



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GUSTAVO PENAFORTE BRITO

**CONTRIBUIÇÕES PARA O PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO
LINEARES USANDO TEORIA DA DISSIPATIVIDADE**

FORTALEZA

2024

GUSTAVO PENAFORTE BRITO

CONTRIBUIÇÕES PARA O PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO
LINEARES USANDO TEORIA DA DISSIPATIVIDADE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B875c Brito, Gustavo Penaforte.

Contribuições para o Problema de Estabilização de Sistemas Não Lineares Usando Teoria da Dissipatividade / Gustavo Penaforte Brito. – 2024.
95 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira.

1. Controle Não Linear. 2. SOSTOOLS. 3. Teoria da Dissipatividade. 4. Controle de Sistemas Não Afins na Entrada. 5. Função de Lyapunov Racional. I. Título.

CDD 621.3

GUSTAVO PENAFORTE BRITO

CONTRIBUIÇÕES PARA O PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO
LINEARES USANDO TEORIA DA DISSIPATIVIDADE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 22/02/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Clauson Sales do Nascimento Rios
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Ceará (IFCE)

A Deus;

Aos meus pais e toda minha família;

Ao meu professor e orientador Diego Madeira;

A todos que contribuíram com meu desenvolvimento e me fizeram chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me permitir chegar até aqui com saúde, força e sabedoria para superar todas as dificuldades desta jornada. Agradeço também por mais esta vitória em minha vida e por Seu constante amor, bênçãos e proteção.

Aos meus pais, pelo apoio, amor, paciência e força que sempre me deram ao longo de toda minha vida. Agradeço também por acreditarem no meu potencial, pela torcida e por todo o esforço investido na minha educação. Devo a minha vida a vocês.

À toda a minha família, cujos incentivos me ajudaram a chegar à conclusão desta trajetória. Obrigado por acreditarem que eu seria capaz.

Ao meu orientador, Dr. Diego Madeira, pela confiança em mim e por estar presente em todos os momentos de descobertas, dúvidas, erros e acertos. Seus conhecimentos foram fundamentais para o resultado final deste trabalho.

Aos meus amigos de curso, Carol, Daniel, Davi, Gabriel, João Luiz e Jéssica. Agradeço pela oportunidade de convivência e cooperação mútua ao longo de todos esses anos. Suas amizades foram essenciais para tornar esta jornada mais enriquecedora.

Aos meus amigos Davi, Júlia, Leonardo, Lucas, Millena e Thales, pelo apoio, incentivo e suporte durante esta caminhada. Vocês foram pilares para mim e cada gesto fez uma diferença significativa.

À banca examinadora, obrigado pelo apoio a este projeto e pela disponibilidade de avaliá-lo e contribuir para o seu desenvolvimento.

Por fim, à Funcap e à CAPES pelo apoio financeiro a este trabalho.

“Não ambicione ser considerado uma pessoa importante. Deseje apenas ser admirado como uma pessoa benevolente”

(Meishu-Sama)

RESUMO

Essa dissertação trata o tema de estabilização de sistemas não lineares através de métodos iterativos para projetar um controlador de Realimentação Estática de Saída (SOF) utilizando conceitos de teoria de Lyapunov e dissipatividade. Embora os métodos estejam disponíveis na literatura, ainda não houve um estudo comparativo, explorando as potencialidades de cada método ou os benefícios em suas respectivas utilizações. Por meio desses estudos, é possível obter uma orientação para desenvolver versões mais otimizadas. O objetivo deste trabalho é contribuir para o problema de estabilização de sistemas não lineares utilizando a teoria da dissipatividade, analisando e comparando métodos da literatura e apresentando novas condições, permitindo a ampliação dos métodos para mais a classe de sistemas não lineares não afins na entrada e a estabilização de sistemas não lineares utilizando funções de Lyapunov racionais. Em seguida, os métodos são submetidos a exemplos numéricos de forma a validar o desempenho de cada abordagem. A análise é realizada através do tempo de convergência, número de iterações e número de variáveis calculadas. A comparação deixa claro que um método se sobressai dentre os outros e que foi possível utilizar as novas condições propostas para estabilizar essa classe de sistemas não lineares. É possível concluir também que as estimativas de domínios de atração através de funções de Lyapunov racionais são bem melhores quando comparadas ao caso polinomial.

Palavras-chave: controle não linear; sotools; sistemas polinomiais; dissipatividade QSR; realimentação estática de saída; controle de sistemas não afins na entrada; função de Lyapunov racional.

ABSTRACT

This dissertation deals with the topic of stabilization of nonlinear systems through iterative methods to design a SOF controller using concepts of Lyapunov theory and dissipativity. Although the methods are available in the literature, there has not yet been a comparative study, exploring the potential of each method or the benefits of their respective uses. Through these studies, it is possible to obtain guidance to develop more optimized versions. The objective of this work is to contribute to the problem of stabilization of nonlinear systems using dissipativity theory, analyzing and comparing methods from the literature and presenting new conditions, allowing the expansion of methods to cover more classes of nonlinear non-affine systems at the input and the stabilization of nonlinear systems using rational Lyapunov functions. Then, the methods are subjected to numerical examples to validate the performance of each approach. The analysis is performed using convergence time, number of iterations and number of calculated variables. The comparison makes it clear that one method stands out among the others and that it was possible to use the new conditions proposed to stabilize this class of nonlinear systems. It is also possible to conclude that the estimation of the attraction domain using rational Lyapunov functions is much better when compared to the polynomial case.

Keywords: nonlinear Control; sotools; polynomials systems; QSR-dissipativity; static output feedback; control of non-affine systems in input; rational Lyapunov function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma para a Solução de um Problema SOS	24
Figura 2 – Representação Gráfica de um Sistema Estável	26
Figura 3 – Representação Gráfica de um Sistema Assintoticamente Estável	26
Figura 4 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Aberta	66
Figura 5 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B	68
Figura 6 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C	69
Figura 7 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Aberta	70
Figura 8 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B	70
Figura 9 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C	71
Figura 10 – Trajetórias do Sistema Não Afim na Entrada em Malha Aberta	75
Figura 11 – Trajetórias do Sistema Não Afim na Entrada em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B	77
Figura 12 – Trajetórias do Sistema Não Afim na Entrada em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C	78
Figura 13 – Comparação dos Domínios de Atração Obtidos Através dos Métodos B e C	79
Figura 14 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo	80
Figura 15 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo	81
Figura 16 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo	82
Figura 17 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo	82

Figura 18 – Trajetórias do Sistema Polinomial 2 em Malha Aberta	83
Figura 19 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 2 em Malha Fechada - Método C	85
Figura 20 – Trajetórias do Sistema Polinomial 3 em Malha Aberta	86
Figura 21 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 3 em Malha Fechada - Método B	87
Figura 22 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 3 em Malha Fechada - Método C	88
Figura 23 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 3 em Malha Fechada - Método B e C	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativos do Métodos A, B e C - Oscilador de Van der Pol	68
Tabela 2 – Comparativos do Métodos A, B e C - Exemplo Polinomial	72
Tabela 3 – Comparativos do Métodos A, B e C - LTI	74
Tabela 4 – Comparativos do Métodos A, B e C - Exemplo Não Afim	79

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Global	36
Algoritmo 2 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local	37
Algoritmo 3 – Algoritmo de Maximização de $\varepsilon(V, \rho)$	38
Algoritmo 4 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Sistema LTI	39
Algoritmo 5 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Global - Minimização de λ adaptada . .	40
Algoritmo 6 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local - Minimização de λ adaptada . .	41
Algoritmo 7 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Sistema LTI - Minimização de λ adaptada	42
Algoritmo 8 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Estabilização Global	44
Algoritmo 9 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Estabilização Local	45
Algoritmo 10 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Sistema LTI	46
Algoritmo 11 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local	52
Algoritmo 12 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local de Sistema Não Afim na Entrada .	53
Algoritmo 13 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Estabilização Local de um Sistema Não Afim na Entrada	54
Algoritmo 14 – Algoritmo para Estimação de Domínio de Atração de Sistemas Não Lineares	59
Algoritmo 15 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador Utilizando a Função de Lyapunov Racional - Método A	62

Algoritmo 16 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador Utilizando a Função de Lyapunov Racional - Método B	63
Algoritmo 17 – Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador Utilizando a Função de Lyapunov Racional - Método C	64

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EID	Dissipatividade Independente de Equilíbrio
EISD	Dissipatividade Estrita Independente de Equilíbrio
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares
LTI	Linear e Invariante no Tempo
PE	Ponto de Equilíbrio
SDP	Programação Semidefinida
SOF	Realimentação Estática de Saída
SOS	Soma de Quadrados

NOTAÇÃO MATEMÁTICA

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}_{>0}$	Conjunto dos números reais, tal que $\beta \in \mathbb{R}_{>0}, \beta > 0$.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto dos números reais, tal que $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \beta \geq 0$.
\mathbb{R}^n	Conjunto de vetores coluna reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$.
$\mathbb{S}^{n \times n}$	Conjunto de matrizes simétricas reais de dimensão $n \times n$.
A^T	O transposto de uma matriz A .
A^{-1}	O inverso de uma matriz A .
$A > 0$	Matriz positiva definida.
$A \geq 0$	Matriz positiva semidefinida.
$He\{A\}$	Operador $A + A^T$.
I	Matriz identidade de uma ordem qualquer.
$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$	define uma função f com o domínio \mathcal{X} e contradomínio \mathcal{Y}
$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	Produto cartesiano entre \mathcal{X} e \mathcal{Y} .
\mathcal{C}^1	O conjunto de funções em que as derivadas parciais existem e são contínuas.
\mathcal{X}°	O interior do conjunto \mathcal{X} .
$\partial \mathcal{X}$	O limite do conjunto \mathcal{X} .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	22
2.1	Sistemas Polinomiais	22
2.2	Decomposição SOS e SOSTOOLS	23
2.3	Teoria da Estabilidade de Lyapunov	24
2.4	Estimativa do Domínio de Atração	28
2.5	Desigualdades Matriciais Lineares	28
2.6	Teoria da Dissipatividade	29
3	MÉTODO ITERATIVO	34
3.1	Método Iterativo 1	34
3.1.1	<i>Caso Polinomial</i>	34
3.1.2	<i>Caso LTI</i>	38
3.2	Método Iterativo 2	39
3.3	Método Iterativo 3	41
3.3.1	<i>Caso Polinomial</i>	41
3.3.2	<i>Caso LTI</i>	45
4	CONTROLE DE SISTEMAS NÃO AFINS NA ENTRADA	48
4.1	Estabilização de Sistemas Não Afins através de SOF	48
4.2	Aplicação dos Métodos Iterativos em Sistemas Não Afins na Entrada	50
5	CONTROLE E ESTIMAÇÃO DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV RACIONAIS	55
5.1	Análise do Domínio de Atração de Sistemas Não Lineares em Malha Aberta	55
5.2	Controle de Sistemas Não Lineares Utilizando Funções de Lyapunov Racionais	58
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS - ESTUDO COMPARATIVO	65
6.1	Comparativo dos Métodos para Estabilização Global de Sistemas LTI e Não Lineares	65
6.1.1	<i>Sistema Polinomial - Oscilador de Van der Pol</i>	65
6.1.2	<i>Exemplo Polinomial 1</i>	69

6.1.3	<i>Exemplo LTI</i>	73
6.2	Estabilização Local de um Sistema Não Afim na Entrada	74
6.3	Exemplos Numéricos - EID	79
6.3.1	<i>Oscilador de Van der Pol</i>	80
6.3.2	<i>Exemplo Polinomial 1</i>	81
6.4	Estabilização de Sistemas Não Lineares utilizando Funções de Lyapunov Racionais	82
6.4.1	<i>Exemplo Polinomial 2</i>	83
6.4.2	<i>Exemplo Polinomial 3</i>	85
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	90
	REFERÊNCIAS	92

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de um sistema dinâmico possui três principais componentes, sendo estes: o espaço de estados, que é onde acontece o comportamento dinâmico do sistema; a dinâmica, em que essa é responsável pelo comportamento do sistema em relação ao tempo; e uma condição inicial, que indica onde o sistema inicia em um determinado instante de tempo. Os sistemas dinâmicos podem ser classificados de diversas formas e uma dessas classificações é em relação à linearidade, ou seja, um sistema pode ser linear ou não linear. Existem diversas causas relacionadas à instabilidade do sistema, em que estas podem estar associadas a incertezas de modelos, termos não lineares na modelagem matemática, perturbações externas ou até mesmo condições iniciais do sistema (Haddad; Chellaboina, 2008).

A estratégia para alcançar estabilidade em um sistema instável é através da adição de um sinal de controle ao sistema. Esse sinal é calculado por meio de um controlador. A adição desse sinal de controle não só permite atingir a estabilidade de um sistema naturalmente instável, como também permite que o sistema opere em pontos de equilíbrio desejados (ocorre o seguimento de referência). A estabilidade e o seguimento de referência são os principais objetivos quando é realizado o projeto de um controlador (Prajna *et al.*, 2004). Um dos controladores mais utilizados é o controlador por realimentação (ou controlador *feedback*). Uma realimentação pode ser do tipo de estados ou de saída do sistema.

Em uma implementação prática, é preciso que essas variáveis sejam medidas por sensores ou estimadas através de observadores. Entretanto, com o elevado custo de sensores e da implementação, ou até mesmo uma dificuldade de medir um determinado estado, a realimentação de saída geralmente se torna uma opção bem mais viável de ser implementada (Syrmos *et al.*, 1997). As realimentações de saída podem ser classificadas em: realimentação estática de saída (SOF), que será o foco desse trabalho e é obtida por intermédio do produto de um ganho estático pela saída do sistema; e a realimentação dinâmica de saída, obtida através do produto de um ganho dinâmico pela saída do sistema. Ainda hoje considera-se um desafio obter uma solução direta para estabilização de sistemas através de SOF, pois ele resulta em condições não convexas (Geromel *et al.*, 1996). Contudo, é possível obter condições convexas para o problema de SOF utilizando a teoria da dissipatividade (Haddad; Chellaboina, 2008).

A utilização de condições providas de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), juntamente com a utilização da Teoria de Estabilidade de Lyapunov pode ser uma alternativa eficiente para solucionar o problema de SOF (Vesely, 2001) (Peaucelle; Arzelier, 2005).

Outra ferramenta útil que pode ser usada em conjunto com a teoria de estabilidade de Lyapunov é a Teoria da Dissipatividade, apresentada em (Willems, 1972). Essa abordagem é bastante aplicada em sistemas polinomiais, auxiliando a descrever propriedades de sistemas em relação à entrada-saída, tais como estabilidade, estabilidade assintótica, passividade, dentre outras. Tanto a teoria da dissipatividade quanto a de Lyapunov são utilizadas em análises de sistemas em relação ao ponto de equilíbrio na origem, ou seja, a relação entrada-estado-saída (u, x, y) é $(0, 0, 0)$. O trabalho (Madeira, 2022) elaborou condições que resultam em um ganho de SOF que estabiliza o sistema em torno da origem através do conceito de dissipatividade. O trabalho (Simpson-Porco, 2018) apresentou condições que expandiram a análise de dissipatividade para pontos de equilíbrio não nulos utilizando Dissipatividade Independente de Equilíbrio (EID) e em seguida, o trabalho (Madeira; ALVES LIMA, 2022) estendeu essa teoria de forma a estabilizar pontos de equilíbrio não nulos a partir do projeto de um controlador SOF através dessa estratégia.

O uso de Programação Semidefinida (SDP) (Parrilo, 2000) se tornou uma ferramenta extremamente útil para a solução de problemas matemáticos. Duas ferramentas baseadas em SDP que solucionam as condições de dissipatividade e de Lyapunov são o YALMIP (Lofberg, 2004) e o SOSTOOLS, este último baseado em decomposição por Soma de Quadrados (SOS). A utilização do SOSTOOLS se tornou bem conveniente pois é possível atingir resultados bem exatos quando essas restrições SOS são impostas aos problemas em questão (Prajna *et al.*, 2002). A partir dessas ferramentas, tornou-se possível resolver diversos problemas relacionados à área de controle (Lofberg, 2004) (Ebenbauer; Allgöwer, 2006).

Apesar das ferramentas computacionais trazerem uma grande facilidade de resolver esses problemas de controle, ainda existem casos que uma solução não é encontrada na primeira iteração. Com isso, foram feitos trabalhos que aplicaram estratégias iterativas, usando parâmetros de otimização, de forma a solucionar problemas de controle utilizando a teoria de Lyapunov e dissipatividade. Os trabalhos (Felipe; Oliveira, 2020) e (Jennawasin; Banjerdpongchai, 2021) apresentaram estratégias iterativas para o projeto de controle, entretanto não foi aplicada à teoria da dissipatividade e os trabalhos se restringiram apenas à estabilização do sistema em torno da origem. Os trabalhos (Viana, 2022) e (Lima *et al.*, 2022) introduziram um método iterativo utilizando a teoria da dissipatividade para projetar um controlador que estabilizava o sistema na origem utilizando LMIs. Em seguida, (Brito *et al.*, 2023) adaptou a forma de otimizar a variável de otimização do método anterior. Além disso, esse trabalho teve como contribuição a estabilização de pontos de equilíbrio não nulos utilizando a teoria da dissipatividade a partir

do método iterativo, utilizando pela primeira vez decomposição em soma de quadrados e SOSTOOLS. O trabalho (Madeira; Machado, 2023) também utilizou decomposição SOS aplicada na teoria da dissipatividade em uma abordagem iterativa, equilibrando sistemas em torno da origem de forma global e local.

Apesar dos trabalhos disponíveis hoje, ainda não existe um estudo comparativo relacionado ao desempenho destas abordagens. Essa análise é crucial para identificar potencialidades de cada método, possibilitando a criação de um direcionamento para desenvolver novas abordagens de otimização. Além disto, todos estes trabalhos focaram em resolver apenas sistemas polinomiais afins na entrada, deixando de lado uma outra classe de sistema conhecida como sistemas não afins na entrada.

Um sistema afim pode ser representado em sua forma geral por $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Já um sistema não afim indica que o termo u , referente a entrada do sistema, possui uma não linearidade. Assim, essa classe de sistema pode ser representada da forma $\dot{x} = f(x) + l(x, u)$, indicando ser uma classe de sistemas bem mais geral, quando comparado aos sistemas afins (Binazadeh; Rahgoshay, 2017) (Zhao *et al.*, 2020). Alguns exemplos de sistemas não afins encontrados na prática são o modelo de dinâmica de aeronaves (Boskovic *et al.*, 2004), veículos subaquáticos (Geranmehr; Nekoo, 2015) e sistema de levitação de bola magnética (Binazadeh; Rahgoshay, 2017).

Em relação aos trabalhos que falam de estabilização de sistemas não afins, existem trabalhos na literatura que apresentam métodos construtivos para a estabilização dessa classe de sistemas, tais como os trabalhos (Lin, 1995a), (Shiriaev; Fradkov, 2001) e (Moulay; Perruquetti, 2005). Existe também na literatura abordagens que retratam de controle adaptativo, como (Molavi *et al.*, 2017). Esse trabalho utilizou também um conceito chamado passividade, que é um caso especial da teoria de dissipatividade. Existem também poucas abordagens que utilizaram métodos iterativos ou decomposição SOS para resolver esse tipo de problema. (Rong-Hu; Zhong-Sheng, 2007) utilizou uma estratégia de controle baseada em aprendizagem iterativa e (Ribeiro *et al.*, 2020) introduziu condições SOS para controlar o sistema e aumentar o seu domínio de atração.

Levando em conta o desempenho dos métodos iterativos utilizando teoria da dissipatividade, é válido ressaltar que a extensão das condições de dissipatividade para o caso de sistemas não afins na entrada, assim como a extensão dos métodos para as novas condições propostas poderiam ser formas eficientes para resolver o problema de estabilização relacionados

a essa classe de sistemas.

Por fim, uma última problemática é que todos os estudos envolvendo teoria de controle utilizando dissipatividade se restringem apenas a utilização de funções de Lyapunov polinomiais. A principal vantagem de utilizar esse tipo de função é a possibilidade de estimar domínios de atração mais precisos, quando comparados aos polinomiais. Isso acontece pelo fato de que as funções racionais podem aproximar as "funções máximas de Lyapunov" (Vannelli; Vidyasagar, 1985).

Em 2007, o trabalho (Hachicho, 2007) desenvolveu o problema de análise de funções racionais utilizando incertezas paramétricas. Existem artigos mais atuais que abordaram esse problema, como o (Chesi, 2013) que aplicou decomposição SOS para estimar o domínio de atração usando funções racionais e projetar controladores. Esse foi o único trabalho que abordou o projeto de controlador, entretanto, o sistema abordado já era localmente estável e os domínios obtidos não eram contrativos e invariantes. Em seguida, (Valmorbida; Anderson, 2017) introduziu novas condições para o problema de análise, sendo assim, possível estimar domínios de atração contrativos e invariantes. Por fim, (Valmorbida; Anderson, 2017) expandiu os teoremas para abordar o problema de incerteza, mas não ilustrou nenhum exemplo prático. Por conseguinte, os trabalhos (Iannelli *et al.*, 2018) e (Iannelli *et al.*, 2018) trouxeram contribuições a partir de (Valmorbida; Anderson, 2017) para o problema de estimação do domínio de atração com incertezas. Como existe apenas um trabalho que tratou o projeto de controle utilizando essa estratégia, é válido ressaltar a importância de desenvolver novas abordagens, com o intuito de estimar domínios de atrações mais precisos e que sejam contrativos e invariantes.

Tendo em vista as problematizações levantadas, o objetivo geral deste trabalho é apresentar novas contribuições relacionadas ao problema de estabilização de sistemas não lineares utilizando a teoria da dissipatividade em uma abordagem iterativa. Esse objetivo será atingido através da realização de dois itens:

- Realizar o estudo comparativo entre os métodos apresentados em (Lima *et al.*, 2022), (Brito *et al.*, 2023) e (Madeira; Machado, 2023), analisando e comparando o desempenho de cada abordagem;
- Apresentar uma extensão das condições já conhecidas de dissipatividade aos métodos iterativos analisados de forma a solucionar o problema de estabilização local de sistemas não lineares não afins na entrada. Será estimado o domínio de atração do sistema, assim como o estudo comparativo entre os métodos nesta etapa.

- Introduzir uma expansão da teoria apresentada em (Valmorbida; Anderson, 2017), utilizando as condições expostas junto com a teoria da dissipatividade para projetar o controlador e estimar o domínio de atração através de funções de Lyapunov Racionais.

Esse trabalho é dividido em 7 capítulos, tais quais:

- **Capítulo 2:** Neste capítulo é apresentado o referencial bibliográfico para o trabalho. São introduzidos os conceitos de sistemas polinomiais, decomposição SOS, teoria da estabilidade de Lyapunov e teoria da dissipatividade;
- **Capítulo 3:** Este capítulo apresenta os três métodos iterativos, apresentados em (Lima *et al.*, 2022), (Brito *et al.*, 2023), (Madeira; Machado, 2023), que serão comparados, assim como suas variações, de forma a estabilizar o sistema localmente, globalmente e estabilização de sistemas LTI;
- **Capítulo 4:** Este capítulo apresenta a extensão do problema de estabilização de sistemas não lineares através da teoria da dissipatividade para o caso de sistemas não afins na entrada.
- **Capítulo 5:** Este capítulo apresenta a principal contribuição deste trabalho: a extensão das condições apresentadas (Valmorbida; Anderson, 2017) utilizando a teoria da dissipatividade para o projeto de controladores e estimativas de domínio de atração.
- **Capítulo 6:** Este capítulo contém a execução dos métodos propostos em exemplos numéricos. Neste capítulo, os três métodos são submetidos em quatro exemplos, de forma a comparar o desempenho entre eles. Em seguida, existem dois exemplos de controle de sistemas utilizando funções racionais, comparando os resultados obtidos com as funções polinomiais.
- **Capítulo 7:** Neste capítulo serão realizadas as conclusões relacionadas aos resultados desse trabalho, assim como as perspectivas de trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo introduzir ao leitor conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do trabalho. Primeiramente, é apresentada noções de sistemas polinomiais. Em seguida é apresentada a decomposição SOS e introduzida a teoria de Lyapunov analisando a estabilidade de sistemas. É definido também o conceito de estimativa de domínio de atração e apresentadas as LMIs. Por fim, é apresentada a teoria da dissipatividade.

