estrelas abaixo da ruptura de Kraft.

Apesar de termos discutido na Sec. 3.1, é importante frisar que a origem conceitual do parâmetro q está associada ao grau de não-extensividade que emerge dentro do formalismo termodinâmico proposto por Tsallis (1988). É crucial enfatizar que o formalismo não extensivo é uma estrutura da física estatística que estende a termodinâmica de Boltzmann-Gibbs por meio de um parâmetro q , quantificando a força das interações de longo alcance, como aquelas encontradas no presente estudo, as interações de marés em sistemas planetários. Embora q normalmente não possua uma única interpretação física predefinida, a sua estrutura matemática oferece informações valiosas para a interpretação de resultados derivados de leis de potência, como exemplificado na Eq. (7.2).

Conforme discutido nas Seções 3.1 e 3.3, apenas estrelas com campo magnético saturado seguem uma lei de decaimento rotacional que segue um exponencial padrão. O formalismo não extensivo acomoda ambas as condições simultaneamente, onde a exponencial padrão é recuperada quando $q = 1$. Por analogia, o comportamento de q no caso de interações de marés também deve seguir uma abordagem semelhante; portanto, uma lei de potência é a forma mais apropriada de expressar a evolução da rotação estelar no impacto das interações das marés.

Segundo Freitas (2021), o formalismo não extensivo é uma teoria influente para o estudo de sistemas estelares, incluindo aglomerados abertos e campos estelares, como visto aqui. Além disso, já demonstramos no capítulo anterior que o mecanismo de frenagem rotacional estelar pode ser explicado por meio do comportamento do índice entrópico q . Adicionalmente, Freitas e de Medeiros (2013) propuseram que o comportamento crescente do índice q entre os

regimes de campo magnético saturado ($q = 1$) e insaturado ($1 < q < 3$), em função do espectral, pode explicar o processo de transição magnética que ocorre no dínamo estelar.

No capítulo anterior, o índice q_w foi assumido como uma constante que mede a eficiência da frenagem magnética durante a vida das estrelas. É fundamental destacar que a expressão para q_t de acordo com $(dJ/dt)_{tidal}$ segue o mesmo procedimento.

Na Seção 3.3, mencionamos que o índice q está associado à relação do dínamo e à medição da geometria do campo magnético pela Eq. (3.23) e, naquele contexto, para $a = 1$, um valor de $N = 3/2$, o decaimento do momento angular para a lei de Skumanich (Eq. 4.3) é recuperado. No entanto, o índice q extraído da Eq. (7.3) pode ser bem diferente quando a interação estrela-planeta é considerada.

7.2.2 Determinação do índice q_t a partir do modelo de marés de equilíbrio

Com base na Eq. (7.3), o modelo não-extensivo ora proposto relaciona Ω_* e as suas derivadas com o índice de interação de marés q_t . Assim, é necessário que se descreva a dissipação das marés em estrelas e planetas em termos dos observáveis que estão no membro direito da Eq. (7.3). Para este fim, escolhemos as equações de evolução orbital apresentadas por Ogilvie (2014) e introduzidas na Seç. 5.1.

O modelo Ogilvie (2014) introduz o conceito de dissipação de marés e o seu significado na compreensão da evolução dos sistemas estelares e planetários. Tal modelo explora a interação das marés entre uma estrela ou planeta e o seu companheiro, o que resulta na transferência de momento angular e energia. Na Seção 5.1 vimos que essa interação causa deformação e gera ondas de maré dentro do corpo. Com base no modelo proposto por Ogilvie (2014), assumimos que todas as componentes das marés partilham o mesmo tempo de retardo definido como $\tau = 1/(Q|\omega_{tide}|)$. A quantidade Q é o fator de qualidade das marés, definida na Sec. 5.3, pode ser expressa na forma da equação:

$$Q = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_0 \bar{\sigma}_*} \frac{G}{R_*^5 |\omega_{tide}|}, \quad (7.4)$$

conforme observado nos trabalhos de Bolmont e Mathis (2016) e Ahuir *et al.* (2021) e onde identificamos R_* como sendo o raio estelar, G a constante gravitacional e $\sigma_0 = \sqrt{G/(M_\odot R_\odot^7)}$. A quantidade ω_{tide} é a frequência das marés dada pela expressão $\omega_{tide} = n\Omega_{orb} - m\Omega_*$, onde m e n compõem junto com l o trio de componentes do termo quadrupolar do potencial de maré. Finalmente, os valores de $\bar{\sigma}_*$ em função da massa estelar são extraídos da Fig. 3 do trabalho de Hansen (2012).

Este conjunto de simplificações corresponde aos casos investigados detalhadamente por Darwin (1880), Alexander (1973) e Hut (1981). Para estes autores, o termo $k_{l,m,n}$ (conforme definido abaixo) assume uma forma simplificada, permitindo-nos derivar uma versão mais simples do modelo de maré de equilíbrio. Alguns pesquisadores, como Rao *et al.* (2018), enfatizam que o modelo de marés de equilíbrio é uma aproximação razoável para a fase da

sequência principal. No entanto, torna-se menos preciso durante as fases em que o envelope convectivo é mais desenvolvido e evolui rapidamente, como ocorre na fase de pré-sequência principal e gigante vermelha. Dadas as condições da nossa amostra, o modelo simplificado acima mencionado é uma alternativa adequada para quantificar o índice de interação de marés q_t .

De acordo com o modelo mencionado, assumindo que todos os parâmetros a , e e Ω_* tenham o mesmo intervalo de tempo τ (Damiani; Lanza, 2015b), os números de Love $k_{l,m,n}$ podem ser expressos por:

$$k_{l,m,n} = k_l \tau (n\Omega_{orb} - m\Omega_*). \quad (7.5)$$

Em particular, o número de Love $k_{2,2,2}$ (doravante k_2) é de especial interesse. Ele mede o nível de condensação central de um objeto: quanto mais homogêneo for o planeta na distribuição de massa, maior será o número de Love k_2 (Kramm *et al.*, 2011). Sob esta condição, a frequência de maré ω_{tide} se reduz a $2(\Omega_{orb} - \Omega_*)$. Além disso, consideramos que a rotação do planeta esteja sincronizada, uma vez que o tempo de sincronização estimado para a nossa amostra é menor do que a idade do sistema estrela-planeta e, assim, apenas a dissipação das marés dentro da estrela afeta a evolução orbital. Consequentemente, este processo ocorre dentro do envelope, o que significa que o torque de maré é aplicado exclusivamente à zona convectiva e não ao núcleo (Benbakoura *et al.*, 2019).

Com essas condições, as Eqs. (5.69), (5.70) e (5.71) podem ser reescritas de forma simplificada, conforme descrito pelas equações abaixo:

$$\frac{\dot{a}}{a} = -6k_2 \tau (\Omega_{orb} - \Omega_*) \frac{M_p}{M_*} \left(\frac{R_*}{a}\right)^5 \Omega_{orb} \quad (7.6)$$

$$\frac{\dot{e}}{e} = -\frac{3}{2} k_2 \tau (18\Omega_{orb} - 11\Omega_*) \frac{M_p}{M_*} \left(\frac{R_*}{a}\right)^5 \Omega_{orb} \quad (7.7)$$

$$\frac{\dot{\Omega}_*}{\Omega_*} = 3k_2 \tau (\Omega_{orb} - \Omega_*) \frac{L_{orb}}{L_*} \frac{M_p}{M_*} \left(\frac{R_*}{a}\right)^5 \Omega_{orb}. \quad (7.8)$$

A partir das Eqs. (7.6) e (7.8), temos que

$$\frac{\dot{a}}{a} \frac{\Omega_*}{\dot{\Omega}_*} = -2 \left(\frac{L_*}{L_{orb}}\right). \quad (7.9)$$

E, dividindo a Eq. (7.7) pela Eq. (7.8), obtém-se uma expressão semelhante para a evolução da excentricidade:

$$\frac{\dot{e}}{e} \frac{\Omega_*}{\dot{\Omega}_*} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L_*}{L_{orb}}\right) \left(\frac{18\Omega_{orb} - 11\Omega_*}{\Omega_{orb} - \Omega_*}\right). \quad (7.10)$$

Quando o momento de inércia da estrela I_* é mantido constante, o momento angular estelar $L_* = I_* \Omega_*$ e sua primeira derivada \dot{L}_* podem ser relacionados por

$$\frac{\dot{L}_*}{L_*} = \frac{\dot{\Omega}_*}{\Omega_*}. \quad (7.11)$$

Uma expressão semelhante pode ser obtida para o momento angular orbital e a sua primeira derivada a partir da Eq. (7.18):

$$\frac{\dot{L}_{orb}}{L_{orb}} = -\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\frac{\dot{e}}{e} - \frac{\dot{a}}{a}. \quad (7.12)$$

Para este trabalho, apenas o envelope convectivo externo fornecerá momento angular rotacional na estrela. Em outras palavras, ignoramos qualquer transferência de momento angular do núcleo interno rígido da estrela, semelhante a um corpo rígido. Assim, diferenciando a Eq. (7.8) em relação ao tempo e dividindo este resultado por $\dot{\Omega}_*$, depois de alguma álgebra, podemos obter a seguinte expressão para a razão da primeira e segunda derivadas da velocidade angular:

$$\frac{\ddot{\Omega}_*}{\dot{\Omega}_*} = -5\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{\dot{L}_{orb}}{L_{orb}} - \frac{\dot{L}_*}{L_*} + \frac{\dot{\Omega}_*}{\Omega_*} \left(\frac{\Omega_{orb} - 2\Omega_*}{\Omega_{orb} - \Omega_*}\right). \quad (7.13)$$

Substituindo as Eqs. (7.11) e (7.12) na Eq. (7.13) e, dividindo-se a expressão resultante por $\dot{\Omega}_*/\Omega_*$, temos o seguinte:

$$\frac{\ddot{\Omega}_*\Omega_*}{\dot{\Omega}_*^2} = -6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{\Omega_*}{\dot{\Omega}_*} - \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\frac{\dot{e}}{e}\frac{\Omega_*}{\dot{\Omega}_*} - \frac{\Omega_*}{\Omega_{orb} - \Omega_*}. \quad (7.14)$$

Usando as Eqs. (7.9) e (7.10), a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{\ddot{\Omega}_*\Omega_*}{\dot{\Omega}_*^2} = \frac{L_*}{L_{orb}} \left[12 + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right) \left(\frac{18\Omega_{orb} - 11\Omega_*}{\Omega_{orb} - \Omega_*} \right) \right] - \frac{\Omega_*}{\Omega_{orb} - \Omega_*}. \quad (7.15)$$

Finalmente, conforme definido na Eq. (7.3), q_t pode ser escrito na seguinte forma

$$q_t = \frac{1}{1 - \frac{\Omega_{orb}}{\Omega_*}} + \left[12 + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right) \left(\frac{18\Omega_{orb} - 11\Omega_*}{\Omega_{orb} - \Omega_*} \right) \right] \frac{L_*}{L_{orb}}. \quad (7.16)$$

Note que a expressão acima pode ser reescrita em termos da proporção P_{rot}/P_{orb} ao substituirmos Ω_{orb}/Ω_* por $(P_{orb}/P_{rot})^{-1}$, assim

$$q_t = \frac{\frac{P_{orb}}{P_{rot}}}{\frac{P_{orb}}{P_{rot}} - 1} + \left[12 + \frac{11}{2} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right) \left(\frac{\frac{P_{orb}}{P_{rot}} - 18}{\frac{P_{orb}}{P_{rot}} - 1} \right) \right] \frac{L_*}{L_{orb}}, \quad (7.17)$$

demonstrando que a expressão é assintótica para sistemas sincronizados, ou seja, a razão P_{orb}/P_{rot} deve ser diferente de 1. Além disso, o índice de maré incorpora a dependência do período de rotação estelar, de forma semelhante ao índice q_w .

O momento angular em um sistema planetário inclui somente o momento angular orbital planetário e o momento angular rotacional da estrela, uma vez que se despreze o momento angular de rotação dos planetas e o momento angular orbital dos seus possíveis satélites. Os momentos angulares aqui considerados podem ser calculados a partir dos sistemas quando a massa e a rotação da estrela hospedeira, bem como, a massa, semieixo maior e excentricidade dos planetas são bem conhecidas (Jiang *et al.*, 2022). Nossa amostra contém sistemas com um ou mais planetas. Porém, consideramos o impacto individual de cada planeta no sistema

multiplanetário, pois nem todos os planetas deste tipo de sistema têm o mesmo impacto, o que pode variar de acordo com o semieixo maior e a excentricidade. Deste ponto em diante, cada símbolo ou marcador nas figuras indica um planeta.

De acordo com Ogilvie (2014), para se investigar o momento angular, é necessário definir a razão entre o momento angular orbital L_{orb} e o momento angular de rotação de uma estrela L_* (com um valor constante I_*), dado por

$$\frac{L_*}{L_{orb}} = \frac{I_* \Omega_* \Omega_{orb} a}{GM_* M_p \sqrt{1 - e^2}}. \quad (7.18)$$

Esta equação é obtida a partir da terceira de lei de Kepler, e das equações $L_* = I_* \Omega_*$ and

$$L_{orb} = \sqrt{G \frac{M_* M_p^2}{M_* + M_p} a (1 - e^2)}, \text{ conforme realizado no trabalho de Damiani e Lanza (2015b).}$$

Reescrevendo-se a equação acima em unidades de massa e semieixo maior da Terra e de raio solar, temos:

$$\frac{L_*}{L_{orb}} = \frac{384984}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\left(\frac{a}{1 \text{ua}}\right) \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2}{\left(\frac{M_p}{M_\oplus}\right) \left(\frac{P_{orb}}{1 \text{day}}\right) \left(\frac{P_{rot}}{1 \text{day}}\right)}, \quad (7.19)$$

onde, assumimos que o momento de inércia $I_* = \frac{2}{5} M_* R_*^2$ (Gurumath; Hiremath; Ramasubramanian, 2019), $R_\odot = 6,96 \times 10^8$ m, $M_\oplus = 5,97 \times 10^{24}$ kg, e a constante gravitacional universal $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²kg⁻². De fato, mesmo que o momento angular da estrela provenha apenas da envolvente convectiva, podemos razoavelmente assumir que o momento de inércia é calculado tratando as estrelas como corpos rígidos. Para estrelas abaixo da ruptura de Kraft, como no caso das estrelas na presente análise, aproximadamente 50% da massa está concentrada num raio de 20% do centro (Gurumath; Hiremath; Ramasubramanian, 2019). Nesta região, a variação da densidade é relativamente constante, justificando a suposição de que a estrela pode ser considerada um corpo rígido (Gibson, 1973; Hiremath, 2013; Hiremath, 2016).

Como poderemos ver na Fig. 69, a maioria das estrelas em nossa amostra tem movimentos orbitais médios que são muito mais rápidos que o período de rotação da estrela hospedeira (ou seja, $P_{orb}/P_{rot} \ll 1$). Os períodos de rotação planetária, P_p , são frequentemente desconhecidos, embora estes dois parâmetros tenham sido medidos para numerosos sistemas compactos (Alvarado-Montes *et al.*, 2021). Devido à proximidade dos planetas com suas estrelas-mãe, presume-se que as interações das marés os levaram a um estado orbital síncrono (ou seja, $P_{orb} \sim P_p$) durante um período que varia de acordo com o sistema, dependendo de vários fatores físicos (Peale, 1977). Além disso, desconsideramos quaisquer ressonâncias (P_p, P_{orb}) (Winn; Holman, 2005).

Na próximo capítulo, especificamos os critérios de seleção e a caracterização das amostras utilizadas para a aplicação dos modelos propostos na investigação da frenagem magnética e das interações de maré.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

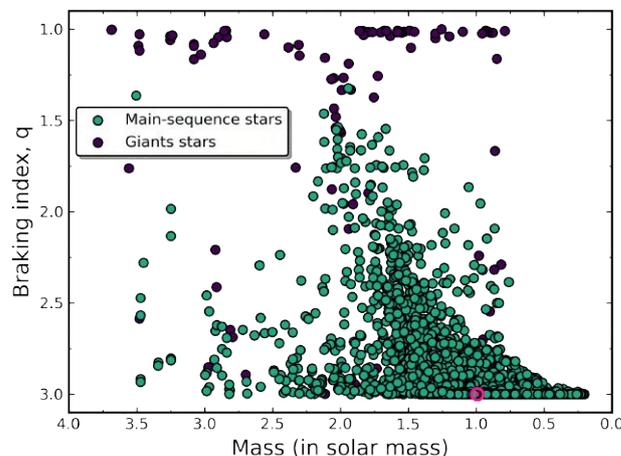
As descobertas deste estudo baseiam-se no exame de várias características planetárias e estelares. A discussão a seguir destacará os parâmetros mais pertinentes à nossa investigação, facilitando assim uma compreensão mais profunda dos modelos propostos. A relação entre os períodos orbital e rotacional é particularmente interessante, uma vez que o aspecto rotacional ocupa uma posição central dentro do modelo em análise. A exploração destas inter-relações é fundamental para elucidarmos as implicações físicas dos índices de frenagem magnética q_w e de marés q_t .

8.1 Análise dos desvios do índice de frenagem em estrelas ativas sem a presença de companheiros estelares ou planetários

Os valores do índice de frenagem magnética foram calculados a partir da Eq. (4.41) e a relação desse parâmetro com a massa, temperatura e período de rotação da estrela são apresentados nesta seção.

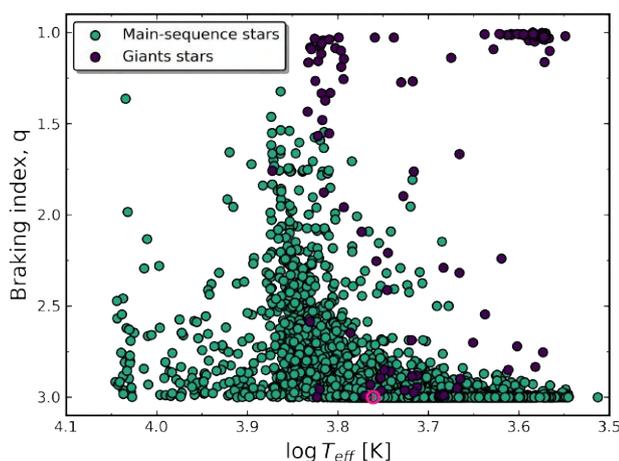
A teoria de estrutura estelar prediz que a densidade média da estrela diminui com o aumento da massa estelar, independentemente da classe espectral (Kippenhahn; Weigert; Weiss, 2012). Baseado no modelo apresentado, a Eq. (4.41) demonstra uma grande variação do índice de frenagem magnética ocorre em estrelas com massas superiores a $1,5M_{\odot}$, o que pode ser verificado na Fig. 65. Esse comportamento é esperado uma vez que as estrelas mais massivas são rotadores rápidos e, por isso, o efeito da mudança de momento de inércia nessas estrelas é mais pronunciado. Um comportamento semelhante é observado na relação de q_w com a temperatura efetiva. Na Fig. 66, observamos que para temperaturas maiores que 6300 K ($\log T_{eff} \geq 3,8$) ocorrem mais desvios a partir do valor canônico.

Figura 65 – Índice de frenagem magnética q_w em função da massa estelar.



Nota-se um desvio mais pronunciado de q_w para valores menores que o valor canônico quando a massa estelar assume valores maiores que $1,3M_{\odot}$. O símbolo \odot indica a posição do Sol nesse diagrama. Fonte: elaborada pelo autor.

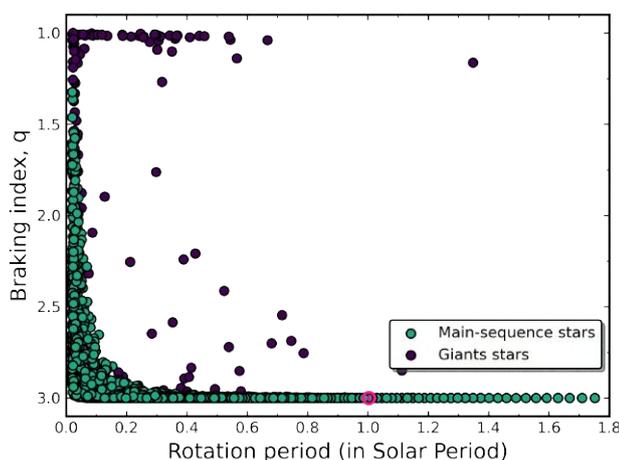
Figura 66 – Índice de frenagem magnética q_w em função da temperatura efetiva.



Nota-se um comportamento de q_w semelhante aquele que ocorre com a massa estelar, uma vez que a massa estelar e a temperatura efetiva são correlacionados. Fonte: elaborada pelo autor.

Na Fig. 67, podemos verificar a relação entre o índice de frenagem e o período rotacional. Os maiores desvios de q_w ocorrem para os rotadores rápidos da sequência principal ($P/P_\odot < 0,1$), tendo períodos de rotação menores do que 2,5 dias. Observando as Figs. 65 e 67, pode-se perceber que os desvios se distribuem no intervalo $1,3 \leq q_w < 3$ para as estrelas mais massivas na sequência principal e com rotação rápida.

Figura 67 – Índice de frenagem magnética q_w em função do período rotação P .



Desvios de q_w para valores menores que o valor canônico quando os períodos de rotação estelar são menores do que 10% do período de rotação solar. O símbolo \odot indica a posição do Sol nesse diagrama. Fonte: elaborada pelo autor.

Estrelas gigantes com alta rotação tem valores de q_w próximos de 1, sugerindo que esses rotadores já se aproximavam do regime de campo magnético saturado. Por outro lado, estrelas mais lentas da sequência principal ($P/P_\odot > 0,1$) possuem índice de frenagem que tendem ao valor canônico $q_w = 3$ que equivale a frenagem derivada da lei de Skumanich, fato que sugere que o expoente q_w é um ingrediente fundamental para descrever o comportamento rotacional por todo o seu tempo de evolução na sequência principal.

No entanto, as estrelas gigantes mais lentas apresentam desvios e podemos observar que algumas delas estão submetidas ao regime de frenagem de Skumanich. Isso pode ser explicado caso a variação de momento de inércia para essas estrelas seja negligenciável. Uma amostra contendo um número maior de estrelas gigantes é necessária para verificarmos isso.

