



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
MESTRADO ACADÊMICO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ANA BEATRIZ DA SILVEIRA MARTINS

RESULTADOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS SOBRE COLORAÇÃO
HARMONIOSA DE GRAFOS

FORTALEZA

2024

ANA BEATRIZ DA SILVEIRA MARTINS

RESULTADOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS SOBRE COLORAÇÃO HARMONIOSA
DE GRAFOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Grafos e Otimização

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo

Coorientador: Prof. Dr. Marcio Costa Santos

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M341r Martins, Ana Beatriz da Silveira.
Resultados Teóricos e Computacionais sobre Coloração Harmoniosa de Grafos / Ana Beatriz da Silveira
Martins. – 2024.
94 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Ciência da Computação, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo.
Coorientação: Prof. Dr. Marcio Costa Santos.

1. Teoria dos Grafos. 2. Coloração Harmoniosa. 3. Coloração Harmônica. 4. Complexidade Computacional.
5. Programação Linear-Inteira. I. Título.

CDD 005

ANA BEATRIZ DA SILVEIRA MARTINS

RESULTADOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS SOBRE COLORAÇÃO HARMONIOSA
DE GRAFOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Grafos e Otimização

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcio Costa Santos (Coorientador)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ao meu pai, que me ensinou a trabalhar duro
para chegar longe.

À minha mãe, que me ensinou a valorizar os
frutos do trabalho.

Ao meu irmão, que me ensinou a manter a calma
quando o trabalho não dá certo.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por me apoiar em minhas escolhas. Em especial a meus pais, por me incentivarem desde cedo a estudar e me darem o privilégio de poder focar em meus estudos. Às minhas amigas, Sarah, Alicia e Barbara, por mesmo longe estarem presentes.

Ao grupo ParGO, que considero minha família acadêmica. A todas as comemorações que passamos juntos e a todos os seminários realizados. Em especial à Prof.^a Dr.^a Ana Karolinna Maia de Oliveira, que me deu bons conselhos sobre planos em minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Júlio César Araújo por me orientar desde 2018, e por me tranquilizar em momentos difíceis da minha carreira acadêmica. Ao Prof. Dr. Marcio Costa Santos pela paciência com uma mestranda que à priori não sabia o básico de programação linear e por trazer novas ideias para nossa abordagem do problema. A ambos por me orientarem em minha dissertação de mestrado.

Ao Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto e ao Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides por aceitarem participar da banca e ler minha dissertação em menos de um mês.

Aos colegas de laboratório e aos amigos que fiz durante meu período na UFC. Não mencionarei seus nomes aqui, pois receio esquecer alguém. Mas noites de karaokê e cafés da tarde na UFC entraram para minha lista de programas favoritos.

Aos secretários do MDCC, Jonatas de Pessoa Albuquerque Martins e Gláucia Helena da Silveira Mota, por me ajudarem com questões envolvendo as diretrizes do programa.

Ao CNPq, por financiar este projeto.

“A jornada de mil quilômetros começa com o primeiro passo.”

(O Rei Leão)

RESUMO

Dado um grafo G , uma k -coloração própria dos vértices de G é uma função $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de forma que vértices adjacentes não possuem a mesma cor. Uma coloração em vértices de G é dita harmônica quando todo par de cores induz no máximo uma aresta, ou seja, o subgrafo induzido pelos vértices coloridos com tais cores possui no máximo uma aresta. Se a coloração for harmônica e própria, esta é dita harmoniosa. Os problemas de coloração aqui estudados são problemas nos quais o interesse é minimizar o número de cores utilizadas em uma coloração harmoniosa de um dado grafo G . Nesta dissertação, realizamos uma revisão bibliográfica dos problemas de coloração harmônica e harmoniosa. O problema de colorações harmônicas que não são necessariamente harmoniosas foi, até então, pouco estudado. Destacamos o único trabalho da literatura que apresenta modelos de programação linear-inteira para o problema de coloração harmônica. No que diz respeito à coloração harmoniosa, além da revisão sobre o tema, apresentamos como novo resultado uma relação entre os números cromáticos harmoniosos de um par de grafos (G, H) , tal que H é obtido através da identificação de vértices de G que possuem distância maior ou igual a três. Ademais, corrigimos um limitante da literatura para o número cromático harmonioso de grafos d -degenerados. Propomos três novos modelos de programação linear-inteira e duas heurísticas gulosas. Apresentamos tabelas com testes destas formulações e heurísticas sobre instâncias aleatórias. No mais, realizamos um estudo sobre a dimensão dos politopos associados a dois dos três modelos mencionados.

Palavras-chave: teoria dos grafos; coloração harmoniosa; coloração harmônica; complexidade computacional; programação linear-inteira.

ABSTRACT

Given a graph G , a proper vertex k -coloring is a function $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ such that adjacent vertices cannot receive the same color. A vertex coloring of a graph G is harmonic when each of the color pairs induces at most one edge, that is, the subgraph induced in the vertices with those colors has at most one edge. If the coloring is harmonic and proper, we say that this coloring is a harmonious coloring. The coloring problems that we study here are problems that the main interest is to minimize the number of colors used in a harmonious coloring of a given graph G . In this master thesis, we present a survey of the harmonic and the harmonious coloring problems. The harmonic coloring problem, the one without the restriction of proper coloring, has been little studied until nowadays. We mention in our survey the only work in the literature that present integer linear programming models for the harmonic coloring problem. Regarding harmonious coloring, we present in addition to the survey, as a new result a relation on the harmonious chromatic numbers of a pair of graphs (G, H) , such that H is obtained by the identification of vertices of G that have distance at least three. Furthermore, we corrected a bound in the literature for the harmonious chromatic number of d -degenerate graphs. We propose three integer linear programming models and two greedy heuristics. We present tables with tests about these formulations and heuristics on random instances. Moreover, we did a study on the dimension of the polytopes associated to two of the three mentioned models.

Keywords: graph theory; harmonious coloring; harmonic coloring; computational complexity; integer linear programming.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo usado para representar o problema das pontes de Königsberg.	14
Figura 2 – Grafo correspondente ao problema de escalonamento com horários dispostos na Tabela 1.	16
Figura 3 – Exemplo de grafo tal que $\lambda(G) = 3$, $h(G) = 5$ e suas respectivas colorações.	17
Figura 4 – Exemplo de um grafo G com arestas múltiplas.	20
Figura 5 – O grafo de Petersen é um exemplo de grafo simples, finito e 3-regular.	20
Figura 6 – Grafos isomorfos.	21
Figura 7 – $K_{3,3}$ e K_5 , respectivamente.	22
Figura 8 – Floresta com duas árvores como suas componentes conexas.	23
Figura 9 – Subdivisão da aresta uv	23
Figura 10 – Exemplo de coloração nos vértices de um grafo, nesta a cor 1 é representada por vermelho, 2 por azul, 3 por verde e 4 por magenta.	24
Figura 11 – Grafo com arestas coloridas com as cores 1, 2, 3.	24
Figura 12 – Exemplo de grafo direcionado.	25
Figura 13 – Digrafo acíclico que possui ciclo como grafo subjacente.	25
Figura 14 – Forma de obter uma solução polinomial do problema A	29
Figura 15 – Note que v_i e v_j não podem receber a mesma cor, pois, se esse for o caso, as cores 1, 2 induzem pelo menos duas arestas.	34
Figura 16 – Vizinhança de v	37
Figura 17 – Grafo G homomorfo a H , mas H não é homomorfo a G	41
Figura 18 – No grafo com a cobertura dada à esquerda o limitante superior de $h(G)$ obtido é 7, e no da direita $h(G)$ é limitado por 6.	45
Figura 19 – $C_3 \times P_4$	50
Figura 20 – Caminho direcionado com sete vértices, note que $\vec{h}(\vec{P}_7) = 3$	52
Figura 21 – Atualização da figura apresentada em Asdre e Nikolopoulos (2007), nesta abordamos a complexidade do problema em classes de grafos, nela NPC significa que o problema é NP-completo e P significa que o problema possui algoritmo polinomial que o resolva (conexos e desconexos, respectivamente).	58
Figura 22 – O grafo $2K_2$ é um contra-exemplo ao Teorema 4.1.1 e ao Corolário 4.1.1.	62

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Horários para exemplo. 16
- Tabela 2 – Comparação entre a formulação padrão (coluna STD), formulação por representantes (coluna REP) e formulação assimétrica por representantes (coluna AREP) em relação ao melhor valor de objeto reportado pelo solucionador e o tempo de execução para encontrar tal solução no conjunto de instâncias **aleatórias pequenas**. Os tempos são reportados em segundos. Se nenhum valor de solução é reportado, aparece um - na tabela e, se a formulação exceder o limite de tempo, aparece um *TL* naquela entrada da tabela. 74
- Tabela 3 – Relatório completo dos resultados obtidos pela formulação assimétrica no conjunto de instâncias **aleatório**. As colunas Sol, Gap e Time representam a melhor solução, a lacuna de otimalidade e o tempo de execução conforme reportado pelo *solver*, respectivamente. Os tempos são reportados em segundos. Se nenhum valor de solução for reportado, aparece um - nas colunas Sol e Gap, e se a formulação exceder o limite de tempo, aparece *TL* nessa entrada na tabela. 75
- Tabela 4 – Relatório completo dos resultados obtidos pelas heurísticas gulosas no conjunto de instâncias **aleatório**. Foram considerados dois ordenamentos na heurística gulosa: um ordenamento de grau não crescente (coluna MAX) e um ordenamento de grau não decrescente (coluna MIN). As colunas obj e time representam a melhor solução e o tempo de execução, conforme reportado pelo *solver* no caso da PIM e medido durante a execução para a heurística, respectivamente. Os tempos são reportados em segundos. Se nenhum valor de solução for reportado, aparece um - na tabela e, se a formulação exceder o limite de tempo, aparece *TL* nessa entrada na tabela. 77

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Heurística Gulosa MIN (G)	71
Algoritmo 2 – Heurística Gulosa MAX (G)	71

LISTA DE SÍMBOLOS

$V(G)$	Conjunto de vértices de G
$E(G)$	Conjunto de arestas de G
$d_G(v)$	Grau de $v \in V(G)$
$H \subseteq G$	H é subgrafo de G
$\chi(G)$	Número cromático de G
$\Delta(G)$	Grau máximo de G
$G - v$	Remoção de um vértice $v \in G$
$\lfloor x \rfloor$	Piso de $x \in \mathbb{R}$
$\lceil x \rceil$	Teto de $x \in \mathbb{R}$
C_k	Ciclo formado por k vértices (e k arestas)
P_k	Caminho formado por k vértices (e $k - 1$ arestas)
$n(G)$	Tamanho do conjunto de vértices de G ($ V(G) $)
$m(G)$	Tamanho do conjunto de arestas de G ($ E(G) $)
$N_G(v)$	Vizinhança do vértice $v \in V(G)$
$h(G)$	Número cromático harmonioso de G
$\lambda(G)$	Número cromático harmônico de G
$\psi(G)$	Número acromático de G
B_n	Árvore binária completa de n níveis
T_n	Árvore ternária completa de n níveis
$G \times H$	Produto cartesiano entre os grafos G e H
$dist(u, v)$	Distância entre o par de vértices $u, v \in V(G)$
$diam(G)$	Diâmetro de G
\overline{G}	Complementar de G
G^2	Grafo formado pela adição de arestas entre quaisquer vértices de distância 2 em G
$\gamma(G)$	Gênero de G

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	PRELIMINARES	19
2.1	Teoria dos Grafos	19
2.1.1	<i>O que é um grafo?</i>	19
2.1.2	<i>Grafos direcionados</i>	24
2.2	Complexidade	26
2.3	Programação Inteira	30
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
3.1	Colorações Harmônicas	33
3.1.1	<i>Coloração Harmônica Minimal</i>	34
3.2	Colorações Harmoniosas	35
3.2.1	<i>Limitantes Gerais</i>	36
3.2.2	<i>Coloração Harmoniosa em Árvores</i>	46
3.2.3	<i>Coloração Harmoniosa em Caminhos e Ciclos</i>	49
3.2.4	<i>Coloração Harmoniosa em Grafos Planares</i>	51
3.2.5	<i>Coloração Harmoniosa em Digrafos</i>	52
3.2.6	<i>Relação entre número acromático e número cromático harmonioso</i>	54
3.2.7	<i>Outras classes de grafos</i>	55
3.2.8	<i>Complexidade</i>	56
4	NOVOS RESULTADOS	60
4.1	Limitante em função da cobertura de vértices e do grau máximo	61
4.2	Identificações de Vértices a Distância Três	63
4.3	Formulações de Programação Inteira	65
4.3.1	<i>Modelo Padrão</i>	65
4.3.2	<i>Modelo por Representantes</i>	66
4.3.2.1	<i>Politopo de dimensão plena</i>	68
4.3.3	<i>Modelo Assimétrico por Representantes</i>	69
4.3.3.1	<i>Politopo de dimensão plena</i>	70
4.4	Heurísticas Gulosas	71
4.5	Resultados Computacionais	72

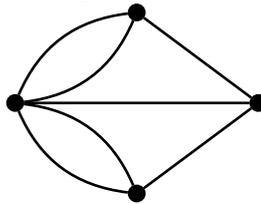
4.5.1	<i>Descrição do Ambiente e das Instâncias</i>	72
4.5.2	<i>Comparação dos Modelos Matemáticos</i>	72
4.5.3	<i>Experimentos Computacionais para a Formulação Assimétrica por Representantes</i>	73
4.5.4	<i>Experimentos Computacionais para a Heurística Gulosa</i>	75
4.6	Considerações Finais	76
5	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE A – RELATÓRIO DE ESTÁGIO DE MESTRADO	86

1 INTRODUÇÃO

Teoria dos Grafos possui diversas aplicações em Computação, Ciências Naturais e Sociais. O problema geralmente citado como responsável pelo surgimento de Teoria dos Grafos é o problema das pontes de Königsberg. Atualmente conhecida como Kaliningrado, Königsberg era uma cidade da Prússia localizada em ambas as margens do rio Pregel. Esta ocupava, além das margens, duas ilhas. Essas quatro regiões, representadas por vértices, eram conectadas por sete pontes, representadas por arestas, de forma que o número de pontes que conectam duas regiões é o mesmo número de arestas que relacionam os vértices que as representam (ver Figura 1). Os vértices conectados por uma aresta (regiões conectadas por uma ponte) são denominados *extremidades* desta e ditos *adjacentes*; assim, a aresta cujas extremidades são os vértices u e v , isto é, u e v são adjacentes, pode ser representada por uv . Caso $u = v$, ou seja, as extremidades da aresta são o mesmo vértice, temos um *laço*. Caso duas ou mais arestas possuam o mesmo par de vértices como extremidades, temos *arestas múltiplas*. Um *grafo simples* é um grafo que não possui laços ou arestas múltiplas.

Os habitantes da cidade começaram a especular se seria possível sair de casa, atravessar cada ponte exatamente uma vez e após isso voltar para casa (WEST, 2001). Este problema ficou conhecido como *O Problema das sete pontes de Königsberg*.

Figura 1 – Grafo usado para representar o problema das pontes de Königsberg.



Fonte: Autoria própria

Este problema foi resolvido por Leonhard Euler, que, em 1736, deu início ao estudo da área de Teoria dos Grafos ao demonstrar que *Um grafo G é Euleriano (possui trilha fechada que passa por cada aresta em G) se, e somente se, G não possui vértices de grau ímpar e no máximo uma componente não trivial*. Para detalhamento sobre as definições, vide Seção 2.1.

O Problema das sete pontes de Königsberg não foi o único que pôde ser representado e respondido usando Teoria dos Grafos. Considere como *mapa* uma partição do plano em regiões conectadas. “É possível colorir um mapa de forma que regiões vizinhas são coloridas com cores distintas usando apenas 4 cores?” O primeiro registro conhecido envolvendo esta pergunta,

atualmente conhecida como o *Teorema das Quatro Cores*, consta em uma carta de 23 de outubro de 1852, de Augustus de Morgan a William Hamilton. A notável pergunta foi feita a de Morgan por seu aluno Frederick Guthrie, que depois a atribuiu a seu irmão Francis Guthrie.

A fim de entendermos como esta pergunta é adaptada a um problema em Teoria dos Grafos, definimos, dado um grafo simples G , seu *complemento* \bar{G} como o grafo simples com o mesmo conjunto de vértices de G e o conjunto de arestas definido por: uv é aresta de \bar{G} se, e somente se uv não é aresta de G . Uma *clique* em um grafo é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um *conjunto independente* em um grafo é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes. O *número cromático* de um grafo simples G , denotado por $\chi(G)$, é o mínimo de cores necessárias para rotular os vértices de forma que cores diferentes são atribuídas a vértices *adjacentes*. Um grafo G é k -partido se o conjunto de vértices de G (comumente denotado por $V(G)$) pode ser expresso como a união de k (possivelmente vazios) conjuntos independentes.

Para relacionarmos o problema de coloração de mapas com um problema de coloração em grafos, representamos cada região do mapa por um vértice e adicionamos arestas entre vértices que representam as regiões com fronteiras em comum. Note que é possível realizar uma imersão do grafo obtido no plano sem que haja cruzamento de arestas. Grafos com essa propriedade são denominados *grafos planares*. A questão apontada por Guthrie indaga se o número cromático de grafos planares é no máximo 4.

Em 1878, o problema foi anunciado para a Sociedade Matemática de Londres (London Mathematical Society) por Cayley e, no ano seguinte, Kempe publicou uma solução para este. Infelizmente esta solução era incorreta, pois, em 1890, Heawood publicou um trabalho refutando o resultado de Kempe; contudo, a ideia de Kempe, aproveitada por Heawood para mostrar que o número cromático de grafos planares é no máximo 5, levou a uma demonstração feita por Appel e Haken (1976), que encerrou o debate ao apresentarem que todo grafo planar é propriamente 4 colorível.

O Teorema das Quatro Cores é um dos problemas mais famosos de Teoria dos Grafos e, após este ter surgido, muito na área de coloração em grafos foi explorado, pois esta possui diversas variantes e aplicações; problemas de escalonamento, por exemplo, costumam ser modelados como problemas de coloração de grafos.

Suponha que o dono de uma empresa quer minimizar o número de operadores de suas máquinas A , B , C , D , E . Estas são ligadas em intervalos de tempo mostrados na Tabela 1 e

cada operador só pode cuidar de uma máquina por vez, isto é, caso o tempo de duas máquinas possua interseção não vazia, cada uma deve ser operada por um funcionário diferente.

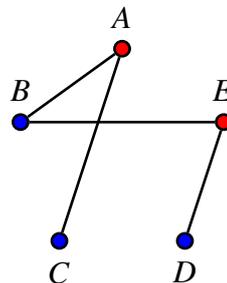
Tabela 1 – Horários para exemplo.

Máquina	Horário
<i>A</i>	13:00 às 14:59
<i>B</i>	14:00 às 16:59
<i>C</i>	13:00 às 13:59
<i>D</i>	17:00 às 18:59
<i>E</i>	16:00 às 17:59

Fonte: Autoria própria.

Neste problema, podemos representar cada máquina por um vértice e, caso duas máquinas estejam simultaneamente ligadas em algum intervalo de tempo, adicionamos uma aresta entre os vértices que as representam. Para resolvê-lo basta descobrir o número cromático do grafo da Figura 2, pois cada cor representa um operador.

Figura 2 – Grafo correspondente ao problema de escalonamento com horários dispostos na Tabela 1.



Fonte: Autoria própria

Como já mencionado, o problema de coloração em grafos possui diversas variantes; temos, como exemplo destas, a *coloração acíclica* (GRÜNBAUM, 1973), nesta temos uma coloração própria tal que nenhum ciclo do grafo é bicolorido. A *coloração estrela* (GRÜNBAUM, 1973) é uma versão mais restrita da coloração acíclica visto que nessa temos uma coloração própria tal que nenhum caminho com três vértices é bicolorido. A coloração a ser abordada nesta dissertação é uma restrição da coloração estrela, mas antes de a apresentarmos, definimos um *subgrafo induzido* de G como um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e, dados $u, v \in V(H)$, uv é aresta de H se, e somente se, uv é aresta de G . Note que, se um grafo G possui número cromático k , temos uma partição dos vértices de G em k conjuntos independentes de forma que cada conjunto independente representa uma cor; assim, ao mencionarmos par de cores, estamos mencionando um par de conjuntos independentes desta partição.

Em Hopcroft e Krishnamoorthy (1983) os autores introduziram o conceito de coloração harmônica, nomeada com essa terminologia em Lee e Mitchem (1987), e definiram que esta seria uma coloração na qual todo par de cores, não necessariamente distintas, induz no máximo uma aresta. O número cromático harmônico do grafo G , denotado por $\lambda(G)$, é o menor k tal que G é harmonicamente k -colorível. Em Lee e Mitchem (1987), os autores adicionaram a restrição de ser própria à coloração harmônica e, com isto, caracterizaram uma coloração harmoniosa. O número cromático harmonioso do grafo G , denotado por $h(G)$, é o menor k tal que G é harmoniosamente k -colorível. Na Figura 3, exemplificamos uma coloração harmônica e uma harmoniosa de um grafo. Note que $h(G) \geq \lambda(G)$, visto que toda coloração harmoniosa é harmônica.

Figura 3 – Exemplo de grafo tal que $\lambda(G) = 3$, $h(G) = 5$ e suas respectivas colorações.



Fonte: Autoria própria

O grafo da Figura 3 não pode ser harmonicamente colorido com duas cores, digamos cores 1 e 2, visto que temos apenas três possibilidades de pares de cor para usar (1,1), (2,2) e (1,2), assim, apenas grafos com no máximo três arestas conseguem ser coloridos harmonicamente com duas cores. Ademais, este grafo precisa de cinco cores para ser colorido harmoniosamente, pois, para todo par de vértices u, v de G , ou uv é aresta do grafo ou existe um vértice w tal que uw e vw são arestas do grafo, assim, u e v não podem ser coloridos com a mesma cor.

Organizamos este trabalho como segue. O segundo capítulo traz conceitos preliminares divididos em três seções que apresentam respectivamente definições de teoria dos grafos, complexidade computacional e programação linear-inteira. O terceiro capítulo apresenta uma revisão bibliográfica, sendo dividida em duas seções. Na Seção 3.1, apresentamos uma revisão sobre coloração harmônica e sua variação denominada coloração harmônica minimal. Na Seção 3.2, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre coloração harmoniosa e nesta temos resultados envolvendo limitantes gerais, resultados em árvores, caminhos e ciclos, grafos planares, digrafos e outras classes de grafos não tão abordadas quanto estas; nessa seção também apresentamos resultados sobre a complexidade do problema de coloração harmoniosa e uma relação entre o número cromático harmonioso e o número acromático. Em nosso quarto capítulo, apresentamos resultados em coloração harmoniosa de grafos que obtivemos durante nossa pesquisa sobre o

tema, sendo estes: limitantes para o número cromático harmonioso, modelos de programação linear inteira com uma análise da dimensão de seus politopos associados, heurísticas gulosas e resultados computacionais sob instâncias aleatórias. No quinto e último capítulo, apresentamos considerações finais e possíveis direcionamentos para trabalhos futuros na área.

2 PRELIMINARES

Este capítulo, que apresenta conceitos básicos sobre os temas aqui abordados, é dividido em três seções, sendo a primeira uma seção sobre teoria dos grafos, a segunda sobre complexidade e a terceira sobre programação inteira. Para aprofundamento e termos não definidos aqui, recomendamos que o leitor use os livros (WEST, 2001), (CORMEN *et al.*, 2022) e (WOLSEY, 2021).

2.1 Teoria dos Grafos

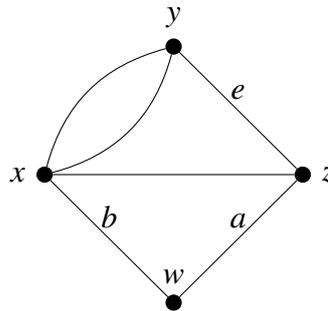
Para redigir esta seção, usamos como base o livro (WEST, 2001). Formalizamos a seguir a definição de grafo e introduzimos conceitos como isomorfismo em grafos, ciclos, caminhos, cliques, grafos bipartidos e árvores. Após tal introdução, apresentamos subseções sobre coloração e digrafos.

2.1.1 O que é um grafo?

Um *grafo* G é uma tripla que consiste em um conjunto de vértices $V(G)$, normalmente não vazio, um conjunto de arestas $E(G)$ e uma função, chamada função de incidência, que associa a cada aresta um par não-ordenado de vértices (não necessariamente distintos), denominados *extremidades*. Quando uma aresta possui extremidades iguais, ela é chamada de *laço*. Diferentes arestas com o mesmo par de extremidades são intituladas *arestas múltiplas*. Aqui estudamos apenas *grafos simples*, ou seja, grafos que não possuem laços ou arestas múltiplas. Assim, nas definições que sucedem, a menos que seja indicado o contrário, considere que estamos tratando de grafos simples.

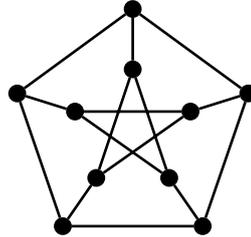
Se $u, v \in V(G)$ são extremidades da aresta e , dizemos que esses são *adjacentes* (ou *vizinhos*) e que e incide em z e em y . A *vizinhança* de $v \in G$, denotada por $N_G(v)$, é o conjunto de vértices adjacentes a ele. Ademais, o número de arestas que incide em um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d_G(v)$, é denominado *grau do vértice*. O grau máximo em um grafo G é denotado por $\Delta(G)$ e o grau mínimo por $\delta(G)$. Na Figura 4, temos que exatamente duas arestas (a e b) incidem em w . Dessa forma, o grau de w no grafo G é 2. Se G é um grafo tal que $d_G(v) = k$, para todo $v \in V(G)$, dizemos que G é um *grafo k -regular*. Na Figura 5, apresentamos um grafo 3-regular. Grafos $(n(G) - 1)$ -regulares, onde $n(G)$ é o número de vértices de G , são denominados *grafos completos* e denotados por $K_{n(G)}$.

Figura 4 – Exemplo de um grafo G com arestas múltiplas.



Fonte: Autoria própria

Figura 5 – O grafo de Petersen é um exemplo de grafo simples, finito e 3-regular.



Fonte: Autoria própria

Além de simples, os estudados aqui são *grafos finitos*, ou seja, grafos que tem o conjunto de vértices e o conjunto de arestas finitos. Se, dado um grafo G , temos $|V(G)| = 1$ denominamos G por *grafo trivial*. O número de vértices de G é denominado *ordem* de G .

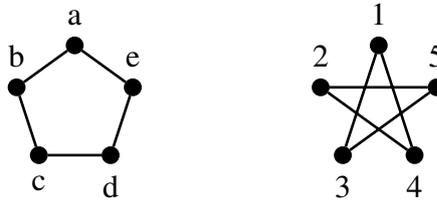
Um *subgrafo* de G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Escrevemos então $H \subseteq G$ e dizemos que G contém H como subgrafo. Caso H seja um subgrafo em que, dados $u, v \in V(H)$ temos que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $uv \in E(H)$, dizemos que H é um *subgrafo induzido* de G . Se H é um subgrafo de G tal que $V(H) = V(G)$, dizemos que H é *subgrafo gerador* de G . Um grafo G é *k-degenerado* se todo subgrafo de G possui um vértice com grau no máximo k .

