



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

**WAGNER COELHO NORMANDO FILHO**

**UMA PROPOSTA DE FUNÇÃO DE WIGNER EM UM ESPAÇO DE FASE**  
**MODIFICADO**

**FORTALEZA**

**2024**

WAGNER COELHO NORMANDO FILHO

UMA PROPOSTA DE FUNÇÃO DE WIGNER EM UM ESPAÇO DE FASE MODIFICADO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.  
Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

N765p Normando Filho, Wagner Coelho.  
Uma proposta de Função de Wigner em um espaço de fase modificado / Wagner Coelho Normando Filho. – 2024.  
70 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2024.  
Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

1. Mecânica Quântica. 2. Mecânica Quântica no Espaço de Fase. 3. Teoria da Informação Quântica. 4. Quantização de Weyl-Wigner. 5. Função de Wigner. I. Título.

CDD 530

---

WAGNER COELHO NORMANDO FILHO

UMA PROPOSTA DE FUNÇÃO DE WIGNER EM UM ESPAÇO DE FASE MODIFICADO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.  
Área de Concentração: Física

Aprovada em: 23/07/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa  
Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. João Milton Pereira Junior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Wandemberg Paiva Ferreira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Vanderley Aguiar de Lima Júnior  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus pais, com gratidão.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, por todo o apoio em meus estudos. Serei eternamente grato.

À minha namorada, Bruna Lorena. Por todo o carinho e compreensão nos momentos difíceis. E, principalmente, pelo apoio nesse meu trajeto como pesquisador.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Raimundo Nogueira, pela orientação.

Aos colegas de laboratório e amigos, João Pedro e Willian Wallace. Nossas tardes ajudando uns aos outros tiveram um papel importante no desenvolvimento desse trabalho.

Ao matemático, e principalmente amigo, Thiago Lima. Pelas conversas que me serviram para esclarecer alguns pontos desse trabalho.

Agradeço também ao físico, e também amigo, Gabriel. Pela ajuda nos momentos finais desse trabalho.

Agradeço ao amigo Jackson Allyson, pela amizade que cultivamos durante essa fase da minha vida.

Ao amigo Genivaldo Vasconcelos, pelas conversas nesses últimos dois anos.

À minha psicóloga e excelente profissional, Bianca Texeira. Nosso encontros toda semana são um dos pilares de apoio que me fazem, cada vez mais, acreditar em mim. Sua ajuda tornou a realização deste trabalho mais leve.

Ao Eiichiro Oda pela sua obra, One Piece, que me ajuda e me inspira a perseguir meus sonhos e objetivos.

Agradeço, por último, a Universidade Federal do Ceará por proporcionar um ambiente incrível para meus estudos. E a Funcap pelo financiamento nesses últimos dois anos.

“Não se pode entender um processo interrompendo-o. O entendimento precisa acompanhar o fluxo do processo, tem de se juntar a ele e fluir com ele”.

(Frank Hebert, 1960)

## RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo discorrer sobre a mecânica quântica no espaço de fase, propor uma modificação na função de Wigner por meio do operador de translação dependente da posição (PDTO) e aplicar a teoria proposta em sistemas de interesse físico. Assim, utilizando-se de uma métrica não-euclidiana unidimensional, construímos uma função de Wigner modificada cuja forma pode ser expressa em termos do operador de translação dependente da posição para o caso de translações finitas. Por meio dessa métrica, definimos uma transformação de ponto que age como uma parametrização que preserva a forma euclidiana das equações. Assim, foi possível encontrar uma expressão modificada para o mapa de quantização de Weyl-Wigner, cujo objetivo é mapear funções no espaço de fase em operadores no espaço de Hilbert. Mostramos que, ao utilizar esse mapa modificado para quantizar o momento clássico, obtém-se o mesmo resultado do operador momento modificado encontrado via operador de translação dependente da posição. Ademais, por meio da operação inversa do mapa de Weyl-Wigner parametrizado, foi possível definir uma forma modificada da função de Wigner, cuja forma matemática do caso euclidiano foi preservada. Aplicamos a função de Wigner proposta na partícula presa no poço de potencial e em um sistema do tipo oscilador quântico, com o objetivo de avaliar a influência da métrica na dinâmica do sistema. Plotamos o gráfico da função de Wigner modificada para esses dois sistemas, onde foi possível verificar o aparecimento de deformações devido a influência da métrica utilizada. Dessa forma, concluímos que a dinâmica do sistema sofre uma modificação quando a estrutura do espaço é deformada.

**Palavras-chave:** Mecânica Quântica; Teoria da Informação Quântica; Quantização de Weyl-Wigner; Função de Wigner.

## ABSTRACT

The present work aimed to discuss quantum mechanics in phase space, propose a modification of the Wigner function through the position-dependent translation operator (PDTO) and apply the proposed theory to systems of physical interest. Thus, using a one-dimensional non-Euclidean metric, we construct a modified Wigner function whose form can be expressed in terms of the position-dependent translation operator for the case of finite translations. Through this metric, we define a point transformation that acts as a parameterization that preserves the Euclidean form of the equations. Thus, it was possible to find a modified expression for the Weyl-Wigner quantization map, whose objective is to map functions in phase space into operators in Hilbert space. We show that, when using this modified map to quantize the classical momentum, we obtain the same result as the modified momentum operator found via the position-dependent translation operator. Furthermore, through the inverse operation of the parameterized Weyl-Wigner map, it was possible to define a modified form of the Wigner function, whose mathematical form from the Euclidean case was preserved. We apply the proposed Wigner function to the particle trapped in the potential well and to a quantum oscillator-type system, with the aim of evaluating the influence of the metric on the system dynamics. We plotted the graph of the modified Wigner function for these two systems, where it was possible to verify the appearance of deformations due to the influence of the metric used. Thus, we concluded that the dynamics of the system undergoes a change when the structure of the space is deformed.

**Keywords:** quantum mechanics; quantum information theory; Weyl-Wigner quantization, Wigner function.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Nessas quatro imagens temos o nível de energia $n = 1$ plotados considerando $\hbar = 1$ e $L_\eta = \pi$ . Nas imagens de cima tomou-se $\gamma = 0$ e nas de baixo $\gamma = 0.5$ .	57
Figura 2	– Nessas quatro imagens temos o nível de energia $n = 2$ , plotados considerando $\hbar = 1$ e $L_\eta = \pi$ . Nas imagens de cima tomou-se $\gamma = 0$ e nas de baixo $\gamma = 0.5$ .	57
Figura 3	– Nessas quatro imagens temos o nível de energia $n = 3$ , plotados considerando $\hbar = 1$ e $L_\eta = \pi$ . Nas imagens de cima tomou-se $\gamma = 0$ e nas de baixo $\gamma = 0.5$ .	58
Figura 4	– Gráfico da função potencial plotada em que $M\Omega^2 = 1$ e para valores de $\gamma$ aproximando-se cada vez mais de 0. . . . .	60
Figura 5	– Nessas quatro imagens temos o nível de energia $n = 0$ plotados considerando $\hbar = \delta^2 = 1$ . Nas imagens de cima tomou-se $\gamma = 0$ e nas de baixo $\gamma = 0.5$ . . .	64
Figura 6	– Nessas quatro imagens temos o nível de energia $n = 2$ plotados considerando $\hbar = \delta^2 = 1$ . Nas imagens de cima tomou-se $\gamma = 0$ e nas de baixo $\gamma = 0.5$ . . .	65
Figura 7	– Nessas quatro imagens temos o nível de energia $n = 3$ plotados considerando $\hbar = \delta^2 = 1$ . Nas imagens de cima tomou-se $\gamma = 0$ e nas de baixo $\gamma = 0.5$ . . .	65

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{F}(\mathbf{p})$	Transformada de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x})$	Transformada de Fourier inversa
$L^2(\mathbb{R}^d)$	Espaço de funções quadrado integráveis em d-dimensões.
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
$T(d\lambda)$	Operador de translação infinitesimal usual
$H^g$	Hamiltoniano modificado
$\mathcal{P}$	Espaço de fase
$\mathbf{Q}$	Mapa de quantização de Weyl-Wigner
$N_{\hat{A}}$	Núcleo do operador $\hat{A}$
$\mathbf{S}$	Símbolo de Weyl
$W(\eta, p)_n$	n-ésima função de Wigner modificada
$H_n$	n-ésimo polinômio de Hermite
$L_k$	k-ésimo polinômio da Laguerre

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
2	<b>FUNDAMENTOS</b> . . . . .	13
2.1	<b>Formulação Quântica no Espaço de Hilbert</b> . . . . .	13
2.1.1	<i>Transformada de Fourier na Mecânica Quântica</i> . . . . .	13
2.1.2	<i>Estado Quântico e Operadores no Espaço de Hilbert</i> . . . . .	13
2.1.3	<i>Espaço de Hilbert com uma métrica não-euclidiana</i> . . . . .	18
2.2	<b>Mecânica Quântica no Espaço de Fase</b> . . . . .	22
2.2.1	<i>Espaço de Fase Clássico e a Quantização Canônica</i> . . . . .	23
2.2.2	<i>Quantização de Weyl-Wigner</i> . . . . .	26
2.2.3	<i>A Função de Wigner</i> . . . . .	30
3	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	38
3.1	<b>Transformação de Wigner Modificada</b> . . . . .	38
3.2	<b>Aplicação em Sistemas de Interesse Físico</b> . . . . .	47
3.2.1	<i>Partícula presa ao Poço de Potencial Infinito Antissimétrico</i> . . . . .	47
3.2.2	<i>Função de Wigner Modificada para um Sistema do Tipo Oscilador Quântico</i>	58
4	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	67
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	69

## 1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica (MQ) é conhecida por suas importantes contribuições em avanços tecnológicos e por promover um entendimento profundo acerca dos aspectos fundamentais da natureza e seus fenômenos, dentre outros fatores. Tais avanços tecnológicos são possíveis devido ao sucesso de inúmeros experimentos que conseguem validar o formalismo quântico. Graças a contribuição de diversos cientistas nessa área, dispõe-se atualmente de três formalismos consolidados que harmonizam entre si para a descrição da natureza quântica da matéria: 1. A descrição via espaço de Hilbert e os postulados estabelecidos em Copenhague; 2. As Integrais de Caminho de Feynman; e 3. A descrição da MQ via Espaço de Fase (Curtright *et al.*, 2013). Essa última foi construída de maneira independente por Weyl, Wigner, Moyal e Groenewold (Galetti *et al.*, 2019). Tal formalismo descreve resultados quânticos por meio da quantização do espaço de fase clássico, levando funções do espaço de fase em operadores no espaço de Hilbert e encontrando os mesmos resultados dos dois outros formalismos citados anteriormente.

A quantização do espaço de fase clássico consiste em levar as variáveis clássicas  $x$  e  $p$  em seus respectivos operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  no espaço de Hilbert. Tal processo ocorre por meio de um mapa de quantização conhecido na literatura como mapa de Weyl-Wigner ou mapa de quantização (Wezeman, 2014), que aqui será denotado por  $\mathbf{Q}$ . Logo:

$$(x, p) \xrightarrow{\mathbf{Q}(x, p)} (\hat{x}, -i\hbar \frac{d}{dx}). \quad (1.1)$$

Todo esse formalismo no espaço de fase começou com os trabalhos de Hermann Weyl e Eugene Wigner em 1930 (Curtright *et al.*, 2013). Em 1927, Weyl publica seu trabalho acerca da correspondência de funções no espaço fase e operadores no espaço de Hilbert, constituindo um processo de quantização. Weyl acreditava que seu mapa representava uma forma de quantização superior a todas as outras, ele defendia que sua teoria generalizava de maneira correta o único caminho possível para desenvolver a mecânica quântica partindo dos resultados clássicos.

Contudo, o mapa de Weyl falhava em levar o quadrado do momento angular clássico,  $L^2$ , em seu análogo operador quântico (Curtright *et al.*, 2013). Em seu trabalho de 1932, Wigner estava interessado em propor correções quânticas para a termodinâmica. Assim, define uma forma de descrever um estado quântico no espaço fase, mapeando o operador densidade com domínio no espaço de Hilbert em uma função no espaço de fase. Tal resultado veio a receber o seu nome e ficou conhecido como a função de Wigner. A importância dessa função advém de sua expressão ser composta pelas variáveis momento e posição, colocando-as em pé de igualdade

nesse formalismo. Vale ressaltar que isso não ocorre na descrição via espaço de Hilbert, onde as representações do operador momento e posição são excludentes. Porém, mesmo a função de Wigner carregando em sua expressão as variáveis de momento e posição, o princípio da incerteza de Heisenberg ainda é obdecido.

A função de Wigner é muito explorada no estudo de informação quântica e computação quântica. Em particular, um exemplo interessante que pode-se citar, é no estudo de entrelaçamento. Dentro do contexto de dois pacotes de onda gaussiano que interagiram e então formaram um sistema composto, a função de Wigner carrega em sua expressão um termo extra referente ao entrelaçamento (Weinbub; Ferry, 2018). Quando consideramos a evolução temporal desses dois pacotes de onda, movendo-se um para longe do outro, o termo de entrelaçamento pode ser visualizado ao plotar o gráfico no espaço de fase. Dessa forma, tornando mais fácil estudar e analisar esse fenômeno com o auxílio da função de Wigner.

Em trabalhos recentes o espaço de fase vem sendo explorado como ambiente de estudo para a informação quântica. É possível, com o auxílio do função de Wigner, construir expressões para entropia em termos das variáveis de posição e momento. Como por exemplo, a entropia de Shannon e Rényi. Por meio dessas entropias, é concebível outros quantificadores, tais como a informação mútua, que mede a correlação entre duas ou mais variáveis. (Salazar *et al.*, 2023). Contudo, alguns cuidados se fazem necessários quando se analisar entropias medidas em termos da FW, visto que a mesma pode assumir valores negativos e assim gerar resultados imaginários para a entropia. Algumas abordagens recentes, utilizaram o módulo da função de Wigner para estudar a entropia de Shannon em um sistema de oscilador harmônico quântico (Salazar *et al.*, 2023)

Dessa forma, o presente trabalho espera poder acrescentar mais contribuições para o estudo da função de Wigner e suas aplicações. O primeiro capítulo dedicou-se a desenvolver, de maneira formal, toda a construção da mecânica quântica via mapa de quantização de Weyl-Wigner. Além disso, mostrou-se como é possível obter a função de Wigner a partir do símbolo de Weyl de um operador, que por definição consiste na operação inversa do mapa de Weyl-Wigner. No segundo capítulo, apresentaremos os resultados. Iremos propor uma modificação do formalismo quântico no espaço de fase, mediante a utilização de uma métrica não-euclidiana. Dessa forma, chegaremos em uma função de Wigner modificada. No mesmo capítulo estudamos o formalismo proposto para a partícula no poço de potencial e o oscilador quântico.

## 2 FUNDAMENTOS

O presente capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos necessários para um entendimento sólido da MQ no espaço de fase (MQEF) e mostrar sua equivalência com a descrição via espaço de Hilbert e função de onda. A seguir, tem-se uma discussão sobre a transformada de fourier em MQ, cujo papel é de crucial importância para o desenvolvimento da transformação de Wigner-Weyl.

### 2.1 Formulação Quântica no Espaço de Hilbert

#### 2.1.1 Transformada de Fourier na Mecânica Quântica

A transformada de fourier advém de um limite da série de fourier trigonométrica quando o intervalo tende ao infinito. Assim, se  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  for uma função de onda que descreve o estado de um sistema físico, a sua transformada de fourier fica definida como (Keppeler; Physik, 2004):

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) := \mathcal{F}[\psi(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} d^d x = \bar{\psi}(\mathbf{p}), \quad (2.1)$$

com a inversa sendo:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}) := \mathcal{F}^{-1}[\bar{\psi}(\mathbf{p})] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(\mathbf{p}) e^{\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} d^d p = \psi(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  são as variáveis de posição e momento, respectivamente. Em MQ, a transformada de fourier pode ser vista como uma mudança de base para o caso da base contínua, obtida dos operadores hermitianos de posição e momento - essa discussão será feita com mais detalhes na próxima seção. Isso posto, as equações 2.1 e 2.2, funcionam como uma forma de transicionar entre as bases de momento e posição (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a), com  $\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \psi(\mathbf{x})$  e  $\langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \bar{\psi}(\mathbf{p})$ .

#### 2.1.2 Estado Quântico e Operadores no Espaço de Hilbert

Para que seja possível construir um formalismo para a MQEF, é válido e didaticamente justificável, resgatarmos os principais conceitos referentes ao formalismo da MQ no espaço de Hilbert. Uma vez que esses dois formalismos se propõe a descrever a mesma teoria, espera-se que ambos forneçam os mesmos resultados. No formalismo do espaço de Hilbert, o estado do sistema pode ser descrito tanto por uma função de onda como por uma matriz

densidade. Esses dois objetos matemáticos pertencem a um espaço vetorial com propriedades particulares. Além disso, as grandezas físicas tornam-se operadores que agem nesse espaço. A seguir, discutiremos algumas dessas propriedades.

**Definição 2.1.1** *Um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , é um espaço vetorial que é dotado de um produto interno complexo, denotado por  $\langle, \rangle$ , e é um espaço dito completo. (Zettili, 2009).*

Ser completo significa que toda sequência de Cauchy  $\psi_n \in \mathcal{H}$  converge para um elemento de  $\mathcal{H}$ . Ou seja, para qualquer  $\psi_n$ , a relação:

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} |\psi_n - \psi_m| = 0 \quad (2.3)$$

define um único elemento  $\psi \in \mathcal{H}$ , de modo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi - \psi_n| = 0. \quad (2.4)$$

Para o caso em que  $\mathcal{H}$  é unidimensional, com  $\psi$  e  $\phi$  elementos de  $\mathcal{H}$ , o produto interno mencionado anteriormente é dado por (Wezeman, 2014):

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_a^b \phi^*(x) \psi(x) dx. \quad (2.5)$$

As funções de onda que representam estados físicos reais constituem um espaço denotado de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Os espaço  $L^2$  contém todas aquelas funções que a integral do seu módulo quadrado é finita. Tal espaço é um exemplo de espaço de Hilbert (Wezeman, 2014). Posto isso, podemos formalizar escrevendo:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) := \left\{ \psi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty \right\}. \quad (2.6)$$

Assim, tomamos o caso unidimensional  $d=1$ . A expressão  $|\psi|^2$  é a densidade de probabilidade associada ao sistema em estudo. Sabe-se que a integral da densidade de probabilidade sobre todos os possíveis valores de posição é igual a 1. Isso implica dizer que a partícula deve ser encontrada em algum lugar do espaço (Sakurai; Napolitano, 2021). Um vetor do espaço do Hilbert é usualmente representado na notação de Dirac. Essa notação é construída baseando-se na noção de bra e de ket.

**Definição 2.1.2** *Um elemento de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é chamado de vetor ket e denotado por  $|\psi\rangle$ . Assim um vetor  $\psi$  é escrito como  $|\psi\rangle$  e lê-se "ket  $\psi$ "*

Existe um outro espaço, associado ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , que é chamado de espaço dual e denotado por  $\mathcal{H}^*$ , seus elementos são chamados de "funcionais lineares". Tais objetos matemáticos são operadores lineares e seu domínio fica definido sobre os kets de  $\mathcal{H}$ . Assim, a atuação desses funcionais associa cada ket do espaço  $\mathcal{H}$  a um número complexo. Com essa noção é possível definir (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a):

**Definição 2.1.3** *Qualquer elemento do espaço  $\mathcal{H}^*$  é denotado por  $\langle |$  e chamado de bra. O elemento  $\langle \phi | \in \mathcal{H}^*$ , por exemplo, é um bra.*

Se  $|u\rangle$  for um elemento de  $\mathcal{H}$ , é possível construir um funcional linear  $\langle u | \in \mathcal{H}^*$  que vai associar a cada elemento de  $\mathcal{H}$  um número complexo. Esse número vai ser igual ao produto escalar de  $|v\rangle$  com  $|u\rangle$ . De tal forma que:

$$\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle. \quad (2.7)$$

Assim, a equação acima é um escalar  $\alpha$  qualquer, onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Se  $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$  for um conjunto de vetores ortornormais (ortogonais e unitários) que formam uma base para um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $|\phi\rangle$  for um vetor desse espaço, é possível escrever  $|\phi\rangle$  como uma combinação linear desses vetores de base (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a), tal que:

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |e_i\rangle. \quad (2.8)$$

Onde os escalares  $\{c_i\}_{i=1}^N$  pertencem à  $\mathbb{C}$  e podem ser obtidos tomando  $\langle e_i | \phi \rangle$ . Como supomos que o conjunto  $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$  é ortonormal e forma uma base para  $\mathcal{H}$ , então as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Relação de Ortonormalização

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij};$$

2. Completeza

$$\sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbb{1}.$$

Para que um dado vetor de estado tenha uma representação em termos dos vetores  $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ , é necessário que esse conjunto satisfaça as condições acima. A relação de completeza é também conhecida como "projetores" e denotada usualmente por  $P_{\{e_i\}}$  (Cohen-Tannoudji *et al.*,

2019a). Tendo introduzido a noção de espaços de Hilbert com produto interno e vetores de estado, torna-se necessário discutir a noção de operadores lineares. Estes estão fisicamente associados a noção de medição em MQ.

**Definição 2.1.4** *Um operador  $\hat{A}$  é um mapa linear entre espaços de Hilbert, definido por:*

$$\hat{A} : \mathcal{D}(\hat{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

com  $\mathcal{D}(\hat{A})$  sendo o domínio do operador  $\hat{A}$ .