2.1 Sistemas Polinomiais

Um sistema dinâmico não linear consiste em um conjunto de estados que representam as variáveis do sistema e que é conhecido o valor desses estados para um determinado instante de tempo $t = t_0$. Um sistema dinâmico pode ser modelado na forma matemática através de equações diferenciais. Uma forma bem geral de representar um sistema dinâmico é como descrito o exemplo abaixo: (Haddad; Chellaboina, 2008)

$$\dot{x} = F(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.1)$$

$$y = h(t, x, u), \quad (2.2)$$

em que $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, representando a dinâmica do sistema, \mathcal{X} é um subconjunto aberto, tal que $0 \in \mathcal{X}$, o sinal de controle, $u(t)$, responsável por alterar a dinâmica do sistema para um comportamento desejado, é definido por $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $0 \in \mathcal{U}$ e por fim, t é definido para $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Além disso, F é função polinomial contínua, tal que $F : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U}$. A variável y representa a saída do sistema, tal que $y(t, u, x) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ e h é uma função polinomial definida por $h : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

O sistema (2.1)-(2.2) é chamado de *variante no tempo*, pois, é possível notar uma dependência explícita do tempo em relação à função (2.1). Entretanto, existe uma classificação mais simples, que é denominada de *invariante no tempo*, em que a partir dessa, é possível modelar grande parte dos sistemas existentes (Khalil, 2002). As Equações abaixo introduzem a representação de um sistema invariante no tempo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.3)$$

$$y = h(x). \quad (2.4)$$

E de forma similar ao caso anterior, $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas, definidas por $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(0) = 0, g: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, a variável x representa o vetor de estados do sistema, tal que $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, onde \mathcal{X} é um conjunto aberto em que $0 \in \mathcal{X}$ e $x(0) = x_0$. A função que representa o sinal de controle u é definida por $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, 0 \in \mathcal{U}$. Além disso, a função polinomial h é descrita da forma $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p, h(0) = 0$ e $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$.

Após definir a descrição matemática de um sistema não linear, é preciso definir também o conceito de Ponto de Equilíbrio.

Um ponto $x = x^*, x^* \in \mathcal{X}$ é chamado de Ponto de Equilíbrio (PE), quando o sistema tem sua condição inicial $x(0) = x^*$ e ele permanece nesse mesmo ponto para todo instante de tempo futuro (Khalil, 2002). O objetivo de controlar os sistemas dinâmicos é alterar comportamentos não desejados, como a instabilidade, e direcionar o sistema a alcançar pontos de equilíbrio estáveis e desejados. Os valores das raízes reais do sistema (2.3) fornece os pontos de equilíbrio do sistema. Para analisar os pontos de equilíbrio em malha aberta, ou seja, sem a lei de controle u , basta apenas calcular as raízes utilizando $u = 0$.

Este trabalho também incluirá a estabilização da classe de sistema Linear e Invariante no Tempo (LTI). Dessa forma, é possível representar um sistema LTI da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.5)$$

$$y = Cx + Du, \quad (2.6)$$

onde A, B, C e D são matrizes constantes, tal que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle e $y \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema (Chen, 1984).

2.2 Decomposição SOS e SOSTOOLS

Seja o polinômio multivariável $p(x) \triangleq p(x_1, \dots, x_n), p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $p(x)$ possui uma decomposição em soma de quadrados (SOS) se existir um conjunto de polinômios $p_1(x), \dots, p_m(x)$ tal que

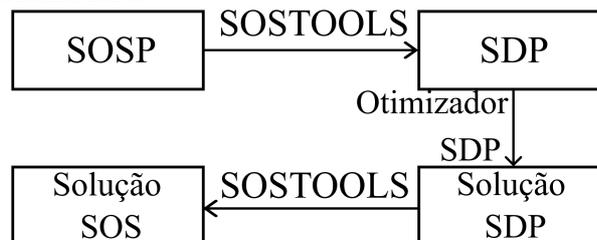
$$p(x) = \sum_{i=1}^m p_i^2(x). \quad (2.7)$$

Se a Equação (2.7) for atendida, $p(x)$ é chamado de SOS ou $p(x) \in \Sigma[x]$. É importante ressaltar que (2.7) é uma condição suficiente para garantir que $p(x)$ seja (semi) definido positivo,

ou seja $p(x) \geq 0, \forall x \in R^n$ (Prajna *et al.*, 2004). Essa condição de uma função $p(x)$ ser SOS é bem mais restritiva do que tratar a não negatividade de $p(x)$. Entretanto, através de ferramentas computacionais atuais, tornou-se fácil tratar essa decomposição de forma computacional, sendo possível obter uma grande exatidão nos resultados (Prajna *et al.*, 2002).

O SOSTOOLS foi lançado em 2002 e logo pôde contribuir com diversas aplicações relacionadas à teoria de controle. (Prajna *et al.*, 2002). Essa ferramenta é uma *Toolbox* para o MATLAB que permite solucionar problemas relacionados à decomposição SOS inserindo restrições de positividade polinomial e sendo possível solucionar essas restrições por meio de programação semidefinida (SDP), através de otimizadores como SeDuMi (Sturm, 1999) ou Mosek (ApS, 2019). Após a definição de todas as restrições, é criado o "*sum of squares program*" utilizando as funções da Toolbox SOSTOOLS, e em seguida, essa Toolbox é responsável por fazer a conversão do programa em um problema SDP. Ao fim da conversão, é obtida uma matriz de variáveis SDPs a ser resolvida através otimização SDP. Então, é utilizado um otimizador SDP com o objetivo de encontrar uma solução para o problema SDP, resultando na solução SDP. Após obter esta solução, o SOSTOOLS é responsável por fazer a conversão de volta ao problema SOS, resultando na solução SOS. A Figura 1 ilustra o fluxograma do processo descrito para solucionar um problema SOS.

Figura 1 – Fluxograma para a Solução de um Problema SOS



Fonte: Elaborado pelo autor e adaptado de (Prajna *et al.*, 2002).

2.3 Teoria da Estabilidade de Lyapunov

Nesta seção, será introduzida a Teoria de Lyapunov, utilizada para analisar a estabilidade de pontos de equilíbrio de um sistema qualquer. Primeiramente, é introduzido o conceito de estabilidade.

Seja o sistema invariante no tempo em malha aberta

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.8)$$

Como mencionado anteriormente, um ponto de equilíbrio do sistema (2.8) é definido por $x^* \in \mathcal{X}$, $f(x^*) = 0$. Porém, como é possível deslocar qualquer ponto do eixo para a origem sem perda de generalidade, então, adota-se como o PE desejado $x^* = 0$ de forma que $f(0) = 0$. Assim, o estudo da estabilidade se restringe apenas para o ponto $x^* = 0$ (Khalil, 2002).

Definição 2.3.1 *O Ponto de Equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (2.8) é*

– *estável no sentido de Lyapunov se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0; \quad (2.9)$$

– *instável, se ele não for estável;*

– *assintoticamente estável se e somente se ele é estável no sentido de Lyapunov e δ pode ser escolhido de tal forma que:*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.10)$$

É importante também definir o que é um domínio de atração. O domínio de atração é formado pelo conjunto $\mathcal{S} = \{x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x(0)\| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\} \subset \mathcal{X}$. Em outras palavras, é o conjunto de todos os valores iniciais $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$, $\|x\| < \delta$ tais que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Segundo a Definição 2.3.1 o sistema é estável para alguma determinada condição inicial $x(0)$ dentro de uma região $\delta(\varepsilon) > 0$ e a trajetória dos estados obedece $\|x(t)\| < \delta, \forall t > 0$. Além disso, o sistema é assintoticamente estável para uma determinada condição inicial $x(0)$ dentro de uma região $\delta(\varepsilon) > 0$ e a sua trajetória converge para a origem quando $t \rightarrow \infty$. As Figuras 2 e 3 indicam, respectivamente, uma ilustração gráfica de estabilidade e estabilidade assintótica.

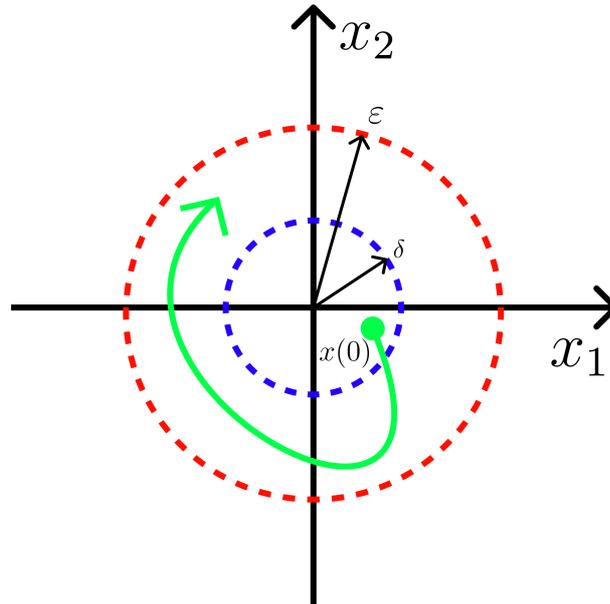
Após definir a estabilidade de um PE, é possível introduzir o Teorema da Estabilidade de Lyapunov, utilizado para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos (Khalil, 2002).

Teorema 2.3.1 *Seja $x=0$ um ponto de equilíbrio do sistema (2.8) e $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ contendo $x = 0$. Seja $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$V(0) = 0, V(x) > 0 \text{ em } \mathcal{X} - \{0\} \quad (2.11)$$

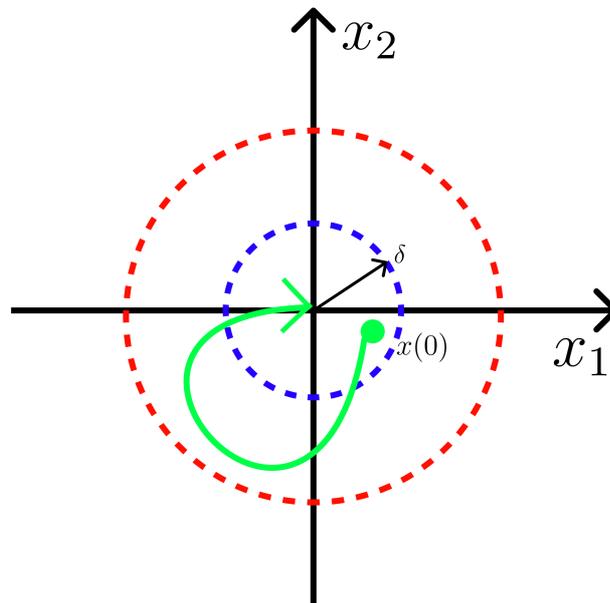
$$\dot{V} \leq 0 \text{ em } \mathcal{X}, \quad (2.12)$$

Figura 2 – Representação Gráfica de um Sistema Estável



Fonte: elaborada pelo autor e adaptado de (Haddad; Chellaboina, 2008).

Figura 3 – Representação Gráfica de um Sistema Assintoticamente Estável



Fonte: elaborada pelo autor e adaptado de (Haddad; Chellaboina, 2008).

então, $x = 0$ é estável. Além do mais, se

$$\dot{V} < 0 \text{ em } \mathcal{X}, \quad (2.13)$$

então $x = 0$ é assintoticamente estável.

Prova: ver Capítulo 4 do (Khalil, 2002).

Entretanto, nem sempre a origem é um PE estável do sistema. Sendo assim, é possível estender o Teorema 2.3.1 de forma a introduzir uma função $u(t) = \phi(x(t))$, onde $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, em que $x(t)$ é o vetor de estados do sistema (2.3). A partir do mapeamento de $\phi(\cdot)$, é possível concluir que a condição abaixo possui uma única solução (Haddad; Chellaboina, 2008) e (Madeira, 2022):

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))\phi(x(t)). \quad (2.14)$$

O Teorema abaixo introduz os resultados da estabilização de um sistema controlado. (Khalil, 2002)

Teorema 2.3.2 *Assuma que a solução $x(t) \equiv 0$ para (2.14) é assintoticamente estável, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável e seja $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{X}$ é contida no domínio de atração de (2.14). Então existe uma função $V : \mathcal{B}_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $V(0) = 0, V(x) > 0, x \in \mathcal{B}_\delta(0), x \neq 0$ e*

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)^T [f(x) + g(x)u(x)] < 0, \quad (2.15)$$

$$x \in \mathcal{B}_\delta(0), x \neq 0$$

Prova: ver Capítulo 4 do (Khalil, 2002).

Neste trabalho, o foco será estabilizar sistemas polinomiais e LTIs através do problema de realimentação de saída estática (SOF). Com isso, a lei de controle que será abordada no resto do trabalho será uma realimentação estática de saída da forma

$$u(x) = Kh(x), \quad (2.16)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

É importante ressaltar que a análise do Teorema 2.3.2 apenas considera a estabilidade do PE em torno da origem. Se for desejado estabilizar o sistema em torno de um outro PE não nulo x^* , é preciso adaptar o sistema (2.3)-(2.4) para

$$f(x^*) + g(x^*)u(x^*) = 0, \quad (2.17)$$

$$y^* = h(x^*), \quad (2.18)$$

onde $x^* \in \xi$. ξ é o conjunto de todos os PEs estabilizáveis do sistema. É possível ver a construção desse conjunto em (Simpson-Porco, 2018). Além disso, é preciso também modificar a condição

(2.15) para a seguinte condição:

$$\dot{V}_{x^*}(x) = \nabla V_{x^*}(x)^T [f(x) + g(x)u(x)] < 0, \quad (2.19)$$

onde

$$V_{x^*}(x) = V(x) - V(x^*) - \nabla V(x^*)^T (x - x^*), \quad (2.20)$$

com $x \neq x^*$, $V_{x^*}(x^*) \neq 0$.

Na Seção 2.6 será mostrado uma forma de calcular a nova função de Lyapunov $V_{x^*}(x)$ através do conceito de função fortemente convexa.

2.4 Estimativa do Domínio de Atração

Como mencionado na Seção anterior, o Domínio de Atração do sistema é definido pelo conjunto $\mathcal{S} = \{x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x(0)\| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\} \subset \mathcal{X}$. Entretanto, é difícil estimar esse conjunto de uma forma direta. Com isso, (Haddad; Chellaboina, 2008) apresentou uma maneira de estimar o domínio de atração do sistema através da função $V(x)$. Então, a estimativa do domínio de atração do sistema (2.3) é equivalente ao conjunto:

$$\varepsilon(V, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq 1\} \subset \mathcal{X}, \quad (2.21)$$

onde $V(x)$ é a função de Lyapunov obtida para o sistema (2.3), e \mathcal{X} é o conjunto utilizado no Teorema 2.3.1. Assim, toda trajetória que inicia em $\varepsilon(V, 1)$ converge assintoticamente para a origem, sem sair do domínio de atração estimado.

2.5 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma ferramenta muito importante para ajudar a resolver os problemas relacionados à teoria de Lyapunov são as Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Sua utilização permite a solução de problemas convexos. Neste trabalho, essa ferramenta possui grande importância para solucionar o problema de estabilidade de sistemas LTIs. Sendo assim, uma LMI pode ser descrita da forma geral como (Boyd *et al.*, 1994):

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i(x) > 0, \quad (2.22)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são fornecidos. A solução de (2.22) permite afirmar que $F(x)$ é positivo definido, ou seja $u^T F(x)u > 0, \forall u \neq 0, u \in \mathbb{R}^n$.

Por definição, (2.22) é uma restrição convexa, ou seja, o conjunto $\mathcal{A} = \{x|F(x)\}$ é convexo. O desenvolvimento de ferramentas matemáticas, como o SeDuMi (Sturm, 1999) e o YALMIP (Lofberg, 2004), assim como a programação semidefinida (SDP) (Parrilo, 2000), facilitaram bastante o uso das LMIs nas aplicações de análise e controle de forma a solucionar equações e restrições complexas.

2.6 Teoria da Dissipatividade

A teoria da dissipatividade é utilizada no estudo de sistemas dinâmicos pois ela pode ajudar a descrever as propriedades do sistema de acordo com relações de entrada-saída do sistema. Assim, verifica-se a importância de aplicar essa teoria juntamente com a teoria de Lyapunov de forma a atingir a estabilidade desejada para os sistemas dinâmicos. Com isso, (Brogliato *et al.*, 2013) introduziu uma definição de dissipatividade, apresentada na sequência.

Definição 2.6.1 *O sistema (2.3) é chamado dissipativo em todas as possíveis trajetórias do sistema, para um valor inicial $x(0)$, para todo $t \geq 0$, se existe uma função energia $V(x) > 0$, em que esta é continuamente diferenciável tal que*

$$\dot{V}(x) \leq r(u, y). \quad (2.23)$$

A Equação (2.23) indica que a energia armazenada pelo sistema, representada pela função $V(x)$ é sempre menor do que a energia fornecida pela função $r(u, y)$ e o restante da energia fornecida é dissipada. Em seguida, (Haddad; Chellaboina, 2008) introduziu uma nova definição, levando em consideração uma função potência $r(u, y)$ quadrática, como é descrita abaixo:

$$r(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u, \quad (2.24)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p$, $R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Em seguida, são apresentadas as definições de QSR-Dissipatividade e QSR-Dissipatividade Estrita.

Definição 2.6.2 *O sistema (2.3)-(2.4) é chamado de QSR-Dissipativo se existe uma função $V(x) \geq 0$, $V(x) \in \mathcal{C}^1$ que satisfaz (Haddad; Chellaboina, 2008):*

$$\dot{V}(x) \leq y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u, \quad (2.25)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p$, $R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Definição 2.6.3 O sistema (2.3)-(2.4) é chamado de *Estritamente QSR-Dissipativo* se ele é QSR-Dissipativo e existe uma função $T(x) > 0$ que satisfaz (Haddad; Chellaboina, 2008):

$$\dot{V}(x) + T(x) \leq y^T Qy + 2y^T Su + u^T Ru, \quad (2.26)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p, R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Analisando (2.4), verifica-se que a função h é dependente da variável x . Assim, é possível adaptar a condição (2.24) de forma a depender das variáveis (x, u) , de tal forma:

$$r(x, u) = h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru. \quad (2.27)$$

Então, adapta-se também (2.25) e (2.26) para

$$\dot{V}(x) \leq h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru \quad (2.28)$$

e

$$\dot{V}(x) + T(x) \leq h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru. \quad (2.29)$$

É possível verificar as condições acima por meio do SOSTOOLS desde que o sistema (2.3)-(2.4) seja polinomial. Assim, o sistema é SOS Estritamente Dissipativo se existem funções $V(x), T(x)$ e $u(x)$ tal que a condição (2.29) pode ser verificada da seguinte forma:

$$-\nabla V(x)^T [f(x) + g(x)u] - T(x) + h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru \in \Sigma[x, u]. \quad (2.30)$$

Entretanto, vale lembrar que essa análise realizada se limita apenas em relação à origem do sistema. Com isso, os trabalhos (Simpson-Porco, 2018) e (Madeira; ALVES LIMA, 2022) ampliaram a análise para PEs não nulos, estendendo os conceitos já conhecidos, apresentando as definições de Dissipatividade Independente de Equilíbrio (EID) e Dissipatividade Estrita Independente de Equilíbrio (EISD). As Definições 2.6.4 e 2.6.5 apresentam esses conceitos.

Definição 2.6.4 O sistema dinâmico (2.3)-(2.4) é *dissipativo independente de equilíbrio (EID)* para uma função potência $r(u - u^*, y - y^*)$ se, para todo ponto de equilíbrio $x^* \in \xi$, existe uma \mathcal{C}^1 função energia $V_{x^*}(x) > 0, x \neq x^*, V_{x^*}(x^*) = 0$, tal que (Simpson-Porco, 2018):

$$\dot{V}_{x^*}(x) := \nabla V_{x^*}(x)^T [f(x) + g(x)u(x)] \leq r(u - u^*, y - y^*). \quad (2.31)$$

Definição 2.6.5 *O sistema dinâmico (2.3)-(2.4) é Estritamente Dissipativo Independente de Equilíbrio (EISD) para uma função potência $r(u - u^*, y - y^*)$ se, para todo ponto de equilíbrio $x^* \in \xi$, existe uma \mathcal{C}^1 função energia $V_{x^*}(x) > 0, x \neq x^*, V_{x^*}(x^*) = 0$ e uma função contínua $T_{x^*}(x) > 0, x \neq x^*, T_{x^*}(x^*) = 0$, tal que (Madeira; ALVES LIMA, 2022):*

$$\nabla V_{x^*}(x)^T [f(x) + g(x)u(x)] + T_{x^*}(x) \leq r(u - u^*, y - y^*). \quad (2.32)$$

Essas definições apresentadas permitiram que o trabalho (Madeira; ALVES LIMA, 2022) provasse teoremas que introduziram novas condições relacionadas à estabilidade de sistemas usando EID. Os teoremas mencionados são enunciados em seguida:

Teorema 2.6.1 *O sistema polinomial (2.3) é SOS assintoticamente estabilizável pela realimentação de estados se e somente se existe uma saída (fictícia) variável (2.4) tal que a representação do sistema (2.3)-(2.4) é SOS Estritamente QSR-dissipativo com $R > 0$ e $\Delta_c = 0$, onde*

$$\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q. \quad (2.33)$$

O feedback estabilizante é dado por

$$u(x) = -R^{-1}S^T h(x). \quad (2.34)$$

Prova: ver (Madeira; ALVES LIMA, 2022).

SOS assintoticamente estabilizável significa que a condição de Lyapunov (2.15) é verificada através da decomposição SOS.

Teorema 2.6.2 *Supõe-se que o sistema dinâmico (2.3)-(2.4) é EISD em $(x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ com alguma função energia radialmente ilimitada $V_{x^*}(x) > 0, R > 0$ e $\Delta_c \geq 0$, onde*

$$\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q. \quad (2.35)$$

Então, qualquer ponto de equilíbrio $x^ \in \xi$ é mantido globalmente assintoticamente estável pela seguinte lei de controle por feedback*

$$u(x) = K[h(x) - h(x^*)] + u^*, \quad K = -R^{-1}S^T, \quad (2.36)$$

com $(u^, h(x^*)) \in \mathcal{H}$, onde o conjunto \mathcal{H} é definido por*

$$\mathcal{H} \triangleq \{(u^*, y^*) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \mid \exists x^* \in \xi \text{ solucionando (2.17) - (2.18)}\}. \quad (2.37)$$

Prova: ver (Madeira; ALVES LIMA, 2022).

Teorema 2.6.3 *O sistema polinomial (2.3)-(2.4) é SOS estritamente QSR-dissipativo se e somente se ele é SOS EISD. Como resultado, o sistema é SOS assintoticamente estabilizável em torno da origem se e somente se ele também for SOS estabilizável em qualquer ponto de equilíbrio atribuível $x^* \in \xi$.*

Prova: ver (Madeira; ALVES LIMA, 2022).

Para verificar as propriedades dissipativas de um sistema LTI, é necessário modificar as condições obtidas utilizando desigualdades lineares matriciais (LMIs). Assim, o lema abaixo introduz uma condição LMI para verificar se um sistema LTI é Estritamente QSR-Dissipativo para $V(x) = x^T P x$ e $T(x) = x^T N x$ (Haddad; Chellaboina, 2008).

Teorema 2.6.4 *O sistema LTI (2.5)-(2.6) é Estritamente QSR-Dissipativo se a seguinte condição LMI é obedecida:*

$$\begin{bmatrix} (A^T P + PA + N - C^T Q C) & (PB - C^T S) \\ (PB - C^T S)^T & -R \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.38)$$

com $Q \in \mathbb{S}^p$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $R \in \mathbb{S}^m$, $P \in \mathbb{S}_{\geq 0}^n$ e $N \in \mathbb{S}_{\geq 0}^n$.

Prova: ver Capítulo 4 do (Brogliato *et al.*, 2013).

O próximo lema introduz uma condição de estabilização assintótica através de uma realimentação SOF linear (Madeira, 2022).

Teorema 2.6.5 *O sistema LTI (2.5)-(2.6) é linearmente SOF estabilizável se e somente se (2.38) é factível com $R \in \mathbb{S}_{>0}^m$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $N \in \mathbb{S}_{>0}^n$ e $\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q = 0$, com o SOF estabilizante dado por*

$$u = Ky, \quad K = -R^{-1}S^T. \quad (2.39)$$

Prova: ver (Madeira, 2022).

