UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALAN PIO SOUSA

A DESIGUALDADE DE HARNACK E A HÖLDER CONTINUIDADE PARA FUNÇÕES G-HARMÔNICAS

FORTALEZA

2020

ALAN PIO SOUSA

A DESIGUALDADE DE HARNACK E A HÖLDER CONTINUIDADE PARA FUNÇÕES G-HARMÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Jose Ederson Melo Braga.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S696d Sousa, Alan Pio.
A desigualdade de Harnack e a Hölder continuidade para funções g-harmônicas / Alan Pio Sousa. – 2020.
90 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Desigualdade de Harnack. 2. Funções g-harmônicas. 3. Espaços de Orlicz. I. Título.
CDD 510

ALAN PIO SOUSA

A DESIGUALDADE DE HARNACK E A HÖLDER CONTINUIDADE PARA FUNÇÕES G-HARMÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 20/02/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Eloi Misquita Gomes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Cristiane, pela motivação constante ao longo da minha jornada acadêmica.

À minha família mais próxima, pelo apoio incondicional e pela paciência durante minhas ausências.

Ao CNPq, pelo generoso suporte financeiro através da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. José Ederson Melo Braga, pela orientação excepcional.

Aos ilustres membros da banca examinadora, Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira e Prof. Dr. Diego Eloi Misquita Gomes, pelo tempo dedicado, pelas colaborações valiosas e pelas sugestões pertinentes.

Aos colegas da turma de mestrado - Carlos André, Walison, Valderlanio, Allen, Arthur, Bianca, Selene, Camila, Pedro, Caio, Gabriel, Rafael, Erivamberto e Patricia - expresso minha profunda gratidão pelas sugestões enriquecedoras e pelo companheirismo que tornaram momentos difíceis mais leves e agradáveis.

“A própria luta para chegar ao cume basta para encher o coração de um homem. É preciso imaginar Sísifo feliz"(Camus, 2019, p. 141).

RESUMO

Neste trabalho dissertativo, investigamos a desiguadade de Harnack para funções G-harmônicas, isto é, funções que são soluções fracas da seguinte equação diferencial parcial

$$\Delta_g u := div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0.$$

Aqui, a função $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é a derivada de uma N-função apropriada. O operador Δ_g pode ser visto como uma generalização natural do operador laplaciano e do seu análogo não-linear chamado p-laplaciano, a saber, $\Delta_p u = div\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Em particular, $\Delta_g = \Delta_p$ quando $g(t) = t^{p-1}$. Assumimos que a função g satisfaz condições de regularidade introduzidas em LIEBERMAN (1991) e usamos o método de iteração de J.Moser (*Moser iteration technique*) para concluir que tais funções (soluções fracas) são localmente α-Hölder contínuas.

Palavras-chave: desigualdade de Harnack; funções G-harmônicas; espaços de Orlicz.

ABSTRACT

In this dissertation, we investigate Harnack's inequality for G-harmonic functions, that is functions that are weak solutions of the following partial differential equation

$$\Delta_g u := div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0.$$

Here, the function $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is the derivative of a suitable N-function. The Δ_g operator can be seen as a natural generalization of the Laplacian operator and its nonlinear analog called p-Laplacian namely, $\Delta_p u = div\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. In particular, $\Delta_g = \Delta_p$ when $g(t) = t^{p-1}$. We assume that the g function satisfies regularity conditions introduced in LIEBERMAN (1991) and we use the Moser iteration technique to conclude that such functions (weak solutions) are locally α-Hölder continuous.

Keywords: Harnack inequality; G-harmonic functions; Orlicz Spaces.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dentre os interesses no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDP), um dos mais importantes diz respeito à investigação da regularidade de soluções de uma EDP. Modestamente afirmo que esse trabalho tem esse objetivo. Aqui lidamos com o operador

$$\Delta_g u := div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \tag{1}$$

e buscamos como regularidade alvo a α-Hölder continuidade de soluções fracas. Nossa estratégia é obter tal regularidade a partir da desigualdade de Harnack para soluções fracas de $\Delta_g u = 0$. A saber, mostraremos que se $u : B_R \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca não-negativa de $\Delta_g u = 0$, então

$$\sup_{B_{R/2}} u \leq C \inf_{B_{R/2}} u,$$

onde a constante $C \geq 1$ depende essencialmente de g. O conceito de solução fraca será apresentado no Capítulo 4. O caminho que iremos percorrer para provar a desigualdade de Harnack será baseado no método de iteração de J. Moser. Primeiro, provamos o Princípio do Máximo Local para subsoluções de (1) e depois, provamos a Desigualdade de Harnack Fraca para supersoluções de (1). A combinação destes dois resultados rendem a desiguadade de Harnack.

Claramente para chegarmos onde desejamos temos um longo percurso a seguir. Nas próximas linhas pontuamos brevemente o planejamento que seguimos em cada Capítulo deste trabalho para alcançarmos nosso objetivo.

No Capítulo 2 estabelecemos os principais resultados de Análise Real que iremos precisar ao longo do texto. Neste capítulo lidamos com teoremas de Análise bastante interessantes e sofisticados como o Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund e o Teorema de John-Niremberg para funções BMO.

No Capítulo 3 definimos o conceito de N-função e estabelecemos uma série de propriedades sobre tais funções. Ainda neste capítulo falamos sobre os espaços de Orlicz e de Orlicz-Sobolev, este últmo sendo uma generalização dos tão famosos espaços de Sobolev. Tratamos de assuntos como completude, separabilidade e reflexividade, além de alguns resultados sobre a densidade do conjunto C^∞ nesses espaços. Para os resultados deste capítulo seguimos as seguintes referências KRASNOSEL'S; RUTICKII (1961), ADAMS (2003), DONALDSON (1971) e RIBEIRO (2006).

O Capítulo 4 deste trabalho destina-se a existência de soluções fracas de (1). Consideramos a integral de Dirichlet

$$I_G(u) = \int_\Omega G(|\nabla u|)\, dx,$$

onde $G' = g$ e g satisfaz as condições de Lieberman, a saber,

$$g \in C^1(0,\infty) \cap C^0[0,\infty) \quad \text{e} \quad 0 < \delta \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \ t > 0.$$

Veremos que mínimos do funcional acima em um determinado espaço de funções são soluções fracas de $\Delta_g u = 0$. O espaço natural no qual estão tais funções é o chamado espaço de Orlicz-Sobolev, espaço este que será estudado no capítulo anterior. Aqui seguimos de perto as ideias desenvolvidas em MARTINEZ (2008).

No quinto e último capítulo desta dissertação investigamos a α-Hölder continuidade local de soluções fracas e limitadas do operador $\Delta_g u = 0$. Como mencionamos previamente, nas estimativas obtidas, fazemos uso do chamado método da iteração de J.Moser. Mostramos assim que tais funções satisfazem a desigualdade de Harnack. Usando a desigualdade de Harnack para $M - u$ e $u - m$, onde $M = \sup_{B_R} u$ e $m = \inf_{B_R} u$, chegamos a conclusão de que u é localmente α-Hölder contínua, para algum $\alpha \in (0,1)$ universal.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste Capítulo estabeleceremos todos os resultados que entendemos como pré-requisito para os capítulos seguintes. Começamos com uma série de teoremas clássicos da Análise, os quais, apresentaremos apenas os seus enunciados, indicando em seguida uma referência adequada para a prova. Depois disto, demostramos o Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund. Tal ferramenta será extremamente útil para provarmos o Teorema de John–Niremberg para funções de oscilação média limitada(BMO).

2.1 Resultados Clássicos da Análise Real

Começamos esta seção relembrando os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Estes espaços são constituidos por todas as funções mensuráveis que são integráveis para alguma potência $p \in [1, \infty]$ sobre um dado conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Esses espaços são de fundamental importância em varias linhas de pesquisa em análise, aqui vamos enunciar apenas os resultados sobre esses espaços que são utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 2.1. *Seja Ω um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^n$ e seja $p \in [1, \infty]$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Lebesgue (ou classe de equivalência) de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que*

$$||f||_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Antes de seguir mostrando resultados importantes que serão usados sobre os espaços de Lebesgue L^p relembramos alguns resultados sobre convergência que são válidos em medidas gerais, suas demonstrações podem ser encontrados em (SHAKARCHI, 2009, capítulo 2).

Lema 2.1 (Fatou). *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções não-negativas, mensuráveis em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, dx.$$

Teorema 2.1 (Convergência Monótonona). *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções não-negativas, mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ tais que $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ então*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dx.$$

Teorema 2.2 (Convergência Dominada). *Suponha que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p quando $n \to \infty$. Se $|f_n(x)| \leq g(x)$, onde*

$g \in L^1$ então

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, dx = 0.$$

Teorema 2.3 (Diferenciação de Lebesgue)**.** *Seja $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então para quase todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)| \, dx = 0,$$

e em particular

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} f(x) \, dx = f(x_0).$$

Demonstração. Vide (SHAKARCHI, 2009, capítulo 3) □

Como um benefício adicional, esse limite de médias infinitesimais sobre bolas pode ser empregado para escolher um representante canônico nos espaços de Lebesgue.

Teorema 2.4 (Fubinni)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) \, dz.$$

Demonstração. Consultar (SHAKARCHI, 2009, capítulo 2) □

Em seguida definimos os espaços de Sobolev $W^{k,p}$ para $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$.

Definição 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $p \in [1, \infty]$ e seja β um multi-índice. Dizemos que uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tem uma derivada fraca(ou distribucional) parcial em $L^p_{loc}(\Omega)$ se existe uma função g_β(denotada por $D^\beta f$) em $L^p_{loc}(\Omega)$ tal que para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos*

$$\int_\Omega f \cdot D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega g_\beta \cdot \phi \, dx.$$

Definição 2.3. *Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$. Denotamos por $W^{k,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funçõs $f \in L^p(\Omega)$ tais que as derivadas $D^\beta f$ existem em $L^p(\Omega)$ para todos multi-índices $\beta \in \mathbb{N}^n$ com $0 \leq |\beta| \leq k$. Munimos esse espaço com a norma*

$$||f||_{W^{k,p}} := \begin{cases} \left(\sum_{0\leq|\beta|\leq k} ||D^\beta f||_p^p \right)^{1/p} & se\ 1 \leq p < \infty \\ \sum_{0\leq|\beta|\leq k} ||D^\beta f||_\infty & se\ p = \infty. \end{cases}$$

As demonstrações dos resultados à seguir sobre os espaços de Sobolev podem ser encontradas em (EVANS, 2022, capítulo 5).

Definição 2.4. *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$. Dizemos X está imerso com-*

pactamente em Y, escrevemos

$$X \subset\subset Y$$

quando para todo $u \in X$ existe uma constante $C > 0$ tais que

1. $||u||_Y \leq C||u||_X$
2. *toda sequência limitada em X é pré-compacta em Y.*

Mais precisamente a condição 2 significa que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X limitada, então alguma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em Y para algum limite u;

$$\lim_{k\to\infty} ||u_{n_k} - u||_Y = 0.$$

Teorema 2.5 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** *Seja U um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ de modo que ∂U é C^1. Suponha que $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

para cada $q \in [1, \frac{np}{n-p})$.

Notação: $(u)_{x,r} = ⨍_{B(x,r)} u\, dy$.

Teorema 2.6 (Desigualdade de Poincaré para bolas)**.** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante $C > 0$ dependendo somente de n e p de modo que*

$$||u - (u)_{x,r}||_{L^p(B(x,r))} \leq Cr||Du||_{L^p(B(x,r))}$$

para cada bola $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in W^{1,p}(B(x,r))$.

Apresentaremos a definição de standard mollifier e algumas de suas propriedades que vão nos ajudar no decorrer deste trabalho.

Standard Mollifier: Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde c é positivo e escolhido de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1.$$

E para todo $\epsilon > 0$, defina $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, a função ϕ_ϵ é chamada de standard mollifier.

Observação: Note que $\phi_\epsilon \geq 0$, $supp(\phi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\frac{x}{\epsilon})dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\epsilon^n dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$$

para todo $\epsilon > 0$. Além disso, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto limitado tal que $\partial\Omega \neq \emptyset$, nós escreveremos

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\},\ \epsilon > 0.$$

Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, nós obtemos o standard convolution mollification $f_\epsilon : \Omega_\epsilon \longrightarrow [-\infty, \infty]$, que é dado por

$$f_\epsilon(x) = (f * \phi_\epsilon)(x) = \int_\Omega f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy.$$

Observe que para cada $x \in \Omega_\epsilon$,

$$f_\epsilon(x) = \int_\Omega f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = \int_{B(x,\epsilon)} f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy.$$

Pela mudança de variável $z = x - y$ teremos

$$\int_\Omega f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = \int_\Omega f(x-z)\phi_\epsilon(z)dz.$$

Propriedades dos Mollifiers

1. $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.
2. $f_\epsilon \longrightarrow f$ q.t.p quando $\epsilon \longrightarrow 0$.
3. Se $f \in C(\Omega)$, então $f_\epsilon \longrightarrow f$ uniformemente para todo $V \Subset \Omega$, (A notação $V \Subset \Omega$ significa que V é aberto, $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset \Omega$). Este resultado também continua válido para qualquer subconjunto compacto de Ω.
4. Se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, ou seja, se $f \in L^p(K)$ para todo K compacto contido em Ω, com $1 \leq p < \infty$, então $f_\epsilon \longrightarrow f$ em $L^p(V)$ para todo $V \Subset \Omega$.

Demonstração. Consultar EVANS (2022). □

Agora vamos demonstrar um resultado técnico que será usado para construir funções testes apropriadas no capítulo 5.

Lema 2.2. *Sejam $B_r \subset\subset B_R \subset \Omega$. Existe uma função $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ tal que*

1. $0 \leq \eta \leq 1$,
2. $\eta(x) = 1$ *em* B_r,
3. $||\nabla\eta||_{L^\infty} \leq \frac{2C(n)}{R-r}$.

Demonstração. Considere $\eta = \phi_\epsilon * \chi(\cdot, B(0, ar))$ onde ϕ_ϵ é um molifier(ver preliminares).

Vamos escolher a e ϵ apropriados. Sendo

$$\eta(x) = \int_{B(0,\epsilon)} \phi_\epsilon(y)\chi(x-y, B(0,ar))\,dy$$

temos

$$|x| < ar - \epsilon \Rightarrow |x-y| \leq |x| + |y| < ar - \epsilon + \epsilon = ar$$
$$|x| \geq ar + \epsilon \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \geq ar + \epsilon - \epsilon = ar$$

logo, $\eta(x) = \chi(x, B(0,ar)) = 1$ em $B(0, ar-\epsilon)$ e $\eta(x) = 0,\ \forall |x| \geq ar+\epsilon$. Assim queremos a e ϵ que satisfaçam

$$\begin{cases} ar - \epsilon = r \\ ar + \epsilon = R. \end{cases}$$

Somando as duas equações temos

$$2ar = R + r \Rightarrow a = \frac{R+r}{2r},$$

substituindo isso na segunda equação obtemos

$$\left(\frac{R+r}{2r}\right) r + \epsilon = R \Rightarrow \epsilon = R - \frac{R+r}{2} = \frac{R-r}{2}.$$

Portanto

$$\eta(x) = (\phi_{R-r/2} * \chi(\cdot, B(0,(R+r)/2))(x),$$

e

$$D_i\eta = D_i(\phi_{(R-r)/2}) * \chi(\cdot, B(0,(R+r)/2)) = \frac{2}{R-r}(D_i\phi)_{(R-r)/2} * \chi(\cdot, B(0,(R+r)/2))$$

$$\Rightarrow |D_i\eta| \leq \frac{2}{R-r}||(D_i\phi)_{(R-r)/2}||_{L^1}.$$

□

Teorema 2.7 (The layer cake representation)**.** *Para todo $p > 0$ temos*

$$\int_\Omega |f|^p\,dx = p\int_0^\infty s^{p-1}|A_s|\,ds$$

.

onde $A_s = \{x \in \Omega; |f(x)| > s\}$.

Demonstração. Se χ_{A_t} denota a função caracteristica do conjunto A_t então pelo teorema de Fubinni temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |f|^p\,dx &= \int_\Omega \left(\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}\,dt \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty pt^{p-1}\chi_{A_t}\,dt \right) dx \\
&= p\int_0^\infty t^{p-1} \left(\int_\Omega |\chi_{A_t}|\,dx \right) dt \\
&= p\int_o^\infty t^{p-1}|A_t|\,dt.
\end{aligned}
$$

□

2.2 O Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund

Teorema 2.8 (Calderón–Zygmund)**.** *Seja Q um cubo em $\mathbb{R}^n$ e f uma função não-negativa em $L^1(Q)$. Fixe um numero real $t > 0$ de modo que*

$$
⨍_Q f(x)\,dx \le t.
$$

Então existe uma família enumerável $\{Q_i\}_{i\in I}$ de cubos na decomposição diática de Q tais que

i) $t < ⨍_Q f(x)\,dx \le 2^n t$;

ii) $f(x) \le t$ *quase todo* $x \in Q \setminus \cup_{i\in I} Q_i$.

Demonstração. Bissectando os lados do cubo Q nos o subdividimo em 2^n subcubos congruentes. Para esses cubos Q^1 temos duas possibilidades;

$$
⨍_{Q^1} f(x)\,dx \le t, \tag{2}
$$

$$
⨍_{Q^1} f(x)\,dx > t, \tag{3}
$$

Se (2) acontece então como $|Q^1| = 2^n|Q|$,

$$
t < ⨍_{Q^1} f\,dx \le \frac{1}{|Q^1|}\int_Q f\,dx = \frac{1}{2^n|Q|}\int_Q f\,dx \le 2^n ⨍_Q f\,dx
$$

Tomamos os cubos Q^1 que satisfazem (2) para fazer parte da família que satisfaz **i)**. Do contrario se (1) acontece nós o subdividimos como foi feito no inicio da demonstração até aparecerem subcubos que satisfaçam (2), repetindo infinitamente (ou finitamente se em algum passo não existe tal cubo) esse processo obtemos um família enumerável de cubos $\{Q_i\}_{i\in I}$ que satisfazem **i)**.

Se $x \in Q \setminus \cup_{i\in I} Q_i$ e não pertence a fronteira de algum Q_i, então esse ponto pertence a infinitos cubos na família $\{Q_i\}$ na sucessiva subdivisão com $|Q_i| \to 0$ Portanto o teorema da diferenciaciação de Lebesgue implica que

$$f(x) = \lim_{|Q_i|\to 0} \fint_{Q_i} f(y)\, dy \leq t \quad \text{quase todo}\, x.$$

Isso prova **ii)**. □

2.3 Funções de Oscilação Média Limitada e o Teorema de John-Niremberg

Nesta seção temos como objetivo demonstrar um teorema devido a F.John e L.Niremberg os quais foram os primeiros à estudar o conceito de funções de oscilação média limitada. Este conceito tem-se mostrado relevante em diferente ramos da análise e foi usado na obtenção da desigualdade de Harnack que veremos nas proximas seções por J.Moser.

Definição 2.5. *Seja Q_0 um cubo n-dimensional em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $u \in L^1(Q_0)$ pertence ao espaço das funções que tem oscilação média limitada $BMO(Q_0)$ se*

$$|u|_* := sup \fint_Q |u(x) - u_Q|\, dx < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos $Q \subset Q_0$ cujo os lados são paralelos aos lados do cubo Q_0 e $u_Q := \fint_Q u\, dx$.

Teorema 2.9 (John-Niremberg). *Existem constantes positivas c_1, c_2 dependendo somente da dimensão n, tais que*

$$|\{x \in Q\,; |u(x) - u_Q| > t\}| \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{t}{|u|_*}\right) |Q|,$$

para todos os cubos $Q \subset Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ com lados paralelos aos de Q_0, toda função $u \in BMO(Q_0)$ e todo $t > 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $Q = Q_0$ pois $u \in BMO(Q_0)$ implica que $u \in BMO(Q)$ e o supremo na Definição2.1 apenas decresce se considerarmos o cubo Q em vez de Q_0, além disso vamos supor que $|u|_* \neq 0$ pois $|u|_* = 0$ se e somente se a função u é constante e o teorema é evidentemente verdadeiro no caso das funções constantes. Observe que será então suficiente demonstrarmos o teorema para o caso em que $|u|_* = 1$, pois definindo $v(x) := \frac{u(x)}{|u|_*}$ temos que $|v|_* = 1$ pois

$$\frac{1}{|u|_*} \sup_{Q\subset Q_0} \fint_Q |u - u_Q|\, dx = 1$$

então,

$$1 = \sup_{Q\subset Q_0} \fint_Q |\frac{u}{|u|_*} - \left(\frac{u}{|u|_*}\right)_Q| \, dx$$
$$= \sup_{Q\subset Q_0} \fint_Q |v - v_Q| \, dx = |v|_*$$

Daí,

$$|\{x \in Q_0; |v - v_Q| > t\}| \leq c_1 \exp\left(-c_2 t\right) |Q_0|,$$

logo,

$$|\{x \in Q_0; |u - u_Q| > t|u|_*\}| \leq c_1 \exp\left(-c_2 t\right) |Q_0|,$$

fazendo $s = t|u|_*$

$$|\{x \in Q_0; |u - u_Q| > s\}| \leq c_1 \exp\left(-c_2 \frac{s}{|u|_*}\right) |Q_0.$$

Fixe $\alpha > 1 = |u|_* \geq \fint_{Q_0} |u - u_{Q_0}| \, dx$ usando o teorema de Calderon-Zygmund com $f = |u - u_{Q_0}|$ e parametro α, encontramos uma família enumerável $\{Q_k^1\}_{k\in N_1}$ de cubos tais que,

$$\alpha < \fint_{Q_k^1} |u - u_Q| \, dx \leq 2^n \alpha, \tag{4}$$

$$|u(x) - u_Q| \leq \alpha \ \text{ quase todo } \ x \in Q_0 \setminus \cup_{k\in N_1} Q_k^1, \tag{5}$$

Então por (3) temos que

$$|u_{Q_k^1} - u_{Q_0}| = |\fint_{Q_k^1} (u - u_{Q_0}) \ dx| \leq 2^n \alpha \tag{6}$$

$$\sum_{k\in N_1} |Q_k^1| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k\in N_1} \int_{Q_k^1} |u - u_{Q_0}| \, dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_{Q_0} |u - u_{Q_0}| \, dx \leq \frac{1}{\alpha} |Q_0|. \tag{7}$$

Como $|u|_* = 1$, $\forall k \in N_1$ temos $\fint_{Q_k^1} |u - u_{Q_k^1}| \, dx \leq 1 < \alpha$ de modo que podemos aplicar novamente o teorema de Calderón-Zygmund com $Q_k^1, f = |u - u_{Q_k^1}|$ e α para encontramos uma família enumerável de cubos $\{Q_{k,j}^1\}_{j\in J(k)}$ contidos no cubo Q_k^1 tais que

$$\alpha < \fint_{Q_{k,j}^1} |u(x) - u_{Q_k^1}| \, dx \leq 2^n \alpha, \tag{8}$$

para todo $j \in J(k)$ e

$$|u(x) - u_{Q_k^1}| \leq \alpha \text{ quase todo } x \in Q_k^1 \setminus \cup_{j\in J(k)} Q_{k,j}^1 \tag{9}$$

Fazendo uma renomeção de indices podemos escrever a família enumerável $\{Q^1_{k,j}\}_{k\in N_1, j\in J(k)}$ como sendo $\{Q^2_k\}_{k\in N_2}$. Afirmamos que,

$$|u(x) - u_{Q_0}| \leq 2 \cdot 2^n \alpha \;\text{ quase todo}\, x \in Q_0 \setminus \cup_{k\in N_2} Q^2_k \tag{10}$$

Com efeito temos,

$$Q_0 \setminus \cup_{k\in N_2} Q^2_k = \left(Q_0 \setminus \cup_{k\in N_1} Q^1_k\right) \cup \left(\cup_{k\in N_1} Q^1_k \setminus \cup_{k\in N_2} Q^2_k\right)$$

Em quase todo $x \in Q_0 \setminus \cup_{k\in N_1} Q^1_k$ temos por (4), $|u(x) - u_{Q_0}| \leq \alpha < 2 \cdot 2^n \alpha$ enquanto que por (3) e (5) temos para quase todo $\cup_{k\in N_1} Q^1_k \setminus \cup_{k\in N_2} Q^2_k$

$$|u(x) - u_{Q_0}| \leq |u(x) - u_{Q^1_k}| + |u_{Q^1_k} - u_{Q_0}| \leq \alpha + 2^n\alpha \leq 2 \cdot 2^n \alpha \tag{11}$$

onde $k \in N_1$ é o único indice tal que $x \in Q^1_k$ o que prova a afirmação feita em (9). Argumentando de forma análoga ao que foi feito para obtermos (6) temos

$$\sum_{j\in J(k)} |Q^1_{k,j}| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{Q^1_k} |u - u_{Q^1_k}|\, dx \leq \frac{1}{\alpha} |Q^1_k|$$