Para as estrelas gigantes que apresentam o índice de frenagem no intervalo $1 < q_w < 3$, esse comportamento reflete o enfraquecimento da frenagem magnética, uma vez que a variação do momento de inércia estelar pode intensificar o desvio do regime de Skumanich. A mesma interpretação se aplica às estrelas de sequência principal.

Constata-se que não é comum a observação de estrelas gigantes com grandes velocidades rotacionais, ou seja, de baixo período. Os dados de estrelas gigantes de curto período podem indicar outros processos astrofísicos, tal como uma acreção de matéria por parte de uma estrela que hospedasse planetas. Nesse caso, o "engolimento" de um planeta poderia acarretar em uma mudança no momento de inércia estelar e, conseqüentemente, na sua rotação.

Sabemos que a estrela, ao deixar a sequência principal, pode expandir o envelope convectivo de forma a envolver a órbita de planetas mais próximos, caracterizando esse "engolimento". No entanto, alguns trabalhos afirmam que pode ocorrer um aumento anômalo da velocidade rotacional da estrela antes mesmo dela deixar a sequência principal (Oetjens *et al.*, 2020; Galarza *et al.*, 2021). Por outro lado, van Saders *et al.* (2016) afirmam que a origem da rotação rápida anômala se deve ao enfraquecimento da frenagem magnética.

No entanto, o modelo proposto nos trabalhos de Freitas e de Medeiros (2013) e no Cap. 4 considera apenas o comportamento do índice de frenagem magnética para estrelas gigantes e de sequência principal com baixos valores de massa com relação à densidade e o período rotacional, sem a presença de outras estrelas (sistemas binários) e de planetas. Para um estudo mais amplo da rotação estelar é necessário considerar os efeitos da interação estrela-planeta.

Utilizando-se a Eq. (4.29), é possível incorporar a descrição não extensiva juntamente com um modelo que envolva a interação de maré. A presente tese apresenta no próximo capítulo um cenário similar, onde o parâmetro não extensivo q terá uma nova roupagem, sendo reescrito à luz da teoria da maré de equilíbrio e recebendo a denominação de índice de maré q_t .

8.2 Análise da influência das interações de maré na evolução da rotação estelar

Antes de se investigar a influência dos parâmetros de spin-órbita sobre o índice de interação de marés q_t , faz-se necessário caracterizar alguns dos estados de spin-órbita que são relevantes para a nossa discussão.

8.2.1 Os estados de spin-órbita

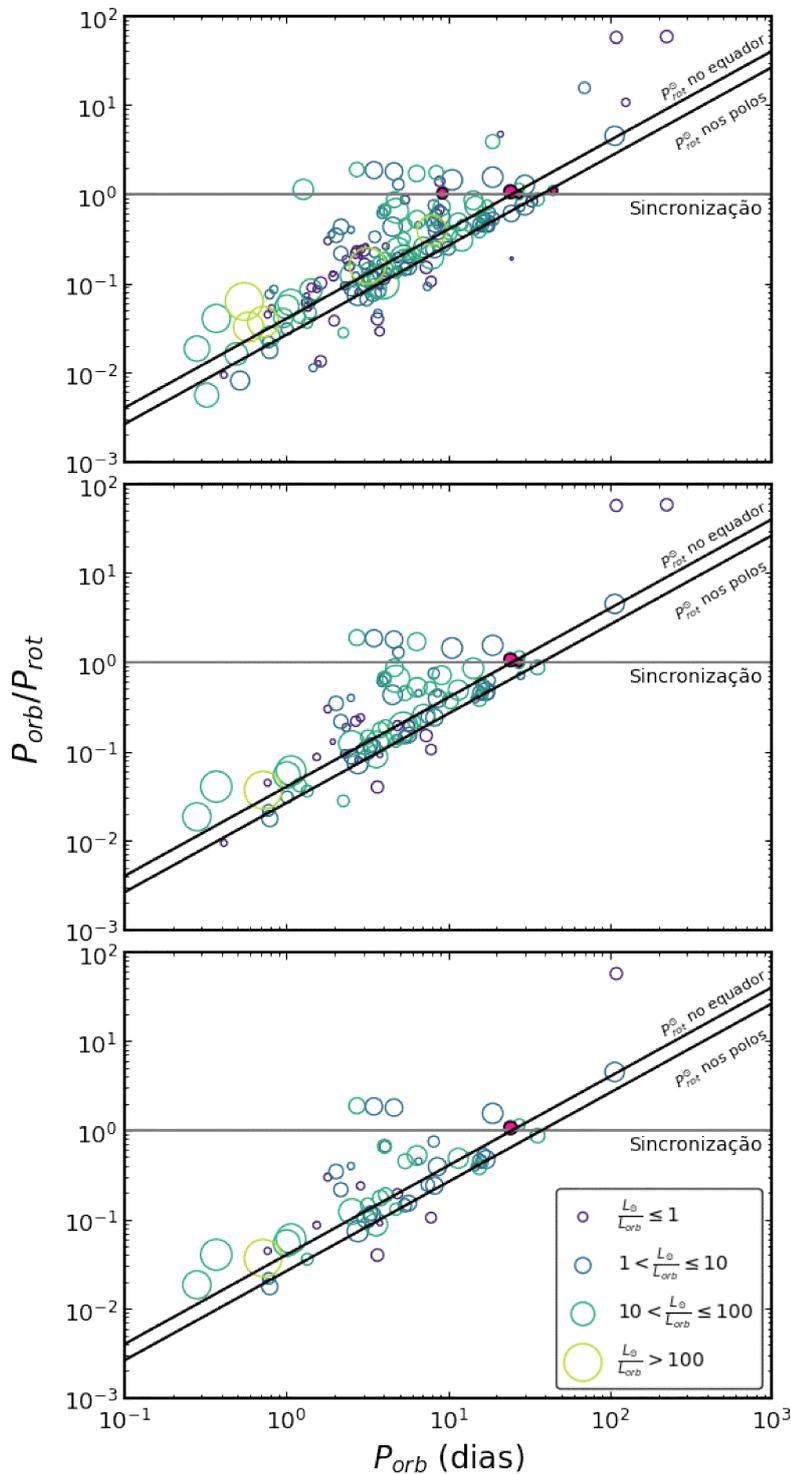
Na Fig. 68, podemos observar o comportamento da razão dos momentos e da razão dos períodos com relação ao período orbital. Assim como observado na Fig. 69, a maioria dos sistemas apresentam planetas com $P_{orb}/P_{rot} < 1$, mas chamamos atenção para o fato de que os sistemas com os maiores valores para a razão L_*/L_{orb} encontram-se em estados subsincronizados.

A Fig. 68 também nos mostra o parâmetro P_{orb}/P_{rot} como uma função do período orbital planetário para um conjunto de estrelas hospedeiras de planetas que compõem os três conjuntos de dados, conforme descrito na seção 6.2. Identificamos três subamostras, compostas de sistemas estrela-planeta sincronizados ($P_{orb}/P_{rot} = 1,0 \pm 0,1$), subsincronizados ($P_{orb}/P_{rot} < 0,9$) e supersincronizados ($P_{orb}/P_{rot} > 1,1$) que se distinguem na Fig. 68. Também podemos notar que essas três subamostras delineiam uma transição contínua de regimes subsincronizados para supersincronizados. No entanto, considerando o intervalo do período orbital, o comportamento dessas subamostras é diferente.

Os sistemas subsíncronos são apenas observados para períodos orbitais menores que um dia. As três subamostras citadas são apresentadas para períodos orbitais maiores que um dia. Para períodos orbitais maiores que 40 dias, apenas sistemas supersíncronos são observados. É essencial destacar que nossa amostra é hegemonicamente subsincronizada com apenas 19 sistemas dentro do regime supersincronizado e quatro sistemas estrela-planeta síncronos, denominados CoRoT-4b, K2-3d, Kepler-102f e TOI-1710b, considerando o dataset#01. Por outro lado, dois sistemas estrela-planeta síncronos estão no dataset#02, compostos pelos exoplanetas Kepler-102f e TOI-1710b, e apenas TOI-1710b é sincronizado no dataset#03.

A Fig. 68 demonstra ainda que sistemas com uma concentração significativa de momento angular dentro das estrelas hospedeiras estão localizados principalmente dentro ou em estreita proximidade com os limites do período de rotação solar, independentemente do conjunto de dados sendo analisado. Esta observação contradiz a distribuição observada no Sistema Solar, onde a maior parte do momento angular está concentrada dentro dos planetas. No entanto, esta discrepância surge devido à limitação da nossa amostra a planetas próximos de suas estrelas hospedeiras, resultando em um impacto diminuído. Em sistemas onde os planetas retêm o momento angular, uma tendência semelhante é observada, embora com uma dispersão mais ampla, em contraste com o primeiro, principalmente confinado a sistemas subsíncronos.

Figura 68 – Distribuição da razão dos períodos P_{orb}/P_{rot} em função do período orbital P_{orb} e da razão dos momentos angulares L_*/L_{orb}



A linha horizontal indica o regime de sincronização ocorrendo em $P_{orb}/P_{rot} = 1,0 \pm 0,1$ e os sistemas síncronos estão indicados por círculos na cor magenta. No painel superior temos a distribuição para o dataset#01, onde os planetas CoRoT-4b, K2-3d, Kepler-102f e TOI-1710b estão sincronizados. O painel central corresponde ao dataset#02, onde os sistemas síncronos são aqueles que compreendem os exoplanetas Kepler-102f e TOI-1710b. No dataset#03 (painel inferior), somente o TOI-1710b está sincronizado. Os regimes subsíncronos e supersíncronos são definidos por $P_{orb}/P_{rot} < 0,9$ e $P_{orb}/P_{rot} > 1,1$, respectivamente. As linhas diagonais indicam os valores do período de rotação no polo e no equador solar. Fonte: elaborada pelo autor.

8.2.2 Análise da dissipação de marés

Nós utilizamos a correlação entre o período orbital do planeta e o período de rotação da estrela, que é uma medida da posição de interesse envolvida num sistema estrela-planeta submetido a interações magnéticas e de marés (Benbakoura *et al.*, 2019). A Fig. 69 mostra os parâmetros P_{orb} e P_{rot} em função do fator de qualidade de dissipação de maré, Q , para um conjunto de estrelas hospedeiras de planetas que compõem os três conjuntos de dados conforme descrito no Cap. 6. Destacamos três regimes limitados pelo raio de corrotação ($P_{orb} = P_{rot}$), e o limite de excitação de maré ($P_{orb} = P_{rot}/2$). Com base na Fig. 69, a linha tracejada escura marca o limite onde as ondas inerciais podem ocorrer. Abaixo desta linha, a dissipação da maré de equilíbrio é o processo dominante.

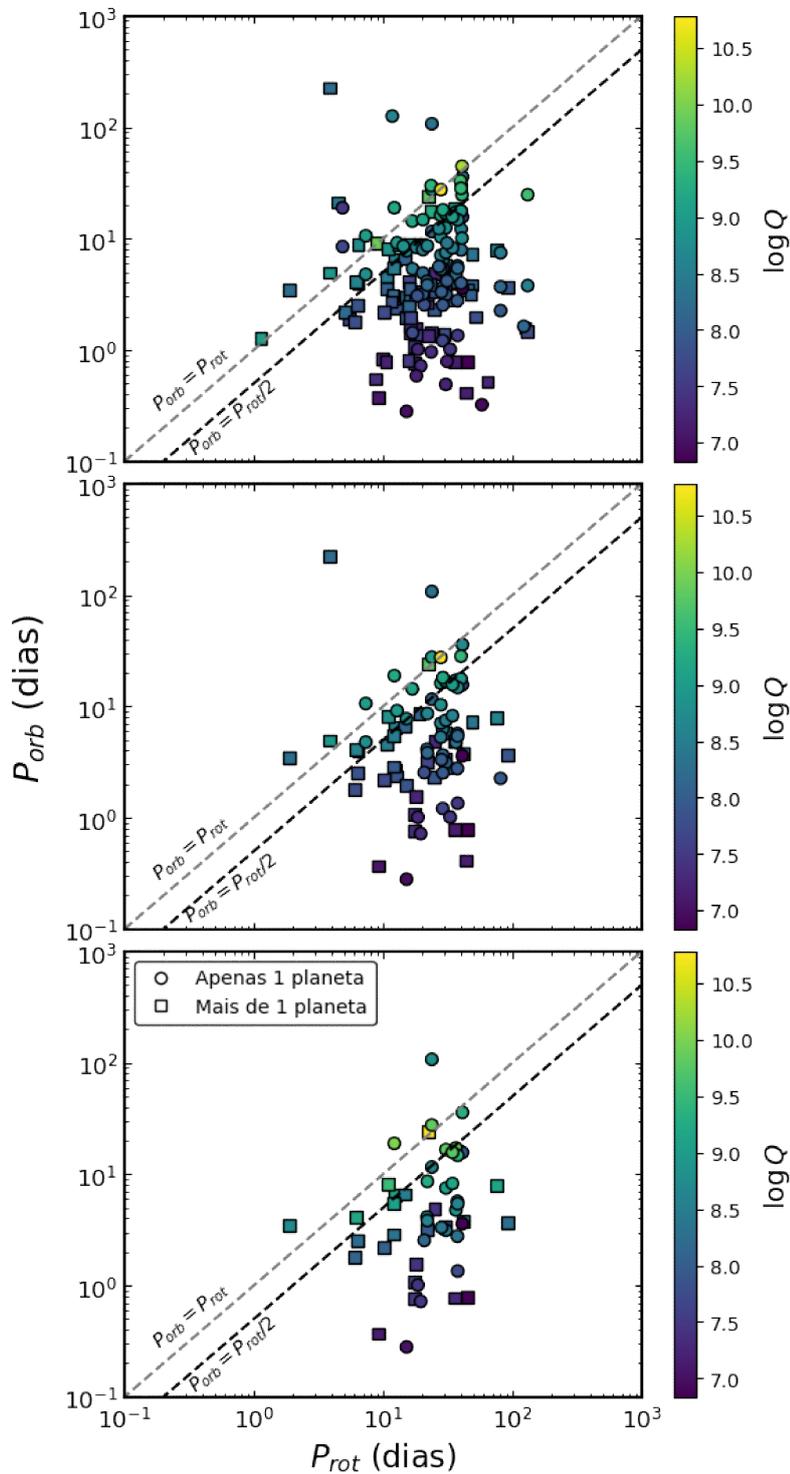
Observando a Fig. 69 e a Tabela 7, podemos verificar que cerca de 37 sistemas, totalizando 40 planetas, apresentam $P_{orb} > P_{rot}/2$. Por outro lado, ao considerar sistemas que se qualificam para o dataset#03, esse número diminui para 11 sistemas. Para $P_{orb} < P_{rot}/2$, onde ocorre apenas maré de equilíbrio, 100 sistemas e um total de 126 planetas obedecem esta condição. ($P_{orb} = P_{rot}/2$ define o limite de excitação da maré e $P_{orb} = P_{rot}$ implica o raio de corrotação). Consequentemente, as marés de equilíbrio emergem como o tipo de maré predominante na amostra, com seu mecanismo de dissipação atribuído ao plasma viscoso turbulento (Beck *et al.*, 2011). Essas condições podem ser observadas na Fig. 69.

Esta figura também mostra que o fator Q nesta região inferior é significativamente menor quando comparado com aqueles encontrados na parte superior da figura. É possível notar que, conforme os planetas se aproximam do raio de corrotação ($P_{orb} = P_{rot}$), observa-se um aumento de Q , revelando uma diminuição do efeito dissipativo. De acordo com a Eq. (7.4), a dissipação das marés deve desaparecer ($Q \rightarrow \infty$) quando a frequência de marés, ω_{tide} , se aproxima de zero e aumenta gradualmente à medida que a frequência se afasta de zero. Pela definição de Q na Eq. (5.54), o comportamento $Q \rightarrow \infty$ implica que uma grande quantidade de energia é armazenada ou uma quantidade ínfima de energia fornecida pela força de maré. Além disso, a Eq. (5.55) nos indica que o ângulo de defasagem δ tenderá à zero, caracterizando alinhamento dos bojos da estrela e do planeta. Quando $Q \rightarrow 0$, temos pouca energia mecânica armazenada para uma grande quantidade de energia fornecida ao sistema, caracterizando, portanto, um grande efeito dissipativo.

Além disso, a Fig. 69 destaca três regimes distintos de interação de marés em nossa amostra. Acima da linha tracejada clara, o movimento orbital é mais lento que a rotação estelar, correspondendo a planetas além do raio de corrotação. Nesta região, os planetas são empurrados para fora devido à dissipação do equilíbrio e das marés dinâmicas.

Entre as linhas tracejadas, a maré dinâmica é ativada no envelope estelar enquanto os planetas estão posicionados abaixo do raio de corrotação, fazendo com que eles espiralem para dentro sob a influência tanto do equilíbrio quanto das marés dinâmicas. Abaixo da linha tracejada escura, as ondas inerciais deixam de ser geradas. Nesta área, os planetas espiralam

Figura 69 – A distribuição do período orbital P_{orb} segundo o período de rotação estelar P_{rot} e o fator de qualidade de dissipação das marés (Q).



Considerando os dataset#01, dataset#02 e dataset#03 dispostos nos painéis superior, central e inferior, respectivamente. O regime de corotação (linha tracejada clara) ocorre em $P_{orb} = P_{rot}$ em que, abaixo desta linha, os planetas estão migrando para dentro; acima dela, eles são afastados da estrela. A linha tracejada escura denota o limite de excitação das marés ($P_{orb} = P_{rot}/2$) acima do qual as ondas inerciais das marés se propagam no envelope. Os círculos denotam planetas em um sistema monoplanetário, enquanto os quadrados representam planetas em um sistema multiplanetário. Fonte: elaborada pelo autor.

para dentro apenas devido à dissipação da maré de equilíbrio. A evolução a longo prazo de um sistema estrela-planeta normalmente envolve a transição através desses três estados.

Analisando-se ainda a Fig. 69, percebe-se que a maioria dos sistemas, independentemente da quantidade de planetas que eles abrigam, estão em um domínio das marés de equilíbrio, com $P_{orb} < P_{rot}/2$, demonstrando a adequabilidade do modelo proposto para a maioria deles.

8.2.3 A influência dos parâmetros de spin-órbita sobre o índice de interação de marés

O índice q_t é influenciado por vários parâmetros, como massa planetária, excentricidade e razão L_*/L_{orb} (conforme a Eq. 7.17). Porém, verificamos que o parâmetro que determina o comportamento do índice q_t é a razão L_*/L_{orb} . Como podemos ver em todos os painéis superiores da Fig. 70, q_t e L_*/L_{orb} estão fortemente correlacionados, indicando que o índice q_t depende quase exclusivamente na troca de momento angular entre estrelas e planetas. Em contraste, o coeficiente de correlação R^2 sugere uma relação insignificante entre q_t e P_{rot}/P_{orb} . Desta forma, podemos simplificar a Eq. (7.17) pela expressão:

$$q_t \approx 12 \left(\frac{L_*}{L_{orb}} \right). \quad (8.1)$$

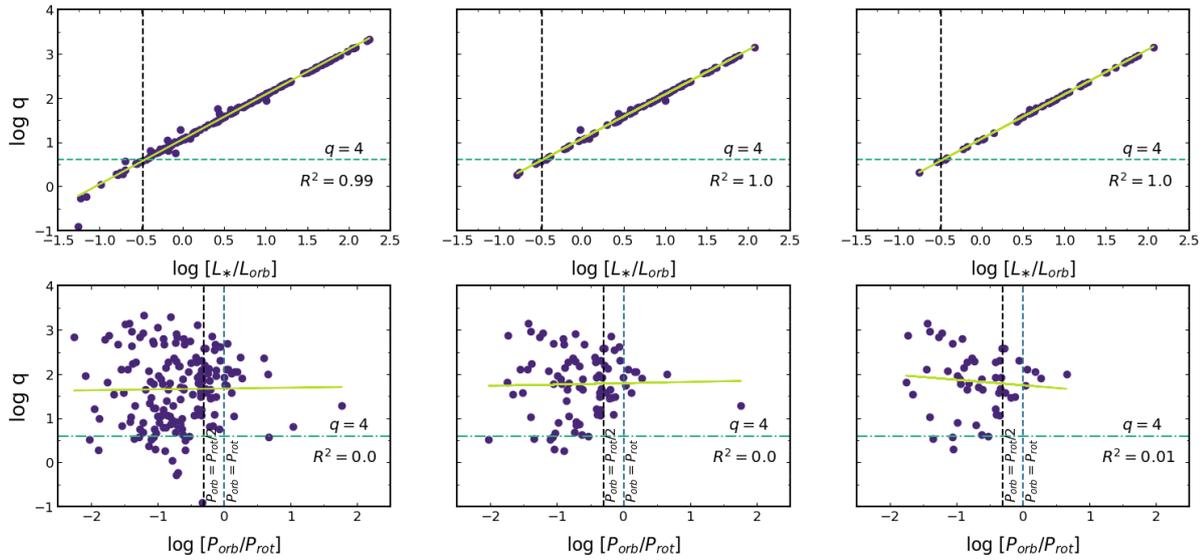
A Fig. 70 mostra a origem do fator 12 na Eq. (8.1) baseada na correlação do índice de maré q_t e os parâmetros L_*/L_{orb} e P_{orb}/P_{rot} . Nos painéis superiores desta figura, a reta de melhor ajuste é descrita pela relação $\log q_t = a + b \log(L_*/L_{orb})$ ou $q_t = 10^a (L_*/L_{orb})^b$ com $a = 1,070 \pm 0,007$ e $b = 1,012 \pm 0,007$, enquanto no painel inferior, onde se observa uma fraca correlação dada por $\log q_t = a + b \log(P_{orb}/P_{rot})$ com $a = 1,74 \pm 0,06$ e $b = -0,02 \pm 0,09$. Por exemplo, quando consideramos um expoente que corresponde à lei de Skumanich (1972), ou seja, $q = 3$, a razão $L_*/L_{orb} = 1/4$. Este cenário ocorre quando 80% do momento angular total ($J = L_* + L_{orb}$) está em planetas. Para Júpiter, temos que a razão $L_{\odot}/L_{orb} = 0,06$, considerando $P_{orb} = 12$ anos, $a = 5,2$ ua, $M_p = 317,8M_{\oplus}$ e $e = 0,048$. Usando esses valores nas Eqs. (7.17) e (8.1), os valores de q_t são diferentes, ou seja, $q_t = 1,71$ e $q_t = 0,72$, respectivamente. Este cenário mostra que a aproximação indicada pela Eq. (8.1) não é válida.