O que permite essa propriedade para analisar outros PEs $x \in \xi$ é garantir que $V(x)$ seja fortemente convexo. Se $V(x) \in \mathcal{C}^2$, então $\nabla V^2(x) \geq \mu I$. Assim, com essa propriedade sendo validada, então (Simpson-Porco, 2018)

$$V_{x^*}(x) := V(x) - V(x^*) - \nabla V(x^*)^T (x - x^*) > 0, \quad (2.40)$$

$x \neq x^*$, $V_{x^*}(x^*) = 0$ também é fortemente convexo e radialmente ilimitada, com

$$\nabla V_{x^*}(x) = \nabla V(x) - \nabla V(x^*). \quad (2.41)$$

A partir dessas afirmações, é possível analisar outros pontos de equilíbrio mudando a função de Lyapunov $V(x)$. O trabalho (Madeira; ALVES LIMA, 2022) introduziu a seguinte condição, de forma a verificar a propriedade que o $V(x)$ é fortemente convexo:

$$x^T (\nabla^2 V(x)) x - \mu x^T x \in \Sigma[x], \quad (2.42)$$

em que $\mu > 0$. A validação de (2.42) garante que $V(x)$ é fortemente convexo e que é possível estabilizar qualquer ponto $x \in \xi$ utilizando a lei de controle (2.36).

3 MÉTODO ITERATIVO

Esse capítulo ilustrará três métodos iterativos e suas respectivas variações (estabilização global, local e sistemas LTIs), que serão utilizados para estabilizar sistemas polinomiais e sistemas LTI em torno de PEs desejados. O primeiro método foi elaborado a partir dos trabalhos (Felipe; Oliveira, 2020), (Lima *et al.*, 2022) e (Viana, 2022), o segundo é uma adaptação do método anterior, apresentado no trabalho (Brito *et al.*, 2023) e o terceiro foi introduzido em (Madeira; Machado, 2023). Após a apresentação do método, será realizado o estudo comparativo desses três métodos, em um capítulo seguinte, de forma a verificar o desempenho para os mesmos.

3.1 Método Iterativo 1

Nesta Seção será apresentado o método iterativo elaborado a partir dos trabalhos (Felipe; Oliveira, 2020), (Lima *et al.*, 2022) e (Viana, 2022). Esses trabalhos se restringiram apenas em utilizar LMIs.

3.1.1 Caso Polinomial

Os trabalhos (Felipe; Oliveira, 2020), (Lima *et al.*, 2022) e (Viana, 2022) introduziram um método iterativo para projetar controladores lineares SOF, a partir de uma equação que contém um parâmetro de otimização L_s . Entretanto, esses trabalhos só abordaram a estabilização do sistema em torno da origem. A Equação (3.1) introduz o parâmetro de otimização L_s para ser utilizado no método iterativo:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} + He\{L_s \begin{bmatrix} S^T & R \end{bmatrix}\} \prec 0, \quad (3.1)$$

onde $L_s = \begin{bmatrix} -R^{-1}S^T & -I_m \end{bmatrix}^T$. A condição (3.1) é provinda do lema de Finsler e essa condição indica que $\Delta_c \geq 0$ se ela foi válida. Entretanto, utilizar essa condição no método iterativo não é suficiente, pois não é garantido que o Δ_c seja incrementado a cada iteração. Então, como mencionado em (Lima *et al.*, 2022), é necessário também adicionar um termo em (3.1), com um parâmetro de relaxamento λ , sendo uma variável escalar auxiliar, de forma que a condição se altere para

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} + He\{L_s \begin{bmatrix} S^T & R \end{bmatrix}\} - \lambda \begin{bmatrix} +I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.2)$$

Dessa forma, verifica-se através da Equação (3.2), que quando λ atingir um valor negativo, é correto afirmar que a condição (3.1) é válida, e assim, afirma-se que $\Delta_c \geq 0$. Então, o objetivo é minimizar o parâmetro λ até que ele atinja um valor negativo. Como provado em (Lima *et al.*, 2022), quando λ atinge um valor negativo, conclui-se que $\Delta_c \geq 0$ e assim, a estabilidade do sistema foi alcançada para o sinal de controle $u(x) = Kh(x)$.

Entretanto, é possível que a variável Δ_c atinja um valor positivo antes que o valor de λ atinja um valor negativo (Lima *et al.*, 2022). Então, será verificado esses dois parâmetros a cada iteração, como condição de parada do algoritmo iterativo.

Na primeira iteração é preciso inicializar o parâmetro L_s . Assim, são inicializados os valores de S_0 e R_0 para obter o primeiro valor de L_s . Então, após a solução do problema SOS, são atualizados os valores de R e S , e assim, esses valores obtidos são utilizados para calcular o valor de L_s da iteração seguinte. Como indicado em (Lima *et al.*, 2022), os valores escolhidos para inicialização desses parâmetros são $R_0 = I$ e $S_0 = 0$.

Para garantir a positividade de $V(x)$ e $T(x)$ através do SOSTOOLS, é preciso garantir que as seguintes condições abaixo sejam atendidas:

$$V(x) - \beta_v \|x\|^{2n_v} \in \Sigma[x] \quad (3.3)$$

e

$$T(x) - \beta_t \|x\|^{2n_t} \in \Sigma[x], \quad (3.4)$$

para algum $(\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}$. Por fim, pelo Teorema 2.6.1, é preciso lembrar que:

$$R > 0. \quad (3.5)$$

Então, é possível construir o método proposto através das condições (2.30), (2.42), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) utilizando o SOSTOOLS. O Algoritmo 1 descreve o método proposto.

O resultado deste método é um ganho de SOF $K = -R^{-1}S^T$, que estabiliza o sistema (2.3)-(2.4) em torno da origem para a lei de controle $u(x) = Kh(x)$, para todas as condições iniciais $x(0) \in \mathbb{R}^n$, ou seja, a estabilização global é atingida. Para expandir a estabilização para outros pontos de equilíbrio $x \in \xi$, é necessário alterar a lei de controle $u(x)$ para (2.36), como já discutido:

$$u(x) = K[h(x) - h(x^*)] + u^*, \quad K = -R^{-1}S^T, \quad (3.6)$$

Algoritmo 1: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Global

Entrada: $i_{max}, h(x), (\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}$

Saída: K, Q, R, S e μ

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Minimizar λ enquanto calcula-se $V(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S)

solucionando as condições (2.30),(2.42),(3.2), (3.3), (3.4) e (3.5); **se** $\lambda \leq 0$ **ou**

$SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$ e $\mu;$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

fim

fim

source: unknown ...

em que $Kh(x^*) \neq u^*$. A estabilidade local do sistema em malha fechada é analisada a partir da adaptação da condição (2.30) para a seguinte abaixo:

$$-\nabla V(x)^T [f + gu] - T(x) + h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru - \alpha(1 - L) \in \Sigma[x, u], \quad (3.7)$$

em que $V(x), T(x), \alpha(x)$ e $L(x) \in \Sigma[x]$ e $\alpha = \beta_\alpha \|x\|^{2n_\alpha}$. Além disso, é preciso acrescentar uma condição que garanta que $L(x) > 0$, como é descrita abaixo:

$$L(x) - \beta_l \|x\|^{2n_l} \in \Sigma[x], \quad (3.8)$$

onde $\beta_l \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_l \in \mathbb{N}$. Assim, é possível adaptar o Algoritmo 1 para o Algoritmo 2, de forma a estabilizar localmente o sistema em malha fechada através de uma realimentação SOF. É importante ressaltar que não é utilizada a condição (2.42) para projetar o controlador, pois o objetivo é apenas estabilizar localmente o sistema em torno da origem, e não em torno de PEs não nulos.

Algoritmo 2: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local

Entrada: $i_{max}, h(x), (\beta_v, \beta_t, \beta_l, \beta_\alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t, n_l, n_\alpha) \in \mathbb{N}$

Saída: $K, Q, R, S, L(x)$

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Minimizar λ enquanto calcula-se $V(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], L(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S) solucionando as condições (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.7) e (3.8);

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$ e $L(x);$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

fim

fim

A solução do Algoritmo 2 garante que o sistema em malha fechada é Localmente Estritamente QSR-Dissipativo, com a estabilidade assegurada dentro do domínio $(x, u) \in (\mathcal{E}(L, 1) \times \mathbb{R}^m)$ em que $\mathcal{E}(L, 1)$ é uma estimativa do domínio de atração. Portanto, o sistema é assintoticamente estável para todas as condições iniciais $x(0) \in \mathcal{E}(L, 1)$. Entretanto, não é garantido que $\mathcal{E}(L, 1)$ seja um conjunto contrativo invariante, e portanto, é possível estimar o maior conjunto contrativo invariante $\mathcal{E}(V, \rho)$, onde $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, a partir de $\mathcal{E}(L, 1)$, tal que $\mathcal{E}(V, \rho) \subseteq \mathcal{E}(L, 1)$. A partir das funções $L(x)$ e $V(x)$ obtidas no Algoritmo 2, utiliza-se a seguinte condição SOS para determinar o maior domínio contrativo invariante $\mathcal{E}(V, \rho)$

$$(1 - L) - \gamma(\rho - V) \in \Sigma[x], \quad (3.9)$$

onde $\gamma \in \Sigma[x]$. Assim, o maior domínio desejado é obtido através da maximização da variável ρ utilizando a condição (3.9) até que a condição não seja mais satisfeita. O Algoritmo 3 descreve o processo para obter o maior domínio contrativo invariante $\mathcal{E}(V, \rho)$.

Algoritmo 3: Algoritmo de Maximização de $\varepsilon(V, \rho)$

Entrada: $V(x)$ e $L(x)$

Saída: $\varepsilon(L, 1)$ e $\varepsilon(V, \rho)$

início

$\rho \leftarrow$ constante positiva c ;

 Defina $\gamma(x) \in \Sigma[x]$ de ordem n ;

enquanto O problema for factível **faça**

 Calcule $\gamma(x) \in \Sigma[x]$ solucionando a condição (3.9) ;

se O problema não for factível **então**

retorne $\varepsilon(L, 1)$ e $\varepsilon(V, \rho)$;

fim

 Incremente ρ ;

fim

fim

3.1.2 Caso LTI

Para adaptar o método com o objetivo de estabilizar sistemas LTIs para PE nulos, é necessário trocar a condição de dissipatividade estrita (2.30) para a condição apresentada no Teorema 2.6.4. Além disso, a partir do que foi mencionado na Seção 2.6, $V(x) = x^T P x$ e $T(x) = x^T N x$, e assim, as condições (3.3) e (3.4) são validadas a partir das condições

$$P > 0 \quad (3.10)$$

e

$$N > 0. \quad (3.11)$$

No caso LTI, $P > 0$ é uma condição necessária para verificar se o sistema é fortemente convexo, excluindo a necessidade de utilizar uma condição equivalente a (2.42).

Assim, é possível estabilizar o sistema (2.5)-(2.6), com o método iterativo apresentado, a partir das condições (3.10), (3.11), (3.5) e (2.38), utilizando uma lei de controle $u(x) = Ky$. O Algoritmo 4 apresenta o método proposto para o caso LTI.

Novamente, o resultado desse algoritmo é um ganho K de SOF linear, tal que $K = -R^{-1}S^T$, que estabiliza globalmente o sistema (2.5)-(2.6) em torno da origem para a lei de controle mencionada. Com o objetivo de estabilizar um PE não nulo $x^* \in \xi$, modifica-se a lei de controle $u(x) = KCx$ para $u(x) = K(Cx - Cx^*) + u^*$, em que $-KCx^* + u^* \neq 0$.

Algoritmo 4: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Sistema LTI

Entrada: i_{max} **Saída:** K, Q, R, S **início** $i \leftarrow 0;$ $S_0 \leftarrow 0;$ $R_0 \leftarrow I;$ **enquanto** $i < i_{max}$ **faça** $Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$ Minimizar $\lambda \in \mathbb{R}$ enquanto calcula-se $P \in \mathbb{S}_{>0}^n, N \in \mathbb{S}_{>0}^n$ e $Q \in \mathbb{S}^p, R \in \mathbb{S}_{>0}^m$ e $S \in \mathbb{S}^{p \times n}$ solucionando as condições (2.38), (3.2), (3.5), (3.10) e (3.11);**se** $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**| **retorne** $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S;$ **fim** $i \leftarrow i + 1;$ $S_0 \leftarrow S;$ $R_0 \leftarrow R;$ **fim****fim**

3.2 Método Iterativo 2

Nesta seção será apresentado o método abordado em (Brito *et al.*, 2023). Essa adaptação do método exibido na Seção 3.1 retrata apenas uma nova alternativa de decrescer o valor de λ a cada iteração. É possível diminuir o valor deste parâmetro através do SOSTOOLS aplicando a condição abaixo:

$$\lambda_0 - \lambda > 0, \quad (3.12)$$

onde λ_0 é um valor inicializado no algoritmo e este é atualizado a cada iteração para o respectivo valor de λ calculado. Através de (3.12), é garantido que o valor de λ sempre é menor que o λ da iteração anterior. Com isso, os Algoritmos 1, 2 e 4 são adaptados com essa nova condição para os Algoritmos 5, 6 e 7.

E de forma análoga aos algoritmos exibidos na Seção 3.1, o resultado dos Algoritmos 5 e 6 são um ganho estático K que estabiliza o sistema assintoticamente pela lei de controle

Algoritmo 5: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Global - Minimização de λ adaptada

Entrada: $i_{max}, h(x), \lambda_0 \in \mathbb{R}_{>0}, (\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}$

Saída: K, Q, R, S e μ

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Calcule $V(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S) solucionando as condições (2.30), (2.42), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.12);

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$ e $\mu;$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

$\lambda_0 \leftarrow \lambda;$

fim

fim

$u(x) = Kh(x)$. No caso específico do Algoritmo 6, a estabilização é local, com uma estimativa de domínio de atração inicial $\varepsilon(L, 1)$. Para obter o maior conjunto contrativo e invariante $\varepsilon(V, 1)$ contido nesse domínio inicial, é necessário aplicar o Algoritmo 3. Por fim, o resultado do Algoritmo 7 resulta em um ganho K que estabiliza o sistema globalmente através da lei de controle SOF $u(x) = KCx$.

Algoritmo 6: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local - Minimização de λ adaptada

Entrada: $i_{max}, h(x), \lambda_0 \in \mathbb{R}_{>0}, (\beta_v, \beta_t, \beta_l, \beta_\alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t, n_l, n_\alpha) \in \mathbb{N}$

Saída: $K, Q, R, S, L(x)$

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Calcule $V(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], L(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S) solucionando as condições (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) e (3.12);

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$ e $L(x);$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

$\lambda_0 \leftarrow \lambda;$

fim

fim

3.3 Método Iterativo 3

Nesta seção será apresentado o método abordado em (Madeira; Machado, 2023), apresentando as variações para estabilização global, local e para sistemas LTI.

3.3.1 Caso Polinomial

Foi apresentado em (Madeira; Machado, 2023) novas condições matemáticas que garantem um incremento da variável Δ_c a cada iteração de tal forma que $\Delta_{c,k+1} \geq \Delta_{c,k}$, onde

$$\Delta_{c,k} = S_k R_k^{-1} S_k^T - Q_k, k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3.13)$$

Então, mesmo que na iteração $k = 0$ o sistema seja instável, ou seja, a condição $\Delta_c \geq 0$ não é obedecida, é provável, através desse incremento entre as iterações, obter um $\Delta_c \geq 0$

Algoritmo 7: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Sistema LTI - Minimização de λ adaptada

Entrada: i_{max} e $\lambda_0 \in \mathbb{R}_{>0}$

Saída: K, Q, R, S

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Encontre os valores de $\lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{S}_{>0}^n, N \in \mathbb{S}_{>0}^n$ e $Q \in \mathbb{S}^p, R \in \mathbb{S}_{>0}^m$ e $S \in \mathbb{S}^{p \times n}$ solucionando as condições (2.38), (3.2), (3.5), (3.10), (3.11) e (3.12);

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S;$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

$\lambda_0 \leftarrow \lambda;$

fim

fim

em um número n de iterações. Quando o Δ_c atingir um valor positivo, a estabilização em malha fechada foi atingida com o ganho de SOF $K = -R_n^{-1}S_n^T$ (Madeira; Machado, 2023).

A seguinte proposição também foi apresentada em (Madeira; Machado, 2023):

Proposição 3.3.1 *Seja $\Delta_{c,k} = S_k R_k^{-1} S_k^T - Q_k$ definido para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, com $Q_k \in \mathbb{S}^p, S_k \in \mathbb{R}^{p \times m}, R_k \in \mathbb{S}_{>0}^m$. Se*

$$R_k - R_{k+1} \geq 0 \quad (3.14)$$

e

$$S_{k+1} R_k^{-1} S_k^T + S_k R_k^{-1} S_{k+1}^T - 2S_k R_k^{-1} S_k^T + Q_k - Q_{k+1} \geq 0, \quad (3.15)$$

então a seguinte expressão segue para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$\Delta_{c,k+1} \geq \Delta_{c,k}. \quad (3.16)$$

Prova: a partir das condições (2.33) e (3.13), a condição (3.16) é equivalente a

$$S_{k+1}R_{k+1}^{-1}S_{k+1}^T - Q_{k+1} \geq S_kR_k^{-1}S_k^T - Q_k. \quad (3.17)$$

Para verificar (3.17), é preciso supor que (3.14) é obedecido, ou seja, $R_{k+1} \leq R_k$. Então, a condição (3.17) é mantida como verdadeira, quando sujeita à condição (3.14) se

$$S_{k+1}R_k^{-1}S_{k+1}^T - S_kR_k^{-1}S_k^T \geq Q_{k+1} - Q_k, \quad (3.18)$$

Já que $R_{k+1}^{-1} \geq R_k^{-1} > 0$. Agora, agrupando os termos S_{k+1} e S_k pela esquerda e pela direita, têm-se:

$$(S_{k+1} - S_k)R_k^{-1}(S_{k+1} - S_k)^T \geq 0, \quad (3.19)$$

o que é equivalente a

$$S_{k+1}R_k^{-1}S_{k+1}^T \geq S_{k+1}R_k^{-1}S_k^T + S_kR_k^{-1}S_{k+1}^T - S_kR_k^{-1}S_k^T. \quad (3.20)$$

Então, substituindo $S_{k+1}R_k^{-1}S_{k+1}^T$ no lado esquerdo da inequação (3.18) pela expressão no lado direito da condição (3.20). Isso leva à conclusão que a inequação abaixo é uma condição suficiente para (3.18).

$$S_{k+1}R_k^{-1}S_k^T + S_kR_k^{-1}S_{k+1}^T - 2S_kR_k^{-1}S_k^T \geq Q_{k+1} - Q_k, \quad (3.21)$$

e isso é igual à condição (3.15). Portanto, se (3.14)-(3.15) é mantido para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, então (3.18) e (3.16) são validadas também. ■

Com isso, conclui-se que as condições de dissipatividade (3.14)-(3.15) são lineares nas matrizes $(Q_{k+1}, R_{k+1}, S_{k+1})$ apenas se as matrizes (Q_k, R_k, S_k) são conhecidas a partir da iteração anterior. Então, utilizando a condição de Dissipatividade Estrita (2.29), junto com as condições (3.3), (3.4), (3.5), (3.14), (3.15), é possível descrever o segundo método iterativo, como exibido no Algoritmo 8. Se o problema for factível para todas as condições mencionadas anteriormente, então a lei de controle $u(x) = Kh(x)$, $K = -R^{-1}S^T$ estabiliza o sistema (2.3)-(2.4) em torno da origem para todas as condições iniciais $x(0) \in \mathbb{R}^n$, ou seja, a estabilização global é atingida. É possível utilizar também a Equação (2.36) de forma a estabilizar PEs não nulos tais que $x^* \in \xi$.

De maneira semelhante ao método mostrado em 3.1, para adaptar o Algoritmo 8 de forma a projetar um controlador que estabilize localmente o sistema em torno da origem, é necessário utilizar as condições (3.7), (3.8) e $\alpha_0 = \beta_\alpha \|x\|^{2n_\alpha}$. O Algoritmo 9 apresenta esse

Algoritmo 8: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Estabilização Global

Entrada: $i_{max}, h(x), (\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}$

Saída: K, Q, R, S e μ

início

Passo 1:

$i \leftarrow 0;$

Encontre os valores de $V_0(x) \in \Sigma[x], T_0(x) \in \Sigma[x], \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ e (Q_0, R_0, S_0)

solucionando (2.42), (3.3), (3.4), (3.5) e a condição abaixo:

$$-\nabla V_0(x)^T [f + gu] - T_0 + h^T Q_0 h + 2h^T S_0 u + u^T R_0 u \in \Sigma[x, u] \quad (3.22)$$

se $\Delta_{c,0} = S_0 R_0^{-1} S_0^T - Q_0 \geq 0$ **então**

retorne $K = -R_0^{-1} S_0^T, Q_0, R_0, S_0$ e $\mu;$

fim

Passo 2:

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

 Encontre os valores de $V_{i+1}(x) \in \Sigma[x], T_{i+1}(x) \in \Sigma[x], \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ e

$(Q_{i+1}, R_{i+1}, S_{i+1})$ solucionando (2.42), (3.3), (3.4), (3.5), (3.14), (3.15) e a

 condição abaixo:

$$-\nabla V_{i+1}(x)^T [f + gu] - T_{i+1} + h^T Q_{i+1} h + 2h^T S_{i+1} u + u^T R_{i+1} u \in \Sigma[x, u] \quad (3.23)$$

se $\Delta_{c,i+1} = S_{i+1} R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T - Q_{i+1} \geq 0$ **então**

retorne $K = -R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T, Q_{i+1}, R_{i+1}, S_{i+1}$ e $\mu;$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

fim

fim

método adaptado para o caso local. De forma análoga ao caso local do método anterior, não é utilizada a condição (2.42), pois o objetivo é apenas estabilizar localmente o sistema em torno da origem.

Como resultado, afirma-se que o sistema em malha fechada é localmente estritamente QSR-dissipativo, ou seja, a partir do domínio estimado $\varepsilon(L, 1)$, o sistema é assintoticamente estável para $(x, u) \in (\varepsilon(L, 1) \times \mathbb{R}^m)$ e para todo $x(0) \in \varepsilon(L, 1)$. Em seguida, utiliza-se também o

Algoritmo 9: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Estabilização Local

Entrada: $i_{max}, h(x), (\beta_v, \beta_t, \beta_l, \beta_\alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t, n_l, n_\alpha) \in \mathbb{N}$

Saída: K, Q, R, S

início

Passo 1:

$i \leftarrow 0;$

Encontre os valores de $V_0(x) \in \Sigma[x], T_0(x) \in \Sigma[x], L(x) \in \Sigma[x]$ e (Q_0, R_0, S_0)

solucionando (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) e a condição abaixo:

$$-\nabla V_0(x)^T [f + gu] - T_0 + h^T Q_0 h + 2h^T S_0 u + u^T R_0 u - \alpha_0(1 - L) \in \Sigma[x, u] \quad (3.24)$$

se $\Delta_{c,0} = S_0 R_0^{-1} S_0^T - Q_0 \geq 0$ **então**

retorne $K = -R_0^{-1} S_0^T, Q_0, R_0, S_0$ e $\mu;$

fim

Passo 2:

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

 Encontre os valores de $V_{i+1}(x) \in \Sigma[x], T_{i+1}(x) \in \Sigma[x], \alpha_{i+1} \in \Sigma[x]$ e

$(Q_{i+1}, R_{i+1}, S_{i+1})$ solucionando (3.3), (3.4), (3.5), (3.8), (3.14), (3.15) e a

 condição abaixo:

$$-\nabla V_{i+1}(x)^T [f + gu] - T_{i+1} + h^T Q_{i+1} h + 2h^T S_{i+1} u + u^T R_{i+1} u - \alpha_{i+1}(1 - L) \in \Sigma[x, u] \quad (3.25)$$

se $\Delta_{c,i+1} = S_{i+1} R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T - Q_{i+1} \geq 0$ **então**

retorne $K = -R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T, Q_{i+1}, R_{i+1}$ e $S_{i+1};$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

fim

fim

Algoritmo 3 para estimar o maior domínio contrativo invariante $\varepsilon(V, 1) \subseteq \varepsilon(L, 1)$.

3.3.2 Caso LTI

De forma similar ao método anterior, as condições (3.3) e (3.4) podem ser validadas de forma equivalente através das condições (3.10) e (3.11), sabendo que $V(x) = xTPx$ e $T(x) = x^T N x$. Da mesma forma, não é preciso validar a condição (2.42) para o caso LTI. Por último,

altera-se a condição (2.30) para a condição (2.38), como apresentado no Teorema 2.6.4. Assim, é possível adaptar o Algoritmo 8 de tal forma a estabilizar um sistema LTI (2.5)-(2.6), como é exibido no Algoritmo 10.