Dados grafos G e H , dizemos que tais grafos são *isomorfos* se existe uma bijeção $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$. Uma vez que G é isomorfo a H se, e somente se, H é isomorfo a G , costumamos apenas dizer que G e H são isomorfos.

Na Figura 6, temos um exemplo de grafos isomorfos cuja bijeção é $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 5$, $f(d) = 2$, $f(e) = 4$. Como são isomorfos, dizemos que eles pertencem à mesma *classe de isomorfismo*, o que significa que podemos usar um único “*grafo não rotulado*” para

os representar. Grafos não rotulados são, a grosso modo, grafos cujos rótulos de vértices ou arestas são desconsiderados. Assim, para que uma classe seja considerada em vez de um grafo, os resultados em Teoria dos Grafos são para grafos não rotulados.

Figura 6 – Grafos isomorfos.



Fonte: Autoria própria

Um grafo G é um *ciclo* se seus vértices são ordenados de modo circular e temos $uv \in E(G)$ se e somente se u e v são consecutivos no ciclo. Usamos a notação C_k para denotar um ciclo com k vértices e, usualmente, denominamos por triângulo um ciclo com três vértices. G é considerado um caminho se seus vértices podem ser colocados em sequência de modo que $uv \in E(G)$ se e somente se u e v são consecutivos. Uma notação similar à de ciclo é a de *caminho*: P_k para um caminho com k vértices.

Existe outra definição equivalente de caminho. Para tanto, primeiramente definimos passeio como uma sequência $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ de vértices v_j e arestas e_i tal que, para $1 \leq i \leq k$, as extremidades da aresta e_i são v_{i-1} e v_i . Um u, v -passeio é um passeio que tem u como o primeiro e v como o último vértice da sequência que o define. Um caminho é um passeio sem repetição de vértices na sequência e uma *trilha* é um passeio sem repetição de arestas na sequência. Note que todo caminho é uma trilha já que não é possível haver repetição de uma aresta sem repetir suas extremidades, mas a recíproca não é válida. Um passeio é *fechado* se o primeiro e o último vértices de sua sequência coincidem. G é *conexo* se e somente se para todo $u, v \in V(G)$ existe u, v -caminho em G . Caso contrário, G é *desconexo*. Uma *componente* é um subgrafo conexo maximal de G .

Dizemos que o *comprimento* de um u, v -passeio é o número de arestas, sem contar suas repetições, listadas nele. A *distância* entre um par de vértices $u, v \in V(G)$, denotada por $\text{dist}_G(u, v)$, é o menor dentre os comprimentos dos u, v -caminhos em G . Se os vértices u e v pertencem a componentes distintas de G , por convenção, estes possuem distância infinita.

A partir da distância entre pares de vértices, também é possível definir o *diâmetro* de

um grafo G , este é dado por:

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} \text{dist}_G(u,v).$$

A *excentricidade* de um vértice $u \in V(G)$, denotada $\varepsilon(u)$, é definida por $\max_{v \in V(G)} \text{dist}_G(u,v)$.

O *raio* de G , denotado $\text{rad}(G)$, é definido por $\min_{u \in V(G)} \varepsilon(u)$.

O complementar do grafo G , é um grafo denotado por \overline{G} , é tal que $V(G) = V(\overline{G})$ e $uv \in E(G)$ se, e somente se, $uv \notin E(\overline{G})$. Uma *clique* em um grafo G é um subconjunto $V_1 \subseteq V(G)$ tal que os vértices de V_1 são dois-a-dois adjacentes. Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade de uma maior clique de G . Um *conjunto independente* de G é um subconjunto $V_2 \subseteq V(G)$ tal que os vértices de V_2 são dois-a-dois não-adjacentes. Denotamos por $\alpha(G)$ o tamanho de um maior conjunto independente de G .

Uma *cobertura de vértices* de G é um conjunto $Q \subseteq V(G)$ que contém pelo menos uma extremidade de cada aresta. Os vértices de Q “cobrem” $E(G)$. Denotamos por $\nu_c(G)$ ou $\beta(G)$ o menor k tal que Q é cobertura por vértices de G e $|Q| = k$. Um *emparelhamento* em G é um conjunto $M \subseteq E(G)$ tal que quaisquer duas arestas distintas de M não possuem extremidades em comum. O vértice $u \in V(G)$ é *M -saturado* pelo emparelhamento $M \subseteq E(G)$, se u é extremidade de alguma aresta de M . Caso contrário, u é *M -insaturado*. Dizemos que $M \subseteq E(G)$ é um *emparelhamento perfeito* se todo vértice de G é M -saturado.

Um grafo G é *k -partido* se $V(G)$ pode ser particionado em k conjuntos independentes. Um grafo é *bipartido* se, e somente se, este é 2-partido. Um grafo bipartido é denominado *bipartido completo* quando dois de seus vértices são adjacentes se, e somente se, estão em conjuntos diferentes da partição. Denotamos por $K_{n,m}$ grafos bipartidos completos cujos conjuntos da partição contém n e m vértices, respectivamente. Na Figura 7, o grafo à esquerda é um $K_{3,3}$. Foi demonstrado por König (1936) que um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar como subgrafo.

Figura 7 – $K_{3,3}$ e K_5 , respectivamente.

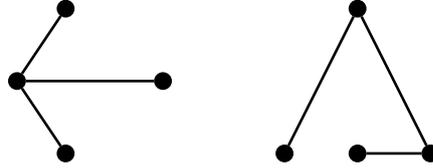


Fonte: Autoria própria

Uma subclasse bastante estudada de grafos bipartidos é a de grafos floresta. Um grafo G é uma *floresta* se este não possui nenhum ciclo como subgrafo. Caso G seja uma floresta

conexa, dizemos que ele é uma *árvore*. Um vértice $v \in V(G)$ é uma *folha* se $d_G(v) = 1$. Na Figura 8, apresentamos um exemplo de floresta.

Figura 8 – Floresta com duas árvores como suas componentes conexas.



Fonte: Autoria própria

Florestas também são grafos planares. Um *grafo planar* é um grafo que pode ser representado no plano (\mathbb{R}^2) sem que ocorra cruzamento entre suas arestas.

Em um grafo G , a *subdivisão* de uma aresta uv é a operação de resulta em um grafo G' tal que, dado $w \notin V(G)$, $V(G') = V(G) \cup \{w\}$ e $E(G') = (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{uw, vw\}$, veja Figura 9. Outra operação utilizada em grafos é a de *identificação* de um par de vértices não adjacentes. Ao identificar o par de vértices não adjacentes $u, v \in V(G)$ obtemos o grafo G' tal que $V(G') = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ e $N_{G'}(w) = N_G(u) \cup N_G(v)$.

Figura 9 – Subdivisão da aresta uv .

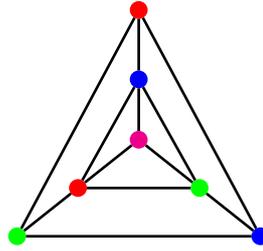


Fonte: Autoria própria

Uma *k-coloração em vértices* de $G = (V, E)$ é uma função $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Tal coloração é *própria* se para todo $uv \in E(G)$ temos $c(u) \neq c(v)$. O *número cromático* de G é $\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ possui } k\text{-coloração própria}\}$. Se $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ é uma coloração própria, então o conjunto $S_i = \{v \in V(G) \mid c(v) = i\}$ é uma *classe de cor* para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Dado o conjunto de vértices V , denotamos por $c(V)$ o conjunto de vértices resultante após aplicar a coloração c . Temos na Figura 10 um exemplo cujo número cromático do grafo é quatro, pois este possui uma coloração com quatro cores e não é possível colorir com três ou menos, já que possui uma clique de quatro vértices. Durante nosso estudo, ao usarmos a expressão “subgrafo induzido por cores”, estamos nos referindo ao subgrafo induzido pelas classes de cores mencionadas.

O problema de *COLORAÇÃO EM ARESTAS* de um grafo é definido de forma similar. Uma *k-coloração em arestas* de G é uma função $c': E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ e esta é *própria* se todo par de arestas que incide no mesmo vértice recebe cores distintas. O *índice cromático* de G ,

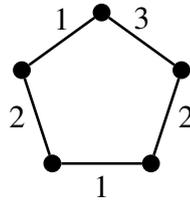
Figura 10 – Exemplo de coloração nos vértices de um grafo, nesta a cor 1 é representada por vermelho, 2 por azul, 3 por verde e 4 por magenta.



Fonte: Autoria própria

denotado por $\chi'(G)$, é o menor número de cores k tal que G possui uma k -coloração em arestas própria. Temos, na Figura 11, um exemplo de coloração própria em arestas do C_5 .

Figura 11 – Grafo com arestas coloridas com as cores 1, 2, 3.



Fonte: Autoria própria

Existem diversos problemas envolvendo coloração em arestas, porém aqui temos como foco coloração em vértices.

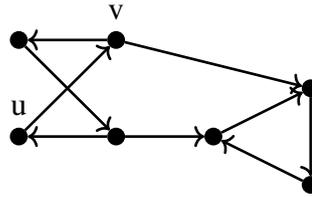
2.1.2 Grafos direcionados

Grafos são utilizados para retratar e modelar relações simétricas. Dado um conjunto S , uma *relação* neste é uma coleção de pares ordenados de seus elementos. A relação é *simétrica* quando, dados $a, b \in S$, se o par ordenado (a, b) pertence à relação, então (b, a) pertence à relação. Para relações não simétricas, tendemos a utilizar um modelo mais geral.

Um *grafo direcionado* (ou *digrafo*) D é uma tripla que consiste em um conjunto de vértices $V(D)$, um conjunto de arcos $A(D)$ e uma função, chamada função de incidência, que atribui a cada arco um par ordenado de vértices. Dado o arco $(u, v) \in A(D)$, o primeiro vértice do par ordenado é denominado *cauda* e o segundo é denominado *cabeça*, estas são as *extremidades* do arco. Representamos usualmente um arco (u, v) por uma seta de u a v , como representado na Figura 12.

Em digrafos, um *laço* é definido de forma análoga à definição dada em grafos, ou seja, um arco cujas extremidades coincidem, e *arcos múltiplos* são arcos que possuem o mesmo

Figura 12 – Exemplo de grafo direcionado.



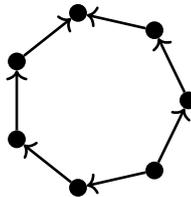
Fonte: Autoria própria

par ordenado como extremidades. Um *digrafo simples* é um digrafo que não possui laços ou arcos múltiplos. Note que, por definição, o par de arcos (u, v) e (v, u) não configura arcos múltiplos, assim pode aparecer em um digrafo simples. Um digrafo é *trivial* se seu conjunto de arcos é vazio e seu conjunto de vértices possui apenas um elemento.

O *grafo subjacente* de um digrafo D é um grafo G obtido ao tomarmos o mesmo conjunto de vértices de D e considerarmos os arcos de D como arestas, ou seja, pares não ordenados de vértices. Se D é um digrafo obtido de um grafo G substituindo cada aresta $uv \in E(G)$ pelo par de arcos $(u, v)(v, u) \in A(D)$, então dizemos que D é um *digrafo simétrico*.

Um digrafo é um *caminho* se é um digrafo simples cujos vértices podem ser linearmente ordenados, de forma que um arco do caminho possua uma cauda u e uma cabeça v se, e somente se, u é antecessor imediato de v na ordenação dos vértices. Um *ciclo* é definido de forma similar, seguindo uma ordem nos arcos, porém este é ordenado de forma cíclica. Caso não possua ciclos direcionados, D é um *DAG* (directed acyclic graph). Note que nem todo DAG possui como grafo subjacente um grafo acíclico, veja a Figura 13

Figura 13 – Digrafo acíclico que possui ciclo como grafo subjacente.



Fonte: Autoria própria

As definições de *subgrafo* e *isomorfismo* são análogas às apresentadas para grafos não direcionados, respeitando as orientações do digrafo. O conceito de *coloração própria* em digrafos também é análogo ao apresentado em grafos não direcionados.

Um digrafo é *fracamente conexo* se seu grafo subjacente é conexo. Um digrafo é *fortemente conexo* se, para todo par ordenado u, v , existe um u, v -caminho (direcionado). Note que DAGs não triviais não são fortemente conexos.

2.2 Complexidade

Nesta seção apresentamos, intuitivamente, alguns conceitos básicos de complexidade. Para um melhor entendimento sobre o assunto, recomendamos que o livro (CORMEN *et al.*, 2022) seja utilizado. Iniciamos falando sobre algoritmos e encerramos apresentando o que é um problema NP-completo.

Um *algoritmo* é um procedimento computacional bem definido que recebe um valor, ou conjunto de valores, como *entrada* e produz um valor, ou conjunto de valores, como *saída* em um tempo finito. Assim, um algoritmo é uma sequência finita de passos computacionais que transformam a entrada na saída.

O *tamanho da entrada* de um problema é o total de bits necessários para representá-la em notação binária. Para exemplificarmos, se um algoritmo recebe um grafo como entrada, caracterizamos o tamanho da entrada como a soma do tamanho dos conjuntos de vértices e de arestas. Dito de outra forma, o tamanho da entrada é igual à quantidade de bits necessários para representá-la, visto que é possível a representação de cada aresta ou vértice por 1 bit.

O *tempo de execução* de um algoritmo, em uma entrada em particular, é o número de instruções executadas. Ao tomarmos entradas de tamanhos suficientemente grandes, de forma que apenas a ordem de crescimento do tempo de execução do algoritmo é considerada, estamos estudando a eficiência *assintótica* de um algoritmo. Ou seja, estamos interessados em como o tempo de execução do algoritmo cresce em função do tamanho da entrada.

A notação \mathcal{O} caracteriza um limitante superior do comportamento assintótico da função. Isto é, dada uma função $g(n)$, temos que:

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \text{existem constantes positivas } c, n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Ademais, dizemos que $g(n)$ é *assintoticamente maior* que $f(n)$ se $g(n) = \omega(f(n))$, onde:

$$\omega(f(n)) = \{h(n) \mid \text{para toda constante } c > 0 \text{ existe uma constante } n_0 > 0 \text{ tal que } 0 \leq cf(n) < h(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Ao considerarmos, por exemplo, a função $g(n) = 8n^3 - 7n^2 + 13$, temos que o termo de maior ordem é $8n^3$, assim, observamos que $\mathcal{O}(g(n)) = n^3$. Seguindo a definição, também é possível concluir que $\mathcal{O}(g(n)) = n^k$, onde $k \geq 3$ é uma constante. Note que, por definição, $f(n)$ pertence a $\mathcal{O}(g(n))$ para toda função $g(n)$ assintoticamente maior que $f(n)$.

Apresentamos agora a noção do que é um problema. Definimos um *problema abstrato* Q como uma relação binária entre um conjunto de instâncias de problemas I e um

conjunto de soluções de problemas S . Em geral, uma *instância* para o problema consiste na entrada necessária para computar a solução deste. Por exemplo, uma instância para o problema de encontrar o (u, v) -caminho com menor quantidade de arestas, é dada pela tripla (G, u, v) onde $u, v \in V(G)$. Uma solução para este problema é uma sequência de vértices do grafo, possivelmente vazia caso um tal caminho não exista

Para nossos propósitos, estudamos problemas mais restritos que os abstratos. A teoria de NP-completude é restrita a problemas denominados *problemas de decisão*: estes são problemas que possuem como solução “sim” ou “não”. Neste caso, podemos visualizar um problema abstrato como uma função que mapeia o conjunto de instâncias no conjunto de soluções $\{0, 1\}$. A outra classe de problemas estudada aqui é a de *problemas de otimização*, em problemas desta classe um valor dado deve ser maximizado ou minimizado.

Para um programa de computador resolver um problema abstrato, representamos as instâncias usando codificações. Uma *codificação* de um conjunto S é um mapeamento e de S para o conjunto de cadeias binárias¹. No decorrer deste documento, nos referimos a estas cadeias como *strings*. Por exemplo, consideremos o conjunto dos números naturais $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, este pode ser codificado como o respectivo conjunto de strings binárias $\{0, 1, 10, 11, 100, \dots\}$.

Usando codificação, obtemos um problema cujo conjunto de instâncias é o conjunto de cadeias binárias, denominado por *problema concreto*. Dizemos que um algoritmo resolve um problema concreto em tempo $\mathcal{O}(T(n))$ se, quando fornecida uma instância i de tamanho $n = |i|$, onde $|i|$ é a quantidade de dígitos usados para representá-la na string de dígitos binários obtida pela codificação, o algoritmo fornece uma solução em tempo $\mathcal{O}(T(n))$. Um problema é resolvível em tempo polinomial se existe um algoritmo que o resolve em tempo $\mathcal{O}(n^k)$, onde k é uma constante e n é o tamanho da instância do problema.

Apesar de diversos problemas possuírem algoritmos que conseguem os resolver em tempo polinomial, existem também problemas que podem ser resolvidos, mas não se conhece um algoritmo que o resolva em $\mathcal{O}(n^k)$, onde k é uma constante. Temos, como exemplo destes, o problema de decidir se um grafo G admite uma coloração própria com três cores. Em geral, tratamos problemas resolvíveis por algoritmos de tempo polinomial como problemas *fáceis*, e problemas que acreditamos não serem possíveis de resolver com algoritmos de tempo polinomial como problemas *difíceis*.

Dentre as classes dos problemas de decisão, temos a classe NP-completo, ou NPC.

¹ O contradomínio do mapeamento e não precisa ser de strings binárias: qualquer conjunto de cadeias formado a partir de um conjunto de caracteres finito que contenha pelo menos dois símbolos é plausível.

Até o momento da escrita deste documento, não foi demonstrado haver um algoritmo polinomial que resolva um problema NP-completo ou que este algoritmo não existe. Assim, problemas NP-completos são considerados problemas difíceis. A conjectura de que $P \neq NP$ é um dos principais problemas em aberto em Teoria da Computação desde que foi proposta em Cook (1971).

Vale ressaltar que existem problemas similares tais que alguns são fáceis e outros difíceis. Dado um grafo G , determinar se existe uma trilha fechada que atravessa cada aresta exatamente uma vez, ou seja, encontrar trilha euleriana, é um problema polinomial (HIERHOLZER; WIENER, 1873). Porém, determinar se um grafo $G = (V, E)$ possui um ciclo que contém todo vértice em V , ou seja, encontrar ciclo Hamiltoniano, é um problema NP-completo (KARP, 1972).

Definimos aqui três classes de problemas. Começamos pela *classe* P , que consiste em problemas de decisão resolvíveis em tempo polinomial.

A *classe* NP consiste nos problemas de decisão verificáveis em tempo polinomial; ou seja, caso a resposta para a instância seja sim, ao ser dado um certificado, é possível verificar se este certificado é correto em tempo polinomial no tamanho da entrada do problema. No problema de encontrar ciclo Hamiltoniano em um grafo $G = (V, E)$, um certificado é uma sequência de $|V|$ vértices. É possível checar em tempo polinomial se essa sequência é um ciclo que contenha todos os vértices, ou seja, um ciclo Hamiltoniano. Note que todo problema que pertence à classe P também pertence à classe NP , uma vez que é possível resolvê-los em tempo polinomial.

Antes de definirmos a *classe* NPC , falamos um pouco sobre como *reduções* ajudam na noção de mostrar que um problema não é mais fácil ou mais difícil que outro. Demonstrações de que problemas são NP-completos, ou seja, pertencem à classe NPC , fazem uso de redução.

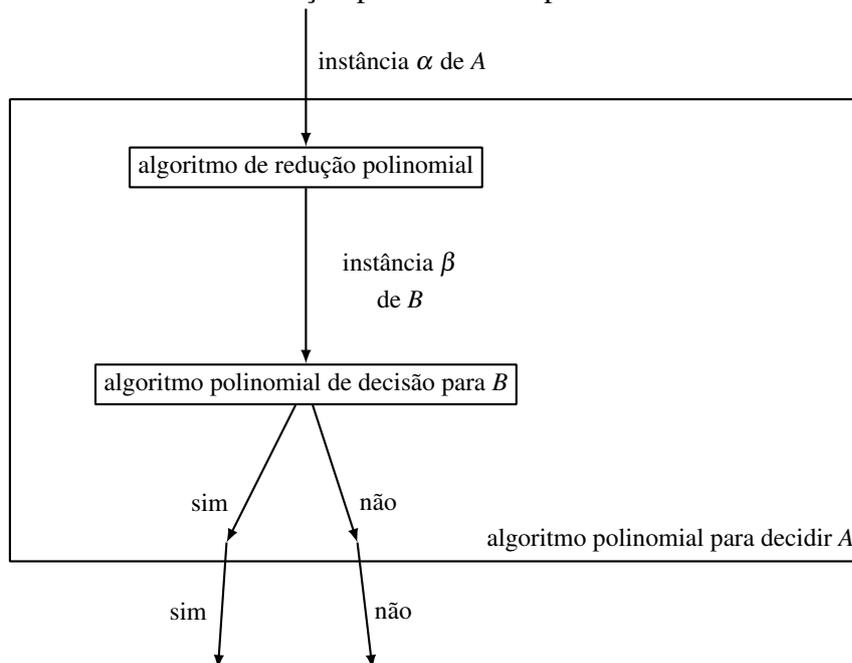
Considere A um *problema de decisão* e suponha que temos o intuito de resolver A em tempo polinomial. Agora suponha que existe um problema de decisão B resolvível em tempo polinomial e que há um procedimento que transforma qualquer instância α de A em uma instância β de B , com as seguintes características:

- A transformação ocorre em tempo polinomial;
- As respostas de α e β são as mesmas, ou seja, para a instância α é retornado sim se, e somente se, para a instância β é retornado sim.

Tal procedimento é uma *redução polinomial* e nos dá a seguinte forma de resolver o problema A em tempo polinomial:

1. Dada uma instância α do problema A , use uma redução polinomial para transformá-la em

Figura 14 – Forma de obter uma solução polinomial do problema A .



Fonte: Autoria própria

uma instância β do problema B .

2. Execute o algoritmo polinomial de decisão de B em β .
3. Use a resposta de β como resposta de α .

Há uma classe de problemas, denotada por NP-difícil, conhecida popularmente por conter problemas tão difíceis quanto os mais difíceis em NP. Para mostrar que um problema A é NP-difícil basta que verifiquemos se existe um problema NP-difícil B tal que é possível, em tempo polinomial, fazer uma redução de B para A .

A classe NPC é definida como a classe de problemas que pertencem a NP e são NP-difíceis. Atualmente existem diversos problemas NP-completos conhecidos, abrindo uma série de possibilidades para realizar reduções, caso haja suspeita do problema estudado ser NP-completo.

Boa parte dos pesquisadores teóricos acreditam que problemas NP-completos são intratáveis uma vez que, dada a quantidade de problemas NP-completos estudados até então, sem que se conheça solução polinomial para qualquer um deles, seria inusitado se todos fossem resolvidos em tempo polinomial.

2.3 Programação Inteira

Nesta seção introduzimos conceitos de programação inteira. Usamos como base o livro (WOLSEY, 2021).

Um *problema de programação linear* (PPL) pode ser representado como abaixo. Neste PPL, a_{ij} , b_j e c_i , onde $i \in [m]$ e $j \in [n]$, são coeficientes e x_j são variáveis. Em PPL's, a expressão 2.1, denominada *função objetivo*, e as desigualdades 2.2-2.5, denominadas *restrições*, são lineares. Um PPL consiste em obter a *solução ótima*, ou mostrar que o mesmo não tem solução. Uma solução ótima é uma solução que satisfaça as restrições e seja a melhor possível, ou seja, maximize ou minimize a função objetivo.

$$\max / \min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_1 \quad (2.2)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_2 \quad (2.3)$$

$$\vdots \quad (2.4)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_m \quad (2.5)$$

É importante ressaltar que as restrições não podem ser desigualdades cujas relações são $>$ ou $<$. O símbolo $\begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}$ representa $=$, \geq ou \leq .

É possível expressar este PPL usando matrizes e vetores. De fato, tomando:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Temos o seguinte PPL:

$$\max / \min \quad c^T x \quad (2.6)$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b \quad (2.7)$$

A fim de abordarmos conceitos de programação inteira, consideramos o PPL:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Ao adicionarmos a este a restrição de que certas variáveis devem assumir valores inteiros, temos as seguintes possibilidades:

Se algumas, mas não todas, as variáveis são inteiras, temos um *problema de programação inteira mista* (PPIM), que pode ser escrito como:

$$\max \quad c^T x + h^T y \tag{2.8}$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax + Gy \leq b \tag{2.9}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ e inteiro} \tag{2.10}$$

onde G é uma matriz $n \times p$, e h e y representam um vetor coluna com p linhas. Ademais, y é o vetor cujas variáveis assumem valores inteiros.

Se todas as variáveis de um PPIM são inteiras, temos um *problema de programação inteira* (PPI), que pode ser escrito como:

$$\max \quad c^T x \tag{2.11}$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax \leq b \tag{2.12}$$

$$x \geq 0 \text{ e inteiro} \tag{2.13}$$

Ademais, se todas as variáveis são restritas aos valores 0 ou 1, temos um *problema de programação inteira binária* (PPIB)

$$\max \quad c^T x \tag{2.14}$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax \leq b \tag{2.15}$$

$$x \in \{0, 1\}^p \tag{2.16}$$

Destacamos que existe um algoritmo polinomial para resolver PPL's, o método de *pontos interiores*(KARMARKAR, 1984). Entretanto, determinar uma solução ótima de um PI é NP-difícil. Um exemplo de método que pode ser utilizado para resolver PPI's é denominado *branch and bound*. Neste, implicitamente, enumeramos todas as soluções possíveis para resolver

o problema apresentado. Ressaltamos que outros métodos são empregados para resolver PPI's. Além disso, para a obtenção de uma solução ótima que satisfaça as restrições do modelo matemático, caso exista, podemos utilizar softwares comerciais especializados como o CPLEX e Gurobi, que empregam diversas técnicas para executar os modelos em tempo razoável.

Um *poliedro* é um subconjunto de \mathbb{R}^n descrito por um conjunto finito de restrições lineares $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$; se P é um poliedro limitado, ou seja, existe um real α tal que todo ponto $x \in P$ satisfaz $|x| \leq \alpha$, então P é dito um *politopo*.

Os pontos x_1, \dots, x_k são *afim independentes* se as $k - 1$ direções $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ são linearmente independentes. Para $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos a dimensão de S , denotada por $\dim(S)$, como o número máximo menos um dentre os pontos afim independentes de S . Assim, o poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ possui *dimensão plena* se, e somente se $\dim(P) = n$.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo fazemos uma revisão bibliográfica sobre colorações harmônicas e colorações harmoniosas. Visto que grande parte dos trabalhos abordados apresentam resultados para coloração harmoniosa, damos maior ênfase a esta coloração.

A priori, definimos o parâmetro $Q(m)$, onde $m \in \mathbb{Z}^+$, como sendo o menor $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\binom{k}{2} \geq m$. É possível ver que:

$$Q(m) = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2} \right\rceil.$$

Tal parâmetro é utilizado posteriormente em limitantes envolvendo as duas colorações aqui abordadas.

3.1 Colorações Harmônicas

Nesta seção apresentamos um estudo dos resultados conhecidos que dizem respeito à coloração harmônica. Tais resultados envolvem limitantes para o número cromático harmônico e a complexidade desse problema para certas classes de grafos. Aqui também apresentamos uma variação da coloração harmônica, chamada de *coloração harmônica minimal*, e resultados para esta.