A diferença entre esses valores q_t é de aproximadamente 1. Essa discrepância surge na primeira parte da Eq. (7.17), que sob a condição de $P_{orb} \gg P_{rot}$, é reduzida à unidade. O outro termo na segunda parte da Eq. (7.17), que também depende desta razão, é igual a 1 na mesma condição, mas não contribui porque é um termo multiplicativo.

Portanto, nesses casos, a equação geral (7.17) deve ser usada, como exemplificado pelo caso de Júpiter. Este exemplo implica que a maior parte do momento angular atual do Sistema Solar ($\sim 94\%$) está localizado em Júpiter, devido à sua alta massa planetária e à grande distância orbital (Lanza, 2010; Sibony; Helled; Feldmann, 2022).

Três comportamentos distintos podem ser discernidos ao se examinar a Fig. 71. Em primeiro lugar, há uma tendência discernível de L_*/L_{orb} diminuir à medida que a massa planetária aumenta. Em segundo lugar, considerando que q_t é aproximadamente igual à $12L_*/L_{orb}$ (Eq. 8.1),

Figura 70 – Logaritmo do índice q_t de maré como função dos logaritmos de L_*/L_{orb} e P_{orb}/P_{rot} .



Nos painéis superiores, apresenta-se a relação entre o índice q_t e a razão dos momentos L_*/L_{orb} enquanto nos painéis inferiores representa-se a dependência de q_t com a razão dos períodos P_{orb}/P_{rot} discriminados nas três subamostras (a) dataset#01, (b) dataset#02 e (c) dataset#03. Nos painéis superiores, o melhor ajuste é representado pela relação $\log q_t = a + b \log(L_*/L_{orb})$ ou $q_t = 10^a (L_*/L_{orb})^b$ com $a = 1,070 \pm 0,007$ e $b = 1,012 \pm 0,007$, já nos painéis inferiores, há uma fraca correlação dada por $\log q_t = a + b \log(P_{orb}/P_{rot})$ com $a = 1,76 \pm 0,06$ e $b = -0,02 \pm 0,09$. Os valores dos coeficientes de determinação R^2 estão indicados no interior de cada um dos gráficos. Nos painéis superiores, a linha tracejada na vertical indica o valor $L_*/L_{orb} = 1/3$. Por outro lado, nos painéis inferiores, as linhas tracejadas verticais indicam o limite de excitação de maré e o raio de corotação, respectivamente. A linha horizontal composta por traços e pontos denota o valor de $q_t = 4$. Em evidência, nos datasets#1 e datasets#2, TOI-4562 consta como um sistema (de único planeta) com o maior valor para a razão P_{orb}/P_{rot} .

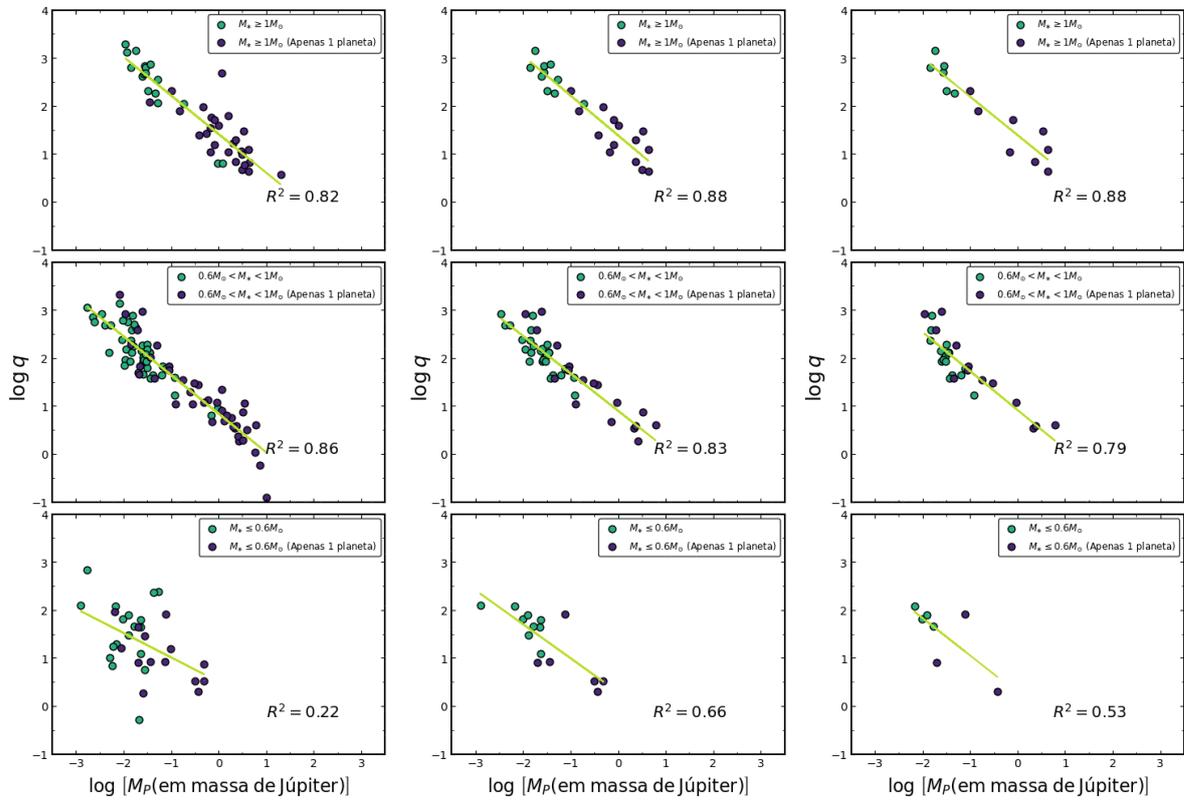
Fonte: elaborada pelo autor.

é notável que estrelas que hospedam vários planetas tendem a exibir valores L_*/L_{orb} mais elevados em comparação com sistemas com um único planeta. Além disso, os sistemas multiplanetários retêm, predominantemente, o seu momento angular dentro da estrela. Analisando-se ainda a Fig. 71, percebe-se que a distinção entre sistemas com um ou mais planetas torna-se mais pronunciada, particularmente entre estrelas com massas variando de $0,6M_\odot$ a $1M_\odot$.

Podemos notar que existem disparidades significativas nas faixas de valores do índice q_t de maré quando comparado ao índice q_w de frenagem magnética, conforme reportado na seção 8.1. Embora a análise anterior tenha revelado uma restrição de q_w com relação ao intervalo entre os valores de 1 a 3, as nossas observações demonstram que o intervalo entre os valores mínimo e máximo de q_t de maré pode exceder três ordens de grandeza. Esta discrepância é atribuída à natureza dos dados utilizados na análise anterior, que se concentravam apenas em estrelas desprovidas de planetas, baseando-se na densidade estelar e no período de rotação, conforme indicado na Eq. (4.41). A interação entre esses dois parâmetros naquela equação restringe a faixa de valores q_w , já que um aumento na densidade estelar corresponde inerentemente a uma redução no período de rotação e vice-versa.

No contexto atual, a função do índice q_t de maré está ligada à dissipação do momento angular induzido pela presença de planetas ao invés de ser influenciada somente pelos efeitos do

Figura 71 – Análise gráfica da correlação entre q_t e a massa planetária M_p segregada pela massa estelar e em escala logarítmica.



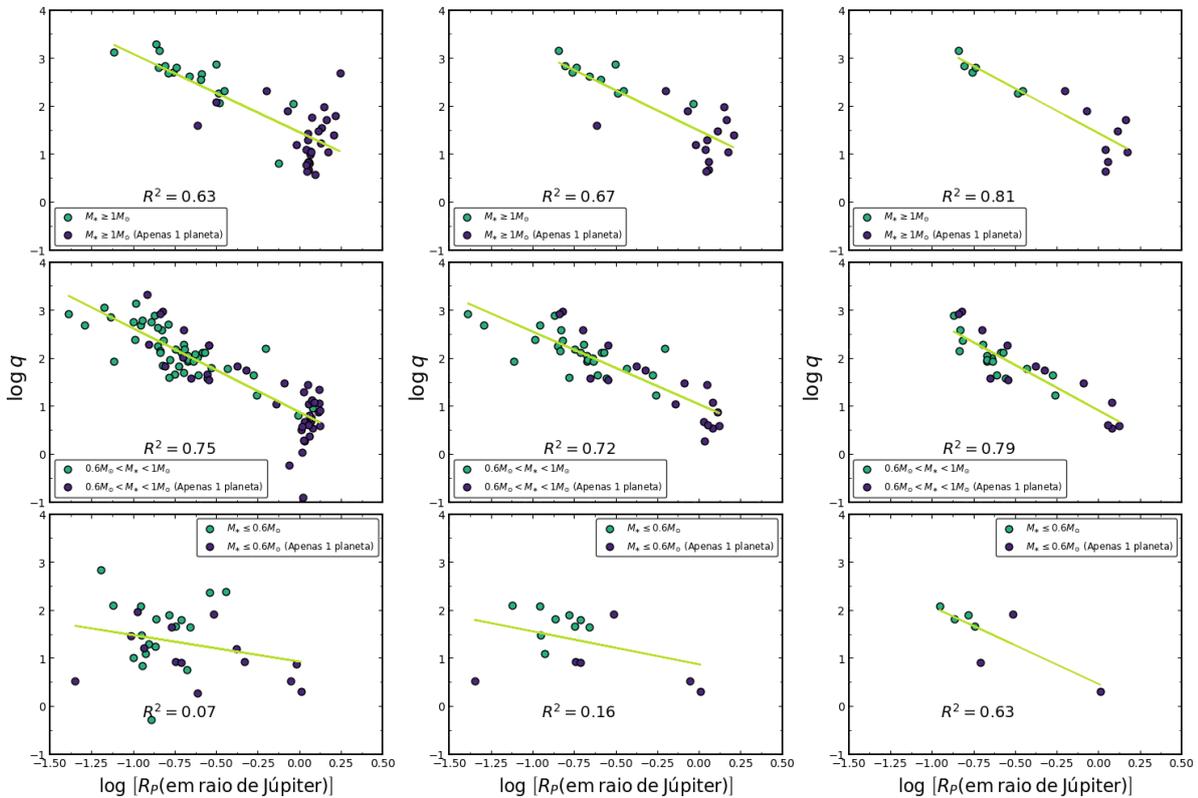
A dependência numérica de q_t foi medida pelo coeficiente de correlação R^2 obtido pelo processo de ajuste usando a equação $\log q_t = a + b \log M_p$. As correlações foram obtidas para os três conjuntos de dados distribuídos nas Figuras (a) dataset#01, (b) dataset#02 e (c) dataset#03. Cada um dos conjuntos de dados foi estratificado com relação ao tipo de sistema, com círculos preenchidos na cor roxa indicando os sistemas contendo um único planeta e círculos verdes indicando os sistemas multiplanetários. Para o dataset#01, nossos resultados mostram que para $M > 1M_\odot$ (com uma amostra de 45 planetas) $\log q_t = (1,41 \pm 0,06) + (-0,80 \pm 0,06)\log M_p$, enquanto para o intervalo $0,6 < M \leq 1M_\odot$ (com uma amostra de 89 planetas) $\log q_t = (0,84 \pm 0,05) + (-0,80 \pm 0,04)\log M_p$, e para $M \leq 0,6M_\odot$ (com tamanho amostral de 32 planetas) $\log q_t = (0,5 \pm 0,3) + (-0,5 \pm 0,2)\log M_p$. Os valores de R^2 também estão indicados. Fonte: elaborada pelo autor.

vento magnético como postulado no modelo proposto no Cap. 4. Consequentemente, a gama diversificada de valores q_t observados pode ser atribuída a vários fatores decorrentes da interação de múltiplos parâmetros do sistema (conforme as Eqs. (7.17) e (7.19)).

8.2.4 O impacto dos parâmetros planetários e da maré de equilíbrio no índice q_t .

A Fig. 71 ilustra claramente três comportamentos distintos observados quando a amostra é segregada pela massa estelar e repetida nos três subconjuntos de dados usando a equação $\log q_t = a + b \log M_p$. Nos painéis superiores desta figura, nossos resultados mostram que para $M > 1M_\odot$ (com uma amostra de 45 planetas) $\log q_t = (1,41 \pm 0,06) + (-0,80 \pm 0,06)\log M_p$, enquanto no intervalo de $0,6 < M \leq 1M_\odot$ (com uma amostra de 89 planetas) $\log q_t = (0,84 \pm 0,05) + (-0,80 \pm 0,04)\log M_p$, e para $M \leq 0,6M_\odot$ (com amostra de 32 planetas) $\log q_t = (0,50 \pm 0,3) + (-0,50 \pm 0,2)\log M_p$. Estrelas de massa intermediária ($0,6M_\odot < M < 1M_\odot$)

Figura 72 – Análise gráfica da correlação entre q_t e o raio planetário R_p segregada pela massa estelar e em escala logarítmica.



A dependência numérica de q_t foi medida pelo coeficiente de correlação R^2 obtido pelo processo de ajuste usando a equação $\log q_t = a + b \log M_p$. As correlações foram obtidas para os três conjuntos de dados distribuídos nas Figuras (a) dataset#01, (b) dataset#02 e (c) dataset#03. Cada um dos conjuntos de dados foi estratificado com relação ao tipo de sistema, com círculos preenchidos na cor roxa indicando os sistemas contendo um único planeta e círculos verdes indicando os sistemas multiplanetários. Para o dataset#01, nossos resultados mostram que para $M > 1M_\odot$ (com uma amostra de 45 planetas) $\log q_t = (1,45 \pm 0,08) + (-1,6 \pm 0,2)\log M_p$, enquanto no intervalo de $0,6 < M \leq 1M_\odot$ (com uma amostra de 89 planetas) $\log q_t = (0,87 \pm 0,07) + (-1,7 \pm 0,1)\log M_p$, e para $M \leq 0,6M_\odot$ (com tamanho amostral de 32 planetas) $\log q_t = (0,9 \pm 0,3) + (-0,6 \pm 0,4)\log M_p$. Os valores de R^2 também estão indicados. Fonte: elaborada pelo autor.

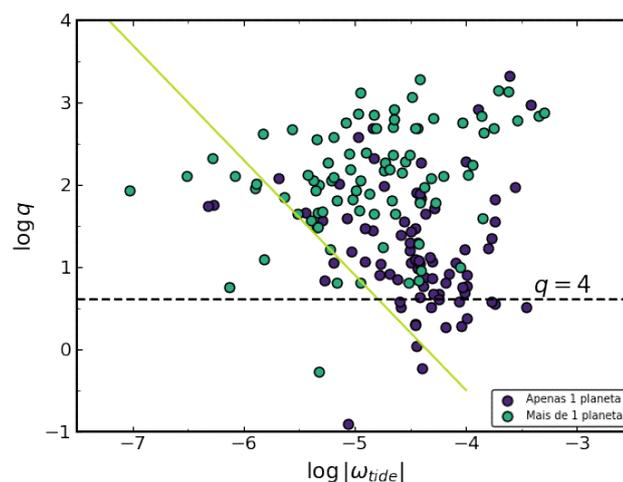
tendem a ter uma anticorrelação mais forte entre o seu índice q_t e a massa planetária, conforme revelado pelo alto coeficiente de determinação R^2 . A fim de evitar algum tipo viés amostral, as faixas de massa destacadas acima foram adotadas para isolar os tipos espectrais F, G+K e M, respectivamente.

Nós podemos observar o mesmo comportamento na Fig. 72. Em termos gerais, a segregação por massa evidencia a correlação relevante entre o índice q_t e a massa e o raio dos planetas e, sugerindo uma diminuição gradual de q_t à medida que esses parâmetros aumentam. Como podemos ver na Fig. 70, este efeito é principalmente devido à razão entre os momentos L_* / L_{orb} . Descobrimos que os sistemas com apenas um planeta têm valores q_t preferencialmente menores do que aqueles com mais de um planeta. Sistemas com mais de um planeta removem mais momento angular da estrela hospedeira, fazendo com que o período de rotação aumente.

De acordo com a Fig. 73, sistemas com um único planeta exibem uma faixa de frequência de maré ω_{tide} mais estreita do que aqueles com vários planetas. Além disso, a linha

diagonal que separa os regimes observados na Fig. 72, estimada para $P_{orb} = P_{rot}$, mostra que sistemas com um ou mais planetas podem ocupá-los. Por outro lado, sistemas abaixo da linha horizontal para $q_t = 4$, onde a razão L_*/L_{orb} é menor que $1/3$, são preferencialmente dominados por sistemas com apenas um planeta. Esses sistemas normalmente envolvem estrelas que hospedam planetas com diferenças significativas entre seus períodos orbitais e de rotação.

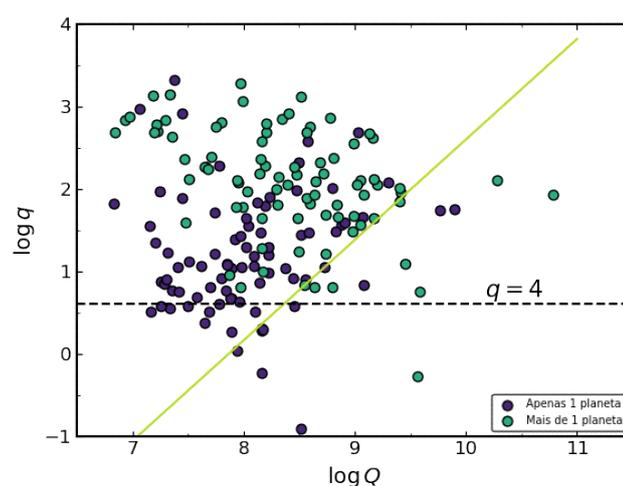
Figura 73 – Índice de interação de maré q_t em função do módulo da frequência de maré ω_{tide} considerando o dataset#01.



A linha tracejada denota o valor de $q_t = 4$, enquanto a linha diagonal foi estimada a partir do melhor ajuste linear que separa as duas populações de estrelas da condição $P_{orb} = P_{rot}$, conforme observado na Figura 69.

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 74 – Índice de interação de maré q_t em função do fator de qualidade dissipativo Q considerando o dataset#01.



A linha tracejada denota o valor de $q_t = 4$, enquanto a linha diagonal foi estimada a partir do melhor ajuste linear que separa as duas populações de estrelas da condição $P_{orb} = P_{rot}$, conforme observado na Figura 69.

Fonte: elaborada pelo autor.

O fator de qualidade Q é um parâmetro crucial na compreensão da dissipação de marés, pois considera a natureza e a eficiência da dissipação influenciada pela estrutura interna

e rotação da estrela. Neste contexto, o índice de marés q_t desempenha um papel significativo na diferenciação dos efeitos da dissipação de marés com base no tipo de sistema. Como pode ser visto na Fig. 74, a relação entre q_t e o fator Q mostra uma tendência semelhante, com um evidente espalhamento de valor atribuído à forte dependência do raio planetário.

8.2.5 O impacto na rotação estelar

Conforme discutido anteriormente, a presença de um planeta pode influenciar na taxa de rotação de sua estrela hospedeira. No entanto, as estrelas também sofrem torque devido ao vento magnetizado que as desacelera. Assim, os valores P_{rot} em nossa amostra são o resultado de uma combinação linear desses torques.

Considerando primeiro a influência do torque das marés, a transferência do momento angular entre o planeta e a estrela pode afetar a rotação estelar, especialmente no caso de um planeta espiralando para dentro (Yee *et al.*, 2020). Como nossa amostra possui um número significativo de planetas próximos com um período de rotação inferior a 10 dias, vários autores como Damiani e Lanza (2015a), Ferraz-Mello (2013), Ogilvie (2014), destacam que este tipo de planeta tem um efeito observável em suas estrelas hospedeiras devido aos torques das marés, influenciando tanto a órbita planetária quanto a rotação estelar. Se um planeta estiver dentro do raio de corotação, ele migrará para dentro, fazendo com que a estrela gire mais rápido. Com base nos dados da nossa amostra, a maioria dos planetas atendem a esta condição, como pode ser visto na Fig. 75.

Neste caso, o destino do sistema depende do momento angular orbital do planeta em comparação com o momento angular da estrela. Para a condição $L_*/L_{orb} \leq 1/3$ (ou seja, $\log(L_*/L_{orb}) \leq -0.48$, veja este valor de $1/3$ destacado na Fig. 70), o sistema atinge o equilíbrio com velocidades angulares sincronizadas (Ahuir *et al.*, 2021). Caso contrário, o planeta migra de forma muito eficiente e espirala em direção à sua estrela hospedeira até romper no limite de Roche (Hut, 1981). Neste contexto, de acordo com os painéis superiores da Fig. 70, nossa amostra está majoritariamente limitada aos valores de $L_*/L_{orb} \geq 1/3$. Consequentemente, usando a Eq. (8.1), os valores do índice q_t são em sua maioria maiores que 4. Isso significa que estrelas localizadas acima deste valor de q_t , parte do momento angular dos planetas é mais eficientemente dragado pela estrela aumentando seu período de rotação. Portanto, este valor de q_t é o valor de referência utilizado para demarcar o destino do sistema quando o planeta está a uma distância menor que o raio de corotação.

É importante destacar que tal condição é baseada na conservação do momento angular total, devendo ser considerados fatores como frenagem magnética e redistribuição do momento angular dentro da estrela, conforme apontado por Damiani e Lanza (2015a). Nossa amostra permite afirmar que os planetas têm um limite de Roche muito inferior ao valor do semieixo a . Assim, ela concentra a maioria dos planetas entre o limite de Roche e o raio de corotação (r_{cor}). No entanto, os nossos resultados baseados na Fig. 75 revelam que alguns

sistemas estão fora desta faixa e, portanto, uma migração para fora faz com que o planeta se afaste da estrela hospedeira, que então gira para baixo.