Algoritmo 10: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Sistema LTI

Entrada: i_{max}

Saída: K, Q, R, S

início

Passo 1:

$i \leftarrow 0;$

Encontre os valores de $P_0 \in \mathbb{S}_{>0}^n$, $N_0 \in \mathbb{S}_{>0}^n$ e $Q_0 \in \mathbb{S}^p$, $R_0 \in \mathbb{S}_{>0}^m$ e $S_0 \in \mathbb{S}^{p \times n}$ solucionando a condição abaixo:

$$\begin{bmatrix} (A^T P_0 + P_0 A + N_0 - C^T Q_0 C) & (P_0 B - C^T S_0) \\ (P_0 B - C^T S_0)^T & -R_0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.26)$$

se $\Delta_{c,0} = S_0 R_0^{-1} S_0^T - Q_0 \geq 0$ então

retorne $K = -R_0^{-1} S_0^T$, Q_0 , R_0 e S_0 ;

fim

Passo 2:

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

 Encontre os valores de $P_{i+1} \in \mathbb{S}_{>0}^n$, $N_{i+1} \in \mathbb{S}_{>0}^n$ e $Q_{i+1} \in \mathbb{S}^p$, $R_{i+1} \in \mathbb{S}_{>0}^m$ e $S_{i+1} \in \mathbb{S}^{p \times n}$ solucionando (3.14), (3.15) e a condição abaixo:

$$\begin{bmatrix} (A^T P_{i+1} + P_{i+1} A + N_{i+1} - C^T Q_{i+1} C) & (P_{i+1} B - C^T S_{i+1}) \\ (P_{i+1} B - C^T S_{i+1})^T & -R_{i+1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.27)$$

 se $\Delta_{c,i+1} = S_{i+1} R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T - Q_{i+1} \geq 0$ então

retorne $K = -R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T$, Q_{i+1} , R_{i+1} e S_{i+1} ;

fim

$i \leftarrow i + 1;$

fim

fim

De forma análoga, o resultado desse algoritmo é um ganho de SOF $K = -R^{-1} S^T$ que estabiliza globalmente o sistema (2.5)-(2.6) em torno da origem para a lei de controle $u(x) = -KCx$. Com o objetivo de estabilizar um PE não nulo $x^* \in \xi$, modifica-se a lei de

controle $u(x) = KCx$ para $u(x) = K(Cx - Cx^*) + u^*$, em que $-KCx^* + u^* \neq 0$.

4 CONTROLE DE SISTEMAS NÃO AFINS NA ENTRADA

Como definido anteriormente, um sistema afim na entrada pode ser definido pela expressão $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Esse tipo de sistema possui essa nomenclatura, pois o termo u é afim, ou seja, ele é linear. Então, no caso dos sistemas não afins na entrada, é possível representá-los da forma $\dot{x} = f(x) + l(x, u)$, onde l é uma função que contém termos não lineares relacionados a entrada u , o que aumenta a complexidade do sistema (Binazadeh; Rahgoshay, 2017). Isso indica que a classe de sistemas não afins são bem mais universais que a classe de sistemas afins (Zhao *et al.*, 2020). Com isso, verifica-se a necessidade de desenvolver estudos e estratégias para alcançar a estabilidade desse tipo de sistema através do uso de controladores.

Os trabalhos relacionados à teoria da dissipatividade se limitaram em sua aplicação exclusiva a sistemas afins na entrada. Com isso, o objetivo deste capítulo é introduzir novas condições relacionadas à teoria da dissipatividade, de forma a atingir a estabilização local para essa classe de sistemas a partir da realimentação de saída do sistema, assim como estimar uma região de atração do sistema em malha fechada.

4.1 Estabilização de Sistemas Não Afins através de SOF

Seja um sistema não afim na entrada definido por

$$\dot{x} = f(x(t)) + l(x, u) \quad (4.1)$$

e

$$y = h(x(t)), \quad (4.2)$$

onde $f(x)$ e $l(x, u)$ são funções contínuas, definidas por $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(0) = 0, l: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, x é o vetor de estados do sistema, de forma que $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, \mathcal{X} é um conjunto aberto em que $0 \in \mathcal{X}$ e $x(0) = x_0$. A variável u é definida por $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, 0 \in \mathcal{U}$. Por fim, a função polinomial h é descrita da forma $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p, h(0) = 0$ e $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$.

Em seguida, o Teorema 4.1.1 introduz novas condições para a estabilização local do sistema (4.1)-(4.2).

Teorema 4.1.1 *O sistema (4.1)-(4.2) possui a origem como um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estabilizável pela lei de controle $u(x) = Kh(x), K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ se existem funções $s_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $s_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ onde $\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ e as seguintes condições são*

atendidas:

$$-\nabla V(x)^T [f(x) + l(x, u)] - T(x) + h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru - s_1(x) \cdot (1 - V(x)) - s_2(u) \cdot (1 - u^T Ru) \geq 0 \quad (4.3)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 - s_1(x) \cdot (1 - V) & h^T S \\ S^T h & R \end{bmatrix} > 0, \quad (4.4)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p$, $R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Além disso, $\varepsilon(V, 1)$ é uma estimativa do domínio de atração.

Prova:

sabe-se que a equação $V(x) = 1$ define a fronteira do domínio de atração do sistema em relação à função $V(x)$ e a variável x (Genesio *et al.*, 1985). Com isso, é possível estender a Equação de dissipatividade (2.29) de forma a obter uma solução local em relação à variável x e à variável u

$$-\nabla V(x)^T [f + l(x, u)] - T(x) + h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru - s_1(x) \cdot (1 - V(x)) - s_2(u) \cdot (1 - W(u)) \geq 0. \quad (4.5)$$

Se $s_1(x)$ e $s_2(u)$ são termos não negativos para $x \in \mathcal{X}$ e $u \in \mathcal{U}$, então a expressão (4.5) é equivalente a (2.29), e assim, o sistema é assintoticamente estável em relação às variáveis (x, u) para os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq 1\} \quad (4.6)$$

e

$$\mathcal{X}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | W(u(x)) = W(x) \leq 1\}, \quad (4.7)$$

sendo $W(x)$ uma função não negativa e $W(0) = 0$ definida por:

$$W(x) = u(x)^T R u(x), \quad (4.8)$$

em que $R > 0$.

Entretanto, é necessário garantir que $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$ para que a condição de estabilidade seja validada. Isso porque se todos os valores de $x \in \mathcal{X}_1$ estão em \mathcal{X}_2 , isso garante que $u(x) \in \mathcal{U}$ e com isso, a lei de controle $u(x)$ estabiliza assintoticamente o sistema em torno da origem. Pelo Teorema 2.6.1, isso ocorre quando $\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q \geq 0$.

Seja a lei de controle $u(x) = -R^{-1}S^T h(x)$ que estabiliza localmente assintoticamente o sistema. Então, o conjunto \mathcal{X}_2 é definido por:

$$u^T R u \leq 1 \Rightarrow [h(x)^T S R^{-1}] R [R^{-1} S^T h(x)] \leq 1. \quad (4.9)$$

A partir de (4.9), conclui-se que

$$1 - h^T S R^{-1} S^T h \geq 0. \quad (4.10)$$

Para garantir que $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$, é necessário introduzir a seguinte condição:

$$1 - h^T S R^{-1} S^T h - s_1(x)(1 - V) \geq 0. \quad (4.11)$$

E usando o Complemento de Schur (Zhang, 2006), obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 - s_1(x)(1 - V) & h^T S \\ S^T h & R \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.12)$$

Dessa forma, se são satisfeitas as condições (4.5) e (4.12), podemos afirmar que vale a contenção $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$ e, além disso, existe um $x(0) \in \mathcal{X}_1$, tal que $x(t) \in \mathcal{X}_1 \forall t \geq 0$. A variável u nunca deixa \mathcal{X}_2 e nem \mathcal{U} para a lei de controle escolhida $u(x) = -Kh(x)$. Por fim, $\dot{V} < 0, \forall x \in \mathcal{X}_1$, o que implica na estabilidade assintótica dentro de \mathcal{X}_1 . ■

Então, conclui-se que a partir das condições introduzidas no Teorema 4.1.1, é possível estender os conceitos da Teoria da Dissipatividade já consolidados de forma a estabilizar essa classe de sistemas.

4.2 Aplicação dos Métodos Iterativos em Sistemas Não Afins na Entrada

Nesta seção será adaptado os métodos apresentados em 3.1, 3.2 e 3.3 ao Teorema 4.1.1 de forma a atingir a estabilização assintótica local em sistemas não afins na entrada. Com o Teorema 4.1.1, é possível apresentar o Corolário abaixo, que adapta as suas condições em decomposição SOS.

Corolário 4.1 *O sistema (4.1)-(4.2) possui a origem como um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estabilizável pela lei de controle $u(x) = Kh(x)$, $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ se existem funções s_1 e $s_2 \in \Sigma[x]$ onde $\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ e as seguintes condições são atendidas:*

$$-\nabla V(x)^T [f(x) + l(x, u)] - T(x) + h^T Q h + 2h^T S u + u^T R u - s_1(x) \cdot (1 - V(x)) - s_2(u) \cdot (1 - u^T R u) \in \Sigma[x] \quad (4.13)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 - s_1(x) \cdot (1 - V) & h^T S \\ S^T h & R \end{bmatrix} \in \Sigma[x]. \quad (4.14)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p$, $R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Além disso, $\varepsilon(V, 1)$ é uma estimativa do domínio de atração.

Pela definição, se os polinômios s_1, s_2 , assim como as condições (4.13) e (4.14) $\in \Sigma[x]$, então por definição são todos positivos definidos, e assim, as condições (4.3) e (4.4) são atendidas.

Os valores de $s_1(x)$ e $s_2(x, u)$ podem ser atribuídos da forma:

$$s_1(x) = \alpha = \beta_\alpha |x|^{2n_\alpha} \quad (4.15)$$

e

$$s_2(u) = \beta_u \|u\|^{2n_u}. \quad (4.16)$$

Como trata-se apenas da estabilização local, serão utilizados os Algoritmos apresentado nas Seções anteriores que tratam a estabilização local para adaptar ao caso de sistemas não afins. Portanto, é possível adaptar os Algoritmos 2, 6 e 9 para os Algoritmos 11, 12 e 13 com o objetivo de utilizar os mesmos para projetar um controlador SOF que estabilize localmente assintoticamente o sistema (4.1)-(4.2) em torno da estimativa do domínio de atração $\varepsilon(L, 1)$.

Com isso, a partir dos Algoritmos propostos, é possível atingir a estabilidade assintótica local para sistemas não afins na entrada, com a estimativa do domínio de atração inicial $\varepsilon(L, 1)$. Como dito anteriormente, não é garantido que esse elipsoide seja invariante e contrativo. Assim, utiliza-se o Algoritmo 3 de forma a obter o maior domínio $\varepsilon(V, \rho) \subseteq \varepsilon(L, 1)$ em que este é contrativo e invariante.

Algoritmo 11: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local

Entrada: $i_{max}, h(x), (\beta_v, \beta_t, \beta_l, \beta_\alpha, \beta_u) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t, n_l, n_\alpha, n_u) \in \mathbb{N}$

Saída: $K, Q, R, S, L(x)$

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Minimizar λ enquanto calcula-se $V(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], L(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S) solucionando as condições (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.8), (4.13) e (4.14);

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$ e $L(x);$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

fim

fim

Algoritmo 12: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade - Estabilização Local de Sistema Não Afim na Entrada

Entrada: $i_{max}, h(x), \lambda_0 \in \mathbb{R}_{>0}, (\beta_v, \beta_t, \beta_l, \beta_\alpha, \beta_u) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t, n_l, n_\alpha, n_u) \in \mathbb{N}$

Saída: $K, Q, R, S, L(x)$

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Calcule $V(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], L(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S) solucionando as condições (3.2), (3.12), (3.3), (3.4), (3.5), (3.8), (4.13) e (4.14);

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$ e $L(x);$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

$\lambda_0 \leftarrow \lambda;$

fim

fim

Algoritmo 13: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador utilizando a Teoria da Dissipatividade Recorrente - Estabilização Local de um Sistema Não Afim na Entrada

Entrada: $i_{max}, h(x), (\beta_v, \beta_t, \beta_l, \beta_\alpha, \beta_u) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t, n_l, n_\alpha, n_u) \in \mathbb{N}$

Saída: K, Q, R, S

início

Passo 1:

$i \leftarrow 0$;

Encontre os valores de $V_0(x) \in \Sigma[x]$, $T_0(x) \in \Sigma[x]$, $L(x) \in \Sigma[x]$ e (Q_0, R_0, S_0)

solucionando (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) e as condições abaixo:

$$-\nabla V_0(x)^T [f + gu] - T_0 + h^T Q_0 h + 2h^T S_0 u + u^T R_0 u - \alpha_0(1-L) - s_2(u) \cdot (u^T R_0 u) \in \Sigma[x, u] \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha_0(x) \cdot (1-L) & h^T S_0 \\ S_0^T h & R_0 \end{bmatrix} \in \Sigma[x]. \quad (4.18)$$

se $\Delta_{c,0} = S_0 R_0^{-1} S_0^T - Q_0 \geq 0$ **então**

retorne $K = -R_0^{-1} S_0^T$, Q_0, R_0, S_0 e μ ;

fim

Passo 2:

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

 Encontre os valores de $V_{i+1}(x) \in \Sigma[x]$, $T_{i+1}(x) \in \Sigma[x]$, $\alpha_{i+1} \in \Sigma[x]$ e

$(Q_{i+1}, R_{i+1}, S_{i+1})$ solucionando (3.3), (3.4), (3.5), (3.8), (3.14), (3.15) e as

 condições abaixo:

$$-\nabla V_{i+1}(x)^T [f + gu] - T_{i+1} + h^T Q_{i+1} h + 2h^T S_{i+1} u + u^T R_{i+1} u - \alpha_{i+1}(1-L) - s_2(u) \cdot (u^T R_{i+1} u) \in \Sigma[x, u] \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha_{i+1}(x) \cdot (1-L) & h^T S_{i+1} \\ S_{i+1}^T h & R_{i+1} \end{bmatrix} \in \Sigma[x]. \quad (4.20)$$

se $\Delta_{c,i+1} = S_{i+1} R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T - Q_{i+1} \geq 0$ **ou** $i = i_{max}$ **então**

retorne $K = -R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T$, Q_{i+1}, R_{i+1} e S_{i+1} ;

fim

$i \leftarrow i + 1$;

fim

fim

5 CONTROLE E ESTIMAÇÃO DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV RACIONAIS

Neste capítulo será abordada a principal contribuição deste trabalho. Na primeira seção será introduzido o método de análise elaborado no trabalho (Valmorbida; Anderson, 2017). Em seguida, serão apresentadas as extensões dos métodos iterativos A, B e C em que é possível projetar controladores de sistemas não lineares através da teoria da dissipatividade utilizando funções de Lyapunov racionais baseado em (Valmorbida; Anderson, 2017). Além disso, será também possível estimar o domínio de atrações desses sistemas através da função de Lyapunov obtida para o sistema.

5.1 Análise do Domínio de Atração de Sistemas Não Lineares em Malha Aberta

O seguinte teorema introduz condições que garantem que a partir de uma função de Lyapunov racional para o sistema (2.8), existe um conjunto positivamente invariante que o interior é a estimativa do domínio de atração do sistema (Valmorbida; Anderson, 2017).

Teorema 5.1.1 *Seja $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in \mathcal{C}^1$ e $\gamma > 0$, satisfazendo:*

$$\varepsilon(P, \gamma) \subset \mathcal{X} \text{ é compacto e } 0 \in \varepsilon(P, \gamma), \quad (5.1)$$

$$-\langle \nabla P(x), f(x) \rangle > 0 \forall x \in \partial \varepsilon(P, \gamma), \quad (5.2)$$

se existe uma função $V_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $V_n(0) = 0$, $V_n \in \mathcal{C}^1$, tal que

$$V_n(x) > 0 \forall x \in \varepsilon(P, \gamma) \setminus \{0\} \quad (5.3)$$

e

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle > 0 \forall x \in \varepsilon(P, \gamma) \setminus \{0\} \quad (5.4)$$

então,

1. *as soluções $x(t) = \phi(t, x_0)$ de (2.8), com $x_0 \in \varepsilon(P, \gamma)$ satisfazem $x(t') \in \mathcal{S} \forall t' \in [0, \infty)$.*

Ainda mais, se (5.1), (5.3) e

$$-\langle [\nabla V_n(x)(\gamma - P(x)) + V_n \nabla P(x)], f(x) \rangle > 0 \forall x \in \varepsilon(P, \gamma) \setminus \{0\} \quad (5.5)$$

são satisfeitas e existe um $\bar{\varepsilon}$ tal que $0 \in \varepsilon^o(P, \gamma - \bar{\varepsilon})$, então

2. a função

$$V(x) = \frac{V_n(x)}{\gamma - P(x)} \quad (5.6)$$

é uma função de Lyapunov de (2.8) e fornece $\varepsilon^o(P, \gamma)$ como uma estimativa de \mathcal{S} .

Prova: ver (Valmorbida; Anderson, 2017). ■

A condição (5.2) é responsável por garantir que o conjunto $\varepsilon(P, \gamma)$ seja positivamente invariante. Vale ressaltar também que não é obrigatório que a função $P(x)$ seja positiva definida, apenas que $\varepsilon(P, \gamma)$ seja compacto e contenha a origem. Em seguida, (Valmorbida; Anderson, 2017) expandiu as condições do 5.1.1 em inequações, como ilustradas na Proposição abaixo:

Proposição 5.1.2 *Seja $P \in \mathcal{C}^1, P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \gamma > 0$, satisfazendo*

$$\varepsilon(P, \gamma) \text{ é compacto, } 0 \in \varepsilon(P, \gamma), \quad (5.7)$$

se existe uma função $V_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, V_n \in \mathcal{C}^1, V_n(0) = 0$ e $m_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, m_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que

$$-\langle \nabla P(x), f(x) \rangle > n(x)(\gamma - P(x)), \forall x \in \mathcal{X} \quad (5.8)$$

$$V_n(x) > m_0(x)(\gamma - P(x)), \forall x \in \mathcal{X}' \quad (5.9)$$

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle > m_1(x)(\gamma - P(x)), \forall x \in \mathcal{X}' \quad (5.10)$$

onde $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \setminus \{0\}$, então $\varepsilon(P, \gamma)$ é uma estimativa do domínio de atração em relação à origem do sistema.

Se (5.7), (5.8) e (5.9) são satisfeitas e existe $m_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle + V_n(x)n(x) > m_2(x)(\gamma - P(x)) \quad (5.11)$$

é válido, então (5.6) é uma função de Lyapunov para (2.8) e $\varepsilon^o(P, \gamma)$ é uma estimativa do domínio de atração em relação à origem do sistema.

Prova: retirada de (Valmorbida; Anderson, 2017).

A partir da não negatividade de $m_0(x)$ e $m_1(x)$, então pode-se afirmar que (5.9) e (5.10) implicam que as condições (5.3) e (5.4) são obedecidas. Já que em $\partial \varepsilon(P, \gamma)$ tem-se que

$\gamma - P(x) = 0$, (5.8) implica em (5.2), e, de acordo com o Teorema 5.1.1, $\varepsilon(\gamma, P)$ é uma região estimada do domínio de atração em torno da origem. A derivada de $V(x)$, como descrito em (5.6) é dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\langle \nabla V_n(x)(\gamma - P(x)) + V_n(x)\nabla P, f(x) \rangle}{(\gamma - P(x))^2}. \quad (5.12)$$

Já que $V_n(x) > 0$ em $\varepsilon(P, \gamma)$ se (5.9) for mantida, então a condição (5.8) fornece uma limitação inferior para $-\dot{V}$ tal qual:

$$-\dot{V}(x) = -\frac{\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle}{(\gamma - P)} - \frac{V_n(x)\langle \nabla P(x), f(x) \rangle}{(\gamma - P)^2} > -\frac{\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle}{(\gamma - P)} + \frac{V_n(x)n(x)}{(\gamma - P)}, \quad (5.13)$$

portanto, se existe uma função positiva $m_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ satisfazendo:

$$\frac{(-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle + V_n(x)n(x))}{\gamma - P} > m_2(x), \quad (5.14)$$

isso é equivalente a (5.11), então $-\dot{V} > 0$ e (5.5) é obedecida. De acordo com o Teorema 5.1.1, $V(x)$ é uma função de Lyapunov de (2.8) no conjunto $\varepsilon^o(P, \gamma)$, proporcionando assim uma estimativa do domínio de atração de (2.8). ■

Em seguida, a partir da Proposição 5.1.2, é apresentado um corolário para adaptar as condições apresentadas anteriormente a fim de validar o Teorema 5.1.1 de forma computacional utilizando otimização convexa.

Corolário 5.1 *Sejam P e V_n sendo polinômios multivariáveis e γ uma constante positiva. Então, se existem polinômios SOS m_0, m_1 e n tal que*

$$-\langle \nabla P(x), f(x) \rangle - n(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x] \quad (5.15)$$

$$V_n(x) - m_0(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x] \quad (5.16)$$

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle - m_1(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x] \quad (5.17)$$

então as inequações (5.8)-(5.10) são satisfeitas e $\varepsilon(P, \gamma)$ é uma estimativa do domínio de atração em relação à origem do sistema.

Se (5.15), (5.16) são satisfeitas e existe m_2 SOS, tal que

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle + V_n(x)n(x) - m_2(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x] \quad (5.18)$$

é válido, então (5.6) é uma função de Lyapunov para (2.8) no conjunto $\varepsilon^o(P, \gamma)$.

Como provado na Proposição 5.1.2, o fato que (5.15) e (5.18) são válidos são condições suficientes para (5.5) e, se satisfeita, é certificado que a função racional $V(x) = \frac{V_n(x)}{\gamma - P(x)}$ é uma função de Lyapunov no conjunto $\varepsilon^o(P, \gamma)$.

Por fim, o trabalho (Valmorbidia; Anderson, 2017) apresentou uma proposição utilizada para expandir o domínio de atração estimado, a partir das condições da Proposição 5.1.2.

Proposição 5.1.3 *Sejam os polinômios P, \hat{P} e um escalar $\gamma > 0$, se existe uma função SOS m_3 tal que*

$$(\gamma - P(x)) - m_3(\gamma - \hat{P}(x)) \in \Sigma[x], m_3 \in \Sigma[x], \quad (5.19)$$

então, $\varepsilon(\hat{P}, \gamma) \subseteq \varepsilon(P, \gamma)$.

Com isso, é possível elaborar o Algoritmo 14. O primeiro passo deste algoritmo baseia-se em achar o maior γ que satisfaz as condições (5.15)-(5.17). Quando esse valor é encontrado, inicia-se o segundo passo. Essa etapa tem como objetivo encontrar os maiores γ e $\varepsilon(P, \gamma)$ satisfazendo $\varepsilon(\hat{P}, \gamma) \subseteq \varepsilon(P, \gamma)$. Esse processo é repetido alternando as etapas até que o problema seja infactível ou que não seja possível maximizar a variável escalar γ .

5.2 Controle de Sistemas Não Lineares Utilizando Funções de Lyapunov Racionais

As condições fornecidas na Seção anterior abordam apenas a análise de estabilidade do sistema. O objetivo desta Seção é estender as condições apresentadas de forma a projetar um controlador que estabiliza o sistema localmente, fornecendo uma estimativa do domínio de atração do sistema provinda de uma função de Lyapunov racional. Considere o Teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.1 *O sistema (2.3)-(2.4) possui a origem como um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estabilizável com a função de Lyapunov racional da forma:*

$$V(x) = \frac{V_n(x)}{(\gamma - P(x))}, \quad (5.22)$$

onde $V_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, V_n(0) = 0, V_n \in \mathcal{C}^1$, se o sistema é SOS Estritamente QSR-Dissipativo, com $\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q \geq 0, R > 0$ e $T(x) > 0$ se existe uma função $m_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e as seguintes

Algoritmo 14: Algoritmo para Estimação de Domínio de Atração de Sistemas Não Lineares

Entrada: $i = 0$ e P_0 satisfazendo (5.1)

Saída: $P(x)$

início

Passo 1: A partir de P_i , solucionar as condições abaixo através de uma pesquisa linear em γ :

$$\max_{V_n, m_0, m_1, n} \gamma \text{ Sujeito a (5.15) – (5.17)} \quad (5.20)$$

Passo 2: se *Critério de Parada for atingido então*

| **retorne** $\varepsilon(P_i, \gamma)$;

fim

senão

| Utilizando m_0, m_1, n e o valor ótimo γ^* do Passo 1, faça $P(\hat{x}) = P_i(x)$ e solucione as condições abaixo através de uma pesquisa linear em γ :

$$\max_{V_n, P, m_3} \gamma \text{ Sujeito a (5.15) – (5.17), (5.19), } \gamma \geq \gamma^* \quad (5.21)$$

fim

$i \leftarrow i + 1$;

$P_i \leftarrow P^*$;

Volte para o Step 1;

fim

condições são atendidas

$$-\nabla V_n^T(f + gu)(\gamma - P) - V_n \nabla R(f + gu) - T(\gamma - P)^2 + (h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru)(\gamma - P)^2 > 0, \forall x \in \mathcal{X}' \quad (5.23)$$

e

$$V_n(x) > m_0(x)(\gamma - P(x)), \forall x \in \mathcal{X}', \quad (5.24)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p, R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Além disso, $\varepsilon^o(P, \gamma)$ é uma estimativa do domínio de atração do sistema em malha fechada.