Para uma k -coloração $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de um grafo G , defina $c(e) = \{c(u), c(v)\}$ como a cor de uma aresta $e = uv \in E(G)$, onde $u, v \in V(G)$. Uma k -coloração c é *harmônica*, ou *linha distinguível*, definida com essa terminologia por Lee e Mitchem (1987), quando para todo par de arestas distintas e_1 e e_2 temos $c(e_1) \neq c(e_2)$. Note que esta coloração não é necessariamente própria. O menor número de cores k tal que um grafo G admite uma k -coloração harmônica é o *número cromático harmônico* (ou *número cromático linha distinguível*) de G , denotado por $\lambda(G)$. Esta coloração foi estudada pela primeira vez por Hopcroft e Krishnamoorthy (1983) sob o nome de coloração harmoniosa, porém adotamos a nomenclatura de Lee e Mitchem (1987). No que diz respeito à complexidade computacional do problema de decisão associado a esta coloração, temos:

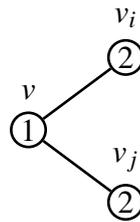
Teorema 3.1.1. (HOPCROFT; KRISHNAMOORTHY, 1983) *Dados um grafo G e um inteiro positivo k , decidir se $\lambda(G) \leq k$ é um problema NP-completo.*

A partir da definição de coloração harmônica, é possível notar que:

Lema 3.1.1. (WILSON, 1992) *Em uma coloração harmônica c , se dois vértices u, v possuem a mesma cor $c(u) = c(v)$ então $uv \in E(G)$ ou $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$.*

De fato, tendo em vista a Figura 15 se v é um vértice de um grafo G e $N_G(v) = \{v_1, \dots, v_p\}$, notamos que é possível que $c(v) = c(v_i)$ para um único $i \in \{1, \dots, p\}$, pois temos que $c(v_i) \neq c(v_j)$, para quaisquer inteiros i, j tais que $1 \leq i, j \leq p$.

Figura 15 – Note que v_i e v_j não podem receber a mesma cor, pois, se esse for o caso, as cores 1, 2 induzem pelo menos duas arestas.



Fonte: Autoria própria

Se G é tal que $\lambda(G) = \Delta(G)$ e $d_G(v) = \Delta(G)$, então v possui algum vizinho que é folha (ZHANG, 2016). Em Zhang (2016), o autor também apresenta um limitante inferior para $\lambda(G)$, sendo este relacionado com o número de arestas do grafo.

Note que se G é um grafo com m arestas tal que $\lambda(G) \leq k$, é necessário que $m \leq \binom{k}{2} + k = \binom{k+1}{2}$ visto que tal valor é justamente o número de pares de cores que podem ocorrer nas extremidades de arestas em uma k -coloração harmônica. Assim, segue que $\lambda(G) \geq Q(m) - 1$. Em Edwards (1996), o autor demonstra que, para florestas com o grau máximo limitado, é possível determinar o número cromático harmônico em tempo polinomial. Ademais, apresenta uma condição suficiente para que, dada uma floresta F , $\lambda(F) = Q(m)$ ou $Q(m) - 1$.

No que diz respeito a formulações matemáticas, apenas um trabalho (OLIVEIRA, 2019) apresentou desigualdades válidas para o problema de coloração harmônica. Neste o autor apresenta dois modelos: um baseado no conjunto de cores e um baseado em representantes.

3.1.1 Coloração Harmônica Minimal

Nesta subsecção estudamos uma variação de coloração harmônica apresentada em Wilson (1992). Sabemos que, por definição, em uma coloração harmônica de G temos uma k -coloração de n vértices tal que cada par de cores é utilizado no máximo uma vez em uma dada aresta. Ao adicionarmos a restrição de cada par de cores aparecer exatamente 1 vez, diremos que a coloração é *harmônica minimal*, em inglês *minimal line distinguishing* (MLD), e diremos que

G é MLD-colorível. Note que um grafo G só é MLD-colorível com k cores se possuir exatamente $\binom{k+1}{2}$ arestas. Apesar de ser um resultado para colorações harmônicas sem essa nova restrição, o Lema 3.1.1 possui como corolário:

Proposição 3.1.2. (WILSON, 1992) *Dado um grafo G com n vértices,*

- *Em uma MLD-coloração de G usando $\frac{n}{2}$ cores cada cor aparece exatamente duas vezes; os dois vértices que recebem a mesma cor são adjacentes e G é conexo;*
- *Em uma MLD-coloração de um grafo G de diâmetro dois, que tem um número par de vértices, o número de cores usadas é $\frac{n}{2}$ e cada cor é usada exatamente duas vezes;*

Resultados relacionando coloração harmônica minimal e emparelhamento de grafos também são mencionados. Para apresentar um destes, definimos um emparelhamento M de G como um emparelhamento livre de triângulos (TFM) quando toda aresta de M não pertence a um triângulo de G . Assim, temos:

Teorema 3.1.3. (WILSON, 1992) *Um grafo G com n vértices e m arestas tal que $m = \frac{n^2+2n}{8}$ é MLD-colorível somente se possui um TFM perfeito.*

Em Wilson (1992), o autor caracteriza, considerando n o número de vértices de G , uma classe infinita de grafos G de diâmetro 2 tais que $\lambda(G) = \frac{n}{2}$ e, usando uma construção similar à desta classe, descreve uma classe de grafos regulares MLD-coloríveis com $\frac{n}{t}$ cores, onde $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 2$. O grafo de Petersen, já conhecido por ter propriedades singulares, é mencionado neste trabalho, pois, desconsiderando grafos completos e o grafo trivial, é o único grafo regular conexo de diâmetro 2 que é MLD-colorível.

Apesar de coloração harmônica já ser um problema difícil sem a restrição de ser própria, a maioria dos resultados encontrados na bibliografia exigem que a coloração obtida seja.

3.2 Colorações Harmoniosas

Nesta seção apresentamos resultados teóricos e computacionais encontrados na literatura envolvendo coloração harmoniosa de um grafo dado. Definimos uma *coloração harmoniosa* em vértices de um grafo G como uma coloração própria tal que cada par de cores induz no máximo uma aresta. Em Lee e Mitchem (1987), os autores, além de introduzirem o conceito de coloração harmoniosa, denotam por $h(G)$ o *número cromático harmonioso*, cuja definição é dada por $h(G) = \min\{k \mid G \text{ possui uma } k\text{-coloração harmoniosa}\}$.

O problema de coloração harmoniosa já foi adaptado para uma versão em arestas (AFLAKI *et al.*, 2012). Nesta temos uma coloração em arestas própria na qual cada par de cores aparece em no máximo um par de arestas incidentes. O *número cromático harmonioso em arestas* é $h'(G) = \min\{k \mid G \text{ possui } k \text{ coloração harmoniosa em arestas}\}$. Contudo, tal problema foi até então pouco explorado. Em (AFLAKI *et al.*, 2012), apresentam-se limitantes envolvendo árvores e grafos regulares. Uma vez que coloração harmoniosa em arestas foi foco apenas do trabalho mencionado anteriormente, nas subseções que sucedem apresentamos os resultados envolvendo coloração harmoniosa em vértices. Ressaltamos que atualmente existem trabalhos ainda não publicados em periódicos (ARAUJO-PARDO *et al.*, 2022; OLSEN *et al.*, 2022; MARINESCU-GHEMECI *et al.*, 2021), para os quais é possível encontrar a versões online.

3.2.1 Limitantes Gerais

Nesta subseção apresentamos limitantes encontrados para o número cromático harmonioso em função do grau máximo, da cobertura de vértices e do complementar do grafo. Também apresentamos variações do problema de coloração harmoniosa em vértices.

Usando a definição de coloração harmoniosa, em KUNDRIK (1992), o autor formaliza:

Teorema 3.2.1. (KUNDRÍK, 1992) *Seja G um grafo de ordem n , $h(G) = n$ se, e somente se, $\text{diam}(G) \leq 2$.*

Este resultado foi combinado com métodos probabilísticos para demonstrar que:

Teorema 3.2.2. (MILLER; PRITIKIN, 1991) *Seja G um grafo de diâmetro dois e ordem n , assim, $h(G) = n$. Temos que, $h(G) = n$ para quase todo grafo.*

Dizer que quase todo grafo possui diâmetro dois significa que a probabilidade do grafo possuir diâmetro dois tende a um quando o número de vértices do grafo tende ao infinito.

Resultados envolvendo grafos com diâmetro pelo menos 3 também podem ser encontrados na literatura. Em Drgas-Burchardt e Gibek (2017) os autores apresentam como resultado principal que, se G é um grafo com diâmetro pelo menos 3, então $h(G) + \frac{1}{2}\chi(\overline{G^2}) \leq n$.

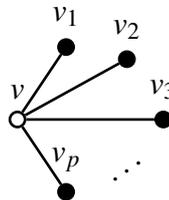
No primeiro trabalho que menciona coloração harmoniosa (LEE; MITCHEM, 1987) é introduzida a definição de *coloração parcialmente harmoniosa* de G , como sendo a coloração harmoniosa de um subgrafo induzido de G tal que para um vértice ainda não colorido u e uma cor, normalmente é a coloração c , no máximo um elemento de $N_G(u)$ é colorido com tal cor c .

Note que esta restrição é necessária se alguém for estender tal coloração a G pois, caso contrário, qualquer cor atribuída a u implicaria em duas arestas com extremidades com as mesmas cores. Ademais, dizemos que a cor c é uma *cor disponível* para um vértice u se podemos rotular u com c e ainda assim obter uma coloração parcialmente harmoniosa de G . Caso contrário, tal cor é dita *proibida*. Nesse artigo os autores apresentam o lema a seguir. A demonstração, entretanto, não contém todos os detalhes que apresentamos.

Lema 3.2.1. (LEE; MITCHEM, 1987) *Suponha que temos uma coloração parcialmente harmoniosa de G com k cores e um vértice v ainda não colorido. Suponha também que cada classe de cor tem ordem no máximo t . Então existem pelo menos $k - t\Delta(G)^2$ cores disponíveis para v .*

Demonstração. Assuma que $\Delta = \Delta(G)$. Seja c uma coloração parcialmente harmoniosa de G tal que v é um vértice não colorido por c . Logo todos os vértices pré-coloridos com a coloração c que forem vizinhos de v possuem cores distintas. Note que, no pior dos casos, v tem Δ vizinhos todos coloridos. Começamos demonstrando que existem pelo menos $\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$ cores proibidas para v em c a fim de melhorar o entendimento da demonstração.

Figura 16 – Vizinhança de v .



Fonte: Autoria própria

Sejam v_1, \dots, v_p os vizinhos de v pré-coloridos por c , onde $p \leq \Delta$. Assuma, sem perda de generalidade, que $c(v_i) = i$, onde $1 \leq i \leq p$. É fato que cada v_i tem no máximo Δ vizinhos e como $vv_i \in E(G)$, concluímos que cada v_i possui no máximo $\Delta - 1$ vizinhos, além de v , pré-coloridos em c . Temos então que v tem $p \leq \Delta$ vizinhos pré-coloridos, logo os vértices que possuem distância exatamente dois de v são coloridos com no máximo $\Delta(\Delta - 1)$ cores e os vizinhos de v com no máximo Δ . Dessa forma, nos vértices à distância no máximo dois de v , usamos no máximo $\Delta + \Delta(\Delta - 1)$ cores. Note que, se tentarmos estender c a uma coloração parcialmente harmoniosa que também colore v , v não pode receber nenhuma das $p \leq \Delta$ cores que ocorre em $N_G(v)$, pois tal coloração deve ser própria, nem nenhuma das cores que ocorre nos vértices que estão à distância exatamente dois, já que teríamos duas arestas com as mesmas cores

em suas extremidades. Portanto, no pior dos casos, há ao menos $\Delta + \Delta(\Delta - 1)$ cores proibidas para v em c .

Seja agora $u \in V(G)$ tal que $u \neq v_i$ e $c(u) = i$, $1 \leq i \leq p \leq \Delta$. Note que se u possuir um vizinho de cor j , então a cor j também não pode ser atribuída a v já que v possui um vizinho de cor i e teríamos duas arestas com extremidades com as cores i e j . Não trataremos o caso $c(u) = i$, quando $i > p$, pois nenhum vizinho de v é colorido com tais cores. Assim, temos que u possui no máximo Δ vizinhos pré-coloridos em c e cada uma das cores nos vizinhos de u é proibida para v . Por hipótese, existem no máximo t vértices, como o vértice u , coloridos com a cor i . Logo, olhando para a vizinhança da união dos vértices da classe de cor i , temos que existem no máximo $t\Delta$ cores que não podem ser usadas em v . Ademais, como v tem $p \leq \Delta$ vizinhos e tal argumento vale para cada cor de vértices adjacentes a v , temos no máximo $t\Delta p \leq t\Delta^2$ cores proibidas para v . Logo existem, de fato, $k - t\Delta^2$ cores disponíveis para v em c . \square

Com auxílio do Lema 3.2.1, em Lee e Mitchem (1987) é demonstrado que:

Teorema 3.2.3. (LEE; MITCHEM, 1987) Para todo grafo G :

$$\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq (\Delta(G)^2 + 1)\sqrt{n(G)}.$$

Demonstração. Como, pelo Teorema 3.2.1, vértices à distância maior ou igual a dois não podem receber a mesma cor, a desigualdade $\Delta(G) + 1 \leq h(G)$ segue.

Para a segunda desigualdade, considere uma coloração parcialmente harmoniosa de G tal que

1. $((\Delta(G))^2 + 1) \lceil \sqrt{n} \rceil$ cores são usadas e
2. cada classe de cor possui no máximo $\lceil \sqrt{n} \rceil$ vértices.

Se $|V(G)| \leq ((\Delta(G))^2 + 1) \lceil \sqrt{n} \rceil$, não há o que provar. Suponha o contrário. A fim de demonstrar a existência de tal coloração, tome $H \subseteq G$ tal que $|V(H)| = ((\Delta(G))^2 + 1) \lceil \sqrt{n} \rceil$ e use uma cor em cada vértice de H . Logo, existe $v \in V(G \setminus H)$ que não foi colorido. Usando o Lema 3.2.1, v possui pelo menos $((\Delta(G))^2 + 1) \lceil \sqrt{n} \rceil - (\Delta(G))^2 \lceil \sqrt{n} \rceil = \lceil \sqrt{n} \rceil$ cores disponíveis. Se cada uma das classes de cores das $\lceil \sqrt{n} \rceil$ cores disponíveis possuir $\lceil \sqrt{n} \rceil$ vértices, então temos que $|V(G)| = n > \lceil \sqrt{n} \rceil \lceil \sqrt{n} \rceil \geq n$. Assim, existe pelo menos uma classe de cor, dentre as $\lceil \sqrt{n} \rceil$ disponíveis, com no máximo $\lceil \sqrt{n} \rceil - 1$ vértices. Usamos a cor dessa classe em v . Assim, obtemos uma coloração harmoniosa tal que v é colorido e as condições (i) e (ii) são satisfeitas. \square

Tal resultado foi melhorado para:

Teorema 3.2.4. (LU, 1991) Para todo grafo G vale:

$$h(G) \leq 2\Delta(G) \left\lceil \sqrt{n(G)} \right\rceil;$$

e posteriormente para:

Teorema 3.2.5. (MCDIARMID; XINHUA, 1991) Para todo grafo G vale:

$$h(G) \leq 2\Delta(G) \sqrt{n(G) - 1}.$$

Limitantes envolvendo o grau dos vértices do grafo também são estudados em Edwards e McDiarmid (1994). Para tanto, os autores definem o k -core $V_{(k)}$ de um grafo G como o conjunto (possivelmente vazio) de vértices que restam após a remoção dos vértices com grau menor do que k , de forma que o grau mínimo do grafo obtido é pelo menos k . Note que o processo para obter o k -core de G é feito repetitivamente e que, ao removermos um vértice v tal que $d_G(v) \leq k - 1$, o grau de toda a vizinhança de v em G cai em uma unidade. Usando este conjunto é demonstrado que:

Teorema 3.2.6. (EDWARDS; MCDIARMID, 1994) Seja G um grafo com m arestas e grau máximo Δ . Então, para todo $k \geq 2$,

$$h(G) \leq \max\{|V_{(k)}|, 2\sqrt{2(k-1)m} + (2k-3)\Delta\}.$$

Usando a definição de k -core temos que, para todo G , $|V_{(\Delta+1)}| = 0$, o que resulta em:

$$h(G) \leq 2\sqrt{2\Delta m} + (2\Delta - 1)\Delta.$$

A fim de obter um limitante para $h(G)$ de um grafo G distinto de $\Delta(G) + 1$, resultados para grafos aleatórios são apresentados em Krasikov e Roditty (1994). Temos, então, como um primeiro lema para tal resultado:

Lema 3.2.2. (KRASIKOV; RODITTY, 1994) Seja G um grafo aleatório, onde cada aresta é escolhida com a probabilidade p . Sejam A_1, A_2 dois subconjuntos disjuntos de vértices, cada um de tamanho m , então a probabilidade que existam pelo menos duas arestas de G entre eles é pelo menos:

$$\frac{m^2(m^2 - 1)p^2(1 - p)^{m^2 - 2}}{2} \geq \frac{m^2(m^2 - 1)p^2(1 - m^2 p)}{2}.$$

Tomando agora G um grafo que satisfaz as condições do Lema 3.2.2, temos:

Lema 3.2.3. (KRASIKOV; RODITTY, 1994) *Seja G um grafo aleatório com n vértices, onde cada aresta é escolhida com a probabilidade p . Suponha que $k \geq 2$, $2k|n$, $m = \frac{n}{2k} \geq 2$, $m^2 p < \frac{1}{2}$ e que existe uma coloração de $V(G)$ com k cores. Então a probabilidade de que não existam duas arestas coloridas com o mesmo par de cores é no máximo $e^{-\frac{n^4 p^2}{512k^2}}$, onde e é a base do logaritmo natural.*

Note que tal probabilidade é correspondente à probabilidade de tal grafo possuir uma k -coloração harmoniosa. Como corolário do Lema 3.2.3, os autores apresentam:

Corolário 3.2.1. (KRASIKOV; RODITTY, 1994) *Sejam k , m , p que satisfazem as condições do Lema 3.2.3 e suponha que $n^n e^{-\left(\frac{n^4 p^2}{512k^2}\right)} < \frac{1}{2}$. Então a probabilidade que exista uma coloração dos vértices de G com k cores sem possuir duas arestas com o mesmo par de cores nas extremidades é menor que $\frac{1}{2}$.*

A partir da combinação de tais resultados com outros também apresentados pelos autores, é possível obter que:

Teorema 3.2.7. (KRASIKOV; RODITTY, 1994) *Para n suficientemente grande e para Δ que satisfaça $10^4 \log_2(2n) \leq \Delta \leq \sqrt{n \log_2(2n)}$ existe um grafo G com n vértices e grau máximo menor ou igual a Δ que não possui uma coloração harmoniosa com menos que $\frac{\Delta \sqrt{n}}{80 \sqrt{\log_2 n}}$ cores.*

Em (EDWARDS, 1997), tendo como referência o Teorema 3.2.7, o autor deduz que, para grafos de grau máximo limitado,

$$h(G) \geq \frac{\sqrt{\Delta 2m}}{80 \sqrt{\log_2 n}}.$$

Além de provar a existência de um grafo G cujo limitante inferior do número harmonioso não é linear em $\Delta(G)$, em (KRASIKOV; RODITTY, 1994), também é apresentado um limitante superior para o número cromático harmonioso e o tamanho de uma classe de cor em uma coloração harmoniosa de um grafo qualquer:

Teorema 3.2.8. (KRASIKOV; RODITTY, 1994) *Para todo grafo G com n vértices temos $h(G) \leq \lceil \frac{n}{t} \rceil$, onde $t = \max\{1, \lceil \Delta + 1 + \frac{[(\Delta+1)^2 + 8n]^{1/2}}{4\Delta} \rceil - 1\}$. Ademais, existe uma coloração harmoniosa de G com $\lceil \frac{n}{t} \rceil$ cores tal que cada classe de cor tem no máximo t vértices.*

Em McDiarmid e Xinhua (1991) os autores apresentam limitantes superiores para $h(G)$ relacionando-o com $\hat{\delta}(G)$; tal parâmetro é definido, para um grafo G arbitrário, como

$\hat{\delta}(G) := \max\{\delta(H) : H \text{ é subgrafo induzido de } G\}$. Dentre os resultados apresentados por eles, temos:

Teorema 3.2.9. (MCDIARMID; XINHUA, 1991) Para todo G não trivial com n vértices, onde $\hat{\delta}(G) = \hat{\delta}$ e $\Delta(G) = \Delta$, vale:

$$h(G) \leq \begin{cases} \frac{33}{16}(\hat{\delta}\Delta(n-1))^{\frac{1}{2}}; \\ 2(\hat{\delta}\Delta(n-1))^{\frac{1}{2}}, & \text{se } \hat{\delta} \leq 8. \end{cases}$$

Este parâmetro também foi utilizado em Edwards (1998) para demonstrar o seguinte limitante superior:

Teorema 3.2.10. (EDWARDS, 1998) Dado um grafo G com m arestas tal que $\hat{\delta}(G) = \hat{\delta}$ e $\Delta(G) = \Delta$, então;

$$h(G) \leq \left\lceil \frac{\sqrt{8m(\hat{\delta} + \Delta) + A^2}}{2} + \frac{A}{2} \right\rceil,$$

onde $A = 2\Delta\hat{\delta} + (\Delta)^2 - \hat{\delta}^2$.

Introduzimos agora o conceito de homomorfismo em grafos. Dada uma aplicação $f: V(G) \rightarrow V(H)$, dizemos que f é homomorfismo de G em H se, para toda aresta uv de G , temos a aresta $f(u)f(v)$ em H . Vale ressaltar que, em oposição à relação de isomorfismo, a relação de homomorfismo não é sempre simétrica. De fato, na Figura 17, temos que a função $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$, $f(d) = 3$, $f(e) = 2$ é um homomorfismo de G em H , mas tomando, sem perda de generalidade, $g: V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $g(1) = a$ e $g(2) = b$, temos que não existe $g(3)$ tal que $g(1)g(3), g(2)g(3) \in E(G)$.

Figura 17 – Grafo G homomorfo a H , mas H não é homomorfo a G .



Fonte: Autoria própria

Note que se um grafo G é harmoniosamente k -colorível, então é possível obter um homomorfismo entre G e K_k , de forma que cada aresta de K_k é representante de uma

única aresta de G . Assim, para que G seja harmoniosamente k -colorível, é necessário que $m(G) \leq \binom{k}{2} = m(K_k)$. Tal observação é feita em Miller e Pritikin (1991). Dessa forma, assim como ocorre com $\lambda(G)$ temos que é possível limitar $h(G)$ a partir de $m(G)$.

Apesar de, em sua maioria, os limitantes do número cromático harmonioso levarem em conta o grau máximo do grafo, em KUNDRIK (1992), o autor apresenta limitantes superiores e inferiores para o número cromático harmonioso de G e para o de \bar{G} relacionando-os com desigualdades similares às desigualdades $2\sqrt{n(G)} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n(G) + 1$ e $n(G) \leq \chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$, demonstradas em Nordhaus e Gaddum (1956).

Teorema 3.2.11. (KUNDRÍK, 1992) *Seja G um grafo com n vértices. Então:*

$$n + 1 \leq h(G) + h(\bar{G}) \leq 2n,$$

$$n \leq h(G) \cdot h(\bar{G}) \leq n^2.$$

No mesmo trabalho, (KUNDRÍK, 1992) apresenta exemplos apertados para estes limitantes em função da soma e do produto dos números cromáticos harmoniosos de G e \bar{G} .

Outra forma de limitar o número cromático harmonioso de um grafo é por meio da cobertura (de arestas) por vértices.

Lema 3.2.4. (KOLAY et al., 2019) *Seja G um grafo sem vértices isolados, X uma cobertura por vértices de G , e seja H o grafo auxiliar definido tal que $V(H) = V(G) \setminus X$ e, para todos $u, v \in V(G)$, temos que $uv \in E(H)$ se, e somente se, $\text{dist}_G(u, v) = 2$. Uma coloração c de G , onde*

1. $c(X) \cap c(V(G) \setminus X) = \emptyset$; e
2. $c(i) \neq c(j)$, para todo $i \neq j$, $i, j \in X$

é uma coloração harmoniosa de G se, e somente se, $c|_{V(G) \setminus X}$ é uma coloração própria de H .

Demonstração. Primeiramente, suponha que a função c é uma coloração harmoniosa de G . Uma vez que assumimos que o grafo G não possui vértices isolados, cada vértice de $V(G) \setminus X$ deve ser adjacente a pelo menos um vértice de X . Pela Propriedade 1 de c , os vértices de $V(G) \setminus X$ devem receber cores diferentes das cores usadas em X . Por absurdo, suponha que $c|_{V(G) \setminus X}$ não é uma coloração própria de H . Assim, existe uma aresta $uv \in E(G)$ tal que suas extremidades recebem a mesma cor. Para que essa aresta seja presente, existe $w \in X$ tal que $wu, wv \in E(G)$. A definição de $c|_{V(G) \setminus X}$ implica que $c(u) = c(v)$. Portanto, devido à existência das arestas wu

e wv , c não é uma coloração harmoniosa de G . Dessa forma, $c|_{V(G \setminus X)}$ deve ser uma coloração própria de H .

Para demonstrar a direção contrária, seja c uma coloração de G tal que $c(X) \cap c(V(G \setminus X)) = \emptyset$, vértices distintos de X recebem cores distintas em c e $c|_{V(G \setminus X)}$ é uma coloração própria de H . Por absurdo, suponha que c não é uma coloração harmoniosa de G . Para que a hipótese do absurdo seja satisfeita, é necessário que (a) uma aresta em $E(G)$ possua a mesma cor em suas extremidades ou (b) exista um par de cores cujas classes de cores induzem mais de uma aresta. Suponha que há uma aresta em G cujas extremidades recebem a mesma cor. Como $V(G) \setminus X$ é um conjunto independente e vértices de X recebem cores distintas, esta aresta deve ocorrer entre um vértice de $v \in X$ e $w \in V(G \setminus X)$. Por definição, $c(X) \cap c(V(G) \setminus X) = \emptyset$, o que contradiz a hipótese da existência de tal aresta. Assim, c é uma coloração própria de G . Suponha, então, que existe um par de cores i, j tal que as classes de cores V_i, V_j induzem mais de uma aresta. Isto é, existem vértices $u_1, u_2 \in V_i$ e $v_1, v_2 \in V_j$ tais que $u_1v_1, u_2v_2 \in E(G)$. Uma vez que c é uma coloração na qual vértices distintos de X recebem cores distintas e $c(X) \cap c(V(G) \setminus X) = \emptyset$, nenhum vértice das classes de cores V_i, V_j pode pertencer a X . Como G é conexo e $V(G) \setminus X$ é um conjunto independente, as arestas induzidas por V_i, V_j devem possuir uma extremidade em X e uma em $V(G \setminus X)$. Assim, temos que ou $u_1 = u_2 \in X$ e $v_1 \neq v_2 \in V(G \setminus X)$ ou $v_1 = v_2 \in X$ e $u_1 \neq u_2 \in V(G \setminus X)$. Sem perda de generalidade, suponha que $u_1 = u_2 \in X$ e $v_1 \neq v_2 \in V(G \setminus X)$. Assim, no grafo auxiliar H $v_1v_2 \in E(H)$. Logo, $c|_{V(G \setminus X)}$ é uma coloração própria de H , o que contradiz que v_1 e v_2 pertencem à mesma classe de cor da coloração c . Assim, c é uma coloração harmoniosa de G . \square

Teorema 3.2.12. (KOLAY et al., 2019) Se G é um grafo tal que $\Delta(G) \geq 2$, então $\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq \text{vc}(G) + \Delta(G)(\Delta(G) - 1)$.

