



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**SÉRGIO MURILO DA SILVA JUNIOR**

**UMA ANÁLISE DO CARÁTER ABSTRATO DA DESCRIÇÃO DO SPIN DE UMA  
PARTÍCULA NO ESPAÇO DE ESTADO E SUAS APLICAÇÕES AOS INDICADORES  
DE SAÚDE**

**FORTALEZA**

**2024**

SÉRGIO MURILO DA SILVA JUNIOR

UMA ANÁLISE DO CARÁTER ABSTRATO DA DESCRIÇÃO DO SPIN DE UMA  
PARTÍCULA NO ESPAÇO DE ESTADO E SUAS APLICAÇÕES AOS INDICADORES DE  
SAÚDE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Física do Centro  
de ciências da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan  
Landim

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S583a Silva Junior, Sérgio Murilo Da.

Uma análise do caráter abstrato da descrição do spin de uma partícula no espaço de estado e suas aplicações aos indicadores de saúde. / Sérgio Murilo Da Silva Junior. – 2024.  
51 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim.

1. Descrição matemática do spin. 2. Quantidades binárias . 3. Indicadores de saúde. I. Título.

CDD 530

---

SÉRGIO MURILO DA SILVA JUNIOR

UMA ANÁLISE DO CARÁTER ABSTRATO DA DESCRIÇÃO DO SPIN DE UMA  
PARTÍCULA NO ESPAÇO DE ESTADO E SUAS APLICAÇÕES AOS INDICADORES DE  
SAÚDE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Graduação em Física do Centro  
de ciências da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
Bacharel em Física.

Aprovada em: 20/08/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos William de Araújo Paschoal  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ao meu Senhor e Maioral Belzebu, minha Rainha Maria Padilha das Almas, minha mãe, companheira e a minha determinação em continuar que tornaram todas as minhas conquistas possíveis.

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe e, eterna Professora, Maria Auxiliadora Viana Batista por ter me guiado com seu amor e por acreditar em mim e nos meus sonhos, além de todo apoio financeiro.

A minha companheira e melhor amiga Alanna Freitas Santos por me mostrar a luz que precisava para me guiar de volta a mim sempre que me foi preciso. Por toda compreensão, apoio, incentivo, acolhimento e amor sem os quais não seria sequer possível a minha chegada até aqui.

Aos Professores Dr. José Ramos Gonçalves e Dr. Carlos William Paschoal pela incrível habilidade de tornar qualquer assunto cativante e compreensível que tornou possível a obtenção com clareza dos conhecimentos empregados nessa monografia.

Aos amigos Wesley Ferreira Silva, Ana Livia Cavalcante Maia, Samuel Trigueiro, Hellen De Andrade Moura, Sabrina da Silva Sá e Nathalia Holanda pelas discussões sobre os mais diversos assuntos e pela companhia nos momentos difíceis que enfrentei.

Ao Prof. Dr. Ricardo Renan Landim por toda paciência em me orientar em minha monografia.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

## RESUMO

A pesquisa que se segue explora o caráter abstrato da descrição do spin de uma partícula, por meio do formalismo de Paul A. Dirac, no espaço de estado e busca retratar sua aplicabilidade a sistemas não físicos através da análise da descrição do qubit. Posto isso, o trabalho visa desenvolver uma possível aplicação do formalismo aos indicadores de saúde dos indivíduos tabagistas no Brasil. Com esse objetivo, utilizamos do estado de superposição de estados do spin e a formulação do qubit e, os aplicamos, com as devidas analogias a fatores da vida que podem ser analisados igualmente como uma superposição de estados. A priori, exploraremos como o sistema poderia ser desenvolvido e em seguida será demonstrado a aplicabilidade do sistema no estudo da incidência, mortalidade e prevalência das doenças relacionadas ao tabagismo. Através da interpretação probabilística do vetor de estado para o spin e por meio das abstrações necessárias, construímos ket's de estado para os indicadores de saúde. E relacionando-os à dados que apresentam o número de casos de doenças e de óbitos ligados ao tabagismo no Brasil no ano 2020, se obtém um método que descreve probabilisticamente os estados acessíveis que levam um indivíduo ou uma população a óbito em decorrência de doenças distintas. Por fim, alcançando como resultado da pesquisa uma estimativa da população fumante do país no ano 2020.

**Palavras-chave:** espaço de estados; espaço de Hilbert; espaço de Fock; notação de Paul A. Dirac; indicadores de saúde; tabagismo.

## ABSTRACT

The research that follows explores the abstract character of the description of the spin of a particle, through Paul A. Dirac's formalism, in state space and seeks to portray its applicability to non-physical systems through the analysis of the qubit description. That said, the work aims to develop a possible application of formalism to health indicators for smokers in Brazil. With this objective, we use the state of superposition of spin states and the qubit formulation and apply them, with due analogies to factors in life that can equally be analyzed as a superposition of states. Firstly, we will explore how the system could be developed and then the system's applicability in studying the incidence, mortality and prevalence of smoking-related diseases will be demonstrated. Through the probabilistic interpretation of the state vector for the spin and through the necessary abstractions, we construct state ket's for the health indicators. And relating them to data that presents the number of cases of diseases and deaths linked to smoking in Brazil in 2020, a method is obtained that probabilistically describes the accessible states that lead an individual or a population to death as a result of different diseases. Finally, achieving an estimate of the country's smoking population in 2020 as a result of the research.

**Keywords:** state space; hilbert space; fock space; Paul A. Dirac notation; health indicators; smoking.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Resultado obtido no experimento SG . . . . .	17
Figura 2 – Ensemble misto formado por N ensemble's puros . . . . .	23

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de casos, número de óbitos e número de sobreviventes das doenças relacionadas ao tabagismo. . . . .	39
Tabela 2 – Incidência, Prevalência e Mortalidade das doenças relacionadas ao tabagismo.	39
Tabela 3 – Probabilidade de morte das doenças relacionadas ao tabaco. . . . .	43

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AVC	Acidente Vascular Cerebral
CP	Câncer de Pulmão
DC	Doenças Cardíacas
DPOC	Doenças Pulmonares Obstrusivas Crônicas
INCA	Instituto Nacional do Câncer
OC	Outros Canceres
SG	Stern-Gelarch
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

## LISTA DE SÍMBOLOS

$L$	Momento Angular
$n$	Número inteiro não negativo
$\hbar$	Constante de Planck Reduzida
$a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta$	Números Complexos
$a^*, b^*, c^*, d^*, e^*, f^*, \alpha^*, \beta^*$	Complexo conjugado
$\varepsilon$	Espaço de Estado
$H$	Espaço de Hilbert
$ \psi\rangle$	Vetor de Estado ('ket' de estado) $\psi$
$\langle\psi $	Vetor 'bra' $\psi$ correspondente ao 'ket' $\psi$
$S_z$	Observável Para o Spin na Direção z
$\langle\phi \psi\rangle$	Produto Escalar
$ \uparrow\rangle$	'Spin Up'
$ \downarrow\rangle$	'Spin Down'
$\otimes$	Produto Tensorial
$\oplus$	Soma Direta
$\delta$	Desvio Padrão

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	METODOLOGIA . . . . .	15
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	16
3.1	O experimento de Stern-Gerlach e o surgimento do Spin. . . . .	16
3.2	Descrição matemática do spin no espaço de Hilbert . . . . .	18
3.3	Descrição matemática do Spin em um sistema de múltiplas partículas . . . . .	21
3.3.1	<i>Vetores de estado no espaço de Fock: representação para Bósons e Férmions</i> . . . . .	22
3.4	Matriz densidade . . . . .	23
3.5	O caráter abstrato do espaço de estado e da sua representação do spin . . . . .	24
3.6	Qubit: o bit quântico . . . . .	25
3.7	Indicadores de saúde . . . . .	27
4	RESULTADOS . . . . .	28
4.1	Um único estado . . . . .	29
4.2	ket's de Estado para o Fator Saúde . . . . .	30
4.2.1	<i>ket de estado incidência</i> . . . . .	31
4.2.2	<i>ket de estado mortalidade</i> . . . . .	34
4.2.3	<i>ket de estado prevalência</i> . . . . .	36
4.3	Tabagismo . . . . .	38
4.3.1	<i>Doenças relacionadas ao tabagismo: ket de estado incidência</i> . . . . .	39
4.3.2	<i>Doenças relacionadas ao tabagismo: ket de estado mortalidade</i> . . . . .	41
4.3.3	<i>Doenças relacionadas ao tabagismo: ket de estado prevalência</i> . . . . .	45
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	47
	REFERÊNCIAS . . . . .	48
	APÊNDICE A - UMA POSSIBILIDADE PARA O KET RESULTANTE DA INTERAÇÃO ENTRE DOIS KET'S MORTALIDADE . . . . .	51

## 1 INTRODUÇÃO

Os vetores pertencentes ao espaço de estado representam os estados acessíveis ao sistema em questão, para tanto são postulados de forma a conterem todas as informações acerca dos estados que representam. Além disso, as variáveis de estado que constituem tais vetores não são necessariamente quantidades físicas, permitindo ao espaço de estado a liberdade de descrever estados que não possuem uma correlação clara com quantidades clássicas já estabelecidas. Tais características tornam o espaço de estado fundamental para a descrição do spin, uma quantidade intrínseca a partícula não possuente de qualquer equivalente na mecânica clássica, tendo como única variável de estado a sua “direção” que não possui relação com as direções geométricas utilizadas em outras áreas da física. Como aplicação desse caráter abstrato surge o qubit, uma unidade de informação computacional que se encontra, diferentemente do bit, numa superposição entre os valores zero e um, o que permite sua descrição por meio de um vetor de estado semelhante ao vetor utilizado na descrição do spin.

O objetivo geral da pesquisa é iniciar um estudo sobre o modo com que o caráter abstrato do espaço de estado pode ser aplicado a descrição de quantidades não físicas relacionadas a descrição do indivíduo que possuam, ao menos com as devidas simplificações, valores binários e possam ser analisadas como uma superposição de estados. A fim de alcançar tal objetivo geral, os objetivos específicos do trabalho buscam entender a descrição matemática do spin em um espaço de Hilbert, o detalhamento do mesmo em um sistema de múltiplas quantidades e como esses desenvolvimentos contribuem para a descrição do qubit.

Para tanto, a metodologia empregada utiliza, primordialmente, da pesquisa bibliográfica buscando fundamentar teoricamente o trabalho através da revisão da literatura clássica que aborda assuntos como: o espaço de Hilbert, a descrição matemática do spin e a formulação do qubit. Também se é necessária a pesquisa documental, para a obtenção dos dados da análise referentes ao número de casos e óbitos decorrentes das doenças relacionadas ao tabagismo no Brasil no ano de 2020. A natureza da pesquisa possui um caráter descritivo, visto que é necessária a descrição de quantidades físicas, assim como, o estabelecimento de relações entre variáveis e por fim a busca por denotar características de um certo grupo. Contudo, a pesquisa também possui, em parte, um caráter exploratório, pois busca uma compreensão mais profunda perante a temática e a construção de hipóteses (Gil, 2002).