Então

$$\sum_{k\in N_2} |Q^2_k| = \sum_{k\in N_1} \sum_{j\in J(k)} |Q^1_{k,j}| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k\in N_1} |Q^1_k| \leq \frac{1}{\alpha^2} |Q_0|.$$

Repetindo esse procedimento indutivamente $\forall k \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma família enumeravel de cubos $\{Q^l_k\}_{k\in N_l}$ tais que

$$|u(x) - u_{Q_0}| \leq l2^n \;\text{ quase todo }\, x \in Q_0 \setminus \cup_{k\in N_l} Q^l_k \tag{12}$$

$$\sum_{k\in N_l} |Q^l_k| \leq \frac{1}{\alpha^l} |Q_0| \tag{13}$$

De fato (11) segue procedendo como anteriormente. Para obter (12) consideremos,

$$Q_0 \setminus \cup_{k\in N_l} Q^l_k = \left(Q_0 \setminus \cup_{k\in N_1} Q^1_k\right) \cup \cdots \cup \left(\cup_{k\in N_{l-1}} Q^{l-1}_k \setminus \cup_{k\in N_l} Q^l_k\right).$$

Então para $x \in \cup_{k\in N_{l-1}} Q_k^{l-1} \setminus \cup_{k\in N_l} Q_k^l$ temos,

$$\begin{aligned}|u(x)-u_{Q_0}| &\leq |u(x)-u_{Q_{k,l-1}^{l-1}}| + |u_{Q_{k,l-1}^{l-1}} - u_{Q_{k,l-2}^{l-2}}| + ... + |u_{Q_{k,1}^1} - u_{Q_0}| \\ &\leq \alpha \qquad\qquad\qquad + 2^n\alpha + ... + 2^n\alpha \\ &\leq l2^n\alpha.\end{aligned}$$

Agora vamos demosntrar a desigualdade da tese. Tome $t > 0$ e dfina $c_1 := \alpha, c_2 := \frac{ln\alpha}{2^n\alpha}$, Daí se

$$t < 2^n\alpha \Rightarrow 0 \leq c_2\left(2^n\alpha - t\right) \Rightarrow 1 \leq e^{c_2(2^n\alpha - t)} = c_1e^{-c_2t}$$

e então

$$|\{x \in Q_0; |u(x)-u_{Q_0}| > t\}| \leq |Q_0| \leq c_1e^{-c_2t}|Q_0|.$$

Se $t \geq 2^n\alpha$ então escolhemos $l \in \mathbb{N}$ de modo que $l2^n\alpha \leq t \leq (l+1)2^n\alpha$, e então finalmente

$$\begin{aligned}|\{x \in Q_0; |u(x)-u_{Q_0}| > t\}| &\leq |\{x \in Q_0; |u(x)-u_{Q_0}| > l2^n\alpha\}| \\ &\leq \sum_{k\in N_l} |Q_k^l| \leq \frac{1}{\alpha^l}|Q_0| \\ &\leq c_1e^{-c_2t}|Q_0|\end{aligned}$$

pois,

$$t < (l+1)\alpha 2^n \Rightarrow \frac{t}{\alpha 2^n} \leq l+1 \Rightarrow \frac{t}{\alpha 2^n} - 1 \leq l \Rightarrow \alpha^{\frac{t}{\alpha 2^n}-1} \leq \alpha^l$$

$$\Rightarrow \alpha^{-l} \leq \alpha^{1-\frac{t}{\alpha 2^n}} = e^{\left(1-\frac{t}{\alpha 2^n}\right)ln\alpha} = \alpha e^{\frac{-t}{\alpha 2^n}ln\alpha}$$

e onde usamos que $|u(x)-u_{Q_0}| \leq l2^n\alpha$ quase todo $x \in Q_0 \setminus \cup_{k\in N_l} Q_k^l$.

$\square$

Teorema 2.10. *São equivalentes;*

1. $u \in BMO(Q_0)$.
2. *Existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que para todo $Q \subset Q_0$ e $t > 0$*

$$|\{x \in Q\,; |u(x)-u_Q| > t\}| \leq c_1e^{-c_2t}|Q|.$$

3. *Existem constantes c_3 e c_4 tais que para todo $Q \subset Q_0$ e $t > 0$*

$$⨍_Q \left(e^{c_4|u-u_Q|} - 1\right)\, dx \leq c_3.$$

4. Existem constantes c_5 e c_6 tais que para todo $Q \subset Q_0$ e $t > 0$

$$\left(\fint_Q e^{c_6 u}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-c_6 u}\, dx \right) \leq c_5.$$

onde c_1, c_3, c_5 dependem somente de n e c_2, c_4, c_6 são da forma $\frac{c(n)}{|u|_*}$.

Demonstração.

$(1 \Rightarrow 2)$ é o teorema de John-Niremberg com a constante c_2 sendo tomada como $\frac{c_2}{|u|_*}$

$(2 \Rightarrow 3)$. Tomando $c_4 = \frac{c_2}{2}$ e usando o Teorema2.1 com a mudança de variaveis $e^{c_4 t} = s$

$$\begin{aligned}
\int_Q |e^{c_4|u-u_Q|} - 1|\, dx &= \int_0^\infty |\{x \in Q; e^{c_4|u-u_Q|} > s+1\}| ds = \int_1^\infty |\{x \in Q; e^{c_4|u-u_Q|} > s\}| ds \\
&= \int_1^\infty c_4 e^{c_4 t} |\{x \in Q; |u(x) - u_Q| > t\}|\, dt \\
&\leq c_1 |Q| \int_0^\infty c_4 e^{c_4 t} e^{-c_4 t}\, dt \\
&= c_1 |Q| \int_0^\infty \frac{c_2}{2} e^{\frac{-c_2 t}{2}}\, dt = c_1 |Q|.
\end{aligned}$$

$(3 \Rightarrow 4)$Temos,

$$\begin{aligned}
\left(\fint_Q e^{c_6 u}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-c_6 u}\, dx \right) &= \frac{e^{c_6 u_Q}}{e^{c_6 u_Q}} \left(\fint_Q e^{c_6 u}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-c_6 u}\, dx \right) \\
&= \left(\fint_Q e^{c_6 (u - u_Q)}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-c_6 (u - u_Q)}\, dx \right) \\
&\leq \left(\fint_Q e^{c_6 |u - u_Q|} - 1 + 1\, dx \right)^2 \\
&\leq (c_3 + 1)^2 = c_5.
\end{aligned}$$

$(4 \Rightarrow 1)$ Fazendo $w = \ln e^{c_6 u}$ temos,

$$c_5 \geq \left(\fint_Q e^{c_6 u}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-c_6 u}\, dx \right) = \left(\fint_Q e^{w}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-w}\, dx \right) \tag{14}$$

$$= \left(\fint_Q e^{(w - w_Q)}\, dx \right) \left(\fint_Q e^{-(w - w_Q)}\, dx \right) \tag{15}$$

Por outro lado temos pela desigualdade de Jensen

$$\fint_Q e^{(w-w_Q)}\,dx \geq \exp \fint_Q (w-w_Q)\,dx = 1,$$

$$\fint_Q e^{-(w-w_Q)}\,dx \geq \exp \fint_Q -(w-w_Q)\,dx = 1.$$

Portanto concluimos que ambas integrais em (14) são menores ou iguais que c_5. Finalmente como,

$$\fint_Q \exp|w-w_Q|\,dx \leq \fint_Q \exp(w-w_Q)\,dx + \fint_Q \exp-(w-w_Q)\,dx \leq 2c_5,$$

e usando a desigualdade de Jensen mais uma vez obtemos,

$$\exp \fint_Q |w-w_Q|\,dx \leq \fint_Q \exp|w-w_Q|\,dx \leq 2c_5.$$

Tomando o supremo sobre todos os cubos $Q \subset Q_0$ concluimos que $u \in BMO(Q_0)$.

$\square$

3 ESPAÇOS DE ORLICZ E ORLICZ-SOBOLEV

Nesta seção apresentaremos alguns resultados clássicos envolvendo os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev.

3.1 N-funções

Definição 3.1. *Dizemos que $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma N-função(ou função de Young) se*

$$G(t) = \int_0^{|t|} g(s)\, ds \ \ , t \in \mathbb{R}$$

onde a função $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tem as seguintes propriedades:
(i) $g(0) = 0$.
(ii) $g(s) > s$ *para* $s > 0$.
(iii) g *é contínua à direita para qualquer* $s \geq 0$, *isto é, se* $s \geq 0$ *então* $\lim_{t\to s^+} g(t) = g(s)$.
(iv) g *é não decrescente.*
(v) $\lim_{s\to\infty} g(s) = \infty$.

Nesse caso diremos que G é a N-função representada por g. Segue da monotonicidade de g e continuidade de G que a função G é convexa.

A proposição a seguir nos permite encontrar exemplos de N-funções de forma mais fácil, a sua demonstração encontra-se em KRASNOSEL'S; RUTICKII (1961).

Proposição 3.1. *Uma função convexa e contínua $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é N-função se, somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*
(a) G *é par.*
(b) G *é estritamente crescente em* $[0, +\infty)$.
(c) $\lim_{t\to 0} \frac{G(t)}{t} = 0$
(d) $\lim_{t\to +\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty$.
Se G é uma função convexa satisfazendo as condições $(a) - (d)$, então sua representante integral é $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, onde g é a derivada à direita de G.

Exemplo: As funções a seguir são exemplos de N-funções:

1. $G(t) = \frac{|t|^p}{p}, 1 < p < +\infty$.
2. $G(t) = e^{t^2} - 1$.
3. $G(t) = (1 + |t|)ln\,(1 + |t|) - |t|$.
4. $G(t) = e^{|t|} - |t| - 1$.

3.1.1 *N-função Complementar*

Dada uma função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições $(i) - (v)$ da Definição 3.1, podemos associar a g uma função que tem as mesmas caracteristicas, definindo a função

$\tilde{g} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por,

$$\tilde{g}(s) = \sup\{t > 0; g(t) \leq s\}.$$

Mostraremos adiante que $\tilde{g}$ satisfaz as condições $(i) - (v)$ da Definição 3.1. Primeiramente observemos que,

1. $\tilde{g}(g(t)) \geq t, \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.
   prova: Claramente $t \in \{r; g(r) \leq g(t)\}$. Portanto

$$\tilde{g}(g(t)) = \sup\{r; g(r) \leq g(t)\} \geq t.$$

2. $g(\tilde{g}(s)) \geq s, \ \forall s \in \mathbb{R}^+$.
   prova: Seja $t_n = \tilde{g}(s) + \frac{1}{n}$. Assim $g(t_n) > s$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $t_n \searrow \sup_{g(t) \geq s} t = \tilde{g}(s)$. Uma vez que g é contínua à direita temos que, $g(\tilde{g}(s)) = \lim_{t_n \searrow \tilde{g}(s)} g(t_n) \geq s$.
3. $\tilde{g}(g(t) - \epsilon) \leq t, \ \forall \epsilon > 0 \ e \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.
   prova: Ora se $u \in \{r; g(r) \leq g(t) - \epsilon\}$ então $g(u) \leq g(t) - \epsilon < g(t)$. Mas g é não-decrescente logo $u \leq t$. Portanto, t é cota superior para o conjunto acima. Assim,

$$\tilde{g}(g(t) - \epsilon) = \sup\{r; g(r) \leq g(t) - \epsilon\} \leq t.$$

4. $g(\tilde{g}(s) - \epsilon) \leq s \ \forall \epsilon > 0 \ e \ \forall s \in \mathbb{R}^+$
   prova: Dado $\epsilon > 0$ então pela definição de supremo existe um $t_0 \in \{t; g(t) \leq s\}$ tal que $\tilde{g}(s) - \epsilon \leq t_0 \leq \tilde{g}(s)$. Mas g é não-decrescente e portanto $g(\tilde{g}(s) - \epsilon) \leq g(t_0) \leq s$.

Observação: Estas quatro propriedades da função $\tilde{g}$ refletem um resultado interessante de que podemos recuperar a função g a partir da função $\tilde{g}$ da mesma forma em que $\tilde{g}$ foi definida. Em outras palavras mostremos que g é dada por

$$g(t) = \sup\{s; \tilde{g}(s) \leq t\}.$$

Demonstração. Com efeito, mostremos primeiramente que $g(t)$ é cota superior para o conjunto $\{s; \tilde{g}(s) \leq t\}$. Tomando s neste conjunto, temos $\tilde{g}(s) \leq t$, g é não-decrescente e portanto, $g(\tilde{g}(s)) \ \leq g(t)$. Mas a propriedade 2 acima nos diz que $g(\tilde{g}(s)) \geq s$. Assim, $s \leq g(t)$ e portanto, $g(t)$ é cota superior para o conjunto. Agora para qualquer $\epsilon > 0, g(t) - \epsilon$ pertence ao mesmo, pois $\tilde{g}(g(t) - \epsilon) \leq t$, pela propriedade 3 da função $\tilde{g}$. Portanto $g(t)$ é de fato o supremo concluindo o resultado. $\square$

Lema 3.1. *Seja* $\tilde{g} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *dada por* $\tilde{g}(s) = \{t; g(t) \leq s\}$*, então* $\tilde{g}$ *satisfaz* $(i) - (v)$ *da Definição 3.1.*

Demonstração. **(i)** Claramente, como $g(0) = 0$ e $g(t) > 0,\ \forall t > 0$ entao $\{0\} = \{t; g(t) \leq 0\}$, assim $\tilde{g}(0) = \sup\{t; g(t) \leq 0\} = 0$

(ii) Tomemos $s > 0$ e $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) \leq s$, tal t_0 existe pois caso ocorresse $g(t) > s,\ \forall t > 0$, então dada uma sequência de números positivos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $t_n \searrow 0$, pela contínuidade à direita de g teriamos $0 < s \leq \lim_{t_n\searrow 0} g(t_n) = g(0) = 0$ que é um absurdo. Portanto devemos ter $\tilde{g}(s) = \sup_{g(t)\leq s} t \geq t_0 > 0$.

(iii) Tomemos em $\mathbb{R}^+$ uma sequência tal que $s_n \searrow s$. Devemos provar que $\tilde{g}(s_n) \to \tilde{g}(s)$. Suponha por contradição que $\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(s_n) \neq \tilde{g}(s)$. Como $\tilde{g}$ é não-decrescente e $s_n \geq s,\ \forall n \in \mathbb{N}$, temos $\tilde{g}(s_n) \geq \tilde{g}(s)$. Assim podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{g}(s_n) \geq \tilde{g}(s) + 2\epsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}$ isto é $\tilde{g}(s_n) - \epsilon \geq \tilde{g}(s) + \epsilon$, $\tilde{g}$ é não-decrescente logo $s_n \geq g(\tilde{g}(s_n) - \epsilon) \geq g(\tilde{g}(s) + \epsilon)$, fazendo $n \to +\infty$ temos $g(\tilde{g}(s) + \epsilon) \leq s$ que é um absurdo.

(iv) Tomando $s_1 \leq s_2$ em $\mathbb{R}^+$ vemos que $\{t; g(t) \leq s_1\} \subset \{t; g(t) \leq s_2\}$ assim $\tilde{g}(s_1) = \sup\{t; g(t) \leq s_1\} \leq \sup\{t; g(t) \leq s_2\} = \tilde{g}(s_2)$.

(v) Queremos mostrar que para qualquer sequência $s_n \to \infty$, temos $\tilde{g}(s_n) \to \infty$. Comecemos tomando uma sequência $t_n \to \infty$ então $g(t_n) \to \infty$. Sendo assim $\tilde{g}(g(t_n)) \geq t_n \to \infty$. Determinamos portanto a existência de uma sequência $\lambda_n := g(t_n) \to \infty$ tal que $\tilde{g}(\lambda_n) \to \infty$. Seja agora uma sequência (s_n) arbitraria tal que $s_n \to \infty$. Uma vez que $\tilde{g}(s_n) \to \infty$, dado $C > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{g}(\lambda_{n_1}) \geq C$. Porém tomando este λ_{n_1}, uma vez que $s_n \to \infty$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \geq \lambda_{n_1},\ \forall n \geq n_0$. Uma vez que $\tilde{g}$ é não-decrescente temos então $\tilde{g}(s_n) \geq \tilde{g}(\lambda_{n_1}) \geq C,\ \forall n \geq n_0$. Portanto $\tilde{g}(s_n) \to \infty$.

$\square$

A partir do lema anterior podemos construir a seguinte N-função.

Definição 3.2. *Considere* G *a N-função representada por* g*. Dizemos que a N-função* $\tilde{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\tilde{G}(t) = \int_0^{|t|} \tilde{g}(s)\, ds, \quad \textit{onde} \ \ \tilde{g}(s) = \sup\{t; g(t) \leq s\}$$

é a N-função complementar a G*.*

Assim a observação feita acima nos diz que se $\tilde{G}$ é N-função complementar a G então, reciprocamente G é complementar a $\tilde{G}$ donde iremos nos referir a tal par de funções por N-funções complementares.

Exemplos:

a) $G(t) = \frac{|t|^p}{p} \Rightarrow g(t) = t^{p-1}, \;\; 1 < p < \infty,$

$\tilde{g}(s) = \sup_{g(t) \leq s} t = \sup_{t^{p-1} \leq s} t = s^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \tilde{G}(s) = \frac{|s|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

b) $G(t) = e^{|t|} - |t| - 1, t > 0 \Rightarrow g(t) = (G(t))'_+ = e^t - 1$

$\Rightarrow \tilde{g}(s) = \sup_{e^t - 1} t = ln\,(s+1)$, pois $e^t - 1 \leq s \Leftrightarrow t \leq ln\,(s+1)$ e

$$\tilde{G}(s) = \int_o^{|s|} ln\,(t+1)\; dt = (1+|s|)ln\,(|s|+1) - |s|$$

.

Ora para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}^+$ temos a conhecida desigualdade de Young

$$st \leq \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. É possivel obter uma generalização dessa desigualdade para um par qualquer de N-funções complementares.

Lema 3.2 (Desigualdade de Young)**.** *Dado um par de N-funções complementares G e $\tilde{G}$, temos para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$*

$$ts \leq G(t) + \tilde{G}(s),$$

além disso valem as seguintes igualdades:

$$|t|g(|t|) = G(t) + \tilde{G}(g(|t|)), \tag{16}$$

$$|s|\tilde{g}(|s|) = G(\tilde{g}(|s|)) + \tilde{G}(s). \tag{17}$$

Demonstração. Vide KRASNOSEL'S; RUTICKII (1961). □

Por fim queremos observar que se tivermos uma função g crescente satisfazendo as condições da Definição 3.1 então $\tilde{g} \equiv g^{-1}$.

3.1.2 *Algumas propriedades das N-funções*

Nosso objetivo agora será apresentar algumas propriedades relevantes das N-funções que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Lema 3.3. *Se G é N-função e g é tal que $G(u) = \int_0^u g(t)\,dt$ então $G(u) < ug(u), \;\; \forall u > 0$.*

Demonstração. Claramente, se $u > 0$ entao $G(u) = \int_0^u g(t)\,dt \leq ug(u)$ pois g é não-decrescente. Agora suponha que $u_0 g(u_0) = G(u_0)$, vamos mostrar que $u_0 = 0$. Com efeito, temos que

$$\int_0^{u_0} g(u_0) dt = u_0 g(u_0) = G(u_0) = \int_0^{u_0} g(t)\,dt \Rightarrow \int_0^{u_0} (g(u_0) - g(t))\,dt = 0$$

Uma vez que $g(t) \leq g(u_0)$ se $0 \leq t \leq u_0$, então ou teremos $u_0 = 0$ ou $g(t) = g(u_0),\ \forall t \in (0, u_0)$. Sendo g contínua à direita temos que $g(u_0) = \lim_{t\to 0^+} g(t) = g(0) = 0 \Rightarrow u_0 = 0$. □

Lema 3.4. *Se G é N-função, então $G(Ku) > KG(u),\quad \forall u \neq 0$ e $K > 1$.*

Demonstração. Pelo Lema3.3 temos

$$\begin{aligned} G(Ku) &= \int_0^{Ku} g(t)\,dt = \int_0^{u} g(t)\,dt + \int_u^{Ku} g(t)\,dt \\ &\geq G(u) + (Ku-u)g(u) = G(u) + (K-1)ug(u) \\ &> G(u) + (K-1)G(u) = KG(u). \end{aligned}$$

□

Note que sendo G e $\tilde{G}$ N-funções complementares segue que são funções crescentes e contínuas, então elas tem inversa, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2. *Sejam G e $\tilde{G}$ N-funções complementares. Então,*

$$t < G^{-1}(t).\tilde{G}^{-1}(t) \leq 2t,\ \ \forall t > 0.$$

Demonstração. A segunda desigualdade é obtida a partir da desigualdade de Young tomando $t = G^{-1}(a),\ s = \tilde{G}^{-1}(a)$. Para a primeira desigualdade, provemos primeiro que $\tilde{G}(\frac{G(a)}{a}) < G(a),\ \forall a > 0$. De fato tomando $s = \frac{G(a)}{a}$ em (16), temos

$$\tilde{G}\left(\frac{G(a)}{a}\right) = \frac{G(a)}{a}\tilde{g}\left(\frac{G(a)}{a}\right) - G\left(\tilde{g}\left(\frac{G(a)}{a}\right)\right).$$

Portanto,

$$\tilde{G}\left(\frac{G(a)}{a}\right) < \frac{G(a)}{a}\tilde{g}\left(\frac{G(a)}{a}\right),$$

uma vez que $\frac{G(a)}{a} < g(a)$(pelo Lema3.3), tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\frac{G(a)}{a} = g(a) - \epsilon$, daí

$$\tilde{G}\left(\frac{G(a)}{a}\right) < \frac{G(a)}{a}\tilde{g}\left(\frac{G(a)}{a}\right) = \frac{G(a)}{a}\tilde{g}\left(g(a) - \epsilon\right) \leq \frac{G(a)}{a}a = G(a).$$

Para concluir, se $t > 0$ tomemos então $a > 0$ tal que $G(a) = t$, logo

$$\tilde{G}\left(\frac{t}{G^{-}1(t)}\right) < t,$$

donde $t < G^{-1}(t).\tilde{G}^{-1}(t)$. □

A seguir vamos definir duas propriedades que de terminadas N-funções satisfazem, são elas as condições $\triangle_2$ e ∇_2. Tais propriedades serão importantes no estudo e classificação dos Espaços de Orlicz.

Definição 3.3. *Dizemos que uma N-função satisfaz a condiçao $\triangle_2$ se existem constantes $k > 0$ e $t_0 > 0$ tais que*

$$G(2t) \leq kG(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Escrevemos $G \in \triangle_2$ quando G satisfaz tal condição.

Lema 3.5. *Uma N-função G satisfaz a condição $\triangle_2$ se e somente se existe uma constante $t_0 \geq 0$ tal que*

$$G(lt) \leq k_l G(t), \quad \forall t \geq t_0, \ e \ \forall l > 1.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Com efeito, suponha que $G \in \triangle_2$ e seja $l > 1$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n > l$. Se $t \geq t_0$ então $G(lt) \leq G(2^n t) \leq k^n G(t)$ e portanto $k_l = k^n$.
$(\Leftarrow)$ Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq l^n$, então segue que para $t \geq t_0$,

$$G(2t) \leq G(l^n t) \leq k_l^n G(t)$$

, donde $k = k_l^n$. □

Lema 3.6. *Sejam G uma N-fução e g sua representante. São equivalentes;*

1. *$G \in \triangle_2$*
2. *Existem $\alpha > 1$ e $t_0 > 0$ tais que $\frac{tg(t)}{G(t)} < \alpha, \ \forall t \geq t_0$.*

Demonstração. $(2 \Rightarrow 1)$ Se $t \geq t_0$, temos que $ln\left(\frac{G(2t)}{G(t)}\right) = \int_0^{2t} \frac{g(t)}{G(t)}\, dt < \alpha \int_0^{2t} \frac{dt}{t} = \alpha ln2$. Portanto $G(2t) < 2^\alpha G(t), \ \forall t \geq t_0 \Rightarrow G \in \triangle_2$.
$(1 \Rightarrow 2)$ Tomemos $k > 0$ e $t_0 > 0$ tal que $G(2t) \leq kG(t)$ se $t \geq t_0$. Assim temos

$$kG(t) \geq G(2t) = \int_0^{2t} g(t)\, dt > \int_t^{2t} g(t)\, dt \geq tg(t).$$

Portanto $\frac{tg(t)}{G(t)} < k, \ \forall t \geq t_0$, pelo Lema 3.4 temos $k > 1$. □

Observação:

1. Se $G \in \triangle_2$ então segue do Lema3.6 que existem constantes positivas C e α tais que $G(t) \leq Ct^\alpha$. Com efeito, supondo sem perda de generalidade que $t_0 > 1$,

$$ln\left(\frac{G(t)}{G(t_0)}\right) = \int_{t_0}^{t} (lnG(s))'_+ \, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)}{G(s)}\, ds < \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha}{s}\, ds = ln\left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha.$$

2. Se a representante g da N-função G satisfaz a condição $\triangle_2$, isto é $g(2t) \leq kg(t)$ para

todo $t \geq t_0$, então $G \in \triangle_2$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
G(2t) &= \int_0^{2t_0} g(r)\,dr + \int_{2t_0}^{2t} g(r)\,dr \leq \int_0^{2t_0} g(r)\,dr + \int_{t_0}^{t} g(2z)\,2dz \\
&\leq \int_0^{2t_0} g(r)\,dr + k\int_{t_0}^{t} g(z)\,2dz = \int_0^{t_0} g(r)\,dr + \int_{t_0}^{2t_0} g(r)\,dr + 2k\int_{t_0}^{t} g(z)\,dz \\
&\leq 2k\int_0^{t} g(z)\,dz + \int_{t_0}^{2t_0} g(r)\,dr \leq (2k+1)\int_0^{t} g(z)\,dz = (2k+1)G(t),\ \forall t \geq t_0.
\end{aligned}
$$

Exemplos: Satisfazem $\triangle_2$

- $G_1(t) = \frac{|t|^p}{p},\ \ 1 < p < \infty$, faça $k = 2^p$.
- $G_2(t) = (1+|t|)ln(1+|t|) - |t|$, pois como vimos sua representante é dada por $g_2(t) = ln(1+t)$ e $ln(1+2t) \leq ln(2(1+t)) = ln(2)ln(1+t),\ \ \forall t \geq 1 = t_0$.