Demonstração. O limitante inferior segue pelo Teorema 3.2.1.

A fim de demonstrar que $h(G) \leq \text{vc}(G) + \Delta(G)(\Delta(G) - 1)$, primeiro construímos uma coloração harmoniosa de G usando $\text{vc}(G) + \Delta(G)(\Delta(G) - 1) + 1$ cores e, em seguida, aplicamos uma técnica para economizar uma cor. Seja X uma cobertura por vértices de G . Construímos uma coloração $\phi: V(G) \rightarrow [\text{vc}(G) + \Delta(G)(\Delta(G) + 1)]$ da seguinte forma: colorimos vértices distintos da cobertura X com cores distintas que não serão utilizadas nos vértices de $V(G) \setminus X$ e construímos um grafo auxiliar H como o citado no Lema 3.2.4. Note que $\Delta(H) = \Delta(G)(\Delta(G) - 1)$. Ademais, é bem conhecido colorir H propriamente usando no máximo

$\Delta(H) + 1$ cores. A coloração $\phi|_{V(G)\setminus X}$ é uma coloração própria de H e ϕ satisfaz as hipóteses do Lema 3.2.4, logo ϕ é uma coloração harmoniosa de G .

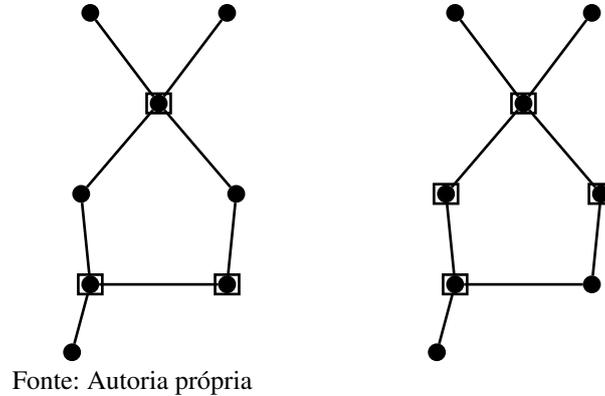
Para reduzir uma cor, usamos uma ideia similar à usada em (AFLAKI *et al.*, 2012). Se for possível colorir gulosamente os vértices de $V(G)\setminus X$ usando $\Delta(G)(\Delta(G) - 1)$, então esta coloração já satisfaz o teorema. Caso contrário, tome $u \in X$. Iremos recolorir u com uma cor usada em $V(G)\setminus X$. Seja u adjacente a $i \leq \Delta - 1$ vértices de X (se $N_G(u) \subseteq X$, então u pode ser movido para $V(G)\setminus X$, sem perda de generalidade). Assim, em $V(G)\setminus X$, no máximo $i(\Delta(G) - 1)$ vértices estão à distância dois de u e no máximo $\Delta(G) - i$ são vizinhos de u . Mantendo as cores dos demais vértices, se quisermos recolorir u para economizar, as $i(\Delta(G) - 1) + \Delta(G) - i$ cores desses vértices não podem ser usadas em u (por definição de coloração harmoniosa), porém qualquer outra cor pode ser atribuída a u . Portanto, o número de cores proibidas é $i(\Delta(G) - 1) + \Delta(G) - i = i(\Delta(G) - 2) + \Delta(G)$. Todavia, $i(\Delta(G) - 2) + \Delta(G) \leq (\Delta(G) - 1)(\Delta(G) - 2) + \Delta(G) = \Delta(G)(\Delta(G) - 1) - \Delta(G) + 2 \leq \Delta(G)(\Delta(G) - 1)$ quando $\Delta(G) \geq 2$ e, conseqüentemente, sempre é possível encontrar uma cor disponível para recolorir u dentre as cores que não aparecem em vértices à distância no máximo dois deste vértice, o que reduz o limitante superior em uma unidade. \square

Apesar de existirem limitantes usando a cobertura de vértices de G como parâmetro, durante nosso estudo, observamos que nem sempre a cobertura mínima retorna o melhor limitante para uma coloração harmoniosa do grafo. Temos na Figura 18 o exemplo de um grafo cuja cobertura mínima não retorna o melhor limitante superior. Nesta coloração, damos a cada vértice da cobertura uma única cor e aos vértices do conjunto independente cores distintas se, e somente se, eles possuem um vizinho em comum.

A utilização do grau máximo de um grafo foi empregada como uma ferramenta fundamental na obtenção de limitantes superiores para o conceito de coloração k -harmoniosa em um grafo G . Uma *coloração k -harmoniosa* é uma coloração própria tal que cada par de cores induz um emparelhamento com no máximo k arestas. O número cromático k -harmonioso, denotado por $h_k(G)$, é o menor número de cores usadas em G em uma coloração k -harmoniosa.

Note que $h_1(G) = h(G)$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $h_k(G) \geq h_{k+1}(G)$. Define-se, $h_\infty(G)$ como o menor número de cores em uma coloração harmoniosa de G de modo que os vértices de nenhum P_3 sejam coloridos com exatamente duas cores. Além disso, temos a seguinte relação: $h_\infty(G) \leq h(G) \leq n = |V(G)|$, onde a igualdade é alcançada somente quando o grafo G possui diâmetro no máximo dois.

Figura 18 – No grafo com a cobertura dada à esquerda o limitante superior de $h(G)$ obtido é 7, e no da direita $h(G)$ é limitado por 6.



Teorema 3.2.13. (MCDIARMID; XINHUA, 1991) Para um grafo G não-trivial, $\Delta = \Delta(G)$, $n = |V(G)|$ e $k \in \mathbb{N}$ vale:

$$h_k(G) \leq \max \left\{ 21(k+1)\Delta^2, 18\Delta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Como corolário de tal teorema, temos:

Corolário 3.2.2. (MCDIARMID; XINHUA, 1991) Dado G , temos:

$$h_{\Delta}(G) \leq 23 \max \{ \Delta^3, n^{\frac{1}{2}} \}$$

Algumas outras variações da coloração harmoniosa em vértices foram estudadas na literatura. Tais variações são:

- Coloração Harmoniosa Local (WANG *et al.*, 2010): a restrição de cada par de cores induzir no máximo uma aresta só precisa ser satisfeita para arestas à distância d de cada vértice, denominamos esta por coloração d -harmoniosa local. O número cromático d -harmonioso local de G é o menor k tal que G possui uma coloração d -harmoniosa local com k cores. Resultados para caminhos e ciclos foram estudados para essa variação.

Uma versão ainda mais relaxada da coloração harmoniosa local foi estudada em Gao (2017) e em Gao (2018), na versão estuda por estes autores, eles consideram apenas o caso em que $d = 1$. Também considerando a versão em que $d = 1$, agora adotando a nomenclatura de coloração 1-harmoniosa, em Liu *et al.* (2019) os autores mostram que o número cromático 1-harmonioso de um grafo G completo, roda e estrela é $n(G)$; se G é uma árvore, um *mesh network*, um *extended mesh network* ou um *generalized honeycomb network* então o número cromático 1-harmonioso de G é $\Delta(G) + 1$. Outras classes de grafos também são estudadas em Liu *et al.* (2019). O

problema de coloração 1-harmoniosa também foi estudado em *snakes* triangulares por Mansuri *et al.* (2020).

- **Coloração Harmoniosa Local Fracionada (GAO, 2018):** Esta coloração é uma abordagem racional da coloração harmoniosa local, de forma que todo $v \in V(G)$ recebe um subconjunto com b elementos de $\{1, 2, \dots, a\}$ denotado C_v ; se u, v são adjacentes ou possuem um vizinho em comum então $C_v \cap C_u = \emptyset$. O número cromático harmonioso local fracionado é o menor número racional positivo $\frac{a}{b}$ tal que G admite uma coloração harmoniosa local fracionada com $\frac{a}{b}$ cores. Resultados para ciclos foram estudados nesta variação. Ademais, o autor apresenta que se um grafo com n vértices tem diâmetro no máximo dois, então seu número cromático local fracionado é igual a n e relaciona coloração harmoniosa local fracionada com

No problema *número de colorações* (DRGAS-BURCHARDT; GIBEK, 2017), denotamos por $\chi_h(G, k)$ o número de k -colorações harmoniosas em G . Tal problema não é necessariamente uma variação de coloração harmoniosa, mas em Drgas-Burchardt e Gibek (2017) os autores analisam o valor de $\chi_h(G, k)$ a partir do valor de k .

3.2.2 Coloração Harmoniosa em Árvores

Nesta subseção apresentamos condições suficientes para a existência de árvores com um número cromático harmonioso dado, limitantes do número cromático harmonioso em árvores n -árias, resultados envolvendo árvores com um número alto de folhas e a relação entre $h(T)$ e $Q(m)$, sendo T uma árvore e $m = E(T)$.

Começamos tal estudo com a caracterização de um inteiro t , em função de n , tal que sempre é possível colorir harmoniosamente uma árvore com t cores:

Teorema 3.2.14. (MITCHEM, 1989) *Seja n um inteiro positivo e seja k o menor inteiro tal que $\binom{k}{2} \geq n - 1$. Então, para todo t inteiro, tal que $k \leq t \leq n$, existe uma árvore T com n vértices tal que $h(T) = t$.*

Tal resultado é notável, pois $n - 1$ é o número de arestas de uma árvore com n vértices e $\binom{k}{2}$ é a quantidade de pares de rotulações possíveis quando se tem k cores disponíveis. Como, por hipótese, $\binom{k}{2} \geq n - 1$ e $t \geq k$, sempre há pelo menos um par de cores para cada aresta. Em seu trabalho, a partir deste Teorema, Mitchem apresenta como corolário o seguinte resultado para limitantes gerais em grafos:

Corolário 3.2.3. (MITCHEM, 1989) *Sejam n, m inteiros positivos tais que $n \leq m \leq \binom{n}{2}$, e seja k o menor inteiro que satisfaz $\binom{k}{2} \geq m$. Então, para todo inteiro t , $k \leq t \leq n$, existe um grafo G com n vértices e m arestas tal que $h(G) = t$.*

Na literatura há resultados gerais em grafos que são obtidos a partir de resultados para árvores, assim como acontece no Corolário 3.2.3, mas a situação contrária também ocorre. De fato, em McDiarmid e Xinhua (1991) os autores apresentam, como corolário do limitante geral apresentado no Teorema 3.2.9, que, para uma árvore T não trivial com n vértices e grau máximo Δ , temos $h(T) \leq 2\sqrt{\Delta n}$. Tal corolário foi melhorado em Edwards e McDiarmid (1994), onde os autores demonstram que $h(T) \leq 2\sqrt{2n-2} + \Delta$.

A fim de apresentar os resultados posteriores, definiremos aqui uma árvore binária. Para tanto, tomamos uma árvore T com um vértice r escolhido para ser sua *raiz*, esta é denominada *árvore enraizada*. Dado $v \in V(T)$, denote por $P(v)$ o r, v -caminho em T (note que este é único, visto que estamos falando de uma árvore). Dizemos que o *pai* de v é seu vizinho em $P(v)$ e que seus *filhos* são seus vizinhos restantes em T , caso existam. As *folhas* de uma árvore são vértices de grau 1, ou seja, vértices que não tem filhos.

Uma *árvore plana enraizada* é uma árvore enraizada com uma ordem, da esquerda para a direita, especificada para os filhos de cada um dos vértices. Uma *árvore binária* é uma árvore plana enraizada onde cada vértice tem no máximo dois filhos, *árvores ternárias* são definidas de forma análoga, com a restrição de no máximo três filhos. Uma *árvore k -ária* é uma árvore plana enraizada tal que cada vértice possui no máximo k filhos. O número de *níveis* que uma árvore binária possui é $|P(u)| + 1$, onde $|P(u)| = \max\{|P(v)|; v \in V(T)\}$. Denotaremos por B_n a árvore binária completa e por T_n a árvore ternária completa de n níveis, nestas cada vértice possui exatamente zero ou dois (respectivamente três) filhos.

O primeiro artigo a apresentar, explicitamente, resultados para esta classe de árvores foi Mitchem (1989), que possui como um de seus resultados:

Teorema 3.2.15. (MITCHEM, 1989) *Para $r \geq 6$, $h(B_{2r}) \leq 3(2^{r-1}) + 2^{r-5} + (r-3)$.*

Em Lu (1990) os autores também apresentam limitantes para árvores completas binárias, ternárias e n -árias e melhoraram o resultado anterior para:

Teorema 3.2.16. (LU, 1990) *Para $r \geq 4$, $h(B_{2r}) \leq 3(2^{r-1}) - 2^{r-4} + 2$.*

Na literatura não são trabalhadas apenas árvores binárias com um número par de níveis; de fato, temos que $h(B_n) = \mathcal{O}(2^{\frac{k}{2}})$ mesmo quando n é ímpar (MILLER; PRITIKIN, 1991).

A partir de um resultado para grafos cíclicos (Teorema 3.2.4), é possível obter, como corolário, que $h(B_n) \leq 6 \lfloor \sqrt{2^n - 1} \rfloor$. Como melhora deste corolário, é demonstrado que, para $n \geq 5$, $h(B_n) = Q(B_n)$ (ZHIKANG, 1998). Ademais, tal igualdade também é válida para árvores ternárias completas (ZHIKANG, 1998).

Ao apresentar resultados para uma árvore n -ária com q níveis, em Mitchem e Schmeichel (2002), os autores dão condições necessárias para que uma árvore n -ária completa com q níveis T seja tal que $h(T) \leq Q(m) + 1$ ou $h(T) = Q(m)$, sendo m o número de arestas de T . Vale lembrar que o número cromático harmonioso de uma árvore, assim como o número cromático harmonioso de um grafo G qualquer com n vértices e m arestas, deve satisfazer: $Q(m) \leq h(T) \leq n$.

Outro autor que relacionou $h(T)$ e $Q(m)$ foi Edwards, que demonstrou que:

Teorema 3.2.17. (EDWARDS, 1995) *Seja $d \in \mathbb{Z}^+$ e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Então existe um inteiro $N = N(d, \varepsilon)$ tal que se T é uma árvore com $n \geq N$ vértices e $m = n - 1$ arestas, $\Delta(T) \leq d$ e T possui pelo menos εn folhas, então T satisfaz:*

$$h(T) = \left\lceil \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n - 7}) \right\rceil = Q(m)$$

Ainda em Edwards (1995) o autor usa uma modificação do Teorema 3.2.17 a fim de demonstrar, como resultado principal deste trabalho, que quase toda árvore T satisfaz $h(T) = Q(m)$. Para tanto, usando grafos aleatórios, este mostra que a proporção de árvores com n vértices que satisfazem a igualdade tende para 1 quando n tende ao infinito. No ano seguinte, Edwards (1996) apresenta que o Teorema 3.2.17 é aplicável em florestas com um número alto de folhas. Em contrapartida, em Edwards (1996), o autor também apresenta resultados para árvores com no máximo $\frac{1}{95000}m$ folhas, sendo m seu número de arestas.

Ainda relacionado com árvores com número alto de folhas, em Akbari *et al.* (2012) os autores estudam árvores T tais que $\Delta(T) \geq \frac{n+2}{3}$, sendo n seu número de vértices, e demonstram que o número cromático harmonioso destas é igual a $\Delta(T) + 2$ se existem $u, v \in V(T)$ vértices de grau máximo não adjacentes e igual a $\Delta(T) + 1$, caso contrário. Em Aflaki *et al.* (2012) os autores demonstram que se T é uma árvore com n vértices tal que $\Delta(T) \geq \frac{n}{2}$, então existe uma coloração harmoniosa desta com $\Delta(T) + 1$ cores tal que toda cor aparece no máximo duas vezes.

Árvores com grau máximo limitado também foram estudadas em Aflaki *et al.* (2012), onde os autores apresentam que se uma árvore T é tal que $\Delta(T) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, sendo n seu número de vértices, então T possui uma coloração harmoniosa com $\frac{n}{2} + 1$ tal que cada cor aparece no máximo duas vezes.

3.2.3 Coloração Harmoniosa em Caminhos e Ciclos

Nesta subseção apresentamos limitantes para o número cromático harmonioso de caminhos, de grafos formados pela união disjunta de caminhos e ciclos, e para o produto cartesiano de caminhos.

Começamos com resultados que determinam o número cromático harmonioso de um caminho com n vértices.

Teorema 3.2.18. (MITCHEM, 1989) *Seja k um inteiro positivo. Se k é ímpar, ou se k é par e $n - 1 = \binom{k}{2} - j$ para algum $j \in \{\frac{k-2}{2}, \frac{k}{2}, \dots, k-2\}$; então $h(P_n) = k$. Caso contrário, $h(P_n) = k + 1$.*

Posteriormente, tal resultado foi melhorado para:

Teorema 3.2.19. (MILLER; PRITIKIN, 1991) *Dado um inteiro positivo n ,*

$$h(P_n) = \begin{cases} 2k, & \text{se } \binom{2k-1}{2} < n-1 \leq \binom{2k}{2} - (k-1), \\ 2k+1, & \text{se } \binom{2k}{2} - (k-1) < n-1 \leq \binom{2k+1}{2}. \end{cases}$$

No que diz respeito a ciclos, foi demonstrado que, para um grafo 2-regular formado por exatamente duas componentes:

Teorema 3.2.20. (MITCHEM, 1989) *Sejam r, s, p inteiros tais que $r + s = p$ e $3 \leq r \leq s$, e seja k o menor inteiro tal que $\binom{k}{2} \geq p$. Se k é ímpar e $p \neq \binom{k}{2} - i$, para algum $i \in \{1, 2\}$, então $h(C_p) = h(C_r \cup C_s) = k$. Se k é par, $p \neq \binom{k}{2} - i$ e $i \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$, então $h(C_p) = h(C_r \cup C_s) = k$. Caso contrário, $h(C_p) = h(C_r \cup C_s) = k + 1$.*

Tal resultado é generalizado por Georges, que apresenta:

Teorema 3.2.21. (GEORGES, 1995) *Seja $X = \{C^1, C^2, \dots, C^k\}$ uma coleção de ciclos disjuntos, onde C^i possui c_i arestas, $1 \leq i \leq k$, e seja n o menor inteiro tal que $\sum_{i=1}^k c_i \leq \binom{n}{2}$. Se n é ímpar e $n \geq 2k + 3$, então $h(X) = h(C_p)$, onde $p = \sum_{i=1}^k c_i$.*

Não obstante, Georges apresenta o número cromático harmonioso de uma coleção de caminhos disjuntos:

Teorema 3.2.22. (GEORGES, 1995) *Seja $X = \{P^1, P^2, \dots, P^n\}$ uma coleção de caminhos disjuntos não triviais, onde P^i possui a_i arestas, $1 \leq i \leq n$. Seja k o menor inteiro positivo tal que $\sum_{i=1}^n a_i \leq \binom{k}{2}$. Se k é ímpar, então $h(X) = k$. Se k é par e*

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \binom{k}{2} - \frac{k}{2} + \min \left\{ n, \frac{k}{2} \right\}$$

então $h(X) = k$. Caso contrário, $h(X) = k + 1$.

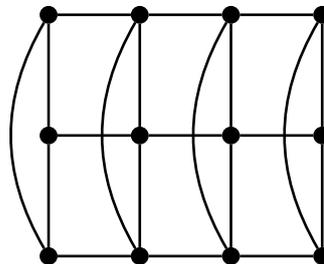
Como corolário de tal teorema, Georges apresenta o seguinte resultado para b cópias disjuntas de um caminho com n vértices, denotado pelo mesmo como bP_n :

Corolário 3.2.4. (GEORGES, 1995) *Sejam b e n inteiros positivos e seja k o menor inteiro tal que $b(n-1) \leq \binom{k}{2}$. Se k é ímpar, então $h(bP_n) = k$. Se k é par e $2b(n-2) \leq k(k-2)$, então $h(bP_n) = k$; caso contrário, $h(bP_n) = k + 1$.*

O autor também apresenta resultados similares para grafos formados por uma coleção de ciclos disjuntos não triviais.

Resultados relacionados com o produto cartesiano de ciclos e caminhos também são descritos na literatura. Com intuito de explorar estes, denotamos por $G \times H$ o *produto cartesiano* de G e H , sendo o grafo tal que $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ e, dados $v = (v_1, v_2), u = (u_1, u_2) \in G \times H$, temos que $vu \in E(G \times H)$ se $v_1u_1 \in E(G)$ e $v_2 = u_2$ ou $v_2u_2 \in E(H)$ e $v_1 = u_1$.

Figura 19 – $C_3 \times P_4$.



Fonte: A autoria própria

Para o produto cartesiano de dois caminhos, temos:

Teorema 3.2.23. (MILLER; PRITIKIN, 1991)

- $h(P_n \times P_n) = 2n$, se n for par; e
- $h(P_n \times P_n) \in \{2n, 2n + 1\}$, se $n > 1$ for ímpar.

É possível definir o produto cartesiano entre grafos indutivamente. O produto $G_1 \times G_2 \times G_3$ pode ser visto como $(G_1 \times G_2) \times G_3$ ou mesmo como $G_1 \times (G_2 \times G_3)$, pois tal construção é associativa. Assim, é possível compreender o produto de três caminhos e, para este produto, foi apresentado como limitante superior:

Teorema 3.2.24. (MILLER; PRITIKIN, 1991) $h(P_n \times P_n \times P_m) \leq 2mn$ se n for par.

A partir do Teorema 3.2.4, este limitante foi melhorado quando $m > 36$ para:

Corolário 3.2.5. (LU, 1991) $h(P_n \times P_n \times P_m) \leq 12 \lfloor n\sqrt{m} \rfloor$.

3.2.4 Coloração Harmoniosa em Grafos Planares

Nesta subseção apresentamos um limitante superior para o número cromático harmonioso de grafos planares, um para grafos imersos em superfícies não planares (gênero maior ou igual a 1) e um limitante inferior para este número no grafo complementar de um grafo planar.

Antes de apresentar os resultados, definimos o *gênero* de um grafo G , denotado por $\gamma(G)$, como o menor inteiro k tal que G possui representação no plano com no máximo k cruzamentos de arestas. Assim, por definição, um grafo G é planar se, e somente se, $\gamma(G) = 0$.

Até então não há, na literatura, um trabalho com foco em discutir sobre o comportamento desta coloração em grafos planares. Entretanto, temos, como corolário do Teorema 3.2.6:

Corolário 3.2.6. (EDWARDS; MCDIARMID, 1994) Se G é um grafo planar com m arestas,

$$h(G) \leq (40m)^{1/2} + 9\Delta.$$

Após apresentar tal resultado, o autor afirma que, para todo grafo não planar G , o 7-core (definido na Página 39) de G possui no máximo $12(\gamma - 1)$ vértices. Assim, obtemos o resultado:

Corolário 3.2.7. (EDWARDS; MCDIARMID, 1994) Se G não é planar (ou seja, o gênero γ é pelo menos 1) com m arestas, gênero γ e grau máximo Δ , então

$$h(G) \leq \max\{12(\gamma - 1), (48m)^{1/2} + 11\Delta\}.$$

A fim de finalizar esta subseção, apresentamos um resultado obtido por Kundrík que determina o número cromático harmonioso do complementar de um grafo planar:

Teorema 3.2.25. (KUNDRÍK, 1992) Se G é planar e $n(G) \geq 9$, então $h(\overline{G}) \geq n(G) - 2$.

3.2.5 Coloração Harmoniosa em Digrafos

O problema de *coloração harmoniosa em digrafos* já foi tema abordado na tese de doutorado de Hegde e Shetty (2013). Em sua tese, Shetty usa dois capítulos para discorrer sobre resultados de coloração harmoniosa em digrafos, o primeiro apresenta para digrafos quaisquer e o segundo para digrafos k -regulares.

Esta variação do problema foi apresentada em Hegde *et al.* (2011) onde, dado um digrafo D com n vértices e m arcos, uma função $f: V(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \leq n$ é uma *coloração harmoniosa* de D se for uma coloração própria tal que para quaisquer dois arcos $xy, uv \in A(D)$, temos que $(f(x), f(y)) \neq (f(u), f(v))$. Denotamos por $\vec{h}(D)$ o menor k tal que D é harmoniosamente k -colorível.

Denotamos o grau máximo de entrada e o grau máximo de saída do digrafo D por $\Delta^-(D)$ e $\Delta^+(D)$. É possível notar que um limitante inferior para uma coloração harmoniosa de um digrafo D é $\vec{h}(D) \geq \Delta(D)$, sendo $\Delta(D) = \max\{\Delta^-(D), \Delta^+(D)\}$. Tal limitante é atingido quando tomamos uma estrela \vec{S}_n , cujo centro $v \in V(S_n)$ é tal que $d_D^+(v) = n - 1$. Em Hegde *et al.* (2011), os autores comentam sobre tal limitante e apresentam uma melhoria para o mesmo.

Proposição 3.2.26. (HEGDE *et al.*, 2011) *Seja D um digrafo, temos $\vec{h}(D) \geq \lceil \frac{1+\sqrt{4m+1}}{2} \rceil$, onde $m = |A(D)|$.*

O limitante inferior desta proposição é atingido por caminhos direcionados, de forma que $\vec{h}(\vec{P}_n) = \lceil \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \rceil$. Ademais, temos como corolário da Proposição 3.2.26 que, ao orientarmos um grafo G qualquer, obtendo um digrafo \vec{G} , $\vec{h}(\vec{G}) \geq \lceil \frac{1+\sqrt{4m+1}}{2} \rceil$ (HEGDE; CASTELINO, 2015).

Figura 20 – Caminho direcionado com sete vértices, note que $\vec{h}(\vec{P}_7) = 3$



Fonte: Autoria própria

Em Hegde *et al.* (2011), autores também notaram que se D é um digrafo simétrico e G é obtido de seu grafo subjacente removendo suas possíveis arestas múltiplas, $h(G) = \vec{h}(D)$. É notável que $h(G) \geq \vec{h}(D)$. A desigualdade $h(G) \leq \vec{h}(D)$ segue do fato de, se $u, v \in V(D)$ recebem as cores a, b na coloração harmoniosa ótima de D respectivamente, o par ordenado (a, b) aparece na coloração, visto que $uv \in A(D)$ e o par (b, a) também já aparece, graças ao arco vu . Assim, as cores a, b não podem ser usadas em outro par de vértices adjacentes. Neste

artigo, os autores também apresentam resultados para caminhos direcionados alternados e ciclos direcionados alternados.