De acordo com as Eqs. (7.2) e (7.17), a lei que rege a evolução do período de rotação devido aos efeitos da interação das marés pode ser formulada da seguinte forma:

$$\left(\frac{P_{rot}}{P_0}\right)_{tidal} = \left[1 + (q_t - 1) \frac{t}{\tau_c}\right]^{\frac{1}{q_t-1}}, \forall (q_t \neq 1) \quad (8.2)$$

onde P_0 é o período de rotação estelar no tempo $t = 0$, P_{rot} é o período no tempo $t = t_{age}$, e q_t é o índice de marés expresso pela Eq. (7.17). Da mesma forma, a lei que rege a evolução do período de rotação para estrelas no regime insaturado devido aos efeitos do vento magnético é dada por:

$$\left(\frac{P_{rot}}{P_0}\right)_{wind} = \left[1 + (q_w - 1) \frac{t}{\tau_c}\right]^{\frac{1}{q_w-1}}, \forall (q_w \neq 1) \quad (8.3)$$

onde q_w é o índice de frenagem magnética (Freitas; de Medeiros, 2013).

De acordo com Picoli, Mendes e Malacarne (2003), para $q > 1$ e $t \gg \tau_c/(q - 1)$, as Eqs. (8.2) e (8.3) exibem comportamento assintótico da lei de potência dado pela expressão,

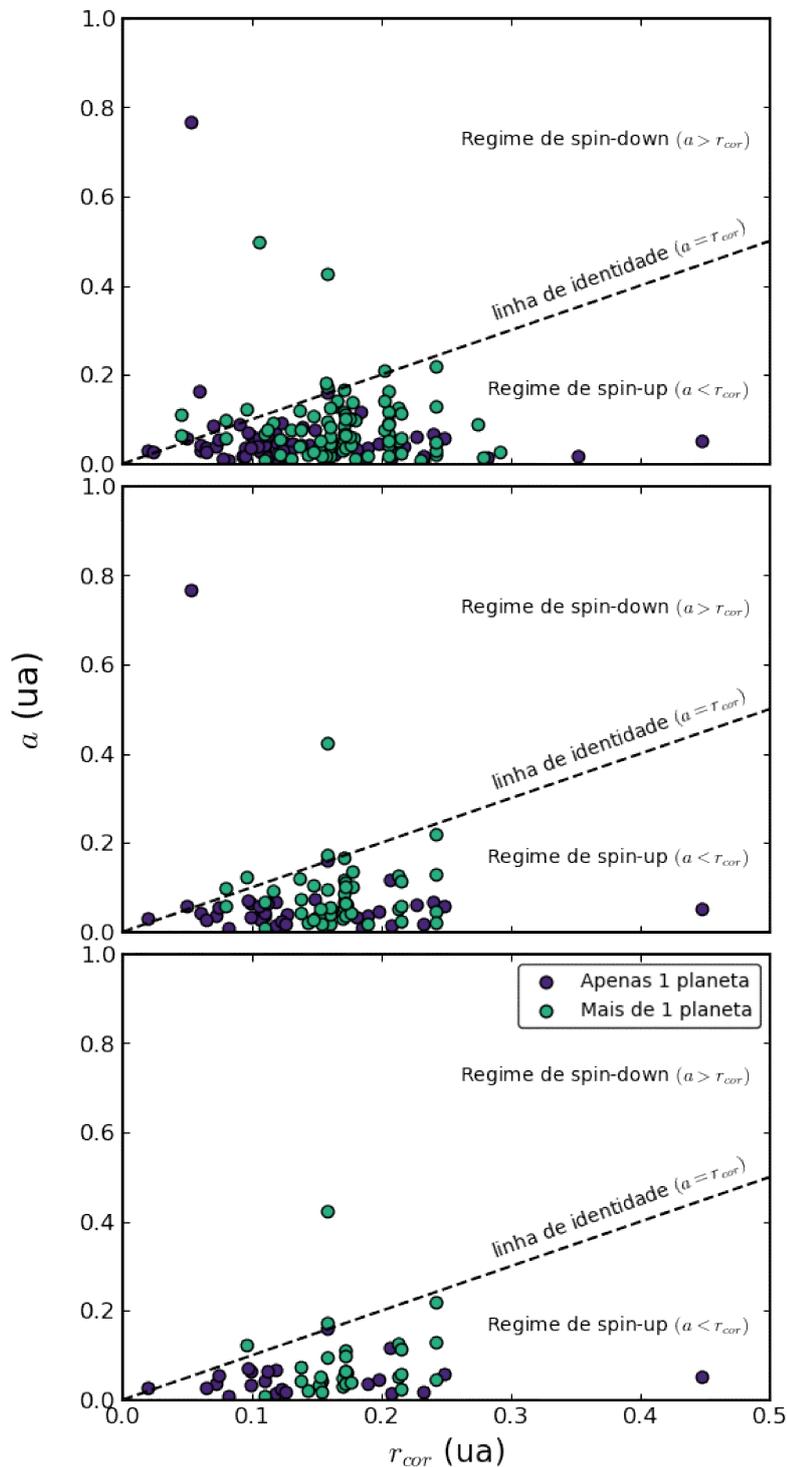
$$P_{rot} \sim At^{\frac{1}{q-1}}, \quad (8.4)$$

onde A pode ser uma função do índice de cores B-V conforme sugerido por Mamajek e Hillenbrand (2008). As relações período-idade de Mamajek e Hillenbrand (2008) (ver equações 12, 13 e 14 desse trabalho) podem ser substituídas a partir desta versão assintótica. Esta versão será útil para explicar o comportamento da rotação sob o efeito do torque magnético, como veremos na Fig. 76.

Na Fig. 76, mostramos as idades asterossísmicas modeladas em grade de Bonomo *et al.* (2023) plotadas em relação ao P_{rot} deste estudo. Esses três conjuntos de dados preenchem o diagrama período-idade de maneira consistente com a ruptura de Kraft. A dispersão dos valores demonstra que deve-se ter cuidado na interpretação dos períodos de rotação das estrelas em tal amostra. As curvas representam a versão assintótica obtida pela Eq. (8.3) da relação período-idade para massas médias correspondentes a 0,5, 1,0 e 1,2 M_\odot . Para essas massas, usamos os valores q_t típicos correspondentes a 5 (estrelas do tipo M), 3 (estrelas do tipo G) e 2 (estrelas do tipo F), com base nos trabalhos de Reiners e Mohanty (2012), Skumanich (1972) e Freitas e de Medeiros (2013), respectivamente. Estrelas dentro de cada faixa de massa que obedecem às relações girocronológicas deveriam cair entre essas duas curvas limitadas pelo índice B-V.

Nas relações empíricas da girocronologia, a rotação é normalmente tratada como uma função da cor (ou massa) e da idade. Como mostra a Figura 76, diferentes tipos espectrais no diagrama HR têm relações muito diferentes entre rotação e idade, como esperado da teoria da evolução estelar. Para ilustrar este ponto, realizamos um ajuste não linear da equação assintótica (8.4), onde P_{rot} é dado em dias e t em giga-anos. Para esclarecer, as barras de erro foram omitidas na Fig. 76. Os resultados do ajuste para toda a amostra de estrelas e para cada uma das faixas de massa estão resumidos na Tabela 6.

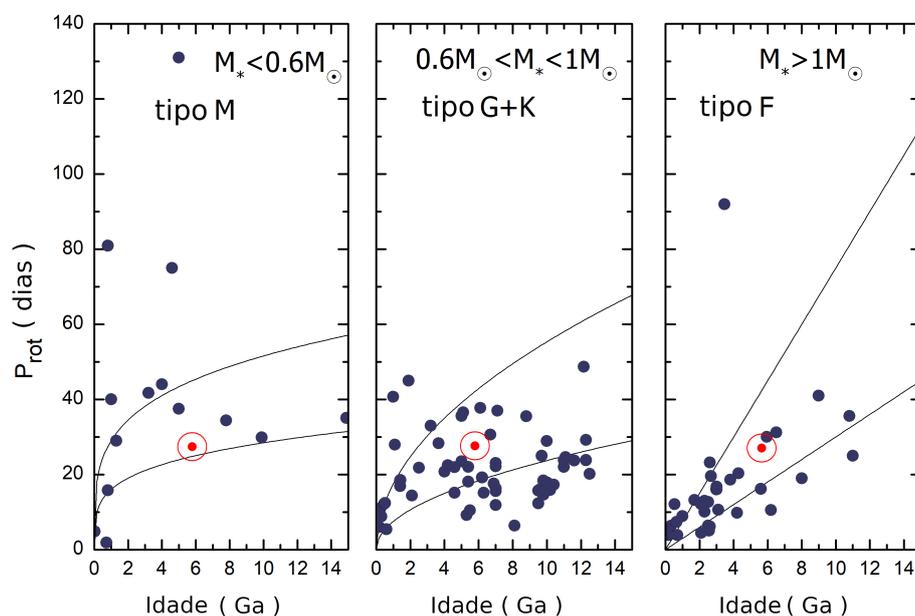
Figura 75 – Relação entre o semieixo maior e o raio de corotação nas três subamostras.



É possível distinguir dois regimes rotacionais, nomeadamente o regime de *spin-up* ($a < r_{cor}$) e o regime de *spin-down* ($a > r_{cor}$). Os valores de r_{cor} foram calculados usando a Eq. 8 do trabalho de Gallet *et al.* (2018). Em evidência nos conjuntos dataset#01 e dataset#02, TOI-4562 b (um planeta do tipo Júpiter orbitando uma jovem estrela do tipo F7V) é o planeta com maior excentricidade. A linha tracejada que separa esses regimes indica a região em que os planetas estão situados no raio de corotação r_{cor} . Os painéis superior, central e inferior representam a distribuição desses planetas nas subamostras dataset#01, dataset#02 e dataset#03, respectivamente. A maioria dos planetas possuem medidas de semieixo maior inferiores ao raio de corotação.

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 76 – Períodos de rotação em função de idades asterossísmicas modeladas em grade.



As estrelas foram divididas seguindo a segregação de massa estelar definida na Fig. 72, considerando apenas o dataset#01. As curvas pretas sólidas representam a versão assintótica obtida pela Eq. (8.4) em comparação com a relação período-idade de Mamajek e Hillenbrand (2008), traçadas para $B-V = 0,5$ e $B-V = 1,4$, correspondendo aos tipos espectrais F tardio a M inicial. As curvas usaram os valores de q típicos correspondentes a 5 (estrelas do tipo M), 3 (estrelas do tipo G) e 2 (estrelas do tipo F) com base nos trabalhos de Reiners e Mohanty (2012), Skumanich (1972) e Freitas e de Medeiros (2013), respectivamente. Destacada no painel à esquerda, a estrela com maior período de rotação é a estrela LHS 1140. A posição do Sol no diagrama é indicada pelo símbolo \odot .

Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 6 – Ajustes não lineares da Eq. (8.4) para o dataset#01 e os três intervalos de massa estelar. O número total de estrelas por amostra encontra-se na segunda coluna.

Amostra	#estrelas	A	q
Whole	142	22.69 ± 2.54	10.69 ± 2.70
M stars	22	43.20 ± 8.81	8.13 ± 1.90
G+K stars	78	11.90 ± 2.90	2.85 ± 0.80
F stars	42	9.15 ± 2.70	2.41 ± 0.50

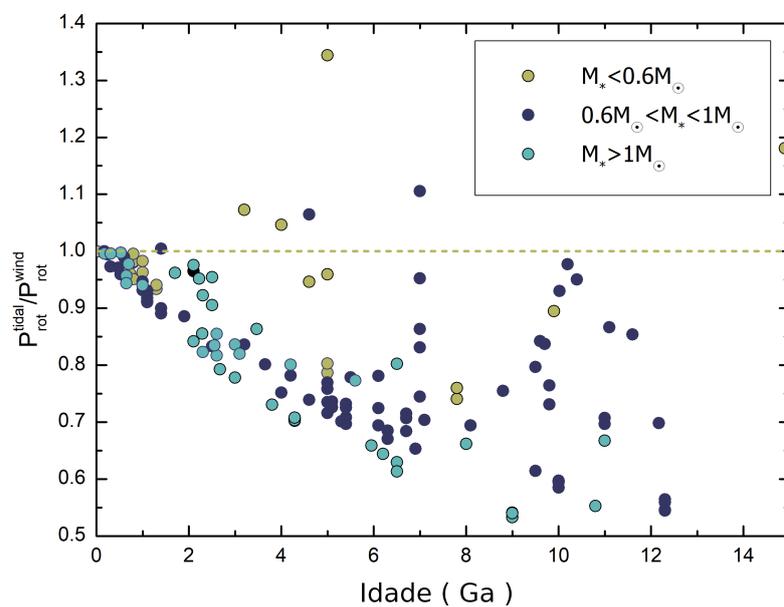
Fonte: elaborada pelo autor.

Como podemos ver na Tabela citada, os valores de q para estrelas com tipos espectrais de G a M correspondem aos valores esperados para estrelas que estão sob ação de frenagem magnética, exceto para o tipo espectral M, onde o valor de q difere significativamente daquele valor esperado $q = 5$. Na verdade, esta diferença na inclinação pode ser causada por vários fatores. Pode ser um reflexo da dependência da massa na rotação, efeitos de metalicidade, erros de idade relativamente grandes ou efeitos devidos à interação estrela-planeta através do torque das marés. Porém, como nossa amostra é composta por sistemas de multicorpos interagindo entre si, a inclinação provavelmente foi afetada por essa interação, gerando valores de q diferentes daqueles esperados quando a estrela não está sob a ação dos planetas. Nesse sentido, é necessário realizar uma análise mais detalhada e investigar o impacto da interação das marés sob a rotação da estrela hospedeira.

A Fig. 76 foi obtida usando a versão assintótica da Eq. (8.4) a fim de se destacar apenas o efeito combinado dos índices de marés de vento em função da idade estelar. Assim, a relação $P_{rot}^{tidal} / P_{rot}^{wind}$ mede o impacto do índice de marés q_t quando comparado com o índice pré-estabelecido índice de frenagem magnética de acordo com o tipo espectral. Como podemos ver, para estrelas abaixo da linha de identidade entre os períodos, a influência das marés aumenta gradualmente à medida que as estrelas envelhecem. Não encontramos uma distinção clara entre os diferentes tipos espectrais, mas para estrelas com menos de 1 Ga, há menos estrelas com massa intermediária.

Uma análise da Tabela 7 revela que das 167 estrelas no dataset#01, apenas 7 delas exibem $P_{rot}^{tidal} / P_{rot}^{wind}$ razão acima de 1, mostrando comportamento contrastante na Fig. 77. Entre estas 7 estrelas, o vento magnético tem um efeito mais pronunciado na rotação estelar do que as interações das marés. Por outro lado, as estrelas restantes experimentam um aumento na dinâmica rotacional devido a uma combinação de parâmetros delineados no índice de marés. Em contraste, as 7 estrelas com impacto de maré fraco têm valores de q_t inferiores a 3. Em contraste, as outras estrelas têm valores de q_t superiores a 4. Esta distinção destaca um limiar eficaz para avaliar o impacto rotacional dos exoplanetas. Consequentemente, nossas descobertas indicam que para sistemas planetários com índice de marés q_t acima de 4, a evolução rotacional de estrelas que hospedam planetas com $a < r_{cor}$ permanece amplamente afetada pela interação de marés. Este resultado implica que nos casos em que as estrelas retêm menos de 25% do momento angular total (com base na condição $L_*/L_{orb} \leq 1/3$), a frenagem magnética prova ser mais eficaz do que as interações de maré.

Figura 77 – Razão dos períodos rotacionais $P_{rot}^{tidal} / P_{rot}^{wind}$ em função da idade estelar.



As razões foram obtidas através da versão assintótica (ver Eq. 8.4) das Eqs. (8.2) e (8.3) segregadas por massa estelar, considerando apenas o dataset#01. A linha tracejada denota a identidade entre os períodos de rotação, ou seja, quando os índices q são iguais. Destacado no topo da figura, temos o sistema WASP-89 com a maior proporção $P_{rot}^{tidal} / P_{rot}^{wind}$. Fonte: elaborada pelo autor.

9 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O estudo do desvio do índice de frenagem magnética (seç. 8.1) demonstra que o parâmetro q_w pode ser utilizado para explicar o mecanismo que controla a rotação estelar nos regimes e estágios evolutivos analisados. Tal índice de frenagem magnética se mostrou sensível aos efeitos de *oblateness* que determinam a intensidade dos ventos magnéticos e refletiu a evolução rotacional das estrelas em diferentes classes de luminosidade.

Considerando o contexto do modelo que fora apresentado no Cap. 4, o enfraquecimento da frenagem magnética como a origem da rotação rápida anômala está refletido pelo aumento do espalhamento dos desvios a partir do regime de Skumanich e, portanto, associado à mudança no momento de inércia das estrelas. Esse desvio é impulsionado principalmente pela densidade estelar e pelo período de rotação para sistemas sem planetas. Tal fato implica que esse modelo apresentado pode ser utilizado para se evidenciar a transição de regimes rotacionais com ventos estelares fracamente magnetizados.

Ampliando a aplicabilidade da abordagem não extensiva para o estudo da rotação estelar, expandimos a nossa análise utilizando uma estatística não extensiva para as estrelas que hospedam planetas, investigando como o índice q pode ser utilizado, analogamente, para descrever, além dos parâmetros do dínamo estelar, a interação estrela-planeta.

Na Cap. 7, concentramos a nossa investigação da intrincada dinâmica dos sistemas estrela-planeta, enfatizando particularmente os impactos da interação das marés e da frenagem magnética na evolução da rotação estelar. O modelo proposto investiga como a rotação da estrela hospedeira influencia a estrutura do sistema e as interações subsequentes. Na seção 8.2, utilizando uma amostra de exoplanetas bem caracterizados, conforme descrito na seção 6.2, aplicamos tal modelo ao estudo do impacto dos parâmetros orbitais na rotação estelar e a subsequente troca de momento angular com os planetas. Ao introduzir um novo *índice de interação de maré* q_t , a pesquisa oferece uma nova abordagem para considerar, de forma abrangente, os vários parâmetros que afetam o transporte de momento angular dentro de sistemas estrela-planetas.

As descobertas revelam anticorrelações significativas entre o índice de marés tanto para a massa, quanto para o raio planetário, lançando luz sobre as intrincadas relações que governam a evolução da rotação estelar na presença de planetas. Em geral, para as nossas amostras, a evolução do período de rotação estelar é fortemente afetada pela presença de planetas, com exceções observadas em exoplanetas específicos acima do raio de corotação. Nesse sentido, o presente trabalho contribui para o avanço de modelos teóricos para a compreensão das complexas interações entre as órbitas planetárias e a rotação estelar.

Nossa principal descoberta diz respeito às implicações físicas da interação das marés no âmbito da dinâmica estrela-planeta na rotação estelar. Nosso estudo demonstra que, na maioria dos sistemas examinados, o impacto desta interação é reduzido para valores com $q < 4$ e, portanto, a evolução da rotação estelar é predominantemente impulsionada pelo vento estelar magnetizado, colocando a interação das marés em um papel secundário. Este resultado implica

que, nos casos em que as estrelas retêm menos de 25% do momento angular total, a frenagem magnética prova ser mais eficaz do que as interações de maré.

Concluimos que os índices de frenagem magnética e de interação de marés representados pelo índice entrópico q na estatística não extensiva de Tsallis revelam o caráter subaditivo dos fenômenos aqui investigados e são capazes de identificar a influência do estado evolutivo na rotação estelar e de indicar os casos em que a frenagem magnética e a interação de marés são fatores dominantes na evolução rotacional. Assim, a premissa da aplicabilidade da abordagem não extensiva ao estudo da evolução da rotação estelar considerando os estágios evolutivos analisados e as interações de maré se demonstra válida, permitindo uma nova interpretação desses fenômenos através de um parâmetro que consegue compactar vários outros, tais como: densidade estelar, períodos rotacional e orbital, bem como, excentricidade e os momentos angulares estelar e orbital.

Vale ressaltar que esta conclusão se limita a sistemas caracterizados por períodos orbitais mais curtos que o da Terra e que a inclusão de exoplanetas com períodos orbitais mais longos, como esperado com dados da missão PLATO, tem o potencial de ampliar o escopo desta investigação e revelar novos *insights* sobre as influências das marés na rotação estelar.

REFERÊNCIAS

AAVSO. *Variable types within main groups*. 2022. Disponível em: <https://www.aavso.org/vsx/index.php?view=about.vartypes>. Acesso em: 18 fev. 2022.

AHMAD, K. *et al.* New estimates for generalized Shannon and Zipf-Mandelbrot entropies via convexity results. *Results in Physics*, [s. l.], v. 18, p. 103305, set. 2020.

AHUIR, J.; BRUN, A. S.; STRUGAREK, A. From stellar coronae to gyrochronology: a theoretical and observational exploration. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 635, p. A170, 2020.

AHUIR, J. *et al.* Magnetic and tidal migration of close-in planets. influence of secular evolution on their population. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 650, p. A126, jun. 2021.

ALEXANDER, M. E. The weak friction approximation and tidal evolution in close binary systems. *Astrophysics and Space Science*, [s. l.], v. 23, n. 2, p. 459–510, maio 1973.

ALSUBAI, K. *et al.* Qatar exoplanet survey : Qatar-3b, Qatar-4b, and Qatar-5b. *The Astronomical Journal*, [s. l.], v. 153, n. 4, p. 200, abr. 2017.

ALVARADO-MONTES, J. A. *et al.* The impact of tidal friction evolution on the orbital decay of ultra-short-period planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 506, n. 2, p. 2247–2259, set. 2021.

AMARD, L.; MATT, S. P. Effects of accretion on the structure and rotation of forming stars. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 678, p. A7, 2023.

AMBASTHA, A. The active and explosive sun. In: ANTIA, H. M.; BHATNAGAR, A.; ULMSCHNEIDER, P. (Ed.). *Lectures on solar physics*. 1. ed. Germany: Springer, 2003.

ASCHWANDEN, M. J. New millennium solar physics. *Astrophysics and Space Science Library*, Switzerland, 2019.

ASCHWANDEN, M. J. *et al.* 25 years of self-organized criticality: solar and astrophysics. *Space Science Reviews*, [s. l.], v. 198, n. 1, p. 47, 2016.

BANNIKOVA, M. C. E. *Foundations of celestial mechanics*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 2022. (Graduate Texts in Physics).

BARKER, A. J.; OGILVIE, G. I. On the tidal evolution of Hot Jupiters on inclined orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 395, n. 4, p. 2268–2287, jun. 2009.

BARNES, R. *Formation and evolution of exoplanets*. 1. ed. [S. l.]: Wiley-VCH, 2010.