No formalismo da MQ no espaço de Hilbert, as grandezas físicas são descritas por operadores hermitianos (Wezeman, 2014). Um operador é dito hermitiano se, e somente se, for igual à sua forma adjunta:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger. \quad (2.9)$$

Com isso, podemos enunciar:

**Teorema 2.1.1** *Os autovalores de um operador hermitiano  $\hat{A}$  são reais e os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais entre si.*

Atrelado ao resultado do teorema, torna-se conveniente normalizar os autovetores do operador  $\hat{A}$ , de modo a construir um conjunto de autovetores que possam atuar como uma base ortonormal para o espaço de Hilbert. Por conseguinte, somos capazes de descrever o estado do sistema como uma combinação linear dos autovetores desse operador (Sakurai; Napolitano, 2021). Assim, se  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  for um conjunto ortonormal de autovetores de  $\hat{A}$ , então para qualquer  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  tem-se:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |a_i\rangle. \quad (2.10)$$

É possível encontrar resultados análogos aos descritos até aqui para sistemas contínuos. Para ilustrar essa generalização, consideremos os operadores de posição e momento denotados, respectivamente, por  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ . Ambos são operadores hermitianos e geram uma base contínua para o espaço de Hilbert, que geralmente recebem o nome de "representação". (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a).

Considere  $|x\rangle$  e  $|p\rangle$  como sendo os vetores de base para a representação de posição e momento, respectivamente. A atuação de  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  em seus vetores de base fica definida como:

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad (2.11)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (2.12)$$

Aqui,  $x$  e  $p$  são os autovalores dos operadores posição e momento. Assim, se  $|\psi\rangle$  for um vetor de estado, é possível representa-lo na base de posição da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle \langle x|\psi\rangle dx. \quad (2.13)$$

Onde a expressão:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle \langle x| dx = \mathbb{1} \quad (2.14)$$

representa uma generalização da relação de completaza apresentada em 2. E para o caso da relação ortogonalidade, temos:

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'). \quad (2.15)$$

Por outro lado, para a representação na base do operador  $\hat{p}$ , o vetor de estado fica escrito como:

$$|\phi\rangle = \mathbb{1}|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \langle p|\phi\rangle dp. \quad (2.16)$$

As relações de completeza e ortogonalidade assumem formas semelhante ao caso da representação na base de posição, e são dadas por: (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle \langle p| \quad (2.17)$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'). \quad (2.18)$$

Para os propósitos deste trabalho, faz-se necessário descrever como  $\hat{p}$  atua na representação de posição. Para tanto, fazemos:

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{p}|\psi\rangle &= \langle x|\hat{p}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \langle p| dp\right)|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle x|\hat{p}|p\rangle \langle p|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \langle x|p\rangle p\bar{\psi}(p) dp \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} p\bar{\psi}(p). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para chegar ao resultado acima, usamos a seguinte relação: (Sakurai; Napolitano, 2021)

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}. \quad (2.20)$$

A equação 2.19 pode ser vista como a transformada de fourier de  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ . Portanto, temos:

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\psi\rangle, \quad (2.21)$$

em que, para o caso unidimensional, o operador momento pode ser escrito em sua famosa forma:

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.22)$$

A partir da mecânica clássica, sabe-se que o momento é o gerador do grupo das translações (Sakurai; Napolitano, 2021). Assim, sobre a ótica do formalismo quântico, o operador momento é visto como o gerador de translações para o contexto das funções de onda. Sendo  $T(\lambda)$  o operador de translação, então:

$$T(\lambda)|x\rangle = |x+\lambda\rangle. \quad (2.23)$$

Em situações onde o deslocamento é infinitesimal  $d\lambda$ , a expressão para o operador de translação pode ser escrita como:

$$T(d\lambda) = \mathbb{1} - \frac{i\hat{p}d\lambda}{\hbar}, \quad (2.24)$$

onde  $\mathbb{1}$  é a identidade.

### 2.1.3 Espaço de Hilbert com uma métrica não-euclidiana

Uma generalização dos resultados apresentados na seção anterior foi introduzida por Costa Filho *et al.* (2011), em que foi proposto um operador de translação infinitesimal generalizado que inclui um termo da métrica do espaço em sua expressão. Para o caso unidimensional, se  $\mathbf{T}_g(dx)$  denota esse operador, então sua ação em um ket  $|x\rangle$  do espaço de posição fica definido por (Costa Filho *et al.*, 2013):

$$\mathbf{T}_g(dx)|x\rangle = |x+(1+\gamma x)dx\rangle, \quad (2.25)$$

onde

$$g(x)^{-1/2} = (1+\gamma x) \quad (2.26)$$

consiste em uma métrica unidimensional utilizada pelos autores.

O parâmetro  $\gamma$  acima é real e tem unidade de inverso de comprimento. É imediato perceber que, para  $\gamma \rightarrow 0$ , recaímos no operador de translação infinitesimal usual. Para uma situação em que a métrica não tem uma forma explícita, a ação do operador de translação 2.25 fica determinada por (Ferreira, 2019):

$$\mathbf{T}_g(dx)|x\rangle = |x + g(x)^{-1/2}dx\rangle. \quad (2.27)$$

A partir da equação acima, percebe-se que os resultados da MQ usual são resgatados para  $g(x) = 1$ , isso equivale a usar a métrica euclidiana definida pelo tensor de Kronecker:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.28)$$

que, para o caso unidimensional em estudo, consiste em fazer  $i = j \rightarrow g_{ii} = \delta_{11} = 1$ .

É importante ressaltar que a introdução de uma métrica não-euclidiana no espaço de Hilbert fornece uma modificação na forma de medir distância nesse espaço. Em outras palavras, o produto escalar não tem mais a forma apresentada em 2.6, que nesses termos precisa carregar a métrica do espaço em sua definição. Portanto,

**Definição 2.1.5** *Seja  $\mathcal{H}^g$  um espaço de Hilbert unidimensional, com uma métrica não-euclidiana denotada por  $g = g(x)$ . O produto interno entre dois elementos desse espaço,  $\psi$  e  $\phi$ , fica definido como (Braga, 2015):*

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_a^b \phi^*(x)\psi(x)\sqrt{g(x)}dx. \quad (2.29)$$

A partir da definição acima, percebe-se que o conjunto que estabelece o espaço  $L^2(\mathbb{R})$  precisa também ser modificado. Ao analisar o conjunto dado em 2.6, percebe-se que a propriedade que define tal conjunto é um caso particular do produto interno proposto na equação 2.5, para quando  $\psi(x) = \phi(x)$ . Portanto, seja  $L^2(\mathbb{R})^g$  o conjunto das funções quadrado integráveis, munido de uma métrica  $g = g(x)$  não-euclidiana, logo:

$$\mathcal{H}^g = L^2(\mathbb{R})^g \{ \psi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \sqrt{g(x)} dx < \infty \}. \quad (2.30)$$

A partir da definição 2.29 é possível derivar a relação de completeza que atua no

espaço  $L^2(\mathbb{R})^g$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx \phi^*(x) \psi(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx \langle x | \phi \rangle \langle \psi | x \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle \\
 &= \langle \psi | \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x| \right] | \phi \rangle.
 \end{aligned}$$

E então a relação de completaza torna-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{1}. \quad (2.31)$$

Por meio desse resultado, a relação de ortogonalidade modificada é obtida fazendo:

$$\begin{aligned}
 \langle x' | \psi \rangle &= \langle x' | \mathbb{1} | \psi \rangle = \langle x' | \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x | \psi \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx \langle x' | x \rangle \langle x | \psi \rangle.
 \end{aligned}$$

Usando a propriedade da delta de dirac na equação acima, chegamos em:

$$\langle x' | x \rangle = g(x)^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (2.32)$$

Com essas duas propriedades bem definidas, pode-se expandir um vetor de estado  $\psi \in \mathcal{H}^g$  na representação da base de posição:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1} |\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x | \psi \rangle. \quad (2.33)$$

Outra modificação que deve ser levada em consideração é a forma como o operador  $\hat{p}$  atua nesse espaço modificado. Já vimos que no espaço  $L^2$  com a métrica euclidiana, o operador age como demonstrado em 2.22. Para isso, considere que no espaço de Hilbert modificado pela métrica não euclidiana, o operador  $\hat{p}$  seja denotado por  $\hat{p}^g$ . Como antes,  $\hat{p}^g$  ainda é o gerador de translações infinitesimais (Ferreira, 2019), sendo possível escrever o operador de translação como:

$$T^g(dx) = \mathbb{1} - \frac{i\hat{p}^g dx}{\hbar}, \quad (2.34)$$

que consiste na forma do operador de translação dependente da posição proposta por Costa Filho *et al.* (2011). Com isso, ao atuar o operador acima em um vetor de estado qualquer:

$$\begin{aligned}
 T^g(dx) |\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x')} dx' T^g(dx) |x'\rangle \langle x' | \psi \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x')} dx' \left| x' + g(x)^{-1/2} dx \right\rangle \langle x' | \psi \rangle,
 \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde usamos a relação de completeza 2.31. Considere a seguinte substituição:

$$x'' = x' + g(x)^{-1/2} dx \rightarrow x' = x'' - g(x)^{-1/2} dx.$$

Usando esse resultado em 2.35:

$$\begin{aligned} T^g(dx) |\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x'')} dx'' |x''\rangle \langle x'' - g(x)^{-1/2} dx | \psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x'')} dx'' |x''\rangle [\langle x'' | \psi\rangle - dx (g(x''))^{-1/2} \frac{d \langle x'' | \psi\rangle}{dx''}] \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x'')} dx'' |x''\rangle \langle x'' | \right) |\psi\rangle - dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' |x''\rangle \frac{d}{dx''} \langle x'' | \psi\rangle \\ &= |\psi\rangle - dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' |x''\rangle \frac{d}{dx''} \langle x'' | \psi\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T^g(dx) |\psi\rangle &= \left( \mathbb{1} - \frac{i \hat{p}^g dx}{\hbar} \right) |\psi\rangle = |\psi\rangle - dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' |x''\rangle \frac{d}{dx''} \langle x'' | \psi\rangle \\ \Rightarrow \hat{p}^g |\psi\rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' |x''\rangle \frac{d}{dx''} \langle x'' | \psi\rangle \\ &= \langle x' | \hat{p}^g | \psi\rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \langle x' | x''\rangle \frac{d}{dx''} \langle x'' | \psi\rangle. \end{aligned}$$

Com o auxílio da relação 2.32, o resultado acima pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \langle x' | \hat{p}^g | \psi\rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' g(x'')^{-1/2} \delta(x' - x'') \frac{d}{dx''} \langle x'' | \psi\rangle \\ &= -i\hbar g(x')^{-1/2} \frac{d}{dx'} \langle x' | \psi\rangle, \end{aligned}$$

o que finalmente nos fornece:

$$\hat{p}^g = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}, \quad (2.36)$$

que consiste na forma do operador momento na representação de posição em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}^g = L^2(\mathbb{R})^g$  cuja a métrica  $g = g(x)$  é não-euclidiana. A introdução dessa nova forma para o operador momento nos permite construir uma equação de Schrödinger modificada no espaço  $L^2(\mathbb{R})^g$ . Assim, para o caso unidimensional, se  $\psi(x, t)$  for um estado quântico, sua evolução temporal é determinada por meio da seguinte equação de autovalor (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \psi(t) \rangle = \langle x | \hat{H}^g | \psi(t) \rangle. \quad (2.37)$$

Essa modificação na estrutura do espaço induz uma alteração na relação de comutação canônica entre os operadores de posição e momento (Costa Filho *et al.*, 2011):

$$[\hat{x}, \hat{p}^g] = -i\hbar g(x)^{-1/2}\mathbb{1}. \quad (2.38)$$

Como o operador de Hamilton depende de  $(\hat{p}^g)^2$ , é preciso levar em consideração a ação do operador momento duas vezes. Logo:

$$\begin{aligned} H^g &= \frac{1}{2m} \hat{p}^g \hat{p}^g + V(x, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \right] \left[ g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \right] + V(x, t). \end{aligned}$$

Substituindo 2.37 no resultado acima, encontramos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \right] \left[ g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \right] \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t), \quad (2.39)$$

que consiste em uma modificação na forma da equação de Schrödinger tradicional. Por meio da métrica 2.26, a equação acima pode ser escrita como (Costa Filho *et al.*, 2013):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -(1 + \gamma x)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \gamma(1 + \gamma x) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + V(x) \psi(x, t). \quad (2.40)$$

O comutador 2.38 mostra que, diferente da relação de comutação usual, existe dependência explícita na métrica do espaço (Braga, 2015). Isso implica uma deformação na álgebra de Heisenberg, que tem como uma de suas propriedades a preservação da forma das relações de comutação canônica. As consequências que essas modificações na teoria causam no formalismo da MQ foram estudadas por muitos autores, desde a publicação do primeiro trabalho por Costa Filho *et al.* (2011). Assim, diversos resultados de interesse físico foram reconstruídos e estudados pela ótica do operador de translação generalizado. Dentre os sistemas analisados, podemos citar o oscilador harmônico e o gás de fermions (consulte Aguiar *et al.* (2020), por exemplo).

## 2.2 Mecânica Quântica no Espaço de Fase

O objetivo desta seção é apresentar os principais aspectos da teoria quântica no espaço de fase que serão úteis para o desenvolvimento dos resultados deste trabalho. Mostraremos como o espaço de fase clássico pode ser utilizado para a construção de uma teoria quântica que leva aos mesmos resultados da formulação em espaços vetoriais apresentados anteriormente.

### 2.2.1 Espaço de Fase Clássico e a Quantização Canônica

Os resultados da mecânica clássica podem ser obtidos por três caminhos distintos: a mecânica vetorial de Newton, o método de Lagrange, e o princípio da mínima ação de Hamilton. O formalismo de Newton é definido sobre um espaço vetorial real, suas equações do movimento advêm de uma análise vetorial do problema. Os métodos de Lagrange e de Hamilton têm como principal característica serem descritos por funções escalares definidas em espaços distintos. A função Lagrangeana ( $\mathcal{L}$ ) é definida sobre o espaço de todas as possíveis configurações do sistema, conhecido como "espaço das configurações". Por outro lado, a função Hamiltoniana ( $H$ ) é definida sobre o espaço de fase (Barcelos Neto, 2010).

O espaço de fase exerce um papel crucial durante todo o desenvolvimento deste trabalho, portanto, faz-se necessário compreender como a mecânica clássica pode ser descrita nele. Para tanto, considere o caso de uma partícula clássica movendo-se em uma dimensão. A descrição clássica dessa partícula é determinada quando se é especificada a sua coordenada de posição e de momento, denotadas respectivamente por  $x$  e  $p$ . Assim, o par ordenado  $(x, p)$  define o estado do sistema (Reif, 1998). Geometricamente, essa situação pode ser descrita em um espaço bidimensional, onde os eixos são a posição e o momento.

De maneira geral, considere um certo sistema clássico descrito pelos conjuntos de variáveis  $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$  e  $\{p_1, p_2, \dots, p_i\}$ , com  $i = 1, \dots, d$ . O estado desse sistema é um ponto no espaço de fase denotado por  $\mathcal{P}$  e dado pela seguinte soma direta: (Derezinski, 2021):

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}_x^d \oplus \mathbb{R}_p^d. \quad (2.41)$$

A dinâmica do sistema fica determinada pelas equações de Hamilton:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.42)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (2.43)$$

A função  $H$  é a Hamiltoniana do sistema definida sobre o espaço de fase. Assim, para um dado tempo  $t$ , a evolução temporal do sistema fica dada pelas equações  $x(t)$  e  $p(t)$ . Dessa forma, para encontrar a dinâmica do sistema é preciso resolver as equações diferenciais acima.

Se tivermos uma função  $A(x_i, p_i, t)$  que representa uma grandeza dinâmica clássica definida sobre o espaço de fase, podemos determinar sua evolução temporal dessa maneira:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Usando 2.42 e 2.43 no resultado acima:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{dA}{dt} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t},\end{aligned}\quad (2.44)$$

onde:

$$\{A, H\} = \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (2.45)$$

é o chamado parênteses de Poisson (Barcelos Neto, 2010). O mesmo desenvolvimento pode ser feito, contudo, utilizando os resultados da MQ. Como foi discutido em 2.1.2, as grandezas em MQ são dadas por operadores hermitianos atuando no espaço de Hilbert. Dessa forma considere um operador qualquer  $\hat{B}$  agindo em um estado  $\psi(x_i, t)$ . Pela equação do autovalor, sabe-se:

$$\hat{B}\psi(x_i, t) = b\psi(x_i, t). \quad (2.46)$$

Supondo que o operador e seu autovalor dependem do tempo e derivando a equação acima nos dois lados com respeito ao tempo:

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \psi(x_i, t) + \hat{B} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_i, t) = \frac{db}{dt} \psi(x_i, t) + b \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_i, t).$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação acima, assim como o último termo do lado direito, podem ser substituídos pela definição da equação de Schrödinger:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \psi(x_i, t) - \frac{i}{\hbar} \hat{B} \hat{H} \psi(x_i, t) &= \frac{db}{dt} \psi(x_i, t) - \frac{i}{\hbar} b \hat{H} \psi(x_i, t) \\ \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \psi(x_i, t) - \frac{i}{\hbar} \hat{B} \hat{H} \psi(x_i, t) &= \frac{db}{dt} \psi(x_i, t) - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{B} \psi(x_i, t) \\ \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \psi(x_i, t) - \frac{i}{\hbar} \hat{B} \hat{H} \psi(x_i, t) + \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{B} \psi(x_i, t) &= \frac{db}{dt} \psi(x_i, t).\end{aligned}$$

Identificando o comutador  $[H, \hat{B}]\psi(x_i, t)$  no lado esquerdo da relação acima, podemos escrever:

$$\frac{db}{dt} \psi(x_i, t) = \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, \hat{B}] \right) \psi(x_i, t).$$

Como  $\frac{db}{dt} \psi(x_i, t) = \frac{d\hat{B}}{dt} \psi(x_i, t)$ , então:

$$\frac{d\hat{B}}{dt} \psi(x_i, t) = \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, \hat{B}] \right) \psi(x_i, t).$$

O resultado acima so é verdade se, e somente se:

$$\frac{d\hat{B}}{dt} = \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{B}] \right). \quad (2.47)$$

Note que existe uma semelhança direta entre o resultado acima e a equação mostrada em 2.44. Ambas as equações fornecem a descrição da evolução temporal de uma grandeza física. Contudo, a 2.44 é o caso clássico utilizando os parênteses de Poisson, enquanto a 2.47 diz respeito ao caso quântico utilizando o comutador. Em outras palavras, a variável dinâmica clássica e o Hamiltoniano foram levados em seus análogos operadores hermitianos,  $\hat{B}$  e  $\hat{H}$ , definidos sobre o espaço de Hilbert. Essa associação requer, conforme expostp, que a seguinte correspondência seja válida:

$$A, B \in \mathcal{P} \rightarrow \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{H}$$

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}].$$

Para o caso das variáveis clássicas  $(x_i, p_i)$ , percebe-se que os parênteses de poisson fornecem:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (2.48)$$

$$\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \quad (2.49)$$

Seu análogo quântico pode ser escrito como:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.50)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (2.51)$$

Os operadores  $\hat{x}_i$  e  $\hat{p}_i$  são, respectivamente, os operadores hermitianos de posição e de momento que foram apresentados e discutidos anteriormente. Esse processo é conhecido na literatura como quantização canônica, pois parte da descrição canônica da mecânica clássica por meio das equações de Hamilton. Dessa forma, conseguimos estender os resultados da mecânica clássica para construir o formalismo quântico.

Na próxima seção, desenvolveremos a teoria necessária para uma completa descrição da MQEF. Mostraremos que tal caminho equivale à descrição usual por meio de espaços vetoriais complexos. Tal método nos fornece conexões diretas da MQ como uma teoria estatística pois, como veremos mais na frente, o estado quântico é substituído por uma densidade de quasi probabilidade, chamada de Função de Wigner (FW) (Curtright *et al.*, 2013). A FW é dita como uma *densidade de quasi probabilidade*, uma vez que pode assumir valores negativos, diferente de uma densidade de probabilidade usual, que é definida como positiva. Contudo, essa característica da FW de assumir valores negativos está diretamente ligada à natureza quântica do sistema, como veremos mais a frente.

### 2.2.2 Quantização de Weyl-Wigner

Para a construção da MQEF, partiremos de um processo de quantização por meio de um mapa invertível que leva funções definidas sobre  $\mathcal{P}$  em operadores hermitianos em  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Assim, seja  $f, g \in \mathcal{P}$  funções definidas sobre o espaço de fase e denotemos por  $\mathbf{Q}$  o mapa de quantização. Esse mapa precisa obedecer algumas propriedades importantes (Derezinski, 2021):

1.  $\mathbf{Q}(1) = \mathbb{1}$ ,  $\mathbf{Q}(x_i) = \hat{x}_i$  e  $\mathbf{Q}(p_j) = \hat{p}_j$ ;
2.  $\frac{1}{2}(\mathbf{Q}(f)\mathbf{Q}(g) + \mathbf{Q}(g)\mathbf{Q}(f)) \approx \mathbf{Q}(bc)$ ;
3.  $[\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)] \approx i\hbar\mathbf{Q}(\{f, g\})$ ;
4.  $[\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)] = i\hbar\mathbf{Q}(\{f, g\})$  se, e somente se,  $f$  for um polinômio de grau 1;
5.  $\mathbf{Q}(\bar{f}) = \mathbf{Q}^*(f)^*$ .