A observação anterior de Hegde *et al.* (2011) sobre o número harmonioso do grafo subjacente de um digrafo simétrico já implica na NP-dificuldade de determinação do número cromático harmonioso de um digrafo. Porém, a complexidade do problema de coloração harmoniosa em digrafos foi pela primeira vez explicitamente estudada em Edwards (2013). Neste, reduzindo o problema do empacotamento para o problema de coloração harmoniosa em digrafos, o autor demonstra que:

Teorema 3.2.27. (EDWARDS, 2013) *O problema de coloração harmoniosa em digrafos é NP-completo, mesmo em digrafos com grau de entrada e grau de saída no máximo 2.*

Assim como em Georges (1995), em Hegde e Castelino (2015) os autores apresentaram resultados para a união disjunta de ciclos e de caminhos; sendo, porém, estes resultados uma variação para digrafos. Em Hegde e Castelino (2015), os autores também apresentam que $\vec{h}(\vec{P}_n) = \lceil \frac{1+\sqrt{1+4(n-1)}}{2} \rceil$ e demonstram esta igualdade usando indução. Não obstante, os autores enunciam:

Proposição 3.2.28. (HEGDE; CASTELINO, 2015) *Se D é tal que $D = \vec{P}_1 \cup \vec{P}_2 \cup \dots \cup \vec{P}_k$ a união disjunta de caminhos direcionados, onde \vec{P}_i possui i vértices, $i \in \mathbb{N}$, então $\vec{h}(D) = \lceil \frac{1+\sqrt{2k^2-2k+1}}{2} \rceil$.*

De forma análoga, os autores apresentam um resultado um digrafo D formado pela união disjunta de ciclos direcionados $D = \vec{C}_3 \cup \vec{C}_4 \cup \dots \cup \vec{C}_k$, onde \vec{C}_i é o ciclo direcionado com i vértices. Ainda abordando ciclos, em Hegde e Castelino (2015) os autores apresentam um limitante para ciclos direcionados simétricos. Outras classes de digrafos estudadas por eles são: estrelas, rodas e arborescências de saída n -ária.

Ainda em 2015, outro trabalho foi publicado por Hegde e Castelino (HEGDE; CASTELINO, 2015). Neste trabalho, os autores divulgam resultados para digrafos regulares. Como corolário do Teorema 3.2.26, temos o seguinte limitante inferior:

Corolário 3.2.8. (HEGDE; CASTELINO, 2015) *Se D é um digrafo r -regular de ordem n , então $\vec{h}(D) \geq \lceil \frac{1+\sqrt{1+4rn}}{2} \rceil$.*

Em Hegde e Castelino (2015) são exibidos limitantes de $\vec{h}(D)$, quando D é um toro de ordem $n \times n$ ou um digrafo circulante; ademais, é mencionado que para estas duas classes de digrafo o problema de determinar o número cromático harmonioso continua sob investigação.

3.2.6 Relação entre número acromático e número cromático harmonioso

A fim de descrever o número acromático, definimos primeiro uma *coloração par-completo* como sendo uma coloração própria em que cada par de cores induz pelo menos uma aresta. O *número acromático* $\psi(G)$ é o maior k tal que G possui uma coloração par-completo com k cores.

De forma análoga ao parâmetro $Q(m)$, definimos $q(m)$, onde $m \in \mathbb{Z}^+$, como sendo o maior $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\binom{k}{2} \leq m$. Assim, temos:

$$q(m) = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2} \right\rfloor.$$

O primeiro trabalho a explicitamente relacionar tais colorações foi o de Edwards (1997), onde o autor argumenta que a cadeia de desigualdades $h(G) \geq Q(m) \geq q(m) \geq \psi(G)$ é válida para todo grafo G com m arestas.

Em Cairnie e Edwards (1997) os autores apresentam como lema que, dado um grafo com $\binom{k}{2}$ arestas, $\psi(G) = k$ se, e somente se, $h(G) = k$. Ainda em Cairnie e Edwards (1997), os autores fazem uma redução usando coloração harmoniosa em árvores para demonstrar que, dada uma árvore T e um inteiro k , determinar se $\psi(T) \geq k$ é NP-completo. No trabalho seguinte destes autores, (CAIRNIE; EDWARDS, 1998), eles adaptam alguns resultados de coloração harmoniosa de Edwards (1996) para resultados de coloração acromática e comentam sobre a complexidade desta coloração em árvores de grau máximo limitado.

Relações entre $\psi(G)$ e $h(G)$ em classes mais específicas de grafos também foram apresentadas. Em Venkatachalam *et al.* (2012) é demonstrado que $\psi(L(K_{1,n,n})) = h(L(K_{1,n,n})) = n + 1$, onde $K_{1,n,n}$ é uma árvore obtida após adicionar uma folha em cada folha da estrela $K_{1,n}$. Tal árvore é denominada *estrela dupla*.

Tais relações também foram estudadas em hipergrafos. Em Dębski *et al.* (2015), os autores apresentam uma expressão que limita $\psi(H)$ inferiormente e $h(H)$ superiormente, onde H pertence a uma classe de hipergrafos k -uniformes de grau máximo limitado. Em um trabalho posterior (DĘBSKI *et al.*, 2017), os autores mostram como estas desigualdades podem ser

usadas para obter resultados de problemas combinatórios relacionados com estes problemas de coloração. Além das classes mencionadas, também foram estudados grafos circulantes (DEBSKI *et al.*, 2018).

3.2.7 Outras classes de grafos

Nesta subseção apresentamos algumas classes de grafos particulares que já foram estudadas na literatura e possuem resultados teóricos no que diz respeito ao número cromático harmonioso.

Construímos o grafo *central* de um grafo G a partir da subdivisão de cada aresta deste grafo exatamente uma vez e adicionando arestas entre todos os pares de vértices não adjacentes de G ; denotamos o grafo central de G por $C(G)$. O grafo *middle* de G , denotado por $M(G)$, é definido com o conjunto de vértices $V(M(G)) = V(G) \cup E(G)$, e um par de vértices de $M(G)$ é adjacente se, e somente se, o par é formado por arestas incidentes em G ou o par é formado por um vértice de G e uma aresta incidente a ele. O grafo *total* de G , denotado por $T(G)$, é definido com o conjunto de vértices $T(G) = V(G) \cup E(G)$ e arestas entre todo par de vértices de $T(G)$ que é adjacente ou incidente em G . Em Vivin e Thilagavathi (2009) os autores apresentam o número cromático harmonioso de $C(P_n)$ e do grafo linha de $C(P_n)$. Dentre outras classes cujo número cromático harmonioso do grafo central destas foi estudado, estão: *snakes* triangulares (e duplamente triangulares) (SELVI, 2015), *snakes* diamantes (SELVI, 2015), *snakes* (MS; AMUTHA, 2016), grafos theta uniformes (SELVI; AMUTHA, 2021), *network* de um toro (SELVI; AMUTHA, 2021). Em adição, o estudo do número cromático harmonioso em grafos centrais foi estudado em MM *et al.* (2010) com respeito ao grafo *middle* de $C(C_n)$, $C(K_{1,n})$ e $C(P_n)$, e em Vivin *et al.* (2010) em relação ao grafo total de $C(C_n)$, $C(K_{1,n})$ e $C(P_n)$. Na literatura há um trabalho (SELVI; AMUTHA, 2021) que apresenta resultados para grafos totais do grafo central da generalização do grafo de Petersen, porém tal trabalho foi retratado.

Limitantes envolvendo grafos centrais e grafos *middle* também foram estudados relacionando-os com grafos prisma (MANSURI *et al.*, 2012), grafos *n-sunlet* (MANSURI; CHANDEL, 2012), grafos *n-centípedos* (CHANDEL *et al.*, 2012), estrelas duplas (VENKATACHALAM *et al.*, 2012), estrelas triplas (MANSURI, 2016), *tadpoles* (ARULDOSS; MARY, 2016a) e com grafos web (ARULDOSS; MARY, 2016a).

Na literatura também é abordado o número cromático harmonioso do grafo total

de grafos n -centípedos (CHANDEL *et al.*, 2012), estrelas duplas (VENKATACHALAM *et al.*, 2012) e de estrelas triplas (MANSURI, 2016).

Além destes, limitantes para o número cromático harmonioso foram apresentados para cubos n -dimensionais (LU, 1991; MILLER; PRITIKIN, 1991), grafos fragmentáveis (EDWARDS; MCDIARMID, 1994), coleções disjuntas de grafos completos (GEORGES, 1995), *honeycomb networks* (RAJAN; RAJASINGH, 2011), grafos bipartidos (AFLAKI *et al.*, 2012), grafos k -regulares (MITCHEM, 1989; BEANE *et al.*, 1989; AFLAKI *et al.*, 2012), produto corona de grafos completos (MUNTANER-BATLE *et al.*, 2014), *quasi-spider* (LINHARES-SALES *et al.*, 2014), grafos Myceilskianos (VIVIN, 2014), hipergrafos (BOSEK *et al.*, 2016), *caterpillars* com no máximo um vértice de grau maior ou igual a 2 (TAKAOKA *et al.*, 2015), classes fragmentáveis de hipergrafos de grau limitado (DEBSKI *et al.*, 2015), multicópias de grafos completos (MUNTANER-BATLE *et al.*, 2014; MUNTANER-BATLE *et al.*, 2019), cópias finitas de grafos Barbell (KAVITHA; GOVINDARAJAN, 2020), estruturas provenientes de um grafo Mesh (SELVI; AMUTHA, 2021), estruturas provenientes de *snakes* (VIJI; NANDAKUMAR, 2020), e, em Huilgol e Sriram (2016) os autores estudam paraquedas, engrenagens, águas-vivas e *helms*.

O número cromático harmonioso de alguns grafos considerados “especiais” também já foi determinado, em Aruldoss e Mary (2016b). Os autores estudam o grafo Moser spindle, grafo Golden Harary, grafo Tietzer e o grafo Soifer.

3.2.8 Complexidade

Nesta subseção traremos resultados relacionados à complexidade e à complexidade parametrizada do problema de coloração harmoniosa de um grafo. Caso o leitor não seja familiarizado, recomendamos o livro (CYGAN *et al.*, 2015) para definições em complexidade parametrizada.

No que diz respeito às árvores, em Edwards e McDiarmid (1995) foi demonstrado que:

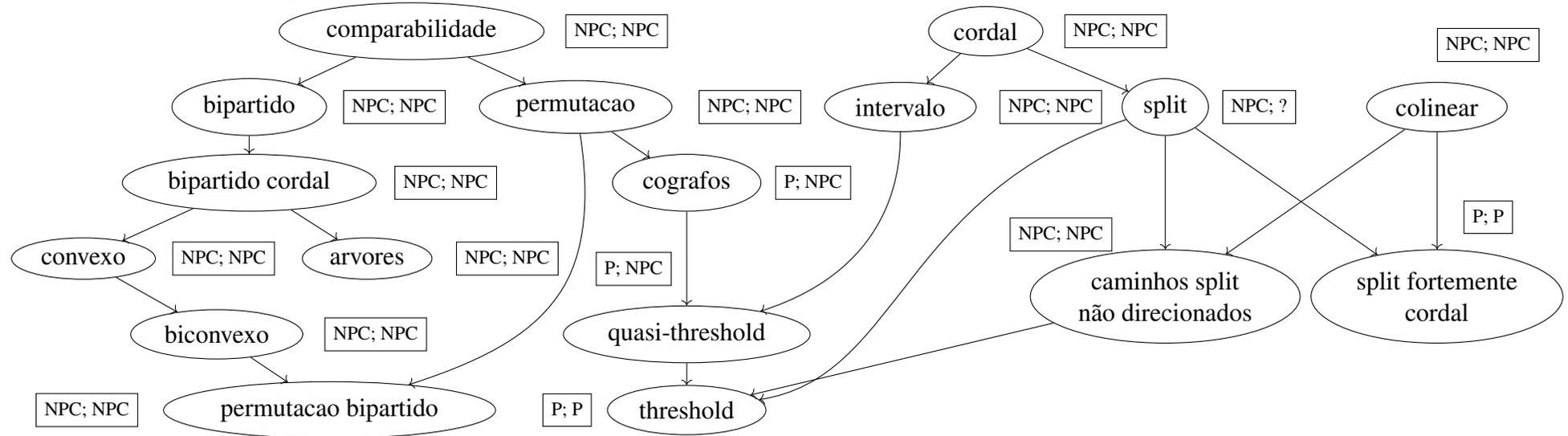
Lema 3.2.5. (EDWARDS; MCDIARMID, 1995) *Se F é uma galáxia com t estrelas F_1, F_2, \dots, F_t com tamanhos (ou seja, número de arestas) $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_t$, respectivamente, e sendo $C \geq t$, então F pode ser colorida com C cores de forma que todos os centros das estrelas recebem cores distintas se, e somente se, $\sum_{i=1}^k m_i \leq \sum_{i=1}^k (C - i)$, $1 \leq k \leq t$.*

Usando tal Lema, em Edwards e McDiarmid (1995), os autores demonstram que o problema de decidir se o número cromático harmonioso de uma árvore é menor ou igual a k é NP-completo, mesmo para árvores de raio 3. Porém, dado $d \in \mathbb{N}$ fixado, em Edwards (1996) é demonstrado que, dada uma floresta F tal que $\Delta(F) \leq d$, é possível determinar $h(F)$ em tempo polinomial.

Em Asdre e Nikolopoulos (2007) os autores demonstram que determinar se, dado um inteiro k e um grafo G , $h(G) \leq k$ é um problema NP-completo até para grafos de permutação bipartidos conexos, grafos biconvexos e grafos quasi-threshold desconexos. A NP-completude do problema também foi abordada em Asdre *et al.* (2007), onde os autores mostram que esta é válida para grafos de intervalo conexos, grafos de permutação conexos e grafos split conexos. Em Ioannidou (2010), é mostrado que o problema continua NP-completo em caminhos split não direcionados e grafos colineares.

Todavia, é demonstrado em Ioannidou (2010) que este problema é polinomial em grafos split fortemente cordais, cografos conexos e, por conseguinte, quasi-threshold conexas e threshold conexas. Outra classe que também possui algoritmos polinomiais é a de árvores com grau máximo pelo menos $\frac{n+2}{3}$ (AKBARI *et al.*, 2012), sendo n o número de vértices. Algoritmos de aproximação foram exibidos para o número cromático harmonioso de Honeycomb networks (RAJAN; RAJASINGH, 2011).

Figura 21 – Atualização da figura apresentada em Asdre e Nikolopoulos (2007), nesta abordamos a complexidade do problema em classes de grafos, nela NPC significa que o problema é NP-completo e P significa que o problema possui algoritmo polinomial que o resolve (conexos e desconexos, respectivamente).



Fonte: Autoria própria

Antes de comentarmos os trabalhos cujos resultados envolvem a complexidade parametrizada do problema, ressaltamos que solucionar o problema de decisão de uma coloração harmoniosa possui kernel quadrático quando parametrizado pelo número de cores. De fato, seja G um grafo simples sem componentes triviais. Ao tomarmos k como parâmetro, para decidir se $h(G) \leq k$ é possível analisarmos se $m(G) > \binom{k}{2}$. Em caso afirmativo, retornamos NÃO imediatamente, visto que temos mais arestas do que pares de cores a serem usados e, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos duas arestas recebem o mesmo par de cores. Caso contrário, $m(G) \leq \binom{k}{2} \leq k^2$. Como, por hipótese, G é simples e conexo, $n(G) - 1 \leq m \leq \binom{k}{2} \leq k^2$, o que limita G em função de $\binom{k}{2}$. Dessa forma, o problema possui kernel quadrático quando parametrizado por k .

Complexidade parametrizada em coloração harmoniosa foi estudada explicitamente pela primeira vez em Linhares-Sales *et al.* (2014), onde os autores mostram que, dado o parâmetro fixo q e G um $(q, q - 4)$ -grafo, existem algoritmos FPT no parâmetro q para obter $h(G)$, caso G seja conexo. A complexidade parametrizada deste problema também foi estudada em Kolay *et al.* (2019), onde os autores demonstram, como um dos resultados principais, que o problema de coloração harmoniosa, se parametrizado pela cobertura de vértices do grafo dado, é FPT. Ademais, neste mesmo trabalho é demonstrado, a partir de uma redução parametrizada do problema do conjunto independente, que

Teorema 3.2.29. (KOLAY *et al.*, 2019)

- É $W[1]$ -difícil determinar quando um grafo G com n vértices possui uma coloração harmoniosa com no máximo $n - k$ cores, onde k é o parâmetro.
- É para-NP-difícil determinar quando um grafo G possui uma coloração harmoniosa com no máximo $\Delta(G) + 1 + k$, onde k é o parâmetro.

Poucos trabalhos estudaram a complexidade das variações de uma coloração harmoniosa. Na literatura só é possível encontrar resultados para Coloração Harmoniosa Local (GAO, 2017), onde os autores apresentam três algoritmos para esta variação quando $d=1$.

4 NOVOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos resultados obtidos em nossa pesquisa sobre o tema de Colorações Harmoniosas. Durante o período de mestrado, foi realizado um estágio na École Normale de Lyon, sob orientação do professor Nicolas Trotignon, em um tópico distinto. O relatório sobre o estágio encontra-se no Apêndice A.

Seja $vc(G)$ a cardinalidade de uma cobertura de vértices mínima $S \subseteq V(G)$ de um grafo G . Lembrando que $S \subseteq V(G)$ é uma *cobertura de vértices* de G se, para qualquer aresta $uv \in E(G)$, temos $u \in S$ ou $v \in S$. Dizemos que G é *d -degenerado* se, para qualquer subgrafo $H \subseteq G$, o grau mínimo de H satisfaz $\delta(H) \leq d$.

Na Seção 4.1, corrigimos e melhoramos um teorema apresentado em Kolay *et al.* (2019) sobre o número cromático harmonioso de grafos d -degenerados. Os autores afirmam que, se G é d -degenerado, então $h(G) \leq vc(G) + d(\Delta(G) - 1) + \Delta(G)(d - 1)$. Mostramos que a prova deles está incorreta e apresentamos uma prova de um limite melhor: $h(G) \leq vc(G) + d(\Delta(G) - 1) + 1$.

Na Seção 4.2, mostramos uma condição suficiente para que um grafo G tenha um número cromático harmonioso no máximo k usando identificações em vértices com distância pelo menos três. É importante ressaltar que parte da nossa argumentação é semelhante à argumentação usada em Kolay *et al.* (2019). Nesta, os autores identificam classes de cores em uma coloração harmoniosa a fim de desenvolver um algoritmo de parâmetro fixo, parametrizado por $vc(G)$, que calcule $h(G)$.

Computar o número cromático harmonioso de um grafo é uma tarefa difícil. Dado um grafo G e um número inteiro positivo k , determinar se $h(G) \leq k$ é NP-completo, mesmo se G for um grafo split (ASDRE *et al.*, 2007), um grafo intervalo (ASDRE *et al.*, 2007; BOLDLAENDER, 1989), uma árvore de raio três, ou uma floresta composta por três árvores de raio dois (EDWARDS; MCDIARMID, 1995). Para enfrentar essa dificuldade computacional, a Seção 4.3 é dedicada a apresentar os modelos de Programação Linear Inteira, a Seção 4.4 propõe duas heurísticas para resolver o problema e a Seção 4.5 apresenta resultados computacionais para os modelos e as heurísticas sobre instâncias aleatórias.

O primeiro trabalho que apresentou formulações de programação linear inteira para calcular o número cromático harmônico foi proposto recentemente (OLIVEIRA, 2019). No entanto, em seu trabalho o autor não considera a restrição de ser própria.

Apresentamos três modelos de programação linear inteira neste trabalho, um deles baseado na formulação padrão e dois deles baseados na formulação representativa apresentada em Campêlo *et al.* (2004). Até onde sabemos, este é o primeiro trabalho que apresenta formulações lineares inteiras para coloração harmoniosa. Ressaltamos que não apenas adicionamos a restrição de ser própria às formulações apresentadas em Oliveira (2019). Apresentamos novas restrições para garantir que tenhamos uma coloração harmônica, temos aqui $\mathcal{O}(n^3)$ restrições, enquanto as restrições propostas por Oliveira (2019) eram $\mathcal{O}(n^4)$, onde n representa o número de vértices do grafo de entrada.

4.1 Limitante em função da cobertura de vértices e do grau máximo

Em Kolay *et al.* (2019), os autores apresentam o seguinte limitante, já mencionado no Capítulo 3:

Teorema 3.2.12. (KOLAY *et al.*, 2019) *Para qualquer grafo G com $\Delta(G) \geq 2$, temos $\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq vc(G) + \Delta(G)(\Delta(G) - 1)$.*

Para provar o Teorema 3.2.12, os autores demonstram como obter uma coloração harmoniosa de um grafo G usando no máximo $vc(G) + \Delta(G)(\Delta(G) - 1) + 1$ cores, e depois mostram como economizar uma cor dessa coloração. Usando um argumento semelhante a este, eles também demonstram que:

Teorema 4.1.1. (KOLAY *et al.*, 2019) *Se G é um grafo d -degenerado, então $\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq vc(G) + d(\Delta(G) - 1) + \Delta(G)(d - 1)$.*

Para provar o Teorema 4.1.1, os autores mostram uma coloração harmoniosa de um grafo d -degenerado G com no máximo $vc(G) + d(\Delta(G) - 1) + \Delta(G)(d - 1) + 1$ cores e então afirmam que é possível aplicar o mesmo argumento usado no Teorema 3.2.12 para economizar uma cor na cobertura de vértices e reduzir o limite superior em uma unidade. No entanto, este argumento é mal aplicado. De fato, o argumento usado no Teorema 3.2.12 não tem relação com o fato de G ser d -degenerado. Esse argumento tem relação apenas com o grau máximo de G . Portanto, não é possível economizar uma cor aplicando-o.

Como consequência do Teorema 4.1.1, os autores apresentam o corolário:

Corolário 4.1.1 ((KOLAY *et al.*, 2019)). *Se G é uma floresta com pelo menos uma aresta, então $\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq vc(G) + \Delta(G) - 1$.*

O Corolário 4.1.1 também está incorreto. Temos, como contra-exemplo a este e ao Teorema 4.1.1, o grafo simples $G = 2K_2$, composto por quatro vértices e duas arestas sem extremidades em comum. Veja a Figura 22. Note que $vc(G) = 2$, $\Delta(G) = 1$, G é 1-degenerado, mas $h(G) = 3$.

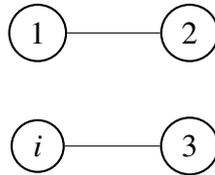


Figura 22 – O grafo $2K_2$ é um contra-exemplo ao Teorema 4.1.1 e ao Corolário 4.1.1.

Ao tentar corrigir o Teorema 4.1.1, conseguimos melhorá-lo.

Teorema 4.1.2. *Se G é um grafo d -degenerado, então $\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq vc(G) + d(\Delta(G) - 1) + 1$.*

Demonstração. O limite inferior é o mesmo limite mostrado por Kolay *et al.* (2019). Para provar o limite superior, utilizamos indução sobre o número de vértices $n(G)$ e mostramos uma afirmação mais forte: se S é uma cobertura de vértices de G , então existe uma coloração harmoniosa c de G com no máximo $|S| + d(\Delta(G) - 1) + 1$ cores tal que cada vértice v de S tenha uma *cor individual*, isto é, nenhum outro vértice em $V(G) \setminus \{v\}$ é colorido com a cor $c(v)$.

Se G é trivial, ou seja, $n(G) = 1$, então G é 0-degenerado e $\Delta(G) = 0$. Portanto, o resultado segue, já que, independentemente de S ser vazio ou não, $h(G) = 1 \leq |S| + d(\Delta(G) - 1) + 1$.

Agora seja G um grafo d -degenerado com $n \geq 2$ vértices e S uma cobertura de vértices de G . Seja $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ uma ordenação sobre $V(G)$ tal que todo vértice v_i possui no máximo d vizinhos com índices menores que i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Considere $H = G - v_n$. Como S é uma cobertura de vértices de G , $S' = S \setminus \{v_n\}$ é uma cobertura de vértices de H . Além disso, H é d -degenerado. Pela hipótese de indução, existe uma coloração harmoniosa c' de H com $|S'| + d(\Delta(H) - 1) + 1$ cores, tal que os vértices de S' têm cores individuais.

Temos os seguintes casos:

1. $v_n \in S$: neste caso, temos $|S| = |S'| + 1$. Podemos estender c' para $V(G)$ usando uma nova cor apenas em v_n , criando uma coloração harmoniosa c de G com $|S'| + d(\Delta(H) - 1) + 2$ cores. Note que:

$$|S'| + d(\Delta(H) - 1) + 2 = |S| + d(\Delta(H) - 1) + 1 \leq |S| + d(\Delta(G) - 1) + 1.$$

Portanto, G pode ser colorido harmoniosamente com $|S| + d(\Delta(G) - 1) + 1$ cores, e na coloração c cada vértice de S usa uma cor individual.

2. $v_n \notin S$: neste caso, $S = S'$. Como S é uma cobertura de vértices de G , $V(G) \setminus S$ é um conjunto independente em G . Pela hipótese de indução, cada vértice de $S = S'$ é colorido com uma cor individual em c' . Note que, se estendermos c' para uma coloração c de $V(G)$ colorindo v_n com uma cor que não ocorre em $S = S'$ nem nos vértices a distância dois de v_n , então c é uma coloração harmoniosa de G . Pela escolha de v_n , v_n tem no máximo d vizinhos em G , e assim, no máximo $d(\Delta(G) - 1)$ vértices a distância dois. Há $d(\Delta(G) - 1) + 1$ cores disponíveis para v_n que não ocorrem em $S = S'$ na coloração c' . Assim, podemos estender c' para uma coloração harmoniosa com $|S| + d(\Delta(G) - 1) + 1$ cores, de modo que os vértices de S têm cores individuais.

O resultado segue ao considerar uma cobertura de vértices mínima S tal que $|S| = \nu(G)$. □

4.2 Identificações de Vértices a Distância Três

Considere $G \circ uv$ o grafo obtido de G pela *identificação* de dois vértices distintos não adjacentes $u, v \in V(G)$, com a remoção de arestas múltiplas, caso apareçam. Lembre-se que essa operação remove $u, v \in V(G)$ e adiciona um novo vértice w adjacente a cada vértice em $N_G(u) \cup N_G(v)$.

Sabemos que $\chi(G) = n(G)$ se, e somente se, G é completo. Em Zykov (1949), foi demonstrado que, dado $u, v \in V(G)$ e $uv \notin E(G)$, o número cromático de G satisfaz

$$\chi(G) = \min\{\chi(G + uv), \chi(G \circ uv)\}. \quad (4.1)$$

Usando ideias semelhantes, é possível demonstrar que:

Proposição 4.2.1. *Para qualquer grafo G , o seguinte é verdadeiro:*

1. *se $\chi(G) = k$, então existe uma sequência de identificações de vértices não adjacentes a ser aplicada a G tal que o grafo resultante é K_k ; e*
2. *se K_k é obtido de G por uma sequência de identificações de vértices não adjacentes, então $\chi(G) \leq \chi(K_k) = k$.*

No que se segue, apresentamos adaptações destes enunciados para colorações harmoniosas. Primeiramente, trazemos um resultado, também presente em nossa revisão bibliográfica, provado em Kunderík (1992).

Teorema 3.2.1. (KUNDRÍK, 1992) Para qualquer grafo G , $h(G) = n(G)$ se, e somente se, $\text{diam}(G) \leq 2$.

Demonstração. Suponha primeiro que $\text{diam}(G) > 2$. Então, existem $u, v \in V(G)$ tais que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$. Considere que $V(G) = u, v, w_1, w_2, \dots, w_{n(G)-2}$. Definimos uma coloração $c : V(G) \rightarrow 1, \dots, n(G) - 1$ da seguinte forma: $c(u) = c(v) = 1$ e $c(w_i) = i + 1$, para todo $i \in 1, \dots, n(G) - 2$. Note que c é uma coloração harmoniosa de G usando $n(G) - 1$ cores. A direção contrária segue trivialmente. \square

Mostramos, agora, uma versão correspondente da Proposição 4.2.1 para o número cromático harmonioso.