BARROS, S. C. C. *et al.* HD 23472: a multi-planetary system with three super-Earths and two potential super-Mercuries. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 665, p. A154, set. 2022.

BATISTA, L. F. G. *et al.* Hemispheric asymmetry in the sunspot cycle as a nonextensive phenomenon. *Solar Physics*, [s. l.], v. 298, n. 7, p. 84, Jul 2023.

BECK, P. *et al.* Fast core rotation in red-giant stars as revealed by gravity-dominated mixed modes. *Nature*, [s. l.], v. 481, p. 55–57, 2011.

BEN-NAIM, A. *Information theory: part i: an introduction to the fundamental concepts*. [S. l.]: World Scientific, 2017. ISBN 9789813208827; 9813208821.

BENBAKOURA, M. *et al.* Evolution of star-planet systems under magnetic braking and tidal interaction. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 621, p. A124, jan. 2019.

BENNETT, J. O. *et al.* *The cosmic perspective*. 7 ed.. ed. [S. l.]: Pearson Education, 2013. ISBN 9781292023304; 1292023309.

BERGER, T. E. *et al.* What are 'faculae'? In: SHIBATA, K.; NAGATA, S.; SAKURAI, T. (Ed.). *New solar physics with solar-B mission*. [S. l.: s. n.], 2007. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 369), p. 103.

BERGER, T. E.; VOORT, L. Rouppe van der; LÖFDAHL, M. Contrast analysis of solar faculae and magnetic bright points. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 661, n. 2, p. 1272–1288, jun. 2007.

BERTIN, E. Equilibrium statistical physics. In: *A Concise Introduction to the Statistical Physics of Complex Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 1–31.

BIAGIOLI, M. *Galileo's instruments of credit: telescopes, images, secrecy*. [S. l.]: University of Chicago Press, 2006. ISBN 9780226045610.

BOLMONT, E.; Mathis, S. Effect of the rotation and tidal dissipation history of stars on the evolution of close-in planets. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, [s. l.], v. 126, n. 1-3, p. 275–296, nov. 2016.

BONOMO, A. S. *et al.* The GAPS programme with HARPS-N at TNG . XIV. investigating giant planet migration history via improved eccentricity and mass determination for 231 transiting planets. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 602, p. A107, jun. 2017.

BONOMO, A. S. *et al.* Cold jupiters and improved masses in 38 Kepler and K2 small planet systems from 3661 HARPS-N radial velocities - no excess of cold jupiters in small planet systems. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 677, p. A33, 2023.

BONOMO, A. S. *et al.* A giant impact as the likely origin of different twins in the Kepler-107 exoplanet system. *Nature Astronomy*, [s. l.], v. 3, p. 416–423, fev. 2019.

BORUCKI, W. J. *et al.* Kepler planet-detection mission: introduction and first results. *Science*, [s. l.], v. 327, n. 5968, p. 977, fev. 2010.

BORUCKI, W. J. *et al.* Characteristics of planetary candidates bbserved by Kepler. II. analysis of the first four months of data. *The Astrophysical journal*, [s. l.], v. 736, n. 1, p. 19, jul. 2011.

BOUVIER, J. Rotation in pre-main sequence stars - properties and evolution. In: CATALANO, S.; STAUFFER, J. R. (Ed.). *Angular momentum evolution of young stars*. [S. l.: s. n.], 1991. v. 340, p. 41.

BOUVIER, J. Observational studies of stellar rotation. *European Astronomical Society Publications Series*, EDP Sciences, [s. l.], v. 62, p. 143–168, 2013.

BOYD, J. J. S. T. J. M. *The Physics of Plasmas*. [S. l.]: Cambridge University Press, 2003.

BRANDENBURG, A.; SUBRAMANIAN, K. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *Physics Reports*, [s. l.], v. 417, n. 1, p. 1–209, 2005. ISSN 0370-1573.

BUSETTI, F.; BEUST, H.; HARLEY, C. Stability of planets in triple star systems. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 619, p. A91, nov. 2018.

BUSHBY, P.; MASON, J. Understanding the solar dynamo. *Astronomy & Geophysics*, [s. l.], v. 45, n. 4, p. 4.7–4.13, 08 2004.

CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 2. ed. [S. l.]: Wiley & Sons, 1985.

CANCHO, R. Ferrer-i; VITEVITCH, M. S. The origins of Zipf's meaning-frequency law. *Journal of the Association for Information Science and Technology*, [s. l.], v. 69, n. 11, p. 1369–1379, 2018.

CARDOSO, J. V. d. M. *et al.* *Lightkurve: Kepler and TESS time series analysis in Python*. 2018. Disponível em: <https://ascl.net/>. Acesso em: 04 nov. 2021.

CARROLL, D. A. O. B. W. *An introduction to modern astrophysics*. 2. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781108422161; 1108422160.

CARUSO, F.; TSALLIS, C. Nonadditive entropy reconciles the area law in quantum systems with classical thermodynamics. *Phys. Rev. E*, [s. l.], v. 78, p. 021102, aug 2008.

CARVALHO, J. C. *et al.* Power law statistics and stellar rotational velocities in the pleiades. *Europhysics Letters*, [s. l.], v. 84, n. 5, p. 59001, dec 2008.

CASANOVAS, J. Early observations of sunspots: Scheiner and Galileo. In: SCHMIEDER, B.; INIESTA, J. C. del T.; VAZQUEZ, M. (Ed.). *First advances in solar physics Euroconference: advances in physics of sunspots*. [S. l.]: Astronomical Society of the Pacific, 1997. v. 118, p. 3–20.

CASQUILHO, J. P.; TEIXEIRA, P. I. C. *Introdução à física estatística*. 1a. ed. [S. l.]: Livraria da Física, 2012. ISBN 8429140255; 9788429140255.

CASTRO-GONZÁLEZ, A. *et al.* Signs of magnetic star-planet interactions in hd 118203 - tess detects stellar variability that matches the orbital period of a close-in eccentric jupiter-sized companion. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 684, p. A160, 2024.

CEILLIER, T. *et al.* Surface rotation of kepler red giant stars. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 605, p. A111, 2017.

CERNICHARO, J. The physical conditions of low mass star forming regions. In: BLITZ, L.; LADA, C. J.; KYLAFIS, N. D. (Ed.). *The physics of star formation and early stellar evolution*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 1991.

CHABOYER, B.; DEMARQUE, P.; PINSONNEAULT, M. H. Stellar models with microscopic diffusion and rotational mixing. I. application to the Sun. *Astrophysics Journal*, [s. l.], v. 441, p. 865, mar. 1995.

CHAISSON, E.; MCMILLAN, S. *Astronomy: a beginner's guide to the universe*. [S. l.]: Pearson Education, 2017.

CHANDRASEKHAR, S.; MÜNCH, G. On the integral equation governing the distribution of the true and the apparent rotational velocities of stars. *Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 111, p. 142, jan. 1950.

CHANDRASEKHAR, S.; ROBERTS, P. H. The ellipticity of a slowly rotating configuration. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 138, p. 801, out. 1963.

CHARBONNEAU, O. S. P. *Solar and stellar dynamos*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 2013. (Saas-Fee Advanced Course N. 39).

CHARBONNEAU, P. Dynamo models of the solar cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, [s. l.], v. 7, n. 1, p. 3, set. 2010.

CHARBONNEAU, P. Biography of Johann Fabricius. In: HOCKEY, T. *et al.* (Ed.). *Biographical Encyclopedia of Astronomers*. 2. ed. New York: Springer, 2014.

CHARBONNEAU, P. Solar dynamo theory. *Annu. Rev. Astron. Astrophys*, [s. l.], v. 52, p. 251–290, ago. 2014.

CHARBONNEAU, P.; MACGREGOR, K. B. On the generation of equipartition-strength magnetic fields by turbulent hydromagnetic dynamos. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 473, n. 1, p. L59, dec 1996.

CHARBONNEAU, P.; SOKOLOFF, D. Evolution of solar and stellar dynamo theory. *Space Science Reviews*, [s. l.], v. 219, n. 5, 2023.

CHEBLY, J. J.; ALVARADO-GÓMEZ, J. D.; POPPENHAEGER, K. Destination exoplanet: habitability conditions influenced by stellar winds properties. *Astronomische Nachrichten*, [s. l.], v. 343, n. 4, p. e10093, maio 2022.

CLARET, A. Updating the theoretical tidal evolution constants: apsidal motion and the moment of inertia. *A&A*, [s. l.], v. 628, p. A29, 2019.

COMINS, N. F.; KAUFMANN, W. J. *Discovering the Universe*. 10th. ed. [S. l.]: W. H. Freeman, 2014.

CORDEIRO, J. G. *Natureza multifractal da atividade magnética em estrelas tipo solar observadas pela missão Kepler*. 68 f. Tese (Mestrado em Física) — Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2018.

COROMINAS-MURTRA, B.; SOLÉ, R. V. Universality of Zipf's law. *Phys. Rev. E*, [s. l.], v. 82, p. 011102, Jul 2010.

DAMIANI, C.; LANZA, A. F. Evolution of angular-momentum-losing exoplanetary systems. In: EUROPEAN PLANETARY SCIENCE CONGRESS. *Anais...* Nantes, França: Europlanet, 2015.

DAMIANI, C.; LANZA, A. F. Evolution of angular-momentum-losing exoplanetary systems. revisiting Darwin stability. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 574, n. A39, p. 1–20, feb. 2015.

DANILOVIC, S.; SCHÜSSLER, M.; SOLANKI, S. K. Magnetic field intensification: comparison of 3D MHD simulations with hinode/sp results. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 509, p. A76, 2010.

DARWIN, G. H. VIII. the determination of the secular effects of tidal friction by a graphical method. *Proceedings of the Royal Society of London*, London, v. 29, n. 196-199, p. 168–181, dec 1879.

- DARWIN, G. H. On the secular changes in the elements of the orbit of a satellite revolving about a tidally distorted planet. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I*, London, v. 171, p. 713–891, jan. 1880.
- DAVIDSON, P. A. *Introduction to magnetohydrodynamics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 9781107160163; 1107160162.
- DEPPMAN, A. *et al.* Fractal structure and non-extensive statistics. *Entropy*, [s. l.], v. 20, n. 9, 2018. ISSN 1099-4300.
- DEWBERRY, J. W.; LAI, D. Dynamical tidal love numbers of rapidly rotating planets and stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 925, n. 2, p. 124, feb 2022.
- DUNHAM, M. M. *et al.* The evolution of protostars: insights from ten years of infrared surveys with Spitzer and Herschel. In: BEUTHER, H. *et al.* (Ed.). *Protostars and planets VI*. 1. ed. Arizona: University of Arizona Press, 2014. p. 195–218.
- EGGLETON, P.; KISELEVA, L.; HUT, P. The equilibrium tide model for tidal friction. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 499, p. 853–870, 1998.
- EGOLF, P.; HUTTER, K. Tsallis extended thermodynamics applied to 2-d turbulence: Lévy statistics and q-fractional generalized Kraichnianian energy and enstrophy spectra. *Entropy*, [s. l.], v. 20, n. 2, p. 109, fev. 2018.
- EKMAN, M. A concise history of the theories of tides, precession-nutation and polar motion (from antiquity to 1950). *Surveys in Geophysics*, [s. l.], v. 14, n. 6, 1993.
- EKSTRÖM, S. Stellar rotation. In: GARGAUD, M. *et al.* (Ed.). *Encyclopedia of Astrobiology*. 3. ed. [S. l.]: Springer, 2023. p. 2878–2880.
- ELIAZAR, I. *Power laws: a statistical trek*. [S. l.]: Springer, 2020. (Understanding Complex Systems). ISBN 3030332349; 9783030332341; 9783030332358; 3030332357.
- ENGVOLD, O.; ZIRKER, J. B. The parallel worlds of Christoph Scheiner and Galileo Galilei. *Journal for the History of Astronomy*, [s. l.], v. 47, n. 3, p. 332–345, 2016.
- ESA. *Exoplanet mission timeline*. 2021. Disponível em: <https://sci.esa.int/web/exoplanets/-/60649-exoplanet-mission-timeline>. Acesso em: 02 jun. 2021.
- ESQUIVEL, A.; LAZARIAN, A. Tsallis statistics as a tool for studying interstellar turbulence. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 710, n. 1, p. 125, jan 2010.
- FELLAY, L. *et al.* Constraints on planetary tidal dissipation from a detailed study of kepler 91b. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 669, p. A2, 2023.
- FERRAZ-MELLO, S. Tidal synchronization of close-in satellites and exoplanets. a rheophysical approach. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, [s. l.], v. 116, p. 109–140, 2013.
- FERRAZ-MELLO, S.; RODRÍGUEZ, A.; HUSSMANN, H. Tidal friction in close-in satellites and exoplanets: The Darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, [s. l.], v. 101, n. 1-2, p. 171–201, maio 2008.
- FERREIRA, J. Braking down an accreting protostar: disc-locking, disc winds, stellar winds, x-winds and magnetospheric ejecta. *EAS Publications Series*, [s. l.], v. 62, p. 169–225, 2013.

FILHO, K. de Souza de O.; SARAIVA, M. de F. O. *Astronomia e astrofísica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. 37 p.

FITZPATRICK, R. *An introduction to celestial mechanics*. 1 ed.. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2012.

FITZPATRICK, R. *Plasma physics: an introduction*. 2. ed. [S. l.]: CRC Press, 2022.

FOSMIRE, M. Vogel, Hermann Carl. In: HOCKEY, T. et al. (Ed.). *Biographical encyclopedia of astronomers*. 2. ed. New York: Springer, 2014. ISBN 9781441999160; 1441999167; 9781441999177; 1441999175.

FREITAS, D. B. de. Stellar age dependence of the nonextensive magnetic braking index: A test for the open cluster α per. *Europhysics Letters*, [s. l.], v. 135, n. 1, p. 19001, 2021.

FREITAS, D. B. de; CAVALCANTE, F. J.; SANTIAGO, T. M. Measuring deviation from skumanich braking index in active stars observed by kepler mission. *Europhysics Letters*, [s. l.], v. 140, n. 2, p. 29001, oct. 2022.

FREITAS, D. B. de et al. A nonextensive view of the stellar braking indices. *EPL (Europhysics Letters)*, [s. l.], v. 111, n. 3, p. 39003, ago. 2015.

FREITAS, D. B. de; DE MEDEIROS, J. R. A non-extensive approach to the stellar rotational evolution— I. F- and G-type stars. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 433, n. 3, p. 1789–1795, 2013.

FREITAS, D. B. de et al. New suns in the cosmos? *The Astrophysical Journal Letters*, [s. l.], v. 773, n. 2, p. L18, jul 2013.

FREITAS, D. B. de et al. New suns in the cosmos. III. multifractal signature analysis. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 831, n. 1, p. 87, nov. 2016.

FREITAS, D. B. de et al. Strong evidences for a nonextensive behavior of the rotation period in open clusters. *Europhysics Letters*, [s. l.], v. 108, n. 3, p. 39001, nov. 2014.

FREITAS, D. B. de et al. New suns in the cosmos. IV. the multifractal nature of stellar magnetic activity in kepler cool stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 843, n. 2, p. 103, jul. 2017.

GAIDOS, E. et al. They are small worlds after all: revised properties of Kepler M dwarf stars and their planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 457, n. 3, p. 2877–2899, abr. 2016.

GAIDOS, E. et al. VizieR online data datalog: Kepler M dwarf stars revised properties (Gaidos+, 2016). *VizieR Online Data Catalog*, [s. l.], p. J/MNRAS/457/2877, nov. 2018.

GALARZA, J. Y. et al. Evidence of rocky planet engulfment in the wide binary system HIP 71726/HIP 71737. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 922, n. 2, p. 129, dez. 2021.

GALILEI, G. Galileu a Maffeo Barberini in Bologna. In: BRUNETTI, F. (Ed.). *Opere di Galileo Galilei*. Firenze: Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1964. v. 1.

GALILEI, G. *Le opere. Volume XI. Carteggio 1611-1613*. 1. ed. Firenze, Barbera: Nuova ristampa della Edizione Nazionale sotto l'alto Patronato del Presidente della Repubblica Italiana Antonio Segni, 1964.

GALILEI, G. Galileu Galilei: Carta a Cristina de Lorena. Tradução: Carlos Arthur Ribeiro do Nascimento. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, [s. l.], v. 5, p. 91–123, 1983.

GALILEI, G. *Sidereus Nuncius*: O mensageiro das estrelas. Tradução: Henrique Leitão. 3. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

GALILEI, G.; SCHEINER, C. *On sunspots*. Chicago: The University Of Chicago Press, 2010.

GALLET, F. *et al.* Planetary tidal interactions and the rotational evolution of low-mass stars. The Pleiades' anomaly. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 619, p. A80, nov. 2018.

GALLET, F. *et al.* Tidal dissipation in rotating low-mass stars and implications for the orbital evolution of close-in planets. I. from the PMS to the RGB at solar metallicity. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 604, p. A112, ago. 2017.

GALLET, F.; ZANNI, C.; AMARD, L. Rotational evolution of solar-type protostars during the star-disk interaction phase. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 632, p. A6, 2019.

GERSHBERG, S. K. R. E. *Solar-type activity in main-sequence stars*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 2005. ISBN 9783540212447; 3540212442.

GHOSH, P.; LAMB, F. K. Disk accretion by magnetic neutron stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 223, p. L83–L87, jul. 1978.

GIBSON, E. G. *The quiet sun*. [S. l.]: National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical Information Office, 1973. v. 303.

GLEBOCKI, R.; GNACINSKI, P. VizieR online data catalog: catalog of stellar rotational velocities (Glebocki+ 2005). *VizieR Online Data Catalog*, [s. l.], p. III/244, mar. 2005.

GOEDBLOED, S. P. J. P. H. *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. [S. l.]: Cambridge University Press, 2004.

GOLDSTEIN, S. *et al.* Gibbs and boltzmann entropy in classical and quantum mechanics. In: ALLORI, V. (Ed.). *Statistical mechanics and scientific explanation*. New Jersey: World Scientific, 2020. cap. 14, p. 519–581.

GOMES, G. O.; FERRAZ-MELLO, S. Tidal evolution of exoplanetary systems hosting potentially habitable exoplanets. The cases of LHS-1140 b-c and K2-18 b-c. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 494, n. 4, p. 5082–5090, 04 2020.

GOSSAGE, S. *Next Generation Stellar Models with Rotation*. Tese (Doutorado) — Harvard University, Massachusetts, jan. 2021.

GRANT, E. Aristotelianism and the longevity of the medieval world view. *History of Science*, [s. l.], v. 16, p. 93–106, jan. 1978.

GRAY, D. F. *The observation and analysis of stellar photospheres*. 3. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2005.

GURUMATH, S. R.; HIREMATH, K. M.; RAMASUBRAMANIAN, V. Angular momentum of stars and their planets. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, [s. l.], v. 131, n. 995, p. 014401, jan. 2019.

HADDAD, W. M. Thermodynamics: the unique universal science. *Entropy*, [s. l.], v. 19, n. 11, 2017. ISSN 1099-4300.

HALE, G. E.; NICHOLSON, S. B. The law of sun-spot polarity. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 62, p. 270, nov. 1925.

HANSEN, B. M. S. Calibration of equilibrium tide theory for extrasolar planet systems. II. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 757, n. 1, p. 6, set. 2012.

HANSTEEN, V. H. The solar atmosphere. In: SCHRIJVER, C.; SISCOE, G. (Ed.). *Heliophysics: plasma physics of the local cosmos*. 1. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521110617; 0521110610.

HAO. *Famous Solar-Stellar Scientists*. 2023. Disponível em: <https://www2.hao.ucar.edu/education/scientists/johannes-fabricius-1587-1616>. Acesso em: 16 dez. 2023.

HAO. *Famous Solar-Stellar Scientists*. 2023. Disponível em: <https://www2.hao.ucar.edu/education/scientists/christoph-scheiner-1575-1650>. Acesso em: 16 dez. 2023.

HARRISON, K. M. *Astronomical spectroscopy for amateurs*. 1. ed. New York: Springer, 2011. (The Patrick Moore Practical Astronomy Series). ISBN 1441972382; 9781441972385; 9781441972392; 1441972390.

HARTMAN, J. D.; BAKOS, G. A. VARTOOLS: a program for analyzing astronomical time-series data. *Astronomy and Computing*, [s. l.], v. 17, p. 1–72, out. 2016.

HARTMANN, L.; CASSEN, P.; KENYON, S. J. Disk Accretion and the Stellar Birthline. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 475, n. 2, p. 770–785, fev. 1997.

HATHAWAY, D. H. The solar cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, [s. l.], v. 12, n. 1, p. 4, 2015.

HAY, K. L. *et al.* WASP-92b, WASP-93b and WASP-118b: three new transiting close-in giant planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 463, n. 3, p. 3276–3289, dez. 2016.

HEARNSHAW, J. *Astronomical spectrographs and their history*. [S. l.]: CUP, 2009. ISBN 0521882575; 9780521882576.

HEARNSHAW, J. B. *The analysis of starlight: two centuries of astronomical spectroscopy*. 2. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 9781107031746; 1107031745.

HELDEN, A. V. The invention of the telescope. *Transactions of the American Philosophical Society*, Pennsylvania, v. 67, n. 4, p. 1–67, 1977.

HELLARD, H. *et al.* Retrieval of the fluid Love number k_2 in exoplanetary transit curves. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 878, n. 2, p. 119, jun. 2019.

HELLIER, C. *et al.* Three WASP-south transiting exoplanets: WASP-74b, WASP-83b, and WASP-89b. *The Astronomical Journal*, [s. l.], v. 150, n. 1, p. 18, jul. 2015.

HIREMATH, K. M. Seismology of the sun: inference of thermal, dynamic and magnetic field structures of the interior. In: MOHAN, M. (Ed.). *New Trends in Atomic and Molecular Physics*. [S. l.]: Springer, 2013. p. 317–341.

HIREMATH, K. M. Reconstruction of thermal and magnetic field structure of the solar subsurface through helioseismology. In: ROZELOT, J.-P.; NEINER, C. (Ed.). *Lecture notes in physics*. [S. l.]: Springer Verlag, 2016. v. 914, p. 69.

HIRZBERGER, J.; WIEHR, E. Solar limb faculae. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 438, n. 3, p. 1059–1065, 2005.

