



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ENGENHARIA ELÉTRICA**

**JÉSSICA FEITOSA DE OLIVEIRA**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV RACIONAIS**

**FORTALEZA**

**2024**

JÉSSICA FEITOSA DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV RACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientador: Eng. Msc. Gustavo Penaforte Brito.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

O47a Oliveira, Jéssica Feitosa de.  
Análise de estabilidade utilizando funções de Lyapunov racionais / Jéssica Feitosa de Oliveira. – 2024.  
58 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientação: Prof. Me. Gustavo Penaforte Brito.

1. Sistemas não lineares. 2. Sistemas polinomiais. 3. Análise de estabilidade. 4. Função de Lyapunov  
racional. 5. Teoria da estabilidade de Lyapunov. I. Título.

CDD 621.3

---

JÉSSICA FEITOSA DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV RACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 15 de março de 2024.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Eng. Msc. Gustavo Penaforte Brito (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Silvério Costa  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
(UFERSA)

Aos meus pais e irmãs, por todo apoio e amor.  
Obrigado pelo carinho, pela paciência e por  
me darem esperança para seguir. Sem dúvidas,  
nossa família significou segurança e certeza de  
que não estou sozinha nessa caminhada.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por me conceder saúde, sabedoria e me sustentar em todo o processo. Sem Ele não conseguiria.

Aos meus pais, Jeferson e Patrícia, por serem meu exemplo de esforço e persistência e que apesar da minha constante ausência souberam compreender meus objetivos e me apoiar com tanto amor e zelo. As minhas irmãs, Júlia e Jasmini, que com doçura e bom humor me deram combustível de seguir nos dias difíceis, vocês me enchem de orgulho.

Aos meus tios Neto, Peu, Gaby e meu primo Lucas por sempre acreditar no meu potencial e me motivar a ser melhor, não medindo esforços para estar ao meu lado.

A minha avó Edlamar por todo amor, cuidado, apoio e por sempre ver preciosidade em mim. Aos meus avós Messias e Irlan por serem exemplo em amor, acolhimento e perseverança.

Ao Programa de Educação Tutorial (PET), projeto que me lapidou profissionalmente e enriqueceu meu caráter. Em especial ao tutor Prof. Dr. René Pastor Torrico Bascopé e aos amigos que fiz e levarei para a vida: Arthur, Barata, Clarysse, Faustino, Livia, Luan, Militão e Wellington.

Aos amigos que fiz durante o curso, por tornarem tudo mais leve e divertido, vocês estão em meu coração: Clarice Costa, Davi Pinto, Gabriel Fonseca, João Luiz, Luis Felipe, Mario Araújo, Nathalia Comberstais e Vitor Santana.

Ao Prof. Dr. Fabrício, pela confiança e orientação que tornou este trabalho possível.

Ao meu amigo e coorientador, Gustavo Penaforte, por me ajudar e acreditar na minha capacidade, me dando todo suporte para a realização desse projeto.

A todos que fizeram parte dessa trajetória árdua e à sua maneira me marcaram. Sou grata por cada momento compartilhado.

"Quanto maior o seu conhecimento da bondade e da graça de Deus em sua vida, maior será a probabilidade de você louvá-Lo na tempestade"  
(MATT CHANDLER)

## RESUMO

Este trabalho aborda a análise da estabilidade de sistemas não lineares mediante método iterativo, empregando conceitos da teoria de Lyapunov e funções racionais. Apesar da existência de diversos métodos na literatura para a análise desses sistemas, muitos deles são iterativos e sensíveis à inicialização, tornando crucial a análise da variável de inicialização e seu impacto nos resultados finais. Os estudos desenvolvidos aqui visam proporcionar uma direção para o refinamento desses métodos, possibilitando decisões mais precisas. O propósito central deste trabalho é contribuir para a resolução do problema de análise de sistemas não lineares, mediante a aplicação da teoria da estabilidade de Lyapunov, particularmente utilizando funções racionais. A análise é conduzida em na comparação do comportamento de um sistema não linear não afim na entrada e um sistema não linear afim. Os parâmetros considerados para avaliação incluem o tamanho da Região de Atração e a Função de Estimativa de Domínio de Atração inicial. A comparação ressalta a influência substancial da função de inicialização nos resultados finais. Concluímos, ademais, que as estimativas de domínio de atração, quando empregadas funções de Lyapunov racionais, superam significativamente aquelas obtidas por abordagens polinomiais.

**Palavras-chave:** Sistemas Não Lineares; SOSTOOLS; Sistemas Polinomiais; Análise de Estabilidade; Função de Lyapunov Racional, Teoria da Estabilidade de Lyapunov.



## ABSTRACT

This work addresses the analysis of the stability of nonlinear systems using an iterative method, using concepts from Lyapunov theory and rational functions. Despite the existence of several methods in the literature for analyzing these systems, many of them are iterative and sensitive to initialization, making the analysis of the initialization variable and its impact on the final results crucial. The studies developed here aim to provide direction for refining these methods, enabling more accurate decisions. The central purpose of this work is to contribute to solving the problem of analyzing nonlinear systems, through the application of Lyapunov stability theory, particularly using rational functions. The analysis is conducted by comparing the behavior of a non-affine nonlinear system at the input and an affine nonlinear system. Parameters considered for evaluation include the size of the Attraction Region and the initial Attraction Domain Estimation Function. The comparison highlights the substantial influence of the initialization function on the final results. We further conclude that the attraction domain estimates, when rational Lyapunov functions are employed, significantly outperform those obtained by polynomial approaches.

**Keywords:** Nonlinear Systems; SOSTOOLS; Polynomial Systems; Stability Analysis; Rational Lyapunov Function; Lyapunov Stability Theory.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estabilidade de Lyapunov de um ponto de equilíbrio . . . . .	19
Figura 2 – Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio . . . . .	20
Figura 3 – Estimativas Iniciais de Domínios de Atração para o Sistema Polinomial em Malha Fechada da Seção 4.1 . . . . .	32
Figura 4 – Trajetórias do Sistema de Madeira e Machado (2023) em Malha Aberta . . .	34
Figura 5 – Trajetórias do Sistema de Madeira e Machado (2023) em Malha Fechada . .	35
Figura 6 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 01 . . . . .	36
Figura 7 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 02 . . . . .	37
Figura 8 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 03 . . . . .	38
Figura 9 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 04 . . . . .	39
Figura 10 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 05 . . . . .	40
Figura 11 – Trajetórias do Sistema Não-Afim na Entrada em Malha Aberta . . . . .	46
Figura 12 – Trajetórias do Sistema Não-Afim na Entrada estabilizado na origem após controle . . . . .	46
Figura 13 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 01 . . . . .	47
Figura 14 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 02 . . . . .	48
Figura 15 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 03 . . . . .	49
Figura 16 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 04 . . . . .	50
Figura 17 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 05 . . . . .	50
Figura 18 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 06 . . . . .	55

## LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo para Estimação de Domínio de Atração de Sistemas Não Lineares . . . . .	31
---	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ERA</i>	<i>Estimates of the Region of Attraction</i> / Estimativa da Região de Atração
<i>SOS</i>	<i>Sum-Of-Squares</i> / Soma de Quadrados
<i>LFs</i>	<i>Lyapunov functions</i> / Funções de Lyapunov
<i>MLF</i>	<i>Maximal Lyapunov Function</i> / Função Máxima de Lyapunov
<i>MLS</i>	<i>Maximal Lyapunov Set</i> / Conjunto Máximo de Lyapunov
<i>PE</i>	Ponto de Equilíbrio
<i>RA</i>	Região de Atração

## NOTAÇÃO MATEMÁTICA

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}_{>0}$	Conjunto dos números reais, tal que $\beta \in \mathbb{R}_{>0}, \beta > 0$ .
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto dos números reais, tal que $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \beta \geq 0$ .
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vetores coluna reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$ .
$\mathbb{S}^{n \times n}$	Conjunto de matrizes simétricas reais de dimensão $n \times n$ .
$A^T$	O transposto de uma matriz $A$ .
$A^{-1}$	O inverso de uma matriz $A$ .
$A > 0$	Matriz positiva definida.
$A \geq 0$	Matriz positiva semi-definida.
$I$	Matriz identidade de uma ordem qualquer.
$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$	define uma função $f$ com o domínio $\mathcal{X}$ e contradomínio $\mathcal{Y}$
$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	Produto cartesiano entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ .
$\mathcal{C}^1$	O conjunto de funções em que as derivadas parciais existem e são contínuas.
$\mathcal{X}^\circ$	O interior do conjunto $\mathcal{X}$ .
$\partial \mathcal{X}$	O limite do conjunto $\mathcal{X}$ .
■	QED - <i>Quod erat demonstrandum</i> /Como havia de ser demonstrado

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do Trabalho</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas Não Lineares Polinomiais</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Ponto de Equilíbrio</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Estabilidade de Lyapunov</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.4</b>	<b>Estimativa do Domínio de Atração</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.5</b>	<b>Funções Racionais de Lyapunov</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.6</b>	<b>SOSTOOLS - otimização de soma de quadrados</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO ITERATIVO</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Análise do Domínio de Atração de Sistemas Não-Lineares Utilizando Funções de Lyapunov Racionais em Malha Fechada</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>Relação da Inicialização <math>R_0</math> e a Estimativa do Domínio de Atração <math>\varepsilon(R, \gamma)</math></b> . . . . .	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS - ESTUDO COMPARATIVO</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4.1</b>	<b>Sistema Polinomial de Estabilização Local com Entrada Afim</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>Estabilização Local de um Sistema Não-Afim na Entrada</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>57</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo Haddad e Chellaboina (2008) um sistema dinâmico é uma combinação de variáveis inter-relacionadas chamadas estados, as quais determinam de maneira abrangente o comportamento do sistema em um momento específico ao longo do tempo. Além disso, um sistema dinâmico é composto por elementos essenciais, como seu comportamento dinâmico (conhecido como espaço de estados), uma equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema e uma condição ou estado inicial a partir do qual o sistema se inicia. Em outras palavras, o estado de um sistema dinâmico geralmente é influenciado tanto pela entrada atual quanto pelo histórico de eventos passados do sistema.