Não satisfazem $\triangle_2$,em virtude da observação feita acima,

- $G_3(t) = e^{t^2} - 1$,
- $G_4(t) = e^{|t|} - |t| - 1$, nesse caso observe que sua N-função complementar $\tilde{G}_4 = G_2 \in \triangle_2$.

Definição 3.4. *Dizemos que uma N-função G satisfaz a condição ∇_2 se existem constantes $l > 1$ e $s_0 \geq 0$ tais que*

$$G(s) \leq \frac{1}{2l}G(ls),\ \ \forall s \geq s_0,$$

e escrevemos $G \in \nabla_2$.

Os próximos dois lemas serão utilizados para determinar uma relação existente entre as condições ∇_2 e $\triangle_2$.

Lema 3.7. *Sejam G_1 e G_2 duas N-funções complementares a $\tilde{G}_1$ e $\tilde{G}_2$ respectivamente com $g_1, g_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ suas respectivas representantes. Suponha que existe $t_0 \geq 0$ tal que*

$$G_1(t) \leq G_2(t),\ \ \forall t \geq t_0,$$

então $\tilde{G}_2(s) \leq \tilde{G}_1(s),\ \ \forall s \geq s_0 = g_2(t_0)$.

Demonstração. Tomando $s \geq s_0$ temos que

$$\tilde{g}_2(s) \geq \tilde{g}_2(s_0) = \tilde{g}_2(g_2(t_0)) \geq t_0 \tag{18}$$

Agora por (16), temos $\tilde{g}_2(s)s = G_2(\tilde{g}_2(s)) + \tilde{G}_2(s)$, além disso pela desigualdade de Young, $\tilde{g}_2(s)s \leq G_1(\tilde{g}_2(s)) + \tilde{G}_1(s)$. Assim,

$$G_2(\tilde{g}_2(s)) + \tilde{G}_2(s) \leq G_1(\tilde{g}_2(s)) + \tilde{G}_1(s). \tag{19}$$

Agora, se $s \geq s_0$ então por (17) e (18) temos

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2(s) &\leq G_1(\tilde{g}_2(s)) - G_2(\tilde{g}_2(s)) + G_1(s)\\ &\leq G_1(s)\end{aligned}$$

□

Lema 3.8. *Sejam G e $\tilde{G}$ um par de N-funções complementares, com g e $\tilde{g}$ suas respectivas representantes. Considere $G_1(t) := aG(bt)$ com $a, b > 0$. Então G_1 é N-função e sua N-função complementar é dada por $\tilde{G}_1(s) = a\tilde{G}\left(\frac{s}{ab}\right)$.*

Demonstração. Como $aG(bt) = a\int_0^{bt} g(r)\,dr$, segue que $G_1(t) = \int_0^t abg(r)\,dr$. Portanto $g_1(t) = a \cdot b \cdot g(bt)$, consequentemente $\tilde{g}_1(s) = \sup\{t; g_1(t) \leq s\}$ ou seja

$$\tilde{g}_1(s) = \frac{1}{b}\sup_{g(t)\leq \frac{s}{ab}} t = \frac{1}{b}\tilde{g}\left(\frac{s}{ab}\right)$$

logo,

$$\tilde{G}_1(s) = \int_0^s \frac{1}{b}\tilde{g}\left(\frac{r}{ab}\right)\,dr = \frac{1}{b}\int_0^{\frac{s}{ab}} ab\tilde{g}(r)\,dr = a\tilde{G}\left(\frac{s}{ab}\right).$$

□

Proposição 3.3. *Seja G e $\tilde{G}$ par de N-funções complementares. Então $G \in \triangle_2$ se e somente se $\tilde{G} \in \nabla_2$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Tomemos $l \in \mathbb{R}$ de acordo com a Definição 3.4 e definimos

$$\tilde{G}_1(s) := \frac{1}{2l}\tilde{G}(ls).$$

Pelo Lema 3.8 com $a = \frac{1}{2l}$ e $b = 2$ temos que $G_1(t) = \frac{1}{2l}G(2t)$. A condição ∇_2 pode ser escrita sob a forma $\tilde{G}(s) \leq \tilde{G}_1(s),\ \forall s \geq t_0$. Segue do Lema 3.7 que existe $t_0 > 0$ tal que $G_1(t) \leq G(t),\ \forall t \geq t_0$ isto é $G(2t) \leq 2lG(t)$ se $t \geq t_0$. Portanto $G \in \triangle_2$.

($\Rightarrow$) Existem constantes $t_0 \geq 0$ e $k > 0$ tais que $G(2t) \leq kG(t)$, $\forall t \geq t_0$. Tomando $a = \frac{1}{k}, b = 2$ e definindo $G_1(t) := aG(bt)$, temos pelo Lema 3.8 que $\tilde{G}_1(s) = \frac{1}{k}\tilde{G}\left(\frac{ks}{2}\right)$. Além disso pelo Lema 3.7 se $s_0 = g(t_0)$ então $\tilde{G}(s) \leq \frac{1}{k}\tilde{G}\left(\frac{ks}{2}\right)$, $\forall s \geq s_0$. Ora pelo Lema 3.4 segue que $k > 2$ e portanto tomando $l = \frac{k}{2}$ temos o resultado.

□

Definição 3.5. *Dizemos que uma N-função G é $\triangle$-regular se $G \in \triangle_2 \cap \nabla_2$.*

Exemplo: $G(t) = \frac{|t|^P}{p}$, $1 < p < \infty$, é $\triangle$-regular.

O resultado abaixo é consequência direta da Proposição 3.3.

Corolário 3.1. *Sejam G e $\tilde{G}$ par de N-funções complementares. G é $\triangle$-regular se e somente se $G \in \triangle_2$ e $\tilde{G} \in \triangle_2$.*

3.2 Classes de Orlicz

No que se segue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave onde estamos considerando a medida de Lebesgue.

Definição 3.6. *Seja G uma N-função. A classe de Orlicz da função G é definida por*

$$\mathcal{L}_G(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_\Omega G(|u(x)|)\, dx < \infty \right\}.$$

Para simplificação utilizaremos ao longo do texto a seguinte notação:

$$\rho(u, G) := \int_\Omega G(|u(x)|)\, dx.$$

Quando não houver perigo de confusão utilizaremos o símbolo $\mathcal{L}_G$ ao se referir à classe $\mathcal{L}_G(\Omega)$. Como exemplo vemos que se $G(t) = \frac{|t|^p}{p}$ com $1 < p < \infty$ então $\mathcal{L}_G(\Omega) = L^p(\Omega)$, o conhecido espaço de Lebesgue.

Lema 3.9. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números não-negativos tal que a serie $\sum a_n$ converge. Então existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não-decrescente ilimitada tal que a serie $\sum a_n b_n$ converge.*

Demonstração. Como a serie $\sum a_n$ converge podemos obter uma sequência de indices $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tais que $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, e $\sum_{j=n_k}^{\infty} a_j < \frac{1}{2^k}$. Definimos a sequência

$$b_j = \begin{cases} 1; \; 1 \leq j < n_1 \\ k; \; n_k \leq j < n_{k+1}, k = 2, 3, ... \end{cases}$$

Assim temos que $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente e ilimitada, além disso dado $N \in \mathbb{N}$ tal que $n_k < N$ temos,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} a_j b_j &= \sum_{j=1}^{n_1 - 1} a_j b_j + \sum_{j=n_1}^{n_2 - 1} a_j b_j + ... + \sum_{j=n_k}^{N} a_j b_j \\ &< \sum_{j=1}^{n_1 - 1} b_j + \frac{1}{2} + ... + \frac{k}{2^k} \\ &= \sum_{j=1}^{n_1 - 1} b_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{2^j}, \end{aligned}$$

como a serie $\sum \frac{n}{2^n}$ converge, segue por comparação que a serie $\sum a_n b_n$ converge. $\square$

Teorema 3.1. *Seja $L^1(\Omega)$ o espaço de Lebesgue das funções integráveis. Então*

$$L^1(\Omega) = \bigcup_G \mathcal{L}_G(\Omega)$$

união tomada sobre todas as N-funções.

Demonstração. Tomemos $u \in L^1(\Omega)$, considere os conjuntos $\Omega_n = \{x \in \Omega; n-1 \leq |u(x)| < n\}$. Assim,

$$\int_\Omega |u(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |u(x)|\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)|\Omega_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|\Omega_n| - |\Omega|.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\Omega_n| \leq \int_\Omega |u(x)|\,dx + |\Omega| < \infty.$$

Tomamos agora uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no Lema 3.9 não-decrescente e ilimitada de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n |\Omega_n| < \infty.$$

Lembrando que do Lema 3.9 temos $a_1 = 1$, definimos $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$g(t) = \begin{cases} t;\ 0 \leq t < 1 \\ a_n;\ n \leq t < n+1 \end{cases}$$

Logo g é não-decrescente, contínua à direita, $g(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. Tomemos portanto a N-função G dada por

$$G(t) = \int_0^{|t|} g(s)\,ds$$

, uma vez que

$$G(n) = \int_0^n g(s)\,ds \leq n a_n$$

segue que

$$\int_\Omega G(|u(x)|)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} G(u(x))\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} G(n)|\Omega_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n a_n |\Omega_n| < \infty.$$

Isso mostra que $u \in \mathcal{L}_G$.

Reciprocamente, seja $u \in \mathcal{L}_G$ para alguma N-função G. Podemos supor que u não é a função identicamente nula, sendo g a representante de G sabemos que $g(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Assim tomemos $C > 0$ de modo que $g\left(\frac{|u(x)|}{2}\right) \geq 1$ sempre que $|u(x)| > C$. Defina $\Omega_C = \{x \in \Omega; |u(x)| \leq C\}$, logo este conjunto é mensurável pois u é mensurável, então

$$\begin{aligned}\infty > 2\int_\Omega G(u(x))\,dx &= 2\int_\Omega \int_0^{|u(x)|} g(t)\,dt\,dx \geq 2\int_\Omega \int_{\frac{|u(x)|}{2}}^{|u(x)|} g(t)\,dt\,dx \\ &\geq 2\int_\Omega g\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)\frac{|u(x)|}{2}\,dx = \int_\Omega g\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)|u(x)|\,dx \geq \int_{\Omega\setminus\Omega_C} g\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)|u(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|\,dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_C} |u(x)|\,dx + \int_{\Omega_C} |u(x)|\,dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_C} |u(x)|\,dx + C|\Omega_C| \\ &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_C} g\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)|u(x)|\,dx + C|\Omega_C| < \infty.\end{aligned}$$

□

O próximo resultado estabelece uma maneira de comparar duas classes de Orlicz.

Proposição 3.4. *Sejam G_1 e G_2 N-funções. Assim $\mathcal{L}_{G_1} \subset \mathcal{L}_{G_2}$, se e somente se existem constantes t_0 e a tais que*

$$G_2(t) \leq aG_1(t),\ \forall t \geq t_0. \tag{20}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $u \in \mathcal{L}_{G_1}$, consideremos o conjunto $K = \{x \in \Omega; |u(x)| < t_0\}$. Assim,

$$\rho(u, G_2) = \int_{\Omega\setminus K} G_2(u(x))\,dx + \int_K G_2(u(x))\,dx \leq a\int_\Omega G_1(u(x))\,dx + G_2(t_0)|K| < \infty.$$

donde $u \in \mathcal{L}_{G_2}$.

($\Rightarrow$) Por contradição suponha que (19) não é satisfeito. Assim existe uma sequência ilimitada e crescente de números $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_1 > 0$ tal que $G_2(t_n) > 2^n G_1(t_n)$. Dividimos o dominio Ω em subdominios Ω_n tais que

$$|\Omega_n| = \frac{G_1(t_1)|\Omega|}{2^n G_1(t_n)}$$

Definimos agora a função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} t_n \,; x \in \Omega_n \\ 0 \,; \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \end{cases}$$

A função u pertence a $\mathcal{L}_{G_1}$, pois

$$\begin{aligned} \rho(u, G_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} G_1(u(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} G_1(t_n)|\Omega_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_1(t_n)G_1(t_1)|\Omega|}{2^n G_1(t_n)} = G_1(t_1)|\Omega| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

No entanto $u \notin \mathcal{L}_{G_2}$,pois

$$\begin{aligned} \rho(u, G_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} G_2(u(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} G_2(t_n)|\Omega_n| \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} 2^n G_1(t_n)|\Omega_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n G_1(t_n)G_1(t_1)|\Omega|}{2^n G_1(t_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} G_1(t_1)|\Omega| = \infty. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.2. *Sejam G_1 e G_2 N-funções. Então $\mathcal{L}_{G_1} = \mathcal{L}_{G_2}$ se e somente se, existem constantes a, b e t_0 tais que*

$$aG_2(t) \leq G_1(t) \leq bG_2(t), \ \forall t \geq t_0.$$

O teorema a seguir nos mostra que em geral uma classe de Orlicz não é um espaço vetorial.

Teorema 3.2. *A classe de Orlicz $\mathcal{L}_G$ é um espaço vetorial se, e somente se a N-função $G \in \triangle_2$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que $G \in \triangle_2$. Assim dado $l > 1$ existem constantes k_l e t_0 tais que $G(lt) \leq k_l G(t), \ \forall t \geq t_0$. Portanto tomando $S = \{x \in \Omega; |u(x)| < t_0\}$, temos

$$\rho(lu, G) = \int_{\Omega \setminus S} G(|lu(x)|)\, dx + \int_S G(|lu(x)|)\, dx \leq k_l \int_\Omega G(|u(x)|)\, dx + G(lt_0)|S| < \infty.$$

Agora se $0 \leq l \leq 1$, então $G(l|u(x)|) \leq G(|u(x)|)$ pois G é crescente, logo $lu \in \mathcal{L}_G$.

Caso $l \leq 0$ é analogo pois G é uma função par. Portanto $\forall l \in \mathbb{R}$ temos $lu \in \mathcal{L}_G$. Se $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_G$, então como G é convexa temos

$$\begin{aligned}\rho(u_1+u_2, G) = \int_\Omega G(|u_1+u_2|)\, dx &\leq \int_\Omega G\left(\frac{1}{2}(2|u_1|+2|u_2|)\right) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega G(2|u_1|)\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega G(2|u_2|)\, dx < \infty\end{aligned}$$

logo $u_1+u_2 \in \mathcal{L}_G$. Portanto $\mathcal{L}_G$ é um espaço vetorial.

($\Rightarrow$) Se $\mathcal{L}_G$ é espaço vetorial então em particular temos que $2u \in \mathcal{L}_G,\ \forall u \in \mathcal{L}_G$. Considere a N-função $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G_1(t) := G(2t)$. Seja $\mathcal{L}_{G_1}$ a classe de Orlicz associada a essa função. Logo temos $\mathcal{L}_G \subset \mathcal{L}_{G_1}$. Então pela Proposição 3.4 existem constantes a e t_0 tais que

$$G(2t) = G_1(t) \leq aG(t),\ \forall t \geq t_0.$$

Concluindo que $G \in \Delta_2$. $\square$

3.3 Espaços de Orlicz

Dada uma N-função G, denotaremos por $L^G(\Omega)$ o menor espaço vetorial que contêm $\mathcal{L}_G(\Omega)$. Em outras palavras, $L^G(\Omega)$ é o espaço vetorial gerado por $\mathcal{L}_G(\Omega)$, ou seja

$$L^G(\Omega) = \langle \mathcal{L}_G(\Omega) \rangle.$$

Pelo Teorema 3.2, $L^G(\Omega)$ coincide com $\mathcal{L}_G(\Omega)$ se, somente se, $G \in \Delta_2$.

Obsevação: Sejam $u \in \mathcal{L}_G$ e $v \in \mathcal{L}_{\tilde{G}}$, segue da desigualdade de Young ,

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \int_\Omega G(|u(x)|)\, dx + \int_\Omega \tilde{G}(|v(x)|)\, dx < \infty.$$

Logo se $w \in L^G(\Omega)$, então existem $\lambda_j \in \mathbb{R}$ e $u_j \in \mathcal{L}_G(\Omega), j = 1, 2, ..., k$ tais que $w(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j(x)$, segue que $\forall v \in \mathcal{L}_{\tilde{G}}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w(x)v(x)|\, dx &\leq \lambda_1 \int_\Omega |u_1 v|\, dx + ... + \lambda_k \int_\Omega |u_k v|\, dx \\ &\leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\int_\Omega G(u_j(x))\, dx + \int_\Omega \tilde{G}(v(x))\, dx\right) < \infty.\end{aligned}$$

Lema 3.10. *Seja $u \in L^G(\Omega)$, então*

$$\sup\left\{\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx\,;\ \rho(v,\tilde{G}) \leq 1\right\} < \infty.$$

Demonstração. Com efeito segue da observaçao feita acima que $\forall v \in \mathcal{L}_{\tilde{G}}$ com $\rho(v,\tilde{G}) \leq 1$ temos

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\int_\Omega G(u_j(x))\,dx + 1\right) < \infty$$

onde $u(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j(x)$. □

Este lema nos permite introduzir uma norma no espaço $L^G(\Omega)$ definida da seguinte forma,

$$||u||_G := \sup\left\{\left|\int_\Omega u(x)v(x)\right|\,dx\,;\ \rho(v,\tilde{G}) \leq 1\right\}$$

que é denominada norma de Orlicz.

Lema 3.11. *Considere G a N-função representada por g. Suponha que $u \in L^G(\Omega)$ e $||u||_G \leq 1$. Então a função $v_0(x) := g(|u(x)|)$ pertence a $\mathcal{L}_{\tilde{G}}$ e $\rho(v_0,\tilde{G}) \leq 1$.*

Demonstração. Primeiramente provaremos que para toda função $v \in \mathcal{L}_{\tilde{G}}$ temos

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)\,dx\right| = \begin{cases} ||u||_G, \text{se } \rho(v,\tilde{G}) \leq 1 \\ ||u||_G\rho(v,\tilde{G}), \text{se } \rho(v,\tilde{G}) > 1 \end{cases} \tag{21}$$

A primeira inequação em (20) segue diretamente da definição da norma $||.||_G$. Para obter a segunda inequação, note que pela convexidade de $\tilde{G}$ temos

$$\tilde{G}\left(\frac{v(x)}{\rho(v,\tilde{G})}\right) \leq \frac{1}{\rho(v,\tilde{G})}\tilde{G}(v(x)),$$

donde

$$\int_\Omega \tilde{G}\left(\frac{v(x)}{\rho(v,\tilde{G})}\right)\,dx \leq \frac{1}{\rho(v,\tilde{G})}\int_\Omega \tilde{G}(v(x))\,dx = 1.$$

Sendo assim, $\rho\left(\frac{v}{\rho(v,\tilde{G})},\tilde{G}\right) \leq 1$, o que implica em

$$\left|\int_\Omega u(x)\frac{v(x)}{\rho(v,\tilde{G})}\,dx\right| \leq ||u||_G$$

desse modo obtemos a inequação desejada.

Suponha que $||u||_G \leq 1$ e considere a seguinte sequência:

$$u_n(x) = \begin{cases} |u(x)|, \text{ se } |u(x)| \leq n \\ 0, \text{ se } |u(x)| > n. \end{cases}$$

Logo temos que as funções u_n são limitadas. Suponha por contradição que a afirmação do lema não seja verdadeira, então $\rho(v_0, \tilde{G}) > 1$. Pela contínuidade de $\tilde{G}$ temos que

$$\tilde{G}(g(|u_n(x)|)) \longrightarrow \tilde{G}(g(|u(x)|)), \quad x \in \Omega.$$

Além disso, $\tilde{G}(g(|u_n(x)|)) \leq \tilde{G}(g(|u_{n+1}(x)|))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto segue do teorema da convergência monótonona

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{G}(g(|u_n(x)|))\, dx = \int_\Omega \tilde{G}(g(|u(x)|))\, dx > 1,$$

e assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_\Omega \tilde{G}(g(|u_{n_0}(x)|))\, dx > 1$. Por outro lado, usando a desigualdade de Young em (15)

$$\tilde{G}(g(|u_{n_0}(x)|)) < G(|u_0(x)|) + \tilde{G}(g(|u_{n_0}(x)|)) = |u_0(x)|g(|u_0(x)|).$$

Como a função $w(x) = g(|u_{n_0}(x)|)sgnu(x)$ pertence a classe $\mathcal{L}_{\tilde{G}}$ pois $\rho(w, \tilde{G}) = \rho(g(|u_{n_0}|), \tilde{G})$, integrando a desigualdade acima e usando (20) obtemos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{G}(g(|u_{n_0}(x)|))\, dx &< \int_\Omega u_{n_0}(x) sgnu(x) g(|u_{n_0}(x)|)\, dx \\ &= \left| \int_\Omega u_{n_0}(x) sgnu(x) g(|u_{n_0}(x)|)\, dx \right| \\ &\leq ||u_{n_0}||_G \int_\Omega \tilde{G}(g(|u_{n_0}(x)|))\, dx, \end{aligned}$$

e isto contradiz a inequação $||u_{n_0}||_G \leq ||u||_G \leq 1$. □

Lema 3.12. *Suponha que $u \in L^G(\Omega)$ e que $||u||_G \leq 1$. Então $u \in \mathcal{L}_G(\Omega)$ e*

$$\rho(u, G) \leq ||u||_G.$$

Demonstração. Seja $v_0(x) = g(|u(x)|)sgnu(x)$, então pelo Lema 3.11 temos que

$$\rho(v_0, \tilde{G}) \leq 1,$$

e pela identidade

$$u(x)v_0(x) = G(u(x)) + \tilde{G}(v_0(x)),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(u(x))\,dx &\leq \int_\Omega G(u(x))\,dx + \int_\Omega \tilde{G}(v_0(x))\,dx\\ &= \int_\Omega u(x)v_0(x)\,dx \leq ||u||_G.\end{aligned}$$

$\square$

A seguir definiremos uma norma equivalente a norma $||.||_G$ em $L^G(\Omega)$, que é expressa somente em termos da N-função G.

Proposição 3.5. *A expressão*

$$|u|_G := \inf\left\{\lambda > 0\,;\ \int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)\,dx \leq 1\right\},$$

define uma norma em $L^G(\Omega)$, chamada norma de Luxemburgo.

Demonstração. Considerando $0 \neq u \in L^G(\Omega)$, pelo Lema 3.12

$$\rho\left(\frac{u}{||u||_G}, G\right) \leq 1$$

e assim $|u|_G < \infty$. Se $u = 0$, então $|u|_G = 0$. Portanto $|.|_G$ está bem definido.

- Se $u = 0$ então $|u|_G = 0$, pois nesse caso

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}, G\right) = 0,\ \forall\lambda > 0.$$

Por outro lado, se $|u|_G = 0$ então existe uma sequência de números positivos $\{\lambda_n\}$ tal que

$$\lambda_n \to |u|_G \text{ e } \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}, G\right) \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fixando $n_0 \in \mathbb{N}$, para n suficientemente grande temos que $\frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n} > 1$, assim segue do Lema 3.4 que

$$G\left(\frac{u(x)}{\lambda_n}\right) = G\left(\frac{\lambda_{n_0}|u(x)|}{\lambda_n\lambda_{n_0}}\right) > \frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n}G\left(\frac{|u(x)|}{\lambda_{n_0}}\right) = \frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n}G\left(\frac{u(x)}{\lambda_{n_0}}\right)$$

Portanto

$$\frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n}\rho\left(\frac{u}{\lambda_{n_0}}, G\right) \leq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}, G\right) \leq 1,$$

para todo n suficientemente grande. Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\frac{u}{\lambda_{n_0}}, G\right) \leq 1,$$

exceto se $\rho\left(\frac{u}{\lambda_{n_0}}, G\right) = 0$ q.t.p em Ω. Nesse caso $u(x) = 0$ q.t.p em Ω.