HOFMANN-WELLENHOF, H. M. B. *Physical Geodesy*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 2005.

HOLMBERG, J.; NORDSTRÖM, B.; ANDERSEN, J. The Geneva-Copenhagen survey of the Solar neighbourhood II. new uvby calibrations and rediscussion of stellar ages, the G dwarf problem, age-metallicity diagram, and heating mechanisms of the disk. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 475, n. 2, p. 519–537, nov. 2007.

HOWE, R. Solar interior rotation and its variation. *Living Reviews in Solar Physics*, [s. l.], v. 6, n. 1, p. 1, nov. 2009.

HURLEY, J. R.; TOUT, C. A.; POLS, O. R. Evolution of binary stars and the effect of tides on binary populations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 329, n. 4, p. 897–928, 02 2002.

HUT, P. Stability of tidal equilibrium. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 92, n. 1-2, p. 167–170, dez. 1980.

HUT, P. Tidal evolution in close binary systems. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 99, p. 126–140, jun. 1981.

ILISIE, V. *Lectures in classical mechanics: with solved problems and exercises*. Switzerland: Springer, 2020.

IRELAND, L. G.; MATT, S. P.; ZANNI, C. Magnetic braking of accreting T Tauri stars ii: torque formulation spanning spin-up and spin-down regimes. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 929, n. 1, p. 65, apr 2022.

IVANOVA, N.; TAAM, R. E. Magnetic braking revisited. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 599, n. 1, p. 516, dec 2003.

JARDINE, M.; UNRUH, Y. C. Coronal emission and dynamo saturation. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 346, p. 883–891, jun. 1999.

JIANG, J. H. *et al.* Angular Momentum Distributions for Observed and Modeled Exoplanetary Systems. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 924, n. 2, p. 118, jan. 2022.

JOHNSTONE, C. P. *et al.* Classical T Tauri stars: magnetic fields, coronae and star–disc interactions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 437, n. 4, p. 3202–3220, 12 2013.

KAFRI, O. A comment on nonextensive statistical mechanics. *Journal of Economics Library*, [s. l.], v. 3, n. 4, p. 583–586, 2016.

KANIADAKIS, G.; LISSIA, M.; SCARFONE, A. Deformed logarithms and entropies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 340, n. 1, p. 41–49, 2004.

KARIM, M. T. *et al.* The rotation period distributions of 4–10 myr T Tauri stars in orion ob1: new constraints on pre-main-sequence angular momentum evolution. *The Astronomical Journal*, [s. l.], v. 152, n. 6, p. 198, dec 2016.

KAULA, W. Celestial geodesy. In: LANDSBERG, H.; Van Mieghem, J. (Ed.). *Advances in Geophysics*. [S. l.]: Elsevier, 1962. v. 9, p. 191–293.

KAWALER, S. D. Angular momentum loss in low-mass stars. *Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 333, p. 236, out. 1988.

KELLER, C. U. *et al.* On the origin of solar faculae. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 607, n. 1, p. L59–L62, maio 2004.

KEPLER, J. *New Astronomy*. [S. l.]: Cambridge University Press, 1992. ISBN 0521301319; 9780521301312.

KEPPENS, R.; MACGREGOR, K. B.; CHARBONNEAU, P. On the evolution of rotational velocity distributions for solar-type stars. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 294, p. 469–487, fev. 1995.

KIPPENHAHN, R.; WEIGERT, A.; WEISS, A. *Stellar structure and evolution*. 2. ed. Berlim: Springer, 2012.

KLEVS, M.; STEFANI, F.; JOUVE, L. A synchronized two-dimensional α - Ω model of the solar dynamo. *Solar Physics*, [s. l.], v. 298, n. 7, p. 90, jul. 2023.

KOENIGL, A. Disk accretion onto magnetic T Tauri Stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 370, p. L39, mar. 1991.

KOPAL, Z. *Dynamics of close binary systems*. [S. l.]: Springer Dordrecht, 1978.

KOUVATSOS, D. D.; ASSI, S. A. On the analysis of queues with heavy tails: a non-extensive maximum entropy formalism and a generalisation of the zipf-mandelbrot distribution. In: HUMMEL, K. A.; HLAVACS, H.; GANSTERER, W. (Ed.). *Performance evaluation of computer and communication systems. Milestones and future challenges: IFIP WG 6.3/7.3 international workshop, PERFORM 2010, in Honor of Günter Haring on the Occasion of His Emeritus Celebration, Vienna, Austria, October 14-16, 2010, Revised Selected Papers*. Vienna, Austria: Springer, 2011. p. 99–111.

KRAFT, R. P. Studies of stellar rotation. V. the dependence of rotation on age among solar-type stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 150, p. 551, nov. 1967.

KRAMM, U. *et al.* On the degeneracy of the tidal Love number k_2 in multi-layer planetary models: application to Saturn and GJ 436b. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 528, p. A18, abr. 2011.

KRISHNAMURTHI, A. *et al.* Theoretical models of the angular momentum evolution of solar-type stars. *Astrophysics Journal*, [s. l.], v. 480, n. 1, p. 303–323, 1997.

LADA, C. J. The formation of low mass stars: observations. In: BLITZ, L.; LADA, C. J.; KYLAFIS, N. D. (Ed.). *The Physics of star formation and early stellar Evolution*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 1991, (Nato Science Series C: n. 342).

LAI, D. Dynamical tides in rotating binary stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 490, n. 2, p. 847, dec 1997.

LAMERS, H. J. G. L. M.; CASSINELLI, J. P. *Introduction to stellar winds*. [S. l.]: Cambridge University Press, 1997.

LANDIN, N. R.; MENDES, L. T. S.; VAZ, L. P. R. Combined effects of tidal and rotational distortions on the equilibrium configuration of low-mass, pre-main sequence stars*. *A&A*, [s. l.], v. 494, n. 1, p. 209–227, 2009.

LANZA, A. Imaging surface spots from space-borne photometry. In: ROZELOT, J.-P.; NEINER, C. (Ed.). *Cartography of the sun and the stars*. [S. l.]: Springer International Publishing, 2016. v. 914, cap. 03, p. 43–68.

LANZA, A. F. Hot Jupiters and the evolution of stellar angular momentum. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 512, p. A77, mar. 2010.

LANZA, A. F. The role of interactions between stars and their planets. In: BIAZZO, K. *et al.* (Ed.). *Demographics of exoplanetary systems, lecture notes of the 3rd advanced school on exoplanetary science*. Switzerland: Springer, 2022. p. 85–140.

LANZA, A. F.; DAMIANI, C.; GANDOLFI, D. Constraining tidal dissipation in F-type main-sequence stars: the case of corot-11. *A&A*, [s. l.], v. 529, p. A50, 2011.

LANZA, A. F.; FERRAZ-MELLO, S.; TEAM, C. III.9 Star-planet interactions. In: BAGLIN, A. (Ed.). *The CoRoT Legacy Book*. [s. l.]: EDP Open, 2016. p. 161.

LARSON, K. A. *et al.* Kepler mission operations response to wheel anomalies. In: SPACEOPS 2014 CONFERENCE. *Anais...* Pasadena, CA: AIAA, 2014.

LECAR, M.; WHEELER, J. C.; MCKEE, C. F. Tidal circulation of the binary X-ray sources Hercules X-1 and Centaurus X-3. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 205, p. 556–562, abr. 1976.

LEIDI, G. *et al.* Turbulent dynamo action and its effects on the mixing at the convective boundary of an idealized oxygen-burning shell. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 679, p. A132, 2023.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002. v. 1.

LEVIN, Y. *et al.* Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions. *Physics Reports*, [s. l.], v. 535, n. 1, p. 1–60, 2014.

LISSAUER, J. J.; PATER, I. de. *Fundamental planetary science: physics, chemistry and habitability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

LITES, B. *et al.* Three-dimensional structure of the active region photosphere as revealed by high angular resolution. *Solar Physics*, [s. l.], v. 221, n. 1, p. 65–84, 2004.

LOMB, N. R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, [s. l.], v. 39, n. 2, p. 447–462, fev. 1976.

LOVE, A. E. H. Earth, the yielding of the, to disturbing forces. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 69, p. 476, abr. 1909.

LOWRIE, W. *A student's guide to geophysical equations*. 1. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2011.

LUO, J. *et al.* Quantifying the key factors affecting the escape of planetary atmospheres. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 951, n. 2, p. 136, jul. 2023.

LYRA, M. L. *et al.* Generalized zipf's law in proportional voting processes. *Europhysics Letters*, [s. l.], v. 62, n. 1, p. 131, apr. 2003.

MACHADO, K. D. *Teoria do eletromagnetismo*. 1. ed. [S. l.]: Editora UEPG, 2002. II.

MACHADO, L. J. R.; LAGO, M.; LIMA, J. J. G. Rotation of T Tauri stars revisited. In: LAGO, M. T. V. T.; BLANCHARD, A. (Ed.). *The non-sleeping universe: proceedings of two conferences on: Stars and the ISM* held from 24–26 november 1997 and on: 'From Galaxies to the Horizon' held from 27–29 november, 1997 at the Centre for Astrophysics of the University of Porto, Portugal. 1. ed. [s. l.]: Springer, 1999.

MACIEL, W. J. *Hidrodinâmica e ventos estelares: uma introdução*. 1. ed. São Paulo: Edusp, 2005.

MACIEL, W. J. *Introdução à estrutura e evolução estelar*. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo (EDUSP), 2018.

MAEDER, A. *Physics, formation and evolution of rotating stars*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 2009.

MAMAJEK, E. E.; HILLENBRAND, L. A. Improved age estimation for solar-type dwarfs using activity-rotation diagnostics. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 687, n. 2, p. 1264–1293, nov. 2008.

MARTINS, B. L. C. *et al.* A search for rotation periods in 1000 TESS objects of interest. *American Astronomical Society*, [s. l.], v. 250, n. 1, p. 20, sep. 2020.

MARTINS, B. L. C. *et al.* On the behaviour of spin-orbit connection of exoplanets. *Nature Astronomy*, [s. l.], v. 7, p. 900–904, ago. 2023.

MAST. *TESS Light Curves From Full Frame Images*. 2021. Disponível em: <https://archive.stsci.edu/>. Acesso em: 04 nov. 2021.

MASZCZYK, T.; DUCH, W. Comparison of Shannon, Renyi and Tsallis entropy used in decision trees. In: RUTKOWSKI, L. *et al.* (Ed.). *Artificial Intelligence and Soft Computing – ICAISC 2008*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 643–651. ISBN 978-3-540-69731-2.

MATHIEU, R. D. The rotation of low-aass pre-main-sequence Stars (Invited Review). In: MAEDER, A.; EENENS, P. (Ed.). *Stellar Rotation*. [S. l.: s. n.], 2004. v. 215, p. 113.

MATHUR, S. *et al.* Revised stellar properties of Kepler targets for the Q1-17 (DR25) transit detection run. *Astrophysical Journal Supplement Series*, [s. l.], v. 229, n. 2, p. 30, abr. 2017.

MATT, S.; PUDRITZ, R. Understanding the spins of young stars. In: BELLE, G. van (Ed.). *14th Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun*. [S. l.: s. n.], 2008. v. 384, p. 339.

MATT, S.; PUDRITZ, R. E. The spin of accreting stars: dependence on magnetic coupling to the disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 356, n. 1, p. 167–182, jan. 2005.

MATT, S. P. *et al.* Spin evolution of accreting young stars. i. effect of magnetic star–disk coupling. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 714, n. 2, p. 989, apr 2010.

MATT, S. P.; UNIVERSITY, R. E. P. M.; CANADA. The spin history of protostars: disk locking, revisited. *Revista Mexicana De Astronomia Y Astrofisica*, [s. l.], v. 22, p. 69–72, 2004.

MAYOR, M.; MERMILLIOD, J. C. Rotational velocities of stars in open clusters: the time-dependence revisited. In: CATALANO, S.; STAUFFER, J. R. (Ed.). *Angular momentum evolution of young stars*. [S. l.: s. n.], 1991. v. 340, p. 143.

MAYOR, M.; QUELOZ, D. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, [s. l.], v. 378, n. 6555, p. 355–359, 1995.

MCQUILLAN, A.; AIGRAIN, S.; MAZEH, T. Measuring the rotation period distribution of field M dwarfs with Kepler. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 432, n. 2, p. 1203–1216, apr 2013.

MESTEL, L. Magnetic braking by a stellar wind-I. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 138, p. 359, jan. 1968.

MESTEL, L. Angular momentum loss during pre-main sequence contraction. In: BALIUNAS, S. L.; HARTMANN, L. (Ed.). *Cool stars, stellar systems, and the sun: proceedings of the third cambridge workshop on cool stars, stellar systems, and the sun, held in cambridge, massachusetts, october 5-7, 1983*. [S. l.]: Springer, 1984. v. 193, p. 49–59.

MESTEL, L. *Stellar magnetism*. [S. l.]: Cambridge University Press, 2012.

MESTEL, L.; SPRUIT, H. C. On magnetic braking of late-type stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 226, n. 1, p. 57–66, 05 1987.

MEYER-VERNET, N. *Basics of the solar wind*. 1. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2007.

MICHALOWICZ, J. V.; NICHOLS, J. M.; BUCHOLTZ, F. *Handbook of differential entropy*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2013.

MIGNARD, F. The evolution of the lunar orbit revisited. I. *Moon and Planets*, [s. l.], v. 20, n. 3, p. 301–315, maio 1979.

MIT. *TESS observations*. 2022. Disponível em: <https://tess.mit.edu/observations/>. Acesso em: 18 janeiro 2022.

MITCHELL, W. M. The history of the discovery of the solar spots. *Popular Astronomy*, [s. l.], v. 24, p. 206, jan. 1916.

MORDASINI, C. *et al.* Giant planet formation by core accretion. In: FISCHER, D. *et al.* (Ed.). *Extreme solar systems*. [S. l.: s. n.], 2008. v. 398, p. 235.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de séries temporais*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

- MULLAN, D. J. *Physics of the Sun: a first course*. 1 ed. ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2009.
- MUNK, W.; MACDONALD, G. *The rotation of the Earth: a geophysical discussion*. [S. l.]: University Press, 1960.
- MURRAY, S. F. D. C. D. *Solar System Dynamics*. 1. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 1999.
- NASA. *Solar dynamics observatory*. 2020. Disponível em: <https://sdo.gsfc.nasa.gov/data/>. Acesso em: 04 jun. 2020.
- NASA. *Mission objectives: launch and orbit*. 2021. Disponível em: <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/tess/objectives.html>. Acesso em: 02 jun. 2021.
- NASA. *Mysteries of the sun*. 2021. Disponível em: https://www.nasa.gov/pdf/637244main_MysteriesOfTheSun_Book.pdf. Acesso em: 19 out. 2021.
- NASA. *The telescope: about the Hubble Space Telescope*. 2021. Disponível em: <https://hubblesite.org/mission-and-telescope/the-telescope>. Acesso em: 02 jun. 2021.
- NASA. 2023. Disponível em: <https://soho.nascom.nasa.gov/gallery/images/superprom.html>. Acesso em: 02 jun. 2023.
- NASA. *The solar dynamo: plasma flows*. 2023. Disponível em: <https://svs.gsfc.nasa.gov/3496>. Acesso em: 16 dez. 2023.
- NASA. *Exoplanet and Candidate Statistics*. 2024. Disponível em: https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/counts_detail.html. Acesso em: 14 mar. 2024.
- NASA. *Exoplanet Plots*. 2024. Disponível em: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots/>. Acesso em: 14 mar. 2024.
- NASA. *Eyes on exoplanets*. 2024. Disponível em: <https://eyes.nasa.gov/apps/exo/#/>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- NASA. *Kepler/K2 missions*. 2024. Disponível em: <https://science.nasa.gov/mission/kepler/in-depth/>. Acesso em: 14 de mar. 2024.
- NASA. *Planetary Systems*. 2024. Disponível em: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html>. Acesso em: 14 mar. 2024.
- NATURE. *Moon mapper, Sun spotter: the astonishing Thomas Harriot*. 2023. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/d41586-019-01174-x>. Acesso em: 16 dez. 2023.
- NMM. *Portrait of Galileo Galilei*. 2023. Disponível em: <https://www.rmg.co.uk/collections/objects/rmgc-object-14173>. Acesso em: 16 dez. 2023.
- NUSSENZVEIG, H. M. Introdução à complexidade. In: NUSSENZVEIG, H. M. (Ed.). *Complexidade & Caos*. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 1–30.
- OETJENS, A. *et al.* The influence of planetary engulfment on stellar rotation in metal-poor main-sequence stars. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 643, p. A34, nov. 2020.

OGILVIE, G. I. Tidal dissipation in stars and giant planets. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, [s. l.], v. 52, p. 171–210, ago. 2014.

OGILVIE, G. I.; LIN, D. N. C. Tidal dissipation in rotating solar-type stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 661, n. 2, p. 1180–1191, jun. 2007.

OLIVEIRA, D. M. Uma andorinha só não faz verão: 160 anos do legado de Richard Carrington. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, [s. l.], v. 42, 2020.

OLIVEIRA, D. S.; GALVÃO, R. M. O. *Non-Extensive Transport Equations in Magnetized Plasmas*. 2018.

ONLINE, S. S. A. *Formation of stars*. 2024. Disponível em: <http://astronomy.swin.edu.au/sao/downloads/HET620-M09A01.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2024.

OURABAH, K. Generalized statistical mechanics of stellar systems. *Phys. Rev. E*, [s. l.], v. 105, p. 064108, jun 2022.

PAPA, A. R. R. On one-parameter-dependent generalizations of boltzmann-gibbs statistical mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [s. l.], v. 31, n. 23, p. 5271, jun 1998.

PARK, S. Y.; BERA, A. K. Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model. *Journal of Econometrics*, [s. l.], v. 150, n. 2, p. 219–230, 2009. Recent Development in Financial Econometrics.

PARKER, E. N. Hydromagnetic dynamo models. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 122, p. 293, set. 1955.

PARKER, E. N. The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. I. the dynamo equations. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 162, p. 665, nov. 1970.

PARKER, J. J. K. *et al.* *Transiting Exoplanet Survey Satellite (TESS) Flight Dynamics Commissioning Results and Experiences*. NTRS - NASA Technical Reports Server, 2018. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20180006156/downloads/20180006156.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2021.

PASSOS, D. *et al.* A solar dynamo model driven by mean-field alpha and Babcock-Leighton sources: fluctuations, grand-minima-maxima, and hemispheric asymmetry in sunspot cycles. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 563, p. A18, 2014.

PAVLOS, G. *et al.* Tsallis non-extensive statistics and solar wind plasma complexity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 422, p. 113–135, 2015.

PAXTON, B. *et al.* Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA): binaries, pulsations, and explosions. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, [s. l.], v. 220, n. 1, p. 15, set. 2015.

PEALE, S. J. Rotation histories of the natural satellites. In: *IAU Colloq. 28: Planetary Satellites*. [S. l.: s. n.], 1977. p. 87.

PENROSE, O. *Foundations of statistical mechanics: A deductive treatment*. [S. l.]: Pergamon, 1979.

PERCY, J. R. *Understanding Variable Stars*. 1st. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521232538; 9780521232531; 9780511286629; 0511286627.

PERRYMAN, M. *The exoplanet handbook*. 2. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2018.

PEVARIĆ, D.; PEVARIĆ, J. *Inequalities and Zipf-Mandelbrot law: selected topics in information theory*. [S. l.]: Element, 2019. 342 p. ISBN 978-95-197-670-1.

PICOLI, S.; MENDES, R.; MALACARNE, L. q-exponential, Weibull, and q-Weibull distributions: an empirical analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 324, n. 3, p. 678–688, 2003.

PINSONNEAULT, M.; RYDEN, B. *Stellar structure and evolution*. [S. l.]: Cambridge University Press, 2023.

PINSONNEAULT, M. H.; KAWALER, S. D.; DEMARQUE, P. Rotation of low-mass stars: a new probe of stellar evolution. *The Astrophysical Journal Supplements*, [s. l.], v. 74, p. 501, out. 1990.

PIRES, A. S. T. *Evolução das ideias da Física*. São Paulo: Editora Livaria da Física, 2008.

PLASTINO, A.; PLASTINO, A. Stellar polytropes and Tsallis' entropy. *Physics Letters A*, [s. l.], v. 174, n. 5, p. 384–386, 1993.

PONT, F. Empirical evidence for tidal evolution in transiting planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 396, n. 3, p. 1789–1796, 06 2009.

PREUSSE, S. *et al.* A magnetic communication scenario for hot jupiters. *A&A*, [s. l.], v. 460, n. 1, p. 317–322, 2006.

PRIEST, E. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. 2ed. draft. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2014. ISBN 9780521854719; 0521854717.

PRIVITERA, G. *et al.* Star-planet interactions. I. stellar rotation and planetary orbits. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 591, p. A45, jun. 2016.

PSARIDI, A. *et al.* Three Saturn-mass planets transiting F-type stars revealed with TESS and HARPS. TOI-615b, TOI-622b, and TOI-2641b. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 675, p. A39, jul. 2023.

RAMBAUX, N.; CASTILLO-ROGEZ, J. Tides on satellites of giant planets. In: SOUCHAY, J.; MATHIS, S.; TOKIEDA, T. (Ed.). *Tides in astronomy and astrophysics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. p. 167–200. ISBN 978-3-642-32961-6.

RAO, S. *et al.* Star-planet interactions - v. dynamical and equilibrium tides in convective zones. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 618, p. A18, 2018.

REGEV, O. Astrophysics, chaos and complexity in. In: MEYERS, R. A. (Ed.). *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. New York, NY: Springer, 2009. p. 381–399. ISBN 978-0-387-30440-3.

REIF, F. *Física estadística*. 2a. ed. [S. l.]: Editorial Reverté, 2009. (Berkeley Physics Course volume 5). ISBN 8429140255; 9788429140255.

REINERS, A.; MOHANTY, S. Radius-dependent angular momentum evolution in low-mass stars. I. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 746, n. 1, p. 43, fev. 2012.

REINERS, A. *et al.* Magnetism, rotation, and nonthermal emission in cool stars - average magnetic field measurements in 292 m dwarfs. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 662, p. A41, 2022.

REINHOLD, T.; REINERS, A.; BASRI, G. Rotation and differential rotation of active kepler stars. *Astronomy and Astrophysics*, [s. l.], v. 560, p. A4, 2013.