Um dos conceitos cruciais no estudo da teoria de sistemas dinâmicos e da teoria de controle é o conceito de estabilidade. A teoria da estabilidade consiste no comportamento das trajetórias do sistema de um sistema dinâmico quando o estado inicial do sistema está próximo de um estado de equilíbrio. A presença de perturbações e incertezas em sistemas reais destaca a importância da teoria da estabilidade, como em estudos das idealizações de problemas astronômicos envolvendo pequenas oscilações persistentes (librações) sobre um estado de movimento (HADDAD; CHELLABOINA, 2008).

Lagrange contribuiu inicialmente à teoria da estabilidade, estabelecendo que, em sistemas mecânicos conservadores, um mínimo isolado da energia potencial indica um estado de equilíbrio estável. Posteriormente, Lyapunov desenvolveu uma análise mais abrangente para sistemas dinâmicos, utilizando um método baseado na construção de uma função de coordenadas de estado como norma generalizada. Esse método, que não requer o cálculo explícito de trajetórias, tornou-se uma peça fundamental na teoria da estabilidade em sistemas e controle (HADDAD; CHELLABOINA, 2008).

Dito isto, em sistemas não lineares, o método direto de Lyapunov fornece uma maneira de analisar a estabilidade de um sistema sem resolver explicitamente as equações diferenciais. O método propõe a ideia que o sistema é estável se houver algumas candidatas a *Lyapunov functions* / Funções de Lyapunov (LFs) para o sistema. O método direto de Lyapunov é uma condição suficiente para mostrar a estabilidade dos sistemas, o que significa que o sistema ainda pode ser estável mesmo que não seja possível encontrar uma função de Lyapunov candidata para concluir a propriedade de estabilidade do sistema.

Vale ressaltar a diferença entre dois conceitos semelhantes: uma *Maximal Lyapunov Function* / Função Máxima de Lyapunov (MLF) e um *Maximal Lyapunov Set* / Conjunto Máximo

de Lyapunov (MLS). Uma MLF é uma função de Lyapunov que atende a um conjunto rigoroso de condições. Por outro lado, um MLS é definido como o maior conjunto de níveis de um determinado LF contido em um conjunto específico. O cálculo do MLS é interessante, pois pode ser necessário determinar a melhor taxa de convergência alcançável para uma função de Lyapunov específica (CHESI, 2013).

Recentemente, têm surgido condições suficientes para a análise de estabilidade local, que enfatizam a invariância e a contratividade de um conjunto. Segundo Blanchini (1999) um conjunto é invariante controlado se qualquer trajetória cujo estado inicial esteja no conjunto pode ser mantida dentro dele por meio de uma ação de controle adequada. Ademais, de maneira simples, um conjunto é contrativo se for invariante e, sempre que o estado estiver na fronteira, o controle possa “empurrá-lo para o interior”. (BLANCHINI, 1999)

Isso levou ao desenvolvimento de métodos numéricos para estimar a Região de Atração (RA), ou seja, o conjunto de todos os estados do sistema convergindo para um estado de equilíbrio, usando funções polinomiais de Lyapunov (TOPCU; PACKARD, 2009)(TAN; PACKARD, 2008)(TOPCU *et al.*, 2010). Se o estado após as perturbações estiver na RA, ele converge novamente para o estado de equilíbrio, caso contrário, não converge. Consequentemente, uma RA maior implica maior estabilidade transitória. Esses métodos fundamentam-se na resolução de restrições não convexas de *Sum-Of-Squares* / Soma de Quadrados (SOS), a solução desses problemas requer uma pesquisa coordenada, pois a natureza não convexa é decorrente da presença de variáveis polinomiais multiplicando a própria função de Lyapunov, que é uma variável. Além disso, na literatura, encontramos métodos numéricos que exploram propriedades topológicas da fronteira da RA, demandando o cálculo de trajetórias e pontos de equilíbrio. No entanto, a complexidade desses métodos até agora os limitou a exemplos bidimensionais (CHESI, 2013).

Valmorbida e Anderson (2017) estabeleceu condições baseadas em estabilidade de Lyapunov para garantir que trajetórias iniciadas em conjuntos positivamente invariantes convergem para conjuntos contrativos e invariáveis. Isso confirma que tais conjuntos são *Estimates of the Region of Attraction* / Estimativa da Região de Atração (ERA). Além disso, apresentou condições para obter certificados de LF especializados em funções racionais para dados polinomiais, juntamente com um método numérico baseado em restrições de SOS. Desta forma, ampliou pesquisas anteriores e estabeleceu uma ligação teórica entre funções máximas de Lyapunov e técnicas de otimização polinomial, destacando sua relevância na construção racional



de LF.

A determinação da RA de pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis, ou *ERA* segundo Chiang *et al.* (1988), é um problema central com ampla aplicação. A importância desse desafio é imediatamente evidente em muitas situações práticas, especialmente em sistemas não lineares, nos quais só podemos assegurar propriedades locais dos pontos de operação como por exemplo sistemas de potência (TACCHI *et al.*, 2018) e em Sistemas Port-Hamiltonianos (WU *et al.*, 2021).

Um método para criar funções de Lyapunov para sistemas não lineares é usando programação de soma de quadrados. Nesse método, a obtenção da função Lyapunov envolve resolver um problema de programação *SOS*, onde as condições impostas à função Lyapunov são expressas como restrições garantindo que os polinômios sejam polinômios *SOS*. Esse método baseado em *SOS* é promissor e amplamente utilizado por possibilitar a construção algorítmica das funções de Lyapunov por meio de técnicas de otimização numérica. Isso resulta em uma redução significativa no tempo e no esforço necessários para encontrar tais funções (JARVIS-WLOSZEK, 2003).

## 1.1 Objetivo

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares em malha fechada, dado que o método aplica-se a sistemas com ponto de equilíbrio na origem, através de estimativas dadas por conjuntos positivamente invariantes que não são necessariamente definidos por conjuntos de níveis de uma LFs. Além disso, apresentar condições para a existência de LFs ligadas à formulação do conjunto positivamente invariante, aplicado a sistemas não lineares, que ao ser submetido ao algoritmo em diferentes condições de inicialização tem a estimativa da Região de Atração ampliada a cada iteração dada a busca de LFs de natureza racional. Desta forma, a contribuição principal deste trabalho é a análise comparativa para os domínios iniciais, que ainda não foi realizada.

## 1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido em 5 capítulos.

O primeiro capítulo contém a introdução sobre a problemática, a motivação, objetivos e estrutura do trabalho.

O segundo capítulo, consiste na Fundamentação Teórica desse estudo, contendo o referencial bibliográfico sobre Sistemas Não Lineares Polinomiais, otimização de soma de quadrados, teoria da estabilidade de Lyapunov e Funções de Lyapunov racionais.

O terceiro capítulo apresenta o método iterativo que será utilizado para análise dos Domínios de Atração e a relação da inicialização com o domínio final, que é a maior contribuição deste trabalho.

O quarto capítulo trata da apresentação dos sistemas analisados, um sistema polinomial afim da entrada e um não afim (que não foi tratado nos estudos de Valmorbidia e Anderson (2017), e os resultados das simulações.

Por fim, no quinto capítulo são apresentadas as conclusões finais a respeito do trabalho e também as indicações de possíveis trabalhos futuros que podem ser realizados a partir do mesmo.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Sistemas Não Lineares Polinomiais

Um sistema dinâmico não linear é composto por um conjunto de estados possíveis. O conhecimento desses estados em um momento inicial  $t = t_0$ , juntamente com a informação de uma entrada externa ao sistema para  $t \geq t_0$ , é suficiente para determinar totalmente o comportamento do sistema dinâmico em qualquer momento  $t \geq t_0$  (HADDAD; CHELLABOINA, 2008). Assim, um sistema dinâmico pode ser descrito por uma equação diferencial da forma:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (2.1)$$

Denominamos a Equação (2.1) como um sistema dinâmico não linear *controlado variável no tempo*. Sendo assim, considere um vetor de estados  $x \in \mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ , em uma abordagem alternativa, quando  $u(t) = 0$ , definimos  $f(t) = F(t, x, 0)$  onde (2.1) se torna:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (2.2)$$

Onde passa a ser chamada de sistema dinâmico não linear *não controlado variante no tempo*, e a equação resultante é então referida em (2.2). Se  $(f(t, x) = f(t_0, 1))$  para todo  $((t, z)) \in ([t_0, t_1] \times \mathcal{X})$ , então (2.2) será chamada de sistema dinâmico *invariante no tempo* ou *autônomo* sendo descrito como:

$$F(t_0, x, u) = F(t, x, u), \quad \forall (t, x, u) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \quad (2.3)$$

Desta forma, se reescrevermos a Equação (2.3) em relação a entrada, tem-se:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.4)$$

Em que  $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados, com  $0 \in \mathcal{X}$ , o sinal de controle,  $u(t)$ , definido por  $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $0 \in \mathcal{U}$  e por fim,  $t$  é definido para  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Além disso, a variável  $y$  representa a saída do sistema, tal que  $y(t, u, x) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  e  $h$  é uma função polinomial definida por  $h : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Dado que  $f(x)$  e  $g(x)$  são polinômios, pode-se definir uma saída do sistema  $y$  que também será um polinômio, semelhante a Equação (2.4), tal que:

$$y = h(x) \quad (2.5)$$

Seja o sistema em malha aberta, temos:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.6)$$

Além do sistema não linear afim na entrada, trataremos nesse trabalho de um exemplo de um sistema não-afim na entrada, sendo definido por:

$$\dot{x} = f(x(t)) + l(x, u) \quad (2.7)$$

$$y = h(x(t)) \quad (2.8)$$

onde  $f(x)$  e  $l(x, u)$  são funções contínuas, definidas por  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(0) = 0, l: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $x$  é o vetor de estados do sistema, de forma que  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $0 \in \mathcal{X}$  e  $x(0) = x_0$ . A variável  $u$  é definida por  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, 0 \in \mathcal{U}$ . Por fim, a função polinomial  $h$  é descrita da forma  $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p, h(0) = 0$  e  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ .

## 2.2 Ponto de Equilíbrio

Quando tratamos do controle de sistemas dinâmicos, o objetivo principal é modificar comportamentos indesejados, como a instabilidade, e guiar o sistema na direção de alcançar pontos de equilíbrio estáveis e desejados. A determinação dos valores das raízes reais da equação do sistema (2.4) é crucial para identificar esses pontos de equilíbrio.