Prova:

a partir da Definição 2.6.3 e (2.29), sabe-se que:

$$\dot{V}(x) + T(x) \leq h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru. \quad (5.25)$$

Então, utilizando a derivada de $V(x)$, destacada em (5.12), obtém-se:

$$\frac{\langle \nabla V_n(x)(\gamma - P(x)) + V_n(x)\nabla P, f(x) + g(x)u(x) \rangle}{(\gamma - P(x))^2} + T(x) \leq h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru. \quad (5.26)$$

Simplificando os termos, é obtido a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla V_n(x), f(x) + g(x)u(x) \rangle (\gamma - P(x)) + V_n(x) \langle \nabla P, f(x) + g(x)u(x) \rangle \\ & + T(x)(\gamma - P(x))^2 \leq (h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru)(\gamma - P(x))^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

e essa expressão é equivalente a:

$$\begin{aligned} & - \langle \nabla V_n(x), f(x) + g(x)u(x) \rangle (\gamma - P(x)) - V_n(x) \langle \nabla P, f(x) + g(x)u(x) \rangle \\ & - T(x)(\gamma - P(x))^2 + (h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru)(\gamma - P(x))^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Pelo Teorema 2.6.1. Dado o sistema (2.3)-(2.4) SOS Estritamente QSR-Dissipativo para um $T(x), R > 0$ e $\Delta = 0$, essa condição é suficiente para afirmar que a expressão:

$$- \langle \nabla V_n(x), f(x) + g(x)u(x) \rangle (\gamma - P(x)) - V_n(x) \langle \nabla P, f(x) + g(x)u(x) \rangle \geq 0. \quad (5.29)$$

A expressão acima pode ser equivalente a (5.13) considerando um $f'(x) = f(x) + g(x)u(x)$. Assim, é possível concluir que $\dot{V} < 0$ de forma análoga ao provado na Proposição 5.1.2 e se existe um $m_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tal que:

$$- \langle \nabla V_n(x), f(x) + g(x)u(x) \rangle (\gamma - P(x)) - V_n(x) \langle \nabla P, f(x) + g(x)u(x) \rangle > m_2. \quad (5.30)$$

A positividade de m_0 garante que a expressão (5.3) seja válida. Assim, pela Proposição 5.1.2, é possível afirmar que a função racional (5.6) é uma função de Lyapunov do sistema, em que $\mathcal{E}^o(P, \gamma)$ é uma estimativa do domínio de atração e o sistema é estabilizável pela lei de controle $u(x) = -R^{-1}S^T h(x)$, como mencionado no Teorema 2.6.1. ■

Em seguida, o próximo corolário permite adaptar as condições ilustradas no Teorema 5.2.1 com o objetivo verificar de forma computacional, utilizando otimização convexa.

Corolário 5.2 *O sistema (2.3)-(2.4) possui a origem como um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estabilizável com a função de Lyapunov racional da forma:*

$$V(x) = \frac{V_n(x)}{(\gamma - P(x))}, \quad (5.31)$$

onde $V_n \in \Sigma[x]$, se o sistema é SOS Estritamente QSR-Dissipativo, com $\Delta_c = SR^{-1}S^T - Q \geq 0, R > 0$ e $T(x) \in \Sigma[x]$ se existem funções m_0 e $m_1 \in \Sigma[x]$ e as seguintes condições são atendidas:

$$\begin{aligned} -\nabla V_n^T(f+gu)(\gamma-P) - V_n \nabla R(f+gu) - T(\gamma-P)^2 + \\ (h^T Qh + 2h^T Su + u^T Ru)(\gamma-P)^2 - m_4(\gamma-P) \in \Sigma[x, u] \end{aligned} \quad (5.32)$$

e

$$V_n(x) - m_0(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x], \quad (5.33)$$

onde $Q \in \mathbb{S}^p, R \in \mathbb{S}^m$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Além disso, $\varepsilon^o(P, \gamma)$ é uma estimativa do domínio de atração do sistema em malha fechada.

A prova desse corolário é de forma similar ao Teorema 5.2.1. A função do termo m_4 é garantir a positividade de (5.23).

Antes de introduzir os algoritmos iterativos para o projeto do controlador, é necessário adaptar as condições (5.15)-(5.17) para a análise em malha fechada.

$$-\langle \nabla P(x), f(x) + g(x)u(x) \rangle - n(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x, u] \quad (5.34)$$

$$V_n(x) - m_0(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x, u] \quad (5.35)$$

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) + g(x)u(x) \rangle - m_1(x)(\gamma - P(x)) \in \Sigma[x, u]. \quad (5.36)$$

As condições (5.34)-(5.36) junto à condição (5.19) servem para maximizar γ junto com a estimativa do domínio de atração em malha fechada $\varepsilon(\gamma, P)$.

Com isso, a lógica dos algoritmos se baseiam em testar a nova condição de Lyapunov (5.23), junto com à condição (5.24) e as condições usadas em cada método. Como a análise é apenas em relação à origem, não serão testadas as condições EID. O primeiro passo será o projeto do controlador através do respectivo método em questão e após a estabilização do sistema, é calculado o maior domínio de atração estimado $\varepsilon(\gamma, P)$ em malha fechada para a lei de controle $u(x) = -R^{-1}S^T h(x)$, através das condições (5.34)-(5.36) e (5.19). O Algoritmo 15 é a adaptação do denominado método A, utilizando a função de Lyapunov racional para o projeto de controle, o Algoritmo 16 é a respectiva adaptação para o método B, e por fim, o Algoritmo 17 é a adaptação relacionada ao método C.

Algoritmo 15: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador Utilizando a Função de Lyapunov Racional - Método A

Entrada: $i_{max}, h(x), m_1(x), n(x), (\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}, \gamma_0 \in \mathbb{N}$ e

P_0 satisfazendo (5.1)

Saída: $P(x), K, Q, R$ e S

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

Passo 1: enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Minimizar λ enquanto calcula-se $V_n(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S)

solucionando as condições (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (5.23) e (5.24) com $\gamma = \gamma_0;$

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

retorne $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

fim

Passo 2: se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

 Utilizando m_0 , faça $P(\hat{x}) = P(x)$ e solucione as condições abaixo através de uma pesquisa linear em γ :

$$\max_{V_n, P, m_3} \gamma \text{ Sujeito a (5.19), (5.34) - (5.36) e } \gamma \geq \gamma_0 \quad (5.37)$$

fim

retorne $P(x)$

fim

Algoritmo 16: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador Utilizando a Função de Lyapunov Racional - Método B

Entrada: $i_{max}, h(x), m_1(x), n(x), \lambda_0 \in \mathbb{R}_{>0}, (\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}, \gamma_0 \in \mathbb{N}$ e P_0 satisfazendo (5.1)

Saída: $P(x), K, Q, R$ e S

início

$i \leftarrow 0;$

$S_0 \leftarrow 0;$

$R_0 \leftarrow I;$

Passo 1: enquanto $i < i_{max}$ **faça**

$Ls \leftarrow \begin{bmatrix} -R_0^{-1}S_0^T & -I_m \end{bmatrix}^T;$

Minimizar λ enquanto calcula-se $V_n(x) \in \Sigma[x], T(x) \in \Sigma[x], \lambda \in \mathbb{R}$ e (Q, R, S)

solucionando as condições (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.12), (5.23) e (5.24) com

$\gamma = \gamma_0;$

se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

| **retorne** $K = -R^{-1}S^T, Q, R, S$

fim

$i \leftarrow i + 1;$

$S_0 \leftarrow S;$

$R_0 \leftarrow R;$

$\lambda_0 \leftarrow \lambda;$

fim

Passo 2: se $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

Utilizando m_0 , faça $P(\hat{x}) = P(x)$ e solucione as condições abaixo através de uma pesquisa linear em γ :

$$\max_{V_n, P, m_3} \gamma \text{ Sujeito a (5.19), (5.34) - (5.36) e } \gamma \geq \gamma_0 \quad (5.38)$$

fim

retorne $P(x)$

fim

Algoritmo 17: Algoritmo Iterativo para Projeto de Controlador Utilizando a Função de Lyapunov Racional - Método C

Entrada: $i_{max}, h(x), m_1(x), n(x), (\beta_v, \beta_t) \in \mathbb{R}_{>0}$ e $(n_v, n_t) \in \mathbb{N}, \gamma_0 \in \mathbb{N}$ e P_0 satisfazendo (5.1)

Saída: $P(x), K, Q, R$ e S

início

Passo 1:

$i \leftarrow 0;$

Encontre os valores de $V_0(x) \in \Sigma[x], T_0(x) \in \Sigma[x]$ e (Q_0, R_0, S_0) solucionando (3.3), (3.4), (3.5), (5.23) e (5.24) com $\gamma = \gamma_0;$

se $\Delta_{c,0} = S_0 R_0^{-1} S_0^T - Q_0 \geq 0$ **então**

 | **retorne** $K = -R_0^{-1} S_0^T, Q_0, R_0$ e $S_0;$

fim

Passo 2:

enquanto $i < i_{max}$ **faça**

 | Encontre os valores de $V_{i+1}(x) \in \Sigma[x], T_{i+1}(x) \in \Sigma[x]$ e $(Q_{i+1}, R_{i+1}, S_{i+1})$ solucionando (3.3), (3.4), (3.5), (3.14), (3.15), (5.23) e (5.24) com $\gamma = \gamma_0;$

 | **se** $\Delta_{c,i+1} = S_{i+1} R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T - Q_{i+1} \geq 0$ **então**

 | **retorne** $K = -R_{i+1}^{-1} S_{i+1}^T, Q_{i+1}, R_{i+1}$ e $S_{i+1};$

 | **fim**

 | $i \leftarrow i + 1;$

fim

Passo 3: **se** $\lambda \leq 0$ **ou** $SR^{-1}S^T - Q \geq 0$ **então**

 | Utilizando m_0 , faça $P(\hat{x}) = P_i(x)$ e solucione as condições abaixo através de uma pesquisa linear em $\gamma:$

$$\max_{V_n, P, m_3} \gamma \text{ Sujeito a (5.19), (5.34) - (5.36) e } \gamma \geq \gamma_0 \quad (5.39)$$

fim

retorne $P(x)$

fim

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS - ESTUDO COMPARATIVO

Neste capítulo será tratado o estudo comparativo entre os três métodos, estes apresentados nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3, que serão referidos neste momento por métodos A, B e C, respectivamente, de forma a simplificar a referência a cada método durante o comparativo. Serão apresentados quatro exemplos numéricos, dos quais dois são sistemas polinomiais não lineares com a entrada afim; Um sistema LTI e um sistema polinomial não linear não afim na entrada. As variáveis que serão comparadas são o número de iterações que o sistema é estabilizado, o número de variáveis SDP que o programa soluciona para cada método e o tempo em que o problema é solucionado. Em todos os exemplos, o otimizador utilizado foi o SeDuMi com o auxílio do SOSTOOLS. O tempo de execução foi calculado de duas formas: primeiramente foi cronometrado o tempo de execução total do algoritmo e em seguida, foi cronometrado o tempo de cada iteração individual, de forma a calcular o tempo médio das iterações para cada método. Em um segundo momento, é apresentado a estabilização de PEs não nulos empregando os controladores projetados para os exemplos ilustrados nas Subseções 6.1.1 e 6.1.2 utilizando as condições EID apresentadas nos capítulos anteriores. Por fim, são apresentados mais dois exemplos para projeto de controlador utilizando funções de Lyapunov racionais. Os resultados obtidos serão comparados com os domínios de atração obtidos através da função de Lyapunov polinomial. Para cada método, foi adotado o número máximo de iterações $i_{max} = 300$. Os resultados deste trabalho foram obtidos através de uma máquina computacional com a placa mãe Lenovo LNVNB161216, com um processador Intel Core i5-8265U, uma memória RAM total de 12Gb com frequência de 2133Mhz, dividido em um pente de 4Gb e outro de 8Gb. Os códigos são executados no Matlab através de um disco rígido SSD M2 Patriot P300 de 256Gb, com velocidade de leitura de 1700Mb/s e gravação de 1100Mb/s, em um sistema operacional Windows 11 Home.

6.1 Comparativo dos Métodos para Estabilização Global de Sistemas LTI e Não Lineares

6.1.1 Sistema Polinomial - Oscilador de Van der Pol

O primeiro sistema a ser abordado é o Oscilador de Van der Pol, utilizado em (Guo *et al.*, 2021). O objetivo é estabilizar globalmente o sistema através do projeto de um ganho K que o estabiliza por meio de um controlador SOF. Seja o sistema descrito por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.1)$$

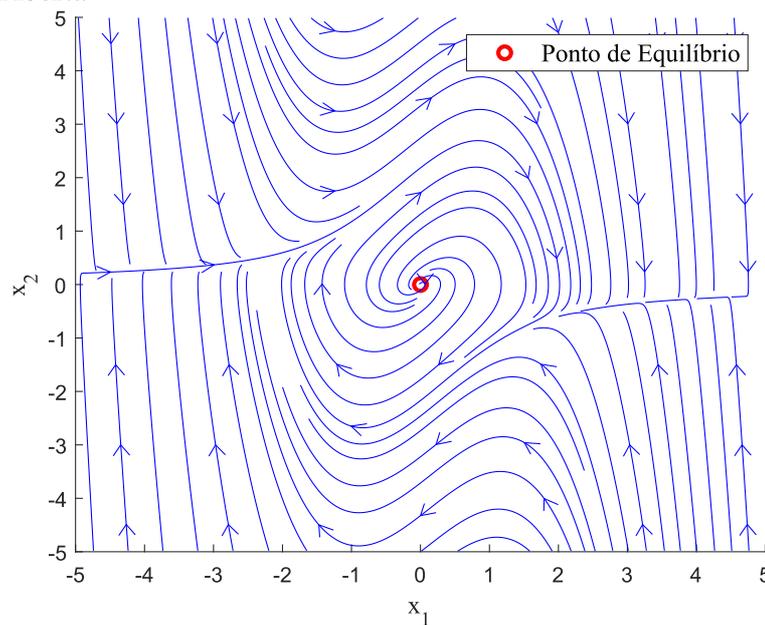
e a saída do sistema $h(x)$ definida por:

$$h(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2. \quad (6.2)$$

Já que a função de controle SOF é definida por $u(x) = K \cdot h(x)$, a função $h(x)$ foi definida dessa forma com o objetivo de ter o mesmo formato da função $u(x)$ que estabilizou o sistema em (Guo *et al.*, 2021).

A Figura 4 indica que o sistema tem a origem como um PE instável para qualquer condição inicial.

Figura 4 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Aberta



Fonte: elaborada pelo autor.

O primeiro método aplicado foi o denominado método A, através do Algoritmo 1, em que verificou-se não ser possível encontrar uma solução factível para o problema em nenhuma inicialização de parâmetros que foram aplicados.

Aplicando o método B, usando o Algoritmo 5 e utilizando o SOSTOOLS, o problema foi factível para um $\lambda_0 = 0.01$ escolhido para inicializar o processo. Além disso, foi escolhido $\beta_v = \beta_t = 1 \cdot 10^{-6}$ e $n_v = n_t = 1$. A aplicação do método resultou em $Q = 0.6754$, $R = 0.4574$, $S = 0.5594$ e $\mu = 0.0378$. Portanto, verifica-se que $\Delta_c = 0.0088 \geq 0$. As seguintes funções

obtidas $V(x)$ e $T(x)$ foram, respectivamente,

$$\begin{aligned}
V(x) = & 0.093951x_1^6 + 1.0106 \cdot 10^{-15}x_1^5x_2 + 0.00018112x_1^4x_2^2 + 0.00023227x_1^3x_2^3 + \\
& 0.00028369x_1^2x_2^4 + 0.00011057x_1x_2^5 + 8.5638 \cdot 10^{-5}x_2^6 + 0.1073x_1^5 + 7.5979 \cdot 10^{-5}x_1^4x_2 + \\
& 0.00013174x_1^3x_2^2 - 0.00011218x_1^2x_2^3 - 0.00032059x_1x_2^4 + 8.6327 \cdot 10^{-5}x_2^5 + 0.34859x_1^4 + \\
& 0.11549x_1^3x_2 + 0.24972x_1^2x_2^2 + 0.033075x_1x_2^3 + 0.036996x_2^4 + 0.30065x_1^3 + 0.025554x_1^2x_2 + \\
& 0.17163x_1x_2^2 - 0.013106x_2^3 + 0.1903x_1^2 + 0.0080242x_1x_2 + 0.089899x_2^2 \quad (6.3)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T(x) = & 0.092679x_1^4 + 7.4676 \cdot 10^{-5}x_1^3x_2 + 0.053578x_1^2x_2^2 + 0.045568x_1x_2^3 + 0.034113x_2^4 + \\
& 0.018185x_1^3 + 0.0038946x_1^2x_2 + 0.014091x_1x_2^2 + 0.0095087x_2^3 + 0.0041159x_1^2 + \\
& 0.00040349x_1x_2 + 0.0022559x_2^2. \quad (6.4)
\end{aligned}$$

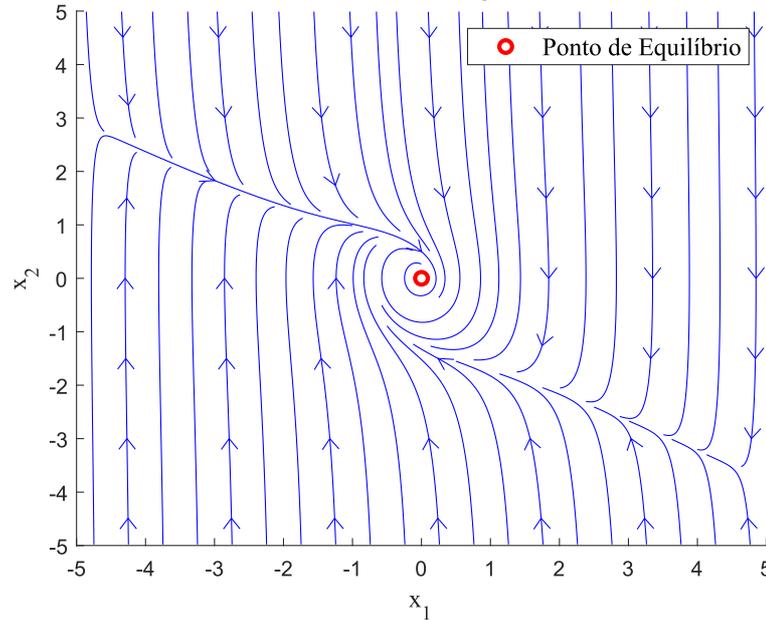
Então, foi possível obter um ganho de SOF $K = -1.2230$ que estabiliza globalmente o sistema em torno da origem para todo $(x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ pela lei de controle SOF. Os resultados do desempenho obtidos através deste método está disponível na Tabela 1.

A Figura 5 indica o desempenho do sistema em malha fechada para o controlador SOF projetado. É possível verificar que a origem é um PE estável e todas as trajetórias convergem para a origem.

Seguindo o procedimento, foi aplicado o método C, implementando o Algoritmo 8, para o mesmo sistema (6.1)-(6.2) e utilizando os mesmos parâmetros iniciais $(\beta_v, \beta_t, n_v, n_t)$ que o método anterior, o problema foi factível em 29 iterações, com os resultados referentes ao desempenho deste método ilustrados na Tabela 1. Obteve-se um ganho de SOF $K = -1.4084$ que estabiliza globalmente o sistema para todo $(x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ através da lei de controle desejada. Foram obtidos os seguintes valores: $Q = 0.1064, R = 0.0454, S = 0.0706, \Delta_c = 0.0035$ e $\mu = 0.01041$. Além disso, foram obtidas as funções $V(x)$ e $T(x)$

$$\begin{aligned}
V(x) = & 0.019723x_1^6 + 3.0332 \cdot 10^{-17}x_1^5x_2 + 0.00010038x_1^4x_2^2 + 0.00011207x_1^3x_2^3 + \\
& 0.00012157x_1^2x_2^4 + 5.2851 \cdot 10^{-5}x_1x_2^5 + 4.0605 \cdot 10^{-5}x_2^6 + 0.017542x_1^5 - 2.4512 \cdot 10^{-6}x_1^4x_2 + \\
& 6.2701 \cdot 10^{-5}x_1^3x_2^2 - 8.3069 \cdot 10^{-6}x_1^2x_2^3 - 3.6795 \cdot 10^{-5}x_1x_2^4 + 5.0427 \cdot 10^{-5}x_2^5 + 0.060901x_1^4 + \\
& 0.028712x_1^3x_2 + 0.039579x_1^2x_2^2 + 0.0096087x_1x_2^3 + 0.0074012x_2^4 + 0.058348x_1^3 + \\
& 0.011044x_1^2x_2 + 0.03025x_1x_2^2 + 0.00097718x_2^3 + 0.04588x_1^2 + 0.0040428x_1x_2 + 0.019854x_2^2 \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Figura 5 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B



Fonte: elaborada pelo autor.

e

$$T(x) = 0.025877x_1^4 + 0.0034409x_1^3x_2 + 0.019777x_1^2x_2^2 + 0.020754x_1x_2^3 + \\ 0.013731x_2^4 + 0.0095678x_1^3 + 0.0047155x_1^2x_2 + 0.011978x_1x_2^2 + 0.0086854x_2^3 + \\ 0.0029352x_1^2 + 0.0010794x_1x_2 + 0.0023057x_2^2. \quad (6.6)$$

A Figura 6 indica as trajetórias em malha fechada do sistema, indicando que a estabilidade assintótica global foi atingida.

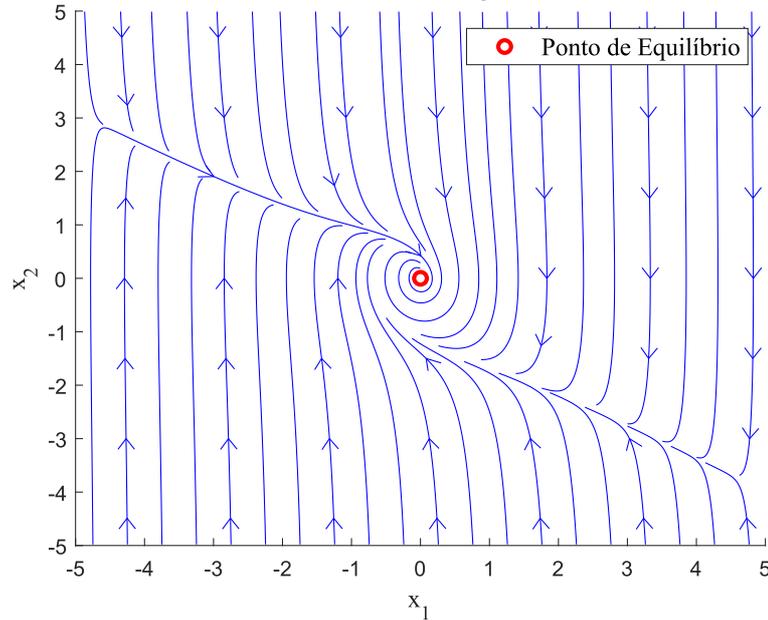
Tabela 1 – Comparativos do Métodos A, B e C - Oscilador de Van der Pol

	Método A	Método B	Método C
Algoritmo	1	5	8
Número de Iterações	-	38	29
Tempo de Execução (s)	-	8.6496	9.6492
Tempo médio por iteração (s)	-	0.2726	0.2810
Dimensão Matriz SDP	-	720×166	716×164

Fonte: elaborado pelo autor.

Verificando a Tabela 1, é possível notar que o método C resolveu o problema em uma quantidade menor de iterações, quando comparado ao método B. Além disso, o método C resolveu o problema com uma quantidade menor de variáveis SDPs, resultando em um esforço computacional menor para resolver cada iteração do problema.

Figura 6 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C



Fonte: elaborada pelo autor.