- $$\begin{aligned} |cu|_G &= \inf\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{|c|u}{\lambda}, G\right) \leq 1\} \\ &= \inf\{|c|\alpha > 0; \rho\left(\frac{u}{\alpha}, G\right) \leq 1\} \\ &= |c| \inf\{\alpha > 0; \rho\left(\frac{u}{\alpha}, G\right) \leq 1\} = |c||u|_G. \end{aligned}$$

- Tomando u e v em $L^G(\Omega)$, se u ou v é zero então a desigualdade triangular segue trivialmente. Se ambos forem não identicamente nulos, então

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{u+v}{|u|_G + |v|_G}, G\right) \leq \rho\left(\frac{|u|+|v|}{|u|_G + |v|_G}, G\right) \\ &= \rho\left(\frac{|u|_G}{|u|_G + |v|_G}\frac{|u|}{|u|_G} + \frac{|v|_G}{|u|_G + |v|_G}\frac{|v|}{|v|_G}, G\right) \\ &\leq \frac{|u|_G}{|u|_G + |v|_G}\rho\left(\frac{|u|}{|u|_G}, G\right) + \frac{|v|_G}{|u|_G + |v|_G}\rho\left(\frac{|v|}{|v|_G}, G\right) \leq 1 \end{aligned}$$

assim $|u+v|_G \leq |u|_G + |v|_G$.

□

Proposição 3.6. $|u|_G = \min\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}, G\right) \leq 1\}$.

Demonstração. Considere $0 \neq u \in L^G(\Omega)$ e seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência minimizante de $|u|_G$, isto é, $\{\lambda_n\}$ é uma sequência de números positivos convergindo para $|u|_G$. Sendo assim, para todo $x \in \Omega$ temos $G\left(\frac{u(x)}{\lambda_n}\right) \to G\left(\frac{u(x)}{|u|_G}\right)$. Como $G\left(\frac{u(x)}{\lambda_n}\right) \geq 0, \ \forall x \in \Omega$, pelo lema de Fatou segue que

$$\int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{|u|_G}\right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{\lambda_n}\right) dx \leq \sup_n \left\{\int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{\lambda_n}\right) dx\right\} \leq 1.$$

□

Proposição 3.7. *Se $K > 0$ é tal que $\int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{K}\right) dx = 1$, então $|u|_G = K$.*

Demonstração. Com efeito pela Proposição 3.6 basta observar que para todo $\epsilon > 0$ satisfazendo $K - \epsilon > 0$, tem-se

$$\int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{K-\epsilon}\right) dx = \int_\Omega G\left(\frac{|u(x)|}{K-\epsilon}\right) dx > \int_\Omega G\left(\frac{|u(x)|}{K}\right) dx = \int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{K}\right) dx = 1.$$

□

Como aplicação desta última proposição, calculemos a norma de Luxemburgo da função caracteristica $\chi(\cdot, A)$ de um subconjunto A mensurável de Ω. Uma vez que

$G(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,

$$\int_\Omega G\left(\chi(\cdot, A)G^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\right)\right) = \int_\Omega \chi(x, A)\frac{1}{|A|}\, dx = 1$$

donde segue que $|\chi(\cdot, A)|_G = \frac{1}{G^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\right)}$.

Proposição 3.8. *Para cada $u \in L^G(\Omega)$,*

$$|u|_G \leq ||u||_G \leq 2|u|_G.$$

Demonstração. Se $u = 0$,não há o que fazer. Suponha então que $u \neq 0$. Neste caso, pelo Lema 3.12

$$\rho\left(\frac{u(x)}{||u||_G}, G\right) \leq 1,$$

portanto $|u|_G \leq ||u||_G$. Por outro lado, segue da Proposição 3.6 que $\rho\left(\frac{u}{|u|_G}, G\right) \leq 1$, assim usando a desigualdade de Young temos

$$\left|\left|\frac{u}{|u|_G}\right|\right|_G = \sup_{\rho(v,\tilde{G})\leq 1}\left|\int_\Omega \frac{u(x)}{|u|_G}v(x)\, dx\right| \leq \rho\left(\frac{u}{|u|_G}, G\right) + 1 \leq 2,$$

portanto $||u||_G \leq 2|u|_G$. □

Definição 3.7. *O espaço vetorial normado $(L^G(\Omega), |.|_G)$ é chamado espaço de Orlicz com respeito a N-função G.*

Teorema 3.3. $L^G(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ *continuamente.*

Demonstração. Primeiramente como $\mathcal{L}_G \subset L^1$, então $L^G = \langle \mathcal{L}_G \rangle \subset L^1$. Considere $\tilde{G}$ a N-função complementar a G e uma constante $C > 0$ tal que $\tilde{G}(C) = \frac{1}{|\Omega|}$ e $u \in L^G(\Omega)$. Como $\int_\Omega \tilde{G}(C)\, dx = 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|\, dx &= \frac{1}{C}\int_\Omega Cu(x) sgnu(x)\, dx \\ &\leq \frac{1}{C}\sup_{\rho(v,\tilde{G})}\left|\int_\Omega u(x)v(x)\, dx\right| = \frac{1}{C}||u||_G \leq \frac{2}{C}|u|_G.\end{aligned}$$

□

Observação: Usaremos na demonstração do teorema a seguir o seguinte fato,

$$|u|_G < \infty \Rightarrow u \in L^G.$$

que é verdade pois

$$u = |u|_G \left(\frac{u}{|u|_G} \right),$$

como $\int_\Omega G\left(\frac{u(x)}{|u|_G}\right) dx \leq 1$, segue que $\frac{u}{|u|_G} \in \mathcal{L}_G$ e portanto $u \in \langle \mathcal{L}_G \rangle = L^G$.

Teorema 3.4. *Todo espaço de Orlicz é completo.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^G(\Omega)$, então pelo Teorema 3.3 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, como esse espaço é completo segue que existe $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u_0$ em $L^1(\Omega)$, e existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que

$$u_{n_k}(x) \to u_0(x), \text{q.t.p em } \Omega.$$

Como $\{u_{n_k}\}$ é ainda uma sequência de Cauchy em $L^G(\Omega)$, então tomando $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos encontrar $k(\epsilon) > 0$, tal que para todo $k, k+p > k(\epsilon)$ tenhamos

$$\int_\Omega |u_{n_{k+p}} - u_{n_k}||v|\, dx < \epsilon,$$

para todo $v \in \mathcal{L}_{\tilde{G}}$ com $\rho(v, \tilde{G}) \leq 1$. Então pelo Lema de Fatou, fazendo $p \to \infty$ segue que

$$\int_\Omega |u_0 - u_{n_k}||v|\, dx \leq \epsilon, \tag{22}$$

para todo $v \in \mathcal{L}_{\tilde{G}}$ com $\rho(v, \tilde{G}) \leq 1$ e $k > k(\epsilon)$. Por (21) temos $u_0 - u_{n_k} \in L^G(\Omega)$. Como $u_{n_k} \in L^G(\Omega)$ então $u_0 \in L^G(\Omega)$. Além disso ainda por (20)

$$||u_0 - u_{n_k}||_G \leq \epsilon, \ \forall k > k(\epsilon).$$

Assim $\{u_{n_k}\}$ converge em $L^G(\Omega)$ para u_0 e portanto $\{u_n\}$ converge para u_0 em $L^G(\Omega)$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy que admite uma subsequência convergindo para u_0. □

Teorema 3.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se G e $\tilde{G}$ são N-funções complementares, então $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ e*

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \right| \leq ||u||_G ||v||_{\tilde{G}}.$$

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \right| \leq 2|u|_G |v|_{\tilde{G}}.$$

Demonstração. Dado $v \in L^{\tilde{G}}$, pelo Lema 3.12

$$\rho\left(\frac{v}{||v||_{\tilde{G}}}, \tilde{G} \right) \leq 1.$$

Portanto para cada $u \in L^G$, a definição da norma de Orlicz nos garante que

$$\left| \int_\Omega u(x) \frac{v(x)}{||v||_{\tilde{G}}} \, dx \right| \leq ||u||_G.$$

Para a segunda desigualdade, usando a desigualdade de Young temos

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|}{|u|_G} \frac{|v(x)|}{|v|_{\tilde{G}}} \, dx \leq \rho\left(\frac{|u|}{|u|_G}, G\right) + \rho\left(\frac{|v|}{|v|_{\tilde{G}}}, \tilde{G}\right) \leq 2.$$

□

Definição 3.8. *Sejam G_1 e G_2 N-funções. Dizemos que G_2 cresce mais lento que G_1 se existem constantes positivas k e t_0 tais que*

$$G_2(t) \leq G_1(kt), \ \forall t \geq t_0,$$

e escrevemos $G_2 \prec G_1$.

Exemplo: $G_1 \prec G_2$, onde $G_1(t) = |t|^p$ e $G_2(t) = |t|^q$, com $1 < p < q$.

Teorema 3.6. *Se $G_2 \prec G_1$, então $L^{G_1} \hookrightarrow L^{G_2}$ continuamente.*

Demonstração. Tomemos constantes positivas λ e t_0 tais que

$$G_2(t) \leq G_1(\lambda t), \ \forall t \geq t_0. \tag{23}$$

e consideremos $t_1 = G_2^{-1}\left(\frac{1}{2|\Omega|}\right)$ e $\Lambda = \max\{1, \frac{G_2(t_0)}{G_1(\lambda t_1)}\}$.

Afirmação: Para $t > t_1$, tem-se $G_2(t) \leq \Lambda G_1(\lambda t)$.

De fato, se $t_1 \geq t_0$, então a desigualdade desejada segue diretamente de (22) e do fato que $\Lambda \geq 1$. Se $t_1 < t_0$ e $t > t_0$ também não há o que ser feito. Se $t_1 < t_0$ e $t_1 \leq t \leq t_0$, então $G_1(\lambda t_1) \leq G_1(\lambda t)$ e $G_2(t) \leq G_2(t_0)$. Nesse caso

$$G_2(t) \leq G_2(t_0) \frac{G_1(\lambda t)}{G_1(\lambda t_1)} \leq \Lambda G_1(\lambda t),$$

o que prova a afirmação feita.

Tomando $u \in L^{G_1}(\Omega)$ e definindo

$$K = \left\{ x \in \Omega; \frac{|u(x)|}{2\Lambda\lambda|u|_{G_1}} < t_1 \right\},$$

temos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega G_2\left(\frac{|u(x)|}{2\Lambda\lambda|u|_{G_1}}\right)dx &= \int_K G_2\left(\frac{|u(x)|}{2\Lambda\lambda|u|_{G_1}}\right)dx + \int_{\Omega\setminus K} G_2\left(\frac{|u(x)|}{2\Lambda\lambda|u|_{G_1}}\right)dx\\ &\leq \int_K G_2(t_1)\,dx + \frac{\Lambda}{2\Lambda}\int_{\Omega\setminus K} G_1\left(\frac{\lambda|u(x)|}{\lambda|u|_{G_1}}\right)dx\\ &= \int_K G_2(t_1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus K} G_1\left(\frac{|u(x)|}{|u|_{G_1}}\right)dx\\ &\leq G_2(t_1)|\Omega| + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus K} G_1\left(\frac{|u(x)|}{|u|_{G_1}}\right)dx\\ &\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

assim $|u|_{G_2} \leq 2\Lambda\lambda|u|_{G_1}$.

Além disso por (22)

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}, G_2\right) \leq G_2(t_0)|\Omega| + \rho(u, G_1) < \infty$$

$\Rightarrow \frac{u}{\lambda} \in \mathcal{L}_{G_2} \Rightarrow u \in \langle\mathcal{L}_{G_2}\rangle = L^{G_2}$. Portanto $L^{G_1} \subset L^{G_2}$. $\square$

Agora vamos desenvolver ferramentas para discussão de separabilidade e reflexividade dos espaços de Orlicz. Começamos por definir uma noção de convergência que será útil adiante para a separabilidade destes espaços.

Definição 3.9. *Dizemos que uma sequência $\{u_n\} \in L^G(\Omega)$ converge em média para $u \in L^G(\Omega)$ quando*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega G(u_n - u)\,dx = 0$$

Sabemos pelo Lema 3.12 e Proposição 3.8 que se $u \in L^G$ e $||u||_G \leq 1$, então $\rho(u, G) \leq 2|u|_G$. Assim se $u_n \to u$ em L^G, então segue que u_n converge em média para u. O próximo resultado nos dá uma condição para que esses dois tipos de convergência sejam equivalentes.

Teorema 3.7. *Seja G uma N-função que satisfaz a condição $\triangle_2$. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega G(u_n)\,dx = 0,$$

então $u_n \to 0$, em $L^G(\Omega)$.

Demonstração. Como $G \in \triangle_2$ então para cada $\epsilon \in (0,1)$ existem constantes positivas k_ϵ e t_ϵ satisfazendo

$$G\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \leq k_\epsilon G(t), \;\; \forall t \geq t_\epsilon.$$

Daí
$$\int_\Omega G\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right)\,dx \leq \int_{\{|u_n|\leq t_\epsilon\}} G\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right)\,dx + k_\epsilon \int_{\{|u_n|>t_\epsilon\}} G(u_n)\,dx.$$
Desde que u_n converge para zero em média, então $k_\epsilon \int_{\{|u_n|>t_\epsilon\}} G(u_n)\,dx \to 0$, quando $n \to \infty$.

Afirmação: $\int_{\{|u_n|\leq t_\epsilon\}} G\left(\frac{u_n}{\epsilon}\right)\,dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como $\int_\Omega G(u_n)\,dx \to 0$ segue que existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que $G(u_{n_k}(x)) \to 0$ q.t.p em Ω, então $u_{n_k}(x) \to 0$ q.t.p em Ω. Assim,
$$G\left(\frac{u_{n_k}(x)}{\epsilon}\right)\chi_{\{|u_{n_k}|\leq t_\epsilon\}}(x) \to 0, \text{q.t.p em } \Omega, \tag{24}$$
onde $\chi_{\{|u_{n_k}|\leq t_\epsilon\}}(x)$ é a função característica do conjunto $\{x \in \Omega; |u_{n_k}(x)| \leq t_\epsilon\}$. Observe ainda que
$$G\left(\frac{u_{n_k}(x)}{\epsilon}\right)\chi_{\{|u_{n_k}|\leq t_\epsilon\}}(x) \leq G\left(\frac{t_\epsilon}{\epsilon}\right) \in L^1(\Omega). \tag{25}$$
Por (23) e (24), segue do teorema da convergencia dominiada temos que
$$\int_\Omega G\left(\frac{u_{n_k}(x)}{\epsilon}\right)\chi_{\{|u_{n_k}|\leq t_\epsilon\}}(x)\,dx \to 0,$$
logo,
$$\int_\Omega G\left(\frac{u_{n_k}}{\epsilon}\right)\,dx \leq 1$$
e portanto $|u_{n_k}|_G \leq \epsilon$, para todo n_k suficientemente grande. Esse argumento nos mostra que toda subsequência de $\{u_n\}$ admite subsequência convergindo para zero, portanto $\{u_n\}$ converge para zero. $\square$

Definição 3.10. *Definimos $E^G(\Omega)$ como sendo o fecho em $L^G(\Omega)$ do espaço das funções essencialmente limitadas $L^\infty(\Omega)$, isto é*
$$E^G(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_G}$$
e esse é um espaço normado com a norma induzida de $L^G(\Omega)$.

Teorema 3.8. *Seja G uma N-função. Então $E^G(\Omega) = L^G(\Omega)$ se, e somente se, $G \in \Delta_2$.*

Demonstração. Seja $u \in E^G(\Omega)$, então existe $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tal que $|u - u_0|_G < \frac{1}{2}$. Desse modo, pelo Lema 3.4
$$\frac{1}{2|u-u_0|_G}\int_\Omega G(2u(x) - 2u_0(x))\,dx < \int_\Omega G\left(\frac{u(x)-u_0(x)}{|u-u_0|_G}\right)\,dx \leq 1$$

donde

$$\int_\Omega G(2u(x)-2u_0(x))\,dx < 2|u-u_0|_G < 1$$

e portanto $2u-2u_0 \in \mathcal{L}_G$. Como $u_0 \in L^\infty \subset \mathcal{L}_G$, G é convexa e par temos que

$$u = \frac{1}{2}(2u-2u_0) + \frac{1}{2}(2u_0) \in \mathcal{L}_G(\Omega).$$

Portanto $E^G \subset \mathcal{L}_G$. Logo se $E^G(\Omega) = L^G(\Omega)$ então devemos ter $G \in \Delta_2$, caso contrário pelo Teorema 3.2

$$E^G(\Omega) \subset \mathcal{L}_G(\Omega) \subsetneq L^G(\Omega).$$

Reciprocamente, suponha que $G \in \Delta_2$ daí pelo Teorema 3.2 temos $\mathcal{L}_G = L^G$. Considere $u \in L^G(\Omega)$ e uma sequência de funções formada por trucamentos da função u,

$$u(x) = \begin{cases} u(x), \text{se } |u(x)| \leq n, \\ 0, \quad \text{se } |u(x)| > n. \end{cases}$$

Como $G(|u(x)-u_n(x)|) \leq G(|u(x)|) \in L^1(\Omega)$, então pelo teorema da convergência dominada temos

$$\int_\Omega G(|u(x)-u_n(x)|)\,dx \to 0$$

e então segue do Teorema 3.7 que $u_n \to u$ em $L^G(\Omega)$, portanto $u \in E^G(\Omega)$. □

Teorema 3.9. *O espaço $E^G(\Omega)$ é separável.*

Demonstração. Seja $u \in L^\infty(\Omega)$, daí pelo teorema de Luzin de análise real existe uma sequência de funções contínuas $\{u_n\}$ tais que $|u_n(x)| \leq ||u||_\infty$ q.t.p $x \in \Omega$ e

$$|\Omega_n| = |\{x \in \Omega; u(x) \neq u_n(x)\}| < \frac{1}{n}.$$

Desse modo

$$\begin{aligned} ||u-u_n||_G &= \sup_{\rho(v,\tilde{G})\leq 1} \left| \int_\Omega (u_n(x)-u(x))v(x)\,dx \right| \\ &\leq 2||u||_\infty \sup_{\rho(v,\tilde{G})\leq 1} \int_{\Omega_n} |v(x)|\,dx = 2||u||_\infty ||\chi_{\Omega_n}||_G. \end{aligned}$$

Pelo comentario que segue a Proposição 3.7 temos ainda que $|\chi_{\Omega_n}|_G = \frac{1}{G^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega_n|}\right)}$. Portanto $|\chi_{\Omega_n}|_G \to \infty$ quando $n \to \infty$, e então

$$||u-u_n||_G \leq 2||u||_\infty ||\chi_{\Omega_n}||_G \to 0.$$

Provamos que o conjunto das funções contínuas é denso em $E^G(\Omega)$. Por outro lado, para cada função contínua u podemos encontrar uma sequência de polinômios com coeficientes racionais que convergem uniformemente para u. Vamos mostrar que convergência uniforme implica em convergência na norma de Orlicz $||\cdot||_G$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$ e $x \in \Omega$.

$$\begin{aligned} ||u_n - u||_G &\leq \sup_{\rho(v,\tilde{G})\leq 1} \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||v(x)|\, dx \\ &\leq \epsilon \sup_{\rho(v,\tilde{G})\leq 1} \int_\Omega |v(x)|\, dx \\ &\overset{Young}{\leq} \epsilon \left(\int_\Omega G(1)\, dx + 1 \right), \end{aligned}$$

portanto $||u_n - u||_G \to 0$. Logo o conjunto enumerável formado pelos polinômios que tem coeficientes racionais é denso em $E^G(\Omega)$. □

Corolário 3.3. *Se $G \in \triangle_2$ então $L^G(\Omega)$ é separável.*

Demonstração. Se $G \in \triangle_2$, então pelo Teorema 3.8 temos $E^G(\Omega) = L^G(\Omega)$ e portanto pelo teorema anterior segue que $L^G(\Omega)$ é separável. □

Observação: A recíproca do Corolario 3.3 é verdadeira. Em RIBEIRO (2006) prova-se que se $G \notin \triangle_2$, então $L^G(\Omega)$ pode não ser separável.

O espaço vetorial de todos os funcionais lineares $T : L^G \to \mathbb{R}$ contínuos é chamado de espaço dual de L^G e denotado por $(L^G)^*$. Podemos munir esse espaço com as seguintes normas

$$||T||_G^* = \sup\{|T(u)|; ||u||_G \leq 1\}$$

$$|T|_G^* = \sup\{|T(u)|; |u|_G \leq 1\}.$$

Como $|\cdot|_G \leq ||\cdot||_G \leq 2|\cdot|_G$ segue que $||T||_G^* \leq |T|_G^*$. Agora

$$|u|_G \leq 1 \Rightarrow 2|u|_G \leq 2 \Rightarrow ||u||_G \leq 2 \Rightarrow \frac{||u||_G}{2} \leq 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} |T|_G^* &= \sup\{|T(u)|; |u|_G \leq 1\} \leq \sup\{|T(u)|; \frac{||u||_G}{2} \leq 1\} \\ &= \sup\{|T(2u')|; ||u'||_G \leq 1\} = \sup\{|2T(u')|; ||u'||_G \leq 1\} = 2||T||_G^* \end{aligned}$$

Para cada $v \in L^{\tilde{G}}$, podemos definir um funcional $T_v : L^G \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx. \tag{26}$$

Assim a desigualdade de Hölder garante que este funcional linear é contínuo pois,

$$|T_v(u)| = \left| \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \right| \le ||u||_G ||v||_{\tilde{G}}$$

e portanto $T_v \in (L^G)^*$ e

$$|T_v|_G^* = \sup \left\{ \left| \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \right| ; |u|_G \le 1 \right\} = ||v||_{\tilde{G}}.$$

Logo a função

$$\begin{aligned} \phi : & L^{\tilde{G}} \longrightarrow (L^G)^* \\ & v \longmapsto T_v \end{aligned}$$

define uma imersão isométrica, isto é uma função linear que preserva a norma, entre estes dois espaços.

É natural questionar se todo funcional linear em $(L^G)^*$ é da forma (26). O resultado a seguir mostra que nem sempre isso ocorre.

Proposição 3.9. *Se $G \notin \Delta_2$ então ϕ não é sobrejetiva.*

Demonstração. Podemos por hipótese tomar $u_0 \in L^G \setminus E^G$. Defina um funcional linear contínuo $T \in \langle E^G, u_0 \rangle$ tal que $T(u) = 0$ se $u \in E^G$ e $T(u_0) = 1$. Estendemos T a um funcional linear contínuo em L^G, pelo teorema de Hahn-Banach. Suponha que T é dado por (26) para alguma função $v \in L^{\tilde{G}}$. Considere a sequência de trucamentos

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \text{se } |v(x)| \le n \\ 0, \quad \text{se } |v(x)| > n. \end{cases}$$

Logo, cada v_n é limitada e portanto pertence a E^G. Porém temos para a sequência de funções não-negativas, $v_n(x)v(x) \to v^2(x)$ q.t.p. Assim pelo Lema de Fatou-Lebesgue,

$$0 = \sup_n T(v_n) = \sup_n \int_\Omega v_n(x)v(x)\,dx \ge \int_\Omega v^2(x)\,dx$$

donde concluimos que $v = 0$, que é um absurdo pois $T(u_0) = 1$. $\square$

Considerando ao invés do espaço $(L^G)^*$ o dual do espaço E^G munido da norma de Luxemburgo, denotado por $(E^G)^*$ temos o seguinte resultado.