Para compreender a estabilidade intrínseca do sistema sem a influência de estratégias de controle, ou seja, uma análise dos pontos de equilíbrio em malha aberta, basta desconsiderar a lei de controle  $u$ , calculando as raízes considerando  $u = 0$ .

De maneira mais formal, um ponto  $x_{eq}$  é caracterizado como um Ponto de Equilíbrio (PE) da Equação (2.1) quando a posição de  $x$  se mantém suficientemente próxima de  $x_{eq}$  diante

de perturbações extremamente pequenas. Em outras palavras,  $x_{\text{eq}}$  pertence ao conjunto  $\mathcal{X}$ , e a condição  $x \rightarrow x_{\text{eq}}$  é satisfeita à medida que o tempo  $t$  se aproxima do infinito.

### 2.3 Estabilidade de Lyapunov

A Teoria da Estabilidade de Lyapunov é um ramo da teoria de sistemas dinâmicos que avalia a estabilidade de pontos de equilíbrio em sistemas não lineares. A função de Lyapunov é utilizada para determinar se um sistema, após uma perturbação, retorna ou se aproxima de seu ponto de equilíbrio ao longo do tempo. Essa teoria é essencial para compreender a resposta de sistemas não lineares a diferentes condições iniciais e entradas, sendo aplicada em controle de sistemas, engenharia e teoria de sistemas não lineares.

Considerando a equação que descreve o sistema dinâmico autônomo não linear geral abaixo:

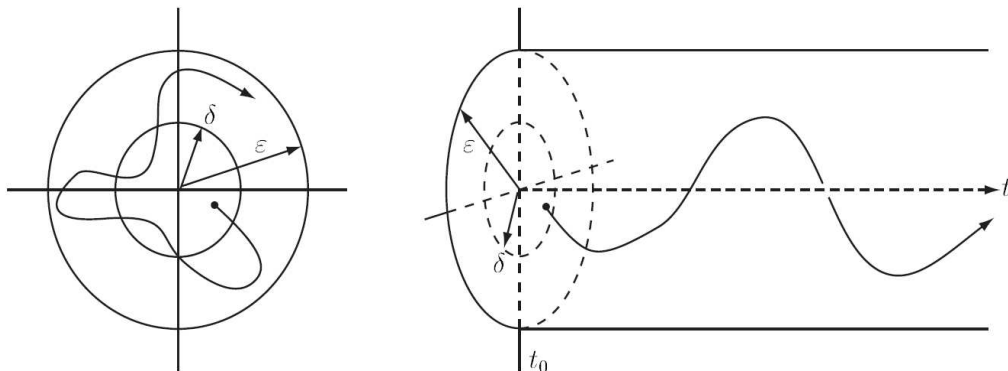
$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathcal{X}, \quad 0 \in \mathcal{X}, \quad (2.9)$$

A Teoria de estabilidade de Lyapunov é definida como:

**Definição 2.3.1** (i) A solução  $x(t) \equiv 0$  para (2.9) é estável no sentido de Lyapunov se, para todos  $\varepsilon > 0$ , existe tal  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  que se  $\|x(0)\| < \delta$ , então  $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq 0$  (ver Figura 1).

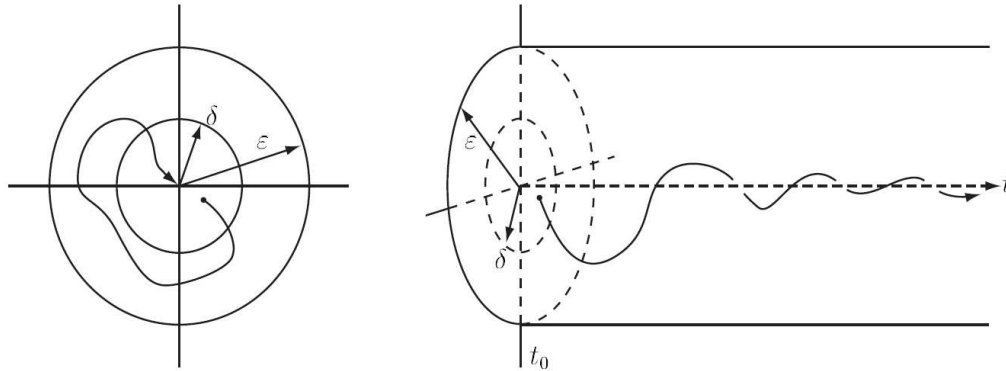
(ii) A solução  $x(t) \equiv 0$  para (2.9) é assintoticamente estável se e somente se for estável e existir  $\delta > 0$  tal que se  $\|x(0)\| < \delta$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  (ver Figura 2).

Figura 1 – Estabilidade de Lyapunov de um ponto de equilíbrio



Fonte: (HADDAD; CHELLABOINA, 2008).

Figura 2 – Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio



Fonte: (HADDAD; CHELLABOINA, 2008).

As Figuras 1 e 2 exemplificam o comportamento da trajetória de uma variável  $x$  em relação à estabilidade. Observa-se que a estabilidade de Lyapunov não assegura a convergência para um ponto de equilíbrio; ela apenas garante que os valores de  $x$  nunca se distanciam consideravelmente, dadas as distâncias  $\delta$  e  $\varepsilon$ . Por outro lado, a estabilidade assintótica assegura uma convergência para o ponto de equilíbrio à medida que o tempo se aproxima do infinito.

Após a definição da estabilidade em relação a um PE, faz-se necessária uma ferramenta para analisar a estabilidade em sistemas dinâmico, desta forma, tem-se o Teorema da Estabilidade de Lyapunov.

**Teorema 2.3.1** *Considerando o sistema dinâmico não linear (2.9) e assumindo que existe uma função continuamente diferenciável,  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que: (HADDAD; CHELLABOINA, 2008)*

$$V(0) = 0, \quad (2.10)$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathcal{X}, \quad x \neq 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla V(x)^T f(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{X}. \quad (2.12)$$

Então, a solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.9) é estável no sentido de Lyapunov. Se, além disso,

$$\nabla V(x)^T f(x) < 0, \quad x \in \mathcal{X}, \quad x \neq 0 \quad (2.13)$$

Então a solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.9) é assintoticamente estável.

**Prova:** Ver a Seção 3.2 do (HADDAD; CHELLABOINA, 2008).

A relevância do Teorema de Lyapunov consiste no fato de que, ao verificar a existência de uma função de Lyapunov  $V$  que atenda as condições apresentadas no Teorema 2.3.1, torna-se possível fazer afirmações sobre o nível de estabilidade do sistema sob análise. Esse teorema proporciona uma ferramenta valiosa para avaliar e quantificar a estabilidade de sistemas dinâmicos, oferecendo insights sobre o comportamento do sistema em relação aos seus pontos de equilíbrio.

## 2.4 Estimativa do Domínio de Atração

Definir o domínio de atração é crucial para compreender como um sistema dinâmico evolui a partir de diferentes condições iniciais. Esse domínio, é definido pelo conjunto  $\mathcal{S} = \{x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x(0)\| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\} \subset \mathcal{X}$ , inclui os valores iniciais nos quais o sistema converge para a origem com o tempo. A estabilidade, conforme ilustrada nas Figuras 1 e 2, está relacionada à capacidade do sistema de permanecer próximo ao ponto de equilíbrio ao longo do tempo.

Por meio da função  $V$  de Lyapunov é possível estimar diretamente o domínio de atração, sendo definido por: (HADDAD; CHELLABOINA, 2008)

$$\varepsilon(V, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq 1\} \subset \mathcal{X} \quad (2.14)$$

Desta forma, permite afirmar que todas as trajetórias que iniciam nesse conjunto convergem assintoticamente para a origem, sem sair do domínio de atração estimado. Esse método fornece uma maneira eficaz de avaliar e controlar o comportamento de sistemas dinâmicos complexos.

## 2.5 Funções Racionais de Lyapunov

Uma das condições no estudo de Vannelli e Vidyasagar (1985), que caracteriza a região de atração  $\mathcal{S}$ , estabelece que a função de Lyapunov (LF)  $V(x)$  deve crescer para infinito quando  $x$  se aproxima da fronteira  $\partial\mathcal{S}$  (a borda da RA) ou à medida que  $\|x\|$  se aproxima de infinito.

Uma observação crucial foi a identificação da classe de funções racionais na forma  $V(x) = \frac{V_N(x)}{V_D(x)}$ , em que  $V_N$  e  $V_D$  são polinômios. Essas funções foram consideradas como

candidatas para a função de Lyapunov estável (LFs) no algoritmo proposto em Vannelli e Vidyasagar (1985), com o limite da região de atração (ERA) caracterizado pelo conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid V_D(x) = 0\}$ .

Dado o conceito, uma função máxima de Lyapunov (MLF) é uma função de Lyapunov que atende a um conjunto estrito de condições, conforme definido na Definição 2.5.1.

**Definição 2.5.1** *A função  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$  tal que para o sistema (2.6) satisfaz*

- I.  $R(0) = 0, R(x) > 0$  se  $x \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ ,
- II.  $R(x) < \infty$  se  $x \in \mathcal{S}$ ,
- III.  $R(x) \rightarrow \infty$  como  $x \rightarrow \partial \mathcal{S}$  e/ou  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,
- IV.  $\dot{V}_m(x) < 0$  e bem definido para todos  $x \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ , é chamada de função de Lyapunov máxima.

Desta forma, a opção por funções de Lyapunov na forma racional é motivada pela propriedade de que a função de Lyapunov racional  $R(x)$  cresce para infinito ao atingir a borda do elipsoide (no limite do domínio de atração), resultando no denominador se anulando. No caso de funções polinomiais, a condição III não é válida no caso de estabilidade local, uma vez que  $R(x)$  cresce para infinito quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , podendo existir apenas na estabilidade global. Portanto, as Funções Máximas de Lyapunov (MLFs) podem ser utilizadas para obter estimativas mais precisas da Região de Atração (RA) em casos de estabilidade local.

## 2.6 SOSTOOLS - otimização de soma de quadrados

O SOSTOOLS é uma *toolbox* para o MATLAB, projetada para resolver problemas de soma de quadrados. As técnicas subjacentes fundamentam-se na decomposição de soma de quadrados para polinômios multivariáveis, cujo cálculo é eficientemente realizado por meio de programação semi-definida. O SOSTOOLS oferece técnicas que proporcionam relaxações convexas para uma variedade de problemas complexos, incluindo otimização global, restrita e booleana (PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2013).