Lema 4.2.1. Seja G um grafo tal que $\text{diam}(G) \geq 3$. Então,

1. existe um par $u, v \in V(G)$ tal que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$ cuja identificação resulta em um grafo H com $h(H) = h(G)$; e
2. se H é obtido de G pela identificação de $u, v \in V(G)$ tal que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$, então $h(G) \leq h(H)$.

Demonstração. Primeiro, denotemos $n(G) = n$. Como $\text{diam}(G) \geq 3$, pelo Teorema 3.2.1 deduzimos que $h(G) = k \leq n(G) - 1$. Assim, em qualquer k -coloração harmoniosa de G existe pelo menos um par de vértices distintos que pertencem à mesma classe de cor. Seja $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma k -coloração harmoniosa de G e sejam $u, v \in V(G)$ tais que $c(u) = c(v)$. Como c é uma coloração harmoniosa, temos que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$. Considere $V(G) = \{u, v, w_1, \dots, w_{n-2}\}$ e seja $H = G \circ uv$ o grafo obtido pela identificação de u e v . Denote por w o vértice resultante dessa operação. Então, $V(H) = \{w, w_1, \dots, w_{n-2}\}$.

Defina a coloração c' de H como $c'(w_i) = c(w_i)$ para cada $1 \leq i \leq n - 2$ e $c'(w) = c(v)$. Como w foi obtido pela identificação de u e v , $c(u) = c(v)$ e c é uma coloração harmoniosa de G , podemos observar que c' é uma coloração harmoniosa de H . Portanto, $h(H) \leq k = h(G)$. A demonstração do item (1) é finalizada em conjunto com a prova do item (2), a seguir.

Seja c' uma p -coloração harmoniosa de H , $p \in \mathbb{N}$. Defina $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, p\}$ tal que $c(w_i) = c'(w_i)$ para cada $1 \leq i \leq n - 2$, e $c(u) = c(v) = c(w)$. Queremos mostrar que c é uma p -coloração harmoniosa de G . Pela construção de H e sabendo que $uv \notin E(G)$, certamente c é uma coloração própria de G . Como c' é uma coloração harmoniosa, se existirem duas arestas $e_1, e_2 \in E(G)$ com as mesmas cores em seus extremos, certamente v é um extremo de uma dessas arestas e u é um extremo da outra aresta. Sem perda de generalidade, digamos que

$e_1 = uz, e_2 = vy, c(u) = c(v) = 1$ e $c(z) = c(y) = 2$. No entanto, note que u e v são identificados para obter H , então $\text{dist}_H(z, y) \leq 2$. Assim, como c' é uma coloração harmoniosa, a igualdade $c(z) = c(y) = c'(z) = c'(y)$ não é possível. \square

Pode-se deduzir que, após aplicar o Lema 4.2.1 iterativamente temos:

Teorema 4.2.2. *Para qualquer grafo G , o seguinte se aplica:*

1. *se $h(G) = k$, então existe uma sequência de identificações de vértices a ser aplicada a G tal que, a cada passo, os vértices identificados tenham distância pelo menos 3 e tal que o grafo H obtido no final tenha k vértices e diâmetro no máximo 2; e*
2. *se H é obtido a partir de G por uma sequência de identificações de vértices tal que, a cada passo, os vértices identificados tenham distância pelo menos 3, então $h(G) \leq h(H)$.*

Demonstração. Para provar (1), suponha primeiro que $h(G) = k$. Se $\text{diam}(G) \leq 2$, então, $h(G) = n(G)$ e pode-se tomar uma sequência vazia. Suponha agora que $\text{diam}(G) \geq 3$. Assim, é suficiente aplicar o Lema 4.2.1(1) exaustivamente até que o grafo resultante tenha diâmetro no máximo 2, e então aplicar o Teorema 3.2.1.

A segunda afirmação segue por aplicações sucessivas do Lema 4.2.1(2). \square

O Teorema 4.2.2 é a fonte de inspiração das heurísticas que propomos para obter colorações harmoniosas viáveis na Seção 4.4. Devemos também enfatizar que a Afirmação (1) do Teorema 4.2.2 é provada em Kolay *et al.* (2019), mas neste os autores identificam todos os vértices na mesma classe de cor de uma coloração harmoniosa ótima de G de uma vez.

Outra observação é que a equação de Zykov para o número cromático não se traduz facilmente, pois adicionar arestas a G não só cria novas restrições para obter uma coloração própria, mas também para obter uma coloração harmoniosa. Uma questão natural é:

Pergunta 1. *É possível encontrar uma equação semelhante à de Zykov (4.1) para o número cromático harmonioso?*

4.3 Formulações de Programação Inteira

4.3.1 Modelo Padrão

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um limitante superior k para $h(G)$, definimos uma variável binária $x_{v,i}$, para $v \in V$ e $1 \leq i \leq k$, que representa se o vértice v recebe ou não a cor i ,

e, para $1 \leq i \leq k$, definimos a variável binária w_i que representa se a cor i é utilizada. Usando esses dois conjuntos de variáveis, é possível fornecer uma formulação simples para o problema de coloração harmoniosa, conforme segue.

$$(STD) \min \sum_{i=1}^k w_i \quad (4.2a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^k x_{v,i} = 1 \quad \forall v \in V, \quad (4.2b)$$

$$w_i \geq x_{v,i} \quad \forall i \in [k], \forall v \in V, \quad (4.2c)$$

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad \forall i \in [k], \forall uv \in E, \quad (4.2d)$$

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad \forall i \in [k], \forall u, v \in V, \text{dist}(u, v) \leq 2, \quad (4.2e)$$

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \quad \forall uv \notin E, u \neq v, \forall i \in [k], \forall j \neq i, \quad (4.2f)$$

$$x_{v,i}, w_i \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall i \in [k] \quad (4.2g)$$

A função objetivo (4.2a) tenta minimizar o número de cores utilizadas, representado pela soma das variáveis w_i ; a restrição (4.2b) indica que cada vértice deve ser colorido com exatamente uma cor; a restrição (4.2c) indica que, se uma cor é utilizada em qualquer vértice, então a variável w associada a essa cor deve ser um; a restrição (4.2d) indica que pares de vértices adjacentes recebem cores distintas; a restrição (4.2e) indica que dois vértices que compartilham um vizinho não recebem a mesma cor; a restrição (4.2f) indica que, dado um par de vértices com a mesma cor, qualquer outra cor aparece em no máximo um vértice da união da vizinhança deste par, note que se apenas um vértice do par u, v é colorido com a cor i , então a cor j aparece em no máximo dois vértices da união da vizinhança, sendo estes dois: um vizinho de u e um vizinho de v ; a restrição (4.2g) indica que as variáveis são binárias.

4.3.2 Modelo por Representantes

Nesta subseção e na próxima, usamos as formulações para colorações de grafos introduzidas em (CAMPÊLO *et al.*, 2004; CAMPÊLO *et al.*, 2008) para apresentar modelos para Colorações Harmoniosas.

Uma k -coloração harmoniosa de G , uma vez que é uma coloração própria, pode ser vista como uma partição $\{S_1, \dots, S_k\}$ de $V(G)$ em k conjuntos independentes de G . Suponha que, para cada cor i , escolhemos um vértice para ser o representante da classe de cor S_i . Então,

os vértices podem ou representar sua própria cor, ou ter sua cor representada por outro vértice. Observe que cada vértice v só pode representar apenas a si e a vértices que não são adjacentes nem compartilham um vizinho comum com v , ou seja, vértices a uma distância de pelo menos três de v . Portanto, podemos definir, para todo $v \in V$, o conjunto $N^*(v) = \{u \in \bar{N}(v) \mid N(v) \cap N(u) = \emptyset\} = \{u \in V(G) \mid \text{dist}_G(u, v) \geq 3\}$ e $N^*[v] = N^*(v) \cup \{v\}$.

Para descrever a situação por representantes no grafo, definimos a variável binária x_{uv} , para todo $u \in V(G)$ e $v \in N^*[u]$, significando se o vértice u é ou não o representante da cor atribuída ao vértice v . Usando essas variáveis, podemos definir a seguinte formulação.

$$(REP) \min \sum_{u \in V} x_{uu} \quad (4.3a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{u \in N^*[v]} x_{uv} \geq 1 \quad \forall v \in V, \quad (4.3b)$$

$$x_{uv} + x_{uw} \leq x_{uu} \quad \forall u \in V \quad \forall v, w \in N^*(u): vw \in E, \quad (4.3c)$$

$$\sum_{l \in N^*(v) \cap N(\{u, w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad \forall v \in V, \forall uw \notin E, \forall z \in V, \\ \forall z \in N^*(\{u, w\}), u \neq w, z \neq v, \quad (4.3d)$$

$$\sum_{z \in N^*(u) \cap N(v)} x_{uz} \leq x_{uu} \quad \forall v, u \in V, \quad (4.3e)$$

$$x_{uv} \leq x_{uu} \quad \forall u \in V, \forall v \in N^*(u), \quad (4.3f)$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V, \forall v \in N^*[u] \quad (4.3g)$$

A função objetivo (4.3a) visa minimizar o número de representantes, uma vez que cada um destes representa uma cor diferente. A restrição (4.3b) indica que cada vértice $v \in V(G)$ deve ser representado por ele mesmo ou por algum outro vértice. A restrição (4.3c) indica que vértices adjacentes devem receber representantes distintos. A restrição (4.3d) indica que, dado dois vértices u e w , se eles têm a mesma cor (ou seja, têm o mesmo representante z), então na união da vizinhança destes, qualquer outra cor aparece no máximo uma vez; também, note que se eles não compartilham uma cor, na união de sua vizinhança qualquer cor aparece no máximo duas vezes. A restrição (4.3e) indica que dois vértices que compartilham um vizinho não podem ter o mesmo representante. A restrição (4.3f) indica que apenas um representante pode representar a cor de um vértice. Finalmente, a restrição (4.3g) indica que as variáveis são binárias.

4.3.2.1 Polítopo de dimensão plena

Sejam $n = |V(G)|$ e $m = \sum_{v \in V(G)} |N^*(v)|$. Voltamos agora nossa atenção ao polítopo $P(REP) = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^{n+m} \mid x \text{ satisfaz (4.3b) a (4.3g)}\}$. Começamos definindo uma notação para vetores constantemente utilizados em demonstrações apresentadas nessa seção.

Dado um par de vértices $u, v \in V$, $uv \notin E$, o vetor de incidência de uv é X_{uv} , definido como um vetor binário $n + m$ cuja única entrada não-vazia é a correspondente a x_{uv} . Usando tal vetor é possível definirmos:

- $X = \sum_{u \in V} X_{uu}$.
- $X_r^u = X - X_{uu} + X_{ru}$, onde $r \neq u$.
- $X^{uv} = X + X_{uv}$, onde $v \neq u$.

Uma pergunta comum sobre polítopos de formulações inteiras é qual a dimensão destes. Assim, a dimensão de $P(REP)$ é estabelecida no teorema a seguir. Neste, ao definirmos X_r^u , tomamos r como um vértice que varia apenas em função de u . Note que X_r^u só é bem definido quando todo vértice u possui algum vértice r tal que $\text{dist}(u, r) \geq 3$, ou seja, $N^*(u) \neq \emptyset$; caso o grafo possua um vértice u tal que $\text{dist}(u, v) \leq 2 \forall v \in V(G)$, podemos olhar para a coloração de $G \setminus \{u\}$ pois u deve possuir cor diferente de todas as outras cores dos vértices do grafo, por definição de harmoniosa.

Teorema 4.3.1. $P(REP)$ possui dimensão plena, isto é, $\dim(P(REP)) = n + m$.

Demonstração. Considere os $n + m + 1$ seguintes vetores distintos em $P(G)$: X, X_r^u e X^{uv} , $\forall u \in V$, para algum $r \in N^*(u)$ e para todo $v \in N^*(u)$. Queremos mostrar que $X_r^u - X$ e $X^{uv} - X$ são linearmente independentes, o que prova que X, X_r^u e X^{uv} são afim independentes.

Para mostrarmos que $X_r^u - X$ e $X^{uv} - X$ são linearmente independentes, consideramos os reais α_u ($u \in V$) e β_{uv} ($u \in V, v \in N^*(u)$), tais que

$$\sum_{u \in V} \left(\alpha_u (X_r^u - X) + \sum_{v \in N^*(u)} \beta_{uv} (X^{uv} - X) \right) = 0$$

Note que, por definição, $X_r^u - X = -X_{uu} + X_{ru}$ e $X^{uv} - X = X_{uv}$. Assim, a igualdade se torna

$$\sum_{u \in V} \left(\alpha_u (-X_{uu} + X_{ru}) + \sum_{v \in N^*(u)} \beta_{uv} X_{uv} \right) = 0$$

Como $r, v \in N^*(u)$, temos que $X_{uu} \neq X_{ru}$ e $X_{uu} \neq X_{uv}$. Ademais, cada X_{uu} aparece exatamente uma vez na equação, logo, para a equação ser satisfeita é necessário que $\alpha_u = 0$. Dessa forma, temos que

$$\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in N^*(u)} \beta_{uv} X_{uv} \right) = 0$$

Assim, $\beta_{uv} = 0$, uma vez que cada entrada associada a x_{uv} aparece apenas uma vez na equação. Portanto, o politopo possui dimensão plena. \square

4.3.3 Modelo Assimétrico por Representantes

O modelo por representantes possui algumas soluções simétricas, dadas pela possibilidade de escolher diferentes representantes para a coloração. Para enfrentar esse problema, adotamos uma ordem total arbitrária \leq sobre o conjunto de vértices de G . A fim de quebrar as simetrias, esta formulação garantirá que o representante de uma cor i seja o vértice mínimo, com respeito a \leq , dentre os vértices coloridos com i .

Sem perda de generalidade, assumimos que G não possui vértices isolados. Com isto, definimos $N_+^*(v) = \{u \in \bar{N}(v) \mid N(v) \cap N(u) = \emptyset \text{ e } u \geq v\}$ e $N_-^*(v) = \{u \in \bar{N}(v) \mid N(v) \cap N(u) = \emptyset \text{ e } u \leq v\}$. Considere $N(\{u, v\}) = N(u) \cup N(v)$. Como G não possui vértices isolados, observe que $v \notin N_+^*(v)$ e $v \notin N_-^*(v)$. Ademais, denote por S o conjunto formado por vértices que não possuem vértices menores que podem representar a cor atribuída a eles. Mais formalmente, seja $S = \{v \in V(G) \mid N_-^*(v) = \emptyset\}$.

Definimos a variável binária x_{uv} , para cada $u \in V(G)$ e $v \in N_+^*(u)$ e x_{uu} para cada $u \in V(G) \setminus S$, indicando se o vértice u é ou não o representante da cor atribuída ao vértice v . Note que os vértices em S devem ser representantes, assim não há necessidade de criar uma variável x_{uu} para eles. No entanto, isso requer um tratamento diferente no modelo matemático, já que algumas variáveis podem não existir nas restrições. Para manter a apresentação da formulação o mais simples possível, definimos a notação y_u para cada $u \in V(G)$ sendo x_{uu} se $u \notin S$ e 1 caso contrário. Sobre tais variáveis, podemos definir a seguinte formulação.

$$(AREP) \min \sum_{v \in V} x_{vv} \quad (4.4a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{u \in (N_+^*(v) \cup \{v\})} x_{uv} \geq 1 \quad \forall v \in V \setminus S, \quad (4.4b)$$

$$x_{vu} + x_{vw} \leq y_v \quad \forall uv \in E, \forall u, w \in N_+^*(v), \quad (4.4c)$$

$$\sum_{l \in N_+^*(v) \cap N(\{u, w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad \forall v \in V, \forall uv \notin E, \forall z \in N_+^*(\{u, w\}), u \neq w, z \neq v, \quad (4.4d)$$

$$\sum_{z \in N_+^*(v) \cap N(u)} x_{vz} \leq x_{vv} \quad \forall u, v \in V(G), \quad (4.4e)$$

$$x_{vu} \leq x_{vv} \quad \forall v \in V, u \in N_+^*(v), \quad (4.4f)$$

$$x_{vu} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall u \in N_+^*(v), \quad (4.4g)$$

$$x_{vv} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \setminus S \quad (4.4h)$$

A função objetivo (4.4a) busca minimizar o número de representantes, já que cada um destes representa uma cor diferente. A restrição (4.4b) indica que cada vértice $v \in V(G)$ deve ser representado por ele mesmo ou por algum vértice menor que ele em $N_+^*(v)$. As restrições (4.4c) e (4.4d) desempenham o mesmo papel das restrições (4.3c) e (4.3d), respectivamente. A Restrição (4.4e) força que dois vértices que compartilham um vizinho não possam ter o mesmo representante, permitindo a coloração harmônica do grafo. A Restrição (4.4f) indica que apenas um representante pode representar a cor de um vértice. As restrições (4.4g) e (4.4h) indicam que as variáveis são binárias.

4.3.3.1 Polítopo de dimensão plena

Seja $m_+ = \sum_{v \in V(G)} |N_+^*(v)|$ e $P(AREP) = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^{n-|S|+m_+} \mid x \text{ satisfaz (4.4b) a (4.4g)}\}$.

Teorema 4.3.2. $P(AREP)$ possui dimensão plena, isto é, $\dim(P(AREP)) = n - |S| + m_+$.

Considere os $n - |S| + m_+ + 1$ seguintes vetores distintos em $P(AREP)$: X, X_r^u e X^{uv} , para todo $u \in V, r \in N^*(u), v \in N_+^*(u)$. Para mostrar que X, X_r^u e X^{uv} são afim independentes, basta mostrar que $X_r^u - X$ e $X^{uv} - X$ são linearmente independentes. A demonstração é idêntica à demonstração do Teorema 4.3.1, assim, esta é omitida.

4.4 Heurísticas Gulosas

Uma vez que computar o número cromático harmonioso de um grafo é um problema NP-Difícil, há pouca ou nenhuma esperança de obter a solução ótima em instâncias consideradas grandes; portanto, é comum recorrer a métodos heurísticos para lidar com essas grandes instâncias. Um tipo simples de método heurístico, que geralmente representa a primeira tentativa para abordar qualquer problema, é o de heurísticas gulosas.

Para nosso problema, apresentamos heurísticas gulosas simples baseadas no processo de identificação de vértices discutido na Seção 4.2. Propomos dois tipos de heurísticas gulosas para o nosso problema: na primeira, identificamos dois vértices com a soma mínima de graus e, na segunda, identificamos vértices com a soma máxima de graus. Ambos os métodos utilizam o resultado apresentado no Teorema 4.2.2, que mostra uma coloração harmoniosa que colore os vértices identificados com a mesma cor.

Algoritmo 1: Heurística Gulosa MIN (G)

$H \leftarrow G$;

Enquanto H possui v e u tais que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$ **faça**

 Selecione u e v tais que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$ e $d(u) + d(v)$ seja o mínimo dentre todos os pares possíveis de vértices;

 Identifique os vértices u e v em H ;

fim

retorne $|V(H)|$;

Algoritmo 2: Heurística Gulosa MAX (G)

$H \leftarrow G$;

Enquanto H possui v e u tais que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$ **faça**

 Selecione u e v tais que $\text{dist}_G(u, v) \geq 3$ e $d(u) + d(v)$ seja o máximo dentre todos os pares de vértices;

 Identifique os vértices u e v em H ;

fim

retorne $|V(H)|$;

O Algoritmo 2 é um método guloso que visa minimizar o grau máximo do grafo obtido pela sequência de identificações, na esperança de que, ao realizar primeiro uma combinação com vértices de grau alto, o número total de identificações será pequeno. Em contraste, o Algoritmo 1 busca alcançar o mesmo objetivo realizando um grande número de identificações usando vértices de grau baixo.

4.5 Resultados Computacionais

4.5.1 Descrição do Ambiente e das Instâncias

Todos os experimentos computacionais foram realizados em uma máquina rodando Ubuntu 20.04 x86-64 GNU/Linux, com um processador Intel Core i7-7500 Octa-Core de 2.70 GHz e 20 GB de RAM. As formulações de PLI foram implementadas em Julia e resolvidas com o Gurobi 10.0.1. As heurísticas gulosas também foram implementadas em Julia.

As instâncias de benchmark usadas nos experimentos computacionais são do conjunto: **aleatório**, sendo este dividido em instâncias *pequenas* e *grandes*.

O conjunto **aleatório** é composto por grafos gerados aleatoriamente, respeitando uma determinada probabilidade de ter uma aresta entre cada par de vértices distintos. Mais precisamente, para um dado número de vértices n e uma probabilidade p , geramos um grafo G com n vértices tal que, para todo $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, a probabilidade do par de vértices u, v ser adjacente é p . Note que tal processo é inerentemente aleatório e pode produzir diversas estruturas; assim, geramos, para cada número de vértices n e probabilidade p , 5 grafos com os mesmos parâmetros e com isto evitamos estruturas particulares. Nos experimentos, consideramos que n pode assumir valores no conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ e que p pode assumir valores em $\{0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90\}$. O subconjunto de instâncias *pequenas* contém apenas as instâncias com $n \leq 50$ e $0.20 \leq p$.

4.5.2 Comparação dos Modelos Matemáticos

O primeiro conjunto de experimentos foi projetado para avaliar a eficácia dos modelos matemáticos propostos. Para isso, utilizamos as instâncias pequenas. Limitamos o tempo de execução do *solver* a 1800 segundos, usamos um único *thread* e mantivemos a configuração padrão de todos os parâmetros do *solver* em nossa primeira rodada de experimentos. Analisamos dois critérios nesta: a melhor solução encontrada pelo *solver* e o tempo de execução.

Os resultados para as instâncias pequenas do conjunto aleatório estão reportados na Tabela 2. Temos uma coluna associada a cada formulação: STD representa a formulação padrão, REP representa a formulação por representantes e AREP representa a formulação assimétrica por representantes. Cada coluna é subdividida em duas, *obj* e *time*, que representam o valor da solução ótima e o tempo de execução, respectivamente, conforme reportado pelo *solver*.

Os resultados para as instâncias aleatórias pequenas são agrupados pelo número de

vértices e pela probabilidade de distribuição em arestas, e o valor médio é o que aparece em cada entrada na Tabela 2. Observe que ambas as formulações por representantes superam a formulação padrão, conseguindo obter o resultado ótimo em quase todas as instâncias. Especialmente para as instâncias com alta densidade (probabilidade de atribuir uma aresta a um par de vértices superior a 40%), ambas as formulações por representantes conseguiram resolver todas as instâncias em menos de um segundo, enquanto a formulação padrão não conseguiu fornecer uma solução. Entre as duas formulações por representantes, a formulação assimétrica pôde resolver o mesmo número de instâncias que a formulação por representantes, mas usando um período menor de tempo. Para as instâncias com densidade próxima a 20%, a diferença é mais marcante, com a formulação assimétrica conseguindo resolver as instâncias em menos de 2 segundos e a formulação por representantes gastando quase o tempo limite de 1800 segundos.

4.5.3 *Experimentos Computacionais para a Formulação Assimétrica por Representantes*

A primeira rodada de experimentos computacionais, reportada na Tabela 2, mostra empiricamente que a formulação assimétrica é a mais eficaz entre as três formulações propostas. Após isso, estivemos interessados na capacidade de resolução desta formulação e, ainda mais importante, nas características e estruturas que tornam um conjunto de instâncias *difícil* para o nosso problema. Nesse contexto, realizamos a segunda rodada de experimentos computacionais, agora apenas com a formulação assimétrica. Testamos essa formulação no conjunto completo de instâncias e os resultados são reportados na Tabela 3. Nesses experimentos, executamos a formulação com a configuração padrão e não restringimos o número de threads utilizados pelo *solver*, como feito anteriormente.

Como era esperado, a formulação assimétrica foi capaz de resolver quase todas as instâncias apresentadas no conjunto aleatório, conforme reportado na Tabela 3. Os resultados foram agrupados pela probabilidade de distribuição de uma aresta entre um par de vértices, como feito na seção anterior. As colunas Sol, Gap e Time representam a melhor solução encontrada pelo *solver*, a distância do resultado ótimo conforme reportado pelo *solver* e o tempo de execução conforme reportado pelo *solver*, respectivamente. A formulação assimétrica foi capaz de resolver otimamente até mesmo as instâncias com 100 vértices em menos de 2 segundos para densidades maiores que 10%.

No entanto, a formulação não foi capaz de resolver otimamente nenhuma instância com densidade menor ou igual a 10% e mais de 30 vértices. Além disso, todas as instâncias com

Tabela 2 – Comparação entre a formulação padrão (coluna STD), formulação por representantes (coluna REP) e formulação assimétrica por representantes (coluna AREP) em relação ao melhor valor de objeto reportado pelo solucionador e o tempo de execução para encontrar tal solução no conjunto de instâncias **aleatórias pequenas**. Os tempos são reportados em segundos. Se nenhum valor de solução é reportado, aparece um - na tabela e, se a formulação exceder o limite de tempo, aparece um *TL* naquela entrada da tabela.

V(G)	%	STD		REP		AREP	
		obj	time	obj	time	obj	time
10	0.20	5.2	0.312	5.2	0.344	5.2	0.002
10	0.30	7.2	1.189	7.2	0.02	7.2	0.001
10	0.40	7.8	2.036	7.8	0.001	7.8	0.001
10	0.50	9.0	6.433	9.0	0.001	9.0	0.0
10	0.60	9.8	0.894	9.8	0.0	9.8	0.0
10	0.70	10.0	0.696	10.0	0.0	10.0	0.0
10	0.80	10.0	0.759	10.0	0.0	10.0	0.0
10	0.90	10.0	0.687	10.0	0.0	10.0	0.0
20	0.20	-	<i>TL</i>	10.8	29.397	10.8	0.029
20	0.30	-	<i>TL</i>	14.4	0.066	14.4	0.002
20	0.40	-	<i>TL</i>	19.0	0.001	19.0	0.001
20	0.50	19.6	576.152	19.6	0.001	19.6	0.0
20	0.60	20.0	93.662	20.0	0.0	20.0	0.0
20	0.70	20.0	145.892	20.0	0.0	20.0	0.0
20	0.80	20.0	279.087	20.0	0.0	20.0	0.0
20	0.90	20.0	388.813	20.0	0.0	20.0	0.0
30	0.20	-	<i>TL</i>	16.4	883.9	16.4	0.618
30	0.30	-	<i>TL</i>	23.4	0.025	23.4	0.002
30	0.40	29.2	1640.126	29.2	0.001	29.2	0.0
30	0.50	30.0	1508.516	30.0	0.0	30.0	0.0
30	0.60	-	<i>TL</i>	30.0	0.0	30.0	0.0
30	0.70	-	<i>TL</i>	30.0	0.0	30.0	0.0
30	0.80	-	<i>TL</i>	30.0	0.001	30.0	0.0
30	0.90	-	<i>TL</i>	30.0	0.0	30.0	0.0
40	0.20	-	<i>TL</i>	23.0	1179.59	22.8	1.876
40	0.30	-	<i>TL</i>	34.6	0.003	34.6	0.001
40	0.40	-	<i>TL</i>	39.6	0.001	39.6	0.0
40	0.50	-	<i>TL</i>	40.0	0.0	40.0	0.0
40	0.60	-	<i>TL</i>	40.0	0.0	40.0	0.0
40	0.70	-	<i>TL</i>	40.0	0.0	40.0	0.0
40	0.80	-	<i>TL</i>	40.0	0.001	40.0	0.0
40	0.90	-	<i>TL</i>	40.0	0.0	40.0	0.0
50	0.20	-	<i>TL</i>	29.8	1619.01	29.6	1.169
50	0.30	-	<i>TL</i>	45.2	0.001	45.2	0.232
50	0.40	-	<i>TL</i>	49.6	0.0	49.6	0.291
50	0.50	-	<i>TL</i>	50.0	0.0	50.0	0.211
50	0.60	-	<i>TL</i>	50.0	0.0	50.0	0.41
50	0.70	-	<i>TL</i>	50.0	0.0	50.0	0.355
50	0.80	-	<i>TL</i>	50.0	0.0	50.0	0.116
50	0.90	-	<i>TL</i>	50.0	0.0	50.0	0.181

densidade de 5% e mais de 40 vértices atingem o limite de tempo de 1800 segundos e a distância do resultado ótimo aumenta com o número de vértices acima de 70%. Esses experimentos sugerem que instâncias difíceis devem ter uma densidade menor, ou seja, instâncias com número baixo de arestas.