Teorema 3.10. *A imersão*

$$\begin{aligned}\phi :L^{\tilde{G}} &\longrightarrow (E^G)^*\\ v &\longmapsto T_v\end{aligned}$$

é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $T \in (E^G)^*$. Considere $\Sigma = \{U \subset \Omega; U$ é mensurável$\}$, definimos em Σ a função

$$\begin{aligned}F :\Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}\\ U &\longmapsto F(U) = T(\chi(\cdot, U))\end{aligned}$$

assim

$$|F(U)| = |T(\chi(\cdot, U))| \leq |T|_G^* |\chi(\cdot, U)|_G = \frac{|T|_G^*}{G^{-1}\left(\frac{1}{|U|}\right)} \overset{|U|\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donde pelo teorema de Radon-Nikodyn podemos encontrar uma função v mensurável tal que

$$F(U) = \int_U v(x)\, dx$$

portanto se w é uma função mensurável simples $w(x) = \sum \alpha_i \chi(x, U_i)$, vemos que

$$\begin{aligned}T(w) &= T\left(\sum \alpha_i \chi(\cdot, U_i)\right) = \sum \alpha_i T(\chi(\cdot, U_i)) = \sum \alpha_i F(U_i)\\ &= \sum \alpha_i \int_{U_i} v(x)\, dx = \int_\Omega w(x)v(x)\, dx\end{aligned}$$

entretanto o conjunto das funções simples é denso em E^G, consequentemente

$$T(w) = \int_\Omega w(x)v(x)\, dx \quad \forall w \in E^G(\Omega).$$

Para concluir resta mostrar que $v \in L^{\tilde{G}}(\Omega)$. Considerando $u \in L^G$ e a sequência formada por trucamentos da função u dada por

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se} |u(x)| \leq n \\ 0, & \text{se} |u(x)| > n, \end{cases}$$

temos que $||u_n||_G \leq ||u||_G$ e $\lim_{n\to\infty} |u_n(x)v(x)| = |u(x)v(x)|$ q.t.p $x \in \Omega$. Daí pelo Lema de Fatou

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)\,dx\right| \leq \sup_n \left\{\int_\Omega |u_n v|\,dx\right\} = \sup_n |T(|u_n|sgnv)|)$$
$$\leq ||T||_G^* \sup_n ||u_n||_G \leq ||T||_G^* ||u||_G < \infty,$$

onde acima usamos que $|T(u)| = \left|T\left(\frac{||u||_G u}{||u||_G}\right)\right| = ||u||_G \left|T\left(\frac{u}{||u||_G}\right)\right| \leq ||u||_G ||T||_G^*$. Portanto $v \in L^{\tilde{G}}(\Omega)$. □

Finalmente a Proposição 3.9 e o Teorema 3.10 nos dizem que

$$(L^G)^* = L^{\tilde{G}} \Leftrightarrow G \in \triangle_2$$
$$(L^{\tilde{G}})^* = L^G \Leftrightarrow \tilde{G} \in \triangle_2 \ .$$

Corolário 3.4. *L^G é um espaço reflexivo se, e somente se G é $\triangle$ −regular.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 3.9, do Teorema 3.10 e do Corolário 3.1. □

3.4 Espaços de Orlicz-Sobolev

Nesta seção estudaremos os espaços de Orlicz-Sobolev, estes são obtidos à partir dos espaços de Orlicz da mesma maneira em que obtemos os espaços de Sobolev a partir dos espaços de Lebesgue.

Definição 3.11. *Dada G uma N-função, definimos o espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,G}(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial*

$$W^{1,G}(\Omega) = \{u \in L^G(\Omega); \exists f_1, ..., f_n \in L^G(\Omega) \ \textit{satisfazendo} \int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx$$
$$= -\int_\Omega f_i \phi\,dx, \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n\}.$$

Se $u \in W^{1,G}(\Omega)$, então pelo lema de Du Bois Raymond tais funções f_i são únicas e são chamadas derivadas fracas de u. Denotaremos $f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. Podemos identificar o espaço $W^{1,G}$ como um subespaço de um produto cartesiano de

$L^G, n+1$ vezes: à saber

$$\varphi : W^{1,G} \longrightarrow L^G \times L^G \times \cdots \times L^G = \prod_{n+1} L^G$$
$$u \longmapsto (u, \nabla u).$$

Definimos então duas normas em $W^{1,G}$ imediatamente através da definição natural de norma em $\prod_{n+1} L^G$. Se $u \in W^{1,G}$, sejam

$$||u||_{W^{1,G}} = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ ||u||_G, \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_G \right\}$$

$$|u|_{W^{1,G}} = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ |u|_G, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_G \right\}$$

Logo segue da Proposição 3.8 que

$$|u|_{W^{1,G}} \leq ||u||_{W^{1,G}} \leq 2|u|_{W^{1,G}}.$$

Teorema 3.11. *$W^{1,G}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Uma vez que φ define uma imersão isométrica e $\prod_{n+1} L^G$ é um espaço de Banach, é suficiente mostrar que a imagem de tal imersão é fechada. Sendo assim, tomemos

$$(u_k, \nabla u_k) \to (u, u_1, ..., u_n),$$

quando $k \to \infty$. Nosso objetivo é mostrar que $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ para cada $i = 1, ..., n$. Como $(u_k, \nabla u_k)$ converge em $\prod_{n+1} L^G$ para $(u, u_1, ..., u_n)$, então $u_k \to u$ e $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to u_i$ em L^G, para cada i.

Agora, fixado $\phi \in C_0^\infty$, logo $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^{\tilde{G}}$, onde $\tilde{G}$ é a N-função complementar a G. Portanto

$$v \longmapsto \int_\Omega v(x)\phi(x)\, dx \;\text{ e }\; v \longmapsto \int_\Omega v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx$$

definem funcionais lineares contínuos em L^G. Logo

$$\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx \to \int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx \;\text{ e }\; \int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\phi(x)\, dx \to \int_\Omega u_i(x)\phi(x)\, dx.$$

Assim, como

$$\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\phi(x)\, dx,$$

concluímos que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega u_i(x)\phi(x)\, dx,$$

para $i = 1, ..., n$. Portanto, como ϕ é arbitrário temos por definição que $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, para cada i. □

Definimos o espaço W^1E^G, de maneira análoga à Definição 3.11, dessa forma muitas das propriedades estudadas nos espaços L^G e E^G serão facilmente verificadas para os espaços $W^{1,G}$ e W^1E^G respectivamente.

Teorema 3.12.

1. *W^1E^G é separável.*
2. *$W^{1,G} = W^1E^G$ é separável se $G \in \Delta_2$.*
3. *Para cada $T \in (W^1E^G)^*$ existem $v_i \in L^{\tilde{G}}, i = 0, 1, ..., n$ tais que*

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v_0(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v_i(x)\,dx.$$

4. *$W^{1,G}$ é reflexivo se e somente se G é Δ −regular.*

Demonstração.

1. Segue do Teorema 3.9.
2. Segue do Corolário 3.3 e do Teorema 3.8.
3. Segue do Teorema 3.10.
4. Segue imediatamente do Corolário 3.4

□

Dado um inteiro positivo k, vamos agora definir um espaço de funções cujo os elementos tem derivadas fracas de ordem maior do que 1 e pertencem ao espaço $L^G(\Omega)$. Se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n = k$ então usamos a seguinte notação para uma função u que tenha derivadas até ordem k,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

Definição 3.12. *O espaço de Orlicz-Sobolev*

$$W^{k,G}(\Omega)$$

consiste de todas as funções $u \in L^G(\Omega)$ tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido das distribuições e pertence a $L^G(\Omega)$. Definimos o espaço $W^kE^G(\Omega)$ de forma análoga.

Lema 3.13. *Seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\,dx = 1$. Considere o standard mollifier*

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Seja G uma N-função e $f \in E^G$ então $f * \eta_\epsilon \in E^G$ e $|\eta_\epsilon * f - f|_G \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

Demonstração. Seja $\tilde{G}$ a N-função complementar a G e $v \in L^{\tilde{G}}$ com $|v|_{\tilde{G}} \leq 1$. Então

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} ((\eta_\epsilon * f)(x) - f(x))v(x)\,dx\right| &= \left|\int \left(\int f(x-y)\eta_\epsilon(y)\,dy - f(x)\right) v(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int \left(\int f(x-y)\eta_\epsilon(y)\,dy - \int f(x)\eta_\epsilon(y)\,dy\right) v(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int \left\{\int (f(x-y) - f(x))v(x)\,dx\right\} \eta_\epsilon(y)\,dy\right| \\
&\leq \int \left|\int (f(x-y) - f(x))v(x)\,dx\right| |\eta_\epsilon(y)|\,dy \\
&\overset{Holder}{\leq} 2|v|_{\tilde{G}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_y - f|_G |\eta_\epsilon(y)|\,dy
\end{aligned}$$

onde $f_y := f(x-y)$. Portanto

$$|\eta_\epsilon * f - f|_G \leq 2\int |f_y - f|_G \eta_\epsilon(y)\,dy = 2\int_{\mathbb{R}^n} |f_{\epsilon y} - f|_G \eta(y)\,dy.$$

Dado $\delta > 0$, como as funções contínuas são densas em E^G podemos encontrar uma função contínua $\tilde{f}$ tal que $|f - \tilde{f}|_G < \frac{\delta}{6}$. Logo $|f_{\epsilon y} - \tilde{f}_{\epsilon y}|_G < \frac{\delta}{6}$ e para ϵ suficientemente pequeno como $\tilde{f}$ é contínua $|\tilde{f}_{\epsilon y} - \tilde{f}|_G < \frac{\delta}{6}$, $\forall |y| \leq 1$. Assim

$$\begin{aligned}
|f_{\epsilon y} - f|_G &\leq |f_{\epsilon y} - \tilde{f}_{\epsilon y}|_G + |\tilde{f}_{\epsilon y} - \tilde{f}|_G + |\tilde{f} - f|_G \\
&\leq 3\frac{\delta}{6} = \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|\eta_\epsilon * f - f|_G \leq 2\int_{|y|\leq 1} \frac{\delta}{2}\eta(y)\,dy = \delta,$$

para ϵ suficientemente pequeno. □

Teorema 3.13. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^m E^G(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $u \in W^m E^G(\mathbb{R}^n)$ isto é $D^\alpha u \in E^G(\mathbb{R}^n)$ para $0 \leq |\alpha| \leq m$. Afirmamos que podemos supor sem perda de generalidade que a função u tem suporte compacto, pois caso contrário tomamos $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo;

- $\eta(x) = 1$ se $|x| \leq 1$,
- $\eta(x) = 0$ se $|x| \geq 2$,
- $|D^\alpha \eta(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Para $\epsilon > 0$, seja $\eta_\epsilon(x) = \eta(\epsilon x)$. Então $\eta_\epsilon(x) = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{\epsilon}$, além disso

$$|D^\alpha \eta_\epsilon(x)| \leq M\epsilon^{|\alpha|} \leq M$$

sempre que $\epsilon \leq 1$. Se $u \in W^m E^G(\mathbb{R}^n)$ então $u_\epsilon = \eta_\epsilon u \in W^m E^G(\mathbb{R}^n)$ e tem suporte compacto. Para $0 < \epsilon \leq 1$ e $|\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha u_\epsilon(x)| = \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} \eta_\epsilon(x) \right| \leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta u(x)|,$$

logo

$$\int G\left(\frac{|D^\alpha u_\epsilon(x)|}{M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta u|_G} \right) dx \leq \int G\left(\frac{|D^\alpha u_\epsilon(x)|}{|D^\alpha u_\epsilon|_G} \right) dx \leq 1,$$

daí

$$|D^\alpha u_\epsilon|_G \leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta u|_G, \tag{27}$$

e portanto

$$|u - u_\epsilon|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n)} = |u - u_\epsilon|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))} \leq |u|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))} + |u_\epsilon|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))}.$$

Usando (27) segue que

$$|u - u_\epsilon|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))},$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende de M e m.

Resta mostrarmos que $|u|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Com efeito, como $u \in E^G \subset \mathcal{L}_G \Rightarrow \forall \lambda > 0,\ \frac{u}{\lambda} \in E^G \subset \mathcal{L}_G$. Daí como

$$G\left(\frac{|D^\alpha u(x)|}{\lambda} \right) \chi(x, \mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon^{-1})) \to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,$$

segue do teorema da convergência monotóna que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1})} G\left(\frac{|D^\alpha u(x)|}{\lambda} \right) dx = 0, \ \ \forall \lambda > 0.$$

Logo dado $\delta > 0$ existe um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1})} G\left(\frac{|D^\alpha u(x)|}{\delta} \right) dx \leq 1 \ \Rightarrow |D^\alpha u|_{E(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))} < \delta,$$

e então

$$|u|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))} = \max_\alpha \{|D^\alpha u|_G\} < \delta \Rightarrow |u|_{W^m E^G(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon^{-1}))} \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Assumimos agora que $u \in W^m E^G(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto. Seja η_ϵ o standard mollifier definido como no Lema 3.13, tomamos

$$u_\epsilon(x) = (u * \eta_\epsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t)\eta_\epsilon(x-t)\,dt$$

daí segue

$$supp(u * \eta_\epsilon) \subset \overline{supp(u) + supp(\eta_\epsilon)} \tag{28}$$

então como $D^\alpha u \in E^G$ e $\eta_\epsilon \in C_0^\infty,\ 0 \leq |\alpha| \leq m$,

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\epsilon(x) &= D^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(t)\eta_\epsilon(x-t)\,dt \right) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t) D^\alpha \eta_\epsilon(x-t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(t)\eta_\epsilon(x-t)\,dt = (D^\alpha u * \eta_\epsilon)(x). \end{aligned}$$

Daí segue de (27) que $u_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall \epsilon > 0$. Além disso usando o Lema 3.13 temos para $0 \leq |\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u|_G = |(D^\alpha u * \eta_\epsilon) - D^\alpha u|_G \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

Portanto

$$|u_\epsilon - u|_{W^1E^G(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

$\square$

Teorema 3.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então $C^\infty(\Omega)$ é denso em $W^mE^G(\Omega)$.*

Demonstração. Consideremos o aberto Ω_k definido por

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega; |x| < k \text{ e } dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\},$$

para $k = 1, 2, \ldots$. Podemos também definir Ω_0 e Ω_{-1} para serem conjuntos vazios. Então

$$\mathcal{O} = \{U_k; U_k = \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c,\ k = 1, 2, \ldots\},$$

é uma coleção de subconjuntos de Ω abertos que cobrem Ω. Seja $\sum_k \psi_k = 1$ uma partição da unidade C^∞ para Ω subordinada a $\mathcal{O}$. Assim temos $supp(\psi_k) \subset \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}}$. Seja $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, onde η é o standard mollifier, como foi visto na seção de preliminares temos que $\eta_\epsilon \in C^\infty,\ \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\,dx = 1$, e $supp(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$.

Afirmação 1: Se $\epsilon \in (0, \frac{1}{(k+1)(k+2)})$, então $supp\,[\eta_\epsilon * (\psi_k u)] \subset \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k-2}}$.

prova da afirmação 1: Com efeito, $supp(\eta_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$ e $supp(\psi_k u) \subset \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}}$, logo

$$supp\,[\eta_\epsilon * (\psi_k u)] \subset \overline{supp\eta_\epsilon + supp(\psi_k u)} \subset \overline{B(0,\epsilon) + \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c}.$$

Vamos então mostrar que $\overline{B(0,\epsilon) + \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c} \subset \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k-2}}$.
Seja $z \in \overline{B(0,\epsilon) + \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c}$ então existem sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ tais que $x_n + y_n \to z$ com $x_n \in \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c$ e $y_n \in B(0,\epsilon)$, então $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < k + 1 + \epsilon$

$$\Rightarrow |z| \le k + 1 + \frac{1}{(k+1)(k+2)} < k + 2.$$

Agora vamos supor que $x_n \in (\Omega_{k-1})^c$ pois caso contrário tomamos uma sequência em $(\Omega_{k-1})^c$convergindo para x_n e repetimos o mesmo argumento que mostraremos a seguir trocando x_n pelos elementos dessa sequência obtida. Dado que $x_n \in (\Omega_{k-1})^c$ temos duas possibilidades.

1. Caso $|x_n| \ge k - 1$.
   $|x_n + y_n| \ge |x_n| - |y_n| \ge k - 1 - \frac{1}{(k+1)(k+2)} > k - 2.$
2. Caso $dist(x_n, \partial\Omega) < \frac{1}{k-1}$.
   Seja $w \in \partial\Omega$, então

$$|x_n + y_n - w| \le |x_n - w| + |y_n| < |x_n - w| + \epsilon < |x_n - w| + \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

   Daí sendo $dist(x_n + y_n, \partial\Omega) = \inf\{|x_n + y_n - w|;\, w \in \partial\Omega\}$, segue que

$$dist(x_n + y_n, \partial\Omega) \le dist(x_n, \partial) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \le \frac{1}{k-1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k-2}.$$

Fazendo $n \to \infty$ segue de 1 e 2 que , $|z| > k - 2$ ou $dist(z, \partial\Omega) < \frac{1}{k-2}$, logo $z \in (\overline{\Omega_{k-2}})^c$.
Por fim para todo $w \in \partial\Omega$

$$|x_n + y_n - w| \ge |x_n - w| - |y_n| > |x_n| - \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

então

$$dist(x_n + y_n, \partial\Omega) \ge dist(x_n, \partial\Omega) - \frac{1}{(k+1)(k+2)} > \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} > \frac{1}{k+2}.$$

Portanto $dist(z, \partial\Omega) > \frac{1}{k+2}$ e então $z \in \Omega_{k+2}$. $\square$(Afirmação 1)

Agora para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $\epsilon_k \in (0, \frac{1}{(k+1)(k+2)})$ e obtemos uma família formada por standard convolution mollification(ver a seção de preliminares) $\eta_{\epsilon_k} \in C_0^\infty$

tais que

$$supp(\eta_{\epsilon_k}) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n; |x| < \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}. \tag{29}$$

Além disso $\forall k \in \mathbb{N},\ \psi_k u \in W^m E^G(\mathbb{R}^n)$, daí segue da demonstração do Teorema 3.13 que para todo multi-índice α com $0 \leq |\alpha| \leq m$ e $\forall \epsilon > 0$

$$|\eta_{\epsilon_k} * D^\alpha(\psi_k u) - D^\alpha(\psi_k u)|_G \leq \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{30}$$

A afirmação 1 nos diz que

$$supp(\eta_{\epsilon_k} * D^\alpha(\psi_k u)) \subset \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k-2}}. \tag{31}$$

Afirmação 2: A série $v = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\epsilon_k} * \psi_k u$ converge e define uma função $v \in C^\infty(\Omega)$.

Prova da afirmação 2: Com efeito é suficiente mostrarmos que para todo $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ somente uma quantidade finita dos termos da soma pode ser não nulo. Assim em vista de (30) vamos mostrar que a família $\{V_k; V_k = \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k-2}}, k = 1, 2, ...\}$ que é uma cobertura localmente finita de Ω.
Seja $p \in \Omega$ então $p \in \Omega_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo existe uma vizinhança $W_p \subset \Omega_{n_0}$ que contém p. Logo $W_p \cap V_{n_0+2} = \varnothing$ e como $\Omega_k \subset \Omega_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N}$ segue que $W_p \subset \Omega_j,\ \forall j \geq n_0$, então $W_p \cap V_j = \varnothing,\ \ \forall j \geq n_0 + 2$. Portanto

$$W_p \subset \bigcup_{j=1}^{n_0+1} V_j \setminus \bigcup_{j=n_0+2}^{\infty} Vj. \qquad\qquad \square(\text{afirmação2})$$

Seja $k \in \mathbb{N}$, então por (29), a convexidade de G e o fato de que se $x \in \Omega_k$ então $\sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(x)u(x) = u(x)$, segue que para todo multi-índice α com $0 \leq |\alpha| \leq m$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k} G\left(\frac{D^\alpha v - D^\alpha u}{\epsilon}\right) dx &= \int_{\Omega_k} G\left(\sum_{j=1}^{k+1} (\eta_{\epsilon_k} * D^\alpha(\psi_k u) - D^\alpha(\psi_k u))\frac{2^j}{2^j \epsilon}\right) dx \\ &\leq \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} \int_{\Omega_k} G\left((\eta_{\epsilon_k} * D^\alpha(\psi_k u) - D^\alpha(\psi_k u))\frac{2^j}{\epsilon}\right) dx \leq 1.\end{aligned}$$

Portanto fazendo $k \to \infty$ segue do teorema da convergência monótonona que

$$\int_\Omega G\left(\frac{D^\alpha v - D^\alpha u}{\epsilon}\right) dx \leq 1,$$

logo $|v - u|_{W^m E^G(\Omega)} = \max_\alpha |D^\alpha v - D^\alpha u|_G \leq \epsilon$. Isso mostra que dada $u \in W^m E^G(\Omega)$ e $\epsilon > 0$ existe uma função $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $|v - u|_{W^m E^G(\Omega)} \leq \epsilon$. $\square$

4 UM PROBLEMA DE MINIMO EM ESPAÇOS DE ORLICZ

Nosso objetivo para o restante do trabalho é estudarmos a existência e posteriormente a Hölder continuidade de funções $u:\Omega\to\mathbb{R}^n$ que minimizam o funcional

$$\mathcal{J}(v)=\int_\Omega G(|\nabla v(x)|)\,dx$$

no conjunto

$$K=\left\{v\in W^{1,1}(\Omega);\int_\Omega G(|\nabla v(x)|)\,dx<\infty \text{ e } v=\varphi_0 \text{ em } \partial\Omega\right\}.$$

Aqui, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave e φ_0 uma função limitada com

$$\int_\Omega G(|\nabla\varphi_0(x)|)\,dx<\infty,$$

onde estamos considerando derivadas fracas, e $G:[0,\infty)\to[0,\infty)$ é uma N-função satisfazendo condições apropriadas introduzidas por G.Lieberman no estudo da teoria de regularidade interior para equações elípticas da forma

$$\Delta_g u:=div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=B(x,u,\nabla u).$$

Mais precisamente G satisfaz as seguintes condições
(i) $G'(t)=g(t)$, onde $g\in C^0([0,+\infty))\cap C^1((0,+\infty))$,
(ii) $0<\delta\le\frac{tg'(t)}{g(t)}\le g_0,\ \forall t>0$ para certas constantes δ e g_0.

Neste capítulo veremos que as condições assumidas por Lieberman garantem que

$$u \text{ é mínimo de } J(v) \text{ sobre K } \Longrightarrow \Delta_g u=0.$$

Salientamos ainda que as condições acima para G e g garantem que a EDP acima é uma equação uniformemente elíptica(da forma não-divergente) com constantes elípticas dependendo apenas de δ, g_0 em subconjuntos de Ω tal que $\nabla u\neq 0$.

Com respeito a quantidade de N-funções que satisfazem as condições (i) e (ii) observemos que este número é expressivo. Considere funções $G'=g$ tais que $g(t)=t^p$ com $\delta=g_0=p$, $g(t)=at^p+bt^q$ com $a,b,p,q>0$ e $\delta=min\{p,q\}$ e $g_0=max\{p,q\}$ e $g(t)=t^p log(at+b)$ com $p,a,b>0$ onde neste caso $\delta=p$ e $g_0=p+1$.
Além disso podemos verificar que qualquer combinação linear com coeficiente positivos de funções que satisfazem as condições (i) e (ii) também satisfazem essas condições. Com efeito considerando as funções g_1,g_2 com as constantes δ_0^1,g_0^1 e δ_0^2,g_0^2 respectivamente então $g=c_1g_1+c_2g_2$ satisfaz $(i),(ii)$ com $\delta_0=min\{\delta_0^1,\delta_0^2\}$ e $g_0=\max\{g_0^1,g_0^2\}$. Veja também

que o produto de funções que satisfazem as condições (i) e (ii) também satisfaz essas condições , pois se $g = g_1 g_2$ então

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{tg_1'(t)g(t)_2 + tg_1(t)g_2'(t)}{g_1(t)g_2(t)} = \frac{tg_1'(t)}{g_1(t)} + \frac{tg_2'(t)}{g_2(t)}$$

basta tomar $\delta = \delta_0^1 + \delta_0^2$ e $g_0 = g_0^1 + g_0^2$. Por fim se $g(t) = g_1(g_2(t))$ então como

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{tg_1'(g_2(t))g_2'(t)}{g_1(g_2(t))} = \frac{g_2(t)g_1'(g_2(t))tg_2'(t)}{g_1(g_2(t))g_2(t)}$$

segue que g satisfaz as condições (i) e (ii) com $\delta = \delta_0^1\delta_0^2$ e $g_0 = g_0^1 g_0^2$. Tudo isso deixa evidente que a quantidade de funções que satisfazem as condições (i) e (ii) é bem expressiva.

Lema 4.1. *Seja G uma N-função satisfazendo as condições (i) e (ii). Então*
(g_1) $\min\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t),\ \forall t, s > 0$
(g_2) $\frac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t),\ \forall t \geq 0,$
(G_1) $\min\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}\frac{G(t)}{1+g_0} \leq G(st) \leq (1+g_0)\max\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}G(t),\ \forall s, t > 0.$
(G_2) $G(a+b) \leq 2^{g_0}(1+g_0)(G(a)+G(b)),\ \forall a, b > 0.$

Demonstração.
(g_1) Para $s \geq 1$ é suficiente mostrar que

$$s^\delta g(t) \leq g(st) \leq s^{g_0}g(t), \forall t > 0.$$

Considere a função $h(t) = t^{-g_0}g(t)$, por (ii) temos

$$h'(t) = -g_0 t^{-(g_0+1)}g(t) + t^{-g_0}g'(t) \leq 0,$$

logo h é uma função não-crescente e portanto $h(st) \leq h(t)$, e isso implica que $g(st) \leq s^{g_0}g(t)$. Da mesma forma se definirmos $h_0(t) = t^{-\delta}g(t)$ e por (ii) temos

$$h_0'(t) = -\delta t^{-(\delta+1)}g(t) + t^{-\delta}g'(t) > 0$$

logo h_0 é uma função crescente, então $h_0(st) \geq h_0(t)$ e isso implica que

$$s^\delta g(t) \leq g(st).$$

Para $s \in (0, s)$ temos que mostrar que

$$s^{g_0}g(t) \leq g(st) \leq s^\delta g(t),\ \forall t > 0.$$

Sendo h uma função não-crescente temos $h(st) \geq h(t)$ isso implica que

$$g(st) \geq s^{g_0} g(t).$$

Como h_0 é crescente segue que $h(st) \leq h(t)$, isso implica que $g(st) \leq s^{\delta} g(t)$.