Desta forma, um polinômio multivariável  $p(x_1, \dots, x_n) \triangleq p(x)$  é uma soma de quadrados (SOS), se existirem polinômios  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  de tal modo que

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (2.15)$$



É evidente que a condição de  $f(x)$  ser um somatório de quadrados (SOS) naturalmente implica  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . No entanto, vale ressaltar que a exigência de uma função  $f(x)$  ser SOS é consideravelmente mais restritiva do que simplesmente assegurar a não-negatividade de  $f(x)$ . Se a Equação (2.15) for atendida,  $f(x)$  é chamado de SOS ou  $f(x) \in \Sigma[x]$ . Apesar disso, com o auxílio das ferramentas computacionais contemporâneas, tornou-se fácil abordar essa decomposição de maneira computacional, permitindo a obtenção de resultados com elevada precisão. (PRAJNA *et al.*, 2002)

A *toolbox* SOSTOOLS transforma o problema em um Problema de Programação Semi-definida (SDP), onde as variáveis de otimização são as entradas do sistema, e as restrições incluem as equações dinâmicas e as funções Lyapunov definidas anteriormente. Para resolver eficientemente o problema SDP, a *toolbox* emprega métodos especializados, utilizando algoritmos específicos para otimização semidefinida.

Após a resolução bem-sucedida, a análise dos resultados se torna crucial. Isso implica verificar a estabilidade do sistema, garantir a satisfação das restrições e interpretar as soluções obtidas para as variáveis de controle. Se necessário, o processo pode ser iterativo, permitindo ajustes nas restrições, objetivos ou outros parâmetros para refinamento das soluções.

### 3 MÉTODO ITERATIVO

Este capítulo introduzirá um método iterativo projetado para estimar as regiões de atração de sistemas não lineares. Essa abordagem emprega funções racionais de Lyapunov, as quais foram desenvolvidas para estabilizar esses sistemas em torno da origem, utilizando o método analítico descrito no trabalho (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017).

#### 3.1 Análise do Domínio de Atração de Sistemas Não-Lineares Utilizando Funções de Lyapunov Racionais em Malha Fechada

O teorema a seguir estabelece condições que asseguram que, a partir de uma função de Lyapunov racional para o sistema (2.6), é possível identificar um conjunto positivamente invariante que representa uma estimativa para o domínio de atração do sistema, conforme discutido em (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017).

**Teorema 3.1.1** *Seja  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \in \mathcal{C}^1$  e  $\gamma > 0$ , satisfazendo:*

$$\varepsilon(R, \gamma) \subset \mathcal{X} \text{ é compacto e } 0 \in \varepsilon(R, \gamma), \quad (3.1)$$

$$-\langle \nabla R(x), f(x) \rangle > 0 \forall x \in \partial \varepsilon(R, \gamma), \quad (3.2)$$

*se existe uma função  $V_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V_n(0) = 0$ ,  $V_n \in \mathcal{C}^1$ , tal que*

$$V_n(x) > 0 \forall x \in \varepsilon(R, \gamma) \setminus \{0\} \quad (3.3)$$

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle > 0 \forall x \in \varepsilon(R, \gamma) \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

*então,*

*I. as soluções  $x(t) = \phi(t, x_0)$  de (2.6), com  $x_0 \in \varepsilon(R, \gamma)$  satisfazem  $x(t') \in \mathcal{S} \forall t' \in [0, \infty)$ .*

*Ainda mais, se (3.1), (3.3) e*

$$-\langle [\nabla V_n(x)(\gamma - R(x)) + V_n \nabla R(x)], f(x) \rangle > 0 \forall x \in \varepsilon(R, \gamma) \setminus \{0\} \quad (3.5)$$

*são satisfeitas e existe um  $\bar{\varepsilon}$  tal que  $0 \in \varepsilon^o(R, \gamma - \bar{\varepsilon})$ , então*

## II. a função

$$V(x) = \frac{V_N(x)}{\gamma - R(x)} \quad (3.6)$$

é uma função de Lyapunov de (2.6) e fornece  $\mathcal{E}^\circ(R, \gamma)$  como uma estimativa de  $\mathcal{S}$ .

**Prova:** Prova de (I): Retirada de (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017)

- *Parte 1 (Contratividade de um conjunto de níveis de  $V_N$ ):* por suposição  $\mathcal{E}(R, \gamma)$  é compacto, portanto podemos calcular  $\alpha = \min_{x \in \partial \mathcal{E}(R, \gamma)} V_N(x)$ , então de (3.3),  $\alpha > 0$ . Definir  $\mathcal{U} = \mathcal{E}(V_N, \alpha) \cap \mathcal{E}(R, \gamma)$ , de (3.3), (3.4) temos

$$\begin{aligned} V_N(x) &> 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}, \\ - \langle \nabla V_N(x), f(x) \rangle &> 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Seguindo Khalil (2002) temos que a origem é assintoticamente estável e uma aproximação interna de sua região de atração é dada por  $\mathcal{U}$ , isto é, trajetórias  $\phi(t, x_0)$  com  $x_0 \in \mathcal{U}$  existem, são únicos e satisfazem  $\phi(t, x_0) \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ .

- *Parte 2 (Invariância Positiva de  $\mathcal{E}(R, \gamma)$ ):* desde  $\mathcal{E}(R, \gamma)$  é compacto e  $f(x)$  é localmente Lipschitz em qualquer conjunto compacto, temos existência e unicidade de soluções para  $\dot{x} = f(x)$ , para todos  $x_0 \in \mathcal{E}(R, \gamma)$ , desde que toda solução esteja em  $\mathcal{E}(R, \gamma)$ . Vamos provar isso para todos  $T \in [0, \infty)$  nós temos  $x(T) \in \mathcal{E}(R, \gamma)$ . Suponha que exista  $x_0 \in \mathcal{E}(R, \gamma)$  para o qual a solução sai do conjunto, então, deve existir um de tal modo que  $x(T^*) = \phi(T^*, x_0)$  que satisfaz  $R(x(T^*)) > \gamma$ . Da continuidade de soluções e continuidade de  $R(x)$  deve existir  $\bar{T}$ ,  $0 < \bar{T} < T^*$  de tal modo que  $R(x(\bar{T})) = \gamma$  e  $\dot{R}(x(\bar{T})) = \langle \nabla R(x(\bar{T})), f(x(\bar{T})) \rangle \geq 0$ , o que contradiz (3b). Por isso  $\mathcal{E}(R, \gamma)$  é um conjunto positivamente invariante.
- *Parte 3 (Convergência de trajetórias começando em  $\mathcal{E}(R, \gamma) \setminus \mathcal{E}^\circ(V_N, \alpha)$  para  $\mathcal{U}$ ):* Finalmente vamos agora provar que toda trajetória satisfazendo  $x(0) \in \mathcal{E}(R, \gamma) \setminus \mathcal{E}^\circ(V_N, \alpha)$  entra no conjunto positivamente invariante e contrativo  $\mathcal{U}$ , isto é, que existe uma  $T$  de tal modo que  $x(T) \in \mathcal{U}$ . Deixar  $\beta = \max_{x \in \partial \mathcal{E}(R, \gamma)} V_N(x)$ . Como (3.4) vale em  $\mathcal{E}(R, \gamma) \setminus \mathcal{E}^\circ(V_N, \alpha)$  deixar  $\lambda = - \max_{x \in \mathcal{E}(R, \gamma) \setminus \mathcal{E}^\circ(V_N, \alpha)} \langle \nabla V_N, f(x) \rangle$ . Observe que existe porque uma função contínua tem um máximo sobre qualquer conjunto compacto, além disso  $\lambda > 0$ . De (3.4) também obtemos

$$V_N(x(t)) = V_N(x(0)) + \int_0^t \dot{V}_N(x(\tau)) d\tau \leq V_N(x(0)) - \lambda t.$$

Desde  $V_N(x(0)) \leq \beta$  nós temos  $V_N(x(t)) \leq \beta - \lambda t$  no conjunto  $\varepsilon(R, \gamma) \setminus \varepsilon^\circ(V_N, \alpha)$ , de locação  $t \rightarrow \infty$  chegamos a uma contradição porque  $V_N$  deve ser positivo no conjunto. Isso implica que  $\exists T \geq 0$  satisfazendo  $T \leq \frac{\beta - \alpha}{\lambda}$  de tal modo que  $V_N(x(T)) = \alpha$  e, portanto  $x(T) \in \bar{\mathcal{U}}$ .

**Prova de (II):** Retirada de (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017) De (3.3) temos que  $V(x) > 0 \forall x \in \varepsilon^\circ(R, \gamma) \setminus \{0\}$ . A derivada temporal de (3.6) ao longo das trajetórias de (2.6) é dada por

$$\dot{V}(x) = \frac{\langle \nabla V_N(x)(\gamma - R(x)) + V_N(x) \nabla R, f(x) \rangle}{(\gamma - R(x))^2}$$

que satisfaz  $-\dot{V}(x) > 0 \forall x \in \varepsilon^\circ(R, \gamma) \setminus \{0\}$  se (3.5) for verdadeiro. Por isso  $V$  é uma função de Lyapunov para o ponto de equilíbrio na origem de (2.6). O que resta mostrar é que as curvas de nível de definir a estimativa declarada da ERA.