Tal mapeamento precisa fornecer os mesmos resultados do formalismo usual da MQ, de modo que a forma de atuação dos operadores momento e posição devem ser as mesmas. Uma operação que obedece tais propriedades foi proposta por Weyl (1927). Em seu trabalho, ele define um mapeamento invertível que leva funções  $f : \mathcal{P} = \mathbb{R}_x^d \oplus \mathbb{R}_p^d \rightarrow \mathbb{R}$  em operadores  $\mathbf{Q}(f) = \hat{F}$ , cujo domínio é o espaço de Hilbert. Assim, para o caso unidimensional ( $d=1$ ), a transformação de Weyl é dada pela seguinte definição 2.2.1.

**Definição 2.2.1** *Considere  $a(x', p) \in \mathcal{P}$  uma função contínua com sua  $n$ -ésima derivada contínua. A quantização de Weyl da função  $a$ , é definida como:*

$$\hat{A} = \mathbf{Q}[a] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint a(x', p) e^{\frac{i\sigma}{\hbar}(x' - \hat{x}) + \frac{i\tau}{\hbar}(p - \hat{p})} d\tau d\sigma dx' dp. \quad (2.52)$$

Esta equação, na representação de coordenada, pode ser reescrita de maneira mais simples e elegante, como:

$$[\mathbf{Q}[a]\psi](x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dy dp a\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}} \psi(y). \quad (2.53)$$

- *Demonstração:* Para demonstrar o resultado acima, partimos da definição do mapa de Weyl e fazemos:

$$\begin{aligned} \langle x | \mathbf{Q}[a] | \psi \rangle &= \langle x | \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint a(x', p) e^{\frac{i\sigma}{\hbar}(x' - \hat{x}) + \frac{i\tau}{\hbar}(p - \hat{p})} d\tau d\sigma dx' dp | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint \langle x | a(x', p) e^{\frac{i\sigma}{\hbar}(x' - \hat{x}) + \frac{i\tau}{\hbar}(p - \hat{p})} \langle x | d\tau d\sigma dx' dp. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff, a exponencial pode ser reescrita como:

$$e^{\frac{i\sigma}{\hbar}(x' - \hat{x}) + \frac{i\tau}{\hbar}(p - \hat{p})} = e^{\frac{i\tau\sigma}{2\hbar}} e^{\frac{i\sigma x'}{\hbar}} e^{-\frac{i\sigma\hat{x}}{\hbar}} e^{\frac{i\tau p}{\hbar}} e^{-\frac{i\tau\hat{p}}{\hbar}}.$$

Substituindo na integral, temos:

$$\langle x | \mathbf{Q}[a] | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint a(x', p) \langle x | e^{\frac{i\tau\sigma}{2\hbar}} e^{\frac{i\sigma x'}{\hbar}} e^{\frac{-i\sigma\hat{x}}{\hbar}} e^{\frac{i\tau p}{\hbar}} e^{\frac{-i\tau\hat{p}}{\hbar}} | \psi \rangle d\tau d\sigma dx' dp.$$

As exponencias dos operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$ , vão atuar, em ordem, no bra  $\langle x |$ . Portanto:

$$\langle x | \mathbf{Q}[a] | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint a(x', p) \langle x | e^{\frac{i\tau\sigma}{2\hbar}} e^{\frac{i\sigma x'}{\hbar}} e^{\frac{-i\sigma\hat{x}}{\hbar}} e^{\frac{i\tau p}{\hbar}} \langle x - \tau | \psi \rangle d\tau d\sigma dx' dp.$$

Agrupando os termos, encontramos:

$$\begin{aligned} \langle x | \mathbf{Q}[a] | \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint a(x', p) e^{\frac{i}{\hbar}(p\tau + \frac{\tau\sigma}{2} + (x' - x)\sigma)} \psi(x - \tau) d\tau d\sigma dx' dp \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint a(x', p) e^{\frac{i\sigma}{\hbar}(\frac{\tau}{2} + (x' - x))} e^{\frac{i\tau p}{\hbar}} \psi(x - \tau) d\tau d\sigma dx' dp. \end{aligned}$$

A integração em  $\sigma$  e o termo de  $\frac{1}{2\pi\hbar}$  podem ser combinados para a obter a relação da delta de Dirac e a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \langle x | \mathbf{Q}[a] | \psi \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint a(x', p) \delta\left(\frac{\tau}{2} + (x' - x)\right) e^{\frac{i\tau p}{\hbar}} \psi(x - \tau) d\tau dx' dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint a(x', p) \delta\left(\frac{1}{2}(\tau - 2(x - x'))\right) e^{\frac{i\tau p}{\hbar}} \psi(x - \tau) d\tau dx' dp \\ &= \frac{2}{2\pi\hbar} \iint a(x', p) e^{\frac{ip}{\hbar}(2(x - x'))} \psi(x - 2x + 2x') dx' dp. \end{aligned}$$

Na equação acima podemos tomar a substituição  $y = 2x' - x$  e assim obter:

$$[\mathbf{Q}[a]\psi](x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dy dp a\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}} \psi(y),$$

como queríamos demonstrar.

Com o resultado 2.53 é possível demonstrar que a quantização das variáveis de momento e posição nos fornecem os resultados já conhecidos da MQ.

$$(x, p) \xrightarrow{\mathbf{Q}(x, p)} \left(\hat{x}, -i\hbar \frac{d}{dx}\right). \quad (2.54)$$

Inicialmente, vamos demonstrar a quantização para a variável de posição clássica, logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[x]\psi &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dy dp \left(\frac{x'+y}{2}\right) e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-y)} \psi(y) \\ &= \int dy \delta(x' - y) \left(\frac{x'+y}{2}\right) \psi(y) \\ &= \left(\frac{x'+x'}{2}\right) \psi(x') = x' \psi(x') \\ &= \mathbf{Q}[x]\psi = x' \psi(x'). \end{aligned}$$

A última linha do desenvolvimento acima nos fornece um resultado muito interessante, e também esperado. Mostramos que a atuação do mapa de quantização sobre uma função  $\psi$  nos fornece uma constante multiplicada por  $\psi$ . De fato, isso é a própria definição do operador  $\hat{x} \in \mathcal{H}$ , quando atuado em uma função de onda. Com isso é possível escrever que:

$$\mathbf{Q}[x]\psi = x'\psi(x') \iff \mathbf{Q}[x]\psi = \hat{x}\psi(x'). \quad (2.55)$$

O mesmo pode ser feito para a variável clássica de momento:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[p]\psi &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dy e^{\frac{ip}{\hbar}(x'-y)} \psi(y) \\ &= \int \left(-i\hbar \frac{d}{dx'}\right) \delta(x'-y) \psi(y) dy \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx'} \int \delta(x'-y) \psi(y) dy \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx'} \psi(x') \\ &= \mathbf{Q}[p]\psi = -i\hbar \frac{d}{dx'} \psi(x'). \end{aligned}$$

Do resultado acima, temos:

$$\mathbf{Q}[p]\psi = -i\hbar \frac{d}{dx'} \psi(x') \iff \mathbf{Q}[p]\psi = \hat{p}\psi(x'), \quad (2.56)$$

onde encontramos o resultado usual do operador de momento na representação de posição.

Tendo estabelecido a definição da quantização de Weyl, bem como sua utilização nas variáveis clássicas de momento e posição, alguns comentários sobre a questão do ordenamento das expressões tornam-se pertinentes. Sabe-se que um dos postulados da MQ diz ser possível associar, para cada função  $f \in \mathcal{P}$  de valor real, um operador autoadjunto  $\hat{f} \in \mathcal{H}$  (Hall, 2013). Dessa forma, o caso mais simples nos permite transformar a variável  $x$  em seu respectivo operador  $\hat{x}$ , e a variável de momento,  $p$  em seu respectivo operador  $\hat{p}$ . Mas isso abre um questionamento; qual é a expressão de quantização para a função  $f(x, p) = xp$ ?

Essa pergunta é de grande importância, pois a partir de uma visão clássica, escrever  $xp$  ou  $px$  é equivalente, já que comutam. Porém, quanticamente, os operadores  $\hat{X}\hat{P}$  e  $\hat{P}\hat{X}$  são distintos. Uma possibilidade para quantizar  $xp$  é a simetrização da expressão quântica associada (Hall, 2013):

$$xp \rightarrow \frac{\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}}{2}. \quad (2.57)$$

Esse exemplo simples nos levar a concluir que o processo de quantização não é tão direto quanto parece. Simplesmente não podemos substituir diretamente, para qualquer caso, a variável por seu respectivo operador. Porém, devido a forma de algumas grandezas clássicas, esse problema pode ser ignorado. O Hamiltoniano, por exemplo, geralmente apresenta apenas termos de  $p^2$  e  $x$ , de modo que o problema do ordenamento não se apresenta. Um caso interessante acontece com a quantização do momento angular clássico. Devido ao produto vetorial  $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ , expressões formadas por combinações de  $x$  e  $p$  aparecem. Isto nos leva, à primeira vista, a um problema na realização da descrição quântica. Porém, ao analisar, por exemplo, a componente  $L_x$  (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a):

$$L_x = x_1 p_2 - p_1 x_2,$$

percebe-se que essas combinações de  $x/p$  são de componentes diferentes. Para o caso unidimensional, seriam os pares  $(x_1, p_1)$  e  $(x_2, p_2)$ . E isso não seria um problema, pois quando fossemos realizar a quantização, teríamos:

$$x_1 \rightarrow \hat{X}_1 \in \mathcal{H}_1$$

$$P_2 \rightarrow \hat{P}_2 \in \mathcal{H}_2,$$

sendo eles pertencentes a espaços de Hilbert distintos. Assim, a ordem não seria importante, de modo que eles comutariam (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a).

Exemplos de problemas como esses emergem justamente devido a forma do operador momento e posição, mostradas em 2.22 e 2.11. Ao considerar um exemplo simples, observamos que:

$$\hat{x}\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\hat{x}\frac{d}{dx}\psi(x) \neq \hat{p}\hat{x}\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}(x\psi(x)),$$

visto que o ordenamento da derivada e da variável  $x$  causam situações como essa.

O problema do ordenamento é resolvido fixando-se uma ordem para a ação dos operadores momento e posição. Por convenção, considera-se o operador momento atuando primeiro, pela direita. Já o operador de posição é colocado a esquerda, atuando logo em seguida. Nessa convenção, funções polinômias de  $x$  e  $p$  serão levadas em operadores quânticos ditos diferenciais em sua forma padrão, com todas as derivadas atuando primeiro e logo em seguida vindo a atuação do operador de posição. Assim temos que para um caso geral, não necessariamente uma função  $f$  polinômial, o seu operador associado  $\hat{f}$  é chamado de pseudodiferencial (Hall, 2013). Para casos gerais, nem sempre o processo de quantização fornecerá um operador

autoadjunto (como é o caso de  $f(x, p) = xp$ ). Para resolver esse problema, pode-se realizar o processo de simetrização (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a) mencionado anteriormente.

Porém, a quantização pelo processo de Weyl evita esse problema do ordenamento, pois o mapa apresentado em 2.52 considera todas as possibilidades de ordenamento dos operadores  $X$  e  $P$ . (Hall, 2013). Assim, por exemplo, se a função que se deseja buscar o análogo quântico for da forma  $x^2p^2$ , a quantização de Weyl fornece:

$$\frac{1}{6}(\hat{X}^2\hat{P}^2 + \hat{X}\hat{P}\hat{X}\hat{P} + \hat{X}\hat{P}^2\hat{X} + \hat{P}\hat{X}^2\hat{P} + \hat{P}\hat{X}\hat{P}\hat{X} + \hat{P}^2\hat{X}^2).$$

### 2.2.3 A Função de Wigner

Antes de definirmos formalmente a FW, consideremos a expressão original, proposta por Wigner (1932) em seu trabalho:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{\frac{2i}{\hbar}py}. \quad (2.58)$$

A equação acima trata-se do caso unidimensional. Assim, a FW é definida sobre todos os pontos da forma  $(x, p)$ . A função de onda  $\psi$ , que aparece nessa relação, representa o estado do sistema na base de posição. É interessante observarmos que a expressão acima é construída por meio da definição da matriz densidade para um estado puro, onde temos:

$$\rho(x, y) = \langle x - y | \psi \rangle \langle \psi | x + y \rangle = \psi^*(x + y) \psi(x - y).$$

Para os propósitos deste trabalho, iniciaremos com uma ideia física intuitiva da FW. Para tanto, consideremos um sistema constituído de apenas uma partícula de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão. Suponhamos que tal partícula desloca-se da posição  $x'$  para a posição  $x''$ . Ao compararmos essa situação com a ideia motivadora da MQ matricial, proposta por Heisenberg, encontramos uma analogia. A motivação, consistia em descrever a transição de um elétron entre os níveis de energia dentro de um átomo, por exemplo, do nível  $n'$  para  $n''$ . Contudo, Heisenberg percebeu que o mais importante não era o deslocamento entre os níveis, mas sim o salto entre eles (Schleich, 2011). Desse forma, para o caso da nossa partícula deslocando-se no intervalo  $[x', x'']$ , podemos determinar a distância desse salto entre  $x'$  e  $x''$ . Para um espaço euclidiano, temos:

$$\xi = \int_{x'}^{x''} dx = x'' - x'. \quad (2.59)$$

Assim, no contexto da MQ matricial, o operador densidade pode ser utilizado para descrever matematicamente nosso problema. Com isso, os elementos  $\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle$  descreveriam o salto entre os autoestados de posição  $|x'\rangle$  e  $|x''\rangle$ . Sendo  $\xi$  a distância do salto, podemos definir o centro dessa distância, denotado por  $x$ . Dessa forma, o centro de  $\xi$  é ponto que tem a mesma distância geométrica dos extremos. Logo, para o caso euclidiano, o centro é encontrado simplesmente fazendo:

$$\begin{aligned} \int_{x'}^x dz &= \int_{x''}^x dz \\ x' - x &= x'' - x \\ x &= \frac{x'' + x'}{2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Nosso problema pode então ser reescrito em termos desses dois parâmetros  $(\xi, x)$ . De modo, é possível escrever  $x'$  e  $x''$  em função da distância e do centro. Tem-se:

$$\begin{aligned} x'' &= x + \frac{\xi}{2} \\ x' &= x - \frac{\xi}{2}, \end{aligned}$$

com isso os elementos da matriz densidade, tornam-se:

$$\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle = \langle x + \frac{\xi}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{\xi}{2} \rangle = \rho(x, \xi). \quad (2.61)$$

Por meio desse resultado, pode-se notar a conexão existente entre o momento  $p$  da partícula com o salto entre  $x'$  e  $x''$ . Isso porque uma outra forma de escrever esse resultado é com o auxílio do operador de translação finito, definido para uma translação de  $\xi/2$  (Schleich, 2011).

Para encontrar a FW, basta tomar a transformada de Fourier com respeito a variável  $\xi$  em 2.61 (Schleich, 2011),

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{\frac{-ip\xi}{\hbar}} \langle x + \frac{\xi}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{\xi}{2} \rangle. \quad (2.62)$$

Para um caso simples de um sistema descrito por estado puro, a matriz densidade é  $|\psi\rangle\langle\psi|$ , de modo que a expressão acima torna-se:

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{\frac{-ip\xi}{\hbar}} \psi(x + \frac{\xi}{2}) \psi^*(x - \frac{\xi}{2}). \quad (2.63)$$

O resultado acima é o complexo conjugado de 2.58, junto de uma substituição de variável  $y = \xi/2$ . Em outras palavras, a relação proposta por Wigner leva o operador densidade

para uma função no espaço de fase. Tal operação é exatamente o processo inverso da quantização de Weyl. Para mostrar isso, considere a definição 2.53, reescrita da seguinte forma:

$$[\mathbf{Q}(a)\psi](x) = \int dy N_{\hat{A}}(x, y) \psi(y), \quad (2.64)$$

onde

$$N_{\hat{A}}(x, y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp a\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{\frac{ip}{\hbar}(x-y)} \quad (2.65)$$

consiste no núcleo (ou kernel) da integral 2.64 (Keppeler; Fysik, 2004). Na integral acima, é possível tomar a seguinte substituição de variável:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x+y}{2} \\ z &= x-y. \end{aligned}$$

Logo, a integral para o núcleo assume a forma dada abaixo:

$$N_{\hat{A}}\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp a(x', p) e^{\frac{ipz}{\hbar}}. \quad (2.66)$$

O resultado obtido acima consiste na transformada de Fourier da função  $a(x', p) \in \mathcal{P}$ . Ao multiplicar, em ambos os lados, por  $e^{-\frac{ipz}{\hbar}}$  e ao tomar uma integração em  $z$ , podemos fazer o lado esquerdo tornar-se a definição 2.1 para a transformada de Fourier. Assim:

$$\begin{aligned} \int \left[ N_{\hat{A}}\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) \right] e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz &= \int \left[ \int \frac{1}{2\pi\hbar} a(x', p) e^{\frac{ipz}{\hbar}} dp \right] dz e^{-\frac{ipz}{\hbar}} \\ &= \int dz \left[ \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-\frac{ipz}{\hbar}} \right] a(x', p) e^{\frac{ipz}{\hbar}} \\ &= \int dz \delta(z) e^{\frac{ipz}{\hbar}} a(x', p) \\ &= a(x', p). \end{aligned}$$

Encontramos:

$$a(x', p) = \int N_{\hat{A}}\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz.$$

Essa relação é o processo inverso do mapa de Weyl apresentado anteriormente. Ela consiste em transformar o núcleo de um operador em uma função no espaço de fase. Geralmente, na literatura, a integral acima recebe o nome de *Símbolo de Weyl do operador*  $\hat{A}$ . Dessa forma, tendo demonstrado o resultado acima, considere a seguinte proposição:

**Proposição 2.2.1** A operação inversa de Weyl-Wigner é a transformada de Fourier dada por:

$$\mathbf{S}[\hat{A}](x', p) := a(x', p) = \int N_{\hat{A}}\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) e^{\frac{-ipz}{\hbar}} dz. \quad (2.67)$$

A integral acima é chamada de símbolo de Weyl, e leva o núcleo de um operador,  $N_{\hat{A}}$ , com domínio no espaço de Hilbert em uma função definida sobre o espaço de fase. Se  $\mathbf{Q}[a]$  denotar o mapa de Weyl-Wigner, então:

$$a(x', p) = \mathbf{S}[\hat{A}](x', p) = \mathbf{S}[\mathbf{Q}[a]].$$

Logo, se o operador  $\hat{A}$  for a matriz densidade do sistema físico em estudo, temos:

$$\mathbf{S}[\hat{\rho}] = W(x', p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int N_{\hat{\rho}}\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) e^{\frac{-ipz}{\hbar}} dz. \quad (2.68)$$

Perceba que na equação acima adicionamos um fator de  $\frac{1}{2\pi\hbar}$ , de modo a garantir a normalização da FW e assim ser possível associá-la a um estado físico realizável (Schleich, 2011).

Nesse sentido, diz-se que a FW é um caso particular do símbolo de Weyl para quando  $\hat{A} = \hat{\rho}$ . Comparando a equação acima com 2.63, percebe-se que o núcleo do operador é simplesmente:

$$N_{\hat{\rho}}\left(x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2}\right) = \psi\left(x' + \frac{z}{2}\right)\psi^*\left(x' - \frac{z}{2}\right) = \rho(x', z). \quad (2.69)$$

Dentro do contexto da mecânica clássica, sabe-se que é possível determinar totalmente tanto a posição como o momento de uma partícula. Logo, para a física estatística, o estado do sistema é definido por uma distribuição de probabilidade, dada em função de  $x$  e  $p$  e definida sobre o espaço de fase. Devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, essa mesma situação na MQ é totalmente diferente. Como vimos, a teoria quântica permite que possamos descrever nosso problema tanto na representação de momento, quanto na representação de posição, sendo possível ir de uma a outra por meio da transformada de Fourier. Mas, quanticamente, ao usar uma dessas duas representações, perde-se toda e qualquer informação que se podia obter com a outra (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019b).

Vimos que a FW constitui um mapeamento de uma matriz densidade que representa o estado de um sistema no espaço de Hilbert, para uma função no espaço de fase. Portanto, a FW é uma representação para o estado do sistema em um contexto de um espaço de fase quântico. Logo, no formalismo quântico no espaço de fase, a FW carrega toda a informação do estado sistema.

Assim, estamos diante de uma expressão que descreve um estado quântico e que carrega, ao mesmo tempo, informação sobre a posição e o momento da partícula. Isto, obedecendo os fundamentos básicos da teoria quântica, que colocam uma limitação na precisão (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019b). A FW é conhecida como uma função de quasi-probabilidade, pois pode assumir tanto valores negativos. Diferente de uma função densidade de probabilidade que, por definição, sempre assume valores reais e positivos. (Schleich, 2011). Contudo, essa particularidade da FW é atribuída às características quânticas do sistema.