No primeiro capítulo analisaremos os conhecimentos prévios necessários. Na primeira seção falaremos brevemente sobre a descoberta do spin por meio do experimento de Stern-

Gerlach. Em seguida, focaremos nossa atenção na descrição matemática do spin no espaço de estado, explorando na seção seguinte a descrição do spin em sistemas de múltiplas partículas. Na seção 3.4, estudaremos como os aspectos apresentados nas seções anteriores corroboram para a elaboração da descrição do qubit. Ao final do capítulo, falaremos sobre as quantidades conhecidas como indicadores de saúde e suas obtenções.

Já no segundo capítulo, começamos produzindo uma descrição inicial de como o caráter abstrato da descrição do spin no espaço de estado pode ser aplicada a fatores da vida de um indivíduo ou de uma população que possam, com as devidas simplificações, ser analisados como possuintes de um valor binário. Na seção seguinte, desenvolveremos as abstrações obtidas na ótica dos indicadores de saúde, assim construindo ket's de estado para cada um dos indicadores que serão analisados além de definir como esses ket's interagem entre si. Ao final do capítulo, aplicaremos os ket's desenvolvidos ao estudo das doenças relacionadas ao tabagismo.

Conclui-se que a aplicação desse tipo abstração, posta a prova, ao analisar os indicadores de saúde para o tabagismo a partir dos dados fornecidos pelo INCA e pelo Ministério da Saúde sobre as doenças relacionadas ao tabaco, produz resultados coerentes com a realidade do Brasil, onde se obteve uma estimativa do número de fumantes no ano de 2020.

## 2 METODOLOGIA

Este trabalho teve como finalidade iniciar o desenvolvimento de um modelo capaz de descrever a saúde de um indivíduo ou de uma população. Quando finalizado o modelo deve ser capaz de delimitar quais interações são positivas ou negativas para o indivíduo.

A pesquisa possui caráter qualitativo, já que consiste, basicamente, na qualidade dos dados a serem analisados. Além disso, a pesquisa possui natureza exploratória, que de acordo com o autor Gil (2002):

Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado (Gil, 2002, p.41).

Portanto como a pesquisa busca descrever matematicamente como um indivíduo interage com a comunidade e com o meio, o estudo também possui um caráter descritivo, já que é necessário explorar e dissecar conceitos. Com isso, Gil (2002) ainda define as pesquisas descritivas como:

As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados, tais como o questionário e a observação sistemática (Gil, 2002, p.42).

Para tanto foi necessária a revisão da literatura já existente no que toca a mecânica quântica e o formalismo de Paul A. Dirac, caracterizando assim uma pesquisa bibliográfica e documental. Os resultados obtidos foram alcançados por meio de métodos indutivos e dedutivos.



### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 O experimento de Stern-Gerlach e o surgimento do Spin.

O experimento Stern-Gerlach (SG) foi proposto pelo físico alemão Otto Stern (1888-1969) e realizado pelo físico Alemão Walther Gerlach (1888-1979). O experimento tinha como objetivo averiguar se o momento angular de átomos neutros era ou não quantizado na presença de um campo magnético externo (quantização espacial). A quantização espacial foi proposta pelo físico dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962) no seu modelo planetário para o átomo, onde apenas algumas órbitas seriam permitidas para o elétron, mais especificamente aquelas onde o momento angular do elétron fosse quantizado (Gomes; Pietrocola, 2011):

$$L = n\hbar, \quad (n = 1, 2, 3\dots). \quad (3.1)$$

A hipótese de Bohr encontrava um empecilho dado a descoberta do físico norte-americano Albert Abraham Michelson (1852-1931) que dizia que no espectro do hidrogênio algumas linhas espectrais dividiam-se, em linhas muito próximas entre si (estrutura fina do espectro), tornando necessária a intervenção do físico alemão Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951), que introduziu no ano de 1916 efeitos relativísticos ao modelo e considerou que os elétrons poderiam mover-se em órbitas elípticas pertencentes a diversos planos orbitais. Dessa forma, as órbitas dos elétrons em torno do núcleo seriam quantizadas não apenas em relação ao tamanho e forma como também sua orientação espacial em relação a um campo magnético externo, o que deu origem ao número quântico azimutal ( $m$ ), que se relacionava com a quantização da direção do momento angular no espaço (Gomes; Pietrocola, 2011).

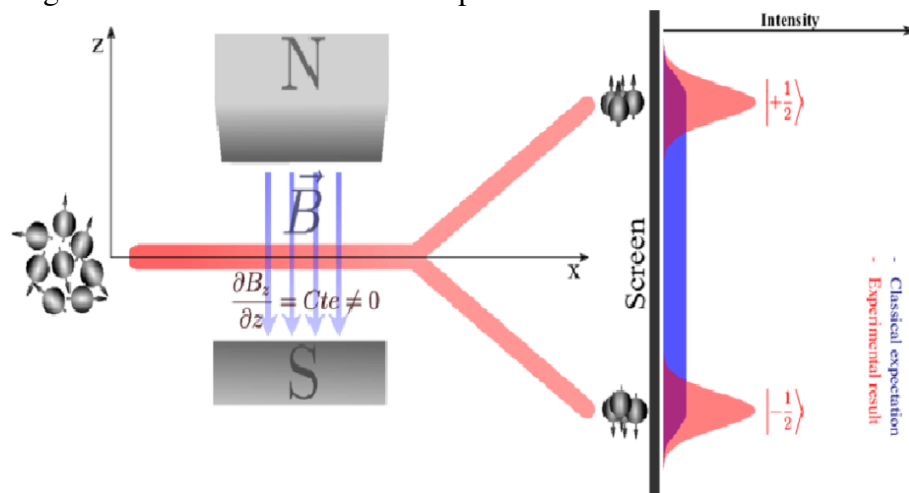
Assim, Sommerfeld conseguiu explicar o efeito Zeeman (normal) que consistia no desdobramento devido a um campo magnético externo, das linhas espectrais de um átomo previamente excitado, apesar disso, a explicação de Sommerfeld fracassava quando se levava em conta a variante anômala do efeito Zeeman que consistia na produção de um número maior de componentes espectrais quando se levava em conta átomos com mais de um elétron emparelhado (Machado, 2022).

Nesse cenário, a quantização espacial ainda não havia sido posta a prova. Com isso em mente, Stern propôs o experimento SG que tinha como vantagem não envolver nenhuma medida de espectroscopia. O experimento consistia na utilização de um pequeno forno que evaporaria

átomos de prata (escolhido devido a existência de apenas um elétron de valência, que permite enxergar o átomo de prata como um dipolo magnético, além da facilidade de manipulação do feixe se comparado a um feixe de átomos de hidrogênio), o feixe produzido era colimado até penetrar numa região com um campo magnético induzido por um eletroímã, ao final do percurso se encontrava uma placa de vidro onde os átomos de prata se depositavam. O campo em questão era não homogêneo na direção perpendicular ao deslocamento do feixe, escolha que contribuiu para a não anulação do torque induzido pelas forças exercidas nas extremidades do dipolo, que acarretaria na não alteração da trajetória da partícula (Machado, 2022).

O resultado obtido, aparentemente, corroborava com o resultado esperado segundo a teoria de Bohr: o feixe de átomos se dividiu em duas componentes ao atravessar o campo magnético externo, o resultado obtido foi então visto como uma confirmação da predição de Bohr:

Figura 1 – Resultado obtido no experimento SG



Fonte: Saideh, (2019)

A suposta confirmação da predição de Bohr durou pelo menos até a descoberta de que o momento angular do elétron de valência do átomo de prata era nulo, o que contradizia sua hipótese de que o momento angular não poderia ter valor nulo (Gomes; Pietrocola, 2011). Acontece que o suposto momento magnético medido no experimento SG era, na verdade, o momento angular de spin do elétron que também é quantizado e assume o valor de  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Dessa forma nasce o conceito de spin que foi proposto pelos físicos Samuel Abraham Goudsmit (1902-1978) e George Eugene Uhlenbeck (1900-1988) no ano de 1927 que veio a ser conceituada como uma quantidade intrínseca a partícula que não possui analogia com quantidades clássicas (Gomes; Pietrocola, 2011).

### 3.2 Descrição matemática do spin no espaço de Hilbert

O espaço de Hilbert, ou espaço de estados ( $\mathcal{E}$ ), é um espaço vetorial abstrato e complexo cujo seus vetores possuem como componentes as variáveis de estado, que podem ou não serem quantidades físicas (Prugovečki, 1981), e são postulados de modo que contenham todas as características do estado físico em questão. O dito espaço ainda é possuinte das seguintes características (Zettili, 2009):

1. Os vetores, ket's, pertencentes ao espaço de Hilbert são denotados por:

$$|\alpha\rangle; |\beta\rangle; |\psi\rangle \dots \quad (3.2)$$

2. Os ket's:

$$c|\alpha\rangle \quad \text{e} \quad |\alpha\rangle. \quad (3.3)$$

Denotam um mesmo estado

3. Os vetores pertencentes ao espaço de Hilbert obedecem o principio da superposição linear:

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle = c|\gamma\rangle. \quad (3.4)$$

4. Para cada vetor ket pertencente ao espaço de Hilbert  $H$  existe um vetor bra pertencente ao espaço de Hilbert  $H_d$ . Em especial, para um ket générico dado por  $c|\alpha\rangle$ , tem o seguinte vetor bra:

$$c^* \langle \alpha|. \quad (3.5)$$

5. O espaço de Hilbert é completo sobre a operação de produto interno (produto escalar). Escrevemos o produto escalar entre dois vetores desse espaço como:

$$\langle d\beta|c\alpha\rangle = cd^* \langle \beta|\alpha\rangle. \quad (3.6)$$

Sendo  $c$  e  $d$  números complexos, resulta em um terceiro número complexo e seu complexo conjugado é tal que:

$$(\langle d\beta|c\alpha\rangle)^* = (cd^* \langle \beta|\alpha\rangle)^* = c^* d \langle \alpha|\beta\rangle. \quad (3.7)$$

6. O modulo de um certo vetor de estado  $|\alpha\rangle$  será sempre maior ou igual zero, de modo que:

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha|\alpha\rangle} \geq 0. \quad (3.8)$$

Caso o resultado do produto interno acima seja zero ou um, dizemos que o ket de estado  $|\alpha\rangle$  é um vetor nulo ou um vetor normalizado, respectivamente.

7. Dois vetores  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  serão ditos ortonormalizados se:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = 0. \quad (3.9)$$

8. Dado um operador observável A operando sobre o espaço de estados  $\mathcal{E}$  e um conjunto de ket's de estado ortonormalizados  $\{|\alpha_n\rangle\}$  com  $n=1,2,\dots$ . Sendo  $n$  a dimensionalidade do espaço de Hilbert definida pelo grau de liberdade do sistema analisado, desde que o conjunto desses ket's constituam os autovetores do operador A no referido espaço de Hilbert, isto é:

$$A|\alpha_n\rangle = c_n|\alpha_n\rangle. \quad (3.10)$$

Sendo  $c_n$  os autovalor associado ao autovetor  $|\alpha_n\rangle$  e representa a medida do autovetor referente a quantidade medida pelo operador A. Os vetores pertencentes a esse conjunto definirão uma base para o espaço de Hilbert sobre o operador A, de modo que para qualquer vetor pertencente a esse espaço, temos

$$|\phi\rangle = \sum_n a_n |\alpha_n\rangle = \sum_n \langle\alpha_n|\phi\rangle |\alpha_n\rangle. \quad (3.11)$$

No caso de uma base discreta ( $n$  finito). Ou ainda:

$$|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\alpha|\phi\rangle |\alpha\rangle d\alpha. \quad (3.12)$$

No caso de uma base contínua.