6.1.2 Exemplo Polinomial 1

Seja o sistema descrito por: (Belhaouane *et al.*, 2009)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_1^2 + x_1x_2 - x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 2x_2^3 \\ -x_1 + 1.5x_2 - x_1^2 - 0.5x_1x_2 - x_1^3 - x_1^2x_2 - 0.5x_1x_2^2 - 2x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.7)$$

e a saída do sistema $h(x)$ definida por

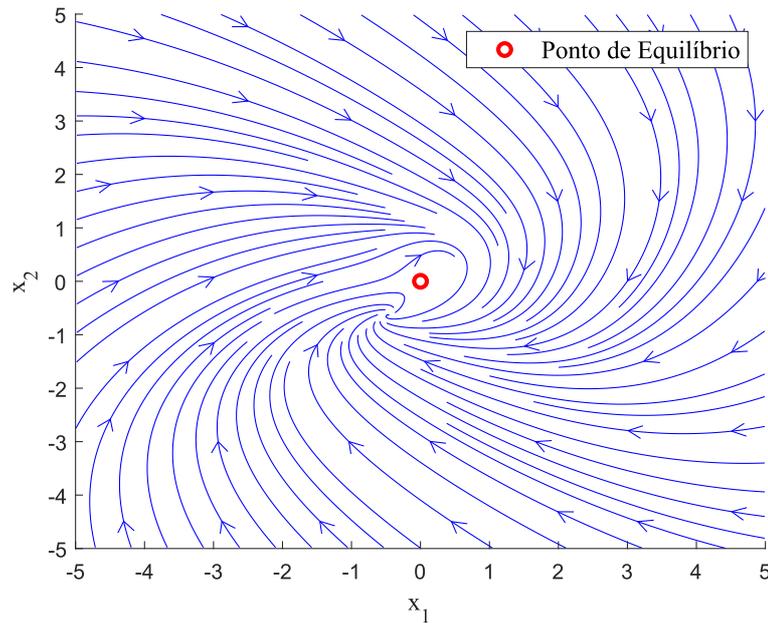
$$h(x) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2. \quad (6.8)$$

Analisando a Figura 7, observa-se que a origem é, novamente, um PE instável e que existe um outro PE estável no sistema. Dessa forma, o objetivo é projetar um controlador SOF de tal forma que a origem seja um PE estável.

Inicialmente, utilizando o Algoritmo 1 para aplicar o método A, foi possível concluir novamente que não houve nenhuma configuração de parâmetros iniciais que permitiram o algoritmo encontrar uma solução factível para o problema proposto.

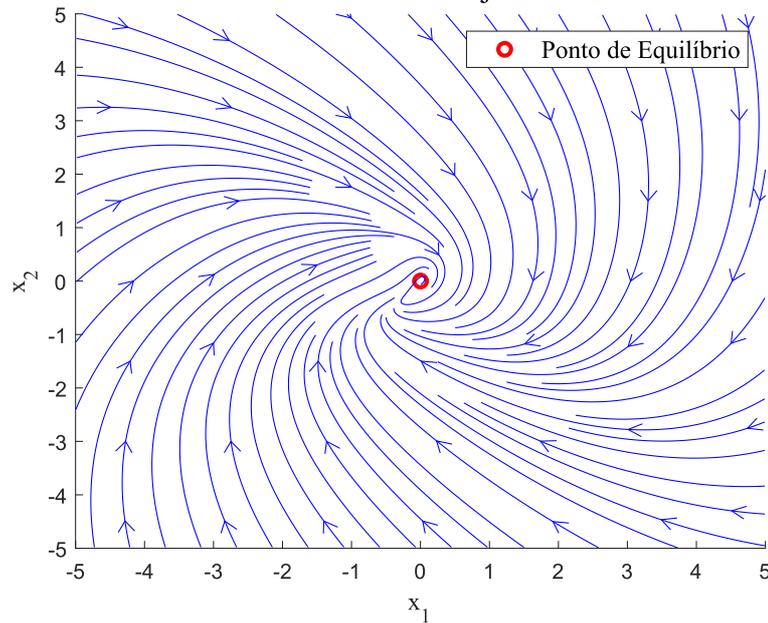
Aplicando o método B, utilizando o Algoritmo 5, o problema foi factível em 28 iterações, para um $\lambda_0 = 1$, $\beta_v = \beta_t = 1 \cdot 10^{-1}$ e $n_v = n_t = 1$. Foram obtidos os respectivos resultados $Q = 5.1869$, $R = 3.3993$, $S = 4.2351$, $\Delta_c = 0.0894$, $\mu = 0.59$ e o ganho de SOF $K = -1.2458$ que estabiliza o sistema globalmente em todo $(x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Os resultados de desempenho referentes ao método B estão ilustrados na Tabela 2.

Figura 7 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Aberta



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 8 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, as funções $V(x)$ e $T(x)$ são, respectivamente,

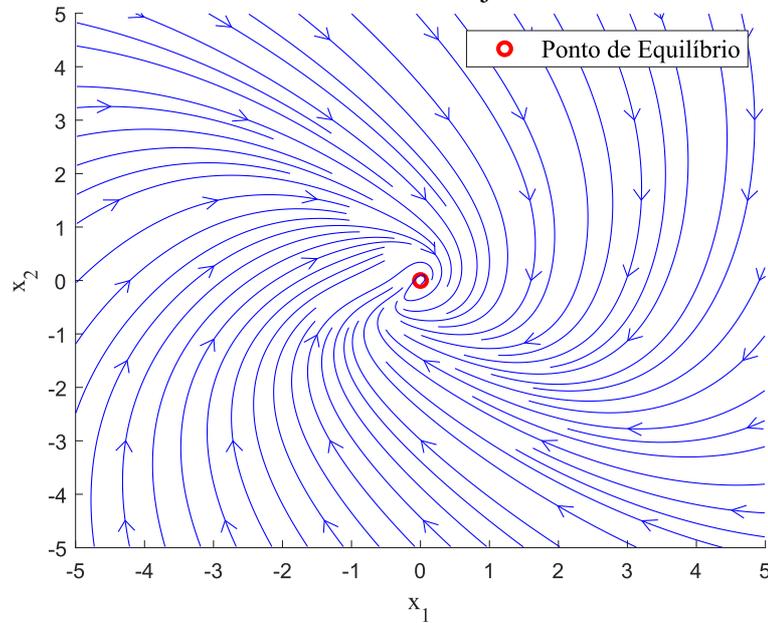
$$\begin{aligned}
 V(x) = & 0.064474x_1^6 - 0.037366x_1^5x_2 + 0.027226x_1^4x_2^2 - 0.0049093x_1^3x_2^3 + \\
 & 0.018371x_1^2x_2^4 - 0.00097599x_1x_2^5 + 0.0054357x_2^6 + 0.015612x_1^5 + 0.031611x_1^4x_2 + \\
 & 0.013306x_1^3x_2^2 + 0.0028932x_1^2x_2^3 + 0.0011474x_1x_2^4 + 0.00026086x_2^5 + 1.0518x_1^4 + \\
 & 0.81276x_1^3x_2 + 1.1087x_1^2x_2^2 + 0.25323x_1x_2^3 + 0.77245x_2^4 + 1.0768x_1^3 + \\
 & 1.5147x_1^2x_2 + 0.81601x_1x_2^2 - 0.086628x_2^3 + 2.8062x_1^2 - 1.7934x_1x_2 + 1.3103x_2^2 \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

e

$$T(x) = 3.0245x_1^4 - 0.87071x_1^3x_2 + 2.1645x_1^2x_2^2 - 1.7398x_1x_2^3 + 3.2563x_2^4 - 0.77823x_1^3 + 0.48177x_1^2x_2 + 0.39924x_1x_2^2 + 0.84824x_2^3 + 0.5998x_1^2 - 0.2123x_1x_2 + 0.28447x_2^2. \quad (6.10)$$

Em seguida, aplicando o método C, através do Algoritmo 8, para a mesma inicialização $(\beta_v, \beta_t, n_v, n_t)$ utilizada no método anterior, o problema foi factível em apenas 21 iterações, resultando em $Q = 1.4072, R = 1.8248, S = 1.6083, \Delta_c = 0.0104, \mu = 0.1007$ e $K = -0.8814$, que através do controlador SOF, estabiliza o sistema globalmente em $(x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. É possível consultar os resultados referentes ao método C na Tabela 2.

Figura 9 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, foram obtidas as respectivas funções $V(x)$ e $T(x)$

$$V(x) = 0.0046483x_1^6 - 0.003015x_1^5x_2 + 0.0018935x_1^4x_2^2 - 0.00053027x_1^3x_2^3 + 0.0015351x_1^2x_2^4 - 0.00011906x_1x_2^5 + 0.00036514x_2^6 + 0.00038166x_1^5 + 0.0021784x_1^4x_2 + 0.00076172x_1^3x_2^2 + 0.00018752x_1^2x_2^3 + 0.00011464x_1x_2^4 + 4.1526 \cdot 10^{-5}x_2^5 + 0.34161x_1^4 + 0.24589x_1^3x_2 + 0.35925x_1^2x_2^2 + 0.076229x_1x_2^3 + 0.24532x_2^4 + 0.29454x_1^3 + 0.45725x_1^2x_2 + 0.23622x_1x_2^2 - 0.011031x_2^3 + 0.82101x_1^2 - 0.55135x_1x_2 + 0.37657x_2^2 \quad (6.11)$$

e

$$T(x) = 1.1036x_1^4 - 0.35501x_1^3x_2 + 0.74926x_1^2x_2^2 - 0.68302x_1x_2^3 + 1.0581x_2^4 - 0.25341x_1^3 + 0.16278x_1^2x_2 + 0.11584x_1x_2^2 + 0.24588x_2^3 + 0.15994x_1^2 - 0.076172x_1x_2 + 0.058262x_2^2. \quad (6.12)$$

Tabela 2 – Comparativos do Métodos A, B e C - Exemplo Polinomial

	Método A	Método B	Método C
Algoritmo	1	5	8
Número de Iterações	-	28	21
Tempo de Execução (s)	-	7.783	11.4715
Tempo médio por iteração (s)	-	0.3825	0.4546
Dimensão Matriz SDP	-	812×173	808×171

Fonte: elaborado pelo autor.

Através da Tabela 2, verifica-se mais uma vez que o método C resolveu o problema em menos iterações e com menos variáveis, quando comparado ao método B. O método B conseguiu ter um desempenho melhor apenas no tempo de execução e tempo médio por iteração.

6.1.3 Exemplo LTI

Nesse exemplo, será estabilizado um sistema LTI através de um controlador linear SOF. O sistema escolhido é ilustrado abaixo (Nozari, 2022):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} u, \quad (6.13)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x. \quad (6.14)$$

Analisando o sistema (6.13)-(6.14) em malha aberta, verifica-se que os autovalores de A são (1, 2, 3). Assim, verifica-se que o sistema é instável. Portanto, o objetivo é projetar um controlador SOF de tal forma que estabilize o sistema assintoticamente.

Primeiramente, aplicando o Algoritmo 4, do método A, não foi possível encontrar uma solução tal que Δ_c atinja um valor positivo ou λ atinja um valor negativo. Não foi possível estabilizar o sistema em questão com este método.

Logo depois, aplicando o Algoritmo 7, referente ao método B, o problema é factível para um $\lambda_0 = 1$ e foi solucionado em 10 iterações, com os resultados de desempenho disponíveis na Tabela 3. O valor do ganho de SOF obtido foi $K = -3.8822$. Também foi obtido que $Q = 2.3260, R = 0.1966, S = 0.7633$. Assim, verifica-se que $\Delta_c = 0.6374 \geq 0$. Então, ao projetar um controlador SOF tal que $u(x) = KCx$, observa-se que a dinâmica do sistema em malha fechada, verificada agora pelos autovalores de $A + BKC$, é estável. Os autovalores obtidos foram $-11.3360, -1.0374 \pm 3.1138i$. Além disso,

$$P = \begin{bmatrix} 0.2164 & 0.1371 & 0.1634 \\ 0.1371 & 1.1251 & 0.8589 \\ 0.1634 & 0.8589 & 0.7762 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.0579 & 0.0409 & 0.0640 \\ 0.0409 & 0.2170 & 0.2338 \\ 0.0640 & 0.2338 & 0.3192 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Seguindo a análise, utiliza-se o Algoritmo 10, do método C, para projetar o controlador de forma a estabilizar o sistema (6.13)-(6.14). O problema foi factível em 22 iterações, tendo os resultados referentes ao desempenho do método na Tabela 3. O valor de K obtido foi $K = -8.2858$, assim como os respectivos valores $Q = 2.0656, R = 0.0797, S = 0.6602$ e

portanto, $\Delta_c = 3.4046 \geq 0$. Os autovalores em malha fechada $-33.8696, -0.7797 \pm 2.6996i$ indicam que a estabilidade assintótica foi atingida através do controlador projetado. Por fim,

$$P = \begin{bmatrix} 0.2042 & 0.1284 & 0.1625 \\ 0.1284 & 1.0033 & 0.7548 \\ 0.1625 & 0.7548 & 0.6703 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.0172 & 0.0295 & 0.0377 \\ 0.0295 & 0.2050 & 0.2368 \\ 0.0377 & 0.2368 & 0.2897 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Tabela 3 – Comparativos do Métodos A, B e C - LTI

	Método A	Método B	Método C
Algoritmo	4	7	10
Número de Iterações	-	10	22
Tempo de Execução (s)	-	3.7520	5.6086
Tempo médio por iteração (s)	-	0.3752	0.1878

Fonte: elaborado pelo autor.

Pela Tabela 3, nota-se que o método B conseguiu resolver o problema com um número menor de iterações, quando comparado ao método C, além de menor tempo de execução e tempo médio por iteração. Com isso, o método B apresentou um desempenho melhor para o exemplo dado.

6.2 Estabilização Local de um Sistema Não Afim na Entrada

Considere o sistema polinomial não afim na entrada (Zhang, 2014) e (Lin, 1995b) descrito como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_1 e^x u^2 \\ x_2^2 u \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Utiliza-se a expansão em Série de Taylor da exponencial para adaptar o sistema para SOSTOOLS:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.18)$$

Então, resulta-se no sistema adaptado, considerando a expansão até o coeficiente $m = 5$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_1 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} u^2 \\ x_2^2 u \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Nesse caso, tem-se que:

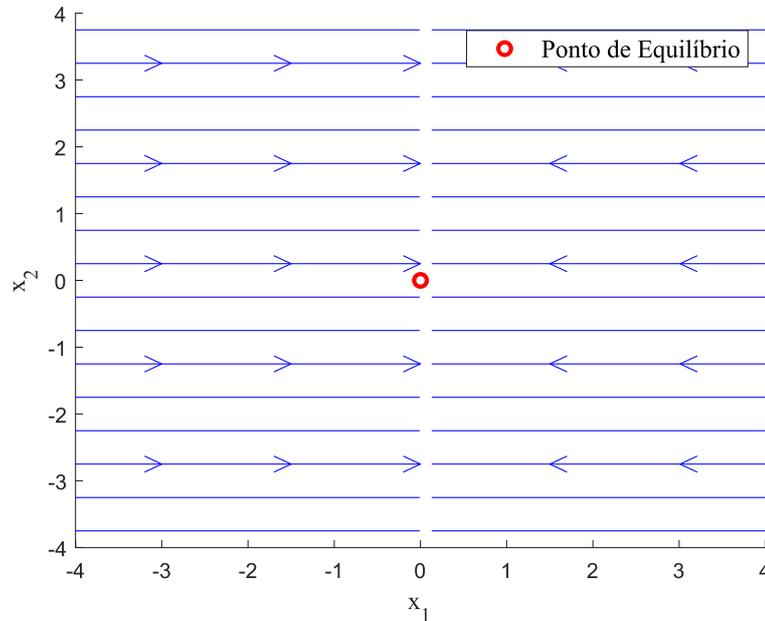
$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix}, l(x, u) = \begin{bmatrix} x_1 \sum_{n=0}^m \frac{x_1^n}{n!} u^2 \\ x_2^2 u \end{bmatrix}, m = 5. \quad (6.20)$$

Considere também a saída do sistema como:

$$h(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2. \quad (6.21)$$

Analisando a dinâmica do sistema em malha aberta, como é exibida na Figura 10, é possível verificar que o sistema não possui a origem como um PE estável. Assim, deseja-se utilizar os 3 métodos propostos com o objetivo de estabilizar localmente o sistema (6.17)-(6.21).

Figura 10 – Trajetórias do Sistema Não Afim na Entrada em Malha Aberta



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, aplicando o método A, usando o Algoritmo 11, verificou-se que não foi possível encontrar uma solução tal que Δ_c atingisse um valor positivo.

Aplicando o método B em seguida, com os valores de inicialização $\lambda_0 = 1$, $\beta_v = \beta_l = 10^{-6}$, $\beta_\alpha = 10^{-2}$, $\beta_u = 10^{-8}$, $n_v = n_l = n_u = 1$ e $n_t = 2 = n_\alpha = 2$ para inicializar o Algoritmo 12, o problema foi factível em 86 iterações. Assim, o problema foi localmente assintoticamente estabilizável pela lei de controle SOF proposta e um ganho obtido $K = -0.0632$. Os valores obtidos foram $Q = 0.0144$, $R = 3.6136$, $S = 0.2285$ e $\Delta_c = -5.1488 \cdot 10^{-10}$. Apesar do valor de Δ_c obtido ser negativo, (Madeira, 2022) provou que Δ_c pode assumir valores negativos contanto que a condição $T(x) + h^T \Delta_c h \in \Sigma[x]$ seja atendida. No caso desse exemplo, a condição

foi atendida, então é possível afirmar que o ganho estabiliza o sistema localmente para a lei de controle proposta. Os resultados referentes ao desempenho deste método são apresentados na Tabela 4. As funções $V(x)$, $L(x)$ e $T(x)$ foram, respectivamente,

$$\begin{aligned} V(x) = & 4.5643 \cdot 10^{-5} x_1^6 + 1.4722 \cdot 10^{-6} x_1^5 x_2 - 8.5918 \cdot 10^{-5} x_1^4 x_2^2 - 1.8121 \cdot 10^{-6} x_1^3 x_2^3 \\ & + 2.1638 \cdot 10^{-5} x_1^2 x_2^4 + 2.7158 \cdot 10^{-7} x_1 x_2^5 + 0.008363 x_2^6 - 1.4654 \cdot 10^{-5} x_1^5 + 0.0018341 x_1^4 x_2 - \\ & 0.00031964 x_1^3 x_2^2 - 0.025728 x_1^2 x_2^3 - 0.00070913 x_1 x_2^4 + 0.0024383 x_2^5 - 0.0033134 x_1^4 + \\ & 0.0013153 x_1^3 x_2 + 0.091574 x_1^2 x_2^2 + 0.0053023 x_1 x_2^3 - 0.016716 x_2^4 + 0.00082473 x_1^3 - \\ & 0.20985 x_1^2 x_2 + 0.011148 x_1 x_2^2 + 0.12454 x_2^3 + 0.19314 x_1^2 - 0.073827 x_1 x_2 + 0.5347 x_2^2, \quad (6.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x) = & 4.5356 x_1^6 + 0.18465 x_1^5 x_2 + 2.4834 x_1^4 x_2^2 + 0.25595 x_1^3 x_2^3 + 2.2672 x_1^2 x_2^4 + 0.10294 x_1 x_2^5 + \\ & 4.6699 x_2^6 + 0.25846 x_1^5 + 0.35979 x_1^4 x_2 + 0.24465 x_1^3 x_2^2 + 0.35836 x_1^2 x_2^3 + 0.19927 x_1 x_2^4 + 0.25628 x_2^5 + \\ & 1.6522 x_1^4 + 0.2075 x_1^3 x_2 + 1.1634 x_1^2 x_2^2 + 0.073428 x_1 x_2^3 + 2.3909 x_2^4 + 0.074682 x_1^3 + \\ & 0.20993 x_1^2 x_2 + 0.12213 x_1 x_2^2 - 0.059643 x_2^3 + 0.63606 x_1^2 - 0.017374 x_1 x_2 + 0.97755 x_2^2 \quad (6.23) \end{aligned}$$

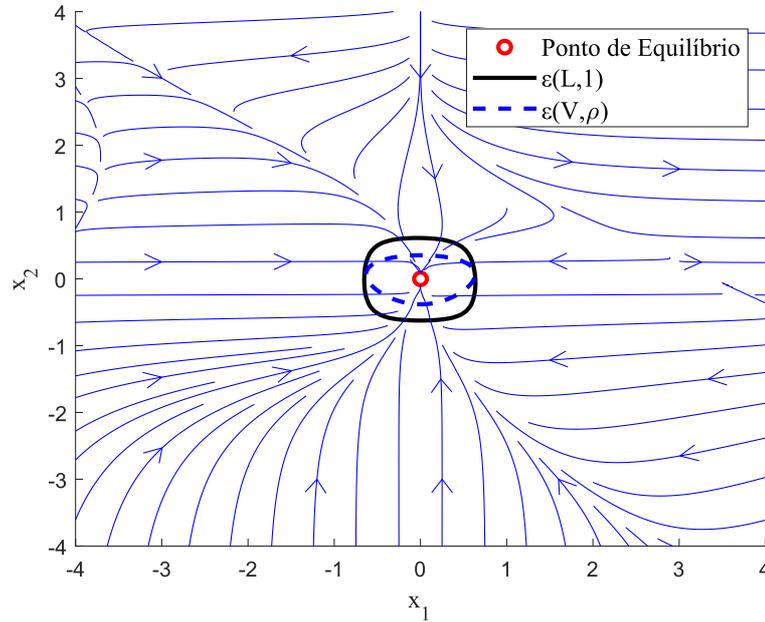
e

$$\begin{aligned} T(x) = & 0.076711 x_1^6 - 0.0034294 x_1^5 x_2 + 0.08787 x_1^4 x_2^2 + 0.0084776 x_1^3 x_2^3 + 0.050724 x_1^2 x_2^4 + \\ & 0.044184 x_1 x_2^5 + 0.033675 x_2^6 - 0.003054 x_1^5 - 0.15967 x_1^4 x_2 + 0.0014704 x_1^3 x_2^2 + 0.030999 x_1^2 x_2^3 + \\ & 0.041185 x_1 x_2^4 + 0.031646 x_2^5 + 0.097096 x_1^4 - 0.016226 x_1^3 x_2 + 0.014938 x_1^2 x_2^2 + 0.026084 x_1 x_2^3 + \\ & 0.016266 x_2^4 + 1.3412 \cdot 10^{-9} x_1^3 - 1.0101 \cdot 10^{-7} x_1^2 x_2 + 4.6021 \cdot 10^{-9} x_1 x_2^2 + 3.2042 \cdot 10^{-8} x_2^3 + \\ & 2.5407 \cdot 10^{-10} x_1^2 + 5.1575 \cdot 10^{-10} x_1 x_2 + 2.5502 \cdot 10^{-10} x_2^2. \quad (6.24) \end{aligned}$$

A Figura 11 ilustra o sistema (6.17)-(6.21) estabilizado localmente com a lei de controle proposta, assim como o domínio de atração estimado através de $L(x)$ e o elipsoide maximizado $\varepsilon(V, \rho)$, com $\rho = 0.0880$, obtido através do Algoritmo 3.