Sendo a FW uma função de quasi-probabilidade, podemos obter as distribuições de momento e posição a partir da definição 2.68. Logo, integrando a FW sobre todos os possíveis valores de momento, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W(x', p) dp &= \int dz \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{\frac{-ipz}{\hbar}} \psi(x' + \frac{z}{2}) \psi^*(x' - \frac{z}{2}) \\ &= \int dz \delta(z) \psi(x' + \frac{z}{2}) \psi^*(x' - \frac{z}{2}) \\ &= \psi(x') \psi^*(x') = \langle x' | \hat{\rho} | x' \rangle = W(x'). \end{aligned}$$

Logo, encontramos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x', p) dp = |\psi(x')|^2 = W(x'). \quad (2.70)$$

A integração sobre todos os possíveis valores de momento da FW fornece a distribuição de posição. Por analogia, a integração da FW sobre todos os possíveis valores de posição fornece a distribuição de momento (Schleich, 2011):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x', p) dx' = |\psi(p')|^2 = W(p'). \quad (2.71)$$

Vimos que a FW fornece uma forma de descrever um estado quântico no espaço de fase por meio do mapeamento da matriz densidade em uma função. Assim, como nosso objetivo é descrever a MQEF, é vantajoso estabelecer uma forma de medir o valor esperado de operadores dentro desse contexto. Para a MQ no espaço de Hilbert, sabe-se que o valor esperado de um certo operador  $\hat{O}$ , em um sistema de estado  $|\psi\rangle$ , é dado por (Cohen-Tannoudji *et al.*, 2019a).

$$\langle \hat{O} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle. \quad (2.72)$$

Usando a representação da base de posição para uma dimensão, é possível reescrever

a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle_\psi &= \langle \psi | \left( \int dx' |x'\rangle \langle x'| \right) \hat{O} \left( \int dx'' |x''\rangle \langle x''| \right) | \psi \rangle \\
&= \iint dx' dx'' \langle \psi | x' \rangle \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \langle x'' | \psi \rangle \\
&= \iint dx' dx'' \langle x'' | \psi \rangle \langle \psi | x' \rangle \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \\
&= \iint dx' dx'' \langle x'' | [ | \psi \rangle \langle \psi | ] | x' \rangle \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle.
\end{aligned}$$

O termo entre colchetes pode ser indentificado como a matriz densidade para um estado puro. Portanto:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle_\psi &= \iint dx' dx'' \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \\
&= \int dx'' \langle x'' | \hat{\rho} \left[ \int dx' |x'\rangle \langle x'| \right] \hat{O} | x'' \rangle \\
&= \int dx'' \langle x'' | \hat{\rho} \hat{O} | x'' \rangle \\
&= Tr[\hat{\rho} \hat{O}].
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Para chegarmos na última linha, usamos a definição do traço de uma matriz expresso em uma base contínua. Logo, o valor esperado de um operador pode ser expresso em uma relação que leva em consideração a matriz densidade do sistema. Esse resultado vai ser útil para construir o valor esperado utilizando a FW. Para tal construção, considere a seguinte propriedade para o traço dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  quaisquer (Brogaard, 2015):

$$Tr[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dx dp S[\hat{A}]S[\hat{B}]. \tag{2.74}$$

Com:

$$\begin{aligned}
S[\hat{A}] &= \int dy N_{\hat{A}}\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \\
S[\hat{B}] &= \int dy' N_{\hat{B}}\left(x + \frac{y'}{2}, x - \frac{y'}{2}\right) e^{-\frac{ipy'}{\hbar}}.
\end{aligned}$$

• *Demonstração:*

Para demonstrar a relação 2.74, considere:

$$\begin{aligned}
S[\hat{A}]S[\hat{B}] &= \int dy N_{\hat{A}}\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \int dy' N_{\hat{B}}\left(x + \frac{y'}{2}, x - \frac{y'}{2}\right) e^{-\frac{ipy'}{\hbar}} \\
&= \iint dy dy' N_{\hat{A}}\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) N_{\hat{B}}\left(x + \frac{y'}{2}, x - \frac{y'}{2}\right) e^{-\frac{ip}{\hbar}(y+y')}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por um fator de  $\frac{1}{2\pi\hbar}$  e integrando sobre as variáveis  $x, p$  nos dois lados da igualdade, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \mathbf{S}[\hat{A}]\mathbf{S}[\hat{B}]dxdp &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint dxdpdyy'N_{\hat{A}}\left(x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2}\right) \\ &\times N_{\hat{B}}\left(x+\frac{y'}{2}, x-\frac{y'}{2}\right)e^{-\frac{ip}{\hbar}(y-y')} \\ &= \iiint dxdydy'N_{\hat{A}}\left(x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2}\right)N_{\hat{B}}\left(x+\frac{y'}{2}, x-\frac{y'}{2}\right)\delta(y-y'). \end{aligned}$$

Para chegarmos na última igualdade, utilizamos a propriedade da delta de Dirac em termos da integração na variável  $p$ . Então, realizando a integração em  $y'$ , a delta fornece:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint \mathbf{S}[\hat{A}]\mathbf{S}[\hat{B}]dxdp = \iint dxdyN_{\hat{A}}\left(x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2}\right)N_{\hat{B}}\left(x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2}\right).$$

Utilizando  $x' = x - \frac{y}{2}$  e  $x'' = x + \frac{y}{2}$ , a integral acima torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \mathbf{S}[\hat{A}]\mathbf{S}[\hat{B}]dxdp &= \iint dx'dx''N_{\hat{A}}(x'', x')N_{\hat{B}}(x'', x') \\ &= \iint dx'dx'' \langle x'' | \hat{A} | x' \rangle \langle x'' | \hat{B} | x' \rangle \\ &= \iint dx'dx'' \langle x'' | \hat{A} | x' \rangle \langle x' | \hat{B} | x'' \rangle \\ &= \int dx'' \langle x'' | \hat{A} \left[ \int dx' | x' \rangle \langle x' | \right] \hat{B} | x'' \rangle \\ &= \int dx'' \langle x'' | \hat{A}\hat{B} | x'' \rangle \\ &= Tr[\hat{A}\hat{B}]. \end{aligned}$$

Logo,

$$Tr[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \mathbf{S}[\hat{A}]\mathbf{S}[\hat{B}]dxdp$$

consiste no resultado procurado.

O resultado demonstrado acima e a equação 2.73 nos permitem fazer uma conexão e encontrar uma expressão para o valor esperado de um operador no formalismo do espaço de fase. Portanto, fazendo  $\hat{A} = \hat{\rho}$  e  $\hat{B} = \hat{O}$  na equação 2.74:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\psi} = Tr[\hat{\rho}\hat{O}] = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \mathbf{S}[\hat{\rho}]\mathbf{S}[\hat{O}]dxdp.$$

Como a FW é dada pelo símbolo de Weyl da matriz densidade dividido por um fator de  $\frac{1}{2\pi\hbar}$ , a expressão acima pode ser escrita como:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\psi} = \iint W(x, p)\mathbf{S}[\hat{O}]dxdp, \quad (2.75)$$

que consiste em uma forma de calcular o valor esperado em um contexto do formalismo quântico do espaço de fase.

Mostramos anteriormente que o mapa de quantização aplicado sobre as variáveis clássicas  $x$  e  $p$  nos retorna aos operadores de posição e momento. Assim, temos que o símbolo de Weyl desse operadores faz o caminho contrário e retornar às variáveis clássicas no espaço de fase. Posto isso, é possível determinar os valores esperados de  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , considerando  $\mathbf{S}[\hat{x}] = x$  e  $\mathbf{S}[\hat{p}] = p$ . Assim, usando a equação 2.75, o valor esperado para a posição fica:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi} = \iint W(x, p) x dx dp. \quad (2.76)$$

E para o momento, tem-se:

$$\langle \hat{p} \rangle_{\psi} = \iint W(x, p) p dx dp. \quad (2.77)$$

### 3 RESULTADOS

#### 3.1 Transformação de Wigner Modificada

Para realizarmos a modificação na FW 2.63, utilizaremos a métrica unidimensional proposta por Costa Filho *et al.* (2011), cuja forma é dada por:

$$g_{11} = g(x) = \frac{1}{(1 + \gamma x)^2}, \quad (3.1)$$

onde  $g_{11}$  denotaria um elemento da matriz da métrica. Aqui,  $\gamma$  é um parâmetro real e positivo cuja unidade é o inverso do comprimento. Como nesse caso a métrica é unidimensional, a matriz é reduzida a  $g_{11} = g(x)$ . Visto que  $g_{ij}$  modifica a estrutura do espaço, a forma de medir distância é, também, modificada. Logo, para o caso de uma métrica unidimensional, a distância pode ser obtida pela seguinte integral:

$$\xi = \int_{x'}^{x''} \sqrt{g_{11}} dx. \quad (3.2)$$

Da mesma forma,  $\xi$  denota a distância entre os pontos  $x'$  e  $x''$ . Utilizando a métrica unidimensional 3.1 na equação acima:

$$\xi = \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{1 + \gamma x}. \quad (3.3)$$

Resolvendo a integral, encontramos:

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1 + \gamma x''}{1 + \gamma x'}\right), \quad (3.4)$$

para  $\gamma \rightarrow 0$  a distância tende para  $x'' - x'$ , fornecendo assim a distância euclidiana unidimensional.

Esse resultado pode ser facilmente demonstrado:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1 + \gamma x''}{1 + \gamma x'}\right) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\gamma} \left[ \ln\left(\frac{1 + \gamma x''}{1 + \gamma x'}\right) \right]}{\frac{d}{d\gamma} \gamma} \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{x'' + x'' \gamma x' - x' - \gamma x'' x'}{(1 + \gamma x')^2} \frac{1 + \gamma x'}{1 + \gamma x''} \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{x'' - x'}{1 + \gamma x'} \frac{1}{1 + \gamma x''} \\ &= \frac{x'' - x'}{1 + 0x'} \frac{1}{1 + 0x''} = x'' - x', \end{aligned}$$

onde na segunda linha foi aplicada a regra de L'Hospital, visto que em  $\gamma = 0$  a expressão para a distância fornece uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Assim, finalmente temos:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi = x'' - x'. \quad (3.5)$$

O próximo resultado que precisamos encontrar é o centro geométrico da distância entre  $x'$  e  $x''$  nessa métrica. O centro geométrico consiste no ponto que tem a mesma distância dos dois extremos do intervalo considerado. Portanto, o centro é o ponto  $x$  que satisfaz a seguinte igualdade:

$$\int_{x'}^x \frac{dv}{(1+\gamma v)} = \int_x^{x''} \frac{du}{(1+\gamma u)}. \quad (3.6)$$

Resolvendo a integração:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+\gamma x}{1+\gamma x'}\right) &= \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+\gamma x''}{1+\gamma x}\right) \\ \frac{1+\gamma x}{1+\gamma x'} &= \frac{1+\gamma x''}{1+\gamma x} \\ (1+\gamma x)^2 &= (1+\gamma x')(1+\gamma x''), \end{aligned} \quad (3.7)$$

então:

$$x = \gamma^{-1} [(1+\gamma x')(1+\gamma x'')]^{1/2} - \gamma^{-1}. \quad (3.8)$$

Mais uma vez é possível mostrar que para  $\gamma \rightarrow 0$  a equação acima retorna para o caso euclidiano. Para demonstrar, usamos novamente a regra de L'Hospital, visto que por substituição direta (fazendo  $\gamma = 0$ ) temos a indeterminação  $0/0$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{-1} [(1+\gamma x')(1+\gamma x'')]^{1/2} - \gamma^{-1} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{x'(1+\gamma x'') + (1+\gamma x')x''}{[(1+\gamma x')(1+\gamma x'')]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x'(1+0x'') + (1+0x')x''}{[(1+0x')(1+0x'')]^{1/2}} \\ &= \frac{x'' + x'}{2}, \end{aligned}$$

então:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} x = \frac{x'' + x'}{2}. \quad (3.9)$$

Na seção 2.2.3 foi construída a FW por meio do raciocínio proposto por Schleich (2011). Como foi mostrado, essa construção é baseada na descrição de um sistema quântico de uma partícula com massa  $m$  que se move em uma dimensão, saindo de  $x'$  para  $x''$ . Com

a utilização do elemento  $\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle$  da matriz densidade é possível descrever o salto quântico que a partícula realiza, saindo do autoestado  $|x'\rangle$  para  $|x''\rangle$ . De modo que a FW ficou definida como a transformada de fourier dos elementos da matriz densidade em relação a variável do salto. Para a construção da FW modificada, seguiremos o mesmo raciocínio, contudo usaremos o espaço deformado pela métrica 3.1. Agora, a partícula quântica se move do ponto  $x'$  para  $x''$ , que pertencem ao espaço deformado. Assim, elementos da matriz densidade que descreve esse salto ficam dados por:

$$\rho(x'', x') = \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle. \quad (3.10)$$

Seguindo o raciocínio de Schleich (2011), utilizaremos as equações 3.4 e 3.8, e escreveremos  $x'$  e  $x''$  em termos da distância  $\xi$  e do centro  $x$ . Assim encontramos que:

$$x'' = xe^{\frac{\gamma\xi}{2}} + \frac{e^{\frac{\gamma\xi}{2}} - 1}{\gamma}, \quad (3.11)$$

e para  $x'$ , que:

$$x' = xe^{-\frac{\gamma\xi}{2}} + \frac{e^{-\frac{\gamma\xi}{2}} - 1}{\gamma}. \quad (3.12)$$

É fácil perceber que no limite quando  $\gamma \rightarrow 0$  nas expressões acima, recuperamos o resultado euclidiano mostrado na seção 2.2.3. Substituindo esses resultados em 3.10:

$$\rho(x'', x') = \tilde{\rho}(x, \xi) = \left\langle xe^{\frac{\gamma\xi}{2}} + \gamma^{-1}(e^{\frac{\gamma\xi}{2}} - 1) \left| \hat{\rho} \right| xe^{-\frac{\gamma\xi}{2}} + \gamma^{-1}(e^{-\frac{\gamma\xi}{2}} - 1) \right\rangle. \quad (3.13)$$

É importante notar que as expressões dentro do bra e do ket acima são justamente a atuação do operador de translação finito dependente da posição. Esse mesmo resultado foi obtido por Costa Filho *et al.* (2013), onde os autores mostraram:

$$\langle x | T_\gamma(a) | \psi \rangle = \psi(xe^{\gamma a} + \gamma^{-1}(e^{\gamma a} - 1)) \quad (3.14)$$

Logo, se tomarmos  $a = \xi/2$ , chegamos exatamente no resultado proposto em 3.13 para a matriz densidade. Esse resultado corrobora, mais uma vez, para mostrar que existe uma conexão entre o momento da partícula e o deslocamento que ela faz entre  $x'$  e  $x''$ . Tomando então a transformada de fourier da equação 3.13 com respeito ao parâmetro  $\xi$ , temos:

$$W(x, p, \gamma) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} \left\langle xe^{\frac{\gamma\xi}{2}} + \gamma^{-1}(e^{\frac{\gamma\xi}{2}} - 1) \left| \hat{\rho} \right| xe^{-\frac{\gamma\xi}{2}} + \gamma^{-1}(e^{-\frac{\gamma\xi}{2}} - 1) \right\rangle, \quad (3.15)$$

onde  $W(x, p, \gamma)$  denota a FW modificada. Pelos resultados mostrados em 3.5 e 3.9, ao fazer o limite de  $\gamma \rightarrow 0$  em  $W(x, p, \gamma)$ , chega-se em:

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} \left\langle x + \frac{\xi}{2} \left| \rho \right| x + \frac{\xi}{2} \right\rangle. \quad (3.16)$$

Ou seja:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} W(x, p, \gamma) = W(x, p). \quad (3.17)$$

Assim, no limite de  $\gamma$  tendendo a zero, resgatamos a expressão da FW já conhecida. Contudo, a expressão para a FW encontrada em 3.15, quando aplicada a sistemas físicos de interesse, nos leva a integrais que podem ser complicadas de serem resolvidas analiticamente. Tal problema pode ser contornado utilizando-se da parametrização  $\eta$  proposta por Costa Filho *et al.* (2011), como mostrado a seguir.

Vimos que, com a métrica unidimensional até então utilizada, a distância entre os extremos de um intervalo qualquer fica dada pela seguinte relação:

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{1 + \gamma x''}{1 + \gamma x'} \right). \quad (3.18)$$

Tal resultado pode ser convenientemente reescrito tomando uma parametrização proposta por Costa Filho *et al.* (2013), que funciona como uma transformada de ponto. Assim:

$$\eta : x \rightarrow \eta(x) = \frac{\ln(1 + \gamma x)}{\gamma}, \quad (3.19)$$

cuja definição é dada por (Costa Filho *et al.*, 2016):

$$\eta(x) = \int \sqrt{g(x)} dx. \quad (3.20)$$

Logo, a transformação de ponto 3.19 nos permite reescrever a equação para a distância  $\xi$  como:

$$\xi = \eta(x'') - \eta(x').$$

Essa equação tem a forma matemática da distância entre dois pontos para o caso euclidiano, mostrada em 2.59. Logo, a mudança de variável definida como 3.20 tem a vantagem de preservar a forma matemática, carregando significado diferente. O mesmo pode ser feito

para o caso do centro do intervalo  $[x', x'']$ . Nesse espaço modificado, a equação para o centro mostrada em 2.60 assume a seguinte forma:

$$\int_{x'}^x \frac{du}{(1+\gamma v)} = \int_x^{x''} \frac{dv}{(1+\gamma u)}. \quad (3.21)$$

Resolvendo a integração:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+\gamma x}{1+\gamma x'}\right) &= \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+\gamma x''}{1+\gamma x}\right) \\ \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma x) - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma x') &= \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma x'') - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma x) \\ \frac{2}{\gamma} \ln(1+\gamma x) &= \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma x'') + \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma x'), \end{aligned}$$

utilizando-se novamente da parametrização, a equação acima pode ser escrita:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta + \eta_0}{2}. \quad (3.22)$$

Para facilitar a notação, considerou-se  $\eta(x'') = \eta$ ,  $\eta(x') = \eta_0$  e  $\bar{\eta} = \eta(x)$ . O resultado acima junto de 3.1, nos permite escrever  $\eta_0$  e  $\eta$  em termos de  $\xi$  e de  $\bar{\eta}$ :

$$\eta = \bar{\eta} + \frac{\xi}{2} \quad (3.23)$$

$$\eta_0 = \bar{\eta} - \frac{\xi}{2}. \quad (3.24)$$

Perceba que estamos desenvolvendo o mesmo raciocínio que foi feito em 2.2.3, onde reescrevemos o nosso problema em termos das variáveis  $\xi$  e  $x$ . Contudo, aqui, considerando que  $(\xi, x)$  passou pela transformação de ponto. Além disso, anteriormente vimos que os elementos da matriz densidade  $\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle$  descreveriam o movimento da partícula de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão. Portanto, tomando-se a parametrização nos elementos da matriz, encontramos:

$$\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle \xrightarrow{\eta} \langle \eta(x'') | \hat{\rho} | \eta_0(x') \rangle = \tilde{\rho}(\eta(x''), \eta(x')) = \tilde{\rho}(\eta, \eta_0). \quad (3.25)$$

- *Demonstração*

Considere  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da forma que foi definida em 3.19, um difeomorfismo, então uma outra função  $\tilde{\eta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida como:

$$\tilde{\eta}(x, y) = (\eta(x), \eta(y))$$

é também um difeomorfismo. Assim, se  $\tilde{\eta}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  for a inversa de  $\tilde{\eta}$ , então:

$$(\tilde{\eta}^{-1} \circ \tilde{\eta})(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (\tilde{\eta}^{-1} \circ \tilde{\eta}) = \mathbb{1},$$

sendo  $\mathbb{1}$  a identidade. Portanto, se  $\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle = \rho(x'', x')$ , então:

$$\begin{aligned} \rho(x'', x') &= (\rho \circ \mathbb{1})(x'', x') \\ &\xrightarrow{\eta} (\rho \circ \tilde{\eta}^{-1} \circ \tilde{\eta})(x'', x') \\ &= (\rho \circ \tilde{\eta}^{-1})(\eta(x''), \eta(x')) \\ &= \tilde{\rho}(\eta(x''), \eta(x')) = \langle \eta(x'') | \tilde{\rho} | \eta(x') \rangle = \tilde{\rho}(\eta, \eta_0). \end{aligned}$$

O resultado acima trata-se do que foi escrito em 3.25. Assim, para o intervalo  $[0, +\infty)$ , a métrica definida em 3.1 fornece uma  $\eta$  que é um difeomorfismo. Portanto, da última igualdade acima, é verdade que:

$$\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle \xrightarrow{\eta} \langle \eta(x'') | \tilde{\rho} | \eta(x') \rangle. \quad (3.26)$$

Voltando para o elemento da matriz densidade em termos de  $\eta$ , é possível tomar a transformada de Fourier com respeito a variável  $\xi$ :

$$W(\tilde{\eta}, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} \left\langle \tilde{\eta} + \frac{\xi}{2} \left| \hat{\rho} \right| \tilde{\eta} - \frac{\xi}{2} \right\rangle. \quad (3.27)$$

Assim encontramos uma expressão que preserva a forma da FW desenvolvida em 2.68. Se a matriz densidade que aparece na equação acima descreve um estado puro  $|\phi\rangle$ , então:

$$W(\tilde{\eta}, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} \langle \tilde{\eta} + \frac{\xi}{2} | \phi \rangle \langle \phi | \tilde{\eta} - \frac{\xi}{2} \rangle \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} \phi^*(\tilde{\eta} - \frac{\xi}{2}) \phi(\tilde{\eta} + \frac{\xi}{2}), \quad (3.29)$$

onde a função de onda  $\phi(\tilde{\eta})$  passou por uma translação de  $\frac{\xi}{2}$ . Além disso, tal função de onda é solução de uma equação dada por (Costa Filho *et al.*, 2013):

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\eta, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(\eta, t)}{\partial \eta^2} + V_{ef}(\eta) \phi(\eta, t), \quad (3.30)$$

que consiste em uma equação que tem uma forma tipo Schrodinger, onde  $\phi(\eta, t) = \psi(x(\eta), t)$  e  $V_{ef} = V(x(\eta))$ . A equação acima é obtida aplicando a parametrização  $\eta$  na equação de Schrodinger modificada, demonstrada em 2.40. É importante mencionar que a mudança de variável gera um potencial diferente na equação de Schrodinger, denotado por  $V_{ef}$ . Tal potencial recebe o nome de potencial efetivo, e é numericamente igual ao potencial  $V$ , para um mesmo ponto do espaço. (Ferreira, 2019).