Caso isso ocorra, a referida base obedece a relação de fechamento de modo que:

$$\sum_n |\alpha_n\rangle \langle\alpha_n| = 1. \quad (3.13)$$

Para o caso de uma base discreta, e ainda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha\rangle \langle\alpha| d\alpha = 1. \quad (3.14)$$

9. O produto tensorial entre dois espaços de Hilbert,  $H_\alpha$  e  $H_\beta$ , resulta num terceiro espaço de estado chamado de espaço de Fock  $F_{\alpha\beta}$ . Esse espaço de estado é usado para descrever sistemas de duas partículas.

Voltando nossa atenção a descrição do spin, vimos na subseção anterior, que o spin é conceituado como uma quantidade intrínseca a partícula sem qualquer analogia com quantidades clássicas.

Vimos também que a componente z do spin só possui dois possíveis valores  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , de modo que o spin só possui dois estados acessíveis: 'up' ( $+\frac{\hbar}{2}$ ) e 'down' ( $-\frac{\hbar}{2}$ ) e enquanto não for realizada uma medição sobre o spin (observável) o mesmo pode se encontrar em qualquer um dos dois estados, se encontrando portanto numa superposição de estados (Sakurai; Napolitano, 1933). Assim, a componente z do spin só possui dois graus de liberdade e a dimensionalidade do seu espaço de estado é dois.

Partindo da propriedade de número oito (3.10), construímos um operador  $S_z$  e dois autovetores do referido operador pertencentes ao espaço de estado  $\varepsilon_s$  de modo que (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a):

$$\begin{aligned} S_z |\uparrow\rangle &= +\frac{\hbar}{2}, \\ S_z |\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Afim de que os autovetores do operador  $S_z$  (3.15) constituam uma base do espaço de Hilbert  $\varepsilon_s$ , os definimos de modo que sejam ortonormalizados, obedecendo portanto a propriedade de número sete (3.9). Assim, a base do referido espaço de estado possui uma base discreta dada por (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a):

$$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}. \quad (3.16)$$

Desse modo, um vetor genérico pertencente a esse espaço de estado pode ser escrito por meio da superposição (combinação linear) entre os vetores de base:

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle. \quad (3.17)$$

Note que das propriedades atribuídas aos vetores de base, temos que:

$$\begin{aligned} |\langle \uparrow | \psi \rangle|^2 &= |\alpha|^2, \\ |\langle \downarrow | \psi \rangle|^2 &= |\beta|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Partindo de uma interpretação probabilística, podemos dizer que os valores de  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  denotam as probabilidades do spin possuir valor 'up' ou valor 'down' respectivamente e como

esses são os dois únicos estados acessíveis, os referidos valores devem ser tais que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a)

### 3.3 Descrição matemática do Spin em um sistema de múltiplas partículas

A descrição do spin de um sistema de duas ou mais partículas depende diretamente das descrições individuais de cada uma das partículas. Deve-se levar em conta que cada partícula, individualmente, possui seu próprio estado de spin que, como já vimos, possui dois estados acessíveis.

No caso de um sistema de duas partículas, digamos que o vetor de estado para o spin da primeira partícula possui representação no espaço de estado  $\mathcal{E}_{S_1}$ , de modo que sua base se escreve:

$$\{|\uparrow_1\rangle, |\downarrow_1\rangle\}. \quad (3.19)$$

Já a segunda partícula possui um vetor de estado para o spin representado no espaço de estados  $\mathcal{E}_{S_2}$  cujo a base se escreve:

$$\{|\uparrow_2\rangle, |\downarrow_2\rangle\}. \quad (3.20)$$

Afim de descrever o estado do spin do sistema formado pelas partículas (1) e (2) é necessário efetuar um produto tensorial entre as bases das partículas, efetuando esse produto obtemos a seguinte base (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a):

$$\{|\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle, |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle, |\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle, |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle\}. \quad (3.21)$$

A base descrita acima é usada para estudar o estado do spin de um sistema de duas partículas, essa base constrói o que chamamos de espaço de Fock. A base do espaço de Fock é simplesmente o produto tensorial das bases dos espaços de estado de todas as partículas que formam o sistema (Negele; Orland, 1988), retornaremos a esse espaço na seção 3.3.1. Um vetor arbitrário pertencente ao espaço de Fock definido para as partículas (1) e (2) é:

$$|\psi_{1,2}\rangle = ac |\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle + ad |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle + bc |\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle + bd |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle. \quad (3.22)$$

Note que se definirmos os vetores de estado para o spin das partículas (1) e (2), respectivamente, como:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= c|\uparrow_2\rangle + d|\downarrow_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O vetor de estado da expressão (3.22) é simplesmente o produto tensorial entre os vetores de estado para o spin das partículas (1) e (2). Note ainda que se  $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$ , então:

$$(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) = |ac|^2 + |ad|^2 + |bc|^2 + |bd|^2 = (|c|^2 + |d|^2)^2 = 1. \quad (3.24)$$

Com isso, desde que os vetores base de estado das partículas encontrem-se ortonormalizados, o vetor de estado resultante do produto tensorial também encontrar-se-ão normalizado, veremos a seguir que essa é uma condição suficiente, mas não necessária.

### 3.3.1 Vetores de estado no espaço de Fock: representação para Bósons e Férmions

A definição proveniente da base encontrada na expressão (3.21) está correta, mas não completa. Acontece que na física quântica o tipo de partícula define as interações possíveis entre os estados das partículas. A principal razão para isso é o tipo de interação resultante de um sistema de  $n$  Bósons ou  $n$  Férmions interagindo entre si.

Os Bósons são partículas quânticas indistinguíveis que possuem spin inteiro, além disso um número qualquer de Bósons pode ocupar qualquer um dos estados acessíveis (F.Reif, 2009). Com isso, um vetor de estado spin para dois Bósons é dado, de forma geral, pela expressão (3.22).

Já os Férmions são partículas quânticas indistinguíveis que possuem spin semi inteiro, além de que apenas uma partícula pode ocupar cada estado acessível (F.Reif, 2009). Portanto, os Férmions são todas as partículas que obedecem o principio da exclusão formulado pelo físico austríaco Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) que diz que "não pode haver no mesmo átomo dois elétrons com os quatro números quânticos iguais"(Silva, 2021, p. 15 apud Pauli[s.d]).

Assim um vetor de estado spin, não normalizado, para dois Férmions é dado, de forma geral, por:

$$|\psi_{1,2}\rangle = |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |\uparrow_2\rangle|\downarrow_1\rangle. \quad (3.25)$$

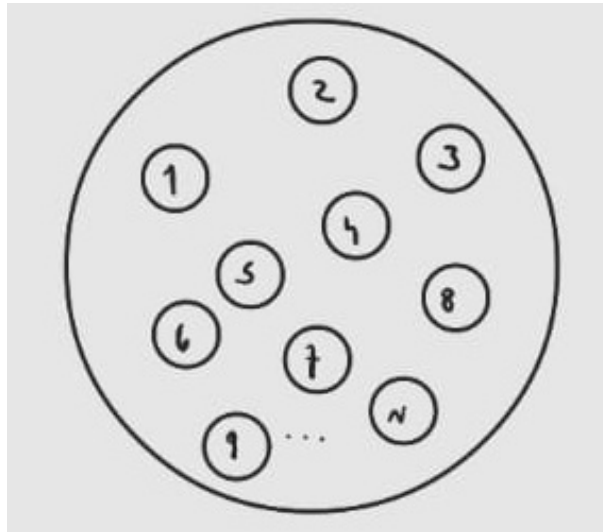
Note que o vetor de estado para o spin da expressão (3.25) não pode ser expresso pelo produto tensorial entre dois vetores de estado spin, dizemos então que as partículas (1) e (2) encontram-se em um estado emaranhado (Desai, 2010).

Do princípio da exclusão de Pauli os spin's das partículas (1) e (2) não podem ocupar um mesmo estado, com isso o estado do spin da primeira partícula define o estado do spin da segunda partícula. Além do mais, o sinal de menos na expressão de número (3.25) indica que, caso o estado partículas de um dos vetores de estado permutem, o vetor de estado  $|\psi_{1,2}\rangle$  passará a ter valor nulo, indicando, matematicamente, que não pode haver mais de uma partícula por estado acessível (F.Reif, 2009). Podemos então dizer que em um emaranhado o estado de uma partícula afeta o estado da outra partícula.

### 3.4 Matriz densidade

Em algumas situações um sistema físico (ensemble) é formado por N sistemas puros, denota-se por sistema puro um sistema físico em que todos os seus integrantes ocupam um mesmo estado, e um sistema físico formado por N sistemas puros é chamado de sistema misto (Sakurai; Napolitano, 1933):

Figura 2 – Ensemble misto formado por N ensemble's puros



Fonte: Próprio Autor



Em situações como essa, os membros integrantes de cada um dos N sistema puro ocupam um mesmo estado  $|\psi_i\rangle$  que descreve totalmente o sistema puro mas não o sistema misto. A descrição do sistema misto envolve a matriz densidade  $\rho$  dada por (Sakurai; Napolitano, 1933):

$$\rho = \sum_{j=1}^N \omega_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (3.26)$$

A quantidade  $\omega_j$  é chamado de população fracionaria e tem seu valor numérico expresso pela fração de entes que constituem o ensemble misto que ocupam o j-ésimo ensemble, obviamente os N valores associados aos N ensembles puros devem ser tais que (Sakurai; Napolitano, 1933):

$$\sum_j^N \omega_j = 1. \quad (3.27)$$

Caso o j-ésimo ensemble ocupe um estado  $|\psi_j\rangle$ , tal que:

$$|\psi_j\rangle = C_{j+} |\uparrow_j\rangle + C_{j-} |\downarrow_j\rangle. \quad (3.28)$$

Temos que:

$$\langle \uparrow_j | \rho | \uparrow_j \rangle = \omega_j |C_{j+}|^2. \quad (3.29)$$

Que denota a probabilidade do ensemble misto encontrar-se no estado  $|\psi_j\rangle$  ( $\omega_j$ ) e no estado característico  $|\uparrow_j\rangle$  ( $|C_{j+}|^2$ ) (Sakurai; Napolitano, 1933).

### 3.5 O caráter abstrato do espaço de estado e da sua representação do spin

O caráter abstrato do espaço de estado reside no fato de que as variáveis que constituem seus vetores não são, necessariamente, quantidades físicas. Como vimos na subseção anterior, a única variável de estado para o spin é sua "direção" que não corresponde ao conceito de direção da geometria e da mecânica clássica, portanto essa variável e sua representação no espaço de estado são característica abstratas atribuídas a partículas por meio de observações experimentais (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a).

Partindo dessa interpretação, uma pergunta interessante surge: seria possível descrever quantidades que, assim como o spin, possuem valores binários e que, até que se faça uma medida, podem possuir qualquer um desses dois valores por meio de uma analogia ao spin e a sua descrição? A resposta é sim e veremos uma dessas descrições na seção a seguir.