Nós temos que  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$  não estão definidos em  $\partial \varepsilon(R, \gamma)$ , portanto, não é possível calcular escalares  $\alpha$  e  $\beta$  como nas Partes 1 e 3 da Prova de (I) acima. Considere o escalar arbitrariamente pequeno,  $\varepsilon$  que define o conjunto  $\varepsilon(R, \gamma - \xi)$  e suponha que isso satisfaça  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ . Então como  $\varepsilon(R, \gamma)$  é compacto segue-se que assim é  $\varepsilon(R, \gamma - \xi)$ . Podemos então seguir os mesmos passos da Prova de (I), Parte 1 e calcular um escalar positivo  $\alpha_\varepsilon = \min_{x \in \text{ag}(R, \gamma - \xi)} V(x)$ . Definir  $\mathcal{U}_\xi = \varepsilon(V, \alpha_\varepsilon) \cap \varepsilon(R, \gamma - \xi)$ . Desde  $V(x) > 0 \forall x \in \varepsilon^\circ(R, \gamma) \setminus \{0\}$  e  $-\dot{V}(x) > 0 \forall x \in \varepsilon^\circ(R, \gamma) \setminus \{0\}$ . Nós temos:

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \quad \forall x \in U_\xi \setminus \{0\}, \\ -\langle \nabla V(x), f(x) \rangle &> 0 \quad \forall x \in U_\xi \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Então, segundo Khalil (2002), a origem é assintoticamente estável e uma aproximação interna de sua região de atração é dada por  $\mathcal{U}_\xi$ , isto é, trajetórias  $\phi(t, x_0)$  com  $x_0 \in \mathcal{U}_\xi$  existem, são únicos e satisfazem como  $\phi(t, x_0) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ . Usando (3.6), obtemos:

$$\varepsilon(V, \alpha_\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid R(x) \leq \gamma - \frac{V_N(x)}{\alpha_\varepsilon} \right\}.$$

Desde

$$\begin{aligned}
\alpha_\xi &= \min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} V(x) \\
&= \min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} \frac{V_N(x)}{\gamma - R(x)} \\
&= \min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} \frac{V_N(x)}{\gamma - (\gamma - \xi)} \\
&= \frac{1}{\xi} \left( \min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} V_N(x) \right)
\end{aligned}$$

temos então

$$\varepsilon(V, \alpha_\xi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid R(x) \leq \gamma - \xi \frac{V_N(x)}{\min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} V_N(x)} \right\} \quad (3.7)$$

Defina um escalar positivo  $\delta$  do seguinte modo:

$$\delta := \frac{\max_{x \in \varepsilon(R, \gamma)} V_N(x)}{\min_{x \in \varepsilon(R, \gamma) \setminus \varepsilon^\circ(R, \gamma - \bar{\xi})} V_N(x)}$$

então é imediato que  $\delta \geq 1$ . Como  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ . Como temos  $\partial \varepsilon(R, \gamma - \xi) \subset \varepsilon(R, \gamma) \setminus \varepsilon^\circ(R, \gamma - \bar{\xi})$ , por isso  $\min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} V_N(x) \geq \min_{x \in \varepsilon(R, \gamma) \setminus \varepsilon^\circ(R, \gamma - \bar{\xi})} V_N(x)$  e, portanto

$$\delta \geq \frac{V_N(x)}{\min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} V_N(x)}, \quad \forall x \in \varepsilon(R, \gamma).$$

Desde  $\varepsilon$  é positivo, a contenção definida

$$\varepsilon(R, \gamma - \xi \delta) \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid R(x) \leq \gamma - \xi \frac{V_N(x)}{\min_{x \in \partial \varepsilon(R, \gamma - \xi)} V_N(x)} \right\}$$

permanece verdadeiro. Usando (3.7) temos  $\varepsilon(R, \gamma - \xi \delta) \subset \varepsilon(V, \alpha_\xi)$ , por isso  $\varepsilon(R, \gamma - \xi \delta) = \varepsilon(R, \gamma - \xi \delta) \cap \varepsilon(R, \gamma - \xi) \subseteq \varepsilon(V, \alpha_\xi) \cap \varepsilon(R, \gamma - \varepsilon) = u_\xi$  que, usando o fato de que  $u_\varepsilon \subset \varepsilon(R, \gamma)$ , nós obtemos  $\varepsilon(R, \gamma - \xi \delta) \subseteq u_\xi \subset \varepsilon(R, \gamma)$ .

Por isso  $\varepsilon(R, \gamma - \xi \delta)$  é uma estimativa do RA de (2.6). Como  $\delta$  é limitado e  $\varepsilon$  pode ser escolhido como arbitrariamente pequeno, temos que o conjunto  $\varepsilon^\circ(R, \gamma)$  é uma estimativa do RA de (2.6). ■

A condição (3.2) é responsável por garantir que o conjunto  $\varepsilon(R, \gamma)$  seja positivamente invariante. Vale ressaltar também que não é obrigatório que a função  $R(x)$  seja positiva

definida, apenas que  $\varepsilon(R, \gamma)$  seja compacto e contenha a origem. Em seguida, (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017) expandiu as condições do Teorema 3.1.1 em inequações, como ilustradas na Proposição abaixo:

**Proposição 3.1.2** *Seja  $R \in \mathcal{C}^1, R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \gamma > 0$ , satisfazendo*

$$\varepsilon(R, \gamma) \text{ é compacto, } 0 \in \varepsilon(R, \gamma), \quad (3.8)$$

*se existe uma função  $V_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, V_n \in \mathcal{C}^1, V_n(0) = 0$  e  $m_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, m_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  e  $n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , tal que*

$$-\langle \nabla R(x), f(x) \rangle > n(x)(\gamma - R(x)), \forall x \in \mathcal{X} \quad (3.9)$$

$$V_n(x) > m_0(x)(\gamma - R(x)), \forall x \in \mathcal{X}' \quad (3.10)$$

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle > m_1(x)(\gamma - R(x)), \forall x \in \mathcal{X}' \quad (3.11)$$

*onde  $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \setminus \{0\}$ , então  $\varepsilon(R, \gamma)$  é uma estimativa do domínio de atração em relação à origem do sistema.*

*Se (3.8), (3.9) e (3.10) são satisfeitas e existe  $m_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , tal que*

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle + V_n(x)n(x) > m_2(x)(\gamma - R(x)) \quad (3.12)$$

*é válido, então (3.6) é uma função de Lyapunov para (2.6) e  $\varepsilon^o(R, \gamma)$  é uma estimativa do domínio de atração em relação à origem do sistema.*

**Prova:** Retirada de Valmorbida e Anderson (2017)

A partir da não negatividade de  $m_0(x)$  e  $m_1(x)$ , então pode-se afirmar que (3.10) e (3.11) implicam que as condições (3.3) e (3.4) são obedecidas. Já que em  $\partial\varepsilon(R, \gamma)$  tem-se que  $\gamma - R(x) = 0$ , (3.9) implica em (3.2), e, de acordo com o Teorema 3.1.1,  $\varepsilon(\gamma, R)$  é uma região estimada do domínio de atração em torno da origem. A derivada de  $V(x)$ , como descrito em (3.6) é dada por

$$\dot{V}(x) = \frac{\langle \nabla V_n(x)(\gamma - R(x)) + V_n(x)\nabla R, f(x) \rangle}{(\gamma - R(x))^2}. \quad (3.13)$$

Já que  $V_n(x) > 0$  em  $\varepsilon(R, \gamma)$  se (3.10) for mantida, então a condição (3.9) fornece uma limitação inferior para  $-\dot{V}$  tal qual

$$-\dot{V}(x) = -\frac{\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle}{(\gamma - R)} - \frac{V_n(x)\langle \nabla R(x), f(x) \rangle}{(\gamma - R)^2} > -\frac{\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle}{(\gamma - R)} + \frac{V_n(x)n(x)}{(\gamma - R)}, \quad (3.14)$$

portanto, se existe uma função positiva  $m_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  satisfazendo

$$\frac{(-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle + V_n(x)n(x))}{\gamma - R} > m_2(x), \quad (3.15)$$

isso é equivalente a (3.12), então  $-\dot{V} > 0$  e (3.5) é obedecida. De acordo com o Teorema 3.1.1,  $V(x)$  é uma função de Lyapunov de (2.6) dentro de  $(\varepsilon^o(R, \gamma))$ , proporcionando assim uma estimativa do domínio de atração de (2.6). ■

Em seguida, a partir da Proposição 3.1.2, é apresentado um corolário para adaptar as condições apresentadas anteriormente para validar o Teorema 3.1.1 de forma computacional utilizando otimização convexa.

**Corolário 3.1** *Sejam  $P$  e  $V_n$  sendo polinômios multivariáveis e  $\gamma$  uma constante positiva. Então, se existe polinômios SOS  $m_0, m_1$  e  $n$  tal que*

$$-\langle \nabla R(x), f(x) \rangle - n(x)(\gamma - R(x)) \in \Sigma[x] \quad (3.16)$$

$$V_n(x) - m_0(x)(\gamma - R(x)) \in \Sigma[x] \quad (3.17)$$

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle - m_1(x)(\gamma - R(x)) \in \Sigma[x] \quad (3.18)$$

então as inequações (3.9)-(3.11) são satisfeitas e  $\varepsilon(R, \gamma)$  é uma estimativa do domínio de atração em relação à origem do sistema.

Se (3.16), (3.17) são satisfeitas e existe  $m_2$  SOS, tal que

$$-\langle \nabla V_n(x), f(x) \rangle + V_n(x)n(x) - m_2(x)(\gamma - R(x)) \in \Sigma[x] \quad (3.19)$$

é válido, então (3.6) é uma função de Lyapunov para (2.6) no conjunto  $\varepsilon^o(R, \gamma)$ .

Como provado na Proposição 3.1.2, o fato que (3.16) e (3.19) são válidos são condições suficientes para (3.5) e, se satisfeita, é certificado que a função racional  $V(x) = \frac{V_n(x)}{\gamma - R(x)}$  é uma função de Lyapunov no conjunto  $\varepsilon^o(R, \gamma)$ .

Por fim, o trabalho (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017) apresentou uma proposição utilizada para expandir o domínio de atração estimado, a partir das condições da Proposição 3.1.2.

**Proposição 3.1.3** *Sejam os polinômios  $R, \hat{R}$  e um escalar  $\gamma > 0$ , se existe uma função SOS  $m_3$  tal que*

$$(\gamma - R(x)) - m_3(\gamma - \hat{R}(x)) \in \Sigma[x], m_3 \in \Sigma[x] \quad (3.20)$$

então,  $\varepsilon(\hat{R}, \gamma) \subseteq \varepsilon(R, \gamma)$ .

Com base nisso, podemos formular o Algoritmo 1. Inicialmente, o primeiro passo do algoritmo consiste em determinar o valor máximo de  $\gamma$  que atenda às condições (3.16)-(3.18). Após encontrar esse valor, procedemos para o segundo passo do algoritmo. Nessa fase, o foco está em identificar os maiores  $\gamma$  e  $\varepsilon(R, \gamma)$  de forma a satisfazer  $\varepsilon(\hat{R}, \gamma) \subseteq \varepsilon(R, \gamma)$ . Essa sequência de passos é repetida de maneira alternada até que o problema se torne inviável ou não seja mais possível maximizar a variável escalar  $\gamma$ .