Tabela 3 – Relatório completo dos resultados obtidos pela formulação assimétrica no conjunto de instâncias **aleatório**. As colunas Sol, Gap e Time representam a melhor solução, a lacuna de otimalidade e o tempo de execução conforme reportado pelo *solver*, respectivamente. Os tempos são reportados em segundos. Se nenhum valor de solução for reportado, aparece um - nas colunas Sol e Gap, e se a formulação exceder o limite de tempo, aparece *TL* nessa entrada na tabela.

$ V(G) $	%	Sol	Gap	Time	$ V(G) $	%	Sol	Gap	Time
10	0.05	3.0	0.0	0.001	60	0.05	16.6	36.9	TL
10	0.10	4.8	0.0	0.001	60	0.10	24.8	25.8	TL
10	0.20	5.2	0.0	0.002	60	0.20	40.6	0.0	0.211
10	0.30	7.2	0.0	0.001	60	0.30	56.4	0.0	0.001
10	0.40	7.8	0.0	0.001	60	0.40	60.0	0.0	0.001
10	0.50	9.0	0.0	0.001	60	0.50	60.0	0.0	0.001
10	0.60	9.8	0.0	0.0	60	0.60	60.0	0.0	0.001
10	0.70	10.0	0.0	0.0	60	0.70	60.0	0.0	0.001
10	0.80	10.0	0.0	0.0	60	0.80	60.0	0.0	0.001
10	0.90	10.0	0.0	0.0	60	0.90	60.0	0.0	0.001
20	0.05	5.6	0.0	0.071	70	0.05	20.4	46.0	TL
20	0.10	7.4	0.0	0.081	70	0.10	30.2	35.3	TL
20	0.20	10.8	0.0	0.041	70	0.20	48.0	0.0	0.295
20	0.30	14.4	0.0	0.003	70	0.30	68.4	0.0	0.001
20	0.40	19.0	0.0	0.001	70	0.40	70.0	0.0	0.001
20	0.50	19.6	0.0	0.001	70	0.50	70.0	0.0	0.001
20	0.60	20.0	0.0	0.0	70	0.60	70.0	0.0	0.001
20	0.70	20.0	0.0	0.0	70	0.70	70.0	0.0	0.001
20	0.80	20.0	0.0	0.0	70	0.80	70.0	0.0	0.001
20	0.90	20.0	0.0	0.0	70	0.90	70.0	0.0	0.001
30	0.05	9.0	0.0	101.553	80	0.05	26.0	56.1	TL
30	0.10	11.0	0.0	5.325	80	0.10	35.6	39.9	TL
30	0.20	16.4	0.0	0.67	80	0.20	58.0	0.0	0.101
30	0.30	23.4	0.0	0.002	80	0.30	78.2	0.0	0.001
30	0.40	29.2	0.0	0.001	80	0.40	80.0	0.0	0.001
30	0.50	30.0	0.0	0.0	80	0.50	80.0	0.0	0.001
30	0.60	30.0	0.0	0.0	80	0.60	80.0	0.0	0.001
30	0.70	30.0	0.0	0.0	80	0.70	80.0	0.0	0.001
30	0.80	30.0	0.0	0.0	80	0.80	80.0	0.0	0.001
30	0.90	30.0	0.0	0.0	80	0.90	80.0	0.0	0.001
40	0.05	10.6	13.3	TL	90	0.05	30.0	53.9	TL
40	0.10	14.6	7.3	1096.094	90	0.10	41.4	36.3	TL
40	0.20	22.8	0.0	1.979	90	0.20	69.6	0.0	0.011
40	0.30	34.6	0.0	0.001	90	0.30	89.8	0.0	0.001
40	0.40	39.6	0.0	0.001	90	0.40	90.0	0.0	0.001
40	0.50	40.0	0.0	0.001	90	0.50	90.0	0.0	0.001
40	0.60	40.0	0.0	0.001	90	0.60	90.0	0.0	0.001
40	0.70	40.0	0.0	0.0	90	0.70	90.0	0.0	0.001
40	0.80	40.0	0.0	0.0	90	0.80	90.0	0.0	0.001
40	0.90	40.0	0.0	0.001	90	0.90	90.0	0.0	0.001
50	0.05	13.8	24.7	TL	100	0.05	33.6	70.1	TL
50	0.10	19.4	10.8	1248.21	100	0.10	48.6	34.5	TL
50	0.20	29.6	0.0	0.963	100	0.20	81.4	0.0	0.027
50	0.30	45.2	0.0	0.001	100	0.30	99.4	0.0	0.001
50	0.40	49.6	0.0	0.001	100	0.40	100.0	0.0	0.001
50	0.50	50.0	0.0	0.001	100	0.50	100.0	0.0	0.001
50	0.60	50.0	0.0	0.001	100	0.60	100.0	0.0	0.001
50	0.70	50.0	0.0	0.001	100	0.70	100.0	0.0	0.001
50	0.80	50.0	0.0	0.001	100	0.80	100.0	0.0	0.001
50	0.90	50.0	0.0	0.001	100	0.90	100.0	0.0	0.001

4.5.4 Experimentos Computacionais para a Heurística Gulosa

A última rodada de experimentos computacionais foi projetada para avaliar a qualidade geral das heurísticas gulosas propostas na Seção 4.3. Executamos ambas as estratégias

gulosas em no conjunto de instâncias aleatórias. Os resultados desses testes são apresentados na Tabela 4. Nesta tabela, a coluna AREP apresenta os resultados obtidos pela formulação assimétrica, que serve como um controle para a qualidade da solução obtida pelas heurísticas. As colunas MIN e MAX apresentam os resultados obtidos pelos Algoritmos 1 e 2. Cada uma dessas colunas é subdividida em duas subcolunas: *So1*, que representa o número de cores usadas pelo método, e *Time*, que reporta o tempo de execução para o método conforme medido pelo *solver* para a formulação PIM e pelo sistema operacional para as heurísticas gulosas.

A Tabela 4 apresenta os resultados para as instâncias do conjunto aleatório. Como feito anteriormente, os resultados foram agrupados pela probabilidade de distribuição de uma aresta entre um par de vértices. Observe que ambas as heurísticas foram executadas em menos de 2 segundos para todas as instâncias e a diferença no tempo de execução pode ser desconsiderada, embora a diferença na qualidade da solução não possa, e o comportamento de ambos os métodos é curioso. Primeiro, observe que ambas encontram a solução ótima para instâncias com densidade maior que 30%. Em relação às instâncias com densidade entre 30% e 10%, podemos argumentar que o *GreedyMin* (representado pelo Algoritmo 1) supera consistentemente o *GreedyMax* (Algoritmo 2), mas curiosamente o *GreedyMax* supera o *GreedyMin* para as instâncias com densidade de 5%. Esse comportamento parece surpreendente a princípio, mas pode ser explicável pelo fato de que, com tal baixa probabilidade, a diferença entre o menor e o maior grau é muito estreita; de fato, vários vértices têm o mesmo grau. Assim, a escolha dos vértices é quase a mesma para ambas as heurísticas, o que explica o comportamento variável nas instâncias com densidade de 5%.

4.6 Considerações Finais

O problema da coloração harmoniosa tende a ser mais difícil em grafos esparsos, portanto, não é surpresa que os experimentos geralmente alcancem o ótimo em grafos densos com tempo de execução menor. O fato de os modelos representativos serem melhores (em termos de execução) do que o modelo padrão ocorre porque há muitas simetrias que não conseguimos quebrar por completo. Para grafos d -degenerados, temos um excelente limitante, mas acreditamos que ele pode ser melhorado se o número harmonioso for limitado por outros parâmetros além da cobertura de vértices e do grau máximo. A complexidade parametrizada desse problema ainda não foi muito estudada, então, se o leitor tiver interesse nessa área, essa é uma boa vertente de pesquisa a ser explorada.

Tabela 4 – Relatório completo dos resultados obtidos pelas heurísticas gulosas no conjunto de instâncias **aleatório**. Foram considerados dois ordenamentos na heurística gulosa: um ordenamento de grau não crescente (coluna MAX) e um ordenamento de grau não decrescente (coluna MIN). As colunas obj e time representam a melhor solução e o tempo de execução, conforme reportado pelo *solver* no caso da PIM e medido durante a execução para a heurística, respectivamente. Os tempos são reportados em segundos. Se nenhum valor de solução for reportado, aparece um - na tabela e, se a formulação exceder o limite de tempo, aparece *TL* nessa entrada na tabela.

		AREP		MIN		MAX				AREP		MIN		MAX	
V	%	Sol	Time	Sol	Time	Sol	Time	V	%	Sol	Time	Sol	Time	Sol	Time
10	0.5	3.0	0.001	3.6	0.458	3.0	0.459	60	0.5	16.6	<i>TL</i>	32.6	0.687	22.2	0.494
10	0.10	4.8	0.001	5.8	0.458	5.0	0.458	60	0.10	24.8	<i>TL</i>	31.2	0.758	32.8	0.499
10	0.20	5.2	0.002	6.2	0.459	5.8	0.459	60	0.20	40.6	0.211	45.2	0.62	45.2	0.497
10	0.30	7.2	0.001	8.0	0.458	7.6	0.459	60	0.30	56.4	0.001	56.4	0.514	56.6	0.489
10	0.40	7.8	0.001	8.2	0.458	8.2	0.459	60	0.40	60.0	0.001	60.0	0.337	60.0	0.337
10	0.50	9.0	0.001	9.0	0.402	9.0	0.401	60	0.50	60.0	0.001	60.0	0.34	60.0	0.339
10	0.60	9.8	0.0	9.8	0.341	9.8	0.342	60	0.60	60.0	0.001	60.0	0.344	60.0	0.344
10	0.70	10.0	0.0	10.0	0.31	10.0	0.309	60	0.70	60.0	0.001	60.0	0.348	60.0	0.35
10	0.80	10.0	0.0	10.0	0.309	10.0	0.31	60	0.80	60.0	0.001	60.0	0.351	60.0	0.347
10	0.90	10.0	0.0	10.0	0.313	10.0	0.309	60	0.90	60.0	0.001	60.0	0.351	60.0	0.351
20	0.5	5.6	0.071	8.2	0.47	6.0	0.465	70	0.5	20.4	<i>TL</i>	37.6	0.851	26.8	0.512
20	0.10	7.4	0.081	10.8	0.468	9.2	0.465	70	0.10	30.2	<i>TL</i>	38.0	0.92	39.2	0.511
20	0.20	10.8	0.041	12.6	0.47	12.4	0.466	70	0.20	48.0	0.295	52.6	0.752	54.2	0.507
20	0.30	14.4	0.003	16.0	0.468	15.8	0.465	70	0.30	68.4	0.001	68.6	0.472	68.6	0.465
20	0.40	19.0	0.001	19.0	0.437	19.0	0.439	70	0.40	70.0	0.001	70.0	0.346	70.0	0.347
20	0.50	19.6	0.001	19.6	0.347	19.6	0.346	70	0.50	70.0	0.001	70.0	0.352	70.0	0.353
20	0.60	20.0	0.0	20.0	0.312	20.0	0.313	70	0.60	70.0	0.001	70.0	0.36	70.0	0.362
20	0.70	20.0	0.0	20.0	0.314	20.0	0.313	70	0.70	70.0	0.001	70.0	0.359	70.0	0.359
20	0.80	20.0	0.0	20.0	0.313	20.0	0.314	70	0.80	70.0	0.001	70.0	0.365	70.0	0.365
20	0.90	20.0	0.0	20.0	0.314	20.0	0.314	70	0.90	70.0	0.001	70.0	0.37	70.0	0.371
30	0.5	9.0	101.553	15.0	0.484	11.2	0.469	80	0.5	26.0	<i>TL</i>	42.2	1.082	32.6	0.525
30	0.10	11.0	5.325	17.6	0.482	14.4	0.469	80	0.10	35.6	<i>TL</i>	41.0	1.244	45.0	0.534
30	0.20	16.4	0.67	19.6	0.481	20.2	0.468	80	0.20	58.0	0.101	62.8	0.829	64.0	0.525
30	0.30	23.4	0.002	24.8	0.473	25.4	0.468	80	0.30	78.2	0.001	78.2	0.522	78.2	0.508
30	0.40	29.2	0.001	29.4	0.41	29.4	0.41	80	0.40	80.0	0.001	80.0	0.358	80.0	0.357
30	0.50	30.0	0.0	30.0	0.317	30.0	0.317	80	0.50	80.0	0.001	80.0	0.372	80.0	0.371
30	0.60	30.0	0.0	30.0	0.316	30.0	0.315	80	0.60	80.0	0.001	80.0	0.374	80.0	0.374
30	0.70	30.0	0.0	30.0	0.316	30.0	0.316	80	0.70	80.0	0.001	80.0	0.384	80.0	0.381
30	0.80	30.0	0.0	30.0	0.317	30.0	0.316	80	0.80	80.0	0.001	80.0	0.391	80.0	0.392
30	0.90	30.0	0.0	30.0	0.317	30.0	0.316	80	0.90	80.0	0.001	80.0	0.4	80.0	0.4
40	0.5	10.6	<i>TL</i>	22.2	0.513	14.0	0.477	90	0.5	30.0	<i>TL</i>	46.2	1.497	36.8	0.567
40	0.10	14.6	1096.094	21.6	0.523	19.4	0.475	90	0.10	41.4	<i>TL</i>	47.2	1.621	52.8	0.563
40	0.20	22.8	1.979	25.2	0.52	27.8	0.472	90	0.20	69.6	0.011	74.6	0.872	75.6	0.557
40	0.30	34.6	0.001	35.8	0.482	36.0	0.469	90	0.30	89.8	0.001	89.8	0.395	89.8	0.397
40	0.40	39.6	0.001	39.6	0.35	39.6	0.348	90	0.40	90.0	0.001	90.0	0.378	90.0	0.379
40	0.50	40.0	0.001	40.0	0.319	40.0	0.32	90	0.50	90.0	0.001	90.0	0.391	90.0	0.392
40	0.60	40.0	0.001	40.0	0.327	40.0	0.328	90	0.60	90.0	0.001	90.0	0.4	90.0	0.399
40	0.70	40.0	0.0	40.0	0.327	40.0	0.326	90	0.70	90.0	0.001	90.0	0.415	90.0	0.421
40	0.80	40.0	0.0	40.0	0.328	40.0	0.328	90	0.80	90.0	0.001	90.0	0.435	90.0	0.436
40	0.90	40.0	0.001	40.0	0.329	40.0	0.33	90	0.90	90.0	0.001	90.0	0.45	90.0	0.45
50	0.5	13.8	<i>TL</i>	26.2	0.598	19.0	0.482	100	0.5	33.6	<i>TL</i>	41.8	0.59	51.4	1.938
50	0.10	19.4	1248.21	27.6	0.6	26.4	0.483	100	0.10	48.6	<i>TL</i>	61.8	0.594	54.6	2.111
50	0.20	29.6	0.963	34.8	0.571	35.4	0.482	100	0.20	81.4	0.027	85.8	0.95	86.4	0.573
50	0.30	45.2	0.001	45.8	0.501	46.2	0.478	100	0.30	99.4	0.001	99.4	0.453	99.4	0.442
50	0.40	49.6	0.001	49.6	0.392	49.6	0.391	100	0.40	100.0	0.001	100.0	0.403	100.0	0.406
50	0.50	50.0	0.001	50.0	0.331	50.0	0.331	100	0.50	100.0	0.001	100.0	0.413	100.0	0.413
50	0.60	50.0	0.001	50.0	0.334	50.0	0.334	100	0.60	100.0	0.001	100.0	0.444	100.0	0.442
50	0.70	50.0	0.001	50.0	0.337	50.0	0.342	100	0.70	100.0	0.001	100.0	0.467	100.0	0.467
50	0.80	50.0	0.001	50.0	0.341	50.0	0.339	100	0.80	100.0	0.001	100.0	0.491	100.0	0.492
50	0.90	50.0	0.001	50.0	0.338	50.0	0.337	100	0.90	100.0	0.001	100.0	0.479	100.0	0.478

5 CONCLUSÃO

Em nosso estudo sobre coloração harmoniosa, observamos que esta é uma versão mais restrita da coloração estrela (GRÜNBAUM, 1973), onde cada par de cores induz uma floresta de estrelas, ou seja, nenhum par de cores induz um caminho com três vértices. Como apanhado histórico, temos que a versão não própria, denominada harmônica, surgiu em (HOPCROFT; KRISHNAMOORTHY, 1983) e a restrição de coloração própria foi adicionada somente em (LEE; MITCHEM, 1987). Desde que foi considerada a versão própria do problema, os pesquisadores focam em obter resultados para esta. Diversos limitantes são apresentados aqui, mas também apresentamos resultados envolvendo a complexidade do problema.

As principais contribuições apresentadas nessa dissertação são:

1. Uma revisão bibliográfica contendo cerca de 80 trabalhos referenciados;
2. Uma correção e melhoria do limitante do número cromático harmonioso de grafos d -degenerados apresentado em (KOLAY *et al.*, 2019);
3. Uma forma de relacionar o número cromático harmonioso de um par de grafos (G, H) , onde H é obtido de G a partir de uma sequência de identificação de vértices;
4. Três novas formulações para a coloração harmoniosa e seus resultados computacionais, além de uma análise da dimensão do polítopo de duas destas formulações.

Um possível caminho para trabalhos futuros é verificar em quais classes de grafos existem algoritmos polinomiais que resolvam o problema de decidir se $h(G) \leq k$, dados um grafo G e um inteiro positivo k . Ainda mencionando a complexidade do problema, a complexidade parametrizada deste foi pouco estudada, tendo explicitamente o início de seu estudo em (LINHARES-SALES *et al.*, 2014).

Como já mencionado, coloração harmoniosa é uma versão mais restrita de coloração estrela, então outro possível caminho a se seguir é tentar adaptar resultados conhecidos de coloração estrela. Também é possível estudar relações entre o número cromático harmônico e o harmonioso, uma vez que em nossa pesquisa não encontramos um trabalho dedicado a isto.

Computacionalmente, notamos que o problema tende a ser mais difícil quando o grafo é esparso, então a proposição de heurísticas para obter soluções viáveis também são caminhos interessantes a se percorrer. Ademais, proposição de novas formulações e a investigação de instâncias mais difíceis ou a quebra de simetrias em formulações já conhecidas. Até então,

desconhecemos formulações para coloração harmoniosa além das nossas, e um estudo mais aprofundado dos poliedros definidos por estas são possíveis caminhos para trabalhos futuros em coloração harmoniosa.

REFERÊNCIAS

- AFLAKI, A.; AKBARI, S.; EDWARDS, K.; ESKANDANI, D.; JAMAALI, M.; RAVANBOD, H. On harmonious colouring of trees. **The electronic journal of combinatorics**, p. P3–P3, 2012.
- AKBARI, S.; KIM, J.; KOSTOCHKA, A. Harmonious coloring of trees with large maximum degree. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 312, n. 10, p. 1633–1637, 2012.
- APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable. 1976.
- ARAUJO-PARDO, G.; MONTELLANO-BALLESTEROS, J. J.; OLSEN, M.; RUBIO-MONTIEL, C. On the harmonious chromatic number of graphs. **arXiv preprint arXiv:2206.04822**, 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2206.04822>. Acesso em: 06 jul. 2024.
- ARULDOSS, J.; MARY, S. Harmonious coloring of middle and central graph of some special graphs. **International Journal of Mathematics and its Application**, v. 4, p. 187–191, 2016.
- ARULDOSS, J. A.; MARY, S. M. Harmonious chromatic number, bondage number, domatic number of some special graphs. **International Journal of Mathematics And its Applications**, v. 4, p. 193–200, 2016.
- ASDRE, K.; IOANNIDOU, K.; NIKOLOPOULOS, S. D. The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 155, n. 17, p. 2377–2382, 2007.
- ASDRE, K.; NIKOLOPOULOS, S. D. NP-completeness results for some problems on subclasses of bipartite and chordal graphs. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 381, n. 1-3, p. 248–259, 2007.
- BEANE, D. G.; BIGGS, N. L.; WILSON, B. J. The growth rate of the harmonious chromatic number. **Journal of Graph Theory**, John Wiley & Sons, v. 13, n. 3, p. 291–299, 1989.
- BODLAENDER, H. L. Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs. **Information Processing Letters**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 135–138, 1989.
- BOSEK, B.; CZERWIŃSKI, S.; GRZYTCZUK, J.; RZAŻEWSKI, P. Harmonious coloring of uniform hypergraphs. **Applicable Analysis and Discrete Mathematics**, v. 10, n. 1, p. 73–87, 2016.
- CAIRNIE, N.; EDWARDS, K. Some results on the achromatic number. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 26, n. 3, p. 129–136, 1997.
- CAIRNIE, N.; EDWARDS, K. The achromatic number of bounded degree trees. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 188, n. 1-3, p. 87–97, 1998.
- CAMPÊLO, M.; CORRÊA, R.; FROTA, Y. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. **Information Processing Letters**, Elsevier, v. 89, n. 4, p. 159–164, 2004.
- CAMPÊLO, M.; CAMPOS, V. A.; CORRÊA, R. C. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. **Discrete Applied Mathematics**, v. 156, n. 7, p. 1097–1111, 2008. ISSN 0166-218X. GRACO 2005. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X07002922>.

CHANDEL, R.; GUPTA, V.; MANSURI, A. On harmonious coloring of centipede graph families. **Jñ-an-abha BbDbB**, p. 149, 2012.

COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In: **Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1971. (STOC '71), p. 151–158. ISBN 9781450374644. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/800157.805047>.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2022.

CYGAN, M.; FOMIN, F. V.; KOWALIK, L.; LOKSHTANOV, D.; MARX, D.; PILIPCZUK, M.; PILIPCZUK, M.; SAURABH, S. **Parameterized algorithms**. [S.l.]: Springer, 2015. v. 5.

DEBSKI, M.; LONC, Z.; RZAŻEWSKI, P. Harmonious and achromatic colorings of fragmentable hypergraphs. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 49, p. 309–314, 2015.

DEBSKI, M.; LONC, Z.; RZAŻEWSKI, P. Harmonious and achromatic colorings of fragmentable hypergraphs. **European Journal of Combinatorics**, Elsevier, v. 66, p. 60–80, 2017.

DEBSKI, M.; LONC, Z.; RZAŻEWSKI, P. Achromatic and harmonious colorings of circulant graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 87, n. 1, p. 18–34, 2018.

DRGAS-BURCHARDT, E.; GIBEK, K. Harmonious colourings of graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 217, p. 175–184, 2017.

EDWARDS, K. The harmonious chromatic number of almost all trees. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge University Press, v. 4, n. 1, p. 31–46, 1995.

EDWARDS, K. The harmonious chromatic number of bounded degree trees. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge University Press, v. 5, n. 1, p. 15–28, 1996.

EDWARDS, K. The harmonious chromatic number and the achromatic number. In: **Surveys in combinatorics, 1997**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. p. 13–48.

EDWARDS, K. A new upper bound for the harmonious chromatic number. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 29, n. 4, p. 257–261, 1998.

EDWARDS, K.; MCDIARMID, C. New upper bounds on harmonious colorings. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 18, n. 3, p. 257–267, 1994.

EDWARDS, K.; MCDIARMID, C. The complexity of harmonious colouring for trees. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 57, n. 2-3, p. 133–144, 1995.

EDWARDS, K. J. Harmonious chromatic number of directed graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 161, n. 3, p. 369–376, 2013.

GAO, W. Three algorithms for graph locally harmonious colouring. **Journal of Difference Equations and Applications**, Taylor & Francis, v. 23, n. 1-2, p. 8–20, 2017.

GAO, W. Remarks on fractional locally harmonious coloring. **Open Journal of Mathematical Science**, v. 2018, n. 1, p. 301–306, 2018.

- GEORGES, J. P. On the harmonious coloring of collections of graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 20, n. 2, p. 241–254, 1995.
- GRÜNBAUM, B. Acyclic colorings of planar graphs. **Israel journal of mathematics**, Springer, v. 14, n. 4, p. 390–408, 1973.
- HEGDE, S.; CASTELINO, L. P. On harmonious colorings of regular digraphs. **Journal of Graph Labeling**, p. 55–63, 2015.
- HEGDE, S.; CASTELINO, L. P.; ARUMUGAM, S. Further results on harmonious colorings of digraphs. **AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics**, Taylor & Francis, v. 8, n. 2, p. 151–159, 2011.
- HEGDE, S.; SHETTY, S. **A Study of Harmonious and Complete Colorings of Digraphs**. Tese (Doutorado) — National Institute of Technology Karnataka, Surathkal, 2013.
- HEGDE, S. M.; CASTELINO, L. P. Harmonious colorings of digraphs. **ARS Combinatoria**, p. 339–352, 2015.
- HIERHOLZER, C.; WIENER, C. **Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren**. 1873. 30-32 p. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01442866>. Acesso em: 06 jul. 2024.
- HOPCROFT, J. E.; KRISHNAMOORTHY, M. S. On the harmonious coloring of graphs. **SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods**, Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 306—311, 1983.
- HUILGOL, M. I.; SRIRAM, V. On the harmonious coloring of certain class of graphs. **Journal of Combinatorics, Information & System Sciences**, Prints Publications Pvt. Ltd., v. 41, n. 1-3, p. 17, 2016.
- IOANNIDOU, S. D. N. K. Harmonious coloring o subclasses of colinear graphs. **WALCOM: Algorithms and Computation**, Springer, p. 136–148, 2010.
- KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In: **Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1984. p. 302–311.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: _____. **Complexity of Computer Computations**. Boston, MA: Springer US, 1972. p. 85–103. ISBN 978-1-4684-2001-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9. Acesso em: 06 jul. 2024.
- KAVITHA, M. V.; GOVINDARAJAN, R. Finite copies of barbell graph and its harmonious chromatic number. **PalArch's Journal of Archaeology of Egypt/Egyptology**, v. 17, n. 9, p. 5176–5181, 2020.
- KOLAY, S.; PANDURANGAN, R.; PANOLAN, F.; RAMAN, V.; TALE, P. Harmonious coloring: Parameterized algorithms and upper bounds. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 772, p. 132–142, 2019.
- KRASIKOV, I.; RODITTY, Y. Bounds for the harmonious chromatic number of a graph. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 18, n. 2, p. 205–209, 1994.