REMUS, F.; MATHIS, S.; ZAHN, J.-P. The equilibrium tide in stars and giant planets - I. the coplanar case. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 544, p. A132, 2012.

RICKER, G. R. Tess: A behind-the-scenes look at nasa's latest planet hunter. *Astronomy*, [s. l.], v. 49, n. 8, p. 14–21, 2021. Disponível em: <https://astronomy.com/magazine/news/2021/08/tess-a-behind-the-scenes-look-at-nasas-latest-planet-hunter>. Acesso em: 10 nov. 2021.

RODRÍGUEZ, A.; CALLEGARI, N.; CORREIA, A. C. M. Coupled orbital and spin evolution of the CoRoT-7 two-planet system using a Maxwell viscoelastic rheology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 463, n. 3, p. 3249–3259, 09 2016.

ROSA, A.; de Jesus, J.; MORET, M. Nonextensivity and entropy of astrophysical sources. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 392, n. 23, p. 6079–6083, 2013.

ROZELOT, C. N. J.-P. *The rotation of sun and stars*. 1. ed. [S. l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 9783540878308; 3540878300; 9783540878315; 3540878319.

RUBIO, L. B.; SUÁREZ, D. O. Quiet sun magnetic fields: an observational view. *Living Reviews in Solar Physics*, [s. l.], v. 16, n. 1, p. 1, 2019.

RYDEN, B. P. B. *Foundations of astrophysics*. 1. ed. [S. l.]: Pearson Education, 2010. ISBN 9780321595584; 0321595580.

SAMUS', N. N. *et al.* General catalogue of variable stars: version GCVS 5.1. *Astronomy Reports*, [s. l.], v. 61, n. 1, p. 80–88, jan. 2017.

SANCHEZ, S. *et al.* A mean-field Babcock-Leighton solar dynamo model with long-term variability. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, Academia Brasileira de Ciências, [s. l.], v. 86, n. 1, p. 11–26, Mar 2014. ISSN 0001-3765.

SCARGLE, J. D. Studies in astronomical time series analysis. II. statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 263, p. 835–853, dez. 1982.

SCHARMER, G.; LÖFDAHL, M. *Image and movie galleries*. 2021. Disponível em: <https://www.su.se/isf/research/gallery/images/2002>. Acesso em: 15 dez. 2021.

SCHATZMAN, E. A theory of the role of magnetic activity during star formation. *Annales d'Astrophysique*, [s. l.], v. 25, p. 18, fev. 1962.

SCHRIJVER, C. J.; ZWAAN, C. *Solar and Stellar Magnetic Activity*. [S. l.]: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521582865; 9780521582865; 9780511009600; 0511009607.

SCHWARZSCHILD, M. Stellar structure and evolution. *Smithsonian Contributions to Astrophysics*, [s. l.], v. 1, p. 177, jan. 1956.

- SCHWARZSCHILD, M. Convection in stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 134, p. 1, jul. 1961.
- SHAJN, G.; STRUVE, O. On the rotation of the stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 89, p. 222–239, jan. 1929.
- SHAPIRO, A. I.; PETER, H.; SOLANKI, S. K. Chapter 3 - the sun's atmosphere. In: ENGVOLD, O.; VIAL, J.-C.; SKUMANICH, A. (Ed.). *The sun as a guide to stellar physics*. [S. l.]: Elsevier, 2019. p. 59–85. ISBN 978-0-12-814334-6.
- SHE, R.; LIU, S.; FAN, P. *Information measure similarity theory: message importance measure via Shannon entropy*. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1901.01137>. Acesso em: 09 jul. 2024.
- SHEA, W. R. Galileo, Scheiner, and the interpretation of sunspots. *Isis*, [The University of Chicago Press, The History of Science Society], [s. l.], v. 61, n. 4, p. 498–519, 1970. ISSN 00211753, 15456994.
- SHKOLNIK, E. L.; LLAMA, J. Signatures of star-planet interactions. In: DEEG, H. J.; BELMONTE, J. A. (Ed.). *Handbook of exoplanets*. [S. l.: s. n.], 2018. p. 20.
- SHU, F. *et al.* Magnetocentrifugally driven flows from young stars and disks. I. a generalized model. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 429, p. 781, jul. 1994.
- SIBONY, Y.; HELLED, R.; FELDMANN, R. The rotation of planet-hosting stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 513, n. 2, p. 2057–2075, jun. 2022.
- SILLS, A.; PINSONNEAULT, M. H.; TERNDROP, D. M. The Angular momentum evolution of very low mass stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 534, n. 1, p. 335–347, maio 2000.
- SILVA, J. R. P. *et al.* Time-dependent nonextensivity arising from the rotational evolution of solar-type stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 777, n. 1, p. 20, oct 2013.
- SILVA, M. P. da *et al.* Nonextensive behavior of stellar rotation in the galactic disk components. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 958, n. 1, p. 32, nov 2023.
- SILVA, R.; PLASTINO, A.; LIMA, J. A maxwellian path to the q-nonextensive velocity distribution function. *Physics Letters A*, [s. l.], v. 249, n. 5, p. 401–408, 1998. ISSN 0375-9601.
- SKUMANICH, A. Time scales for Ca II emission decay, rotational braking, and Lithium depletion. *Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 171, p. 565, fev. 1972.
- SLETTEBAK, A. Observed rotational velocities of single stars. In: SLETTEBAK, A. (Ed.). *Stellar Rotation: Proceedings of the iau colloquium held at the ohio state university, columbus, o., u.s.a., september 8–11, 1969*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 1970.
- SOARES, B. *et al.* Tsallis maximum entropy distribution function for stellar rotational velocities in the pleiades. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 364, p. 413–422, 2006. ISSN 0378-4371.
- SOARES, B. B. *Um estudo da rotação em estrelas da seqüência principal*. 97 f. Tese (Mestrado em Física da Matéria Condensada; Astrofísica e Cosmologia; Física da Ionosfera) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2000.

SOHO. *SOHO Science archive via VSO*. 2021. Disponível em: <https://sdac.virtualsolar.org/cgi/search>. Acesso em: 16 dez. 2021.

SOLANKI, S. K.; INHESTER, B.; SCHÜSSLER, M. The solar magnetic field. *Reports on Progress in Physics*, [s. l.], v. 69, n. 3, p. 563–668, mar. 2006.

SOLOV'EV, A. A.; KIRICHEK, E. A. Structure of solar faculae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 482, n. 4, p. 5290–5301, 11 2018.

SOLOVIEV, A. A. *et al.* Structural features of sun photosphere under high spatial resolution. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1911.02556>. Acesso em: 04 nov. 2021.

SOUZA, A. D. de *et al.* The environment of the fast rotating star achernar - iii. photospheric parameters revealed by the vlti. *A&A*, [s. l.], v. 569, p. A10, 2014.

SOWMYA, K. *et al.* Modeling stellar Ca ii H and K emission variations: spot contribution to the S-index. *The Astrophysical Journal Letters*, [s. l.], v. 956, n. 1, p. L10, oct 2023.

SPADA, F. *et al.* Modelling the rotational evolution of solar-like stars: the rotational coupling time-scale. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 416, n. 1, p. 447–456, set. 2011.

SPRUIT, H. C. Pressure equilibrium and energy balance of small photospheric fluxtubes. *Solar Physics*, [s. l.], v. 50, n. 2, p. 269–295, dez. 1976.

STAHLER, S. W. T Tauri star. In: GARGAUD, M. *et al.* (Ed.). *Encyclopedia of astrobiology*. 3. ed. [S. l.]: Springer, 2023. p. 2998–3000.

STANLEY, H. *et al.* Scale invariance and universality: organizing principles in complex systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 281, n. 1, p. 60–68, 2000. ISSN 0378-4371.

STAUFFER, J. B.; HARTMANN, L. W. The rotational velocities of low-mass stars. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, [s. l.], v. 98, p. 1233–1251, dez. 1986.

STAUFFER, J. R. Rotational velocity evolution on and prior to the main sequence. In: LINSKY, J. L.; STENCEL, R. E. (Ed.). *Cool stars, stellar systems, and the sun: proceedings of the fifth cambridge workshop on cool stars, stellar systems, and the sun, held in boulder, colorado, july 7-11, 1987*. [S. l.]: Springer, 1987.

STAUFFER, J. R.; HARTMANN, L. W. The Distribution of Rotational Velocities for Low-Mass Stars in the Pleiades. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 318, p. 337, jul. 1987.

STEINER, O. Radiative properties of magnetic elements - ii. center to limb variation of the appearance of photospheric faculae. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 430, n. 2, p. 691–700, 2005.

STEINER, O. Photospheric processes and magnetic flux tubes. In: HASAN, S.; BANERJEE, D. (Ed.). *Kodai school on solar physics*. [S. l.]: American Institute of Physics Conference Proceedings, 2007. v. 919, n. 1, p. 74–121.

STEVENS, D. J.; GAUDI, B. S. A posteriori transit probabilities. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, University of Chicago Press, [s. l.], v. 125, n. 930, p. 933, aug 2013.

- STRUGAREK, A. Physics of star-planet magnetic interactions. *In: BIGOT, L. et al. (Ed.). Star-planet interactions: Evry Schatzman School 2019*. 1. ed. [S. l.]: Springer, 2023.
- STRUGAREK, A. *et al.* On the diversity of magnetic interactions in close-in star-planet systems. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 795, n. 1, p. 86, nov. 2014.
- STRUGAREK, A. *et al.* Magnetic games between a planet and its host star: The key role of topology. *Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 815, n. 2, p. 111, dez. 2015.
- STRUVE, O. The cosmogonical significance of stellar rotation. *Popular Astronomy*, [s. l.], v. 53, p. 201, jun. 1945.
- SULIS, S. *et al.* Mitigating flicker noise in high-precision photometry - i. characterization of the noise structure, impact on the inferred transit parameters, and predictions for cheops observations. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 636, p. A70, 2020.
- SWERDLOW, N. M. Galileo's discoveries with the telescope and their evidence for the copernican theory. *In: MACHAMER, P. K. (Ed.). The Cambridge companion to Galileo*. [S. l.]: Cambridge University Press, 2006.
- SYMON, K. *Mechanics*. [S. l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1971. ISBN 9780201073928.
- TAKASAO, S. *et al.* Three-dimensional simulations of magnetospheric accretion in a T Tauri star: accretion and wind structures just around the star. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 941, n. 1, p. 73, dec 2022.
- TARUYA, A.; SAKAGAMI, M. aki. Gravothermal catastrophe and Tsallis' generalized entropy of self-gravitating systems. (iii). quasi-equilibrium structure using normalized q-values. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 322, p. 285–312, 2003.
- TASSOUL, J.-L. *Stellar rotation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521772184; 9780521772181; 9780511009631; 0511009631.
- TASSOUL, J.-L.; TASSOUL, M. *A concise history of solar and stellar physics*. [S. l.]: Princeton University Press, 2004.
- THOMAS, J. H.; WEISS, N. O. *Sunspots and starspots*. 1. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2008. ISBN 0521860032; 9780521860031; 9780511457593; 0511457596.
- THURNER, S.; HANEL, R.; KLIMEKL, P. Statistical mechanics and information theory for complex systems. *In: Introduction to the theory of complex systems*. [S. l.]: Oxford University Press, 2018. ISBN 9780198821939.
- TIRNAKLI, U.; BORGES, E. The standard map: from Boltzmann-Gibbs statistics to Tsallis statistics. *Scientific Reports*, [s. l.], 2016.
- TOWNLEY, S. D. Address of the retiring president of the society, in Awarding the Bruce Medal to Geheimer Ober-Reg. Rath Professor Dr. Hermann Carl Vogel. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, [s. l.], v. 18, n. 107, p. 101, abr. 1906.
- TREMAINE, S. *Dynamics of Planetary Systems*. [S. l.]: Princeton University Press, 2023. (Princeton Series in Astrophysics).

- TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, [s. l.], v. 52, n. 1-2, p. 479–487, jul. 1988.
- TSALLIS, C. Some comments on Boltzmann-Gibbs statistical mechanics. *Chaos, Solitons & Fractals*, [s. l.], v. 6, p. 539–559, 1995. ISSN 0960-0779. Complex Systems in Computational Physics.
- TSALLIS, C. Nonextensive statistical mechanics: a brief review of its present status. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, Academia Brasileira de Ciências, [s. l.], v. 74, n. 3, p. 393–414, Sep 2002. ISSN 0001-3765.
- TSALLIS, C. Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, [s. l.], v. 340, n. 1, p. 1–10, 2004. News and Expectations in Thermostatistics.
- TSALLIS, C. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics -an overview after 20 years. *Brazilian Journal of Physics*, Sociedade Brasileira de Física, [s. l.], v. 39, n. 2a, p. 337–356, Aug 2009. ISSN 0103-9733.
- TSALLIS, C. Nonextensive statistical mechanics: applications to high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, [s. l.], v. 13, p. 05001, 2011.
- TSALLIS, C. Thermodynamics and statistical mechanics for complex systems — foundations and applications. *Acta Phys. Pol. B*, The American Astronomical Society, [s. l.], v. 46, n. 6, p. 1089, 2015.
- TSALLIS, C. Non-additive entropies and statistical mechanics at the edge of chaos: a bridge between natural and social sciences. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, [s. l.], v. 381, n. 2256, p. 20220293, 2023.
- TSALLIS, C.; BEMSKI, G.; MENDES, R. S. Is re-association in folded proteins a case of nonextensivity? *Physics Letters A*, [s. l.], v. 257, n. 1, p. 93–98, 1999.
- TSALLIS, C.; GELL-MANN, M.; SATO, Y. Extensivity and entropy production. *Europhysics News*, [s. l.], v. 36, n. 6, p. 186–189, 2005.
- UMAROV, S.; TSALLIS, C. *Mathematical Foundations of Nonextensive Statistical Mechanics*. 1. ed. Singapore: World Scientific, 2022.
- VAN SADERS, J. L. *et al.* Weakened magnetic braking as the origin of anomalously rapid rotation in old field stars. *Nature*, [s. l.], v. 529, n. 7585, p. 181–184, jan. 2016.
- VAN SADERS, J. L.; PINSONNEAULT, M. H. The Sensitivity of Convection Zone Depth to Stellar Abundances: An Absolute Stellar Abundance Scale from Asteroseismology. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 746, n. 1, p. 16, fev. 2012.
- VANDERPLAS, J. *General tools for astronomical time series in Python*. 2022. Disponível em: <http://www.astroml.org/gatspy/>. Acesso em: 18 jan. 2022.
- VANDERPLAS, J. T. Understanding the Lomb–Scargle periodogram. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, [s. l.], v. 236, n. 1, p. 16, may 2018.
- VARGA, P.; SÜLE, B.; ILLÉS-ALMÁR, E. On the tidal heating of Enceladus. *Journal of Geodynamics*, [s. l.], v. 48, n. 3, p. 247–252, 2009. ISSN 0264-3707.

- VIDOTTO, A. A. Different types of star-planet interactions. In: KOSOVICHEV, A.; STRASSMEIER, S.; JARDINE, M. (Ed.). *Solar and stellar magnetic fields: origins and manifestations*. [S. l.: s. n.], 2020. v. 354, p. 259–267.
- VIDOTTO, A. A. *et al.* Stellar magnetism: empirical trends with age and rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 441, n. 3, p. 2361–2374, jul. 2014.
- VILHU, O. The nature of magnetic activity in lower main sequence stars. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 133, p. 117–126, abr. 1984.
- VOGEL, S. N.; KUHI, L. V. Rotational velocities of pre-main-sequence stars. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 245, p. 960–976, maio 1981.
- VRIES, N. B. de; BARKER, A. J.; HOLLERBACH, R. Tidal dissipation due to the elliptical instability and turbulent viscosity in convection zones in rotating giant planets and stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 524, n. 2, p. 2661–2683, 07 2023.
- WALKER, M. *Insert Tidal Here: A planetary evolution cookbook*. Tese (Doutorado) — University of California, 2017. Disponível em: <https://escholarship.org/uc/item/7xz131x2>. Acesso em: 05 nov. 2021.
- WEBER, E. J.; DAVIS, L. J. The angular momentum of the solar wind. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 148, p. 217–227, abr. 1967.
- WIEGELMANN, T.; THALMANN, J. K.; SOLANKI, S. K. The magnetic field in the solar atmosphere. *The Astronomy and Astrophysics Review*, [s. l.], v. 22, n. 78, 2014.
- WIJN, A. G. de *et al.* Small-scale solar magnetic fields. *Space Science Reviews*, [s. l.], v. 144, p. 275–375, 2008.
- WINN, J. N.; HOLMAN, M. J. Obliquity tides on Hot Jupiters. *The Astrophysical Journal*, [s. l.], v. 628, n. 2, p. L159, jul 2005.
- WRIGHT, J. T. *Exoplanet Data Explorer*. 2024. Disponível em: <http://exoplanets.org/plots>. Acesso em: 09 jul. 2024.
- YAU, K. K. C.; STEPHENSON, F. R. A revised catalogue of Far Eastern observations of sunspots (165 BC to AD 1918). *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 29, p. 175–197, jun. 1988.
- YEE, S. W.; WINN, J. N.; HARTMAN, J. D. How complete are surveys for nearby transiting Hot Jupiters? *The Astronomical Journal*, [s. l.], v. 162, n. 6, p. 240, dez. 2021.
- YEE, S. W. *et al.* The Orbit of WASP-12b Is Decaying. *The Astrophysical Journal Letters*, [s. l.], v. 888, n. 1, p. L5, jan. 2020.
- ZAHN, J. P. Tidal friction in close binary systems. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], v. 57, p. 383–394, maio 1977.
- ZAHN, J.-P. Tidal effects in close binary stars. *Symposium - International Astronomical Union*, [s. l.], v. 105, p. 379–389, 1984.
- ZAHN, J. P. Tidal dissipation in binary systems. In: Goupil, M. J.; Zahn, J. P. (Ed.). *EAS Publications Series*. [S. l.: s. n.], 2008. (EAS Publications Series, v. 29), p. 67–90.

ZAHN, J.-P. The sun: a slowly rotating star. In: ROZELOT, C. N. J.-P. (Ed.). *The rotation of sun and stars*. 1. ed. Berlin: Springer, 2009. ISBN 9783540878308; 3540878300; 9783540878315; 3540878319.

ZHANG, Z.; JIANG, J. A Babcock–Leighton-type solar dynamo operating in the bulk of the convection zone. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, [s. l.], v. 930, n. 1, p. 30, may 2022.

ZINNECKER, H. Star formation from hierarchical cloud fragmentation - a statistical theory of the log-normal initial mass function. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s. l.], v. 210, p. 43–56, set. 1984.

APÊNDICES

Tabela 7 – Os parâmetros dos sistemas planetários como segue: Período orbital (P_{orb}), Semieixo maior (a), Raio planetário (R_p), Massa planetária (M_p), excentricidade (e), Temperatura efetiva (T_{eff}), Raio estelar (R_*), Massa estelar (M_*), Período de rotação (P_{rot}), Idade estelar (Idade), Índice de interação de maré (q_t) e a razão dos momentos angulares orbitais e de rotação estelar (L_*/L_{orb}). Os índices sobrescritos indicam os conjuntos de dados nos quais o exoplaneta está presente.