---

**Algoritmo 1:** Algoritmo para Estimação de Domínio de Atração de Sistemas Não Lineares
 

---

**Entrada:**  $k = 0$  e  $R_0$  satisfazendo (3.1)

**Saída:**  $R(x)$

**início**

**Passo 1:** A partir de  $R_k$ , solucionar as condições abaixo através de uma pesquisa linear em  $\gamma$ :

$$\max_{V_n, m_0, m_1, n} \gamma \text{ Sujeito a (3.16) – (3.18)} \quad (3.21)$$

**Passo 2:** se *Critério de Parada* for atingido **então**

| **retorne**  $\varepsilon(R_k, \gamma)$ ;

**fim**

**senão**

| Utilizando  $m_0, m_1, n$  e o valor ótimo  $\gamma^*$  do Passo 1, faça  $R(\hat{x}) = R_k(x)$  e solucione as condições abaixo através de uma pesquisa linear em  $\gamma$ :

$$\max_{V_n, R, m_3} \gamma \text{ Sujeito a (3.16) – (3.18), (3.20), } \gamma \geq \gamma^* \quad (3.22)$$

**fim**

$k \leftarrow k + 1$ ;

$R_i \leftarrow R^*$ ;

Volte para o Step 1;

**fim**

---

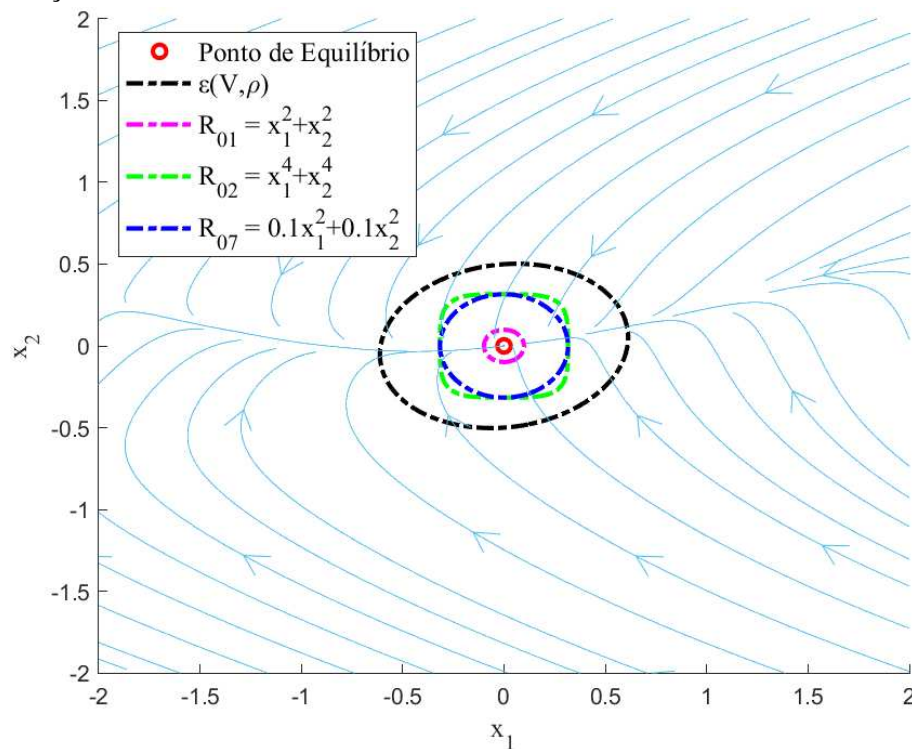
### 3.2 Relação da Inicialização $R_0$ e a Estimativa do Domínio de Atração $\varepsilon(R, \gamma)$

No estudo de (VALMORBIDA; ANDERSON, 2017) menciona que o  $R_0$  pode vir da função de Lyapunov do sistema linearizado. O autor ressalta a influência significativa da escolha de  $R_0$  nos resultados finais, bem como a possibilidade de utilizar funções linearizadas do sistema, as quais são obtidas a partir de outras referências.

Ao empregar diferentes funções polinomiais iniciais, temos a oportunidade de estimar diversos domínios iniciais, permitindo a identificação da qualidade desses domínios e a avaliação do comportamento de cada um. Cada domínio inicializado conduzirá a resultados distintos, influenciando diretamente a precisão da estimativa das regiões de atração dos sistemas analisados.

A Figura 3 ilustra claramente como diferentes funções resultam em regiões distintas para as estimativas iniciais dos domínios de atração. Uma vez que este aspecto não foi abordado em estudos anteriores, esta pesquisa destaca-se por fornecer uma análise detalhada dos impactos da inicialização nos domínios finais. Essa contribuição representa um dos principais resultados deste trabalho.

Figura 3 – Estimativas Iniciais de Domínios de Atração para o Sistema Polinomial em Malha Fechada da Seção 4.1



Fonte: elaborada pelo autor.

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS - ESTUDO COMPARATIVO

Neste capítulo será tratado o estudo comparativo entre diferentes inicializações do método iterativo apresentado na Seção 3, que serão apresentados em dois exemplos numéricos, um sistema polinomial não linear com a entrada afim (MADEIRA; MACHADO, 2023) e um sistema polinomial não linear não-afim na entrada (RIBEIRO *et al.*, 2020).

Conforme previamente definido, um sistema afim na entrada pode ser expresso pela equação  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ . Este tipo de sistema recebe essa denominação devido ao termo  $u$  ser afim. No caso de sistemas não afins na entrada, a representação pode ser dada por  $\dot{x} = f(x) + l(x, u)$ , em que  $l$  é uma função que inclui termos não lineares relacionados à entrada  $u$ , aumentando, assim, a complexidade do sistema (BINAZADEH; RAHGOSHAY, 2017).

As variáveis que serão comparadas são a função de inicialização e o domínios de atração obtidos através da função de Lyapunov racionais. Em todos os exemplos, o otimizador utilizado foi o SeDuMi com o auxílio do SOSTOOLS. Para cada análise, foi adotado o número máximo de iterações  $k_{max} = 300$ .

Será realizado a comparação entre os domínios de atração estimados entre as funções racionais e polinomiais. A comparação do primeiro exemplo será realizada entre o domínio  $\varepsilon(V, \rho)$ , conjunto contrativo e invariante resultado de uma função de Lyapunov polinomial obtida no estudo de Madeira e Machado (2023), e diferentes  $(R - \gamma)$  e em que é obtido através do maior conjunto gerado por uma função racional de Lyapunov utilizando o Algoritmo 1, em que este é o maior domínio de atração contrativo e invariante. Já no segundo exemplo, nos deteremos a comparação entre os distintas estimativas da região de atração  $(R - \gamma)$ .

### 4.1 Sistema Polinomial de Estabilização Local com Entrada Afim

O primeiro sistema a ser abordado é um sistema não linear polinomial, utilizado em Madeira e Machado (2023). O sistema foi estabilizado localmente através de um controlador SOF através do projeto de um ganho  $K = -10.4023$ . Seja o sistema descrito por

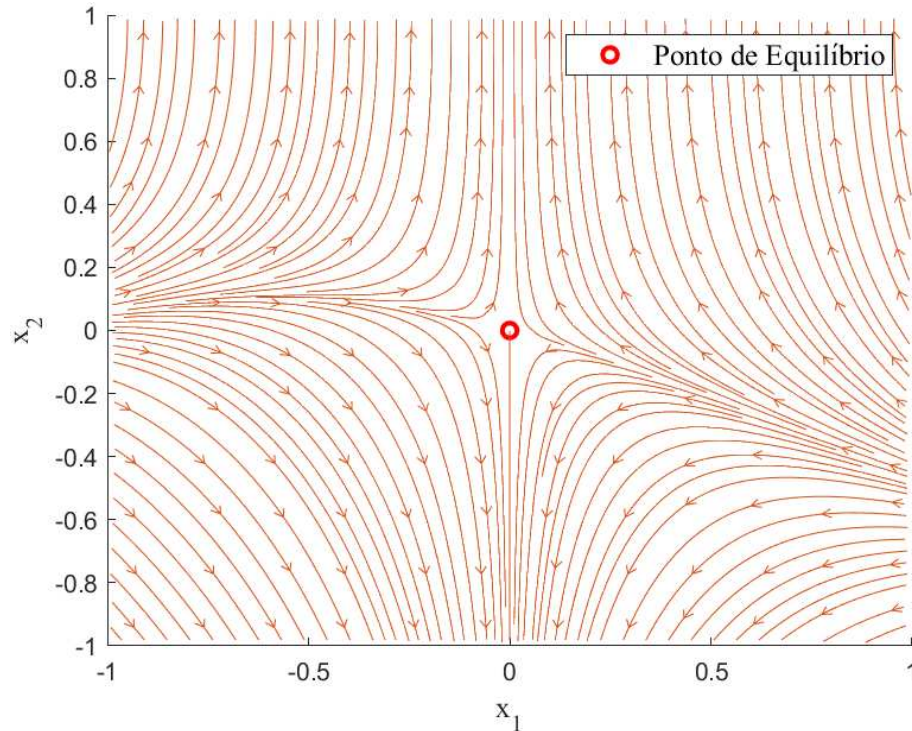
$$f = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_1^2 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

e a saída do sistema  $h(x)$  definida por

$$h = x_2 + x_2^2 + x_2^3 \quad (4.2)$$

Já que a função de controle SOF é definida por  $u(x) = K \cdot h(x)$ , a função  $h(x)$  foi definida dessa forma com o objetivo de ter o mesmo formato da função  $u(x)$  que estabilizou o sistema em Madeira e Machado (2023) conforme na Figura 5.