Por fim, ao aplicar o método C (Algoritmo 13), com os parâmetros iniciais utilizados em $\beta_v = \beta_l = \beta_r = 10^{-6}$, $\beta_\alpha = 10^{-2}$, $\beta_u = 10^{-9}$, $n_v = n_l = 1$ e $n_u = n_r = 2 = n_\alpha = 2$, o problema foi factível em 70 iterações, com os seguintes valores obtidos: $K = -0.1383$, $Q = 0.0366$, $R = 1.9128$, $S = 0.2646$ e $\Delta_c = 3.2074 \cdot 10^{-12}$. Os resultados de desempenho referentes ao método C estão disponíveis na Tabela 4. Foram também obtidas as funções $V(x)$, $L(x)$ e $T(x)$, conforme

Figura 11 – Trajetórias do Sistema Não Afim na Entrada em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B



Fonte: elaborada pelo autor.

mostrado em seguida:

$$\begin{aligned}
 V(x) = & 0.0030869x_1^6 - 4.5703 \cdot 10^{-5}x_1^5x_2 - 0.0015737x_1^4x_2^2 + 4.5059 \cdot 10^{-5}x_1^3x_2^3 - \\
 & 0.00032897x_1^2x_2^4 + 2.8652 \cdot 10^{-5}x_1x_2^5 + 0.091907x_2^6 - 0.00027333x_1^5 + 0.011668x_1^4x_2 - \\
 & 0.0031393x_1^3x_2^2 - 0.12241x_1^2x_2^3 - 0.00097841x_1x_2^4 + 0.095417x_2^5 - 0.038156x_1^4 + 0.0094415x_1^3x_2 \\
 & + 0.035936x_1^2x_2^2 + 0.010379x_1x_2^3 + 0.17762x_2^4 + 0.0028953x_1^3 - 0.15695x_1^2x_2 + 0.032407x_1x_2^2 + \\
 & 0.16334x_2^3 + 0.27225x_1^2 - 0.11202x_1x_2 + 0.53583x_2^2, \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

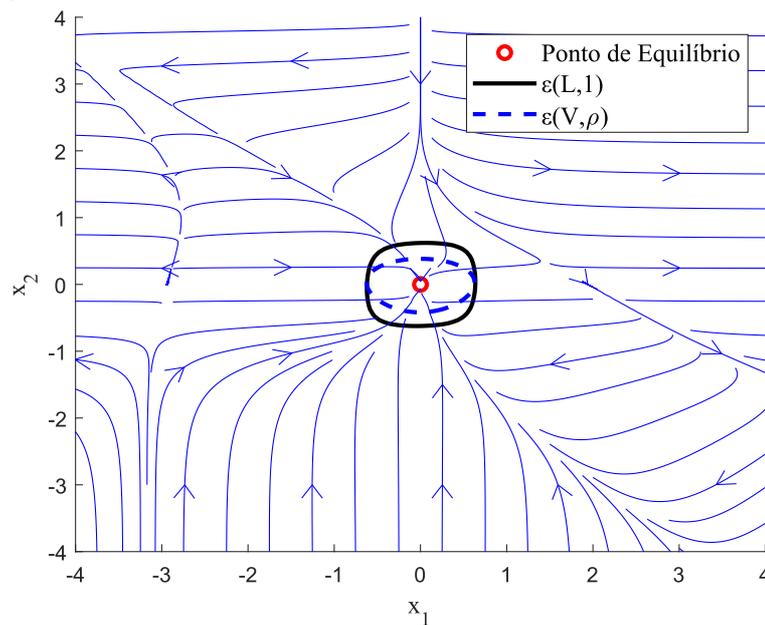
$$\begin{aligned}
 L(x) = & 8.6694x_1^6 - 0.20346x_1^5x_2 + 3.9913x_1^4x_2^2 - 0.23267x_1^3x_2^3 + 3.3691x_1^2x_2^4 - 0.16473x_1x_2^5 + \\
 & 8.6278x_2^6 - 0.17435x_1^5 + 0.016367x_1^4x_2 - 0.10503x_1^3x_2^2 - 0.023048x_1^2x_2^3 - 0.020926x_1x_2^4 + \\
 & 0.26796x_2^5 + 2.0977x_1^4 - 0.3137x_1^3x_2 + 1.2665x_1^2x_2^2 - 0.32646x_1x_2^3 + 2.294x_2^4 - 0.057607x_1^3 + \\
 & 0.036089x_1^2x_2 - 0.018082x_1x_2^2 - 0.010974x_2^3 + 0.87061x_1^2 - 0.10804x_1x_2 + 0.90278x_2^2 \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T(x) = & 0.15628x_1^6 - 0.023024x_1^5x_2 + 0.12799x_1^4x_2^2 + 0.027096x_1^3x_2^3 + 0.13001x_1^2x_2^4 \\
& + 0.10132x_1x_2^5 + 0.098908x_2^6 - 0.017516x_1^5 - 0.12612x_1^4x_2 - 0.0076987x_1^3x_2^2 + 0.040622x_1^2x_2^3 + \\
& 0.078132x_1x_2^4 + 0.086387x_2^5 + 0.14023x_1^4 - 0.043262x_1^3x_2 - 0.0090169x_1^2x_2^2 + 0.053936x_1x_2^3 + \\
& 0.039745x_2^4 - 5.503 \cdot 10^{-9}x_1^3 - 1.9621 \cdot 10^{-9}x_1^2x_2 - 8.5239 \cdot 10^{-9}x_1x_2^2 + 7.9214 \cdot 10^{-9}x_2^3 + \\
& 1.2334 \cdot 10^{-12}x_1^2 + 1.5405 \cdot 10^{-12}x_1x_2 + 9.901 \cdot 10^{-13}x_2^2. \quad (6.27)
\end{aligned}$$

A Figura 12 exibe o sistema (6.17)-(6.21) localmente assintoticamente estabilizado a partir do controlador proposto. Após aplicar o Algoritmo 3, é possível também verificar $\varepsilon(L, 1)$ e $\varepsilon(V, \rho)$, com $\rho = 0.1030$.

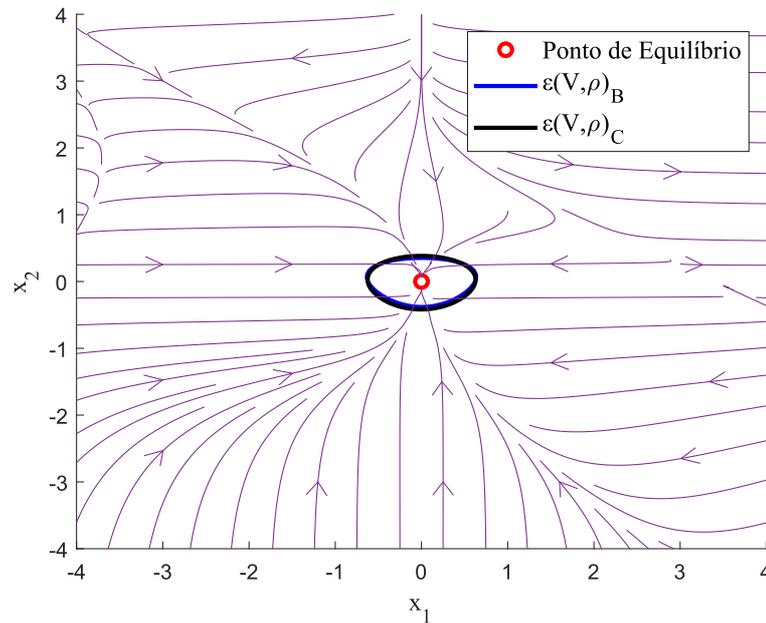
Figura 12 – Trajetórias do Sistema Não Afim na Entrada em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C



Fonte: elaborada pelo autor.

Então, conclui-se que a partir dos métodos B e C, foi possível projetar um controlador SOF de forma a estabilizar assintoticamente local o sistema (6.17)-(6.21), assim como ter uma estimativa do seu domínio de atração. A Figura 13 ilustra a comparação entre os domínios de atração estimados através dos métodos B e C. É possível ver que os domínios estimados são bem similares, mas é um resultado esperado, visto que o método de estimação do domínio de atração foram equivalentes para os dois métodos.

Figura 13 – Comparação dos Domínios de Atração Obtidos Através dos Métodos B e C



Fonte: elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Comparativos do Métodos A, B e C - Exemplo Não Afim

	Método A	Método B	Método C
Algoritmo	11	12	13
Número de Iterações	-	86	70
Tempo de Execução (s)	-	187.9121	261.6969
Tempo médio por iteração (s)	-	2.1850	3.7385
Dimensão Matriz SDP	-	7868 × 694	12869 × 899

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir da Tabela 4, é possível concluir que o método C resolveu o problema com uma quantidade menor de iterações, quando comparado ao método B. Entretanto, ele exigiu um esforço computacional maior, tendo uma matriz SDP bem maior quando comparada ao método B, e assim, obteve-se um tempo de execução maior para solucionar o problema.

6.3 Exemplos Numéricos - EID

Esta Seção aborda a estabilização de sistemas não lineares em PEs não nulos. Para isso, foram utilizados os exemplos ilustrados em 6.1.1 e 6.1.2 e a partir dos controladores projetados para cada exemplo, foi utilizada as Equações 2.17, 2.17 e 2.36 com o intuito de calcular novos PEs $x \in \xi$ e adequar a lei de controle para estabilizar o sistema em torno do PE desejado.

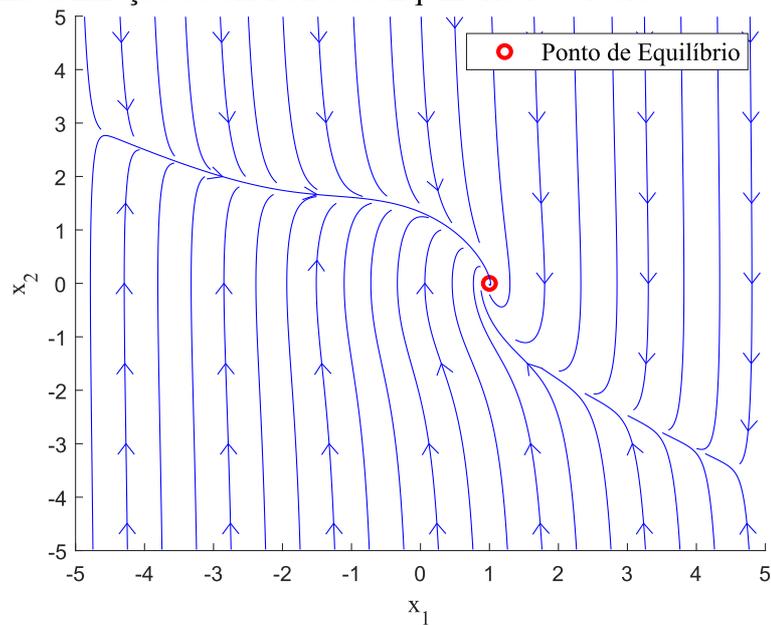
6.3.1 Oscilador de Van der Pol

Primeiramente, foram utilizadas as condições (2.17) e (2.18) de forma a calcular (x^*, u^*, y^*) . Assim, foram obtidos os seguintes resultados:

$$x^* = (1, 0), u^* = 1, h(x^*) = 3. \quad (6.28)$$

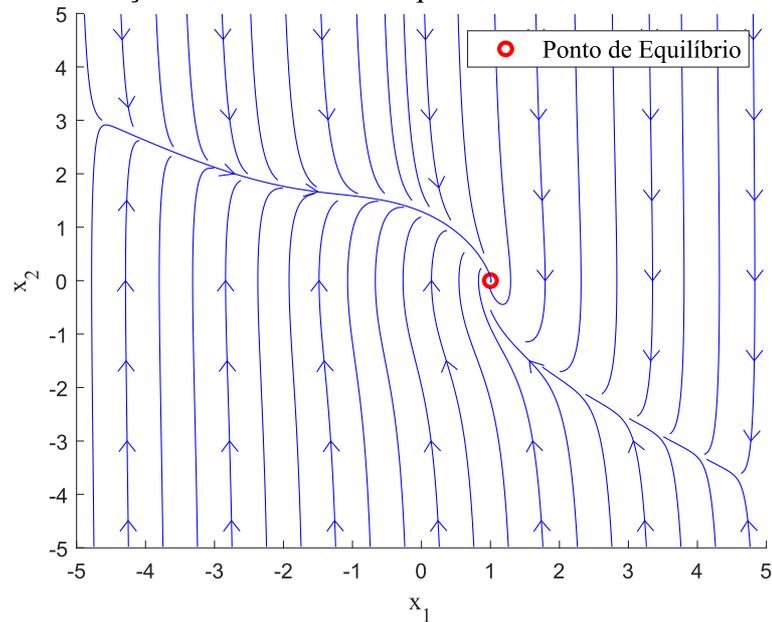
Então, aplicando a lei de controle (2.36) com os dados expressados em (6.28), é possível estabilizar o novo ponto de equilíbrio desejado x^* . A Figura 14 exhibe a estabilização do novo PE para o método B e a Figura 15 ilustra a estabilização do novo PE para o método C. Foi possível verificar que em ambos os casos, a estabilização do PE $x^* = (1, 0)$ foi alcançada.

Figura 14 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 15 – Trajetórias do Oscilador de Van der Pol em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo



Fonte: elaborada pelo autor.

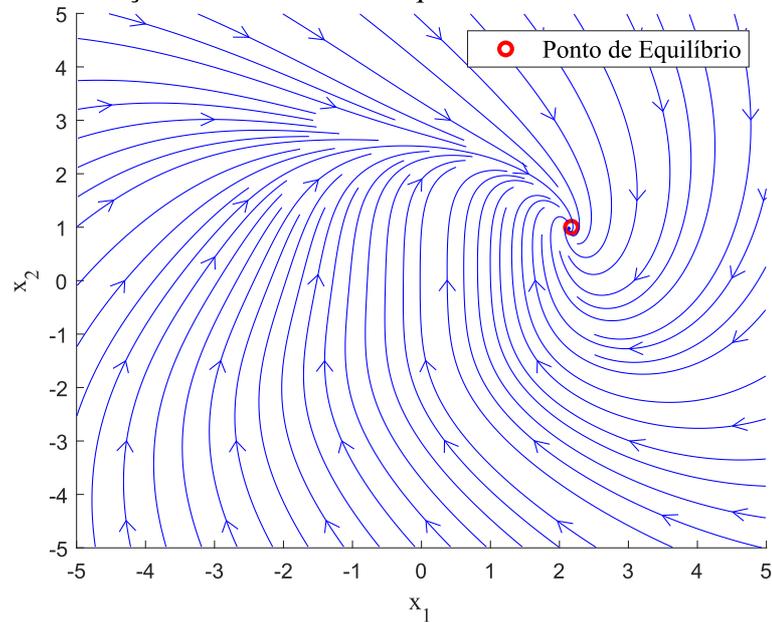
6.3.2 Exemplo Polinomial 1

Utilizando novamente as condições (2.17) e (2.18) aplicadas ao sistema (6.7)-(6.8), foram calculados (x^*, u^*, y^*) , tais como expressados abaixo:

$$x^* = (2.1746, 1), u^* = 22.4158, h(x^*) = 29.2650. \quad (6.29)$$

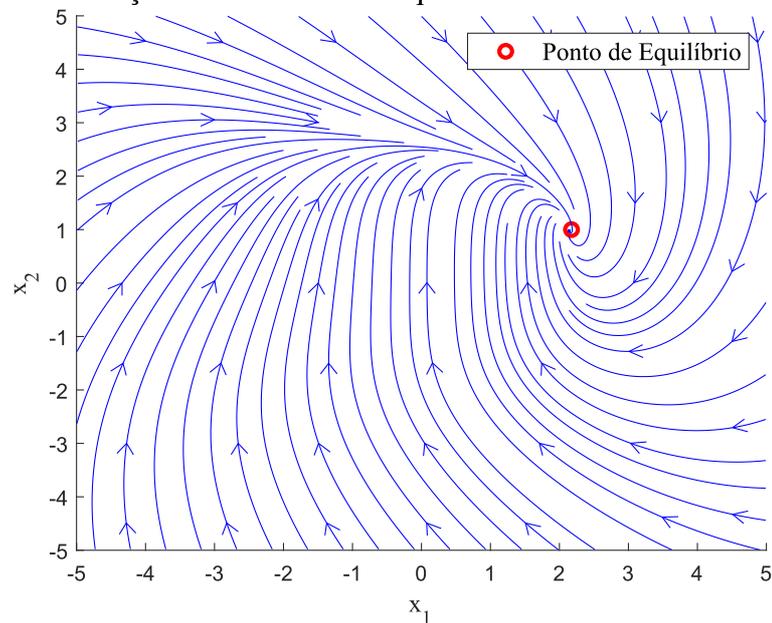
Assim, usando os valores ilustrados em (6.29), foi possível estabilizar o PE não nulo, para ambos métodos aplicados. A Figura 16 ilustra a estabilização para o método B e a Figura 17 ilustra a estabilização do mesmo PE para o método C. Verifica-se que, para ambos os controladores projetados, foi possível estabilizar um PE não nulo.

Figura 16 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método B - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 17 – Trajetórias do Sistema Polinomial 1 em Malha Fechada utilizando o Controlador Projetado no Método C - Estabilização de um Ponto de Equilíbrio Não Nulo



Fonte: elaborada pelo autor.

6.4 Estabilização de Sistemas Não Lineares utilizando Funções de Lyapunov Racionais

Nesta seção será introduzido os exemplos de projeto de controladores utilizando funções de Lyapunov racionais através dos métodos A, B e C. Em seguida, será realizada a comparação entre os domínios de atração estimados entre as funções racionais e polinomiais.

A comparação será realizada entre o domínio $\varepsilon(P, \gamma)$ e $\varepsilon(V_{max}, \rho)$, em que é obtido através do maior conjunto $\varepsilon(L_{max}, \theta)$. Para isso, será obtido através dos métodos A, B e C, uma função $L(x)$, em que o conjunto $\varepsilon(L, 1)$ indica o domínio de atração estimado para funções de Lyapunov polinomial. Em seguida, será utilizada a condição (5.19) a fim de maximizar esse domínio para um domínio $\varepsilon(L_{max}, \theta)$, em que este é o maior domínio de atração não contrativo. Após isso, é utilizado o Algoritmo 3 para obter o maior domínio $\varepsilon(V_{max}, \rho)$.

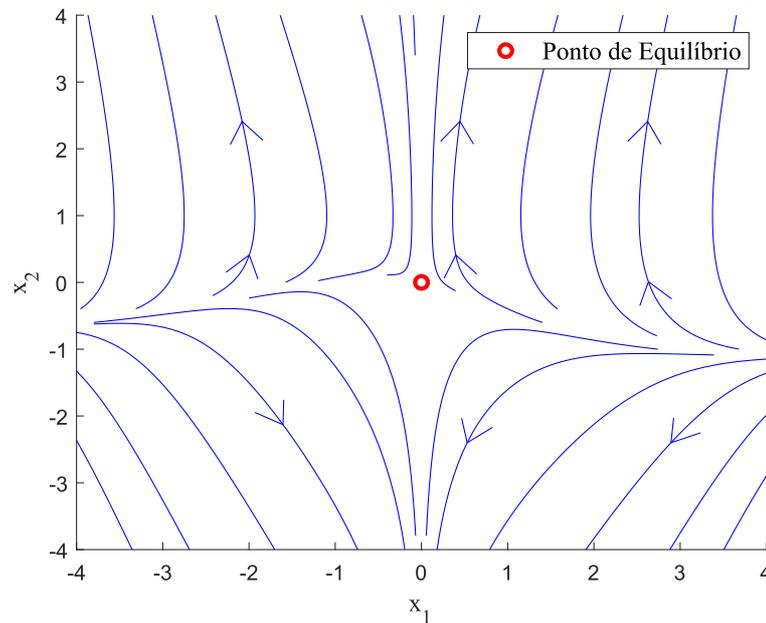
6.4.1 Exemplo Polinomial 2

Considere o sistema retirado do (Baldi, 2016):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_1^2 + x_1^2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.30)$$

com a saída do sistema $h(x) = x_1 + 10x_2$. Verificando a Figura 18, conclui-se que o sistema é instável em malha aberta.

Figura 18 – Trajetórias do Sistema Polinomial 2 em Malha Aberta



Fonte: elaborada pelo autor.

Com o intuito de estabilizar o sistema (6.30), foram utilizados os Algoritmos 15 e 16 e verificou-se que não foi possível encontrar nenhuma inicialização dos parâmetros que fosse possível estabilizar o sistema. Utilizando o Algoritmo 17, foi possível encontrar uma solução com os parâmetros $\beta_v = 10^{-8}$, $\beta_t = 10^{-12}$, $n_v = n_t = 1$, em que $V(x)$, $T(x)$, $m_0(x)$ e $m_1(x)$ são funções de graus 4, 2, 4 e 6, respectivamente. Além disso, $P_0(x) = x_1^4 + x_2^4$, $\gamma_0 =$

$1 \cdot 10^{-5}$. Então, solucionando o problema, foram obtidos $\gamma = 4.24$ e $\Delta = 1.5973 \cdot 10^{-8} > 0$ com $Q = 4.3187 \cdot 10^{-4}$, $R = 2.3450 \cdot 10^{-6}$, $S = 3.1824 \cdot 10^{-5}$ e $k = -13.5710$. Foi obtido também:

$$P(x) = 0.027355x_1^4 + 0.034209x_1^3x_2 - 0.0032418x_1^2x_2^2 + 0.030305x_1x_2^3 + 0.25958x_2^4 + 0.16121x_1^3 + 0.047209x_1^2x_2 - 0.97378x_1x_2^2 - 0.015258x_2^3 + 1.2873x_1^2 - 0.06893x_1x_2 + 0.19012x_2^2 \quad (6.31)$$

compondo a estimativa do domínio de atração $\varepsilon(P, \gamma)$. Foi necessário implementar duas condições no Algoritmo de forma a auxiliar na factibilidade do problema, sendo estas $S > 0.000005$ e $R < 0.00001$. Para comparar com esse resultado, foi aplicado o Algoritmo 9, referente ao método C, para comparar o domínio de atração obtido entre os métodos equivalentes. Após a aplicação do método, foi maximizado o domínio $\varepsilon(L_{max}, \theta)$. Por fim, foi obtido o maior ρ através do Algoritmo 3 para obter o maior domínio contrativo e invariante $\varepsilon(V_{max}, \rho)$.

$$L_{max}(x) = 90.1443x_1^4 - 10.5255x_1^3x_2 + 70.7058x_1^2x_2^2 - 8.8889x_1x_2^3 + 88.4703x_2^4 - 5.3192x_1^3 + 7.7493x_1^2x_2 - 6.6733x_1x_2^2 + 4.7937x_2^3 + 19.433x_1^2 - 1.8612x_1x_2 + 19.3956x_2^2, \quad \theta = 100. \quad (6.32)$$

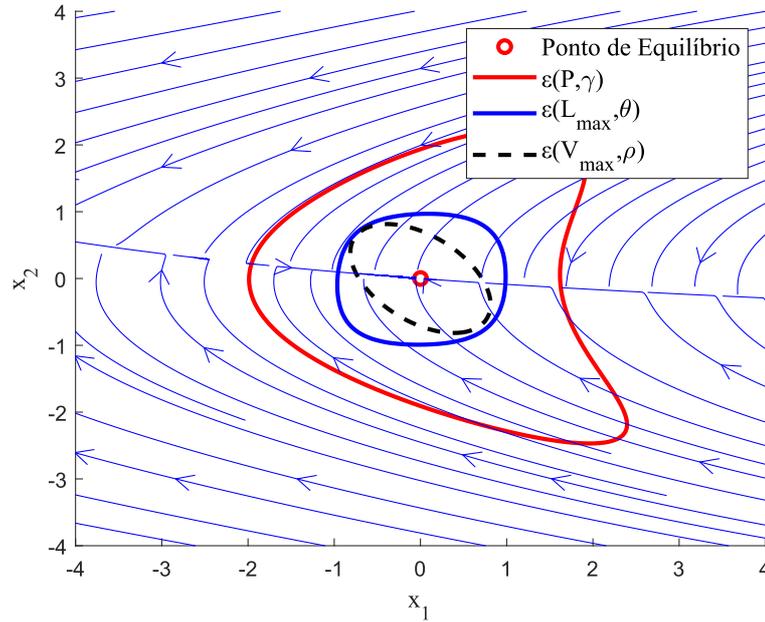
e

$$V_{max}(x) = 21.8932x_1^2 + 20.9411x_1x_2 + 21.7629x_2^2, \quad \rho = 11.15. \quad (6.33)$$

A Figura 19 ilustra os três domínios obtidos. Vale ressaltar que apenas $\varepsilon(P, \gamma)$ e $\varepsilon(V, \rho)$ são contrativos e invariantes.

É possível verificar, através da Figura 19, que a utilização de uma função de Lyapunov racional contribui de forma significativa para a estimativa do domínio de atração, sendo capaz de gerar um domínio bem maior quando comparada à utilização de uma função de Lyapunov Polinomial.

Figura 19 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 2 em Malha Fechada - Método C



Fonte: elaborada pelo autor.

6.4.2 Exemplo Polinomial 3

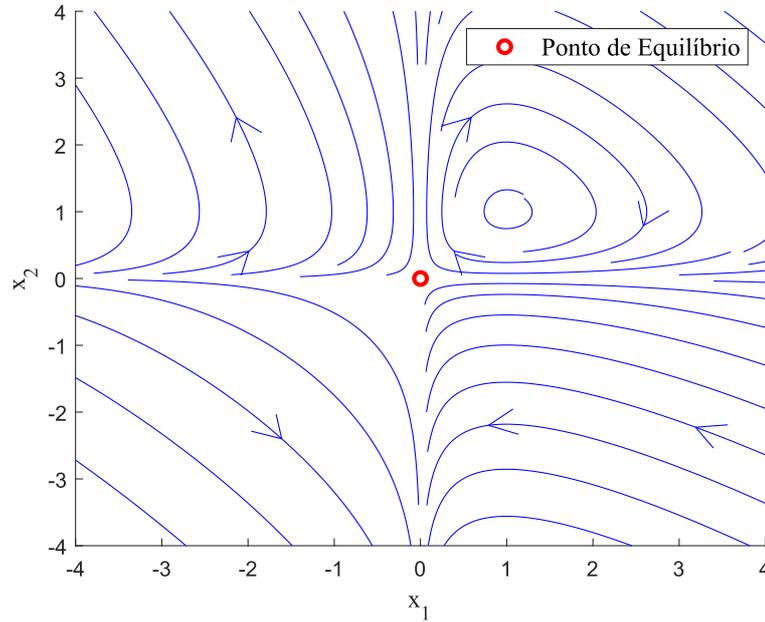
Considere o sistema retirado do Exemplo 3.1 do (Khalil, 2002):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.34)$$

e considere a saída do sistema $h(x) = x_2$. Primeiramente, é verificado que o sistema é instável em malha aberta, como ilustrado na Figura 20.