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
AU Mic b ¹	8.46	0.06	4.07	17.00	0.00	3700	0.75	0.50	4.86	0.02	242.06	19.98
AU Mic c ¹	18.86	0.11	3.24	13.60	0.00	3700	0.75	0.50	4.86	0.02	230.88	19.13
CoRoT-18 b ¹	1.90	0.03	14.68	1099.69	0.03	5440	1.00	0.95	5.40	0.60	11.55	1.01
CoRoT-4 b ¹	9.20	0.09	13.34	223.43	0.14	6190	1.17	1.16	8.90	1.00	56.84	2.63
CoRoT-6 b ¹	8.89	0.09	13.07	937.60	0.18	6090	1.02	1.05	6.40	2.50	11.32	0.65
EPIC 249893012 b ^{1,2,3}	3.60	0.05	1.95	8.75	0.06	5430	1.71	1.05	41.00	9.00	494.46	41.10
EPIC 249893012 c ^{1,2,3}	15.62	0.13	3.67	14.67	0.07	5430	1.71	1.05	41.00	9.00	187.58	15.61
EPIC 249893012 d ^{1,2,3}	35.75	0.22	3.94	10.18	0.15	5430	1.71	1.05	41.00	9.00	207.35	16.79
G 9-40 b ^{1,2}	5.75	0.04	2.02	11.70	0.00	3348	0.31	0.29	29.85	9.90	8.28	0.71
GJ 1132 b ¹	1.63	0.02	1.13	1.66	0.22	3270	0.21	0.18	122.30	---	10.02	0.81
GJ 1214 b ¹	1.58	0.01	2.74	8.17	0.06	3250	0.21	0.18	124.70	---	1.88	0.16
GJ 1252 b ¹	0.52	0.01	1.19	2.09	0.00	3458	0.39	0.38	64.00	---	92.84	7.74
GJ 367 b ¹	0.32	0.01	0.72	0.55	0.00	3522	0.46	0.45	58.00	---	680.72	56.73
GJ 486 b ¹	1.47	0.02	1.30	2.82	0.05	3340	0.33	0.32	130.10	---	16.25	1.35
GJ 9827 b ^{1,2}	1.21	0.02	1.58	5.14	0.06	4305	0.60	0.61	28.90	10.00	174.93	14.54
GJ 9827 c ^{1,2}	3.65	0.04	1.24	1.30	0.09	4305	0.60	0.61	28.90	10.00	481.63	39.87
GJ 9827 d ^{1,2}	6.20	0.06	2.02	3.53	0.13	4305	0.60	0.61	28.90	10.00	150.05	12.35
HAT-P-19 b ¹	4.01	0.05	12.69	90.26	0.02	4990	0.82	0.84	35.50	8.80	11.16	0.94
HAT-P-20 b ¹	2.88	0.04	9.72	2310.62	0.02	4595	0.69	0.76	14.48	---	0.58	0.07
HAT-P-21 b ¹	4.12	0.05	11.48	1261.79	0.22	5588	1.10	0.95	15.90	10.20	3.22	0.29
HAT-P-68 b ^{1,2}	2.30	0.03	12.02	230.11	0.04	4508	0.67	0.68	24.59	11.10	4.68	0.40
HATS-16 b ^{1,2}	2.69	0.04	14.57	1039.30	0.00	5738	1.24	0.97	12.35	9.50	7.43	0.64
HATS-18 b ¹	0.84	0.02	14.99	629.30	0.17	5600	1.02	1.04	9.80	4.20	16.88	1.38
HATS-2 b ¹	1.35	0.02	13.09	486.28	0.29	5227	0.90	0.88	24.98	9.70	5.79	0.46

continua na página seguinte

Tabela 7 – (continuação)

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
HATS-47 b ^{1,2}	3.92	0.04	12.52	117.28	0.09	4512	0.66	0.67	6.42	8.10	27.90	2.43
HATS-57 b ^{1,2}	2.35	0.03	12.77	1000.21	0.03	5587	0.96	1.03	12.71	2.50	4.75	0.41
HATS-71 b ^{1,2,3}	3.80	0.04	11.48	117.60	0.00	3405	0.48	0.49	41.72	3.20	2.04	0.18
HATS-72 b ^{1,2}	7.33	0.07	8.10	39.86	0.01	4656	0.72	0.73	48.73	12.17	11.02	0.93
HATS-75 b ^{1,2}	2.79	0.03	9.91	156.05	0.06	3790	0.58	0.60	35.04	14.90	3.27	0.28
HATS-76 b ^{1,2}	1.94	0.03	12.09	835.57	0.06	4016	0.63	0.66	15.16	4.60	1.84	0.17
HD 110113 b ^{1,2,3}	2.54	0.04	2.05	4.55	0.09	5732	0.97	1.00	20.80	4.00	639.64	52.95
HD 136352 b ^{1,2,3}	11.58	0.10	1.66	4.72	0.00	5664	1.06	0.87	23.80	12.30	383.79	32.06
HD 136352 c ^{1,2,3}	27.59	0.17	2.92	11.24	0.00	5664	1.06	0.87	23.80	12.30	128.30	10.09
HD 136352 d ^{1,2,3}	107.25	0.42	2.56	8.82	0.00	5664	1.06	0.87	23.80	12.30	99.28	8.17
HD 15337 b ^{1,2,3}	4.76	0.05	1.64	7.51	0.09	5125	0.86	0.90	36.53	5.10	137.99	11.44
HD 15337 c ^{1,2,3}	17.18	0.13	2.39	8.11	0.05	5125	0.86	0.90	36.53	5.10	84.57	7.10
HD 183579 b ¹	17.47	0.13	3.53	11.20	0.00	5706	0.97	1.03	23.20	2.60	121.42	10.37
HD 207496 b ^{1,2,3}	6.44	0.06	2.25	6.10	0.23	4819	0.77	0.80	12.36	0.52	385.49	30.39
HD 207897 b ^{1,2,3}	16.20	0.12	2.50	14.40	0.05	5070	0.78	0.80	37.00	7.10	37.21	3.16
HD 209458 b ¹	3.52	0.05	15.23	216.76	0.01	6065	1.16	1.12	10.65	3.10	35.47	3.00
HD 213885 b ^{1,2,3}	1.01	0.02	1.75	8.83	0.00	5978	1.10	1.07	18.58	3.80	680.02	56.67
HD 23472 b ¹	17.67	0.12	2.00	8.32	0.07	4684	0.71	0.67	40.10	---	45.48	3.84
HD 23472 c ¹	29.80	0.16	1.87	3.41	0.06	4684	0.71	0.67	40.10	---	91.97	7.86
HD 23472 d ¹	3.98	0.04	0.75	0.55	0.07	4684	0.71	0.67	40.10	---	1148.36	95.34
HD 23472 e ¹	7.91	0.07	0.82	0.72	0.07	4684	0.71	0.67	40.10	---	697.91	57.95
HD 23472 f ¹	12.16	0.09	1.14	0.77	0.07	4684	0.71	0.67	40.10	---	565.23	46.94
HD 260655 b ^{1,2,3}	2.77	0.03	1.24	2.14	0.04	3803	0.44	0.44	37.50	5.00	118.18	9.84
HD 260655 c ^{1,2,3}	5.71	0.05	1.53	3.09	0.04	3803	0.44	0.44	37.50	5.00	64.18	5.36
HD 3167 b ¹	0.96	0.02	1.57	5.69	0.00	5286	0.83	0.88	23.52	5.00	434.13	36.18
HD 3167 c ¹	29.85	0.18	2.74	8.33	0.05	5286	0.83	0.88	23.52	5.00	102.98	8.20
HD 5278 b ^{1,2}	14.34	0.12	2.45	7.80	0.08	6203	1.19	1.13	16.80	3.00	420.64	34.99
HD 73583 c ^{1,2,3}	18.88	0.12	2.39	9.70	0.08	4511	0.65	0.73	12.20	0.48	111.63	9.07

continua na página seguinte

Tabela 7 – (continuação)

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
HD 80653 b ^{1,2,3}	0.72	0.02	1.61	5.72	0.00	5959	1.22	1.18	19.55	2.67	1419.33	118.28
K2-111 b ¹	5.35	0.06	1.82	5.29	0.13	5775	1.25	0.84	29.20	12.30	508.79	41.83
K2-131 b ^{1,2,3}	0.37	0.01	1.69	7.90	0.00	5120	0.76	0.80	9.19	5.30	931.50	77.63
K2-140 b ^{1,2,3}	6.57	0.07	13.56	295.58	0.00	5585	1.06	0.96	14.60	9.80	11.63	1.04
K2-141 b ^{1,2,3}	0.28	0.01	1.51	4.97	0.00	4570	0.68	0.71	15.17	6.30	755.00	62.92
K2-141 c ^{1,2}	7.75	0.07	7.00	8.00	0.09	4570	0.68	0.71	15.17	6.30	156.18	12.98
K2-18 b ¹	32.94	0.14	2.37	8.92	0.20	3457	0.41	0.36	39.63	- - -	5.69	0.81
K2-180 b ¹	8.87	0.07	2.24	11.44	0.00	5110	0.69	0.71	15.70	9.50	102.27	8.63
K2-229 b ¹	0.58	0.01	1.16	2.59	0.00	5185	0.79	0.84	18.10	5.40	1356.68	113.06
K2-229 c ¹	8.33	0.08	2.12	21.30	0.00	5185	0.79	0.84	18.10	5.40	67.19	5.67
K2-237 b ¹	2.18	0.04	18.50	508.53	0.00	6257	1.43	1.28	5.07	2.55	61.42	5.18
K2-25 b ^{1,2,3}	3.48	0.03	3.44	24.50	0.43	3207	0.29	0.26	1.88	0.73	81.05	6.41
K2-3 b ¹	10.05	0.08	2.25	6.47	0.09	3835	0.60	0.62	40.71	1.00	49.12	4.09
K2-3 c ¹	24.65	0.14	1.69	3.30	0.10	3835	0.60	0.62	40.71	1.00	70.59	5.95
K2-3 d ¹	44.56	0.21	1.62	1.60	0.10	3835	0.60	0.62	40.71	1.00	129.31	10.06
K2-33 b ¹	5.43	0.04	5.76	1144.19	0.00	3410	1.10	0.31	6.30	0.01	-0.35	0.49
K2-36 b ¹	1.42	0.02	1.43	3.90	0.00	4916	0.72	0.79	16.90	1.40	569.49	47.47
K2-36 c ¹	5.34	0.05	3.20	7.80	0.00	4916	0.72	0.79	16.90	1.40	183.23	15.31
Kepler-102 b ^{1,2}	5.29	0.06	0.46	1.10	0.10	4909	0.72	0.80	27.95	1.10	824.06	68.13
Kepler-102 c ^{1,2}	7.07	0.07	0.57	1.70	0.09	4909	0.72	0.80	27.95	1.10	483.12	39.99
Kepler-102 d ^{1,2}	10.31	0.09	1.15	3.00	0.09	4909	0.72	0.80	27.95	1.10	241.02	19.98
Kepler-102 e ^{1,2}	16.15	0.12	2.17	4.70	0.09	4909	0.72	0.80	27.95	1.10	131.57	10.98
Kepler-102 f ^{1,2}	27.45	0.17	0.86	4.30	0.10	4909	0.72	0.80	27.95	1.10	86.10	10.07
Kepler-107 b ¹	3.18	0.05	1.54	3.51	0.00	5854	1.45	1.24	20.30	4.29	1947.71	162.32
Kepler-107 c ¹	4.90	0.06	1.60	9.39	0.00	5854	1.45	1.24	20.30	4.29	630.11	52.54
Kepler-107 d ¹	7.96	0.08	0.86	3.80	0.00	5854	1.45	1.24	20.30	4.29	1324.74	110.45
Kepler-107 e ¹	14.75	0.13	2.90	8.60	0.00	5854	1.45	1.24	20.30	4.29	474.12	39.73

continua na página seguinte

Tabela 7 – (continuação)

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
Kepler-39 b ¹	21.09	0.16	13.90	6388.38	0.13	6350	1.40	1.29	4.50	2.10	3.75	0.21
Kepler-423 b ¹	2.68	0.04	13.36	192.60	0.08	5560	0.95	0.85	22.05	11.00	13.07	1.10
Kepler-43 b ¹	3.02	0.04	13.00	997.99	0.03	6050	1.38	1.27	12.95	2.30	9.69	0.83
Kepler-45 b ¹	2.46	0.03	10.76	153.83	0.23	3820	0.55	0.59	15.80	0.80	7.33	0.60
Kepler-539 b ¹	125.63	0.50	8.37	308.30	0.39	5820	0.95	1.05	11.77	---	6.44	0.41
Kepler-75 b ¹	8.88	0.08	11.77	3210.08	0.57	5200	0.89	0.91	19.18	6.20	0.12	0.06
KOI-4777.01 ^{1,2}	0.41	0.01	0.51	99.20	0.00	3515	0.40	0.41	44.00	4.00	3.28	0.27
L 168-9 b ¹	1.40	0.02	1.39	4.60	0.21	3800	0.60	0.62	29.80	---	191.62	15.43
L 98-59 b ^{1,2}	2.25	0.02	0.85	0.40	0.10	3415.	0.30	0.27	80.90	0.80	126.61	10.47
L 98-59 c ¹	3.69	0.03	1.39	2.22	0.10	3415	0.30	0.27	80.90	0.80	19.28	1.60
L 98-59 d ¹	7.45	0.05	1.52	1.94	0.07	3415	0.30	0.27	80.90	0.80	17.30	1.44
LHS 1140 b ¹	24.74	0.09	1.43	6.65	0.29	3131	0.19	0.15	131.00	5.00	0.53	0.06
LHS 1140 c ¹	3.78	0.03	1.28	1.81	0.31	3216	0.21	0.18	131.00	5.00	6.89	0.53
LHS 1815 b ¹	3.81	0.04	1.09	8.70	0.00	3643	0.50	0.50	47.80	---	29.33	2.45
LP 714-47 b ¹	4.05	0.04	4.70	30.80	0.04	3950	0.58	0.59	33.00	---	15.63	1.31
LTT 9779 b ^{1,2,3}	0.79	0.02	4.72	29.32	0.00	5443	0.95	0.77	45.00	1.90	66.97	5.58
NGTS-10 b ^{1,2,3}	0.77	0.01	13.51	687.15	0.00	4600	0.70	0.70	17.29	10.40	3.51	0.30
NGTS-21 b ^{1,2,3}	1.54	0.02	14.91	750.08	0.00	4660	0.86	0.72	17.89	10.02	3.80	0.32
Qatar-1 b ¹	1.42	0.02	13.23	419.85	0.01	4910	0.80	0.85	23.70	11.60	4.84	0.41
Qatar-2 b ¹	1.34	0.02	12.89	826.36	0.00	4645	0.71	0.74	18.50	1.40	2.38	0.21
Qatar-3 b ^{1,2,3}	2.51	0.04	12.29	1369.85	0.00	6007	1.27	1.15	6.31	0.31	12.34	1.08
Qatar-4 b ^{1,2,3}	1.81	0.03	12.72	1938.76	0.00	5215	0.85	0.90	6.05	0.17	3.99	0.37
Qatar-5 b ^{1,2,3}	2.88	0.04	12.41	1373.03	0.00	5747	1.08	1.13	12.10	0.53	4.34	0.39
TIC 257060897 b ^{1,2,3}	3.66	0.05	16.70	212.95	0.03	---	1.82	1.32	92.00	3.47	10.86	0.91
TOI-1052 b ^{1,2}	9.14	0.09	2.87	16.90	0.18	6146	1.26	1.20	12.80	2.30	357.80	28.61
TOI-1062 b ^{1,2,3}	4.11	0.05	2.27	10.15	0.18	5328	0.84	0.94	21.80	2.50	194.02	15.77

continua na página seguinte

Tabela 7 – (continuação)

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
TOI-1107 b ^{1,2,3}	4.08	0.06	14.57	1064.73	0.03	6311	1.81	1.35	6.20	2.60	29.65	2.63
TOI-1235 b ¹	3.44	0.04	1.74	6.91	0.15	3872	0.63	0.64	44.70	---	68.13	5.58
TOI-1260 b ^{1,2,3}	3.13	0.04	2.41	8.56	0.00	4227	0.67	0.68	30.63	6.70	92.70	7.73
TOI-1260 c ^{1,2,3}	7.49	0.07	2.76	13.20	0.00	4227	0.67	0.68	30.63	6.70	44.65	3.75
TOI-1260 d ^{1,2,3}	16.61	0.11	3.12	11.84	0.00	4227	0.67	0.68	30.63	6.70	37.24	3.20
TOI-1268 b ^{1,2,3}	8.16	0.07	9.10	96.40	0.10	5300	0.92	0.96	10.90	0.24	30.23	2.72
TOI-1272 b ^{1,2,3}	3.32	0.04	4.14	24.60	0.34	4985	0.79	0.85	28.30	3.65	60.10	4.56
TOI-1416 b ^{1,2,3}	1.07	0.02	1.62	3.48	0.00	4884	0.79	0.80	17.60	6.90	836.03	69.67
TOI-1470 b ^{1,2}	2.53	0.03	2.18	7.32	0.30	3709	0.47	0.47	29.00	1.30	61.11	4.74
TOI-1470 c ^{1,2}	18.09	0.11	2.47	7.24	0.50	3709	0.47	0.47	29.00	1.30	44.76	2.74
TOI-1695 b ¹	3.13	0.03	1.90	6.36	0.10	3690	0.52	0.51	47.70	---	44.54	3.69
TOI-1710 b ^{1,2,3}	24.28	0.16	5.34	28.30	0.16	5665	0.97	0.98	22.50	4.20	55.33	3.80
TOI-1759 b ¹	18.85	0.12	3.06	6.80	0.00	3972	0.63	0.61	35.65	5.00	46.07	3.93
TOI-1807 b ¹	0.55	0.01	1.37	2.57	0.00	4730	0.69	0.76	8.80	0.30	2124.25	177.03
TOI-1820 b ^{1,2,3}	4.86	0.06	12.78	731.01	0.04	5734	1.51	1.04	25.00	11.00	7.01	0.60
TOI-2025 b ¹	8.87	0.09	12.52	1398.44	0.41	5880	1.56	1.32	13.20	1.70	6.76	0.58
TOI-2095 b ^{1,2}	17.66	0.10	1.25	4.10	0.00	3759	0.44	0.44	40.00	1.00	30.39	2.60
TOI-2095 c ^{1,2}	28.17	0.14	1.33	7.40	0.00	3759	0.44	0.44	40.00	1.00	12.31	1.22
TOI-2136 b ^{1,2,3}	7.85	0.06	2.19	6.37	0.00	3342	0.34	0.34	75.00	4.60	8.00	0.68
TOI-2158 b ^{1,2}	8.60	0.07	10.76	260.62	0.07	5673	1.41	1.12	19.00	8.00	15.47	1.35
TOI-251 b ^{1,2}	4.94	0.06	2.74	317.83	0.00	5875	0.88	1.04	3.84	0.18	38.58	2.84
TOI-2641 b ^{1,2}	4.88	0.06	18.10	122.68	0.18	6100	1.34	1.16	35.60	10.80	24.49	2.00
TOI-332 b ^{1,2,3}	0.78	0.02	3.20	57.20	0.00	5251	0.87	0.88	35.60	5.00	35.12	2.93
TOI-4010 b ^{1,2,3}	1.35	0.02	3.02	11.00	0.03	4960	0.83	0.88	37.70	6.10	130.45	10.87
TOI-4010 c ^{1,2,3}	5.41	0.06	5.93	20.31	0.03	4960	0.83	0.88	37.70	6.10	44.41	3.71
TOI-4010 d ^{1,2,3}	14.71	0.11	6.18	38.15	0.07	4960	0.83	0.88	37.70	6.10	16.48	1.42
TOI-431 b ¹	0.49	0.01	1.28	3.07	0.00	4850	0.73	0.78	30.50	---	606.26	50.52

continua na página seguinte

Tabela 7 – (continuação)

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
TOI-431 d ¹	12.46	0.10	3.29	9.90	0.00	4850	0.73	0.78	30.50	---	63.43	5.34
TOI-4562 b ^{1,2}	225.12	0.77	12.53	732.00	0.76	6096	1.15	1.19	3.86	0.70	19.40	0.95
TOI-5398 b ^{1,2}	10.59	0.10	10.30	58.70	0.13	6000	1.05	1.15	7.34	0.65	113.20	9.19
TOI-5398 c ^{1,2}	4.77	0.06	3.52	11.80	0.14	6000	1.05	1.15	7.34	0.65	725.77	59.11
TOI-674 b ¹	1.98	0.03	5.25	23.60	0.00	3514	0.42	0.42	52.00	---	8.36	0.70
TOI-763 b ¹	5.61	0.06	2.28	9.79	0.04	5450	0.90	0.92	27.00	---	151.59	12.64
TOI-763 c ¹	12.27	0.10	2.63	9.32	0.04	5450	0.90	0.92	27.00	---	121.95	10.22
TOI-776 b ^{1,2,3}	8.25	0.07	1.85	4.00	0.06	3709	0.54	0.54	34.40	7.80	77.46	6.46
TOI-776 c ^{1,2,3}	15.67	0.10	2.02	5.30	0.04	3709	0.54	0.54	34.40	7.80	46.44	3.93
TOI-836 b ^{1,2,3}	3.82	0.04	1.70	4.53	0.05	4552	0.67	0.68	21.99	5.40	230.82	19.21
TOI-836 c ^{1,2,3}	8.60	0.07	2.59	9.60	0.08	4552	0.67	0.68	21.99	5.40	85.83	7.16
TOI-908 b ^{1,2,3}	3.18	0.04	3.19	16.14	0.13	5626	1.03	0.95	21.93	4.60	185.23	15.23
WASP-10 b ¹	3.09	0.04	11.96	1020.23	0.06	4680	0.70	0.75	11.91	7.00	1.94	0.19
WASP-113 b ^{1,2}	4.54	0.06	15.79	150.97	0.00	5890	1.61	1.32	10.56	6.20	96.57	8.11
WASP-121 b ¹	1.27	0.03	19.65	367.73	0.00	---	1.46	1.36	1.13	---	491.35	40.21
WASP-132 c ^{1,2}	1.01	0.02	1.85	37.35	0.13	4714	0.75	0.78	33.00	3.20	38.73	3.19
WASP-166 b ^{1,2,3}	5.44	0.06	7.06	32.10	0.00	6050	1.22	1.19	12.10	2.10	207.64	17.37
WASP-182 b ^{1,2,3}	3.38	0.05	9.53	47.04	0.00	5638	1.34	1.08	30.00	5.95	78.38	6.54
WASP-19 b ¹	0.79	0.02	14.68	367.73	0.01	5500	0.94	0.96	10.50	5.50	22.02	1.84
WASP-22 b ¹	3.53	0.05	12.55	177.98	0.02	6000	1.13	1.10	16.00	3.00	27.18	2.29
WASP-32 b ¹	2.72	0.04	12.33	1109.23	0.00	6140	1.09	1.07	11.60	2.22	5.82	0.51
WASP-4 b ¹	1.34	0.02	14.91	371.86	0.00	5436	0.92	0.89	22.20	7.00	8.03	0.67
WASP-41 b ¹	3.05	0.04	13.45	299.08	0.12	5450	0.90	0.93	18.41	9.80	8.93	0.75
WASP-43 b ¹	0.81	0.02	11.61	651.55	0.01	4400	0.67	0.72	15.60	7.00	3.78	0.32
WASP-46 b ¹	1.43	0.02	13.16	603.88	0.02	5600	0.86	0.83	16.00	9.60	5.68	0.48

continua na página seguinte

Tabela 7 – (continuação)

Planeta	P_{orb} (dias)	a (ua)	R_p (R_{\oplus})	M_p (M_{\oplus})	e	T_{eff} (K)	R_* (R_{\odot})	M_* (M_{\odot})	P_{rot} (dias)	Idade (Ga)	q	L_*/L_{orb}
WASP-47 b ¹	4.16	0.05	12.90	383.00	0.00	5576	1.16	1.11	31.20	6.50	6.35	0.54
WASP-47 d ¹	9.10	0.09	3.71	16.80	0.01	5576	1.16	1.11	31.20	6.50	114.35	9.56
WASP-47 e ¹	0.79	0.02	1.82	9.10	0.03	5576	1.16	1.11	31.20	6.50	480.21	39.99
WASP-5 b ¹	1.63	0.03	13.17	505.35	0.01	5770	1.09	1.03	16.20	5.60	11.17	0.94
WASP-50 b ¹	1.96	0.03	12.92	464.03	0.02	5400	0.84	0.89	16.30	7.00	6.36	0.54
WASP-6 b ¹	3.36	0.04	13.72	153.51	0.07	5450	0.87	0.88	23.80	11.00	11.92	1.00
WASP-69 b ¹	3.87	0.05	11.85	79.46	0.11	4700	0.81	0.83	23.07	7.00	19.46	1.62
WASP-84 b ¹	8.52	0.08	10.94	218.35	0.00	5280	0.77	0.85	14.36	2.10	6.48	0.66
WASP-89 b ¹	3.36	0.04	11.66	1843.41	0.19	5000	0.88	0.92	20.20	12.50	1.09	0.10
WASP-92 b ^{1,2,3}	2.17	0.03	16.38	255.85	0.00	6280	1.34	1.19	10.07	2.29	51.25	4.29

Fonte: elaborada pelo autor.