Vimos anteriormente que a FW é o símbolo de Weyl para o caso em que  $\hat{A} = \hat{\rho}$ . A equação para a FW encontrada em 3.27 nos permite determinar o símbolo de Weyl para um

operador qualquer. Assim, substituindo a matriz densidade por um operador  $\hat{A}$ , temos:

$$a(\bar{\eta}, p) = \mathbf{S}[\hat{A}] = \int N_{\hat{A}}\left(\bar{\eta} + \frac{\xi}{2}, \bar{\eta} - \frac{\xi}{2}\right) e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}}, \quad (3.31)$$

onde usamos a notação apresentada na proposição 2.67. O fator de  $\frac{1}{2\pi\hbar}$  foi descartado, pois de maneira geral, a equação acima não representa um estado físico. Dessa forma, não é necessário que seja normalizado.

Logo, podemos determinar a expressão para o núcleo do operador  $\hat{A}$ . Assim, na equação acima, vamos utilizar a seguinte mudança de variável.

$$\eta = \bar{\eta} + \frac{\xi}{2} \quad (3.32)$$

$$\eta_0 = \bar{\eta} - \frac{\xi}{2}, \quad (3.33)$$

o que nos fornece:

$$a\left(\frac{\eta + \eta_0}{2}, p\right) = \int N_{\hat{A}}(\eta, \eta_0) e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} d\xi.$$

Tomando a transformada de fourier na equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \int a\left(\frac{\eta + \eta_0}{2}, p\right) e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} dp &= \int e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} dp \frac{1}{2\pi\hbar} \int N_{\hat{A}}(\eta, \eta_0) e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} d\xi \\ &= \int N_{\hat{A}}(\eta, \eta_0) e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} dp d\xi \\ &= \int N_{\hat{A}}(\eta, \eta_0) e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} \delta(\xi) d\xi \\ &= N_{\hat{A}}(\eta, \eta_0), \end{aligned}$$

logo:

$$N_{\hat{A}}(\eta, \eta_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int a\left(\frac{\eta + \eta_0}{2}, p\right) e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} dp. \quad (3.34)$$

Onde encontramos uma expressão para o núcleo do operador  $\hat{A}$ , que é análoga a equação 2.65, porém em termos da parametrização  $\eta$ . A equação acima nos leva a propor uma versão modificada da equação 2.53, que representa o mapa de Weyl-Wigner em sua forma de coordenada. Logo:

$$[Q(a)\psi](\eta) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint a\left(\frac{\eta + \eta_0}{2}, p\right) e^{\frac{ip}{\hbar}(\eta - \eta_0)} \psi(\eta_0) d\eta_0 dp. \quad (3.35)$$

A equação anterior pode ser usada, como foi feito antes, para verificar o processo de quantização. Verifiquemos, por exemplo, a quantização da variável  $p$ . Assim, sendo  $a = p$ , a

equação torna-se:

$$\begin{aligned}
[Q(p)\psi](\eta) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint p e^{\frac{ip}{\hbar}(\eta-\eta_0)} \psi(\eta_0) d\eta_0 dp \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \left(-i\hbar \frac{d}{d\eta}\right) e^{\frac{ip}{\hbar}(\eta-\eta_0)} \psi(\eta_0) d\eta_0 dp \\
&= \int \left(-i\hbar \frac{d}{d\eta}\right) \psi(\eta_0) \delta(\eta-\eta_0) d\eta_0 \\
&= -i\hbar \frac{d}{d\eta} \psi(\eta).
\end{aligned}$$

Essa equação so é verdade se, e somente se:

$$\mathbf{Q}[p]\psi(\eta) = -i\hbar \frac{d}{d\eta} \psi(\eta) \iff \mathbf{Q}[p]\psi = \hat{P}_\eta \psi(\eta), \quad (3.36)$$

onde encontramos a forma já conhecida do operador momento, contudo na representação da parametrização  $\eta$ . Um resultado muito interessante pode ser obtido quando reescrevemos a relação acima de volta na variável  $x$ . Assim, se fizermos  $y = \eta(x)$  e utilizarmos a regra da cadeia que aparece na derivada em 3.36, teremos que:

$$\frac{d}{dx} \psi(\eta(x)) = \frac{d}{dy} \psi(y) \frac{dy}{dx}. \quad (3.37)$$

Utilizando a forma explicita da parametrização  $\eta$ , temos:

$$\frac{d}{dx} \psi(\eta(x)) = \frac{d}{dy} \psi(y) \frac{1}{(1+\gamma x)}. \quad (3.38)$$

Para encontrar tudo em termos de  $x$ , basta isolar a derivação em  $y$  acima:

$$\frac{d}{dy} \psi(y) = (1+\gamma x) \frac{d}{dx} \psi(\eta(x)).$$

Assim, a equação 3.36 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Q}[p]\psi(\eta) = -i\hbar \frac{d}{d\eta} \psi(\eta) = -i\hbar (1+\gamma x) \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{\ln(1+\gamma x)}{\gamma}\right). \quad (3.39)$$

O resultado da quantização da variável  $p$  utilizando o mapa de Weyl-Wigner escrito em termos de  $\eta$ , nos forneceu a expressão do momento encontrado por Costa Filho *et al.* (2011), utilizando o formalismo do operador de translação generalizado para o caso da métrica sendo  $g^{-1/2}(x) = 1 + \gamma x$ . Tal resultado sugere uma equivalência entre o formalismo da mecânica quântica no espaço de Hilbert munido de uma métrica não-euclidiana e a descrição quântica via quantização do espaço de fase cuja a coordenada de posição  $x$  passou por uma parametrização da forma:

$$(x, p) \xrightarrow{\eta} (\eta(x), p). \quad (3.40)$$

Calculemos agora a quantização do variável  $x$ , considerando a parametrização. Logo, fazendo  $a = \eta$  na equação 3.35:

$$\begin{aligned}
 [Q(\eta)\psi](\eta) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \left(\frac{\eta+\eta_0}{2}\right) e^{\frac{ip}{\hbar}(\eta-\eta_0)} \psi(\eta_0) d\eta_0 dp \\
 &= \int \left(\frac{\eta+\eta_0}{2}\right) \delta(\eta-\eta_0) \psi(\eta_0) d\eta_0 \\
 &= \frac{\eta+\eta}{2} \psi(\eta) \\
 &= \eta\psi(\eta),
 \end{aligned}$$

sendo verdade se, e somente se,

$$[Q(\eta)\psi](\eta) = \eta\psi(\eta). \quad (3.41)$$

Recapitulando o que foi mostrado em 2.55, vimos que a quantização da variável  $x$  fornece o operador  $\hat{x}$  com autovalor real  $x$  multiplicando a função de onda. O resultado acima nos fornece algo similar. Utilizamos o mapa de Weyl-Wigner modificado pela parametrização para quantizar uma variável clássica  $\eta(x)$ , encontramos um relação que mantém a forma da definição da atuação do operador posição já conhecido da MQ, mas em termos do parâmetro eta. Assim, a equação surge que deve existir um operador  $\hat{\eta}$  definido sobre o espaço de Hilbert, tal que:

$$[Q(\eta)\psi](\eta) = \eta\psi(\eta) \iff [Q(\eta)\psi](\eta) = \hat{\eta}\psi(\eta). \quad (3.42)$$

Da equação acima, concluímos que o operador  $\hat{\eta}$  é dado por  $\eta(\hat{x})$ , que consiste em uma função do operador posição e a forma da função é dada pela própria parametrização  $\eta$ . Além disso, seu autovalor é  $\eta(x) = \ln(1 + \gamma x)/\gamma$ , que consiste na variável real  $x$  após a transformação de ponto definida pela parametrização.

Uma outra forma de interpretar esse resultado é considerando séries de potências. Dessa forma, considere  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de uma variável qualquer  $y$ . Sabe-se que  $F$  pode ser escrita, de maneira geral, como uma soma infinita de uma série de potências (Apostol, 1991), dada por:

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (y-a)^n = h_0 + h_1 (y-a) + h_2 (y-a)^2 \dots$$

É possível construir um outro operador denotado por  $F(\hat{A})$ , que consiste em uma função do operador  $\hat{A}$  (??). Esse novo operador é, por definição, escrito como uma expansão em série da função  $F$ , cujo argumento é o operador  $\hat{A}$ . Logo, utilizando a expansão em série para

$a = 0$  e fazendo  $y = \hat{A}$ :

$$F(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \hat{A}^n. \quad (3.43)$$

A partir dessa equação é possível concluir que sendo  $F$  real então os coeficientes  $\{h_n\}$  também serão. Além disso, se  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$  então  $F(\hat{A}) = (F(\hat{A}))^\dagger$  (??).

Tendo a forma de um operador qualquer em termos de uma série de potências, é importante verificarmos como fica a forma de seus autovalores. Considere então que  $|a_i\rangle$  seja autovetor de  $\hat{A}$  com autovalores  $a_i$ . Logo, utilizando 3.43;

$$F(\hat{A}) |a_i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \hat{A}^n |a_i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \hat{a}_i^n |a_i\rangle = F(a_i) |a_i\rangle.$$

Utilizando esses resultados para o caso da parametrização podemos escrever a série de potências de  $\eta(x) = \ln(1 + \gamma x)/\gamma$ , como (Apostol, 1991):

$$\eta(x) = -\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\gamma)^k x^k}{k} = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\gamma)^k x^k}{k},$$

cujas igualdade é obtida por meio de uma rápida manipulação.

Assim, o operador  $\eta(\hat{x})$  pode ser escrito como:

$$\eta(\hat{x}) = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\gamma)^k (\hat{x})^k}{k}. \quad (3.44)$$

Como  $|x\rangle$  é autoestado do operador posição, então:

$$\eta(\hat{x}) |x\rangle = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\gamma)^k (\hat{x})^k |x\rangle}{k} = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\gamma)^k (x)^k |x\rangle}{k} = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x) |x\rangle.$$

## 3.2 Aplicação em Sistemas de Interesse Físico

Nesse ponto, aplicaremos o formalismo anteriormente proposto em problemas já bem descritos pela literatura, de modo a resgatar os resultados encontrados da MQ no contexto do operador de transalção generalizado proposto por Costa Filho *et al.* (2011). Iniciaremos nosso tratamento com o caso da partícula em uma dimensão, presa a um potencial do tipo poço quadrado, em seguida partiremos para o oscilador harmônico quântico.

### 3.2.1 Partícula presa ao Poço de Potencial Infinito Antissimétrico

Vamos desenvolver a descrição quântica para a partícula presa ao poço de potencial infinito antissimétrico, utilizando os resultados propostos para a MQEF modificado. Determinaremos a FW por meio de 3.35 e em seguida utilizaremos a equação 2.68, com o intuito de

comparar os resultados. Ademais, buscaremos também as distribuições para posição e momento e seus valores esperados, com o propósito de verificar a validade que já se conhece a partir da literatura.

Para determinar a FW para o poço de potencial precisamos, primeiramente, da função de onda  $\psi$ . Ou seja, temos que determinar a solução, para o caso independente do tempo, da equação tipo Schrödinger em termos da variável  $\eta$  dada em 3.30. A equação independente do tempo é obtida por meio da separação de variáveis e tem sua forma bem conhecida, dada por:

$$\frac{d^2\phi(\eta)}{d\eta^2} = -\alpha^2\phi(\eta). \quad (3.45)$$

Na equação acima usamos que  $V_{ef}(\eta) = V(x(\eta)) = 0$  com  $\alpha = \frac{2mE}{\hbar^2}$ .

Equações diferenciais de segunda ordem que apresentam a forma acima, tem como solução funções dadas por combinações lineares de senos e cossenos. Os coeficientes dessa combinação, ficam a ser determinados por meio da condição de contorno do problema. Logo, para o caso da partícula do poço a condição é  $\phi(\eta = 0) = 0$ . Além disso, para ser considerado um estado físico, a função de onda deve ser normalizada (??). Dessa forma, temos:

$$\phi_m(\eta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L_\eta}} \text{sen}(\alpha\eta), & \text{se } 0 \leq \eta \leq L_\eta \\ 0, & \text{caso o contrário} \end{cases} \quad (3.46)$$

que consiste na função de estado, do  $m$ -ésimo nível de energia, para a partícula no poço de potencial definida sobre o espaço  $\eta$ . Aqui,  $L_\eta$ , é o comprimento do poço dado em termos da parametrização e  $\sqrt{\frac{2}{L_\eta}}$  é o fator de normalização. Da condição de contorno, temos que  $\alpha \rightarrow \alpha_m = \frac{m\pi}{L_\eta}$ . E as autoenergias serão dadas por (Barbosa,2021):

$$E_m = \frac{m^2\pi^2\hbar^2}{2ML_\eta^2}. \quad (3.47)$$

Para calcular a função de Wigner definida sobre o espaço de fase  $(\eta, p)$ , usemos a equação 3.27. Contudo, com propósitos de simplificar os cálculos, considere a substituição  $u = \frac{\xi}{2}$ . Assim:

$$W(\bar{\eta}, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \langle \bar{\eta} + u | \hat{\rho} | \bar{\eta} - u \rangle.$$

Como para o caso do poço, a matriz densidade é dada por  $\hat{\rho} = |\phi_m\rangle \langle \phi_m|$ , a equação acima fica:

$$\begin{aligned} W(\bar{\eta}, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \langle \bar{\eta} + u | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \bar{\eta} - u \rangle \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \phi^*(\bar{\eta} - u) \phi(\bar{\eta} + u). \end{aligned}$$

Torna-se necessário determinar os limites de integração. Inicialmente, somos levados a pensar que o limite de integração consiste no intervalo  $0 \leq \eta \leq L_\eta$ . Esses seriam os limites usuais de existência da função de onda do poço, porém isso nos levaria a um erro, pois, ao aplicarmos a função de onda na definição da transformação acima, vemos que o argumento de  $\phi$  sofre uma translação dada por  $u$ . Logo, isso fornece uma adaptação para a condição de existência da função de onda, que deve ser dada em:

$$0 \leq \bar{\eta} + u \leq L_\eta \quad (3.48)$$

$$0 \leq \bar{\eta} - u \leq L_\eta. \quad (3.49)$$

Dessa forma, estamos considerando que a translação  $\langle \bar{\eta} + u | \phi_m \rangle$  e  $\langle \phi_m | \bar{\eta} - u \rangle$  vai satisfazer que a função de onda deve ser 0 fora do intervalo  $[0, L_\eta]$ , onde o potencial é nulo.

As desigualdades mostradas acima induzem aos seguintes limites de integração (Belloni *et al.*, 2004):

$$\begin{cases} -\bar{\eta} \leq u \leq +\bar{\eta} & \text{se } 0 \leq \bar{\eta} \leq L_\eta/2 \\ -(L_\eta - \bar{\eta}) \leq u \leq (L_\eta - \bar{\eta}) & \text{se } L_\eta/2 \leq \bar{\eta} \leq L_\eta. \end{cases} \quad (3.50)$$

Com esses limites podemos escrever a integral da função de Wigner para a partícula no poço em dois casos. O primeiro para  $\bar{\eta} \in [0, L_\eta/2]$  e o segundo para  $\bar{\eta} \in [L_\eta/2, L_\eta]$ . Assim, para o primeiro caso, a integral torna-se:

$$W(\bar{\eta}, p) = \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \phi^*(\bar{\eta} - u) \phi(\bar{\eta} + u).$$

Substituindo as funções de onda para o poço encontradas em 3.46, a integral para a FW do  $m$ -ésimo nível de energia é:

$$W_m(\bar{\eta}, p) = \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}(\alpha_m [\bar{\eta} + u]) \text{sen}(\alpha_m [\bar{\eta} - u]). \quad (3.51)$$

No resultado acima, se multiplicarmos e dividirmos por 2 dentro do argumento dos senos, podemos usar a seguinte identidade trigonométrica (Wezeman, 2014):

$$\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos(B) - \cos(A)). \quad (3.52)$$

Assim, podemos identificar  $A = 2\alpha_m \bar{\eta}$  e  $B = 2\alpha_m u$ . Logo:

$$\begin{aligned} W_m(\bar{\eta}, p) &= \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \left[ \frac{1}{2} (\cos(2\alpha_m u) - \cos(2\alpha_m \bar{\eta})) \right] \\ &= \frac{1}{L_\eta \pi \hbar} \left[ \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \cos(2\alpha_m u) - \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \cos(2\alpha_m \bar{\eta}) \right]. \end{aligned}$$

A segunda integral acima é trivial, pois  $\cos(2\alpha_m\bar{\eta})$  é constante. Assim, so precisamos nos preocupar com a integral da exponencial:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha_m\bar{\eta}) \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} due^{-\frac{ip2u}{\hbar}} &= \cos(2\alpha_m\bar{\eta}) \left[ -\frac{\hbar}{2ip} e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \right]_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} \\ &= \cos(2\alpha_m\bar{\eta}) \left[ -\frac{\hbar}{2ip} e^{-\frac{ip2\bar{\eta}}{\hbar}} + \frac{\hbar}{2ip} e^{\frac{ip2\bar{\eta}}{\hbar}} \right] \\ &= \cos(2\alpha_m\bar{\eta}) \frac{\hbar}{p} \left[ \frac{e^{\frac{ip2\bar{\eta}}{\hbar}} - e^{-\frac{ip2\bar{\eta}}{\hbar}}}{2i} \right] \\ &= \frac{\hbar}{p} \cos(2\alpha_m\bar{\eta}) \sin\left(\frac{2\bar{\eta}p}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

Partimos agora para a resolução da primeira integral, dada por:

$$\int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} due^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \cos(2\alpha_mu). \quad (3.53)$$

Para resolver a integral acima, podemos usar a seguinte identidade:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C.$$

Portanto;

$$\int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} due^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \cos(2\alpha_mu) = \frac{\sin(2\bar{\eta}[\frac{p}{\hbar} + \alpha_m])}{2[\frac{p}{\hbar} + \alpha_m]} + \frac{\sin(2\bar{\eta}[\frac{p}{\hbar} - \alpha_m])}{2[\frac{p}{\hbar} - \alpha_m]}. \quad (3.54)$$

Ao juntar os resultados das duas integrais, a equação 3.51, fica:

$$W_m(\bar{\eta}, p) = \frac{1}{L_\eta \pi \hbar} \left( \frac{\sin(2\bar{\eta}[\frac{p}{\hbar} + \alpha_m])}{2[\frac{p}{\hbar} + \alpha_m]} + \frac{\sin(2\bar{\eta}[\frac{p}{\hbar} - \alpha_m])}{2[\frac{p}{\hbar} - \alpha_m]} - \frac{\hbar}{p} \cos(2\alpha_m\bar{\eta}) \sin\left(\frac{2\bar{\eta}p}{\hbar}\right) \right), \quad (3.55)$$

que consiste na FW para o intervalo  $\bar{\eta} \in [0, L_\eta/2]$ . Podemos simplificar nosso resultado tomando  $\bar{\eta}' = \bar{\eta}/L_\eta$ ,  $p' = pL_\eta/\hbar$  e  $W'_m = \hbar W_m$ , a equação para a FW pode ser reescrita como (Wezeman, 2014):

$$W'_m(\bar{\eta}', p') = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(2\bar{\eta}'[p' + m\pi])}{2[p' + m\pi]} + \frac{\sin(2\bar{\eta}'[p' - m\pi])}{2[p' - m\pi]} - \frac{\cos(2m\pi\bar{\eta}') \sin(2\bar{\eta}'p')}{p'} \right). \quad (3.56)$$

Com o resultado acima podemos escrever a FW no espaço  $(x, p)$ . Para isso, substituímos a definição da parametrização  $\eta$  na equação acima para obter:

$$\begin{aligned} W'_m(x', p') &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(2\ln(1 + \gamma x') \gamma^{-1} [p' + m\pi])}{2[p' + m\pi]} + \frac{\sin(2\ln(1 + \gamma x') \gamma^{-1} [p' - m\pi])}{2[p' - m\pi]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(2m\pi \ln(1 + \gamma x') \gamma^{-1}) \sin(2\ln(1 + \gamma x') \gamma^{-1} p')}{p'} \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como mostrado em 3.9, tomando  $\gamma \rightarrow 0$ , a parametrização fornece  $x'$ . Logo, fazendo o limite para  $\gamma$  tendendo a zero na FW, chegamos no resultado encontrado por Wezeman (2014) para a FW da partícula no poço de potencial em um espaço euclidiano.