### 3.6 Qubit: o bit quântico

O qubit caracteriza uma unidade básica de processamentos e, matematicamente, é um vetor de dois números complexos e de módulo unitário. Diferente do bit, que possui valor zero ou um, o qubit é construído de modo que se encontre numa superposição entre esses dois estados e assim o valor real do qubit só poderá ser encontrado após uma medição, desse modo um qubit genérico pode ser escrito como (Verísimo, 2020):

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (3.30)$$

O vetor de estado para o qubit é construído sobre a seguinte base ortonormal (Chagas, 2020):

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}. \quad (3.31)$$

E assim como o spin, o qubit só pode possuir valor zero ou um, de modo que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Ainda é possível construir um sistema de n-qubits análogo a um sistema de n-partículas por meio do produto tensorial entre os vetores de estado dos qubit em questão (Chagas, 2020). Em especial, tomemos um sistema formado por dois qubits, onde o primeiro deles é escrito sobre a base:

$$\{|0_1\rangle, |1_1\rangle\}. \quad (3.32)$$

Já o segundo qubit é escrito sobre a base:

$$\{|0_2\rangle, |1_2\rangle\}. \quad (3.33)$$

Assim, os vetores de estado para qubits um e dois escritos nas bases acima seriam, respectivamente:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \alpha_1 |0_1\rangle + \beta_1 |1_1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= \alpha_2 |0_2\rangle + \beta_2 |1_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Efetuando o produto tensorial entre esses dois vetores de estado obtemos:

$$|\psi_{1,2}\rangle = a_1 a_2 |0_1\rangle |0_2\rangle + a_1 b_2 |0_1\rangle |1_2\rangle + b_1 a_2 |1_1\rangle |0_2\rangle + b_1 b_2 |1_1\rangle |1_2\rangle. \quad (3.35)$$

O vetor de estado expresso acima é chamado de crumb (Chagas, 2020) e é usado para expressar o estado de um sistema de dois qubits. Note que se fizermos um produto tensorial entre as bases dos qubits um e dois obtemos o seguinte:

$$\{|0_1\rangle |0_2\rangle, |0_1\rangle |1_2\rangle, |1_1\rangle |0_2\rangle, |1_1\rangle |1_2\rangle\}. \quad (3.36)$$

A expressão acima pode ser usada para escrever o vetor de estado para o crumb, sendo portanto uma base. Note que a base em questão é análoga a base do espaço de Fock para um sistema de dois Bósons e o mesmo ocorre para o vetor de estado do crumb quando comparado ao vetor de estado para um sistema de dois Bósons. Sobre essa ótica, podemos dizer que os qubits são quantidades que se comportam de forma análoga aos Bósons, ou melhor: foram construídos de forma que apresentassem esse comportamento.

Também é possível que estado de um sistema de dois qubits não possa ser representado por um produto tensorial entre dois qubits, nesse caso dizemos que o qubit encontra-se emaranhado. Algumas possibilidades para dois qubits emaranhados são (Chagas, 2020):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle), \\ |\psi\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}(|0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Note que, assim como no estado de partículas emaranhadas (3.25), o emaranhamento de qubits denota uma situação onde o estado de um dos qubits é definido pelo estado do outro qubit.

A utilização dos qubits pelos computadores quânticos permite armazenar uma quantidade muito maior de dados do que os bits tradicionais, além disso trás melhorias consideráveis aos sistemas de criptografia e capacita os computadores quânticos a realizar cálculos avançados impossíveis, até mesmo, para os supercomputadores clássicos (IBM, 2024).

### 3.7 Indicadores de saúde

Segundo a Pan American Health Organization (PAHO) os indicadores de saúde são quantidades que procuram descrever e monitorar a saúde de um indivíduo ou de uma população (PAHO, s.d). Nesse sentido, três indicadores são de nosso particular interesse: I) indicador de incidência; II) indicador de prevalência e III) indicador de mortalidade.

Quanto a descrição e a obtenção dessas medidas, a Universidade Federal de Santa Catarina possui um módulo didático de epidemiologia organizado pelos pesquisadores Antônio Fernando Boing, Eleonora D’Orsi e Calvino Reibnitz (2016) em que dá as seguintes definições para os indicadores:

- Incidência: Frequência com que novos casos surgem em um dado local e período;
- Mortalidade: Taxa de óbitos por uma determinada doença que acomete uma certa população;
- Prevalência: Número total de casos de uma determinada doença em um determinado local e no momento que ocorre.

Quanto as fórmulas, eles analisam os índices descritos acima da seguinte maneira:

$$\text{Incidência} = \frac{\text{Número de novos casos em um determinado período de tempo}}{\text{Número de pessoas expostas ao risco no mesmo período}}. \quad (3.38)$$

$$\text{Mortalidade} = \frac{\text{Número de óbitos}}{\text{população em risco}}. \quad (3.39)$$

$$\text{Prevalência} = \frac{\text{Número de casos existentes de uma determinada doença}}{\text{Número de pessoas na população no mesmo período}}. \quad (3.40)$$

## 4 RESULTADOS

Pensemos na seguinte situação hipotética para entendermos o método que segue: um cientista deseja dividir a humanidade em dois grandes grupos, o primeiro constituído por pessoas que gostam de um determinado programa de TV e o outro constituído por pessoas que não gostam desse mesmo programa.

Com isso, o cientista foi capaz de dividir a humanidade em dois grandes grupos:

$$H = [\textit{Pessoas que gostam do programa}] + [\textit{Pessoas que não gostam do programa}]. \quad (4.1)$$

Aqui H denota a população mundial.

Pode-se ainda complicar as coisas, digamos que um terceiro fator foi levado em consideração, por exemplo, se o indivíduo consome ou não o programa em questão. Com isso o cientista divide a humanidade em, pelo menos, quatro grandes grupos: I) Indivíduos que gostam e consomem o programa. II) Indivíduos que gostam e não consomem programa. III) Indivíduos que não e consomem o programa e IV) Indivíduos que não gostam e não consomem o programa:

$$H = [I] + [II] + [III] + [IV]. \quad (4.2)$$

Digamos agora que o cientista deseja levar em conta mais um fator, o número de grupos deve aumentar para que possa conter todas as possíveis configurações que um indivíduo pode ter levando em conta esses quatro fatores. Assim, quanto maior for a quantidade de fatores maior será a quantidade de grupos exigida e menor será a quantidade de indivíduos presente em cada grupo, tornando cada grupo mais específico e ,portanto, dificultando a diferenciação entre os integrantes.

Apesar de ser verdade que dividir a humanidade em conjuntos exigiria muito mais fatores, ou melhor, fatores suficientes para distinguir totalmente um indivíduo do outro. Esse simples porém curioso exercício mental nos mostra o cerne de todo esse trabalho: é possível dividir a humanidade em conjuntos finitos desde que se leve em conta os fatores adequados.

Algumas observações importantes:

- Cada individuo deve ser considerado como um sistema de n quantidades binárias. Cada quantidade binária será representada como o spin de uma partícula partícula.

- O número  $n$  de quantidades binárias será escolhido com base na quantidade de aspectos da vida do indivíduo que devem ser analisados.
- Constantes de quantização não serão consideradas.
- Cada aspecto da vida estudado exigirá um espaço de estado distinto.

#### 4.1 Um único estado

Como já mencionado, consideraremos um indivíduo como um sistema constituído por  $n$  quantidades binárias e quanto maior o número de quantidades binárias consideradas maior será a quantidade de fatores que poderão ser analisados, cada quantidade binária será expressa matematicamente por um ket de estado semelhante ao usado na representação do spin, construiremos também algumas possíveis interações simples entre duas ou mais quantidades, apenas no âmbito matemático, de acordo com a natureza dessas quantidades.

Nesse sentido, começamos definindo um espaço de Hilbert ( $\mathcal{E}$ ) semelhante ao utilizado para estudar o spin de uma partícula. A base escolhida é semelhante a base obtida por meio do observável  $S_z$  para o spin (3.10), de modo que a base é simplesmente:

$$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}. \quad (4.3)$$

Os vetores de base também são ortonormalizados (3.9), ou seja:

$$\begin{aligned} \langle\downarrow|\uparrow\rangle &= \langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0, \\ \langle\uparrow|\uparrow\rangle &= \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Além disso, a base manifesta completude (3.13), de modo que:

$$|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1. \quad (4.5)$$

Um ket de estado genérico pertencente a esse espaço de estado é simplesmente:

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle. \quad (4.6)$$

E sendo a base ortonormalizada:

$$\begin{aligned} |\langle \uparrow | \psi \rangle|^2 &= |a|^2, \\ |\langle \downarrow | \psi \rangle|^2 &= |b|^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A construção é análoga a realizada para a descrição do spin, de modo que os valores  $|a|^2$  e  $|b|^2$  devem expressar a probabilidade do indivíduo encontrar-se no estado spin 'up' e spin 'down', respectivamente.

Podemos escolher qualquer característica que, com as devidas simplificações, possa ser dividida em valores binários e, até que se realize alguma medida, seu estado encontre-se em uma superposição de estados e como só há dois estados acessíveis para essa característica, os valores de  $a$  e  $b$  devem ser tais que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

Digamos, por exemplo, que fosse necessário dividir a humanidade em dois grupos: I) Pessoas que não se encontram em situação de rua e II) pessoas que se encontram em situação de rua de modo que só precisamos de um único espaço de estado para descrever a população sobre essa característica. Podemos denotar o primeiro grupo como um estado de spin 'down' e o segundo como um spin 'up', como não é possível que um indivíduo encontre-se e não encontre-se em situação de rua não há superposição de estados, e teríamos simplesmente:

$$|\psi\rangle = |\downarrow\rangle. \tag{4.8}$$

Para o primeiro grupo. E ainda:

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle. \tag{4.9}$$

Para o segundo grupo.

Não parece interessante. Uma outra descrição, mais interessante matematicamente que a primeira, pode ser obtida ao analisar-se um fator de suma importância para a vida: o fator saúde.

## 4.2 ket's de Estado para o Fator Saúde

Segundo o ministério da saúde (Ministerio da Saúde, 2020) uma definição simples de saúde é a ausência de doenças. Dada uma doença específica, um indivíduo pode *ou* não

desenvolve-la e caso a desenvolva pode *ou* não ir a óbito em decorrência dela. Assim, podemos analisar o caráter binário da saúde como uma superposição entre um estado onde se está doente e um estado onde não se está doente e ainda analisar o estado do indivíduo como uma superposição entre um estado onde se vai a óbito e um estado onde não se vai a óbito em decorrência da doença em questão.

Note que para uma única doença temos duas características que possuem um caráter de superposição, mostra-se necessária então a construção de dois espaços de estado: um dedicado ao ket de estado referente ao estado da doença e o outro dedicado ao ket de estado do indivíduo acometido pela doença, com isso devemos ser capazes de construir ket's de estado capazes de expressar a probabilidade do indivíduo desenvolver a doença analisada e vir a óbito em decorrência dela. As bases para os espaços de estado desses ket's serão construídos de forma análoga ao da subseção anterior. Nosso trabalho agora se resume a definir as densidades de probabilidade para cada um dos ket's.