(g_2) Com efeito, $\forall t \geq 0$,

$$G(t) = \int_0^t g(s)\, ds \leq \int_0^t g(t)\, ds \leq tg(t)$$

e por (ii)

$$G(t) = \frac{1}{g_0}\int_0^t g_0 g(s)\, ds \geq \frac{1}{g_0}\int_0^t sg'(s)\, ds = \frac{tg(t) - G(t)}{g_0},$$

logo $\frac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t)$.

(G_1) Se $s \in (0,1)$ então $s^{g_0} g(t) \leq g(st) \leq s^{\delta} g(t)$ então integrando em s temos

$$\frac{s^{g_0+1}}{g_0+1} g(t) \leq \frac{G(st)}{t} \leq \frac{s^{\delta+1}}{\delta+1} g(t) \tag{32}$$

Se $s \geq 1$ então $s^{\delta} g(t) \leq g(st) \leq s^{g_0} g(t)$, logo

$$g(t)\left(\frac{s^{\delta+1}}{\delta+1} - \frac{1}{\delta+1}\right) \leq \frac{G(st)}{t} - \frac{G(t)}{t} \leq g(t)\left(\frac{s^{g_0+1}}{g_0+1} - \frac{1}{g_0+1}\right),$$

daí

$$g(t)\left(\frac{s^{\delta+1}}{g_0+1} - \frac{1}{g_0+1}\right) \leq \frac{G(st)}{t} - \frac{G(t)}{t} \leq g(t)\left(\frac{s^{g_0+1}}{g_0+1} - \frac{1}{g_0+1}\right),$$

como

$$-\frac{g(t)}{1+g_0} + \frac{G(t)}{t} \geq 0 \Leftrightarrow G(t) \geq \frac{tg(t)}{1+g_0},$$

e

$$\frac{G(t)}{t} - g(t) \leq 0 \Leftrightarrow G(t) \leq tg(t),$$

isso implica usando (g_2) que

$$g(t)\frac{s^{\delta+1}}{1+g_0} \leq \frac{G(st)}{t} \leq \frac{s^{g_0+1}}{g_0+1}(g_0+1)g(t). \tag{33}$$

Assim usando $(31), (32)$ e (g_2) segue que

$$\min\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}\frac{G(t)}{1+g_0} \leq G(st) \leq (1+g_0)\max\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}G(t).$$

(G_2) Usando a propriedade (G_1) e a convexidade de G temos

$$\begin{aligned} G(a+b) &\leq \frac{1}{2}(G(a)+G(b)) \leq \frac{1}{2}2^{g_0+1}(g_0+1)(G(a)+G(b)) \\ &= 2^{g_0}(g_0+1)(G(a)+G(b)). \end{aligned}$$

□

Como g é estritamente crescente sua inversa fica bem definida. Agora vamos mostrar que g^{-1} satisfaz uma condição similar a (ii).

Lema 4.2. *A função g^{-1} satisfaz as seguintes desigualdades*

$$\frac{1}{g_0} \leq \frac{t(g^{-1})'(t)}{g^{-1}(t)} \leq \frac{1}{\delta},\ \forall t > 0.$$

Além disso se $\tilde{G}$ é tal que $\tilde{G}'(t) = g^{-1}(t)$(isto é ,$\tilde{G}$ é a N-função complementar a G)temos ,

$(\tilde{g}_1)$ $\min\{s^{1/\delta}, s^{1/g_0}\}g^{-1}(t) \leq g^{-1}(st) \leq \max\{s^{1/\delta}, s^{1/g_0}\}g^{-1}(t)$
$(\tilde{g}_2)$ $\frac{\delta t g^{-1}(t)}{1+\delta} \leq \tilde{G}(t) \leq tg^{-1}(t),\ \forall t \geq 0.$
$(\tilde{G}_1)$ $\frac{(\delta+1)}{\delta}\min\{s^{1+1/\delta}, s^{1+1/g_0}\}\tilde{G}(t) \leq \tilde{G}(st) \leq \frac{\delta}{1+\delta}\max\{s^{1+1/\delta}, s^{1+1/g_0}\}\tilde{G}(t).$
$(\tilde{g}_3)$ $ab \leq \epsilon G(a) + C(\epsilon)\tilde{G}(b),\ \forall a, b > 0$ *e* $\epsilon > 0.$
$(\tilde{g}_4)$ $\tilde{G}(g(t)) \leq g_0 G(t).$

Demonstração. Fazendo $s = g^{-1}(t)$ temos $g(s) = t$ e $(g^{-1})'(t) = \frac{1}{g'(s)}$. Daí

$$\frac{t(g^{-1})'(t)}{g^{-1}(t)} = \frac{g(s)}{sg'(s)},$$

e como g satisfaz a condiçâo (ii) temos que

$$\frac{1}{g_0} \leq \frac{g(s)}{sg'(s)} \leq \frac{1}{\delta}.$$

$(\tilde{g}_1)$ Segue diretamente da propriedade (g_1) aplicada a função g^{-1}.
$(\tilde{g}_2)$ Com efeito, $\tilde{G}(t) = \int_0^t g^{-1}(s)\,ds \leq tg^{-1}(t)$, além disso

$$\tilde{G}(t) = \delta\int_0^t \frac{1}{\delta}g^{-1}(s)\,ds \geq \delta\int_0^t s(g^{-1})'(s)\,ds = (tg^{-1}(t) - \tilde{G}(t))\delta,$$

então $\tilde{G}(t) \geq \frac{\delta t g^{-1}(t)}{1+\delta}$.
$(\tilde{G}_1)$ Segue de $(\tilde{g}_1)$ e $(\tilde{g}_2)$ usando um argumento similar ao que foi feito para demonstrar a propriedade (G_1) no lema anterior.
$(\tilde{g}_3)$ Pela desigualdade de Young temos $ab \leq G(a) + \tilde{G}(b)$ e então para $0 < \epsilon' < 1$ tal que

$\epsilon = (1+g_0)\epsilon'^{1+\delta}$, então

$$\epsilon' a \frac{b}{\epsilon'} \leq G(\epsilon' a) + \tilde{G}\left(\frac{b}{\epsilon'}\right) \leq (1+g_0)max\{\epsilon'^{1+\delta}, \epsilon'^{1+g_0}\}G(a) + C(\epsilon)\tilde{G}(b)$$
$$= \epsilon G(a) + C(\epsilon)\tilde{G}(b).$$

($\tilde{g}_4$) Pela desigualdade de Young (15) temos $\tilde{G}(g(t)) + G(t) = tg(t)$, pela propriedade ($g_2$) obtemos

$$\tilde{G}(g(t)) = tg(t) - G(t) \leq g_0 G(t).$$

□

Lema 4.3. *Existe uma constante $C = C(g_0, \delta)$ tal que*

$$|u|_G \leq C \max\left\{\left(\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{1/\delta+1}, \left(\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{1/g_0+1}\right\}.$$

Demonstração. Se $\int_\Omega G(|u|)\,dx = 0$ então $u = 0$ q.t.p e o resultado segue imediatamente. Se $\int_\Omega G(|u|)\,dx \neq 0$ então tomando

$$k = \max\left\{\left(2(1+g_0)\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{1/\delta+1}, \left(2(1+g_0)\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{1/g_0+1}\right\},$$

usando a propriedade (G_1) temos

$$\int_\Omega G\left(\frac{|u|}{k}\right)\,dx \leq (1+g_0)\max\left\{\frac{1}{k^{\delta+1}}, \frac{1}{k^{g_0+1}}\right\}\int_\Omega G(|u|)\,dx \leq 1,$$

portanto $|u|_G \leq k$. □

Teorema 4.1. *$L^{\tilde{G}}(\Omega)$ é o dual do espaço $L^G(\Omega)$. Além disso $L^G(\Omega)$ e $W^{1,G}(\Omega)$ são reflexivos.*

Demonstração. Como G satisfaz (G_1) temos $G(2t) \leq 2^{1+g_0}(1+g_0)G(t)$, $\forall t \geq 1$, e como $\tilde{G}$ satisfaz ($\tilde{G}_1$) temos $\tilde{G}(2t) \leq \frac{\delta}{1+\delta}2^{1+1/g_0}\tilde{G}(t)$. Logo $G \in \triangle_2$ e $\tilde{G} \in \triangle_2$. Pelo Corolário 3.1 G é $\triangle$ $-$regular. Então segue do Corolário 3.4 e Teorema 3.12 que $L^G(\Omega)$ e $W^{1,G}(\Omega)$ são reflexivos. Como $G \in \triangle_2$ segue do Teorema 3.8 que $E^G = L^G$ e pelo Teorema 3.10 temos $L^{\tilde{G}} \simeq (E^G)^* = (L^G)^*$. □

Teorema 4.2. *$L^G(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ e $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(\Omega)$ contínuamente.*

Demonstração. Como a N-função $G_1(t) = \frac{|t|^{1+\delta}}{1+\delta} \in \triangle_2$ segue que $\mathcal{L}_{G_1} = L^{G_1} = L^{1+\delta}(\Omega)$(espaço de Lebesgue). Pelo Teorema 3.6, temos que mostrar que existem constantes k, t_0 tais que

$$\frac{t^{1+\delta}}{1+\delta} \leq G(kt), \ \forall t \geq t_0.$$

Para $t \geq 1$ temos por (G_1)

$$t^{1+\delta}\frac{G(1)}{1+g_0} \leq G(t)$$

então tomando uma constante $C = C(G(1), \delta, g_0) > 0$ suficientemente grande dependendo de $G(1), \delta$ e g_0 de modo que

$$\frac{t^{1+\delta}}{1+\delta} \leq \frac{(1+g_0)}{G(1)}\frac{C}{1+\delta}G(t),$$

temos pelo Lema 3.4

$$\frac{t^{1+\delta}}{1+\delta} \leq G\left(\frac{(1+g_0)}{G(1)}\frac{C}{1+\delta}t\right), \ \forall t \geq 1 = t_0.$$

A imersão contínua $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(\Omega)$ segue de $L^G(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ e da definição da norma dos espaços de Orlicz-Sobolev. $\square$

Lema 4.4. *Seja $u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap W^{1,G}(\Omega)$ então existe uma constante $C > 0$ dependendo do $diam(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega G(|u|)\, dx \leq \int_\Omega G(C|\nabla u|)\, dx$$

Demonstração. Considere a aplicação projeção $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$ e seja $d_i = diam(\pi_i(\Omega))$. Primeiro suponha que $u \in C_0^\infty(\Omega)$ então usando a desigualdade de Jensen temos

$$\begin{aligned} G(u(x_1, ..., x_n)) &= G\left(\int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., \xi, ..., x_n)\, d\xi\right) \\ &\leq \frac{1}{d_i}\int_{-\infty}^{+\infty} G\left(d_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., \xi, ..., x_n)\right)\, d\xi, \end{aligned}$$

usando Fubini-Toneli integramos ambos os lados das desigualdades acima em cada variável obtendo,

$$\int_\Omega G(u(x))\, dx \leq \int_\Omega G\left(d_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, dx.$$

Agora suponha que $u \in W_0^{1,G}(\Omega)$ e tem suporte compacto em Ω, considere $u_\epsilon = u * \phi_\epsilon$ então pelo que foi feito na seção de preliminares temos $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u_\epsilon \to u$ q.t.p quando $\epsilon \to 0$. Tomando para cada $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, obtemos uma sequência de funções não-negativas $\{G(u_n)\}$ tais que

$$G(u_n(x)) \to G(u_n(x)) \text{ q.t.p quando } n \to \infty.$$

Daí pelo lema de Fatou temos

$$\int_\Omega G(u(x))\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G(u_n(x))\,dx \tag{34}$$

além disso como $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ segue que

$$\int_\Omega G(u_\epsilon(x))\,dx \leq \int_\Omega G\left(d_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_\epsilon (x)\right)\,dx. \tag{35}$$

Escrevendo $v = d_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(v_\epsilon(x))\,dx &= \int_\Omega G\left(\frac{\epsilon^n}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)\phi_\epsilon(y)\,dy\right)\,dx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^n}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n} G\left(\epsilon^n v(x-y)\frac{1}{\epsilon^n}\phi(\frac{y}{\epsilon})\right)\,dy\,dx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^n}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n} G(v(x-y))\phi(\frac{y}{\epsilon})\,dy\,dx \\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n} G(v(x-y))\phi_\epsilon(y)\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega G(v_\epsilon(x))\,dx \leq \int_\Omega G(v)_\epsilon(x)\,dx. \tag{36}$$

Se $\int_\Omega G(v)\,dx = \infty$ então a tese segue trivialmente para u.
Suponha que $\int_\Omega G(v)\,dx < \infty$ então segue das propriedades dos molifiers(ver preliminares) $G(v)_\epsilon \to G(v)$ em $L^1(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$. Logo para $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ obtemos $G(v)_n \to G(v)$ em $L^1(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Daí por $(34), (35)$ e (36) temos

$$\int_\Omega G(u(x))\,dx \leq \int_\Omega G\left(d_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\,dx.$$

Suponha agora que $u \in W_0^{1,G}(\Omega)$ seja arbitrária e consideremos um aberto $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ com $diam(\pi_i(\tilde{\Omega})) \leq 2d_i$. Então a função $\tilde{u}$ obtida extendendo u para ser nula fora de Ω pertence a $W_0^{1,G}(\tilde{\Omega}))$ e tem suporte compacto em $\tilde{\Omega}$ de modo que

$$\int_{\tilde{\Omega}} G(\tilde{u}(x))\,dx \leq \int_{\tilde{\Omega}} G\left(2d_i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right)\,dx.$$

Como $G(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\tilde{u}(x) = 0$, $\forall x \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega$, segue que

$$\int_{\Omega} G(u(x))\, dx \leq \int_{\Omega} G\left(2d_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, dx.$$

$\square$

Proposição 4.1. *Sejam* $A(p) = g(|p|)\frac{p}{|p|}$ *onde* g *satisfaz* (ii) *e* $a_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial p_j}$ *então* $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *com* $\xi \neq 0$ *e* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *tem-se*

$$\min\{\delta, 1\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{g_0, 1\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2,$$

onde acima estamos omitindo o somatório nos indices i, j.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} a_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial p_j} &= g'(|p|)\frac{p_j}{|p|}\frac{p_i}{|p|} + g(|p|)\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{p_i}{|p|}\right) \\ &= g'(|p|)\frac{p_j p_i}{|p|^2} + g(|p|)\frac{\delta_{ij}}{|p|} - g(|p|)\frac{p_i p_j}{|p|^3}. \end{aligned}$$

Por (ii) segue que $\frac{g(t)}{t}\delta \leq g'(t) \leq g_0\frac{g(t)}{t}$, assim temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j &= g'(|p|)\frac{|<p, \xi>|^2}{|p|^2} + \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 - \frac{g(|p|)}{|p|^3}|<p, \xi>|^2 \\ &\geq \delta g(|p|)\frac{|<p, \xi>|^2}{|p|^3} + \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 - \frac{g(|p|)}{|p|^3}|<p, \xi>|^2 \\ &= \frac{g(|p|)}{|p|}\left(\frac{|<p, \xi>|^2}{|p|^2}(\delta - 1) + |\xi|^2\right) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Se $\delta - 1 > 0$ então

$$\mathbf{I} \geq \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 = \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \min\{1, \delta\}.$$

Se $\delta - 1 < 0$ então usando que

$$\frac{|<p, \xi>|^2}{|p|^2}(\delta - 1) \geq |\xi|^2(\delta - 1)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &\geq \frac{g(|p|)}{|p|}\left(|\xi|^2(\delta - 1) + |\xi|^2\right) \\ &= \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2\delta = \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \min\{1, \delta\}. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que vale o lado direito da desigualdade.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j &= g'(|p|)\frac{|<p,\,\xi>|^2}{|p|^2} + \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 - \frac{g(|p|)}{|p|^3}|<p,\xi>|^2 \\ &\leq g_0\frac{g(|p|)}{|p|}\frac{|<p,\,\xi>|^2}{|p|^2} + \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 - \frac{g(|p|)}{|p|}\frac{|<p,\,\xi>|^2}{|p|^2} \quad = \mathbf{II}.\end{aligned}$$

Se $g_0 - 1 < 0$ então

$$\mathbf{II} \leq \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 = \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \max\{1, g_0\}.$$

Se $g_0 - 1 > 0$ então

$$\begin{aligned}\mathbf{II} &\leq (g_0 - 1)\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 + \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \\ &= g_0\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 = \frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \max\{1, g_0\}.\end{aligned}$$

□

Definição 4.1. *Dizemos que uma função v é uma solução fraca de $\Delta_g u = 0$ se*

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\nabla\phi\, dx = 0 \;\; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

O teorema a seguir será a ferramenta que usaremos para mostrar que minimizantes do funcional $\mathcal{J}$ são soluções fracas da equação $\Delta_g u = 0$ em Ω.

Teorema 4.3. *Seja $u \in W^{1,G}(\Omega), B_r \subset\subset \Omega$ e v uma solução fraca de*

$$\mathcal{L}_g w = 0 \;\; \text{em } B_r, \quad v - u \in W_0^{1,G}(B_r),$$

então

$$\int_{B_r}(G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|))\, dx \geq C\left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx + \int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\, dx\right),$$

onde $F(t) = \frac{g(t)}{t}, C = C(g_0, \delta) > 0$,

$$A_1 = \{x \in B_r; |\nabla u - \nabla v| \leq 2|\nabla u|\} \text{ e } A_2 = \{x \in B_r; |\nabla u - \nabla v| > 2|\nabla u|\}.$$

Demonstração. Seja $u^s = su + (1 - s)v$, usando o teorema valor médio na forma integral e que v é solução fraca temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} := \int_{B_r} (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|))\, dx &= \int_0^1 \int_{B_r} g(|\nabla u^s|) \frac{\nabla u^s}{|\nabla u^s|} \nabla (u-v)\, dx\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B_r} \left(g(|\nabla u^s|) \frac{\nabla u^s}{|\nabla u^s|} - g(|\nabla v|) \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \right) \nabla (u^s - v)\, dx\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B_r} \int_0^1 a_{ij}(\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s))(u^s_{x_i} - v_{x_i})(u^s_{x_j} - v_{x_j}) dt\, dx\, ds.
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 4.1 temos que o lado direito é maior ou igual a

$$
C \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{B_r} \int_0^1 F(|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)|) |\nabla v - \nabla u^s|^2\, dt\, dx\, ds,
$$

onde $C = C(\delta) > 0$. Agora consideramos os subconjuntos de B_r

$$
S_1 = \{x \in B_r; |\nabla u^s - \nabla v| \leq 2|\nabla u^s|\}, \quad S_2 = \{x \in B_r; |\nabla u^s - \nabla v| > 2|\nabla u^s|\}.
$$

Assim temos $S_1 \cup S_2 = B_r$ e

$$
\frac{1}{2}|\nabla u^s| \leq |\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)| \leq 3|\nabla u^s| \text{ em } S_1 \text{ para } t \geq \frac{3}{4}, \tag{37}
$$

$$
\frac{1}{4}|\nabla u^s - \nabla v| \leq |\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)| \leq 3|\nabla u^s - \nabla v| \text{ em } S_2 \text{ para } t \leq \frac{1}{4}. \tag{38}
$$

Em S_1 para $t \geq \frac{3}{4}$ temos usando (37) e (g_1) que

$$
F(|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)|) = \frac{g(|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)|)}{|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)|} \geq \frac{g(\frac{1}{2}|\nabla u^s|)}{3|\nabla u^s|} \geq \frac{1}{2^{g_0} 3} F(|\nabla u^s|).
$$

Em S_2 para $t \leq \frac{1}{4}$ temos usando (g_2) e por (38) que

$$
\begin{aligned}
F(|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)|)|\nabla u^s - \nabla v|^2 &\geq \frac{G(|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s|)}{|\nabla u^s + (1-t)(\nabla v - \nabla u^s)|^2} |\nabla u^s - \nabla v|^2 \\
&\geq \frac{G(\frac{1}{4}|\nabla u^s - \nabla v|)}{9|\nabla u^s - \nabla v|^2} |\nabla u^s - \nabla v|^2 \\
&\geq \frac{G(|\nabla u^s - \nabla v|)}{4^{1+g_0} 9(1+g_0)},
\end{aligned}
$$

onde na ultima desigualdade usamos (G_1).
Portanto temos

$$
\mathcal{I} \geq C \left(\int_0^1 \frac{1}{s} \int_{S_1} F(|\nabla u^s|)|\nabla v - \nabla u^s|^2\, dx\, ds + \int_0^1 \frac{1}{s} \int_{S_2} G(|\nabla u^s - \nabla v|)\, dx\, ds \right).
$$

Agora consideremos os conjuntos

$$A_1 = \{x \in B_r; |\nabla u - \nabla v| \leq 2|\nabla u|\} \text{ e } A_2 = \{x \in B_r; |\nabla u - \nabla v| > 2|\nabla u|\},$$

logo $B_r = A_1 \cup A_2$ e

$$\frac{1}{2}|\nabla u| \leq |\nabla u^s| \leq 3|\nabla u| \text{ em } A_1 \text{ para } s \geq \frac{3}{4}, \tag{39}$$

$$\frac{1}{4}|\nabla u - \nabla v| \leq |\nabla u^s| \leq 3|\nabla u - \nabla v| \text{ em } A_2 \text{ para } s \leq \frac{1}{4}. \tag{40}$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\geq C\Big(\int_0^{1/4} \frac{1}{s}\int_{S_1\cap A_2} F(|\nabla u^s|)|\nabla v - \nabla u^s|^2\,dx\,ds + \int_{3/4}^{1} \frac{1}{s}\int_{S_1\cap A_1} F(|\nabla u^s|)|\nabla v - \nabla u^s|^2\,dx\,ds\\ &+ \int_0^{1/4} \frac{1}{s}\int_{S_2\cap A_2} G(|\nabla u^s - \nabla v|)\,dx\,ds + \int_{3/4}^{1} \frac{1}{s}\int_{S_2\cap A_1} G(|\nabla u^s - \nabla v|)\,dx\,ds\Big)\\ &= \mathbf{I}+\mathbf{II}+\mathbf{III}+\mathbf{IV}.\end{aligned}$$

Vamos estimar esses quatro termos.
Em $S_1 \cap A_2$ para $s \leq \frac{1}{4}$ temos usando (g_1) e (40) que

$$F(|\nabla u^s|) \geq \frac{1}{4^{g_0}3}F(|\nabla u - \nabla v|).$$

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &\geq C\int_0^{1/4} \frac{1}{s}\int_{S_1\cap A_2} F(|\nabla u - \nabla v|)|\nabla v - \nabla u^s|^2\,dx\,ds\\ &= C\int_0^{1/4} s\int_{S_1\cap A_2} F(|\nabla u - \nabla v|)|\nabla u - \nabla v|^2\,dx\,ds\\ &\geq C\int_0^{1/4} s\int_{S_1\cap A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\,dx\,ds\end{aligned}$$

onde na ultima desigualdade usamos (g_2).
Em $S_1 \cap A_1$ para $s \geq \frac{3}{4}$ temos por (39) e (g_1) que

$$F(|\nabla u^s|) \geq \frac{1}{2^{g_0}3}F(|\nabla u|).$$

Então,

$$\mathbf{II} \geq C\int_{3/4}^{1} s\int_{S_1\cap A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\,dx\,ds \geq C3/4\int_{3/4}^{1}\int_{S_1\cap A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\,dx\,ds.$$

Em $S_2 \cap A_2$, para $s \leq \frac{1}{4}$ temos pela definição de S_2 por (40) e (G_1) que

$$G(|\nabla u^s - \nabla v|) \geq \frac{1}{2^{g_0+1}(g_0+1)} G(|\nabla u - \nabla v|),$$

então

$$\mathbf{III} \geq C \int_0^{1/4} \frac{1}{s} \int_{S_2 \cap A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx\, ds \geq C \int_0^{1/4} s \int_{S_2 \cap A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx\, ds.$$

Em $S_2 \cap A_1$ temos por (39) e pela definição do conjunto S_2

$$|\nabla u^s - \nabla v| > 2|\nabla u^s| \geq |\nabla u|. \tag{41}$$

Usando (g_2) e (40) temos pela definição do conjunto A_1

$$\begin{aligned} G(|\nabla u^s - \nabla v|) &\geq \frac{1}{g_0+1} g(|\nabla u^s - \nabla v|)|\nabla u^s - \nabla v| \geq \frac{1}{g_0+1} g(|\nabla u|)|\nabla u^s - \nabla v| \\ &= \frac{1}{g_0+1} F(|\nabla u|) s |\nabla u - \nabla v||\nabla u| \geq \frac{s}{2(g_0+1)} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{IV} \geq C \int_{3/4}^{1} \int_{S_2 \cap A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\, dx\, ds.$$

Somando **I**+**III** obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{I}+\mathbf{III} &\geq \int_0^{1/4} Cs \left(\int_{S_1 \cap A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx\, ds + \int_{S_2 \cap A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx\, ds \right) \\ &= C \int_0^{1/4} s \int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx\, ds = C \int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx. \end{aligned}$$

Somando **II**+**IV** obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{II}+\mathbf{IV} &\geq C \int_{3/4}^{1} \left(\int_{S_1 \cap A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\, dx + \int_{S_2 \cap A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\, dx \right) ds \\ &= C \int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\, dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{I} \geq C \left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\, dx + \int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\, dx \right),$$

onde $C = C(g_0, \delta) > 0$. $\square$

Teorema 4.4. *Se $\mathcal{J}(\varphi_0) < \infty$ então existe um minimizante do funcional $\mathcal{J}$ no conjunto*

$$K = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega); \int_\Omega G(|\nabla v(x)|)\,dx < \infty \text{ e } v = \varphi_0 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Ademais,

$$||u_0||_{L^\infty(\Omega)} \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi_0|.$$

Demonstração. Considere uma sequência minimizante $\{u_n\} \in K$, logo temos que a sequência de numeros $\int_\Omega G(|\nabla u_n|)\,dx$ é limiatada, então pelo Lema 4.3 temos

$$|\nabla u_n - \nabla\varphi_0|_G \leq C \max\left\{ \left(\int_\Omega G(|\nabla u_n - \nabla\varphi_0|) \right)^{1/1+\delta}, \left(\int_\Omega G(|\nabla u_n - \nabla\varphi_0|) \right)^{1/1+\delta} \right\}$$

como $G(|\nabla u_n - \nabla\varphi_0|) \leq C(g_0)(G(|\nabla u_n|) + G(|\nabla\varphi_0|))$ segue que a sequência $|\nabla u_n - \nabla\varphi_0|_G$ é limitada. Além disso como para todo $n \in \mathbb{N}$ $u_n - \varphi_0 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ o Lema 4.4 juntamente com o Lema 4.3 implica que a sequência $|u_n - \varphi_0|_G$ é limitada, sendo $|u_n - \varphi_0|_{W^{1,G}} = \max\{|u_n - \varphi_0|_G, |\nabla u_n - \nabla\varphi_0|_G\}$ temos que a sequência $|u_n - \varphi_0|_{W^{1,G}}$ é limitada, e como $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$ concluimos que a sequência $|u_n|_{W^{1,G}}$ é limitada.