- KUNDRÍK, A. The harmonious chromatic number of a graph. Elsevier Science Publishers B.V., p. 167 – 170, 1992.
- KÖNIG, D. Theorie der endlichen und unendlichen graphen, akademische verlagsgesellschaft. **Repr. Chelsea 1950**, 1936.
- LEE, S.-M.; MITCHEM, J. An upper bound for the harmonious chromatic number of a graph. **Journal of Graph Theory**, John Wiley & Sons, v. 11, n. 4, p. 565–567, 1987.
- LINHARES-SALES, C.; MAIA, A. K.; MARTINS, N.; SAMPAIO, R. M. Restricted coloring problems on graphs with few p 's. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 217, n. 1, p. 385–397, 2014.
- LIU, J.-B.; AROCKIARAJ, M.; NELSON, A. Tight bounds on 1-harmonious coloring of certain graphs. **Symmetry**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 7, p. 917, 2019.
- LU, Z. The harmonious chromatic number of a complete binary and trinary tree. **Discrete Mathematics**, Elsevier Science Publishers B.V., v. 118, p. 165–172, 1990.
- LU, Z. On an upper bound for the harmonious chromatic number of a graph. **Journal of graph theory**, Wiley Online Library, v. 15, n. 4, p. 345–347, 1991.
- MANSURI, A. On harmonious chromatic number of triple star graph. **Journal of Hyperstructures**, v. 5, n. 1, 2016.
- MANSURI, A.; CHANDEL, R. A note on harmonious coloring of n -sunlet graph. **International Journal of Computational Science and Mathematics**, v. 4, p. 267–270, 2012.
- MANSURI, A.; CHANDEL, R.; GUPTA, V. On harmonious coloring of $M(Y_n)$ and $C(Y_n)$. **World Applied Programming**, Citeseer, v. 2, n. 3, p. 150–152, 2012.
- MANSURI, A.; MEHTA, R.; CHANDEL, R. 1-harmonious coloring of triangular snakes. **Malaya Journal of Matematik (MJM)**, University Press, v. 8, n. 4, 2020, p. 2116–2121, 2020.
- MARINESCU-GHEMECI, R.; OBREJA, C.; POPA, A. **Approximate and exact results for the harmonious chromatic number**. 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2106.00278>. Acesso em: 06 jul. 2024.
- MCDIARMID, C.; XINHUA, L. Upper bounds for harmonious coloring. **Journal of Graph Theory**, John Wiley & Sons, v. 15, n. 6, p. 629–636, 1991.
- MILLER, Z.; PRITIKIN, D. The harmonious coloring number of a graph. **Discrete Mathematics**, Elsevier Science Publishers B.V., v. 93, p. 211–228, 1991.
- MITCHEM, J. On the harmonious chromatic number of a graph. **Discrete Mathematics**, v. 74, p. 151–157, 1989.
- MITCHEM, J.; SCHMEICHEL, E. The harmonious chromatic number of deep and wide complete n -ary trees. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 11, p. 491–502, 2002.
- MM, A. A. *et al.* On harmonious coloring of middle graph of $C(C_n)$, $C(K_{1,n})$ and $C(P_n)$. **Note di Matematica**, v. 29, n. 2, p. 201–211, 2010.

- MS, F. T. S.; AMUTHA, A. A study on harmonious coloring of snake derived architecture. **Journal of Engineering Science and Technology**, v. 11, n. 12, p. 1736–1743, 2016.
- MUNTANER-BATLE, F. A.; VENKATACHALAM, M. *et al.* Harmonious coloring of multicopy of complete graphs. **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, v. 9, n. 2, p. 384–395, 2019.
- MUNTANER-BATLE, F. A.; VIVIN, J. V.; VENKATACHALAM, M. Harmonious coloring on corona product of complete graphs. **National Academy Science Letters**, Springer, v. 37, n. 5, p. 461–465, 2014.
- NORDHAUS, E. A.; GADDUM, J. W. On complementary graphs. **The American Mathematical Monthly**, JSTOR, v. 63, n. 3, p. 175–177, 1956.
- OLIVEIRA, H. C. d. **Coloração harmônica de grafos: uma abordagem utilizando programação inteira**. 2019. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia de Software) — Campus de Russas, Universidade Federal do Ceará.
- OLSEN, M.; RUBIO-MONTIEL, C. *et al.* **Zykov sums of digraphs with diachromatic number equal to its harmonious number**. 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2201.12410>. Acesso em: 06 jul. 2024.
- RAJAN, B.; RAJASINGH, I. Harmonious coloring of honeycomb networks. **Journal of Computer and Mathematical Sciences Vol**, v. 2, n. 6, p. 780–898, 2011.
- SELVI, F. T.; AMUTHA, A. A study on harmonious chromatic number of total graph of central graph of generalized Petersen graph. **Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing**, Springer, v. 12, n. 3, p. 3815–3819, 2021.
- SELVI, M. Harmonious coloring of central graphs of certain snake graphs. **Applied Mathematical Sciences**, v. 9, n. 12, p. 569–578, 2015.
- SELVI, M. F. T.; AMUTHA, A. Optimization of harmonious coloring problem in mesh derived architecture. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2021. v. 1770, n. 1, p. 012082.
- TAKAOKA, A.; OKUMA, S.; TAYU, S.; UENO, S. A note on harmonious coloring of caterpillars. **IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems**, The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers, v. 98, n. 12, p. 2199–2206, 2015.
- VENKATACHALAM, M.; KALIRAJ, K. *et al.* Harmonious coloring on double star graph families. **Tamkang Journal of Mathematics**, v. 43, n. 2, p. 153–158, 2012.
- VIJI, R.; NANDAKUMAR, V. Study of harmonious coloring average graph of some snake charts. 2020.
- VIVIN, J. V.; THILAGAVATHI, K. On harmonious colouring of line graph of central graph of paths. **Applied mathematical sciences**, v. 3, n. 5, p. 205–214, 2009.
- VIVIN, V.; KALIRAJ, K. *et al.* On harmonious coloring of total graphs of $c(C_n)$, $c(K_1, n)$ and $c(P_n)$. **Proyecciones (Antofagasta)**, Universidad Católica del Norte, Departamento de Matemáticas, v. 29, n. 1, p. 57–76, 2010.

VIVIN, V. J. Bounds for the harmonious coloring of myceilskiens. **International Journal of Mathematical Combinatorics**, Neutrosophic Sets and Systems, v. 1, p. 102–109, 2014.

WANG, Y.-L.; LIN, T.-W.; WANG, L.-Y. The local harmonious chromatic problem. In: CITESEER. **Proceedings of the 27th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, Taichung, Taiwan**. [S.l.], 2010. v. 30.

WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. [S.l.]: Pearson Education, 2001.

WILSON, B. J. Minimal line distinguish colourings in a graph. **Combinatorics' 90**, Elsevier Science Publishers B.V., p. 549–558, 1992.

WOLSEY, L. A. **Integer programming**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021.

ZHANG, P. Harmonious vertex colorings. In: **A Kaleidoscopic View of Graph Colorings**. [S.l.]: Springer, 2016. p. 53–61.

ZHIKANG, L. Exact value of the harmonious chromatic number of a complete trinary tree. 1998.

ZYKOV, A. A. On some properties of linear complexes. **Matematicheskii sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian . . . , v. 66, n. 2, p. 163–188, 1949.

APÊNDICE A – RELATÓRIO DE ESTÁGIO DE MESTRADO

Relatório feito durante o estágio de mestrado orientado pelo professor Nicolas Trotignon (ENS de Lyon). Neste, estudamos grafos livres de theta e usamos uma estrutura denominada pirulito para obter resultados para grafos com grau mínimo alto.

Structural description of graphs

Ana Beatriz da S. Martins

Abstract

In this internship, we studied and gave a proof of a known result on the structure of theta-free graphs. Furthermore, we explored a structure named lollipop to present a new result on the degeneracy of graphs with high minimum degree. These results were obtained jointly with Nicolas Trotignon and Stéphan Thomassé.

1 Introduction

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. It is usual to denote by $d_G(v)$ the degree of a vertex v of G , by $\Delta(G)$ the maximum degree of G and by $\delta(G)$ the minimum degree of G . The graph G is k -degenerate if $\delta(H) \leq k$, for each subgraph H of G . In this work, we present a result on the degeneracy of graphs with high minimum degree. In order to prove the result, we analyze a *lollipop*, which is a structure consisting of a cycle and a path with exactly one vertex in common.

We also present a known structural result on theta-free graphs. A *theta* is a graph made of three internally vertex disjoint chordless paths, $P_1 = u \dots v$, $P_2 = u \dots v$, $P_3 = u \dots v$ each of length at least two, such that no edges exist between the paths except the three edges incident to u and the three edges incident to v . An *outerplanar* graph is a graph with no K_4 and no $K_{2,3}$ as minor.

The papers used in this internship are [RV13], [BT15], [TI05] and [Dav23]. This internship was advised by Nicolas Trotignon. The results on Section 2.2 were obtained in collaboration with Nicolas Trotignon and Stéphan Thomassé.

2 Results

We divide this section in two subsections: the first present proofs of known results on the structural description of theta-free graphs; the second present new results on graphs with high minimum degree and graphs with a bounded number of chords k for every cycle.

2.1 Known results

In order to get familiar with structural results on graphs with forbidden structures, we started our internship by reading some results on theta-free graphs. To give a structural description of this class, we start with the classical theorem:

Theorem 1 *Let H be a graph such that $\Delta(H) \leq 3$. Then, G contains H as a minor if and only if G contains a subdivision of H as a subgraph.*

As its consequence, it is true that:

Corollary 1 G contains a theta as a subgraph if and only if G contains $K_{2,3}$ as a minor.

Proof. Follows by Theorem 1, just notice that $\Delta(K_{2,3}) = 3$ and that any theta graph can be obtained subdividing $K_{2,3}$. \square

The Corollary 1 and the characterization of outerplanar graphs give us an intuition on how is the structure of a theta-free graph; which lead us to the main theorem of this subsection.

Theorem 2 A graph G has no theta as a subgraph if and only if, for every subgraph H of G , one of the following holds:

- H is isomorphic to K_4 ;
- H is outerplanar;
- H is disconnected;
- H has a vertex-cut.

Proof. \Rightarrow) Let H be a subgraph of G and $V(K_4) = \{a, b, c, d\}$.

If, H contains a copy J of K_4 as a subgraph, then either $H \simeq J$ or $|V(H)| \geq 5$, so let C be a component of $H - J$. If $N_J(C) \leq 1$, then H has a vertex-cut or is disconnected. So, we may assume that $N_J(C) \geq 2$. Assume up to symmetry that $\{a, b\} \subseteq N_J(C)$, and let $u, v \in V(C)$ be neighbors of a, b , respectively. Since C is a component, let P be a (u, v) -path in C , then G has a theta with the paths $auPvb$, acb and adb . So we may assume that G does not contain J as subgraph.

If H contains J as minor, then by Theorem 1 it contains it as subdivision of J . Since $J \not\subseteq H$ at least one edge is subdivided, so let, up to symmetry, P_1 be a subdivision of ab ; then H has a theta as a subgraph with the paths P_1, P_2 and P_3 , such that P_2 is a path obtained by the (subdivision of the) edges ad, db and P_3 is the path obtained by the (subdivision of the) edges ac, cb . So we may assume that H does not contain J as minor. Since J is, by definition, a copy of K_4 , H does not contain K_4 as a minor.

By Corollary 1, H does not contain $K_{2,3}$ as a minor, since G does not contain a theta as a subgraph. Hence, H contains no $K_{2,3}$ and no K_4 as a minor, so it is outerplanar.

\Leftarrow) Suppose, by contradiction, that G has a theta as a subgraph. Let H be a theta subgraph of G . We have that H is not isomorphic to K_4 , because a theta graph needs at least 5 vertices; H is not outerplanar, since H is a subdivision of $K_{2,3}$, H is connected and has no vertex cut (any pair of vertices is contained in a cycle). So H cannot be a subgraph of G , a contradiction. \square

Remark: Let G_1, G_2 be disjoint graphs with no theta as a subgraph. Then is possible to obtain a graph H with no theta as a subgraph just identifying a pair of vertices $u \in G_1$ and $v \in G_2$.

H is an induced subgraph of G if $V(H) \subseteq V(G)$ and $uv \in E(H)$ if, and only if, $uv \in E(G)$. When we look at the problem of induced theta-free graphs, the structural description on this class is unknown. So, during my PhD, I am going to work on the characterization of induced (theta, triangle)-free graphs, which is also unknown but may lead to a characterization of the induced theta-free graphs.

2.2 New results

In this subsection, we present results on graphs G such that every cycle of G has at most k chords and graphs with high minimum degree. To the best of our knowledge, this is the first work presenting the following results.

Lemma 1 *Let k be an integer. If every cycle of a graph G has at most k chords, then G is $(k + 2)$ -degenerate.*

Proof. Let G be a connected graph and suppose that, given $u, v \in V(G)$, the u, v -path P is a longest path of G . We claim that $d_G(u) \leq k + 2$. Indeed, first notice that since P is maximal $N_G(u) \subseteq V(P)$, then if $d_G(u) \geq k + 3$, since $N_G(u) \subseteq P$, it is easy to see that G should have a cycle with at least $k + 1$ chords. The sequence that provides the $(k + 2)$ -degeneracy is obtained by looking at $G - u$ and taking its longest path. \square

Lemma 1 give us a first and simple bound to the degeneracy of graphs G such that every cycle of G has at most k chords. Hence, to help us improve this bound and have a more general version, we present:

Lemma 2 *Let G be a graph with minimum degree at least 2. Every path P of G is contained in some lollipop of G .*

Proof. Let $Q = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ be a path that contains P and such that $V(Q)$ is maximal. Since $d_G(p_1) \geq 2$, p_1 has neighbor $u \neq p_2$. By the maximality of $V(Q)$, there exists $i \in \{3, \dots, k\}$ such that $u = p_i$. So, $p_1 p_2 \dots p_i p_1$ is a cycle and $p_i \dots p_k$ is a path. So, $V(Q)$ induces a lollipop and P is contained in some lollipop of G . \square

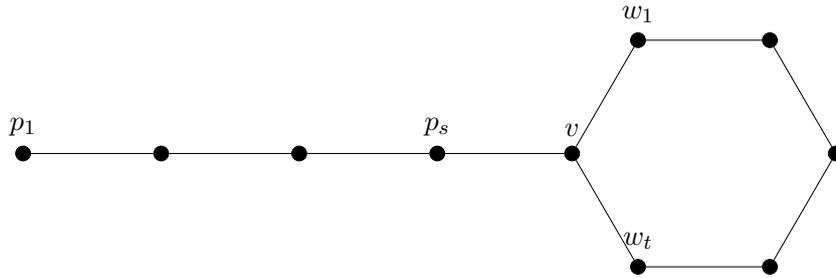
With these, it is possible to present the main result of this section.

Theorem 3 *If $\delta(G) \geq k \geq 2$, then G has a hamiltonian subgraph H that contains at least $k + 1$ vertices of degree at least k (in H).*

Proof. Let L be a lollipop of G such that $V(L)$ is maximal, and among all possible such lollipops, one whose cycle has a maximum number of vertices.

Let v be the vertex common to the cycle and the path of L and let $P = p_1 \dots p_s v$ and $C = w_1 \dots w_t v w_1$, be the path and the cycle of L , respectively. We set $W = w_1 \dots w_t$. See Figure 1.

Figure 1:



Notice that w_t only have neighbors in C . Indeed, let y be a neighbor of w_t . If $y \notin L$, then $p_1 P p_s v w_1 W w_t y$ is a path, so by Lemma 2, it is contained in a lollipop that properly contains L , a contradiction to the maximality of L . And if $y = p_j \in P$, then the cycle $p_j P p_s v w_1 W w_t p_j$ and the path $p_1 P p_j$ form a lollipop with the same vertex set as L and a cycle longer than C , a contradiction to the maximality of C .

Hence, w_t has at least k neighbors in C : v, w_{t-1} and $w_{i_1}, \dots, w_{i_{k-2}}$, where i_1, \dots, i_{k-2} are distinct integers in $\{1, 2, \dots, t - 2\}$.

We claim that for all $j \in \{1, 2, \dots, k - 2\}$, w_{i_j+1} has all its neighbors in C , in particular it has degree at least k in $G[V(C)]$. Indeed, consider y a neighbor of w_{i_j+1} out of C and set

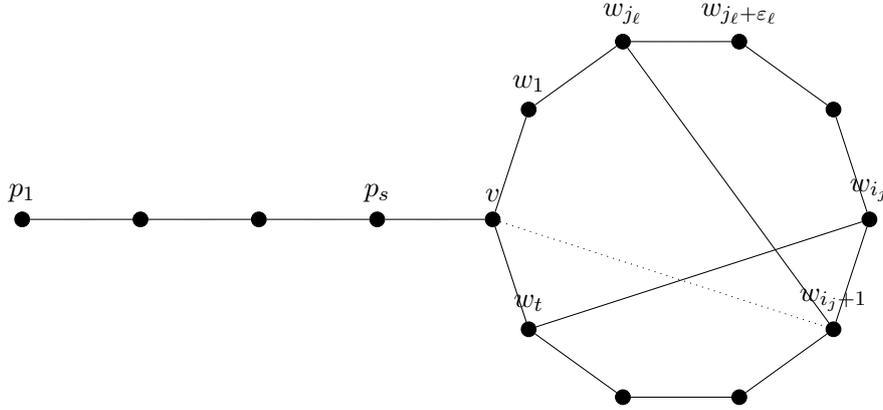
$$R = p_1 P p_s v w_1 W w_{i_j} w_t W w_{i_j+1}.$$

If $y \notin V(L)$ then $p_1 R w_{i_j+1} y$ is a path, so by Lemma 2 it is contained in a lollipop that properly contains L , a contradiction to the maximality of L . Now suppose that $y = p_q \in P$. Then the cycle $p_q R w_{i_j+1} p_q$ and the path $p_1 P p_q$ form a lollipop with the same vertex set as L and cycle longer than C , a contradiction to the maximality of C .

Now, if v is complete to $\{w_{i_1+1}, \dots, w_{i_{k-2}+1}\}$, then $G[V(C)]$ contains $k+1$ vertices of degree at least k , namely: $v, w_1, w_t, w_{i_1+1}, \dots, w_{i_{k-2}+1}$. Hence, we may assume that there exists $j \in \{1, \dots, k-2\}$ such that $v w_{i_j+1} \notin E(G)$. Let $w_{j_1}, \dots, w_{j_{k-2}}$ be neighbors of w_{i_j+1} in $C \setminus \{w_{i_j}, w_{i_j+2}\}$. For $\ell \in \{1, \dots, k-2\}$, set $\varepsilon_\ell = 1$ if $j_\ell \in \{1, \dots, i_j-1\}$ and set $\varepsilon_\ell = -1$ if $j_\ell \in \{i_j+3, \dots, t\}$. We claim that, for all $\ell \in \{1, \dots, k-2\}$, $w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}$ has all its neighbors in $C \setminus \{w_{j_\ell+\varepsilon_\ell+1}, w_{j_\ell+\varepsilon_\ell-1}\}$. Indeed, consider y a neighbor of $w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}$ out of C . If $j_\ell \in \{1, \dots, i_j-1\}$, see Figure 2, then consider the path

$$Q = p_1 P p_s v w_1 W w_{j_\ell} w_{i_j+1} W w_t w_{i_j} W w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}.$$

Figure 2:



If $y \notin L$ then $p_1 Q w_{j_\ell+\varepsilon_\ell} y$ is a path, so by Lemma 2 it is contained in a lollipop that properly contains L , a contradiction to the maximality of L . If $y = p_\alpha$, then the cycle $p_\alpha Q w_{j_\ell+\varepsilon_\ell} p_\alpha$ and the path $p_1 P p_\alpha$ form a lollipop with the same vertex set as L and cycle longer than C , a contradiction to the maximality of C . So we may assume that $j_\ell \in \{i_j+3, \dots, t\}$, see Figure 3.

Now consider the path

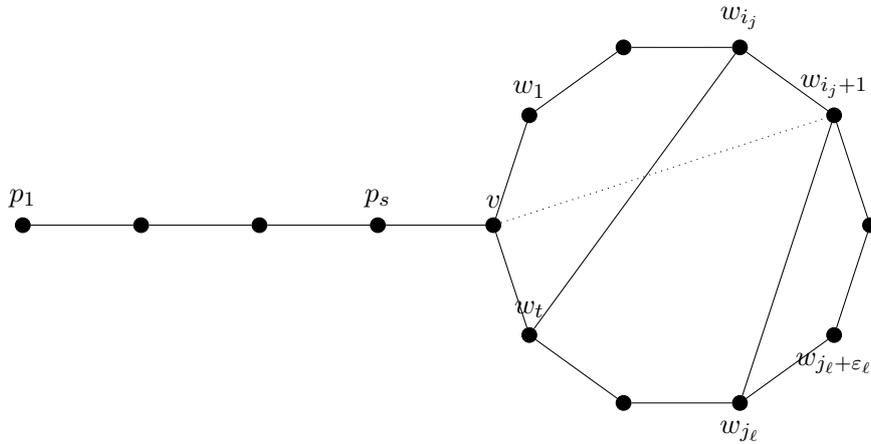
$$Q = p_1 P p_s v w_1 W w_{i_j} w_t W w_{j_\ell} w_{i_j+1} W w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}.$$

If $y \notin L$ then $p_1 Q w_{j_\ell+\varepsilon_\ell} y$ is a path, so by Lemma 2 it is contained in a lollipop that properly contains L , a contradiction to the maximality of L . If $y = p_\alpha$, then the cycle $p_\alpha Q w_{j_\ell+\varepsilon_\ell} p_\alpha$ and the path $p_1 P p_\alpha$ form a lollipop with the same vertex set as L and cycle longer than C , a contradiction to the maximality of C .

Now, C contains $k+1$ vertices of degree k , namely: $w_1, w_t, w_{i_j+1}, w_{j_1+\varepsilon_1}, \dots, w_{j_{k-2}+\varepsilon_{k-2}}$. So, $H = G[V(C)]$ is a Hamiltonian subgraph of G that contains $k+1$ vertices of degree at least k in it. \square

Remark Notice that $w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}$ cannot be w_{i_j} , since the graph has no loops, $w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}$ cannot be w_1 because by construction, if $j_\ell + \varepsilon_\ell = 1$, then w_{i_j} must be neighbor of v , which contradicts the hypothesis of $w_{i_j} v \notin E(G)$. Using an analogous argument, it is possible to see that $w_{j_\ell+\varepsilon_\ell}$ cannot be w_t .

Figure 3:



A consequence of this theorem is: If $\delta(G) \geq k$ then G has a cycle with at least $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$ chords, and using the contrapositive it is true that if every cycle of G has less than $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$ chords then $\delta(G) < k$; which lead us to the result:

Corollary 2 *If every cycle of G has less than k chords, then G is $\left\lfloor \frac{1+\sqrt{9+8k}}{2} \right\rfloor$ -degenerate.*

Proof. Suppose that every cycle of G contains less than $k = \frac{(x+1)(x-2)}{2}$ chords, then using a quadratic equation it is possible to compute that $x = \frac{1+\sqrt{9+8k}}{2}$. So the result follows as a direct consequence of the Theorem 3. \square

Notice that Theorem 3 provides a tight upper bound, reached by the complete graph K_{k+1} ; hence, this is the best possible bound for the statement.

Acknowledgements My stay in Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme (LIP) was funded by French National Research Agency under research grant ANR DIGRAPHS ANR-19-CE48-0013-01. I would like to thank Nicolas Trotignon for this internship opportunity. I would also like to thank him and Stéphan Thomassé for the great ideas for the project, and to Julio C. S. Araújo for the recommendation for this internship.

References

- [BT15] Nicolas Bousquet and Stéphan Thomassé. On the chromatic number of wheel-free graphs with no large bipartite graphs, 2015.
- [Dav23] James Davies. Triangle-free graphs with large chromatic number and no induced wheel. *Journal of Graph Theory*, 103(1):112–118, 2023.
- [RV13] Marko Radovanović and Kristina Vušković. A class of three-colorable triangle-free graphs. *Journal of Graph Theory*, 72(4):430–439, 2013.
- [TI05] Galen E Turner III. A generalization of dirac's theorem: Subdivisions of wheels. *Discrete mathematics*, 297(1-3):202–205, 2005.

ÍNDICE

- k*-core, 39
- Algoritmo, 26
- Arcos
 - Múltiplos, 24
- Arestas
 - Múltiplas, 19
- Branch and bound, 31
- Cabeça, 24
- Caminho, 21, 25
- Cauda, 24
- Ciclo, 21, 25
- Classe
 - NP, 28
 - NPC, 28
 - P, 28
 - de Cor, 23
- Clique, 22
- Cobertura
 - por Vértices, 22
- Codificação, 27
- Coloração
 - k*-harmoniosa, 44
 - Em arestas, 23
 - Harmoniosa, 35
 - Em arestas, 36
 - Em digrafos, 52
 - Local, 45
 - Local fracionada, 46
 - Harmônica, 33
 - Harmônica Minimal, 34
 - Linha distinguível, 33
 - Par-completo, 54
 - Parcialmente harmoniosa, 36
 - Própria, 23
- Componente, 21
- Comprimento de passeio, 21
- Conexo
 - Fortemente, 25
 - Fracamente, 25
- Conjunto
 - Independente, 22
- Cor disponível, 37
- DAG, 25
- Digrafo, 24
 - Simplex, 25
 - Simétrico, 25
 - Trivial, 25
- Distância, 21
- Diâmetro, 21
- Eficiência
 - Assintótica, 26
- Emparelhamento, 22
 - Perfeito, 22
- Entrada, 26
- Excentricidade, 22
- Extremidades, 19
- Filho, 47
- Floresta, 22

- Folha, 23, 47
- Função
 - Assintoticamente maior, 26
 - Objetivo, 30
- Grafo, 19
 - k -degenerado, 20
 - k -partido, 22
 - Bipartido, 22
 - Completo, 22
 - Central, 55
 - Completo, 19
 - Conexo, 21
 - Desconexo, 21
 - Finito, 20
 - Não rotulado, 20
 - Regular, 19
 - Simplex, 19
 - Subjacente, 25
 - Middle, 55
 - Planar, 23
 - Total, 55
 - Trivial, 20
- Grau de um vértice, 19
- Gênero de G , 51
- Homomorfismo, 41
- Identificação, 23
- Instância, 27
- Isomorfismo, 25
- Isomorfismo entre Grafos, 20
- Laço, 19, 24
- Níveis de uma árvore binária, 47
- Número
 - Acromático, 54
 - Cromático, 23
 - Cromático harmonioso em arestas , 36
 - Cromático harmônico, 33
 - Cromático linha distinguível, 33
 - de Colorações, 46
- Ordem, 20
- Pai, 47
- Passeio
 - Fechado, 21
- Poliedro, 32
- Politopo, 32
- Problema
 - NP-Difícil, 29
 - NP-completo, 27, 29
 - De decisão, 28
 - de Otimização, 27
 - Difícil, 27
 - Fácil, 27
 - Programação
 - Inteira, 31
 - Linear, 30
 - Abstrato, 26
 - Concreto, 27
 - de Decisão, 27
- Produto Cartesiano, 50
- Raio, 22
- Raiz, 47
- Redução

- Polinomial, 28
- Relação, 24
 - Simétrica, 24
- Restrições, 30
- Saturado, 22
- Saída, 26
- Subdivisão, 23
- Subgrafo, 20, 25
 - Gerador, 20
 - Induzido, 20
- Tamanho
 - da entrada, 26
- Tempo
 - De execução, 26
- Trilha, 21
- Vizinhança, 19
- Árvore, 23
 - Binária, 47
 - Enraizada, 47
 - Plana enraizada, 47
- Índice
 - Cromático, 23