Precisamos efetuar a integração para  $\bar{\eta} \in [L_\eta/2, L_\eta]$ . Usando as condições adequadas para os limites de integração mostrados em 3.50, a integral assume a seguinte forma:

$$W_m(\bar{\eta}, p) = \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{\bar{\eta}-L_\eta}^{L_\eta-\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}\left(\frac{2}{2}\alpha_m[\bar{\eta}+u]\right) \text{sen}\left(\frac{2}{2}\alpha_m[\bar{\eta}-u]\right). \quad (3.58)$$

Antes de partimos para resolver diretamente a integral, consideremos a substituição de variável  $\eta'(y)\eta' = L_\eta - \bar{\eta}$  para o resultado acima:

$$\begin{aligned} W_m(L_\eta - \eta', p) &= \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\eta'}^{+\eta'} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[L_\eta - \eta' + u]\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[L_\eta - \eta' - u]\right) \\ &= \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\eta'}^{+\eta'} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} (-1)^{2m+2} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[\eta' - u]\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[\eta' + u]\right). \end{aligned}$$

Esse desenvolvimento considerou que, sendo a função seno ímpar, então para cada fator de  $m\pi$  adicionado ao argumento, a função ganhar um fator de  $(-1)^m$  (Wezeman, 2014). Além disso, como os níveis de energia do poço são dados para  $m = 1, 2, 3, \dots$ , o fator  $(-1)^{2m+2}$  é sempre igual a 1. Então:

$$\begin{aligned} W_m(L_\eta - \eta', p) &= \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\eta'}^{+\eta'} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} (-1)^{2m+2} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[\eta' - u]\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[\eta' + u]\right) \\ &= \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\eta'}^{+\eta'} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[\eta' - u]\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_\eta}[\eta' + u]\right) \\ &= \frac{2}{L_\eta \pi \hbar} \int_{-\eta'}^{+\eta'} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}\left(\alpha_m[\eta' - u]\right) \text{sen}\left(\alpha_m[\eta' + u]\right) \\ &= W_m(\eta', p). \end{aligned}$$

Desse resultado concluímos que a FW é simétrica em relação ao centro do intervalo da caixa (Wezeman, 2014), de modo que a FW do  $m$ -ésimo nível de energia para uma partícula presa em um poço de potencial fica determinada pela equação 3.55

Com a ajuda da equação 3.51 e integrando sobre todos os possíveis valores de  $p$ , é

possível determinar a distribuição de posição no espaço  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} W(\bar{\eta}, p) dp &= \frac{2}{L\bar{\eta}\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}(\alpha_m[\bar{\eta}+u]) \text{sen}(\alpha_m[\bar{\eta}-u]) \\
&= \frac{2}{L\bar{\eta}} \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{ip2u}{\hbar}} \text{sen}(\alpha_m[\bar{\eta}+u]) \text{sen}(\alpha_m[\bar{\eta}-u]) \\
&= \frac{2}{L\bar{\eta}} \int_{-\bar{\eta}}^{+\bar{\eta}} du \delta(u) \text{sen}(\alpha_m[\bar{\eta}+u]) \text{sen}(\alpha_m[\bar{\eta}-u]) \\
&= \frac{2}{L\bar{\eta}} \text{sen}^2(\alpha_m\bar{\eta}) = \frac{2}{L\bar{\eta}} \text{sen}^2\left(\frac{m\pi}{L\bar{\eta}}\bar{\eta}\right) = W(\bar{\eta}).
\end{aligned}$$

Portanto, a distribuição de posição fica:

$$W(\bar{\eta}) = \frac{2}{L\bar{\eta}} \text{sen}^2\left(\frac{m\pi}{L\bar{\eta}}\bar{\eta}\right), \quad (3.59)$$

que consiste em uma equação que tem a mesma forma da distribuição de posição definida em um espaço com a métrica não-euclidiana. Se substituirmos a forma de  $\eta$  no resultado acima:

$$W(x) = \frac{2\gamma}{\ln(1+\gamma L)} \text{sen}^2\left(\frac{\ln(1+\gamma x)m\pi}{\ln(1+\gamma L)}\right), \quad (3.60)$$

encontramos a distribuição de probabilidade da posição na variável  $x$ .

Sem usar o formalismo no espaço de fase, o mesmo resultado pode ser obtido usando o formalismo usual da MQ. Mas antes, considere a função de onda para o poço, mostrada em 3.46, na variável  $x$ :

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\gamma}{\ln(1+\gamma L)}} \text{sen}\left(\frac{m\pi \ln(1+\gamma x)}{\ln(1+\gamma L)}\right), & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{caso o contrário.} \end{cases}$$

Logo, se  $\sigma(x)$  denotar a distribuição de posição obtida via formalismo quântico usual e  $|\phi_m\rangle \langle\phi_m|$  for um estado puro construído com os estados quânticos dados acima, então:

$$\sigma(x) = \langle x|\phi_m\rangle \langle\phi_m|x\rangle = \phi_m(x)\phi_m^*(x) = |\phi(x)|^2 = W(x),$$

estando de acordo com os resultado encontrados anteriormente.

Outro resultado que pode ser obtido para a partícula no poço de potencial é o valor esperado dos operadores. Contudo, como estamos no espaço  $\eta$ , a equação para o valor esperado mostrada em 2.75 precisa ser adaptada para esse contexto, portanto:

$$\langle \hat{\eta} \rangle_\psi = \langle \eta(\hat{x}) \rangle_\psi = \iint W(\eta, p) S[\eta(\hat{x})] d\eta dp. \quad (3.61)$$

Na equação acima,  $S[\eta(\hat{x})]$  é o símbolo de Weyl do operador  $\eta(\hat{x})$  que pode ser calculado por intermédio da definição 2.67.

$$\begin{aligned}
 S[\eta(\hat{x})] = a(x') &= \int N_{\eta(\hat{x})} \left( x' + \frac{z}{2}, x' - \frac{z}{2} \right) e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\
 &= \int \left\langle x' + \frac{z}{2} \left| \frac{\ln(1 + \gamma \hat{x})}{\gamma} \right| x' - \frac{z}{2} \right\rangle e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int \ln \left( 1 + \gamma x' - \frac{\gamma z}{2} \right) \left\langle x' + \frac{z}{2} \left| x' - \frac{z}{2} \right\rangle e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int \ln \left( 1 + \gamma x' - \frac{\gamma z}{2} \right) \delta(z) e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\
 &= \frac{\ln(1 + \gamma x')}{\gamma}.
 \end{aligned}$$

Assim, pode-se dizer que o símbolo de Weyl da função do operador  $\eta(\hat{x})$  é dado por  $\eta(x)$ , logo:

$$S[\eta(\hat{x})] = \eta. \quad (3.62)$$

Esse resultado é esperado e condizente, visto que todos os pontos do espaço de pontos  $(x, p)$  foram parametrizados para o espaço cuja os pontos são  $(\eta(x), p)$ . Além disso, vemos uma similaridade com o caso do operador  $\hat{x}$ , cujo símbolo de Weyl é o próprio número real  $x$ . Ademais, o resultado euclidiano pode ser resgatado fazendo o seguinte limite:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\gamma \rightarrow 0} S[\eta(\hat{x})] &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \eta(x) \\
 S \left[ \lim_{\gamma \rightarrow 0} \eta(\hat{x}) \right] &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \gamma x)}{\gamma} \\
 S[\hat{x}] &= x.
 \end{aligned}$$

Logo, voltando para o cálculo do valor esperado no espaço  $\eta$  e utilizando os resultado discutidos acima, a equação 3.61 fica:

$$\langle \hat{\eta} \rangle_{\psi} = \langle \eta(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \iint W(\eta, p) \eta d\eta dp.$$

As integrais duplas podem ser manipuladas para obter um resultado mais simples, logo:

$$\langle \eta(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \int \eta d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} W(\eta, p) dp.$$

Como a integral da FW sobre todos os valores possíveis de momento fornece a distribuição de posição, então:

$$\langle \eta(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \int \eta d\eta W(\eta).$$

Ajustando a integral acima para o nosso problema da partícula no poço, temos que o valor esperado fica:

$$\langle \bar{\eta}(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \frac{2}{L_{\bar{\eta}}} \int_0^{L_{\bar{\eta}}} \bar{\eta} \sin^2\left(\frac{m\pi\bar{\eta}}{L_{\bar{\eta}}}\right) d\bar{\eta}.$$

Essa integral tem exatamente a forma do valor esperado para o caso usual euclidiano da partícula no poço de potencial (Zettili, 2009). De modo que o valor, já conhecido, é dado por:

$$\langle \bar{\eta}(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \frac{L_{\bar{\eta}}}{2}, \quad (3.63)$$

que no limite de  $\gamma$  tendendo a zero encontramos o caso euclidiano  $L/2$ . É pertinente verificar o que aconteceria se, ao invés de calcular o valor esperado usando a representação  $\eta$ , tivéssemos calculado diretamente em  $x$ , usando a expressão para a FW dada em 3.60. Assim, o valor esperado seria:

$$\langle \eta(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \frac{2\gamma}{\ln(1+\gamma L)} \int_0^L \frac{\ln(1+\gamma x)}{\gamma} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\ln(1+\gamma x)m\pi}{\ln(1+\gamma L)}\right) \frac{dx}{(1+\gamma x)},$$

Assim encontramos o seguinte resultado:

$$\langle \eta(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \frac{\ln(1+\gamma L)(1+2m^2\pi^2 - \cos(2m\pi) - 2m\pi \sin(2m\pi))}{4m^2\pi^2\gamma}.$$

Visto que no poço temos  $m = 1, 2, 3, \dots$ , então  $\cos(2m\pi) = 1$  e  $\sin(m\pi) = 0$ . Logo:

$$\langle \eta(\hat{x}) \rangle_{\psi} = \frac{\ln(1+\gamma L)}{2\gamma} = \frac{L_{\bar{\eta}}}{2}, \quad (3.64)$$

colaborando então com a validação da expressão para o valor esperado na representação  $\eta$ , calculado em 3.63.

É importante salientar que em todos esses cálculos de valor esperado para posição que foram realizados foi considerado o valor esperado de uma função do operador  $\hat{x}$ . É possível calcular o valor esperado apenas do operador  $\hat{x}$ , usando a expressão para o valor esperado mostrada em 2.76 e a distribuição na variável  $x$  dada por 3.60. Dessa forma:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi} = \frac{2\gamma}{\ln(1+\gamma L)} \int_0^L x \operatorname{sen}^2\left(\frac{\ln(1+\gamma x)m\pi}{\ln(1+\gamma L)}\right) \frac{dx}{(1+\gamma x)}. \quad (3.65)$$

Note que é preciso adicionar o jacobiano da métrica dividindo o diferencial em  $x$ , pois a distribuição de posição acima é construída com FW que foram obtidas por meio funções de onda pertencentes a um espaço de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})^g$ . Onde  $g$  denota uma métrica não-euclidiana, que para o contexto deste trabalho é dada por 3.1. Assim, a equação acima fornece:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\psi}^{\gamma} = \frac{8Lm^3\pi^3\gamma - 8m^3\pi^3\gamma L_{\bar{\eta}} - 2m\pi\gamma^3 L_{\bar{\eta}}^3}{2am\pi(4m^2\pi^2\gamma^2 + L_{\bar{\eta}}^2)}.$$

Alguns comentários sobre os valores esperados calculados até aqui se fazem necessários. Vimos que o valor esperado encontrado nas equações 3.64 e 3.63 preservaram a forma matemática do caso euclidiano, mas carregavam sinificados diferentes, visto que ambas as expressões envolviam um logarítimo natural. Esse resultado é esperado, pois todos os desenvolvimentos realizados até aqui foram feito em termos de uma parametrização definida em termos da métrica, como foi mostrado em 3.20. E definida dessa forma, essa parametrização atua como uma transformação de ponto que preserva a forma das equações (Ferreira, 2019). Além disso, quando tomamos  $\gamma \rightarrow 0$ , a equação para  $\langle \eta(\hat{x}) \rangle_\psi$  forneceu o resultado conhecido de  $L/2$ .

A expressão do valor esperado obtido acima não preserva a forma matemática, como ocorreu nos outros casos. Porém, quando tomamos o limite para  $\gamma$  tendendo a 0, encontramos:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle \hat{x} \rangle_\psi^\gamma &= -\frac{L(-1 - 2m^2\pi^2 + \cos(2m\pi) + 2m\pi \sin(2m\pi))}{4m^2\pi^2} \\ &= \frac{2Lm^2\pi^2}{4m^2\pi^2} = \frac{L}{2} = \langle \hat{x} \rangle_\psi, \end{aligned}$$

voltando a expressão usual já conhecida.

Assim, esses resultados obtidos para os valores esperados nos permitem concluir a seguinte relação entre os espaço de fase  $\eta$  e o espaço de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})^g$ :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle \eta(\hat{x}) \rangle_\psi = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle \hat{x} \rangle_\psi^\gamma = \langle \hat{x} \rangle_\psi. \quad (3.66)$$

Para calcular o valor esperado do momento, usemos a integral 2.77 escrita em termos da parametrização  $\eta$ , como segue:

$$\langle \hat{p} \rangle_\psi = \int d\eta \int W(\eta, p) p d p. \quad (3.67)$$

Essa integral pode ser resolvida de forma bastante simples se avaliarmos a paridade do produto  $W(\eta, p)p$ . Se substituirmos  $p$  por  $-p$  na equação 3.51, é possível verificar que:

$$W(\eta, p) = W(\eta, -p). \quad (3.68)$$

Logo, a função  $W(\eta, p)$  é par. Dessa forma, o produto  $W(\eta, p)p$  é uma função mpar. Como a integração é feita em  $[-\infty, +\infty]$ , que consiste em um intervalo simétrico, então:

$$\int W(\eta, p) p d p = 0.$$

Portanto:

$$\langle \hat{p} \rangle_\psi = \int d\eta \int W(\eta, p) p d p = 0, \quad (3.69)$$

que consiste no resultado já bem conhecido para o valor esperado do momento de uma partícula em um poço de potencial.

Os gráficos para a FW modificada para o poço de potencial podem ser obtidos utilizando-se de um resultado mais conveniente para a integração 3.51. Podemos refazer essa integral utilizando os limites  $[-L_\eta, +L_\eta]$ . De modo que (Dong *et al.*, 2004)

$$W_n(\bar{\eta}, p) = \frac{i(e^{iL_\eta p} - e^{-iL_\eta p})[L_\eta^2 p^2 \cos(n\pi) - (L_\eta^2 p^2 - n^2 \pi^2) \cos(\frac{2n\pi\bar{\eta}}{L_\eta})]}{2\pi L_\eta p (n^2 \pi^2 - L_\eta^2 p^2)}. \quad (3.70)$$

Como  $L_\eta = \ln(1 + \gamma L) / \gamma$  é uma constante, podemos tomar  $L_\eta = \pi$ , por simplicidade.

Logo:

$$W_n(\bar{\eta}, p) = \frac{i(e^{ip\pi} - e^{-ip\pi})}{2\pi^2 p (n^2 - p^2)} (p^2 \cos(n\pi) - (p^2 - n^2) \cos(2n\bar{\eta})). \quad (3.71)$$

Substituindo na expressão acima a parametrização  $\eta$ , encontra-se a a FW modificada para o poço de potencial em termos da variável  $x$ :

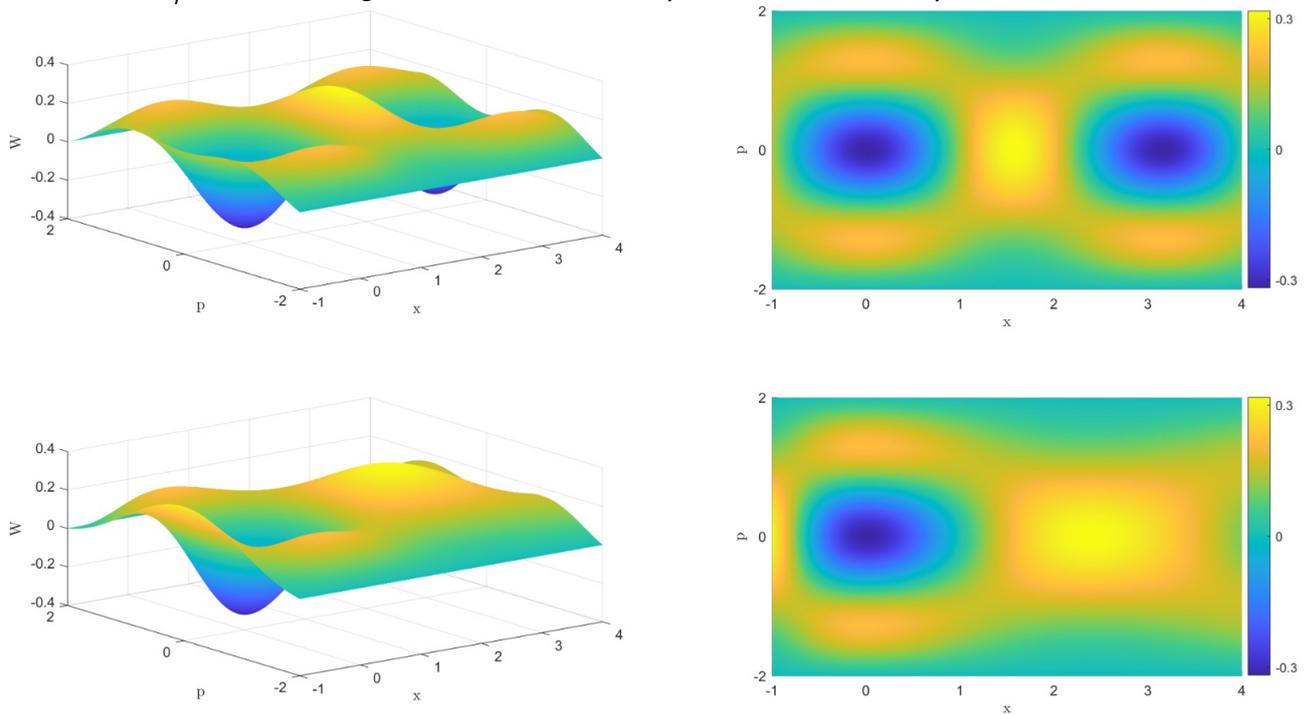
$$W_n(x, \gamma, p) = \frac{i(e^{ip\pi} - e^{-ip\pi})}{2\pi^2 p (n^2 - p^2)} (p^2 \cos(n\pi) - (p^2 - n^2) \cos(2n(\gamma^{-1} \ln(1 + \gamma x))). \quad (3.72)$$

A seguir, plotamos a FW modificada (3.72) para alguns valores particulares de níveis de energia ( $n$ ) e parâmetro da métrica ( $\gamma$ ), de modo a avaliarmos melhor a influência dessas variáveis na definição da função de quasi-probabilidade modificada aqui proposta. Na figura 1 dispomos  $W_1(x, \gamma, p)$  para  $n = 1$  e  $\gamma \rightarrow 0$  nos dois gráficos superiores e  $\gamma = 0.5$  nos dois gráficos inferiores. Para cada imagem, os dois gráficos superiores representam o plote da FW para o caso euclidiano, onde  $g(x) = 1$ . Dessa forma, fica clara a influência do fator  $\gamma$  nos afastamentos dos mínimos da função, ou seja, quanto maior o valor de  $\gamma$  maior será a separação entre os mínimos.

Porém, ao avaliar o primeiro e o segundo estado excitados ( $n = 2$  e  $n = 3$ , respectivamente) um novo comportamento surge. Nas figuras 2 e 3, como temos um maior número de mínimos, fica mais clara a influência do fator  $\gamma$  nos afastamentos dos mínimos para  $x \geq 0$  e na aproximação para  $x < 0$ .

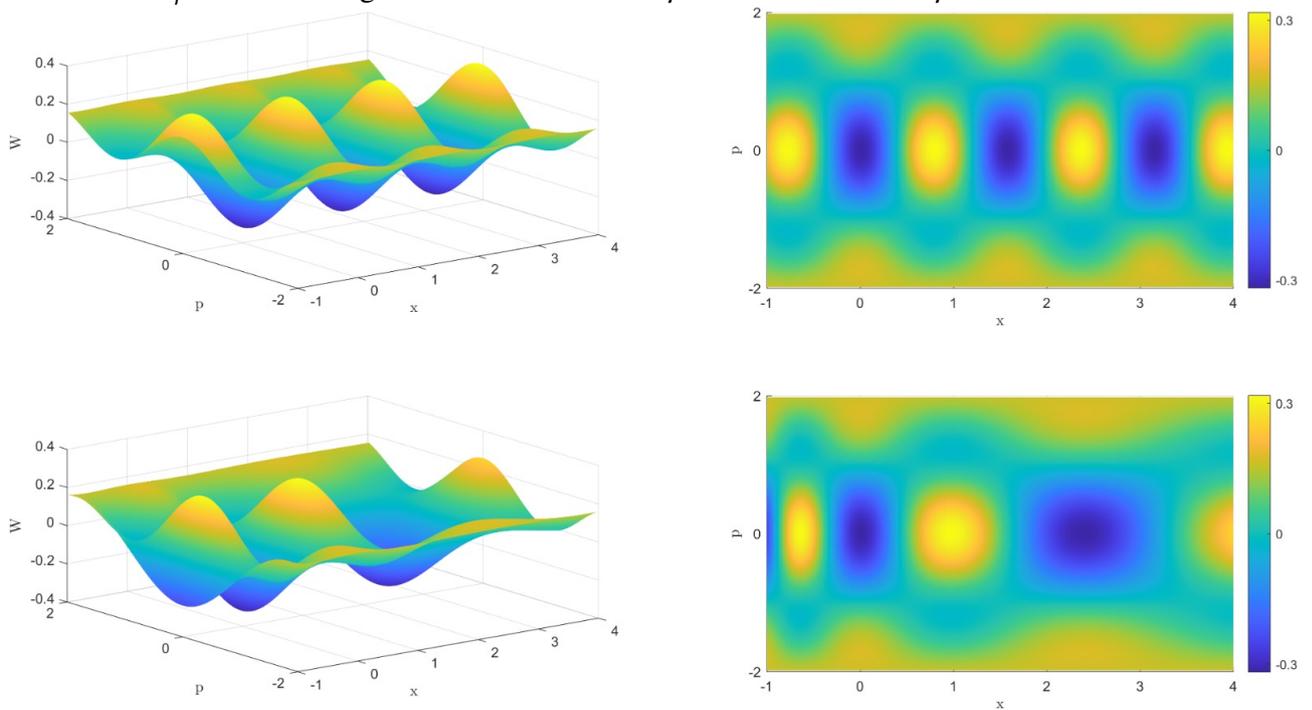
Por outro lado, ao comparar as três imagens, notamos que o nível de energia do poço está intimamente relacionado ao número de máximos e mínimos da  $W$ , sendo direta a constatação de que quanto mais energético for o nível de energia do poço, maior é o número de pontos extremos.