Sendo $W^{1,G}(\Omega)$ reflexivo existe uma subsequência de $\{u_n\}$ que denotamos da mesma forma e uma função $u_0 \in W^{1,G}(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,G}(\Omega)$. Pelo Teorema 4.2 temos $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,1+\delta}(\Omega)$. Agora como as imersões $W^{1,1+\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ e $W^{1,1+\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\partial\Omega)$ são compactas existe uma subsequência que ainda denotaremos por $\{u_n\}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{q.t.p em } \Omega,$$

e

$$u_0 = \varphi_0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Afirmação: Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_\Omega G(|\nabla u_n|)\,dx \geq \int_\Omega G(|\nabla u_0|)\,dx + \int_\Omega g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|}(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx.$$

Prova da afirmação: Seja $u_n^s = su_n + (1-s)u_0$, usando o teorema valor médio na forma integral escrevemos

$$\int_\Omega (G(|\nabla u_n|) - G(|\nabla u_0|))\,dx = \int_0^1 \int_\Omega g(|\nabla u_n^s|)\frac{\nabla u_n^s}{|\nabla u_n^s|}(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx\,ds,$$

logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_\Omega g(|\nabla u_n^s|)\frac{\nabla u_n^s}{|\nabla u_n^s|}(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx\,ds - \int_\Omega g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|}(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \left(g(|\nabla u_n^s|)\frac{\nabla u_n^s}{|\nabla u_n^s|} - g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \right)(\nabla u_n - \nabla u_0)\,dx\,ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s}\int_0^1 \int_\Omega \left(g(|\nabla u_n^s|)\frac{\nabla u_n^s}{|\nabla u_n^s|} - g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \right)(\nabla u_n^s - \nabla u_0)\,dx\,ds \\
&= \sum_{i,j}\int_0^1 \frac{1}{s}\int_\Omega \int_0^1 a_{ij}(\nabla u_n^s + (1-t)(\nabla u_0 - \nabla u_n^s))(u_{nx_i}^s - u_{0x_i})(u_{nx_j}^s - u_{0x_j})dt\,dx\,ds \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

pois pela Proposição 4.1 temos

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}(\nabla u_n^s + (1-t)(\nabla u_0 - \nabla u_n^s))(u_{nx_i}^s - u_{0x_i})(u_{nx_j}^s - u_{0x_j}) \\
&\geq \min\{\delta, 1\}|\nabla u_n^s - \nabla u_0|^2 \frac{g(|\nabla u_n^s + (1-t)(\nabla u_0 - \nabla u_n^s)|}{|\nabla u_n^s + (1-t)(\nabla u_0 - \nabla u_n^s)|} \geq 0. \qquad \square(\textbf{afirmação})
\end{aligned}
$$

Note também que $g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \in L^{\tilde{G}}$, pois usando as propriedades $(\tilde{G}_1)$ e $(\tilde{g}_4)$ temos

$$
\tilde{G}\left(g(|\nabla u_0|)\frac{u_{0x_i}}{|\nabla u_0|} \right) \leq \frac{\delta}{1+\delta}\tilde{G}(g(|\nabla u_0|)) \leq \frac{\delta}{1+\delta}g_0 G(|\nabla u_0|).
$$

Isso implica que o funcional $T_i : L^G \to \mathbb{R}$ dado por

$$
T_i(v) = \int_\Omega g(|\nabla u_0|)\frac{u_{0x_i}(x)}{|\nabla u_0|}v(x)\,dx,
$$

é contínuo. Daí como $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u_0$ em L^G segue que

$$
T_i(u_{nx_i}) \to T_i(u_{0x_i}) \Rightarrow \int g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|}(\nabla u_n - \nabla u_0) \to 0.
$$

Portanto passando o limite na desigualdade da afirmação obtemos

$$
\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G(|\nabla u_n|)\,dx \geq \int_\Omega G(|\nabla u_0|)\,dx,
$$

isso implica que $u_0 \in K$ e

$$
\mathcal{J}(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}(u_n) = \inf_{v\in K} \mathcal{J}(v),
$$

então u_0 é um minimizante de $\mathcal{J}$ em K.

Provemos agora que u_0 é limitada. De fato, definimos

$$u_\epsilon(x) := u_0(x) + \epsilon(u_0(x) - m)^-, \quad \epsilon \in (0,1), \quad \inf_{\partial\Omega} \varphi_0.$$

Note que $u_\epsilon \in K$. Por minimalidade de u_0 em K,

$$\int_{\Omega_m^-} G(|\nabla u_0|) \leq \int_{\Omega_m^-} G(|(1-\epsilon)\nabla u_0|) \leq (1+g_0)(1-\epsilon)^{1+\delta} \int_{\Omega_m^-} G(|\nabla u_0|),$$

onde $\Omega_m^- = \{u < m\}$. Mas precisamente para ϵ suficientemente próximo de 1,

$$\int_\Omega G(|\nabla(u_0 - m)^-|) = \int_{\Omega_m^-} G(|\nabla u_0|) \leq 0.$$

Isto implica que $u \geq m$ q.t.p em Ω. Similarmente prova-se que $u \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi_0$ em Ω, concluindo portanto a prova do teorema.

$\square$

Teorema 4.5. *Seja u um minimizante do funcional $\mathcal{J}$ então u é solução fraca da equação*

$$\Delta_g w = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Demonstração. Considere uma função v tal que

$$\begin{cases} \triangle_g v = 0 \text{ em } \Omega \\ v = u \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então segue dos Teoremas 4.3 e 4.4

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega G(|\nabla u|)\,dx - \int_\Omega G(|\nabla v|)\,dx \\ &\geq C\left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\,dx + \int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\,dx\right). \end{aligned}$$

Então

$$\int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\,dx = 0,$$

isso implica que $F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2 = 0$ em A_1, pela definição do conjunto A_1 concluimos que $|\nabla u - \nabla v| = 0$ nesse conjunto.

Por outro lado também temos

$$\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\,dx = 0$$

de modo que temos $|\nabla u - \nabla v| = 0$ em Ω. Portanto como $u = v$ em $\partial\Omega$ obtemos pela desigualdade do tipo Poincaré (Lema 4.4) que $u = v$ em Ω, de modo que $\triangle_g u = 0$ em Ω. $\square$

5 DESIGUALDADE DE HARNACK E A CONTINUIDADE HÖLDER LOCAL PARA FUNÇÕES G-HARMÔNICAS

Nessa seção estudaremos a teoria de regularidade interior para a equação $\Delta_g u = 0$. Mais especificamente vamos usar o método da iteração de Moser para mostrar que uma solução fraca dessa equação satisfaz uma desigualdade do tipo Harnack, e em seguida vamos mostrar que tal solução tem regularidade $C^{0,\alpha}_{loc}$.

Definição 5.1. *Dizemos que uma função $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é solução fraca para a equção $\Delta_g v = 0$ em Ω se para toda $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos*

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\nabla \xi \, dx = 0.$$

Dizemos ainda que $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é uma subsolução fraca para a equção $\Delta_g v = 0$ em Ω se para toda $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\nabla \xi \, dx \leq 0.$$

Dizemos ainda que $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é uma supersolução fraca para a equção $\Delta_g v = 0$ em Ω se para toda $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos

$$\int_\Omega g(|\nabla v|)\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\nabla \xi \, dx \geq 0.$$

Observação: Como vimos na demonstração do Teorem 4.4 se $u \in W^{1,G}(\Omega)$ então o funcional $T_i : L^G \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_i(v) = \int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{u_{x_i}(x)}{|\nabla u|}v(x)\, dx,$$

é contínuo. Logo, por densidade as desigualdades na definição continuam sendo válidas para funções testes $0 \leq \xi \in W_0^{1,G}(\Omega)$.

Proposição 5.1. *Se $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ é uma subsolução fraca de $\Delta_g v = 0$ então a função $u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$ também é uma subsolução.*

Demonstração. Segue da definição da função u_+

$$Du_+(x) = \begin{cases} Du(x), & \text{em } \{u > 0\} \cap \Omega \\ 0, & \text{em } \{u \leq 0\} \cap \Omega \end{cases}$$

Definimos a sequência de funções $v_k(x) = \max\{\min\{ku(x), 1\}, 0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, logo

$$v_k(x) \to \chi(x, \{u > 0\}) \text{ quando } k \to \infty \tag{42}$$

e

$$Dv_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{em } \{u \geq \frac{1}{k}\} \cap \Omega \\ kDu(x), & \text{em } \{0 \leq u \leq \frac{1}{k}\} \cap \Omega \\ 0, & \text{em } \{u < 0\} \cap \Omega \end{cases}$$

Seja $0 \leq \xi \in C_0^\infty$ definindo $\psi_k = \xi v_k$ temos que ψ_k tem suporte compacto e pelo Teorema 3.14 temos que $\psi_k \in W_0^{1,G}(\Omega)$ logo

$$\int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla\psi_k\, dx \leq 0.$$

Daí,

$$0 \geq \int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(v_k\nabla\xi + \xi\nabla v_k)\, dx = \int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}v_k\nabla\xi\, dx + \int_\Omega g(|\nabla u|)k\xi|\nabla u|\, dx$$

logo

$$0 \geq \int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}v_k\nabla\xi\, dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k \to \infty$ usando (42) com o teorema da convergência dominada temos

$$0 \geq \int_\Omega g(|\nabla u_+|)\frac{\nabla u_+}{|\nabla u_+|}\nabla\xi\, dx.$$

$\square$

Teorema 5.1 (Principio do Máximo Local)**.** *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma subsolução fraca e limitada da equação*

$$\Delta_g w = 0 \quad \textit{em } \Omega.$$

Então para qualquer $B_R \subset \Omega$, $s > 0$ e $0 < \sigma < 1$, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de n, δ, g_0 e s tal que

$$\sup_{B_{\sigma R}} u_+ \leq \frac{C}{(1-\sigma)^{\frac{n(g_0+1)}{s}}}\left(\fint_{B_R}(u_+)^s\, dx\right)^{1/s}.$$

Demonstração. Fixamos constantes $q, r \in \mathbb{R}$ a serem determinadas tais que $q \geq |r| + 1$, e consideramos a função η obtida do Lema 2.2 ou seja, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em $B_{\sigma R}$ e $|D\eta| \leq \frac{C}{(1-\sigma)R}$. Vamos escrever u para simplificar. Começamos construindo uma função teste apropriada. Seja $T_k\eta := \eta + \frac{1}{k}$ a constante r obtida será negativa logo temos

$(T_k\eta)^r < k^{|r|}$ e definimos as funções

$$\varphi_k = G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}(T_k\eta)^r u$$

vamos mostrar que $\varphi_k \in W^{1,G}(\Omega)$. Como a função u é limitada e G é crescente segue que $\varphi_k \in L^\infty(\Omega)$ então $\varphi_k \in L^G(\Omega)$. Além disso

$$\begin{aligned} D\varphi_k = (q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\left(\frac{D\eta u + \eta Du}{R}\right)(T_k\eta)^r u \\ + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} r(T_k\eta)^{r-1}D\eta u + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}(T_k\eta)^r Du, \end{aligned}$$

sendo g não-decrescente, u limitada e $|D\eta| \leq \frac{C}{(1-\sigma)R}$ segue que

$$|D\varphi_k| < C(u,k,\eta,q) + C|Du|$$

como pelo Lema 4.1 (G_2) temos

$$G(|D\varphi_k|) \leq C(g_0)(G(C(u,k,\eta,q)) + G(C|Du|))$$

segue que $D\varphi_k \in L^G(B_R)$ e então $\varphi_k \in W^{1,G}(\Omega)$. Além disso φ_k tem suporte compacto em B_R daí segue do Teorema 3.14 que $\varphi_k \in W_0^{1,G}(\Omega)$, sendo u subsolução temos

$$\begin{aligned} &\int_{B_R}\left((q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{\eta u}{R}(T_k\eta)^r + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}(T_k\eta)^r\right) Du\frac{g(|Du|)}{|Du|}Du\,dx \\ &+ \int_{B_R}\left((q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{u}{R}(T_k\eta)^r u + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} r(T_k\eta)^{r-1}u\right) D\eta\frac{g(|Du|)}{|Du|}Du\,dx \leq 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\int\left((q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{\eta u}{R}(T_k\eta)^r + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}(T_k\eta)^r\right) g(|Du|)|Du|\,dx \\ &\leq \int\left((q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{u}{R}(T_k\eta)^r u + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} r(T_k\eta)^{r-1}u\right)|D\eta| g(|Du|)\,dx, \end{aligned}$$

como $(T_k\eta)^r \nearrow \eta^r$ podemos usar o teorema da convergencia monótona para obter

$$\begin{aligned} &\int_{B_R}\left((q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{\eta u}{R}\eta^r + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\eta^r\right) g(|Du|)|Du|\,dx \\ &\leq \int_{B_R}\left((q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{u}{R}\eta^r u + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} r\eta^{r-1}u\right)|D\eta| g(|Du|)\,dx. \end{aligned}$$

Usando (g_2) do Lema 4.1 temos

$$(q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{\eta u}{R}\eta^r \geq |r|G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\eta^r,$$

e

$$(q-1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-2} g\left(\frac{\eta u}{R}\right)\frac{u}{R}\eta^r u + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} r\eta^{r-1}u \leq q(1+g_0)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} u\eta^{r-1} + G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} q\eta^{r-1}u,$$

assim obtemos

$$\int_{B_R}(|r|+1)G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\eta^r g(|Du|)|Du|\,dx \leq \underbrace{qC(g_0)\int_{B_R}\eta^{r-1}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} u\frac{g(|Du|)}{(1-\sigma)R}\,dx}_{(i)}.$$

Agora vamos usar a desigualdade $ag(b) \leq ag(a) + bg(b)$, para obter

$$\begin{aligned}(i) &= \int \eta^{r-1}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} \underbrace{\eta C(g_0)\frac{q}{1-\sigma}\frac{u}{\eta R}}_{a} g(\underbrace{|Du|}_{b})\,dx \\ &\leq \int \eta^{r-1}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\eta C(g_0)\frac{q}{1-\sigma}\frac{u}{\eta R} g\left(C(g_0)\frac{q}{1-\sigma}\frac{u}{\eta R}\right)dx + \int \eta^r G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} g(|Du|)|Du|\,dx.\end{aligned}$$

Sendo a função $h(t) = t^{-g_0}g(t)$ decrescente(ver a demonstração do Lema 4.1) e

$$\frac{C(g_0)q}{1-\sigma}\frac{u}{\eta R} \geq \frac{u}{\eta R}$$

temos que

$$g\left(C(g_0)\frac{q}{1-\sigma}\frac{u}{\eta R}\right) \leq \left(\frac{C(g_0)q}{1-\sigma}\right)^{g_0} g\left(\frac{u}{\eta R}\right),$$

então

$$(i) \leq \left(\frac{C(g_0)q}{1-\sigma}\right)^{g_0+1}\int \eta^{r-1}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\frac{u}{R}g\left(\frac{u}{\eta R}\right)dx + \int \eta^r G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} g(|Du|)|Du|\,dx$$

e portanto

$$|r|\int \eta^r G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} g(|Du|)|Du|\,dx \leq \left(\frac{C(g_0)q}{1-\sigma}\right)^{g_0+1}\int \eta^{r-1}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\frac{u}{R}g\left(\frac{u}{\eta R}\right)dx.$$

Escrevendo $\theta = 2 + 2g_0$ e usando que a função h é decrescente temos

$$\begin{aligned}|r|\int_{B_R}\eta^r G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1} g(|Du|)|Du|\,dx &\leq \left(\frac{C(g_0)q}{1-\sigma}\right)^{g_0+1}\int_{B_R}\eta^{r+1-\theta}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q-1}\frac{u}{R}g\left(\frac{\eta u}{R}\right)dx \\ &\overset{(G_1)}{\leq} \frac{C(g_0)q^{g_0+1}}{(1-\sigma)^{\theta/2}}\int_{B_R}\eta^{r-\theta}G\left(\frac{\eta u}{R}\right)^{q}dx. \quad \textbf{(I)}\end{aligned}$$

Agora denotando $v = \frac{\eta u}{R}$ temos

$$|DG(v)| \leq \frac{\eta}{R}|Du|g(v) + |D\eta|\frac{u}{R}g(v),$$

como $|Du|g(v) \leq |Du|g(|Du|) + vg(v)$ obtemos

$$|DG(v)| \leq \frac{\eta}{R}|Du|g(|Du|) + \frac{\eta}{R}vg(v) + |D\eta|\frac{u}{R}g(v),$$

assim,

$$\begin{aligned}\int q\eta^r G(v)^{q-1}|DG(v)|\,dx \leq \int q\eta^r G(v)^{q-1}\frac{\eta}{R}|Du|g(|Du|) + \int q\eta^r G(v)^{q-1}\frac{\eta}{R}vg(v)\,dx \\ + \int q\eta^r G(v)^{q-1}|D\eta|\frac{u}{R}g(v)\,dx.\end{aligned}$$

Portanto usando **(I)** obtemos a estimativa

$$\int q\eta^r G(v)^{q-1}|DG(v)|\,dx \leq \frac{C(g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}}\frac{q^{g_0+2}}{|r|}\int \eta^{r-\theta}G(v)^q\,dx.$$

Vamos usar a desigualdade de Sobolev

$$\left(\int h^k\,dx\right)^{1/k} \leq C(n)\int |Dh|\,dx \quad \text{onde } k = \frac{n}{n-1}.$$

Fazendo $h = \eta^r G(v)^q$ temos

$$Dh = r\eta^{r-1}D\eta G(v)^q + \eta^r qG(v)^{q-1}DG(v)$$

$$\begin{aligned}\left(\int \eta^{rk}G(v)^{qk}\,dx\right)^{1/k} &\leq C(n)\left[q\int \eta^{r-\theta}\frac{G(v)^q}{R(1-\sigma)^{\theta/2}} + \frac{C(g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}}\frac{q^{g_0+2}}{|r|}\int \eta^{r-\theta}G(v)^q\,dx\right] \\ &\leq \frac{C(n,g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}}\frac{q^{g_0+2}}{|r|}\int \eta^{r-\theta}G(v)^q\,dx.\end{aligned}$$

Tomamos r de modo que $kr = r - \theta$, isso implica que $r = (n-1)\theta$, então

$$\left(\int_{B_R} \eta^{-n\theta}G(v)^{kq}\,dx\right)^{1/kq} \leq \left(\frac{C(n,g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}}q^{g_0+2}\int_{B_R} \eta^{-n\theta}G(v)^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Vamos iterar essa desigualdade fixando $q_0 > |r| + 1$ e fazendo $q = kq_0 \Rightarrow kq = k^2 q_0$

$$
\begin{aligned}
\left(\int \eta^{-n\theta} G(v)^{k^2 q_0}\, dx\right)^{1/k^2 q_0} &\leq \left(\frac{C(n, g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}} q^{g_0+2} \int \eta^{-n\theta} G(v)^q\, dx\right)^{1/q} \\
= \left(\frac{C(n, g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}}\right)^{1/kq_0} & kq_0^{\frac{g_0+2}{kq_0}} \left(\int \eta^{-n\theta} G(v)^{kq_0}\right)^{1/kq_0} \\
\leq \left(\frac{C(n, g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}} q_0^{g_0+2}\right)^{1/q_0 + 1/kq_0} & k^{\frac{g_0+2}{kq_0}} \left(\int \eta^{-n\theta} G(v)^{q_0}\right)^{1/q_0},
\end{aligned}
$$

de modo geral para $m \in \mathbb{N}$ e $q = k^{m-1} q_0$ temos

$$
\left(\int_{B_R} \eta^{-n\theta} G(v)^{k^m q_0}\, dx\right)^{1/k^m q_0} \leq \left(\frac{C(n, g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}} q_0^{g_0+2}\right)^{\frac{1}{q_0}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{k^i}} \prod_{i=0}^{m-1} k^{i\frac{g_0+2}{q_0 k^i}} \left(\int_{B_R} \eta^{-n\theta} G(v)^{q_0}\right)^{1/q_0}.
$$

Observe que fazendo $m \to \infty$ temos

$$
\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{k^i} \to n,
$$

e o produtório do lado direito converge pois

$$
\log\left(\prod_{i=0}^{m-1} k^{i\frac{g_0+2}{q_0 k^i}}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(g_0+2)\log(k^i)}{q_0 k^i},
$$

assim como $\eta = 1$ em $B_{\sigma R}$ seque que

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_{\sigma R}} G(v) &\leq \left(\frac{C(n, g_0)}{R(1-\sigma)^{\theta/2}} q_0^{g_0+2}\right)^{\frac{n}{q_0}} \left(\int \eta^{-n\theta} G(v)^{q_0}\right)^{1/q_0} \\
&= C(n, g_0, q_0)\left[(1-\sigma)^{-\theta\frac{n}{2}} R^{-n} \int_{B_R} \eta^{-n\theta} G(v)^{q_0}\, dx\right]^{1/q_0}.
\end{aligned}
$$

Como $\sup G(v) \geq c(g_0)(\sup v)(\sup g(v))$ e $G(v) \leq v g(v)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_{\sigma R}} v &\leq C\left[(1-\sigma)^{-\theta\frac{n}{2}} R^{-n} \int_{B_R} \eta^{-n\theta} v^{q_0} \left(\frac{g(v)}{\sup g(v)}\right)^{q_0} dx\right]^{1/q_0} \\
&\leq C\left[(1-\sigma)^{-\theta\frac{n}{2}} R^{-n} \int_{B_R} \eta^{-n\theta} v^{q_0}\, dx\right]^{1/q_0}. \quad \textbf{(II)}
\end{aligned}
$$

Fazendo $q_0 = n\theta$ lembrando que $v = \frac{\eta u}{R}$ e $\eta = 1$ em $B_{\sigma R}$ concluimos que

$$
\sup_{B_{\sigma R}} u \leq C(1-\sigma)^{-1/2}\left[⨍_{B_R} u^{\theta n}\right]^{1/\theta n},
$$

provamos o teorema no caso $s = \theta n$.