Para definir as densidades de probabilidade, recorreremos aos já mencionados indicadores de saúde (subseção 3.6). Das definições expostas vemos que a incidência denota a probabilidade de um indivíduo pertencente a um certo grupo (pessoas expostas ao risco) desenvolver uma certa doença, já a mortalidade denota a probabilidade de um indivíduo acometido pela mesma doença ir a óbito e a prevalência se aplica a população e denota a taxa de indivíduos acometidos por uma doença nessa população, seja essa doença analisada isoladamente ou pertencente a um conjunto maior de doenças (falaremos mais sobre essa característica na subseção 4.2.3). Vale notar que esses indicadores, com exceção do indicador prevalência, se aplicam a cada doença separadamente, de modo que para cada doença precisamos definir um ket de estado incidência pertencente ao espaço de estado incidência ( $\epsilon_i$ ), um ket de estado mortalidade pertencente ao espaço de estado mortalidade ( $\epsilon_m$ ) e por fim um ket de estado prevalência pertencente ao espaço de estado prevalência ( $\epsilon_p$ ).

#### **4.2.1 ket de estado incidência**

De forma análoga a seção anterior, definimos a base do espaço de estado  $\epsilon_i$  da seguinte forma:

$$\{|\uparrow_i\rangle, |\downarrow_i\rangle\}. \quad (4.10)$$



Onde o spin 'up' denota o estado onde o individuo não desenvolve a doença em questão e o spin 'down' denota o estado onde o individuo a desenvolve. Definida nossa base e levando em conta que, até que se faça um exame, o individuo pode ou não estar doente, podemos escrever um ket de estado incidência, pertencente ao referido espaço de estado, por meio de uma superposição dos estados que constituem a base do espaço  $\epsilon_i$  (combinação linear entre os vetores da base):

$$|\psi_i\rangle = a|\uparrow_i\rangle + b|\downarrow_i\rangle. \quad (4.11)$$

O valor de b, quando seu módulo for elevado ao quadrado, deve expressar a probabilidade do individuo desenvolver a doença analisada, portanto deve corresponder a incidência da doença em questão. E como o individuo só pode ocupar um desses dois estados (acometido/não acometido), o índice a deve ser tal que:

$$|a|^2 = 1 - |b|^2. \quad (4.12)$$

O que torna o ket de estado incidência normalizado. Podemos, de forma análoga, definir um segundo espaço de estado ( $\epsilon_{i'}$ ) usado para estudar uma segunda doença. Esse espaço deve possuir base semelhante ao do espaço de estado  $\epsilon_i$ . Partindo disso, base desse espaço deve ser tal que:

$$(|\uparrow_{i'}\rangle, |\downarrow_{i'}\rangle). \quad (4.13)$$

E um ket de estado incidência genérico pertencente ao espaço de estado  $\epsilon_{i'}$  poderá ser escrito como:

$$|\psi_{i'}\rangle = a'|\uparrow_{i'}\rangle + b'|\downarrow_{i'}\rangle. \quad (4.14)$$

Sabendo que nada impede que um individuo venha a ser acometido pelas duas doenças e levando em conta que estamos tratando cada uma das doenças como se fosse um spin, podemos efetuarmos um produto tensorial entre os espaços de estado das doenças um e dois, obtendo assim o seguinte espaço de Fock:

$$\epsilon_i \otimes \epsilon_{i'} = F_{ii'}. \quad (4.15)$$

No nosso caso esse espaço será usado para estudar o estado do individuo quanto a alguma combinação das doença um (acometido/não acometido)  $e$  dois (acometido/não acometido).

Efetuando um produto direto entre as bases dos dois espaços de estado obtemos:

$$(|\uparrow_i\rangle, |\downarrow_i\rangle) \otimes (|\uparrow_{i'}\rangle, |\downarrow_{i'}\rangle) = (|\uparrow_i\rangle |\uparrow_{i'}\rangle, |\uparrow_i\rangle |\downarrow_{i'}\rangle, |\downarrow_i\rangle |\uparrow_{i'}\rangle, |\downarrow_i\rangle |\downarrow_{i'}\rangle). \quad (4.16)$$

Que será a base para o espaço de Fock. Da esquerda para direita temos os seguintes estados:

- O individuo não desenvolveu a doença um  $e$  não desenvolveu a doença dois.
- O individuo não desenvolveu a doença um  $e$  e desenvolveu a doença dois.
- O individuo desenvolveu a doença um  $e$  não desenvolveu a doença dois.
- O individuo desenvolveu a doença um  $e$  desenvolveu a doença dois.

Podemos agora escrever um ket de estado pertencente ao espaço de Fock  $F_{ii'}$  por meio do produto tensorial entre os ket's pertencente ao espaços de estado  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_{i'}$ :

$$|\psi_{ii'}\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\psi_{i'}\rangle = aa' |\uparrow_i\rangle |\uparrow_{i'}\rangle + ab' |\uparrow_i\rangle |\downarrow_{i'}\rangle + ba' |\downarrow_i\rangle |\uparrow_{i'}\rangle + bb' |\downarrow_i\rangle |\downarrow_{i'}\rangle. \quad (4.17)$$

Esse ket de estado é útil para estudarmos as possíveis combinações de estado entre duas doenças. Um processo semelhantes deve ser realizado se tivermos o interesse de estudar uma combinação de três ou mais doenças.

Também é possível que um individuo desenvolva uma certa doença e não tenha o conhecimento que se encontra acometido por ela. Falaremos mais sobre essa possibilidade na subseção a seguir.

É interessante notar que um ket incidência isolado é capaz de descrever todo o sistema, já que dada uma doença a população que compõe o sistema analisado só possui dois estados acessíveis (acometido/não acometido). Apesar disso, um único ket de estado incidência não é capaz de descrever todo o sistema se considerarmos mais de uma doença, isso se dá pelo fato de que não nada que impeça que uma mesma população (ou individuo) padeça de uma ou mais doenças.

A caracterização total do sistema dependerá da natureza do indicador analisado, no caso do indicador incidência basta efetuar um produto tensorial entre os ket's que caracterizam cada uma das doenças, como vimos anteriormente.

### 4.2.2 *ket de estado mortalidade*

Definimos agora o espaço de estado mortalidade ( $\varepsilon_m$ ), que será usado para estudar as chances do individuo ir ou não a óbito em decorrência de uma doença caso encontre-se acometido por ela. Sua base é tal que:

$$\{|\uparrow_m\rangle, |\downarrow_m\rangle\}. \quad (4.18)$$

Onde o spin 'up' denota o estado onde o individuo sobrevive e o spin 'down' denota o estado onde o individuo vai a óbito. Como o individuo pode ou não ir a óbito em decorrência da doença analisada, escrevemos então um ket de estado mortalidade pertencente ao espaço de estado mortalidade por meio de uma superposição dos estados de base:

$$|\psi_m\rangle = c|\uparrow_m\rangle + d|\downarrow_m\rangle. \quad (4.19)$$

Semelhante ao ket incidência os valores d e c devem expressar a probabilidade do individuo ir e não ir a óbito. Assim, o valor de d deve ser a mortalidade associada a doença analisada e o valor de c tal que:

$$|c|^2 = 1 - |d|^2. \quad (4.20)$$

O que torna o ket de estado mortalidade também normalizado. Podemos ainda definir um segundo espaço de estado mortalidade ( $\varepsilon_{m'}$ ), cujo a base:

$$\{|\uparrow_{m'}\rangle, |\downarrow_{m'}\rangle\}. \quad (4.21)$$

E um ket de estado mortalidade pertencente a esse espaço de estado seria:

$$|\psi_{m'}\rangle = c'|\uparrow_{m'}\rangle + d'|\downarrow_{m'}\rangle. \quad (4.22)$$

Poderíamos agora efetuar um produto tensorial entre os ket's pertencentes ao espaço de estado  $\varepsilon_m$  e  $\varepsilon_{m'}$ , no entanto o ket resultante não parece ter um significado coerente. Ao efetuarmos um produto tensorial entre as bases dos referidos espaços de estado obtemos a seguinte base:

$$(|\uparrow_m\rangle, |\downarrow_m\rangle) \otimes (|\uparrow_{m'}\rangle, |\downarrow_{m'}\rangle) = (|\uparrow_m\rangle |\uparrow_{m'}\rangle, |\uparrow_m\rangle |\downarrow_{m'}\rangle, |\downarrow_m\rangle |\uparrow_{m'}\rangle, |\downarrow_m\rangle |\downarrow_{m'}\rangle). \quad (4.23)$$

Como a mortalidade denota a probabilidade de um individuo acometido por uma determinada doença ir a óbito em decorrência dela, temos da esquerda para direita os seguintes estados:

- O individuo não vai a óbito em decorrência da primeira doença  $e$  não vai a óbito em decorrência da segunda doença.
- O individuo não vai a óbito em decorrência da primeira doença  $e$  vai a óbito em decorrência da segunda doença.
- O individuo vai a óbito em decorrência da primeira doença  $e$  não vai a óbito em decorrência da segunda doença.
- O individuo vai a óbito em decorrência da primeira doença  $e$  vai a óbito em decorrência da segunda doença.

Note que o último estado exigiria que o individuo em questão morresse mais de uma vez: uma vez pela primeira doença e uma vez pela segunda, no entanto só se pode morrer uma única vez.

Um resultado mais coerente surge quando multiplicamos os ket's de estado incidência e mortalidade de uma determinada doença. Efetuando um produto tensorial entre os vetores dos espaços de estado  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_m$  obtemos o seguinte:

$$|\psi_i\rangle \otimes |\psi_m\rangle = ac |\uparrow_i\rangle |\uparrow_m\rangle + ad |\uparrow_i\rangle |\downarrow_m\rangle + bc |\downarrow_i\rangle |\uparrow_m\rangle + bd |\downarrow_i\rangle |\downarrow_m\rangle. \quad (4.24)$$

Dá esquerda para a direita temos seguintes estados:

- O individuo não desenvolve a doença  $e$  não vai a óbito em decorrência dela.
- O individuo não desenvolve a doença  $e$  vai a óbito em decorrência dela.
- O individuo desenvolve a doença  $e$  não vai a óbito em decorrência dela.
- O individuo desenvolve a doença  $e$  vai a óbito em decorrência dela.

Com exceção do segundo, todos os estados acima possuem uma interpretação clara. O segundo estado pode parecer contraditório a priori, como podemos interpretar um estado onde um individuo não desenvolve uma certa doença mas vai a óbito em decorrência dela? A resposta depende da causa da morte em questão.

Como mencionamos na subseção anterior, pode acontecer do individuo padecer de uma determinada doença sem que tenha ciência disso. A superposição de estados corroborará com esse cenário pois seu significado é de que a partícula em questão pode estar em qualquer um dos estados que descrevem seu ket de estado, isso não significa que a partícula possui dois (ou mais) estados mas sim que há dois (ou mais estados) acessíveis a ela. O que irá definir em qual estado a partícula se encontra é um experimento realizado sobre a partícula (um observável). Desse modo, caso uma doença não tenha sido testada (observável 1), ou caso trate-se de uma doença assintomática (observável 2), pode muito bem acontecer do individuo ir a óbito devido a ela sem sequer saber que era acometido por ela.

Ainda podem ocorrer erros médicos. Segundo o portal CNN Brasil (CNN, 2023) houveram, só no ano de 2022, cerca de seis mil eventos que resultaram em pacientes mortos ou com graves sequelas devido a erros médicos. Nessa situação o individuo vai a óbito por um erro médico sem que se encontre acometido por uma determinada doença de modo que podemos interpretar esse estado como um óbito devido a uma doença ao qual o individuo não tinha conhecimento ou a um erro médico.