Não foi possível encontrar uma solução factível utilizando o método A através do Algoritmo 15 para estabilizar o sistema. Ao aplicar o método B para estabilizar o sistema, utilizando o Algoritmo 16 e os parâmetros de inicialização $\beta_v = \beta_t = 10^{-8}$ e $n_v = n_t = 1$, em que $V(x), T(x), m_0(x)$ e $m_1(x)$ são funções de graus 4, 2, 6 e 6, respectivamente. Além disso, $P_0(x) = x_1^2 + 10x_2^4$, $\gamma_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ e $\lambda_0 = 1$. Então, o problema foi factível com $\gamma = 1.6, \Delta_c = 1.5457 \cdot 10^{-7} > 0$ e $Q = 1, R = 0.01, S = 0.1$ e $K = -10$. Foi obtido a função $P(x)$ como descrito abaixo:

Figura 20 – Trajetórias do Sistema Polinomial 3 em Malha Aberta



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 0.13168x_1^6 - 0.0081643x_1^5x_2 + 0.38887x_1^4x_2^2 + 0.0012785x_1^3x_2^3 + 0.33095x_1^2x_2^4 - \\
 & 0.0019085x_1x_2^5 + 0.47368x_2^6 + 8.1449 \cdot 10^{-5}x_1^5 - 0.15932x_1^4x_2 - 0.0013465x_1^3x_2^2 - 0.01938x_1^2x_2^3 - \\
 & 0.035346x_1x_2^4 - 0.0041818x_2^5 - 0.89074x_1^4 + 0.042541x_1^3x_2 - 1.019x_1^2x_2^2 + 0.01152x_1x_2^3 + \\
 & 0.3285x_2^4 - 0.00014988x_1^3 + 0.25692x_1^2x_2 + 0.0027171x_1x_2^2 - 0.062864x_2^3 + 2.0592x_1^2 - \\
 & 0.046155x_1x_2 + 0.74754x_2^2, \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

que compõe o domínio de atração $\varepsilon(P, \gamma)$. Foi necessário acrescentar duas condições auxiliares no problema, sendo estas $S > 0.1$ e $R < 0.01$. Observe que os parâmetros obtidos para R e S foram iguais às condições auxiliares impostas. Assim, o projeto foi ineficiente pois o programa apenas encontrou factibilidade para um controlador nesse ponto e solucionou o problema com uma única iteração. Ao aplicar o método B utilizando função de Lyapunov polinomial, através do Algoritmo 6 e maximizar os domínios $\varepsilon(L, \theta)$ e $\varepsilon(V, \rho)$, obteve-se:

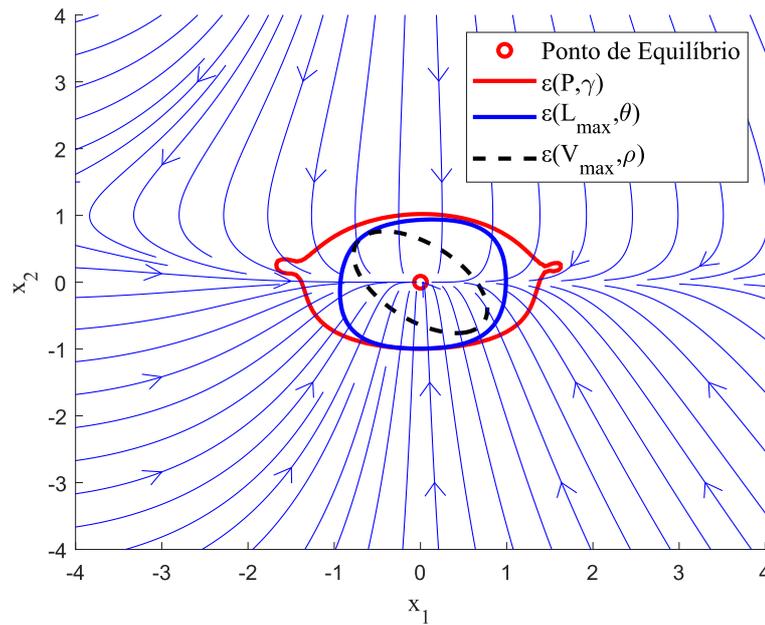
$$\begin{aligned}
 L_{max}(x) = & 91.0696x_1^4 - 12.8948x_1^3x_2 + 74.0486x_1^2x_2^2 - 12.1978x_1x_2^3 + 89.3297x_2^4 - 12.8861x_1^3 \\
 & + 14.1068x_1^2x_2 - 13.5841x_1x_2^2 + 12.0708x_2^3 + 20.6203x_1^2 - 4.7183x_1x_2 + 20.3039x_2^2, \quad \theta = 96, \\
 & (6.36)
 \end{aligned}$$

e

$$V_{max}(x) = 24.1339x_1^2 + 26.5253x_1x_2 + 24.9632x_2^2, \quad \theta = 10.29. \quad (6.37)$$

A Figura 21 indica os domínios estimados $\varepsilon(P, \gamma)$, $\varepsilon(L_{max}, \theta)$ e $\varepsilon(V_{max}, \rho)$. É possível ver que a estimativa utilizando uma função de Lyapunov racional proporcionou uma estimativa bem maior quando comparado ao caso polinomial ao utilizar o método B. O domínio contrativo e invariante $\varepsilon(P, \gamma)$ foi maior que o domínio $\varepsilon(L_{max}, \theta)$, cujo esse não é garantido de ser contrativo e invariante.

Figura 21 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 3 em Malha Fechada - Método B



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida, aplicando o Algoritmo 17 para projetar o controlador através do método C, com as inicializações $\beta_v = \beta_t = 10^{-8}$ e $n_v = n_t = 1$, em que $V(x), T(x), m_0(x)$ e $m_1(x)$ são funções de graus 4, 2, 4 e 6, respectivamente. Além disso, $P_0(x) = x_1^2 + 10x_2^4 e \gamma_0 = 1 \cdot 10^{-5}$. Então, o problema foi factível com $\gamma = 2.55, \Delta_c = 3.0351 \cdot 10^{-9} > 0$ com $Q = 0.6132, R = 0.0137, S = 0.0917$ e $k = -6.6860$, obtendo

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 0.05604x_1^6 - 0.010188x_1^5x_2 + 0.35324x_1^4x_2^2 - 0.006318x_1^3x_2^3 + 0.37438x_1^2x_2^4 \\
 & + 0.011184x_1x_2^5 + 0.67766x_2^6 - 0.00056811x_1^5 - 0.11426x_1^4x_2 - 0.012177x_1^3x_2^2 - 0.13422x_1^2x_2^3 \\
 & - 0.026499x_1x_2^4 - 0.048705x_2^5 - 0.59323x_1^4 + 0.085115x_1^3x_2 - 1.5948x_1^2x_2^2 + 0.046931x_1x_2^3 \\
 & + 0.10511x_2^4 + 0.0012317x_1^3 + 0.30581x_1^2x_2 + 0.018658x_1x_2^2 + 0.03359x_2^3 + 2.1261x_1^2 \\
 & - 0.14548x_1x_2 + 1.8794x_2^2 \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

compondo o domínio de atração $\varepsilon(P, \gamma)$. Foram acrescentadas $S > 0.09$ e $R < 0.02$ como condições auxiliares do problema SOS. Seguindo o processo e aplicando o método C para o caso

polinomial, através do Algoritmo 9 e maximizando os domínios $\varepsilon(L, \theta)$ e $\varepsilon(V, \rho)$, obteve-se

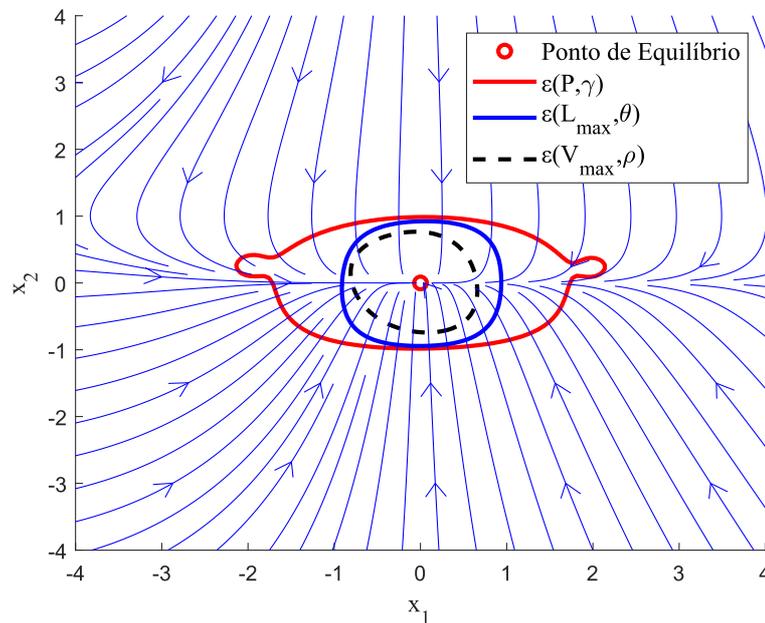
$$L_{max}(x) = 108.3273x_1^4 - 9.5259x_1^3x_2 + 80.5579x_1^2x_2^2 - 6.6209x_1x_2^3 + 103.5921x_2^4 - 6.9273x_1^3 + 7.938x_1^2x_2 - 6.3091x_1x_2^2 + 4.959x_2^3 + 24.7268x_1^2 - 1.7736x_1x_2 + 24.3877x_2^2, \theta = 100, \quad (6.39)$$

e

$$V_{max}(x) = 11.4129x_1^4 + 13.4218x_1^3x_2 + 14.7149x_1^2x_2^2 + 5.5695x_1x_2^3 + 12.5104x_2^4 + 9.2249x_1^3 + 0.87093x_1^2x_2 - 1.3952x_1x_2^2 - 1.5201x_2^3 + 23.1577x_1^2 + 2.3531x_1x_2 + 18.7776x_2^2, \rho = 14.6. \quad (6.40)$$

A Figura 22 indica que o domínio de atração estimado pela função de Lyapunov racional também foi maior quando comparado ao caso polinomial para o método C. O domínio contrativo e invariante $\varepsilon(P, \gamma)$ foi maior que o domínio $\varepsilon(L_{max}, \theta)$, cujo esse não é garantido de ser contrativo e invariante.

Figura 22 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 3 em Malha Fechada - Método C

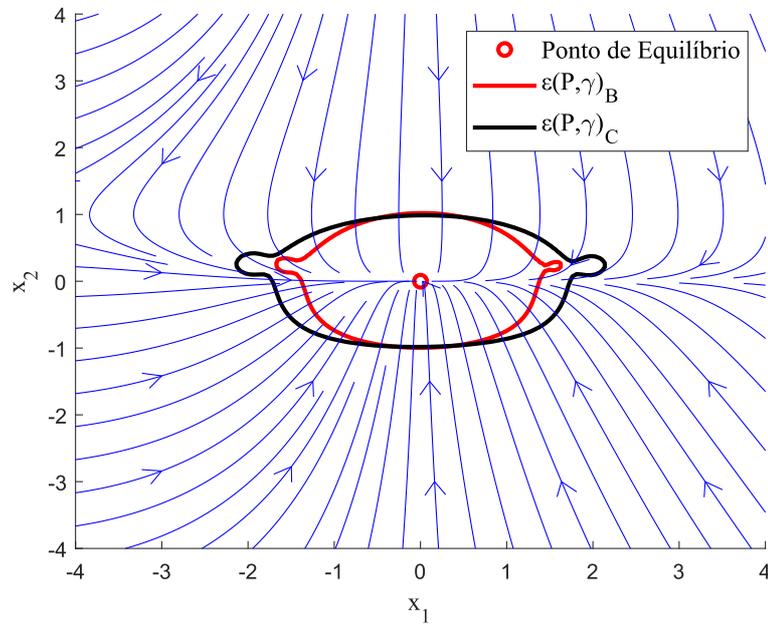


Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, através da Figura 23, conclui-se que ambos os métodos B e C conseguiram estabilizar o sistema localmente e estimar domínios de atração maiores quando comparados à utilização de funções de Lyapunov polinomiais. Além disso, é possível afirmar que o domínio de atração obtido através da função de Lyapunov racional pelo método C foi maior quando comparado ao método B, para os mesmos parâmetros de inicialização. Essa divergência entre

os domínios obtidos através da função de Lyapunov racional pode ser justificadas através de questões computacionais ao aplicar o problema no SOSTOOLS.

Figura 23 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial 3 em Malha Fechada - Método B e C



Fonte: elaborada pelo autor.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação foram apresentados resultados que contribuem para o problema de estabilização de sistemas não lineares utilizando a teoria da dissipatividade. A partir da análise dos resultados obtidos, verifica-se que foi possível comparar os resultados obtidos entre cada método iterativo que foi apresentado neste trabalho e também foi possível desenvolver dois novos teoremas, o primeiro apresentando condições que permitissem a estabilização de sistemas não afins na entrada, e o segundo, apresentando novas condições de estabilização local de sistemas utilizando funções de Lyapunov racionais.

Para os quatro exemplos apresentados relativos a funções de Lyapunov polinomiais, verificou-se que o método C teve resultados bem melhores de maneira geral, quando comparada aos outros métodos. Em quase todos os casos essa abordagem possuía uma matriz de variáveis SDPs menor quando comparado ao método B. Também foi possível solucionar o problema de estabilização em uma quantidade de iterações menor quando comparado ao método B, sendo a exceção apenas no exemplo LTI. O método A não conseguiu estabilizar nenhum dos exemplos apresentados.

Para o exemplo de sistema não afim, a média por iteração do método C sempre se mostrou mais alta quando comparada ao método B, e isso se deve ao fato de que a matriz de variáveis sempre tinha uma dimensão maior e, portanto, o tempo de execução foi mais elevado.

Contudo, a quantidade de iterações em ambos métodos para solucionar os problemas de estabilização para o exemplo não afim foram consideradas altas. Os domínios de atração estimados se demonstraram bem pequenos, indicando uma necessidade de abordar novas técnicas de forma a melhorar essa estimativa.

Para os exemplos de controladores utilizando funções de Lyapunov racionais, é possível afirmar que foi possível estabilizar localmente sistemas com essa nova estratégia e foi verificado que os domínios estimados através dessa abordagem foram bem melhores quando comparados ao caso de funções de Lyapunov polinomiais. O método A não conseguiu estabilizar nenhum caso, como aconteceu em análises anteriores. O método B só conseguiu estabilizar um dos exemplos, com uma inicialização específica, o que é considerado ineficiente. Já o método C estabilizou localmente o sistema para ambos os casos, com uma ótima estimativa de domínio e, portanto, apresentou o melhor desempenho deste trabalho.

Tendo em vista que os resultados desta dissertação, trabalhos futuros focarão na estabilidade de sistemas racionais utilizando funções de Lyapunov racionais, sabendo que essa classe de sistemas ainda não foi abordada. Além disso, verifica-se a necessidade de aperfeiçoar as condições de otimização entre os métodos apresentados. Os métodos A e B precisam de condições que melhorem a convergência da solução para alcançar resultados semelhantes ao método C. Por fim, deseja-se também expandir as condições de EID para a estabilização local.

REFERÊNCIAS

- APS, M. The mosek optimization toolbox for matlab. **User's Guide and Reference Manual, Version**, v. 9, p. 1, 2019. Disponível em: <https://docs.mosek.com/9.0/toolbox/index.html>. Acesso em 25 out. 2023.
- BALDI, S. An iterative sum-of-squares optimization for static output feedback of polynomial systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 55. Las Vegas, 2016. Anais: 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC). Las Vegas, IEEE, 2016. p. 3892–3897.
- BELHAOUANE, M. M.; MTAR, R.; AYADI, H. B.; BRAIEK, N. B. An lmi technique for the global stabilization of nonlinear polynomial systems. **International Journal of Computers Communications & Control**, Tunes, Tunisia, v. 4, n. 4, p. 348–348, 2009.
- BINAZADEH, T.; RAHGOSHAY, M. A. Robust output tracking of a class of non-affine systems. **Systems Science & Control Engineering**, Shiraz, Irã, v. 5, n. 1, p. 426–433, 2017.
- BOSKOVIC, J. D.; CHEN, L.; MEHRA, R. K. Adaptive control design for nonaffine models arising in flight control. **Journal of guidance, control, and dynamics**, Woburn, Massachusetts, v. 27, n. 2, p. 209–217, 2004.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- BRITO, G. P.; MOREIRA, P. R. J.; MADEIRA, D. de S. Global feedback stabilization of non-zero equilibrium points of polynomial system using dissipativity theory. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 16. Manaus, 2023. Em fase de pré-publicação.
- BROGLIATO, B.; LOZANO, R.; EGELAND, O.; MASCHKE, B. **Dissipative systems analysis and control: theory and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [S.l.]: Saunders college publishing, 1984.
- CHESI, G. Rational lyapunov functions for estimating and controlling the robust domain of attraction. **Automatica**, Hong Kong, v. 49, n. 4, p. 1051–1057, 2013.
- EBENBAUER, C.; ALLGÖWER, F. Analysis and design of polynomial control systems using dissipation inequalities and Sum of Squares. **Computers & chemical engineering**, Stuttgart, Alemanha, v. 30, n. 10-12, p. 1590–1602, 2006.
- FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Campinas, Brasil, v. 66, n. 9, p. 4365–4370, 2020.
- GENESIO, R.; TARTAGLIA, M.; VICINO, A. On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals. **IEEE Transactions on automatic control**, Florença, Itália, v. 30, n. 8, p. 747–755, 1985.
- GERANMEHR, B.; NEKOO, S. R. Nonlinear suboptimal control of fully coupled non-affine six-dof autonomous underwater vehicle using the state-dependent riccati equation. **Ocean Engineering**, Teerã, Irã, v. 96, p. 248–257, 2015.

GEROMEL, J.; PERES, P.; SOUZA, S. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Campinas, Brasil, v. 41, n. 7, p. 997–1003, 1996.

GUO, M.; PERSIS, C. D.; TESI, P. Data-driven stabilization of nonlinear polynomial systems with noisy data. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Florença, Itália, v. 67, n. 8, p. 4210–4217, 2021.

HACHICHO, O. A novel lmi-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational lyapunov functions. **Journal of the Franklin Institute**, Wuppertal, Alemanha, v. 344, n. 5, p. 535–552, 2007.

HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. **Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach**. [S.l.]: Princeton university press, 2008.

IANNELLI, A.; MARCOS, A.; LOWENBERG, M. Estimating the region of attraction of uncertain systems with invariant sets. **IFAC-PapersOnLine**, Bristol, Reino Unido, v. 51, n. 25, p. 246–251, 2018.

JENNAWASIN, T.; BANJERDPONGCHAI, D. Iterative LMI approach to robust static output feedback control of uncertain polynomial systems with bounded actuators. **Automatica**, Bangkok, Tailândia, v. 123, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109292>. Acesso em 27 out. 2023.

KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002. v. 115.

LIMA, T. A.; MADEIRA, D. de S.; VIANA, V. V.; OLIVEIRA, R. C. L. F. Static output feedback stabilization of uncertain rational nonlinear systems with input saturation. **Systems & Control Letters**, Fortaleza, Brasil, v. 168, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2022.105359>. Acesso em 12 abr. 2023.

LIN, W. Bounded smooth state feedback and a global separation principle for non-affine nonlinear systems. **Systems & Control Letters**, Saint Louis, Estados Unidos, v. 26, n. 1, p. 41–53, 1995.

LIN, W. Feedback stabilization of general nonlinear control systems: a passive system approach. **Systems & Control Letters**, Saint Louis, Estados Unidos, v. 25, n. 1, p. 41–52, 1995.

LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION. Nova Orleans, 2004. p. 284–289. Anais: IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nova Orleans. IEEE, 2004. p. 284–289.

MADEIRA, D. de S. Necessary and sufficient dissipativity-based conditions for feedback stabilization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Fortaleza, Brasil, v. 67, n. 4, p. 2100–2107, 2022.

MADEIRA, D. de S.; ALVES LIMA, T. Global stabilization of polynomial systems using equilibrium-independent dissipativity. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC). Atlanta, 2022. Anais: 2022 American Control Conference (ACC), Atlanta. IEEE, 2022. p. 120–125.

MADEIRA, D. de S.; MACHADO, G. F. Recurrent dissipativity-based inequalities for controller design. **TechRxiv**, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.36227/techrxiv.23823450.v1>. Acesso em 25 out. 2023.

MOLAVI, A.; JALALI, A.; NARAGHI, M. G. Adaptive fuzzy control of a class of nonaffine nonlinear system with input saturation based on passivity theorem. **ISA transactions**, Teerã, Irã, v. 69, p. 202–213, 2017.

MOULAY, E.; PERRUQUETTI, W. Stabilization of nonaffine systems: A constructive method for polynomial systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Lille, França, v. 50, n. 4, p. 520–526, 2005.

NOZARI, E. **Lecture 3: Stability, controllability & state feedback**. 2022. Disponível em: https://intra.engr.ucr.edu/~enozari/teaching/ME120_Fall20.html. Acesso em 17 out. 2023.

PARRILO, P. A. **Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization**. 2000. Tese (Doutorado em Control and Dynamical Systems - Curso de Engenharia Elétrica) — California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Ellipsoidal sets for resilient and robust static output-feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Toulouse, França, v. 50, n. 6, p. 899–904, 2005.

PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; PARRILO, P. A. Introducing SOSTOOLS: A general purpose Sum of Squares programming solver. In: **IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL**, 41. Las Vegas, 2002. Anais: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas. IEEE, 2002. p. 741–746.

PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F. Nonlinear control synthesis by Sum of Squares optimization: A Lyapunov-based approach. In: **ASIAN CONTROL CONFERENCE**, 5. Melbourne, 2004. p. 157–165. Anais: 2004 5th Asian Control Conference, Melbourne. IEEE, 2004. p. 157–165.

RIBEIRO, A. M.; FIORAVANTI, A. R.; MOUTINHO, A.; PAIVA, E. C. de. Control design based on sum of squares programming for non-affine in input systems. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL SCIENCE AND SYSTEMS ENGINEERING**, 6. Beijing, 2020. Anais: 2020 IEEE 6th International Conference on Control Science and Systems Engineering (ICCSSE). Beijing, IEEE, 2020. p. 130–135.

RONG-HU, C.; ZHONG-SHENG, H. Dual-stage optimal iterative learning control for nonlinear non-affine discrete-time systems. **Acta Automatica Sinica**, Qingdao, China, v. 33, n. 10, p. 1061–1065, 2007.

SHIRIAEV, A. S.; FRADKOV, A. L. Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations. **International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal**, São Peterburgo, Russia, v. 11, n. 3, p. 215–240, 2001.

SIMPSON-PORCO, J. W. Equilibrium-independent dissipativity with quadratic supply rates. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Waterloo, Canadá, v. 64, n. 4, p. 1440–1455, 2018.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Hamilton, Canadá, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback—a survey. **Automatica**, Honolulu, Havaí, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.

VALMORBIDA, G.; ANDERSON, J. Region of attraction estimation using invariant sets and rational lyapunov functions. **Automatica**, Paris, França, v. 75, p. 37–45, 2017.

VANNELLI, A.; VIDYASAGAR, M. Maximal lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems. **Automatica**, Nova Iorque, Estados Unidos, v. 21, n. 1, p. 69–80, 1985.

VESELÝ, V. Static output feedback controller design. **Kybernetika**, Bratislava, Eslováquia, v. 37, n. 2, p. 205–221, 2001.

VIANA, V. V. **Dissipativity-based static output feedback stabilization of dynamical systems**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2022.

WILLEMS, J. C. Dissipative dynamical systems part I: General theory. **Archive for rational mechanics and analysis**, Cambridge, Massachusetts, v. 45, n. 5, p. 321–351, 1972.

ZHANG, F. **The Schur complement and its applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 4.

ZHANG, Y.-L. Discretization of nonlinear non-affine time delay systems based on second-order hold. **International journal of automation and computing**, Lianyungang, China, v. 11, n. 3, p. 320–327, 2014.

ZHAO, S.; PAN, Y.; DU, P.; LIANG, H. Adaptive control for non-affine nonlinear systems with input saturation and output dead zone. **Applied Mathematics and Computation**, Liaoning, China, v. 386, p. 125506, 2020.