Agora vamos mostrar que o teorema é valido para o caso $s > \theta n$. Suponha que $s = \alpha + \theta n$ onde $\alpha > 0$, fazendo $q_0 = s$ em **(II)** temos

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\sigma R}} v &\leq C(1-\sigma)^{-\frac{n\theta}{2s}} R^{-\frac{n}{s}} \left(\int_{B_R} \eta^{-n\theta} \eta^{n\theta+\alpha} \frac{u^s}{R^s} \right)^{1/s} \\ &\leq C(1-\sigma)^{-\frac{n\theta}{2s}} R^{-\frac{n}{s}} R^{-1} \left(\int_{B_R} u^s \, dx \right)^{1/s},\end{aligned}$$

portanto

$$\sup_{B_{\sigma R}} u \leq C(1-\sigma)^{-\frac{n\theta}{2s}} \left(\fint_{B_R} u^s \right)^{1/s}.$$

Finalmente vamos tratar do caso em que $s \in (0, n\theta)$, fixe $\sigma \in (0,1)$. Sejam $\sigma \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 < 1$ temos que

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\sigma_1 R}} u &\leq C_1(\sigma_2 - \sigma_1)^{-1/2} \left(R^{-n} \int_{B_{\sigma_2 R}} u^{n\theta} \right)^{1/n\theta} \\ &= C_1 \left((\sigma_2 - \sigma_1)^{-n\theta/2} R^{-n} \int_{B_{\sigma_2 R}} u^{n\theta - s} u^s \, dx \right)^{1/n\theta} \\ &\leq C_1 \left((\sigma_2 - \sigma_1)^{-n\theta/2} R^{-n} \int_{B_{\sigma_2 R}} u^s \left(\sup_{B_{\sigma_2 R}} u \right)^{n\theta - s} \right)^{1/n\theta} \\ &= \underbrace{C_1 \left((\sigma_2 - \sigma_1)^{-n\theta/2} R^{-n} \int_{B_{\sigma_2 R}} u^s \right)^{1/n\theta}}_{a} \underbrace{\left(\sup_{B_{\sigma_2 R}} u \right)^{\frac{n\theta - s}{n\theta}}}_{b}.\end{aligned}$$

Agora vamos usar desigualdade de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ com $p = \frac{n\theta}{s}$ e $q = \frac{n\theta}{n\theta - s}$ para obtermos

$$\sup_{B_{\sigma_1 R}} u \leq \frac{s}{n\theta} C_1^{n\theta/s} \left((\sigma_2 - \sigma_1)^{-n\theta/2} R^{-n} \int_{B_{\sigma_2 R}} u^s \right)^{1/s} + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta} \right) \sup_{B_{\sigma_2 R}} u.$$

Definimos a função $\varphi : [\sigma, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \sup_{B_{tR}} u$, e escrevendo $C_2 = \frac{s}{n\theta} C_1^{n\theta/s}$ segue do que foi feito acima

$$\begin{aligned} sup_{B_{\sigma_1 R}} u &\leq C_2 \left((\sigma_2 - \sigma_1)^{-n\theta/2} R^{-n} \int_{B_{\sigma_2 R}} u^s \right)^{1/s} + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta} \right) \varphi(\sigma_2) \\ &\leq C_2 (\sigma_2 - \sigma_1)^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta} \right) \varphi(\sigma_2),\end{aligned}$$

onde

$$A = \left(R^{-n} \int_{B_R} u^s \right)^{1/s}.$$

Para concluir a demonstração é suficiente provar a seguinte afirmação.

Afirmação: Existe uma constante $C_3 = C_3(n, \theta, s) > 0$ tal que

$$\varphi(\sigma) \leq C_3 (1-\sigma)^{-\frac{n\theta}{2s}} A.$$

prova da afirmação: Tomamos um $\lambda \in (0,1)$ a ser determinado e definimos a sequência de números

$$\sigma_j = \sigma + (1 - \lambda^j)(1-\sigma),\ j = 0, 1, 2, ...$$

Assim como $\sigma_j - \sigma_{j-1} = (1-\lambda)\lambda^{j-1}(1-\sigma)$, e $\sigma = \sigma_0$ temos

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma) &\leq C_2(\sigma_1 - \sigma_0)^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta}\right)\varphi(\sigma_1) \\
&= C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta}\right)\varphi(\sigma_1) \\
&\leq C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta}\right)\left(C_2(\sigma_2 - \sigma_1)^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta}\right)\varphi(\sigma_2)\right) \\
&= C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta}\right)\left(C_2((1-\lambda)\lambda(1-\sigma))^{-\frac{n\theta}{2s}} A + \left(\frac{n\theta - s}{n\theta}\right)\varphi(\sigma_2)\right).
\end{aligned}$$

Escrevendo $v = \frac{n\theta - s}{n\theta}$ o que foi feito acima implica que

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma) &\leq C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A(1 + v\lambda^{-\frac{n\theta}{2s}}) + v^2\varphi(\sigma_2) \\
&\leq C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A(1 + v\lambda^{-\frac{n\theta}{2s}}) + v^2(C_2((1-\lambda)\lambda^2(1-\sigma))^{-\frac{n\theta}{2s}} A + v\varphi(\sigma_3)) \\
&= C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A[1 + v\lambda^{-\frac{n\theta}{2s}} + v^2\lambda^{-\frac{2n\theta}{2s}}] + v^3\varphi(\sigma_3),
\end{aligned}$$

prosseguindo indutivamente dessa forma temos para cada $l \in \mathbb{N}$

$$\varphi(\sigma) \leq C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A \sum_{j=0}^{l-1} (v\lambda^{-\frac{n\theta}{2s}})^j + v^l \varphi(\sigma_l).$$

Como φ é uma função limitada e queremos que a serie acima obtida fazendo $m \to \infty$ convirga tomamos λ de modo que $v\lambda^{-\frac{n\theta}{2s}} < 1$. Mais precisamente tomamos λ no intervalo $(v^{\frac{2s}{n\theta}}, 1)$, logo esse número depende também de s e fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima obtemos

$$\varphi(\sigma) \leq C_2 \left((1-\lambda)(1-\sigma)\right)^{-\frac{n\theta}{2s}} A \frac{1}{1 - v\lambda^{-\frac{n\theta}{2s}}}.$$

Isso implica que

$$\sup_{B\sigma R} u \leq \frac{C_2\lambda^{\frac{n\theta}{2s}}}{\lambda^{\frac{n\theta}{2s}} - v}(1-\lambda)^{-\frac{n\theta}{2s}}(1-\sigma)^{-\frac{n\theta}{2s}}\left(R^{-n}\int_{B_R} u^s\,dx\right)^{1/s},$$

tomando $C_3 = \frac{C_2\lambda^{\frac{n\theta}{2s}}}{\lambda^{\frac{n\theta}{2s}}-v}(1-\lambda)^{-\frac{n\theta}{2s}}$ provamos a afirmação e concluimos a demonstração com o caso em que $s \in (0, n\theta)$. □

Nosso objetivo agora é provar que soluções da equação $\triangle_g v = 0$ satisfazem a conhecida desigualdade de Harnack que é satisfeita para funções harmônicas, mas antes vamos precisar dos resultados à seguir.

Lema 5.1. *Suponha que $u \in W^{1,G}(\Omega)$ é uma supersolução fraca não-negativa e limitada da equação $\Delta_g v = 0$. Então para todo $B_R \subset \Omega$, $\epsilon > 0$ e $s > 0$ temos*

$$u(x) + \epsilon \geq C(s)\left(⨍_{B_{\frac{2}{3}R}} (u+\epsilon)^{-s}\,dx\right)^{-1/s}, \quad \forall x \in B_{\frac{R}{2}}.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ definimos a função $v_\epsilon = (u+\epsilon)^{-1}$ note que $v_\epsilon \in W^{1,G}(\Omega)$ e afirmamos que v_ϵ é uma subsolução fraca de $\mathcal{L}_g w = 0$. Com efeito considere uma função $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}\int g(|\nabla v_\epsilon|)\frac{\nabla v_\epsilon}{|\nabla v_\epsilon|}\nabla\varphi\,dx &= -\int g\left(\left|\frac{\nabla u}{(u+\epsilon)^2}\right|\right)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\frac{|u+\epsilon|}{u+\epsilon}\nabla\varphi\,dx\\ &= -\int g\left(\left|\frac{\nabla u}{(u+\epsilon)^2}\right|\right)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla\varphi\,dx\\ &\leq -\int \xi_0\left(\frac{1}{(u+\epsilon)^2}\right)g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla\varphi\,dx \leq 0,\end{aligned}$$

onde $\xi_0(s) = \min\{s^\delta, s^{g_0}\}$.

Agora usando o Teorema 5.1 para v_ϵ temos $\forall s > 0$

$$\sup_{B_R/2} v_\epsilon \leq C\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{n\theta}{2s}}\left(⨍_{B_{\frac{2}{3}R}} v_\epsilon^s\,dx\right)^{1/s},$$

portanto $\forall x \in B_{\frac{R}{2}}$

$$u(x) + \epsilon \geq (\sup(u+\epsilon)^{-1})^{-1} \geq C(s)\left(⨍_{B_{\frac{2}{3}R}} (u+\epsilon)^{-s}\,dx\right)^{-1/s}.$$

□

Teorema 5.2 (Desigualdade de Harnack Fraca)**.** *Suponha $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma supersolução fraca limitada e não-negativa da equação*

$$\Delta_g v = 0 \quad em \ \ \Omega.$$

Então para toda bola $B_{\sqrt{n}R} \subset \Omega$ existem constantes positivas p, C dependendo somente de n, δ e g_0 tais que

$$\left(\fint_{B_{\frac{2}{3}R}} u^p \, dx \right)^{1/p} \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} u.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ seja $\tilde{u} = u + \epsilon$, vamos considerar uma bola $B_\rho \subset B_{\sqrt{n}R}$ e uma função teste $\varphi = G(\frac{\tilde{u}}{\rho})^{-1}\eta^{g_0+1}\tilde{u} \in W_0^{1,G}(\Omega)$ onde $\eta \in C_0^\infty(B_\rho)$ é uma função obtida do Lema 2.2 satisfazendo $\eta = 1$ em $B_{\rho/2}$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $||D\eta||_{L^\infty} \leq \frac{2C}{\rho}$. Então

$$\int_{B_\rho} \left(G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1} \eta^{g_0+1} - g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right) G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-2} \frac{\tilde{u}}{\rho}\eta^{g_0+1} \right) D\tilde{u} g(|D\tilde{u}|)\frac{D\tilde{u}}{|D\tilde{u}|} \, dx$$
$$+ \int_{B_\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1} \tilde{u}(g_0+1)\eta^{g_0} D\eta g(|D\tilde{u}|)\frac{D\tilde{u}}{|D\tilde{u}|} \, dx \geq 0.$$

Como

$$G(t) = sg(t)|_0^t - \int_0^t sg'(s)\, ds \leq tg(t) - \delta G(t),$$

então $G(t) \leq \frac{t}{1+\delta} g(t)$ daí temos

$$-g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)\frac{\tilde{u}}{\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-2} \eta^{g_0+1} \leq -(1+\delta) G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right) G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-2} \eta^{g_0+1},$$

segue que

$$\int \left(G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1} \eta^{g_0+1} - (1+\delta) G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right) G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-2} \eta^{g_0+1} \right) D\tilde{u} g(|D\tilde{u}|)\frac{D\tilde{u}}{|D\tilde{u}|} \, dx$$
$$+ \int G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1} \tilde{u}(g_0+1)\eta^{g_0} D\eta g(|D\tilde{u}|)\frac{D\tilde{u}}{|D\tilde{u}|} \, dx \geq 0,$$

isso implica que

$$\int_{B_\rho} \delta G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1} \eta^{g_0+1} D\tilde{u} g(|D\tilde{u}|)\frac{D\tilde{u}}{|D\tilde{u}|} \, dx \leq \int_{B_\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1} \tilde{u}(g_0+1)\eta^{g_0} D\eta g(|D\tilde{u}|)\frac{D\tilde{u}}{|D\tilde{u}|} \, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} \delta G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}\eta^{g_0+1}g(|D\tilde{u}|)|D\tilde{u}|\,dx &\le \int_{B_\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}\tilde{u}(g_0+1)\eta^{g_0}g(|D\tilde{u}|)\frac{2C}{\rho}\\ &= \int_{B_\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}\eta^{g_0+1}C(g_0)\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\frac{2}{\delta}g(|D\tilde{u}|)\frac{\delta}{2}\,dx,\end{aligned}$$

agora usando a desigualdade $ab \le ag(a) + bg(b)$ com $a = C(g_0)\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\frac{2}{\delta}$ e $b = |D\tilde{u}|$ temos

$$C(g_0)\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\frac{2}{\delta}g(|D\tilde{u}|) \le C(g_0)\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\frac{2}{\delta}g\left(C(g_0)\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\frac{2}{\delta}\right) + |D\tilde{u}|g(|D\tilde{u}|)$$

e como $g\left(C(g_0)\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\frac{2}{\delta}\right) \le \left(\frac{2}{\delta}C(g_0)\right)^{g_0} g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\right)$(pois $h(t) = t^{-go}g(t)$ é decrescente) segue que

$$\int \frac{\delta}{2}G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}\eta^{g_0+1}g(|D\tilde{u}|)|D\tilde{u}|\,dx \le \left(C(g_0)\frac{2}{\delta}\right)^{g_0+1}\int G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}\eta^{g_0}g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\right)\frac{\tilde{u}}{\rho}\frac{\delta}{2}\,dx.$$

Como $g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho\eta}\right) \le \eta^{-g_0}g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)$ (pois $h(t) = t^{-go}g(t)$ é decrescente) temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}\eta^{g_0+1}g(|D\tilde{u}|)|D\tilde{u}|\,dx &\le C\int_{B_\rho} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)\frac{\tilde{u}}{\rho}\,dx\\ &\le C\int_{B_\rho}(1+g_0)\,dx = C(\delta,g_0)\rho^n.\end{aligned}$$

Assim como $\eta = 1$ em $B_{\frac{\rho}{2}}$

$$\int_{B_{\frac{\rho}{2}}} G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)^{-1}g(|D\tilde{u}|)|D\tilde{u}|\,dx \le C(\delta,g_0)\rho^n,$$

usando isso obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}}|D\log\tilde{u}|\,dx &= \int_{B_{\frac{\rho}{2}}}\frac{|D\tilde{u}|}{\tilde{u}}\frac{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)}{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)}\\ &\le \frac{1}{\rho}\int\frac{|D\tilde{u}|}{\tilde{u}/\rho}\frac{g(|D\tilde{u}|)}{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)} + \frac{1}{\rho}\int\frac{\tilde{u}/\rho}{\tilde{u}/\rho}\frac{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)}{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)}\\ &\le \frac{1}{\rho}\int\frac{|D\tilde{u}|g(|D\tilde{u}|)}{G\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)} + \frac{1}{\rho}\int\frac{\tilde{u}/\rho}{\tilde{u}/\rho}\frac{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)}{g\left(\frac{\tilde{u}}{\rho}\right)}\\ &\le C\rho^{n-1}.\end{aligned}$$

Portanto tomando $v = \log u$ temos $\forall B_\rho \subset B_{\sqrt{n}R}$ usando a desigualdade de Poincaré

$$\fint_{B_{\frac{\rho}{2}}} |v - v_{B_\rho}|\, dx \leq \rho C(n) \fint_{B_{\frac{\rho}{2}}} |Dv|\, dx \leq C(n,\delta,g_0)\frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-1}},$$

isso nos diz que $v \in BMO(B_{\sqrt{n}R})$(ver preliminares) então pelo Teorema de Jonh-Niremberg usando que $B_{\frac{2}{3}R}(x_0) \subset x_0 + (-\frac{2}{3}R, \frac{2}{3}R)^n \subset B_{\sqrt{n}R}(x_0)$, existem constantes $p, C > 0$ tais que

$$\left(\int_{B_{\frac{2}{3}R}} \exp(pv)\, dx\right)\left(\int_{B_{\frac{2}{3}R}} \exp(-pv)\, dx\right) \leq CR^{2n},$$

isso implica que

$$\left(\int_{B_{\frac{2}{3}R}} \tilde{u}^p\, dx\right)^{1/p} \leq (CR^{2n})^{1/p}\left(\int_{B_{\frac{2}{3}R}} \tilde{u}^{-p}\, dx\right)^{-1/p},$$

e portanto usando o Lema 5.2 temos que

$$\left(\fint_{B_{\frac{2}{3}R}} \tilde{u}^p\, dx\right)^{1/p} \leq C(u(x)+\epsilon),\ \forall x \in B_{R/2}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0^+$ concluimos que

$$\left(\fint_{B_{\frac{2}{3}R}} u^p\, dx\right)^{1/p} \leq Cu(x),\ \forall x \in B_{R/2}.$$

□

Corolário 5.1 (Desigualdade de Harnack)**.** *Suponha $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca limitada e não-negativa da equação*

$$\Delta_g v = 0 \quad em\ \ \Omega.$$

Então para toda bola $B_R \subset \Omega$ existe uma constante $C > 0$ dependendo somente de n, δ e g_0 tal que

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} u \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} u$$

Demonstração. Segue diretamente pela combinação dos Teoremas 5.1 e 5.2 □

Como aplicação da desigualdade de Harncack vamos mostrar a seguir que soluções dessa equação são localmente Hölder contínuas.

Teorema 5.3. *Seja $u \in W^{1,G}(\Omega)$ solução fraca limitada da equação*

$$\Delta_g v = 0 \qquad em \ \Omega.$$

Então para cada $B_R(x_0) \subset \Omega$ temos

1. *Existem constantes $C = C(n, \delta, g_0) > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que para $B_\rho(x_0) \subset B_R(x_0)$ temos*
$$osc_{B_\rho(x_0)} u \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha osc_{B_R(x_0)} u.$$
2. *Existe uma constante $C = C(R, n, \delta, ||u||_{L^\infty(\Omega)}, g_0) > 0$ que limita a seminorma Holder e u, mais precisamente tem-se*

$$[u]_{\alpha, B_{R/2}(x_0)} \leq C,$$

onde
$$[u]_{\alpha, B_{R/2}(x_0)} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

e
$$osc_{B_R} u = \sup_{B_R} u - \inf_{B_R} u = \sup_{B_R} |u(x) - u(y)|.$$

Demonstração. Sejam $M(R) = \sup_{B_R} u, m(R) = \inf_{B_R} u$ e para abreviar a notação vamos escrever
$$M = M(R), M' = M(R/2), m = m(R), m' = m(R/2).$$

As funções $M - u(x)$ e $u(x) - m$ são também soluções fracas limitadas não-negativas da equação $\triangle_g v = 0$, assim temos usando a notação acima

$$\sup_{B_{R/2}} (M - u) = M - \inf_{B_{R/2}} u = M - m'$$
$$\inf_{B_{R/2}} (M - u) = M - \sup_{B_{R/2}} u = M - M'$$
$$\sup_{B_{R/2}} (u - m) = \sup_{B_{R/2}} u - m = M' - m$$
$$\inf_{B_{R/2}} (u - m) = \inf_{B_{R/2}} u - m = m' - m.$$

Quando aplicamos a Desigualdade de Harnack as funções $M - u$ e $u - m$ obtemos

$$\sup_{B_{R/2}} (M - u) \leq C \inf_{B_{R/2}} (M - u),$$
$$\sup_{B_{R/2}} (u - m) \leq C \inf_{B_{R/2}} (u - m),$$

isso significa que

$$(M - m') \leq C(M - M'),$$
$$(M' - m) \leq C(m' - m).$$

Somando as desigualdades acima obtemos

$$\begin{aligned}
&(M - m') + (M' - m) \leq CM - CM' + Cm' - Cm \\
&M'(1 + C) - m'(C + 1) \leq M(C - 1) - m(C - 1) \\
&M' - m' \leq \left(\frac{C - 1}{C + 1}\right)(M - m) \\
&M\left(\frac{R}{2}\right) - m\left(\frac{R}{2}\right) \leq \left(\frac{C - 1}{C + 1}\right)(M(R) - m(R)).
\end{aligned}$$

Fazendo iterações na última desigualdade acima obtemos $i = 1, 2, ...$

$$M\left(\frac{R}{2^i}\right) - m\left(\frac{R}{2^i}\right) \leq \left(\frac{C - 1}{C + 1}\right)^i (M(R) - m(R)).$$

Denotando $\theta = \left(\frac{C-1}{C+1}\right)$ e $\omega(R) = M(R) - m(R)$ podemos escrever a desigualdade acima como sendo

$$\omega\left(\frac{R}{2^i}\right) \leq \theta^i \omega(R). \tag{43}$$

Para qualquer $\rho \in (0, R)$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{R}{2^{i+1}} \leq \rho < \frac{R}{2^i}$, assim temos $\omega(\rho) \leq \omega(\frac{R}{2^i})$ daí por (42) temos $\omega(\rho) \leq \theta^i \omega(R)$. Mas

$$\frac{R}{2^{i+1}} \leq \rho \Rightarrow i + 1 \geq \log_2 \frac{R}{\rho} \Rightarrow \theta^i \leq \theta^{\log_2 \frac{R}{\rho} - 1}$$

e

$$\theta^{\log_2 \frac{R}{\rho}} = \left(\theta^{\log_\theta \frac{R}{\rho}}\right)^{\frac{1}{\log_\theta 2}} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\frac{1}{\log_\theta 2}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}$$

onde $\alpha = \frac{-1}{\log_\theta 2}$, logo

$$\omega(\rho) \leq \theta^{-1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} \omega(R)$$

isso prova a primeira afirmação.

Quanto a segunda parte observe que como o ponto $x_0 \in \Omega$ é arbitrário segue que o mesmo argumento que foi usado acima mostra que para todo $y \in B_{R/2}(x_0)$ temos

$$osc_{B_\rho(y)} u \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} osc_{B_{R/2}(y)} u, \ \forall \rho < \frac{R}{2}.$$

Sejam $x, y \in B_{R/2}(x_0)$ temos dois casos a considerar;

caso 1: Se $|x-y|<R/2$ então denotando $r=|x-y|$ temos

$$
\begin{aligned}
&|u(x)-u(y)| \leq osc_{B_r(y)} u \leq C\left(\frac{|x-y|}{R}\right)^{\alpha} osc_{B_{R/2}(y)} u \\
&\Rightarrow \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C2\frac{||u||_{L^\infty}}{R^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

caso2: Se $|x-y|\geq \frac{R}{2}$ então

$$
\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \frac{|u(x)-u(y)|}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha}} \leq \frac{2||u||_{L^\infty}}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha}}.
$$

Portanto $\forall x, y \in B_{R/2}(x_0)$ com $x \neq y$ temos

$$
\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \max\left\{\frac{2||u||_{L^\infty}}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\alpha}}, C\frac{2||u||_{L^\infty}}{R^{\alpha}}\right\}.
$$

$\square$

6 CONCLUSÃO

Como foi dito no inicio deste trabalho, o objetivo é estudar a α-Hölder regularidade de soluções fracas da equação

$$\Delta_g u = div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0.$$

Com esse intuito pedimos que a função g satisfaça algumas condições as quais, através da teoria dos espaços de Orlicz nos permitiram provar a existência de soluções e, usando o método da iteração de Moser mostramos que tais soluçoes satisfazem a desigualdade de Harnack

$$\sup_{B_R} u \leq C \inf_{B_R} u.$$

Como conseqüência deste fato segue que u tem a regularidade desejada.

REFERÊNCIAS

ADAMS, Robert A.; John J.F FOURNIER. **Sobolev spaces**. Amsterdam: Elsevier, 2003.

DONALDSON, Neil S, Thomas K.; TRUDINGER. Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems. **Journal of functional analysis**, v. 8, n. 1, p. 52–75, 1971.

EVANS, Lawrence C. **Partial differential equations**, v. 19. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2022.

KRASNOSEL'S; RUTICKII. **Convex Functions and Orlicz Spaces**. Translated from the first russian edition by L.F Boron, P. Noordhoff. Groningen: P. Noordhoff, 1961.

LIEBERMAN, Gary M. The natural generalizationj of the natural conditions of ladyzhenskaya and urall'tseva for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 16, n. 2-3, p. 311–361, 1991.

MARTINEZ, Noemi, Sandra; WOLANSKI. A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces. **Advances in Mathematics**, v. 218, n. 6, p. 1914–1971, 2008.

RIBEIRO, Bruno Henrique Carvalho. **Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, 2006.

SHAKARCHI, STEIN Elias M Remi.;. **Real analysis:** measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 2009.