Figura 1 – Nessas quatro imagens temos o nível de energia  $n = 1$  plotados considerando  $\hbar = 1$  e  $L\eta = \pi$ . Nas imagens de cima tomou-se  $\gamma = 0$  e nas de baixo  $\gamma = 0.5$ .



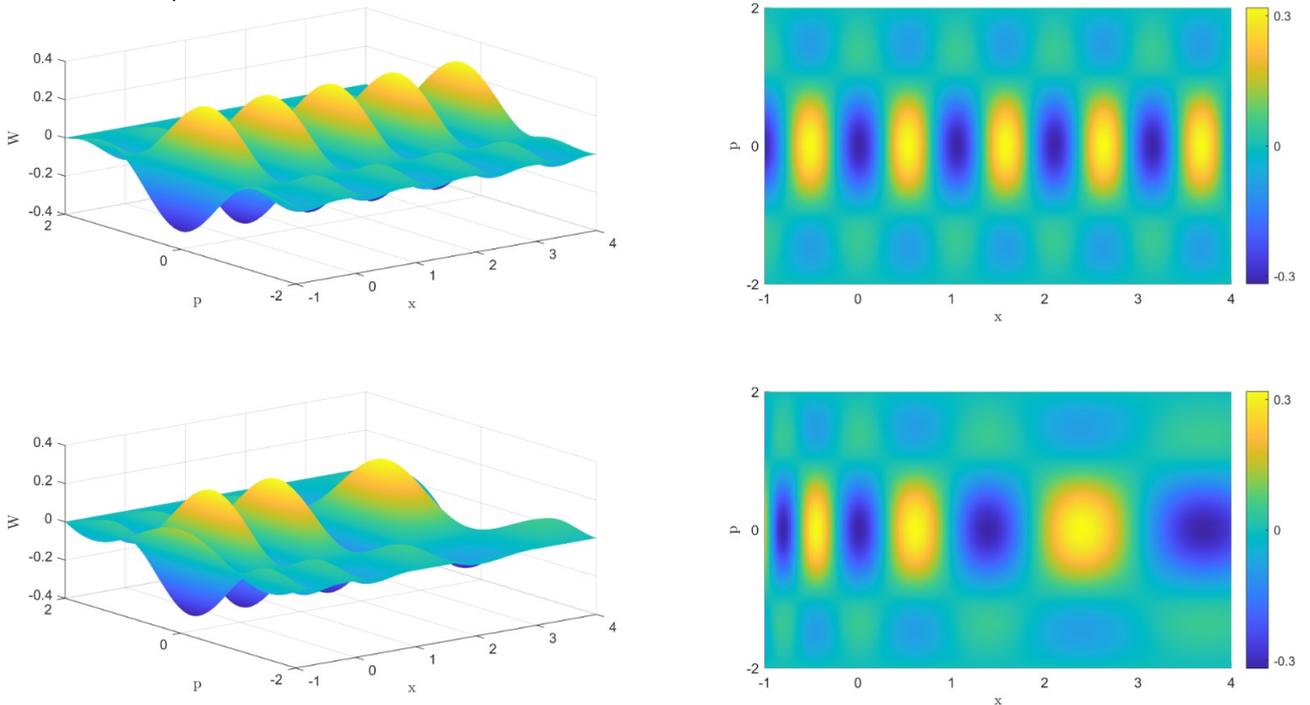
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 2 – Nessas quatro imagens temos o nível de energia  $n = 2$ , plotados considerando  $\hbar = 1$  e  $L\eta = \pi$ . Nas imagens de cima tomou-se  $\gamma = 0$  e nas de baixo  $\gamma = 0.5$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3 – Nessas quatro imagens temos o nível de energia  $n = 3$ , plotados considerando  $\hbar = 1$  e  $L\eta = \pi$ . Nas imagens de cima tomou-se  $\gamma = 0$  e nas de baixo  $\gamma = 0.5$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

### 3.2.2 Função de Wigner Modificada para um Sistema do Tipo Oscilador Quântico

O objetivo desta seção é encontrar a FW modificada em termos do parâmetro  $\eta$  para um contexto de uma partícula movendo-se sob a ação de um potencial do tipo oscilador quântico. Para encontrar a FW, seguiremos a ordem que foi feita para o poço de potencial. Encontraremos a função de onda via equação do tipo Schrödinger independente do tempo na variável  $\eta$  e utilizaremos a função de onda encontrada na definição 3.15, para a FW modificada. Feito isso, calcularemos os valores esperados com o intuito de comparar com os resultados já conhecidos da literatura. Finalizamos a seção mostrando os gráficos da FW modificada e seu comportamento para alguns valores de  $\gamma$ .

Inciaremos definindo o operador Hamiltoniano, que nos será útil para descrever o sistema que desejamos analisar:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2\gamma^2} \ln^2(1 + \gamma\hat{x}). \quad (3.73)$$

Definido dessa forma, percebermos que, se  $\gamma \rightarrow 0$ , o operador acima se reduz ao resultado conhecido para o Hamiltoniano do sistema de um oscilador quântico unidimensional. Para isso, basta aplicar o limite quando  $\gamma \rightarrow 0$  na segunda parcela da equação e proceder com o

cálculo, como foi feito em 3.5. Além disso, o segundo termo pode ser visto como o operador  $\eta(\hat{x})$  mostrado em 3.42. Logo, a 3.73 pode ser escrita como:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}\eta^2(\hat{x}). \quad (3.74)$$

Na representação de posição, a 3.74 pode ser escrita da seguinte forma:

$$H_\eta = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d}{d\eta} \right) + \frac{M\Omega^2}{2}\eta^2(x). \quad (3.75)$$

O primeiro termo dessa equação é a forma do operador momento obtido por meio da quantização da variável  $p$ , utilizando a forma coordenada do mapa de quantização de Weyl-Wigner, como foi feito em 3.36. O segundo termo é símbolo do operador  $\mathbf{S}[\eta^2(\hat{x})]$  e pode ser encontrado utilizando a equação 3.31 e procedendo como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}[\eta^2(\hat{x})] &= \int N_{\eta^2(\hat{x})} \left( x + \frac{z}{2}, x - \frac{z}{2} \right) e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int \left\langle x + \frac{z}{2} \left| \ln(1 + \gamma\hat{x}) \ln(1 + \gamma\hat{x}) \right| x - \frac{z}{2} \right\rangle e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int \left\langle x + \frac{z}{2} \left| \ln(1 + \gamma\hat{x}) \ln(1 + \gamma x - \frac{\gamma z}{2}) \right| x - \frac{z}{2} \right\rangle e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int \ln^2(1 + \gamma x - \frac{\gamma z}{2}) \left\langle x + \frac{z}{2} \left| x - \frac{z}{2} \right\rangle e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int \ln^2(1 + \gamma x - \frac{\gamma z}{2}) \delta(z) e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{\ln^2(1 + \gamma x)}{\gamma^2} = \eta^2(x). \end{aligned}$$

Aqui, estamos propondo uma função potencial no espaço  $x$  com a seguinte forma:

$$V(x) = \frac{M\Omega^2 \ln(1 + \gamma x)^2}{2\gamma^2}, \quad (3.76)$$

de modo que para  $\gamma \rightarrow 0$  encontramos:

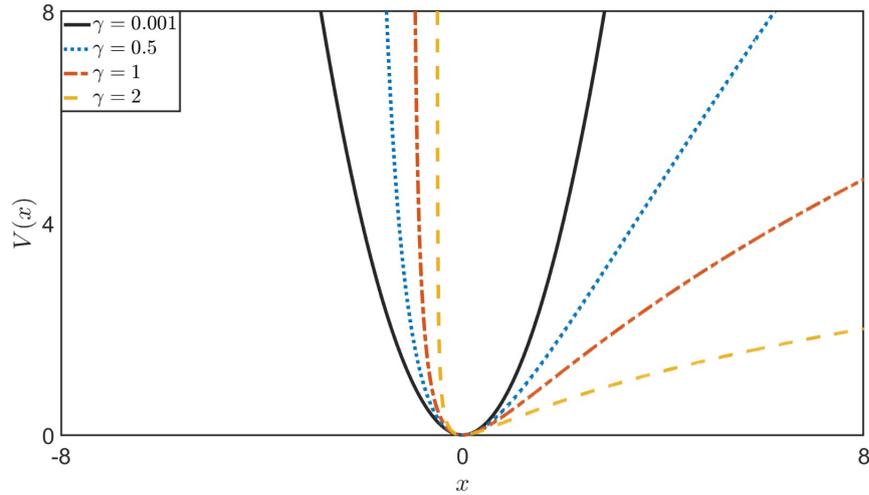
$$V(x) = \frac{M\Omega^2 x^2}{2}. \quad (3.77)$$

A equação acima consiste na forma do potencial para o oscilador harmônico quântico usual. A imagem a seguir mostra a influência que o fator  $\gamma$  exerce na função potencial 3.76.

Na figura acima, nota-se que a medida que o  $\gamma$  se aproxima de 0, a função potencial vai tomando a forma parabólica  $x^2$  centrada na origem.

Tendo estabelecido o Hamiltoniano que vamos trabalhar, podemos partir para a equação do tipo Schrödinger independente do tempo, que pode ser construída por meio da

Figura 4 – Gráfico da função potencial plotada em que  $M\Omega^2 = 1$  e para valores de  $\gamma$  aproximando-se cada vez mais de 0.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

aplicação do operador 3.74, em uma função de onda. Logo:

$$E\Phi(\eta) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2}M\Omega^2\eta^2\Phi(\eta). \quad (3.78)$$

A expressão acima tem a forma matemática da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico quântico unidimensional. Com  $\Phi(\eta)$  sendo a autofunção e  $E$  a autoenergia associada. Nosso objetivo é encontrar a função de onda  $\Phi$  que satisfaz 3.78. Para facilitar a resolução, considere a equação acima escrita como segue:

$$\frac{d^2\Phi(\eta)}{d\eta^2} - \frac{M\Omega^2}{\hbar^2}\eta^2\Phi(\eta) + \frac{2ME}{\hbar^2}\Phi(\eta) = 0. \quad (3.79)$$

Seja a seguinte mudança de variável adimensional:

$$u = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\eta, \quad (3.80)$$

de modo que as derivadas tornam-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} &= \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{d\eta} = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \frac{d\Phi}{du} \\ \frac{d^2\Phi(\eta)}{d\eta^2} &= \frac{du}{d\eta} \frac{d}{du} \left( \frac{d\Phi}{d\eta} \right) = \frac{M\Omega}{\hbar} \frac{d^2\Phi}{du^2}. \end{aligned}$$

Utilizando a substituição de variável e a expressão para a derivada segunda encontrada acima, a equação 3.79 torna-se:

$$\frac{M\Omega}{\hbar} \frac{d^2\Phi(u)}{du^2} - \frac{\Omega^2 M^2}{\hbar^2} \eta^2 \Phi(u) + \frac{2ME}{\hbar} \Phi(u) = 0. \quad (3.81)$$

Dividindo ambos os lados desse último resultado por  $\frac{M\Omega}{\hbar}$  e utilizando o quadrado da expressão 3.80, chegamos em:

$$\frac{d^2\Phi(u)}{du^2} - u^2\Phi(u) + \tau\Phi(u) = 0, \quad (3.82)$$

onde  $\tau = \frac{2E}{\Omega\hbar}$ .

Equações diferenciais de segunda ordem com essa forma apresentam um método de solução já bem estabelecido na literatura. O aparecimento do termo  $u^2\Phi(u)$  surgere uma solução tentativa da seguinte forma (Zettili, 2009):

$$\Phi(u) = H(u)e^{\frac{u^2}{2}}. \quad (3.83)$$

Assim, encontramos uma nova equação diferencial para  $H(u)$  dada por:

$$\frac{d^2H}{du^2} - 2u\frac{dH}{du} + (\tau - 1)H = 0. \quad (3.84)$$

A solução da equação acima é bem conhecida e é obtida pelo método de séries de potências (Método de Frobenius). A função  $H(u)$  que satisfaz tal equação é conhecida como função especial de Hermite (ou polinômios de Hermite), de modo que a 3.84 recebe o nome de equação de Hermite. Em termos dos polinômios de Hermite, a função  $\Phi$  pode ser escrita como (Griffiths; Schroeter, 2018):

$$\Phi_n(u) = \left(\frac{M\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(u) e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (3.85)$$

Substituindo 3.80 na equação, encontramos a solução em função de  $\eta$ :

$$\Phi_n(\eta) = \left(\frac{M\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\eta\right) e^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}\eta^2}, \quad (3.86)$$

cujas autoenergias associadas para  $n = 0, 1, 2, \dots$  são:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega. \quad (3.87)$$

Tendo encontrado a função de onda em termos do parametrização  $\eta$ , podemos determinar a FW modificada por meio da relação anteriormente construída. Mas em prol da simplificação da notação para os calculos futuros, é de grande valia realizar algumas simplificações na equação 3.86. Seja:

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{M\Omega}{\hbar} \quad (3.88)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \quad (3.89)$$

e

$$A_n = \left( \frac{M\Omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}, \quad (3.90)$$

onde  $A_n$  é o fator de normalização para a função de onda. Então, a 3.86 torna-se:

$$\Phi_n(\eta) = A_n H_n(\delta\eta) e^{-\frac{\sigma}{4}\eta^2}. \quad (3.91)$$

Com essa forma simplificada da função da onda, podemos proceder com o cálculo para a FW modificada. Para tanto, resgatemos a relação 3.28:

$$W(\eta, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{ip\xi}{\hbar}} \Phi^*\left(\eta - \frac{\xi}{2}\right) \Phi\left(\eta + \frac{\xi}{2}\right).$$

Para simplificar a integral acima, consideremos  $z = \frac{\xi}{2}$ . Então:

$$W(\eta, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{ip2z}{\hbar}} \Phi^*(\eta - z) \Phi(\eta + z). \quad (3.92)$$

Substituindo 3.91 em 3.92 e desenvolvendo a expressão, encontramos:

$$\begin{aligned} W_n(\eta, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} A_n^* e^{-\frac{\delta^2}{2}(\eta-z)^2} H(\delta[\eta-z]) A_n e^{-\frac{\delta^2}{2}(\eta+z)^2} H(\delta[\eta+z]) e^{-\frac{i2pz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{A_n^2}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2}[(\eta-z)^2+(\eta+z)^2]} H(\delta[\eta-z]) H(\delta[\eta+z]) e^{-\frac{i2pz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{A_n^2}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2(\eta^2+z^2)} H(\delta[\eta-z]) H(\delta[\eta+z]) e^{-\frac{i2pz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{A_n^2}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2(\eta^2+z^2)} H(\delta[z-\eta]) H(\delta[\eta+z]) e^{-\frac{i2pz}{\hbar}} dz \\ &= \frac{A_n^2 (-1)^n}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2(\eta^2+z^2)} H(\delta[z-\eta]) H(\delta[\eta+z]) e^{-\frac{i2pz}{\hbar}} dz. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Para obter a última igualdade mostrada acima, utilizamos a seguinte identidade para os polinômios de Hermite (Machado, 2004)

$$H_k(-x) = (-1)^k H_k(x). \quad (3.94)$$

Como a integração 3.93 é na variável  $z$ , a exponencial com o termo de  $\eta^2$  pode ser retirada do integrando. Juntando a exponencial de  $z^2$  com a exponencial imaginária, temos:

$$W_n(\eta, p) = \frac{A_n^2 (-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\delta^2\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\delta^2 z^2 + \frac{i2pz}{\hbar})} H(\delta[z-\eta]) H(\delta[\eta+z]) dz. \quad (3.95)$$

A nova exponencial pode ser manipulada utilizando o seguinte produto notável:

$$\left( \delta z + \frac{ip}{\hbar\delta} \right)^2 = \delta^2 z^2 + \frac{2ipz}{\hbar} - \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2} \Rightarrow \delta^2 z^2 + \frac{2ipz}{\hbar} = \left( \delta z + \frac{ip}{\hbar\delta} \right)^2 + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2}.$$

Substituindo a última igualdade acima em 3.95,

$$\begin{aligned} W_n(\eta, p) &= \frac{A_n^2 (-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\delta^2 \eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\delta z + \frac{ip}{\hbar \delta})^2 - \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2}} H(\delta[z - \eta]) H(\delta[\eta + z]) dz \\ &= \frac{A_n^2 (-1)^n}{\pi \hbar} e^{-(\delta^2 \eta^2 + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\delta z + \frac{ip}{\hbar \delta})^2} H(\delta[z - \eta]) H(\delta[\eta + z]) dz. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Nesse último resultado encontrado, tomemos:

$$y = \delta z + \frac{ip}{\hbar \delta} \Rightarrow dz = \frac{dy}{\delta},$$

com isso, a 3.96 pode ser escrita como:

$$W_n(\eta, p) = \frac{A_n^2 (-1)^n}{\delta \pi \hbar} e^{-(\delta^2 \eta^2 + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H\left(y + \frac{ip}{\hbar \delta} + \delta \eta\right) H\left(y + \frac{ip}{\hbar \delta} - \delta \eta\right) dy. \quad (3.97)$$

Chegamos em uma integral que pode ser resolvida pela seguinte relação entre os polinômios de Hermite e a função de Laguerre (Machado, 2004):

$$\frac{1}{2^k k!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-t^2} H_k(t+A) H_k(t-B) = L_k(-2AB), \quad (3.98)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes e  $L_k$  é o  $k$ -ésimo polinômio de Laguerre. Substituindo a identidade acima em 3.97:

$$W_n(\eta, p) = \frac{A_n^2 (-1)^n}{\delta \pi \hbar} e^{-(\delta^2 \eta^2 + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2})} 2^n n! \sqrt{\pi} L_n \left[ 2 \left( \delta^2 \eta^2 + \frac{p^2}{\delta^2} \right) \right].$$

Utilizando a forma explícita para o fator de normalização mostrado anteriormente e simplificando os termos, chega-se em:

$$W_n(\eta, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-(\delta^2 \eta^2 + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2})} L_n \left[ 2 \left( \delta^2 \eta^2 + \frac{p^2}{\delta^2} \right) \right], \quad (3.99)$$

que é o resultado procurado. A equação acima consiste na FW modificada para o  $n$ -ésimo nível do oscilador harmônico quântico. Tal resultado preserva a forma matemática da FW do oscilador harmônico quântico tradicional, que pode ser encontrada resolvendo a equação de Schrödinger independente do tempo para um espaço onde a métrica é  $g(x) = 1$  (caso euclidiano) e o potencial é simplesmente dado por  $\frac{m\Omega^2 x^2}{2}$  (Schleich, 2011).