Logo, o ket de estado apresentado acima pode ser usado para analisar as possíveis combinações entre o estado do individuo referente a doença (acometido/não acometido; acometido rastreado/não rastreado) e o estado que será ocupado pelo individuo em decorrência da doença (vivo/morto). O espaço de Fock ao qual esse ket pertence possui a seguinte base:

$$\{|\uparrow_i\rangle|\uparrow_m\rangle, |\uparrow_i\rangle|\downarrow_m\rangle, |\downarrow_i\rangle|\uparrow_m\rangle, |\downarrow_i\rangle|\downarrow_m\rangle\}. \quad (4.25)$$

Afim de fazer uma descrição total do sistema físico quanto ao indicador mortalidade torna-se necessário o uso da matriz densidade vista na seção (3.4) e isso ocorre, mais uma vez, devido a natureza do indicador mortalidade. Note que um ket mortalidade para uma determinada doença só caracteriza a população que padece da doença analisada, ao considerarmos mais de uma doença o sistema físico será dividido em N sistemas puros (sendo N a quantidade de doenças analisadas) que caracteriza-rá apenas a população que padece da doença em questão.

### 4.2.3 *ket de estado prevalência*

Um terceiro ket de estado que pode ser definido é o ket de estado prevalência. Da definição exposta na subseção (3.7), a prevalência denota a taxa de individuo acometidos por

uma determinada doença numa certa população.

Sobre esse indicador, a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) ainda diz que a prevalência para uma determinada doença funciona como uma "fotografia da da sua ocorrência". Por meio dessa interpretação podemos estender o conceito de prevalência a um grupo de doenças de um mesmo tipo ou causa. Por exemplo, para as hepatites a, b e c podemos construir um ket de estado prevalência para cada uma delas. Para os três tipos de hepatite temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} |\psi_{pa}\rangle &= e |\uparrow\rangle + f |\downarrow\rangle, \\ |\psi_{pb}\rangle &= e' |\uparrow\rangle + f' |\downarrow\rangle, \\ |\psi_{pc}\rangle &= e'' |\uparrow\rangle + f'' |\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (4.26)$$

As densidades de probabilidade que acompanham os ket's 'up' denotam a parcela da população que não se encontra acometida pela doença em questão, já as densidades que acompanham os ket's 'down' denotam a parcela da população que se encontra cometida pela doença analisada.

Note que não há índice que diferencie os estados acessíveis a cada uma das doenças. Ao estendermos o conceito de prevalência para um conjunto de doenças, o indicador só se preocupará com a quantidade total de indivíduos acometidos por pelo menos uma das doenças pertencentes ao grupo em questão, sem se preocupar se há alguma parcela da população acometida por uma ou mais das doenças em questão. Sendo assim, a base para o espaço de estado prevalência  $\varepsilon_p$  seria tal que:

$$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}. \quad (4.27)$$

Sendo o espaço de Hilbert um espaço vetorial, podemos efetuar uma soma direta entre os seus vetores e como resultado obteremos um vetor também pertencente a esse espaço. Desse modo, definindo o ket de estado prevalência para cada uma das doenças do grupo em questão, podemos definir um ket de estado prevalência para o conjunto das doenças analisadas através da soma direta entre os ket's de prevalência para cada uma das doenças pertencentes ao conjunto. No caso da hepatite, teríamos:

$$|\Psi_{pH}\rangle = (e|\uparrow\rangle + f|\downarrow\rangle) \oplus (e'|\uparrow\rangle + f'|\downarrow\rangle) \oplus (e''|\uparrow\rangle + f''|\downarrow\rangle) = (e + e' + e'')|\uparrow\rangle + (f + f' + f'')|\downarrow\rangle. \quad (4.28)$$

Em geral os ket's semelhante ao ket acima deverá ser renormalizado.

O ket de estado prevalência (4.28) já caracteriza totalmente a população já que estamos considerando um conjunto de doenças e, sobre essa ótica, a população será dividida entre indivíduos acometidos e não acometidos por pelo menos uma das doenças analisadas

Munidos dos desenvolvimentos dessa seção podemos agora escolher um conjunto de doenças afim de construir uma aplicação prática para os kets' desenvolvidos. O grande problema agora é escolher um conjunto de doenças que possua dados o suficiente para a análise, para tanto foram escolhidas as doenças relacionadas ao tabagismo que discutiremos a seguir.

### 4.3 Tabagismo

Segundo o Instituto Nacional do Câncer (INCA, 2024c) cerca de 161.853 pessoas morrem anualmente em decorrência de doenças relacionadas ao tabagismo, sendo elas as Doenças Cardíacas (DC), Doenças Pulmonares Obstrusivas Crônicas (DPOC), Acidente Vascular Cerebral (AVC), Outros Canceres (OC), Câncer de Pulmão (CP), Pneumonia e Doenças Relacionadas ao Tabagismo Passivo. Além disso o instituto aponta que ocorreram, pelo menos, 1.002.806 novos casos de doenças relacionadas ao tabagismo no ano de 2020, quantidade essa que desconsidera os casos de pneumonia e das doenças relacionadas ao tabagismo passivo.

Dos dados que serão expostos, o INCA não deixa claro se os novos casos são rastreados por meio de internações ou óbitos, sendo assim consideraremos as quantidades de casos de cada uma das doenças que veremos a seguir como a quantidade total de casos, sem a preocupação de estarmos nos referindo a casos diagnosticados ou não diagnosticados, os quais só tiveram seu estado confirmado após o óbito, e o mesmo vale para as mortes.

A tabela a seguir trás os dados referentes ao número de casos, número de óbitos e número de sobreviventes das doenças relacionadas ao tabagismo fornecidos pelo Instituto Nacional do Câncer (INCA). Nessa tabela desconsideraremos os casos de pneumonia e os casos decorrentes do tabagismo passivo pois não foram encontrados dados quanto ao número de pessoas acometidas por essas condições anualmente, fato este que reduzirá o número de mortes anuais de 161.853 para 130.987:

Tabela 1 – Número de casos, número de óbitos e número de sobreviventes das doenças relacionadas ao tabagismo.

Doença	Casos anuais	Mortes anuais	Sobreviventes anuais.
DC	444.953	33.179	411.774
DPOC	433.729	37.686	396.043
AVC	57.737	10.041	42.696
OC	40.261	25.638	16.623
CP	26.126	24.443	1.683

Fonte: INCA,2024.

Consideramos então como população os 1.002.806 fumantes que adoecem anualmente que também será a população exposta ao risco, como população em risco consideraremos a população que virá a adoecer da determinada doença no ano em questão. Agora, por meio das já mencionadas definições de incidência, mortalidade e prevalência construímos a tabela a seguir:

Tabela 2 – Incidência, Prevalência e Mortalidade das doenças relacionadas ao tabagismo.

Doença	Casos anuais	Mortes anuais	Incidência	Prevalência	Mortalidade.
DC	444.953	33.179	44,37%	44,37%	7,46%
DPOC	433.729	37.686	43,25%	43,25%	8,69%
AVC	57.737	10.041	5,76%	5,76%	19,04%
OC	40.261	25.638	4,01%	4,01%	63,68%
CP	26.126	24.443	2,61%	2,61%	93,56%

Fonte: INCA,2024.

Nas subseções a seguir usaremos as quantidades obtidas nessa tabela para desenvolver os ket's de estado para as doenças relacionadas ao tabagismo analisadas.

#### 4.3.1 Doenças relacionadas ao tabagismo: ket de estado incidência

Recapitulando, a incidência denota a frequência com que novos casos da doença aparecem, com isso seu caráter dual reside no fato de que alguém pode ou não adoecer. Sendo assim, considerando que cada doença como um fator binário, podemos escrever o ket de estado incidência para uma determinada doença seguinte forma:

$$|\psi_i\rangle = a|\uparrow_i\rangle + b|\downarrow_i\rangle. \quad (4.29)$$

O spin 'up' denota o estado onde não se desenvolve a doença analisada e o spin 'down' denota o estado onde se desenvolve a doença em questão. Para cada uma das doenças listadas na tabela (2), usando as quantidades para a incidência encontradas na já referida tabela, escrevemos os ket's de estado incidência como segue:



$$|\psi_{iDC}\rangle = \sqrt{\frac{55,63}{100}} |\uparrow_{iDC}\rangle + \sqrt{\frac{44,37}{100}} |\downarrow_{iDC}\rangle. \quad (4.30)$$

$$|\psi_{iDPOC}\rangle = \sqrt{\frac{56,75}{100}} |\uparrow_{iDPOC}\rangle + \sqrt{\frac{43,25}{100}} |\downarrow_{iDPOC}\rangle. \quad (4.31)$$

$$|\psi_{iAVC}\rangle = \sqrt{\frac{94,24}{100}} |\uparrow_{iAVC}\rangle + \sqrt{\frac{5,76}{100}} |\downarrow_{iAVC}\rangle. \quad (4.32)$$

$$|\psi_{iOC}\rangle = \sqrt{\frac{95,99}{100}} |\uparrow_{iOC}\rangle + \sqrt{\frac{4,01}{100}} |\downarrow_{iOC}\rangle. \quad (4.33)$$

$$|\psi_{iCP}\rangle = \sqrt{\frac{97,39}{100}} |\uparrow_{iCP}\rangle + \sqrt{\frac{2,61}{100}} |\downarrow_{iCP}\rangle. \quad (4.34)$$

Os ket's (4.30) a (4.34) nos permitem calcular as já conhecidas probabilidades do individuo desenvolver ou não uma certa doença. Todos os ket's acima devem ser vistos como pertencentes a espaços de estado distintos pois denotam a frequência com que novos casos de uma determinada doença aparecem, e portanto escritos sobre bases distintas. Sendo assim, ao efetuar um produto tensorial entre dois ou mais ket's encontramos uma estimativa da probabilidade do individuo desenvolver alguma combinação das doenças analisadas, além das já conhecidas probabilidades para cada uma das doenças individualmente. Podemos então efetuar o produto tensorial entre todos os cinco ket's incidência, obtendo assim o que chamaremos de ket incidência total:

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle = & \left( \sqrt{\frac{55,63}{100}} |\uparrow_{iDC}\rangle + \sqrt{\frac{44,37}{100}} |\downarrow_{iDC}\rangle \right) \otimes \left( \sqrt{\frac{56,75}{100}} |\uparrow_{iDPOC}\rangle + \sqrt{\frac{43,25}{100}} |\downarrow_{iDPOC}\rangle \right) \otimes \\ & \otimes \left( \sqrt{\frac{94,24}{100}} |\uparrow_{iAVC}\rangle + \sqrt{\frac{05,76}{100}} |\downarrow_{iAVC}\rangle \right) \otimes \left( \sqrt{\frac{95,99}{100}} |\uparrow_{iOC}\rangle + \sqrt{\frac{04,01}{100}} |\downarrow_{iOC}\rangle \right) \otimes \\ & \otimes \left( \sqrt{\frac{97,39}{100}} |\uparrow_{iCP}\rangle + \sqrt{\frac{02,61}{100}} |\downarrow_{iCP}\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por meio desse ket podemos calcular a probabilidade de um individuo fumante vir a desenvolver qualquer uma das doenças analisadas individualmente. Por exemplo:

$$|\langle \downarrow_{iDC} | \psi_i \rangle|^2 = 44,37\%. \quad (4.36)$$

Ainda é possível calcular a probabilidade do em questão desenvolver alguma combinação entre as doenças:

$$|\langle \downarrow_{iDC} \downarrow_{iDPO} \downarrow_{iAVC} \downarrow_{iOC} \downarrow_{iCP} | \psi_i \rangle|^2 \simeq 0,0012\%. \quad (4.37)$$

Que denota a probabilidade do individuo desenvolver todas as doenças relacionadas ao tabagismo. Ou ainda:

$$|\langle \uparrow_{iDC} \uparrow_{iDPO} \uparrow_{iAVC} \uparrow_{iOC} \uparrow_{iCP} | \psi_i \rangle|^2 \simeq 27,81\%. \quad (4.38)$$

Que denota a probabilidade do individuo não desenvolver nenhuma das doenças analisadas.