Figura 4 – Trajetórias do Sistema de Madeira e Machado (2023) em Malha Aberta

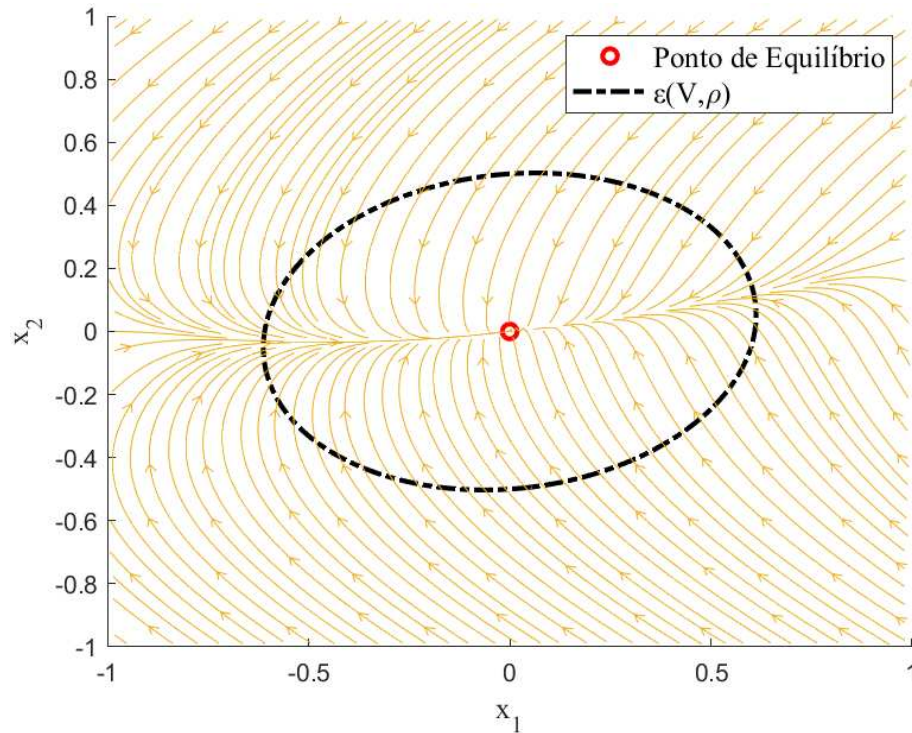


Fonte: elaborada pelo autor.

Desta forma, a Figura 4 apresenta o comportamento em malha aberta do sistema, sendo a origem um PE instável para qualquer condição inicial.

A primeira inicialização escolhida, usando o Algoritmo 1 e utilizando o SOSTOOLS, foi  $R_0 = x_1^2 + x_2^2$  e um  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em  $\gamma^* = 1.65$  e a região de atração  $(R - \gamma)_1$  foi

Figura 5 – Trajetórias do Sistema de Madeira e Machado (2023) em Malha Fechada



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_1 = & 0.01569x_1^6 - 0.022725x_1^5x_2 + 0.055065x_1^4x_2^2 - 0.067442x_1^3x_2^3 + 0.13759x_1^2x_2^4 \\
 & - 0.095138x_1x_2^5 + 0.052463x_2^6 + 0.01367x_1^5 - 0.05192x_1^4x_2 + 0.021608x_1^3x_2^2 - 0.083814x_1^2x_2^3 \\
 & - 0.022903x_1x_2^4 - 0.023909x_2^5 - 0.1325x_1^4 + 0.24597x_1^3x_2 - 0.49083x_1^2x_2^2 + 0.57652x_1x_2^3 \\
 & - 0.35136x_2^4 - 0.076854x_1^3 + 0.14605x_1^2x_2 - 0.11833x_1x_2^2 + 0.095781x_2^3 + 0.66767x_1^2 \\
 & - 0.89934x_1x_2 + 1.0792x_2^2 - 1.65 \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Semelhantemente, a segunda inicialização escolhida foi  $R_0 = x_1^4 + x_2^4$  e um  $\gamma = 0.1$ .

A aplicação do método resultou em  $\gamma^* = 0.4$  e a região de atração  $(R - \gamma)_2$  foi

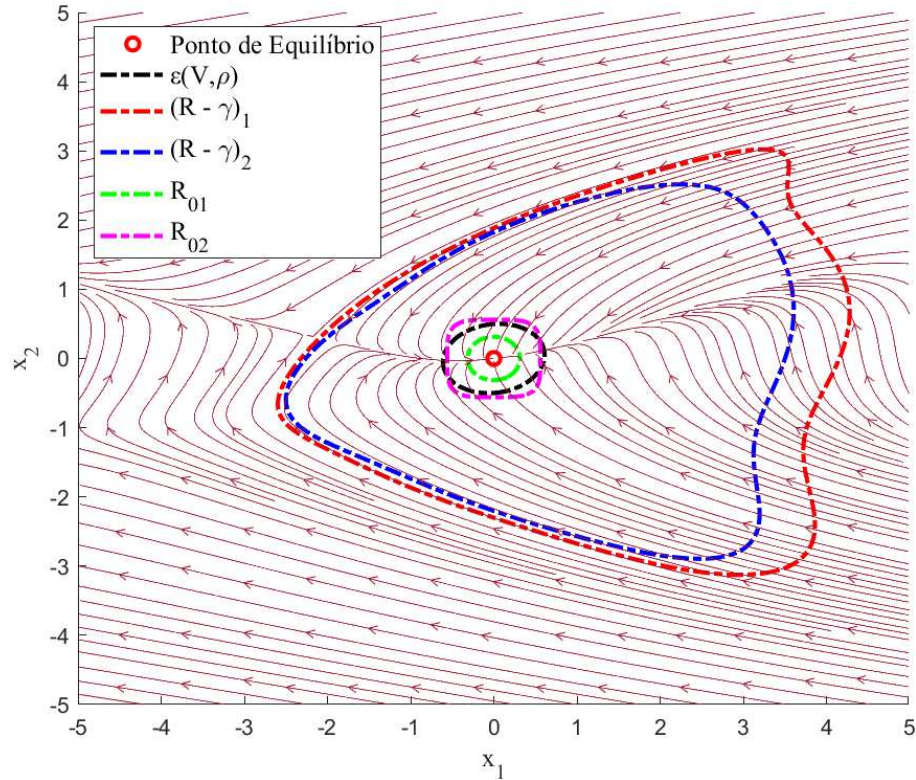
$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_2 = & 0.21075x_1^6 - 0.21584x_1^5x_2 + 0.11156x_1^4x_2^2 + 0.13547x_1^3x_2^3 + 0.38305x_1^2x_2^4 - 0.12753x_1x_2^5 \\
 & + 1.1244x_2^6 + 0.094073x_1^5 - 0.014459x_1^4x_2 - 0.47998x_1^3x_2^2 - 0.21703x_1^2x_2^3 - 4.1353x_1x_2^4 - 1.3075x_2^5 \\
 & - 1.1794x_1^4 + 0.53566x_1^3x_2 + 4.3302x_1^2x_2^2 + 3.5158x_1x_2^3 - 3.3728x_2^4 - 3.9815x_1^3 + 1.4636x_1^2x_2 \\
 & + 5.8137x_1x_2^2 + 7.6454x_2^3 - 7.3313x_1^2 - 5.3745x_1x_2 - 7.1458x_2^2 - 0.4 \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

É possível observar os resultados na Figura 6 desde a primeira estimativa do domínio de atração com as duas funções polinomiais com a Função de Lyapunov Máxima gerada pelo



Algoritmo 1.

Figura 6 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 01



Fonte: elaborada pelo autor.

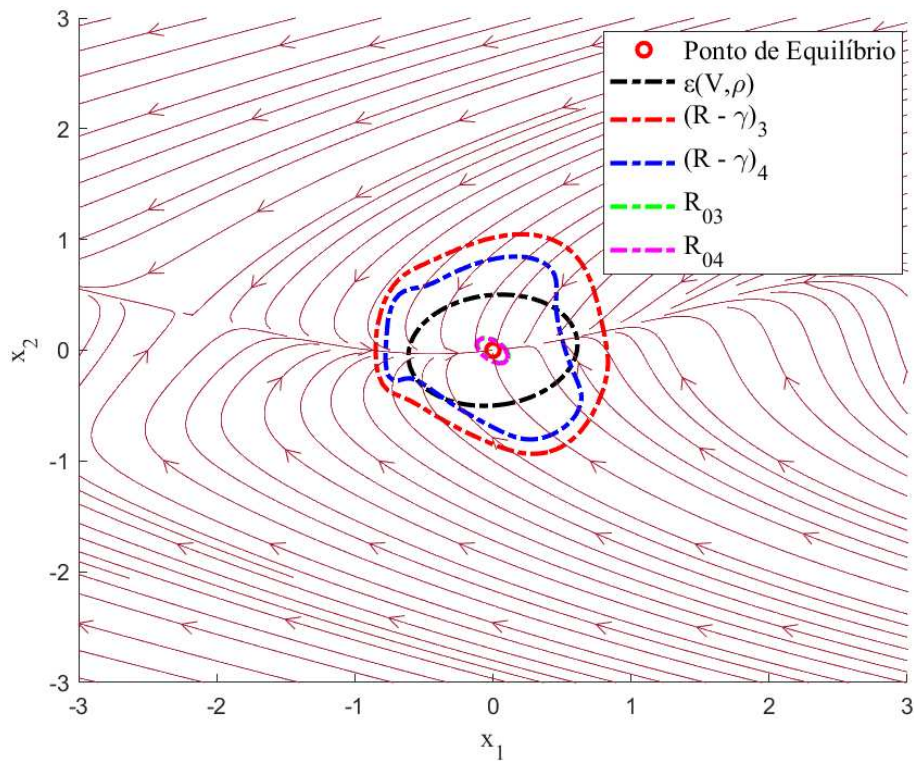
A mesma análise foi aplicada para outras funções polinomiais  $R_0$  como será apresentado a seguir.