Além disso, se substituirmos a definição da parametrização  $\eta$  na equação anterior, encontramos a FW modificada na variável  $x$ . Logo:

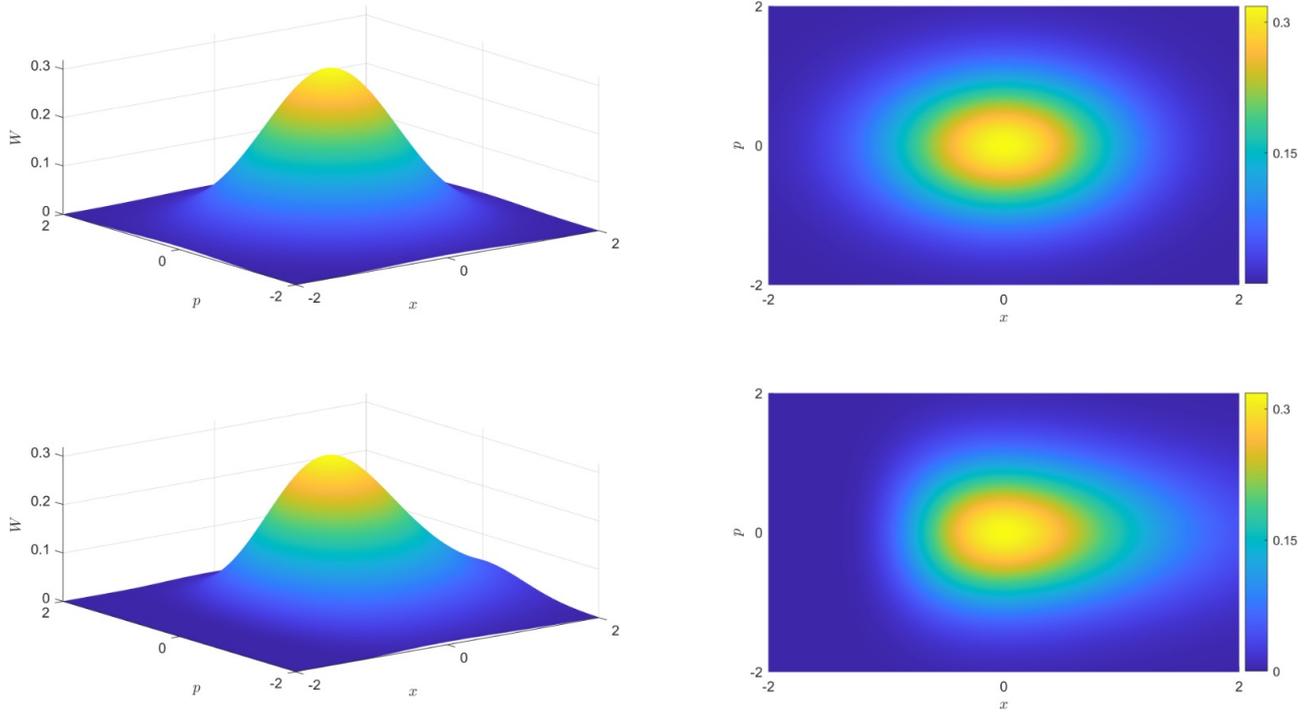
$$W(x, p, \gamma)_n = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-(\delta^2 \ln^2(1+\gamma x) \gamma^{-2} + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2})} L_n \left[ 2 \left( \delta^2 \ln^2(1+\gamma x) \gamma^{-2} + \frac{p^2}{\delta^2} \right) \right]. \quad (3.100)$$

De modo que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} W(x, p, \gamma) = W(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-(\delta^2 x^2 + \frac{p^2}{\delta^2 \hbar^2})} L_n \left[ 2 \left( \delta^2 x^2 + \frac{p^2}{\delta^2} \right) \right]. \quad (3.101)$$

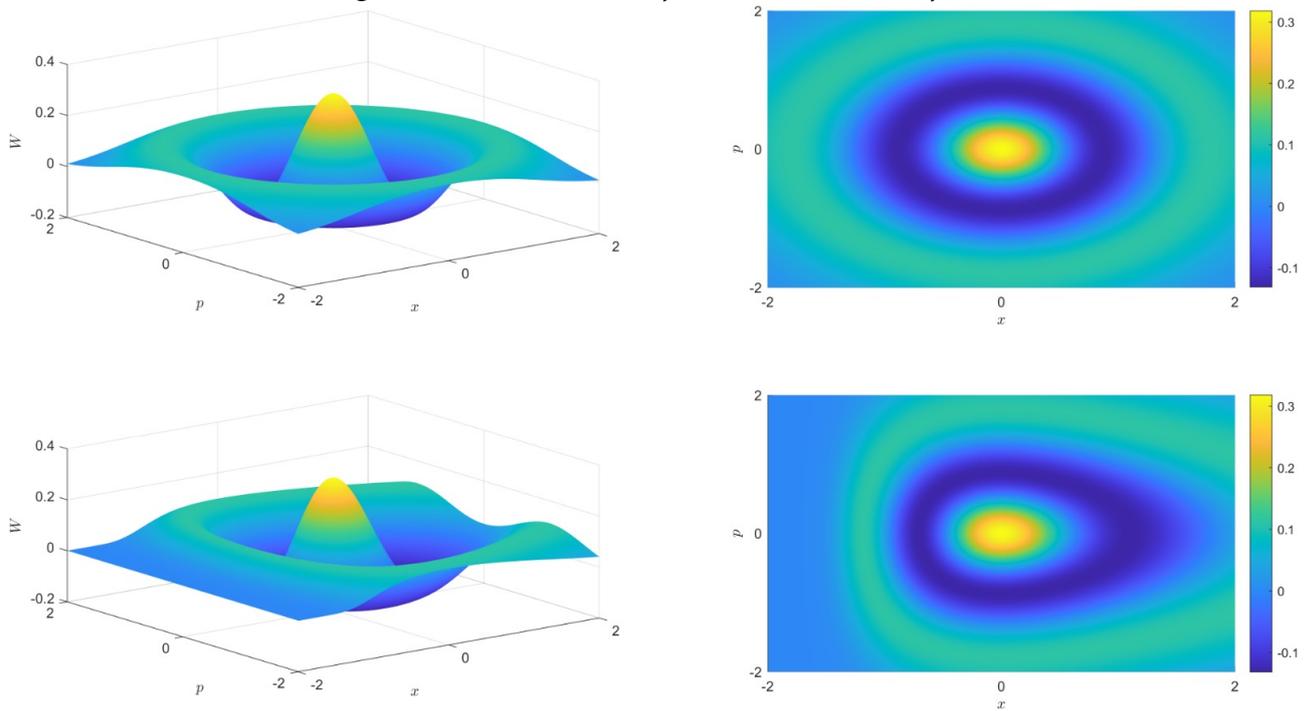
Portanto, no limite de  $\gamma$  tendendo a 0 a equação (3.100) se reduz ao caso euclidiano da FW calculada para o oscilador harmônico quântico usual. Podemos verificar a influência dos parâmetros  $\gamma$  e  $n$  na definição de  $W(x, p, \gamma)_n$  plotando a função (3.100) para alguns níveis de energia e alguns valores específicos de  $\gamma$ .

Figura 5 – Nessas quatro imagens temos o nível de energia  $n = 0$  plotados considerando  $\hbar = \delta^2 = 1$ . Nas imagens de cima tomou-se  $\gamma = 0$  e nas de baixo  $\gamma = 0.5$ .



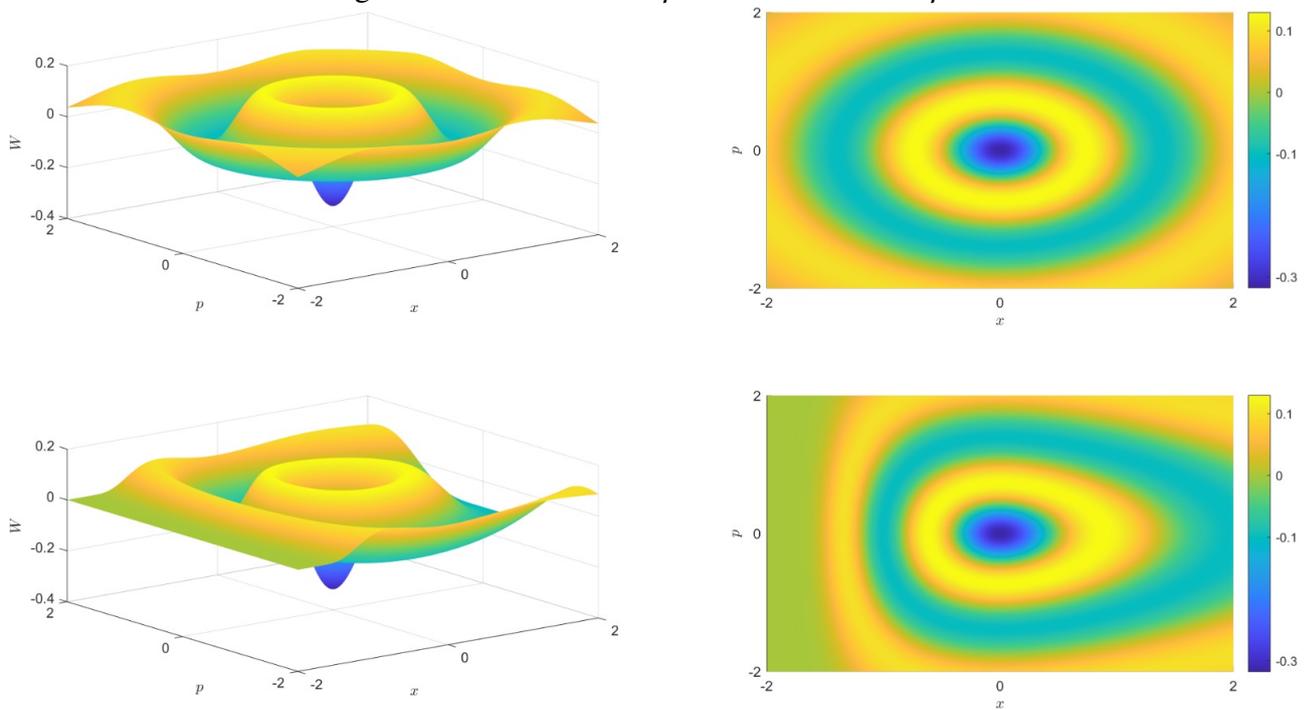
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 6 – Nessas quatro imagens temos o nível de energia  $n = 2$  plotados considerando  $\hbar = \delta^2 = 1$ . Nas imagens de cima tomou-se  $\gamma = 0$  e nas de baixo  $\gamma = 0.5$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 7 – Nessas quatro imagens temos o nível de energia  $n = 3$  plotados considerando  $\hbar = \delta^2 = 1$ . Nas imagens de cima tomou-se  $\gamma = 0$  e nas de baixo  $\gamma = 0.5$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Para as figuras 5, 6 e 7 os gráficos superiores representam a função de Wigner no limite em que  $\gamma \rightarrow 0$ , ou seja, para o oscilador quântico usual, enquanto os gráficos inferiores representam essa função no caso particular em que  $\gamma = 0.5$ . Em todos os casos utilizamos unidades naturais ( $\hbar = \delta^2 = 1$ ) e definimos  $x$  e  $p$  pertencentes ao intervalo  $[-2, 2]$ . Em cada figura, os gráficos que aparecem à direita complementam aqueles que aparecem à esquerda e juntos corroboram para a completa caracterização da influência dos parâmetros do modelo.

A figura 5 mostra quatro imagens referentes a nível de energia  $n = 0$ . A variação do parâmetro  $\gamma$  nos mostra como a métrica 2.26 aqui utilizada influencia no gráfico da FW. Nota-se que, para  $\gamma = 0.5$ , a função apresenta uma deformação em relação ao caso em que  $\gamma \rightarrow 0$ , em que há um afastamento do pico da função de Wigner, bem como uma deformação em sua estrutura para todos os níveis de energia analisados. Outro aspecto que se repete ao longo das figuras é com respeito à influência do nível de energia em relação ao número de máximos e mínimos da função de Wigner, percebemos que quanto maior for o valor de  $n$  maior será o número de pontos extremos na função evidenciando uma correlação entre esse número de pontos e a energia do sistema. O gráfico de densidade mostra um afastamento do pico da FW, bem como uma deformação em sua estrutura.

Na 6 vemos a influência da métrica para o nível de energia  $n = 2$ . O aumento de picos e vales na FW reflete o aumento do nível de energia do sistema. Nota-se que para  $\gamma \rightarrow 0$  temos o gráfico esperado para a FW do oscilador quântico euclidiano. Quando  $\gamma = 0.5$ , vemos que a deformação da estrutura da FW é mais evidente em ambas as representações gráficas. Já na figura 7, temos o nível de energia  $n = 4$ . Da mesma forma, constatamos uma deformação no gráfico a medida que aumentamos o valor de  $\gamma$ .

As deformações encontradas ao plotar os gráficos podem ser associadas a mudanças na dinâmica quântica no sistema, visto que estamos gradativamente aumentando um parâmetro que influencia na métrica do espaço. Dessa forma, a representação do comportamento quântico via função de Wigner no espaço de fase é modificado pela definição da métrica do espaço, sendo portanto possível estender a análise aqui realizada para problemas envolvendo métricas menos usuais situação esta em que podem emergir comportamentos não triviais.

## 4 CONCLUSÃO

O presente trabalho iniciou-se com uma discussão acerca do formalismo quântico no espaço de Hilbert, com o objetivo de comparar tal formalismo com a descrição quântica via quantização do espaço de fase. Em seguida, discutimos sobre como os resultados desse formalismo são influenciados dentro do contexto do operador de translação dependente da posição (PDTO), que inclui em sua definição o termo da métrica do espaço. Em particular, utilizamos uma métrica unidimensional dependente da posição e de um parâmetro  $\gamma$  com unidade de inverso do comprimento. De modo que para  $\gamma \rightarrow 0$ , resgatamos a métrica euclidiana conhecida.

Em seguida, foi introduzida de maneira rigorosa a quantização do espaço de fase clássico. Apresentamos o conceito de mapa de quantização de Weyl-Wigner, cujo objetivo é levar funções com domínio no espaço de fase em operadores pertencentes ao espaço de Hilbert. Além disso, mostramos que tal mapa admite operação inversa, conhecida na literatura como Símbolo do Operador ou Símbolo de Weyl. De modo que tal operação inversa atua sobre operadores com domínio no espaço de Hilbert e os levam em funções no espaço de fase. Para o caso particular do cálculo do símbolo de Weyl para a matriz densidade, encontramos a função de Wigner. Tal função tem um papel fundamental no formalismo quântico do espaço de fase, pois a mesma representa o estado do sistema.

Discutimos também como é possível obter a FW por meio da noção intuitiva dentro do contexto da dinâmica de uma partícula em uma dimensão, onde os parâmetros de distância ( $\xi$ ) e comprimento ( $x$ ) apresentam um papel crucial na transformada de Fourier e criam conexão com a noção de para a obtenção da FW. Finalizamos a introdução discutindo acerca do cálculo do valor esperado de operadores em termos da função de Wigner.

Com essa métrica, realizamos uma releitura da construção intuitiva da FW via dinâmica unidimensional. Anteriormente, para o caso euclidiano, vimos que a noção intuitiva nos levou a uma base de representação de posição transladada por um fator de  $\xi/2$ . Mostrando que a definição da FW encontra-se intimamente conectada com a noção de translações finitas, sendo o operador de momento finito responsável por tais translações.

Com a adição da métrica na noção intuitiva, fomos capazes de encontrar uma nova distância e um novo comprimento. Esses novos parâmetros nos proporcionaram determinar uma nova representação de posição transladada que depende do parâmetro  $\gamma$ . Com essa nova representação, fomos capazes de propor uma FW modificada. Além disso, mostramos que essa

nova representação de posição transladada consiste na atuação do PDTTO finito em um ket de posição, visto que no contexto PDTTO o operador de momento depende da métrica do espaço.

Em seguida, definimos uma mudança de variável  $\eta$ , construída em termos da métrica. Tal mudança pôde ser analisada como uma transformação de ponto,  $\eta : x \rightarrow \eta(x)$ , nos permitindo construir um espaço de fase modificado, cuja os pontos são da forma  $(\eta(x), p)$ . Assim, foi possível mostrar que uma FW construída nesse espaço modificado irá preservar a forma matemática da expressão do caso euclidiano. Porém, agora escrita na nova variável de posição  $\eta$ .

Ademais, determinamos a forma coordenada da quantização de Weyl-Wigner escrita em termos da nova variável. Com essa nova quantização fomos capazes de obter a expressão para o momento quantizado em termos de  $\eta$ , que, como foi mostrado por Costa Filho *et al.* (2013), resgata a forma euclidiana já conhecida. Mostramos também que ao quantizar  $\eta$  encontramos uma função  $\eta(\hat{x})$  do operador de posição  $\hat{x}$ .

Finalizamos este trabalho aplicando a teoria aqui proposta para uma partícula presa em um poço de potencial e para um sistema do tipo oscilador harmônico quântico. Para a partícula no poço, realizamos um estudo acerca do valor esperado do momento e posição, e mostramos que tais resultados estão de acordo tanto com o esperado para a MQ usual, como para o caso em que  $\gamma \rightarrow 0$ . Já para o sistema do tipo oscilador harmônico quântico, plotamos o gráfico da FW modificada e estudamos a influência do fator  $\gamma$  na forma do gráfico. Foi possível constatar que a métrica do espaço influenciou diretamente na distribuição de probabilidade no espaço de fase, devido a alterações na dinâmica do sistema decorrente da modificação na métrica do espaço.

Esperamos que o presente trabalho possa vir a ser útil para um melhor entendimento da mecânica quântica no espaço de fase, bem como a introdução de uma métrica euclidiana dependente da posição pode influenciar na análise do sistema. Ademais, como perspectivas futuras, espera-se aplicar os resultados aqui propostos em entropias definidas no espaço de fase, como é o caso da entropia de Shannon construída em termos da da função de Wigner (Salazar *et al.*, 2023) com intuito de analisar como a métrica poderia influenciar no estudo do cálculo da entropia de sistemas quânticos descritos com a FW. Visto que a FW é uma ferramenta extremamente importante para o estudo da informação quântica e computação quântica, espera-se que com o auxílio de entropias definidas em termos da FW, seja possível realizar estudos de quantificadores de informação. Dentre alguns desses quantificadores, podemos citar: informação mútua, discordia quântica, realismo de medidas e não-localidade.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, V.; CUNHA, S. M.; COSTA, D. R.; FILHO, R. N. C. Dirac fermions in graphene using the position-dependent translation operator formalism. **Physical Review B**, [S.l.], v. 102, n. 23, dez. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.235404>. Acesso em: 1 maio 2023.
- APOSTOL, T. M. **Calculus, Volume 1**. Hoboken, NJ: Wiley-VCH, 1991.
- BARBOSA, I. R. **Formalismo do operador translação dependente da posição: problemas unidimensionais**. 2021. 54f. Tese (Mestrado em física) — Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.
- BARCELOS NETO, J. **Matemática para Físicos com Aplicações: tratamentos classico e quântico**. v. 2. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- BELLONI, M.; DONCHESKI, M. A.; ROBINETT, R. W. Wigner quasi-probability distribution for the infinite square well: energy eigenstates and time-dependent wave packets. **American Journal of Physics**, [S.l.], v. 72, n. 9, p. 1183–1192, set. 2004. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/72/9/1183/532633/Wigner-quasi-probability-distribution-for-the?redirectedFrom=fulltext>. Acesso em: 10 janeiro 2023.
- BRAGA, J. P. M. **Mecânica quântica não-aditiva**. 2015. 62f. Tese (Doutorado em física) — Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.
- BROGAARD, J. Wigner function formalism in quantum mechanics. **Niels Bohr Institute University of Copenhagen**, p. 1–22, jun. 2015. Disponível em: [https://nbi.ku.dk/english/theses/bachelor-theses/jon-brogaard/Jon\\_Brogaard\\_Bachelorthesis\\_2015.pdf](https://nbi.ku.dk/english/theses/bachelor-theses/jon-brogaard/Jon_Brogaard_Bachelorthesis_2015.pdf). Acesso em: 10 abril 2023.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics: basic concepts, tools, and applications**. v.1. Berlim: Wiley-VCH, 2019.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics: fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement**. v.3. Berlim: Wiley-VCH, 2019.
- COSTA FILHO, R. N.; ALENCAR, G.; SKAGERSTAM, B.-S.; ANDRADE, J. S. Morse potential derived from first principles. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 101, n. 1, p. 10009, 2013.
- COSTA FILHO, R. N.; ALMEIDA, M. P.; FARIAS, G. A.; ANDRADE, J. S. Displacement operator for quantum systems with position-dependent mass. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 84, p. 050102, Nov 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.050102>. Acesso em: 16 outubro 2023.
- COSTA FILHO, R. N.; BRAGA, J. P.; LIRA, J. H.; ANDRADE, J. S. Extended uncertainty from first principles. **Physics Letters B**, v. 755, p. 367–370, 2016. ISSN 0370-2693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316001313>. Acesso em: 16 setembro 2023.
- CURTRIGHT, T. L.; FAIRLIE, D. B.; ZACHOS, C. K. **A concise treatise on quantum mechanics in phase space**. Singapore: World Scientific, 2013.

- DEREZINSKI, J. **Introduction to quantization**. Faculty of Physics, University of Warsaw, 2021.
- DONG, S.-H.; SUN, G.-H.; YU, J. The wigner function for a quantum system with an infinitely deep square-well potential. **Physica Scripta**, Beijing, v. 70, n. 4, p. 207, 2004.
- FERREIRA, F. A. P. **Sobre a introdução de um operador de translação generalizado na mecânica quântica não-relativística**. 2019. 67f. Tese (Doutorado em física) — Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.
- GALETTI, D.; MARCHIOLLI, M. A.; LIMA, C. L. von neumann e descrição da mecânica quântica no espaço de fase. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 41, n. 3, 2019.
- GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. **Introduction to Quantum Mechanics**. 3. ed. United Kingdom: Cambridge University, 2018.
- HALL, B. C. **Quantum theory for mathematicians**. New York: Springer, 2013.
- KEPPELER, S.; FYSIK, M. **Introduction to Wigner-Weyl calculus**. 2004. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117608568>. Acesso em: 2 junho 2023.
- MACHADO, K. D. **Equações diferenciais aplicadas à física**. 3. ed. Ponta Grossa: UEPG, 2004.
- REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. Long Grove, Illinois: Waveland Press, 1998.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. United Kingdom: Cambridge University, 2021.
- SALAZAR, S. J. C.; LAGUNA, H. G.; SAGAR, R. P. Phase-space quantum distributions and information theory. **Physical Review A**, [S.l.], v. 107, n. 4, Apr 2023. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.107.042417>. Acesso em: 2 agosto 2023.
- SCHLEICH, W. P. **Quantum optics in phase space**. Berlim: Wiley-VCH, 2011.
- WEINBUB, J.; FERRY, D. Recent advances in wigner function approaches. **Applied Physics Reviews**, [S.l.], v. 5, n. 4, 2018.
- WEYL, H. Quantenmechanik und gruppentheorie. **Zeitschrift für Physik**, [S.l.], v. 46, n. 1-2, p. 1–46, 1927.
- WEZEMAN, R. **Weyl quantization and Wigner distributions on phase space**, 2014. 53f. Tese (Doutorado) — Faculdade Wiskunde em Natuurwetenschappen, 2014.
- WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. **Physical Review Journal Archive**, [S.l.], v. 40, n. 5, Jun 1932. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.40.749>. Acesso em: 20 setembro 2023.
- ZETTLI, N. **Quantum Mechanics: Concepts and Applications**. Hoboken, NJ: Wiley, 2009.