### 4.3.2 Doenças relacionadas ao tabagismo: ket de estado mortalidade

A mortalidade é uma medida que denota a frequência com que óbitos ocorrem em decorrência de uma certa doença. Quanto ao ket de estado mortalidade não há muito o que ser discutido sobre ele, o ket denotará simplesmente as probabilidades de um individuo, já acometido por uma determinada doença, de vir ou não a óbito devido a ela e como já vimos na subseção (4.2.2) o resultado do produto tensorial entre dois ou mais ket's não parece ser coerente. Portanto, partindo dos valores para a mortalidade presentes na tabela de número dois, escrevemos:

$$|\Psi_{mDC}\rangle = \sqrt{\frac{92,54}{100}} |\uparrow_{mDC}\rangle + \sqrt{\frac{7,46}{100}} |\downarrow_{mDC}\rangle. \quad (4.39)$$

$$|\Psi_{mDPOC}\rangle = \sqrt{\frac{91,31}{100}} |\uparrow_{mDPOC}\rangle + \sqrt{\frac{8,69}{100}} |\downarrow_{mDPOC}\rangle. \quad (4.40)$$

$$|\Psi_{mAVC}\rangle = \sqrt{\frac{80,96}{100}} |\uparrow_{mAVC}\rangle + \sqrt{\frac{19,04}{100}} |\downarrow_{mAVC}\rangle. \quad (4.41)$$

$$|\Psi_{mOC}\rangle = \sqrt{\frac{36,32}{100}} |\uparrow_{mOC}\rangle + \sqrt{\frac{63,68}{100}} |\downarrow_{mOC}\rangle. \quad (4.42)$$

$$|\Psi_{mCP}\rangle = \sqrt{\frac{6,44}{100}} |\uparrow_{mCP}\rangle + \sqrt{\frac{93,56}{100}} |\downarrow_{mCP}\rangle. \quad (4.43)$$

Efetando um produto tensorial entre os ket's incidência para as doenças relacionadas ao tabagismo encontrados na subseção anterior e os ket's mortalidade obtidos acima, obtemos os seguintes ket's:

$$\begin{aligned} |\Psi_{iDC}\rangle \otimes |\Psi_{mDC}\rangle &= \sqrt{\frac{52,98}{100}} |\uparrow_{iDC}\rangle |\uparrow_{mDC}\rangle + \sqrt{\frac{4,15}{100}} |\uparrow_{iDC}\rangle |\downarrow_{mDC}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{41,06}{100}} |\downarrow_{iDC}\rangle |\uparrow_{mDC}\rangle + \sqrt{\frac{3,31}{100}} |\downarrow_{iDC}\rangle |\downarrow_{mDC}\rangle. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{iDPOC}\rangle \otimes |\Psi_{mDPOC}\rangle &= \sqrt{\frac{51,82}{100}} |\uparrow_{iDPOC}\rangle |\uparrow_{mDPOC}\rangle + \sqrt{\frac{4,93}{100}} |\uparrow_{iDPOC}\rangle |\downarrow_{mDPOC}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{39,49}{100}} |\downarrow_{iDPOC}\rangle |\uparrow_{mDPOC}\rangle + \sqrt{\frac{3,76}{100}} |\downarrow_{iDPOC}\rangle |\downarrow_{mDPOC}\rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{iAVC}\rangle \otimes |\Psi_{mAVC}\rangle &= \sqrt{\frac{76,30}{100}} |\uparrow_{iAVC}\rangle |\uparrow_{mAVC}\rangle + \sqrt{\frac{17,94}{100}} |\uparrow_{iAVC}\rangle |\downarrow_{mAVC}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{4,66}{100}} |\downarrow_{iAVC}\rangle |\uparrow_{mAVC}\rangle + \sqrt{\frac{1,10}{100}} |\downarrow_{iAVC}\rangle |\downarrow_{mAVC}\rangle. \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{iOC}\rangle \otimes |\Psi_{mOC}\rangle &= \sqrt{\frac{34,86}{100}} |\uparrow_{iOC}\rangle |\uparrow_{mOC}\rangle + \sqrt{\frac{61,13}{100}} |\uparrow_{iOC}\rangle |\downarrow_{mOC}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{1,46}{100}} |\downarrow_{iOC}\rangle |\uparrow_{mOC}\rangle + \sqrt{\frac{2,55}{100}} |\downarrow_{iOC}\rangle |\downarrow_{mOC}\rangle. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{iCP}\rangle \otimes |\Psi_{mCP}\rangle &= \sqrt{\frac{6,27}{100}} |\uparrow_{iCP}\rangle |\uparrow_{mCP}\rangle + \sqrt{\frac{91,12}{100}} |\uparrow_{iCP}\rangle |\downarrow_{mCP}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{0,17}{100}} |\downarrow_{iCP}\rangle |\uparrow_{mCP}\rangle + \sqrt{\frac{2,44}{100}} |\downarrow_{iCP}\rangle |\downarrow_{mCP}\rangle. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Do produto tensorial entre os ket's incidência e mortalidade calculado na subseção (4.2.2), vimos que o segundo ket pode ser interpretado como um estado onde um individuo vai a óbito em decorrência de uma determinada doença sem que saiba que se encontra acometido por ela.

Fixando o estado onde o individuo vai a óbito em decorrência da doença em questão, obtemos os seguintes ket's:

$$\langle \downarrow_{mDC} | \Psi_{iDC} \otimes \Psi_{mDC} \rangle = \sqrt{\frac{4,15}{100}} |\uparrow_{iDC}\rangle + \sqrt{\frac{3,31}{100}} |\downarrow_{iDC}\rangle. \quad (4.49)$$

$$\langle \downarrow_{mDPOC} | \Psi_{iDPOC} \otimes \Psi_{mDPOC} \rangle = \sqrt{\frac{4,93}{100}} |\uparrow_{iDPOC}\rangle + \sqrt{\frac{3,76}{100}} |\downarrow_{iDPOC}\rangle. \quad (4.50)$$

$$\langle \downarrow_{mAVC} | \Psi_{iAVC} \otimes \Psi_{mAVC} \rangle = \sqrt{\frac{17,94}{100}} |\uparrow_{iAVC}\rangle + \sqrt{\frac{1,10}{100}} |\downarrow_{iAVC}\rangle. \quad (4.51)$$

$$\langle \downarrow_{mOC} | \Psi_{iOC} \otimes \Psi_{mOC} \rangle = +\sqrt{\frac{61,13}{100}} |\uparrow_{iOC}\rangle + \sqrt{\frac{2,55}{100}} |\downarrow_{iOC}\rangle. \quad (4.52)$$

$$\langle \downarrow_{mCP} | \Psi_{iCP} \otimes \Psi_{mCP} \rangle = \sqrt{\frac{91,12}{100}} |\uparrow_{iCP}\rangle + \sqrt{\frac{2,44}{100}} |\downarrow_{iCP}\rangle. \quad (4.53)$$

Os ket's acima encontram-se não normalizados, como fixamos um estado onde se vai a óbito em decorrência da doença analisada, o modulo quadrado desses ket's deve retornar a probabilidade do individuo acometido pela doença ir a óbito, a tabela a seguir trás essas probabilidades:

Tabela 3 – Probabilidade de morte das doenças relacionadas ao tabaco.

Doença	Probabilidade de morte.
DC	7,46%
DPOC	8,69%
AVC	19,04%
OC	63,68%
CP	93,56%

Fonte: Próprio autor.

Note que as probabilidades encontradas na tabela acima são numericamente iguais aos valores para o indicador mortalidade encontrados na tabela (2) e que obtemos essas quantidade

para as doenças associadas ao tabaco quando consideramos que um individuo, desde que encontre-se acometido, pode morrer em decorrência de qualquer uma das doenças possuindo ou não o diagnostico. O resultado obtido corrobora com a definição de mortalidade que usamos: *Taxa de óbitos por uma determinada doença que acomete uma certa população*. A definição desse indicador nada nos diz sobre o estado do diagnostico da doença, para esse índice de nada importa se houve um não um diagnóstico para a doença em questão, mas sim se o individuo foi ou não a óbito em decorrência dela.

Outro resultado interessante que podemos obter, agora dos ket's (4.44) a (4.48), é que para todas as doenças analisadas é mais provável que o individuo vá a óbito em decorrência da doença em questão caso não haja um diagnostico. Em especial, para o câncer de pulmão, vemos que há uma probabilidade de 91,12% do individuo ir a óbito sem ter ciência de que porta um câncer de pulmão em contra partida há uma probabilidade de 2,45% do individuo ir a óbito mesmo que tenha ciência de que porta o câncer, esse resultado corrobora com o fato de que apenas de 16% dos cânceres são diagnosticados em estado inicial, estágio onde possuem a maior taxa de sobrevivida (INCA, 2022).

A caracterização total do sistema físico por meio do indicador mortalidade depende do uso da matriz densidade (3.26). Levando em conta as doenças analisadas temos que:

$$\begin{aligned} \rho = & \omega_{DC} |\psi_{mDC}\rangle \langle \psi_{mDC}| + \omega_{DPOC} |\psi_{mDPOC}\rangle \langle \psi_{mDPOC}| + \omega_{AVC} |\psi_{mAVC}\rangle \langle \psi_{mAVC}| + \\ & + \omega_{OC} |\psi_{mOC}\rangle \langle \psi_{mOC}| + \omega_{CP} |\psi_{mCP}\rangle \langle \psi_{mCP}| \end{aligned} \quad (4.54)$$

Levando em conta que cada ket mortalidade só descreve o estado da parcela da população que padece da doença que ele descreve, podemos tomar as populações fracionárias como o valor para o indicador incidência encontrado na tabela (2), assim:

$$\begin{aligned} \rho = & 44,37\% |\psi_{mDC}\rangle \langle \psi_{mDC}| + 43,25\% |\psi_{mDPOC}\rangle \langle \psi_{mDPOC}| + 05,76\% |\psi_{mAVC}\rangle \langle \psi_{mAVC}| + \\ & + 04,01\% |\psi_{mOC}\rangle \langle \psi_{mOC}| + 02,61\% |\psi_{mCP}\rangle \langle \psi_{mCP}| \end{aligned} \quad (4.55)$$

Com isso, temos por exemplo que:

$$\langle \downarrow_{mDC} | \rho | \downarrow_{mDC} \rangle = 3,31\% \quad (4.56)$$

Que denota a probabilidade de que um individuo desenvolva alguma doença cardíaca e vá a óbito em decorrência dela, ou ainda:

$$\langle \downarrow_{mDC} | \rho | \downarrow_{mDC} \rangle = 41,06\% \quad (4.57)$$

Que denota a probabilidade de que um individuo desenvolva alguma doença cardíaca e sobreviva a ela

### 4.3.3 Doenças relacionadas ao tabagismo: ket de estado prevalência

A prevalência denota a quantidade de casos de uma doença num determinado momento. Com isso a prevalência enxerga apenas a quantidade de casos de uma doença. Retornando a tabela (2) e a definição de prevalência (3.40), escrevemos os ket's prevalência a seguir:

$$|\psi_{pDC}\rangle = \frac{55,63}{100} |\uparrow\rangle + \frac{44,37}{100} |\downarrow\rangle. \quad (4.58)$$

$$|\psi_{pDPOC}\rangle = \frac{56,75}{100} |\uparrow\rangle + \frac{43,25}{100} |\downarrow\rangle. \quad (4.59)$$

$$|\psi_{pAVC}\rangle = \frac{94,25}{100} |\uparrow\rangle + \frac{5,76}{100} |\downarrow\rangle. \quad (4.60)$$

$$|\psi_{pOC}\rangle = \frac{95,99}{100} |\uparrow\rangle + \frac{4,01}{100} |\downarrow\rangle. \quad (4.61)$$

$$|\psi_{pCP}\rangle = \frac{97,39}{100} |\uparrow\rangle + \frac{2,61}{100} |\downarrow\rangle. \quad (4.62)$$

Partindo da interpretação obtida na subseção (4.2.3), efetuamos a soma direta entre os ket's de estado prevalência acima, obtendo então o ket de estado prevalência das doenças relacionadas ao tabaco analisadas:

$$|\psi_p\rangle = 4,00 |\uparrow\rangle + 1,00 |\downarrow\rangle. \quad (4.63)$$

Que normalizado torna-se:

$$|\psi_p\rangle = \frac{4,00}{4,12} |\uparrow\rangle + \frac{1,00}{4,12} |\downarrow\rangle. \quad (4.64)$$

Nessa representação, o spin 'down' é o estado ocupado por toda a população tabagista que sofreu de alguma das doenças analisadas no ano de 2020. Em termos de porcentagem temos:

$$|\langle\downarrow|\psi_p\rangle|^2 = 5,89\%. \quad (4.65)$$

Se essa estimativa estiver correta, deve ser possível encontrar um valor aproximado da população total de fumantes no Brasil no ano de 2020. Tomando como  $x$  a população total de fumantes no ano em questão e sabendo que cerca de 1.002.806 pessoas adoeceram devido a pelo menos uma das doenças analisadas no mesmo ano, temos que:

$$\begin{aligned} x \cdot 5,89\% &= 1.002.806, \\ x &\simeq 17.025.569. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Podemos ainda testar a qualidade dessa estimativa. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2024) a população do Brasil no ano de 2020 era de 211.800.000 e, nesse mesmo ano, o percentual de fumantes no Brasil era cerca de 9,5% da população (INCA, 2024b). Cruzando esses dados obtemos que a população real (valor exato) de fumantes no Brasil no ano de 2020 era de 20.121.000 habitantes.

Por meio da expressão a seguir:

$$\delta = \frac{|\text{estimativa} - \text{exato}|}{\text{exato}}. \quad (4.67)$$

Podemos calcular o desvio da estimativa:

$$\delta = \frac{|17.025.569 - 20.121.000|}{20.121.000} \simeq 15,38\%. \quad (4.68)$$

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O caráter abstrato do espaço de estados junto ao estado de superposição do spin nos permite descrever o estado de quantidades não físicas como qubit e, como vimos ao longo da última seção, pode fornecer um modelo razoável para descrever características de indivíduos e populações que, com as devidas simplificações, possam ser vistas como possuíntes de um caráter binário. Por meio do modelo formulado, foi possível prever a existência de pessoas que vão a óbito por uma doença mesmo sem o diagnóstico além de retornar uma probabilidade coerente de que cenários desse tipo tornarem-se reais. Além disso, também foi possível calcular uma estimativa razoável da quantidade de fumantes no Brasil no ano de 2020, o resultado obtido se torna ainda mais interessante quando levamos em conta que só foram consideradas cinco das doenças relacionadas ao tabagismo.



## REFERÊNCIAS

AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS. **IBGE divulga estimativa da população dos municípios para 2020**. 2024. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-denoticias/releases/28668-ibge-divulga-estimativa-da-populacao-dos-municipios-para-2020>. Acesso em: 17 maio. 2024.

BOING, A. F.; D'ORSI, E.; REIBNITZ, C.; (Org.) **Epidemiologia: conceitos e epidemiologia**. 2016. Disponível em: [https://unաս2.moodle.ufsc.br/pluginfile.php/33454/mod\\_resource/content/1/un1/top5\\_1.html](https://unաս2.moodle.ufsc.br/pluginfile.php/33454/mod_resource/content/1/un1/top5_1.html). Acesso em: 20 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Saúde. **O que significa ter saúde?** 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/eu-quero-me-exercitar/noticias/2021/o-que-significa-ter-saude>. Acesso em: 11 jul. 2024

COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics: basic concepts, tools, and applications**. Weinheim, Germany: Hermann and John Wiley Sons, 1997. v. 1.

COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics: angular momentum, spin, and approximation methods**. Weinheim, Germany: Hermann and John Wiley Sons, 1997. v. 2.

DESAI, B. R. **Quantum mechanics with basic field theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

ELETROS-SAÚDE. **Doenças de base em maiores de 60 anos: entenda porque a vacinação é tão importante**. Disponível em: <https://www.eletrossaude.com.br/site/pagina/vivabem/detalhe/18084:text=O%20tabagismo%2C%20a%20cardiopatia%2C%20a,grau%20de%20comprometimento%20da%20sa%C3%BAde>. Acesso em: 06 nov. 2023.

EUPATI. **Fatores de risco na saúde e na doença**. Disponível em: <https://toolbox.eupati.eu/resources/fatores-de-risco-na-saude-e-na-doenca/?lang=pt-pt>. Acesso em: 09 nov. 2023.

FERRAZ, F. C. **Uma introdução à matemática da computação quântica**. 2020. Disponível em: <https://medium.com/@filipe.chagas/uma-introdu%C3%A7%C3%A3o-%C3%A0-matem%C3%A1tica-da-computa%C3%A7%C3%A3o-qu%C3%A2ntica-22763e797b8d>. Acesso em: 20 jul. 2024.

FLORES, H. F. **Sistemas do corpo humano**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/biologia/sistemas-do-corpo-humano.htm>. Acesso em: 06 nov. 2023.

GOMES, G. G.; Pietrocola, M. O experimento de stern-gerlach e o spin do elétron: um exemplo de quasi-história. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 33, n. 2, p. 2604, 2011.

INDICADORES de Saúde. Disponível em:

<https://www.ufrgs.br/napead/projetos/indicadores-de-saude/indicadores.php>. Acesso em: 20 jul. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE CÂNCER. **Câncer de Pulmão**. 2022. Disponível em:

<https://www.gov.br/inca/pt-br/assuntos/cancer/tipos/pulmao>. Acesso em: 21 jul. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE CÂNCER. **Mortalidade no Brasil**. 2024. Disponível em:

<https://www.gov.br/inca/ptbr/assuntos/gestor-e-profissional-de-saude/observatorio-da-politica-nacionalde-controle-do-tabaco/dados-e-numeros-do-tabagismo/mortalidade-nobrasil:text=Durante%20o%20ano%20de%202020,que%20ocorrem%20no%20Brasil%20anualmente>. Acesso em: 17 maio 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE CÂNCER. **Prevalência do Tabagismo**. 2024. Disponível em:

<https://www.gov.br/inca/ptbr/assuntos/gestor-e-profissional-de-saude/observatorio-da-politica-nacional-de-controle-do-tabaco/dados-e-numeros-do-tabagismo/prevalencia-do-tabagismo>. Acesso em: 17 maio 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE CÂNCER. **Tabagismo**. 2024. Disponível em:

<https://www.gov.br/inca/pt-br/assuntos/causas-e-prevencao-do-cancer/tabagismo>. Acesso em: 17 maio 2024.

LIBOFF, R. L. **Introductory Quantum Mechanics**. [S. l.]: Addison Wesley, 2003.

MESIANO, B.; RIBEIRO, L. **Brasil registra quase 300 mil falhas na assistência à saúde em 2022, diz levantamento com base em dados da Anvisa. 2023**. Disponível em:

<https://www.gov.br/saude/ptbr/assuntos/saude-brasil/eu-que-ro-me-exercitar/noticias/2021/o-que-significa-ter-saude>. Acesso em: 11 jul. 2024.

MACHADO, L. E. S. **Uma abordagem interdisciplinar sobre o spin**. 2022. 70 f.

Monografia (Licenciatura em Física) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.

NEGELE, J.; ORLAND, H. **Quantum many-particle systems**. Boca Raton: CRC Press, 1988.

ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE. **Indicadores de saúde: elementos conceituais e práticos**. Washington, D. C.: OPAS, 2018. Disponível em:

<https://iris.paho.org/handle/10665.2/49057>. Acesso em: 20 jul. 2024.

PRUGOVECKI, E. **Quantum mechanics in hilbert space**. [S. l.]: Academic Press, 1981.

REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. Long Grove, IL: Waveland Press, 2009.

SAIDEH, I. **Entanglement in high dimensional quantum systems**. 188f. Tese (Doutorado) — Université Paris Saclay, Paris, 2019.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. **Modern quantum mechanics**. [S. l.]: Addison Wesley, 1933.

SCHNEIDER, J.; SMALLEY, I. **O que é um qubit?** 2024. Disponível em: <https://www.ibm.com/br-pt/topics/qubit#:~:text=IBM&text=Schneider%2C%20Ian%20Smalley-,O%20que%20%C3%A9%20um%20qubit%3F,codificar%20informa%C3%A7%C3%B5es%20em%20sistema%20bin%C3%A1rio>. Acesso em: 20 jul. 2024.

VERÍSSIMO, R. **Notação de Dirac**. 2020. Disponível em: <https://brazilquantum.medium.com/nota%C3%A7%C3%A3o-de-dirac-c95818279c6>. Acesso em: 20 jul. 2024.

VILLAMIZAR, D. V. **Matriz densidade**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.

ZETTILI, N. **Quantum mechanics concepts and applications**. [S. l.]: Addison Wesley, 2009.

## APÊNDICE A - UMA POSSIBILIDADE PARA O KET RESULTANTE DA INTERAÇÃO ENTRE DOIS KET'S MORTALIDADE

Da análise realizada na subseção 4.2.2, vimos que um produto tensorial entre dois ket's de estado mortalidade não parecia ser coerente. Um candidato interessante para a descrição do individuo que vai a óbito em decorrência de uma doença mas não padecendo somente dela pode ser expressa por uma analogia com o estado emaranhado. Para duas doenças, por exemplo, as doenças cardíacas e as doenças pulmonares obstrusivas crônicas, teríamos algo como:

$$\alpha |\uparrow_{mDC}\rangle |\downarrow_{mDPOC}\rangle + \beta |\downarrow_{mDC}\rangle |\uparrow_{mDPOC}\rangle. \quad (1)$$

O grande problema seria, mais uma vez, definir as densidades de probabilidade. Diferentemente das informações usadas para desenvolver os outros ket's presentes nesse trabalho, não foram encontradas informações sobre como uma doença influencia a outra. Assim optamos por não nos aprofundar nesse ket e nos restringimos a tratá-lo como uma possível representação para a situação em questão.