Semelhantermente, a terceira e quarta inicializações escolhidas foram respectivamente  $R_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  e  $R_0 = x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 + x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  ambos com  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em, respectivamente,  $\gamma^* = 0.31$  e  $\gamma^* = 0.21$  e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_3 = & 1.4611x_1^6 - 0.07109x_1^5x_2 + 2.7376x_1^4x_2^2 - 0.40251x_1^3x_2^3 + 1.7492x_1^2x_2^4 - 0.10171x_1x_2^5 \\
 & + 0.47812x_2^6 + 0.015038x_1^5 + 0.10755x_1^4x_2 + 0.48975x_1^3x_2^2 - 0.087589x_1^2x_2^3 + 0.048765x_1x_2^4 \\
 & - 0.082887x_2^5 - 2.4741x_1^4 + 0.20781x_1^3x_2 - 2.9478x_1^2x_2^2 + 0.32601x_1x_2^3 - 0.93504x_2^4 \\
 & - 0.0058067x_1^3 - 0.055158x_1^2x_2 - 0.31312x_1x_2^2 + 0.020407x_2^3 + 1.4577x_1^2 - 0.093711x_1x_2 \\
 & + 0.82215x_2^2 - 0.31 \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R - \gamma)_4 = & 2.1008x_1^6 + 0.094705x_1^5x_2 + 3.2341x_1^4x_2^2 - 0.11041x_1^3x_2^3 + 2.4177x_1^2x_2^4 + 0.07577x_1x_2^5 \\
& + 0.82344x_2^6 + 0.25364x_1^5 + 0.31257x_1^4x_2 + 0.7556x_1^3x_2^2 - 0.12873x_1^2x_2^3 + 0.084084x_1x_2^4 \\
& + 0.2299x_2^5 - 2.5528x_1^4 + 0.17315x_1^3x_2 - 2.9512x_1^2x_2^2 - 0.078972x_1x_2^3 - 1.1293x_2^4 + 0.02302x_1^3 \\
& + 0.094765x_1^2x_2 - 0.37979x_1x_2^2 - 0.19524x_2^3 + 1.2585x_1^2 + 0.070761x_1x_2 + 0.729x_2^2 - 0.21
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Figura 7 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 02



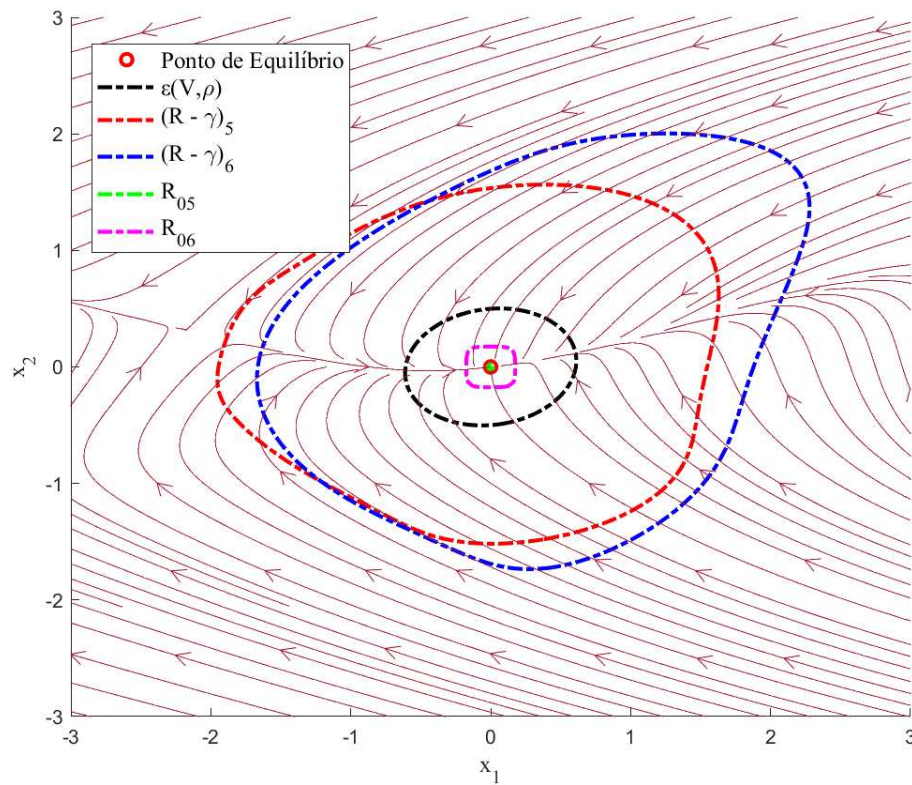
Fonte: elaborada pelo autor.

Continuamente, a quinta e sexta inicializações escolhidas foram respectivamente  $R_0 = 10x_1^2 + 10x_2^2$  e  $R_0 = 10x_1^4 + 10x_2^4$  ambos com  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em, respectivamente,  $\gamma^* = 18.31$  e  $\gamma^* = 2.98$  e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

$$\begin{aligned}
(R - \gamma)_5 = & 0.45931x_1^6 - 0.5483x_1^5x_2 + 2.4402x_1^4x_2^2 - 2.3085x_1^3x_2^3 + 4.3773x_1^2x_2^4 - 2.2412x_1x_2^5 \\
& + 1.9182x_2^6 + 0.47842x_1^5 - 0.23267x_1^4x_2 + 1.4973x_1^3x_2^2 - 0.90042x_1^2x_2^3 + 2.0122x_1x_2^4 - 0.70945x_2^5 \\
& - 3.5686x_1^4 + 3.5435x_1^3x_2 - 14.5325x_1^2x_2^2 + 8.1282x_1x_2^3 - 10.5086x_2^4 - 1.0012x_1^3 + 0.1264x_1^2x_2 \\
& - 4.8439x_1x_2^2 + 1.6206x_2^3 + 13.3395x_1^2 - 7.0723x_1x_2 + 21.9595x_2^2 - 18.31
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
(R - \gamma)_6 = & 0.048542x_1^6 - 0.13717x_1^5x_2 + 0.31934x_1^4x_2^2 - 0.40522x_1^3x_2^3 + 0.53564x_1^2x_2^4 - 0.2759x_1x_2^5 \\
& + 0.13047x_2^6 + 0.060837x_1^5 - 0.13189x_1^4x_2 + 0.054423x_1^3x_2^2 - 0.32151x_1^2x_2^3 + 0.030134x_1x_2^4 \\
& - 0.10966x_2^5 - 0.41418x_1^4 + 1.0951x_1^3x_2 - 1.7447x_1^2x_2^2 + 1.7005x_1x_2^3 - 0.83883x_2^4 - 0.23505x_1^3 \\
& + 0.23222x_1^2x_2 - 0.42065x_1x_2^2 + 0.31393x_2^3 + 1.7399x_1^2 - 2.3016x_1x_2 + 2.376x_2^2 - 2.98 \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Figura 8 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 03



Fonte: elaborada pelo autor.

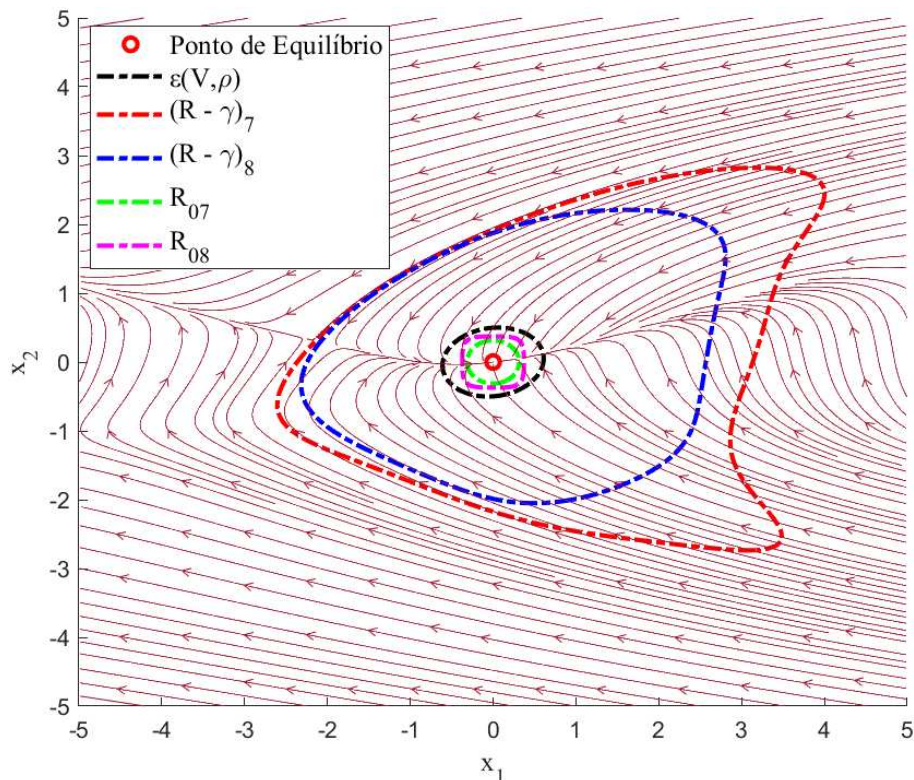
Por fim, a sétima e oitava inicializações escolhidas foram respectivamente  $R_0 = 0.1x_1^2 + 0.1x_2^2$  e  $R_0 = 0.5x_1^2 + 0.5x_2^2$  ambos com  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em, respectivamente,  $\gamma^* = 0.4$  e  $\gamma^* = 0.24$  e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi



$$\begin{aligned}
(R - \gamma)_7 = & 0.00033445x_1^6 - 0.00051718x_1^5x_2 - 0.00017087x_1^4x_2^2 + 0.00057616x_1^3x_2^3 \\
& + 0.0026995x_1^2x_2^4 - 0.0017241x_1x_2^5 + 0.0037619x_2^6 - 0.00065879x_1^5 + 0.0026775x_1^4x_2 \\
& - 0.0064878x_1^3x_2^2 + 0.0046254x_1^2x_2^3 - 0.020456x_1x_2^4 + 0.0032749x_2^5 + 0.001548x_1^4 - 0.011229x_1^3x_2 \\
& + 0.030661x_1^2x_2^2 - 0.0094595x_1x_2^3 + 0.0016496x_2^4 - 0.0054842x_1^3 + 0.013041x_1^2x_2 \\
& - 0.018747x_1x_2^2 + 0.00014538x_2^3 + 0.030669x_1^2 - 0.010369x_1x_2 + 0.026536x_2^2 - 0.4 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R - \gamma)_8 = & 0.00046438x_1^6 - 0.00019338x_1^5x_2 + 0.0012335x_1^4x_2^2 - 0.0015761x_1^3x_2^3 + 0.0087756x_1^2x_2^4 \\
& - 0.0037023x_1x_2^5 + 0.0060026x_2^6 + 0.0007723x_1^5 - 0.0020437x_1^4x_2 - 0.0011483x_1^3x_2^2 - 0.0087349x_1^2x_2^3 \\
& - 0.0076964x_1x_2^4 - 0.0029524x_2^5 - 0.00354x_1^4 + 0.0070867x_1^3x_2 - 0.016799x_1^2x_2^2 + 0.028245x_1x_2^3 \\
& - 0.031317x_2^4 - 0.0074845x_1^3 + 0.015016x_1^2x_2 - 0.010307x_1x_2^2 + 0.014532x_2^3 + 0.045591x_1^2 \\
& - 0.059843x_1x_2 + 0.096297x_2^2 - 0.24 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Figura 9 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 04

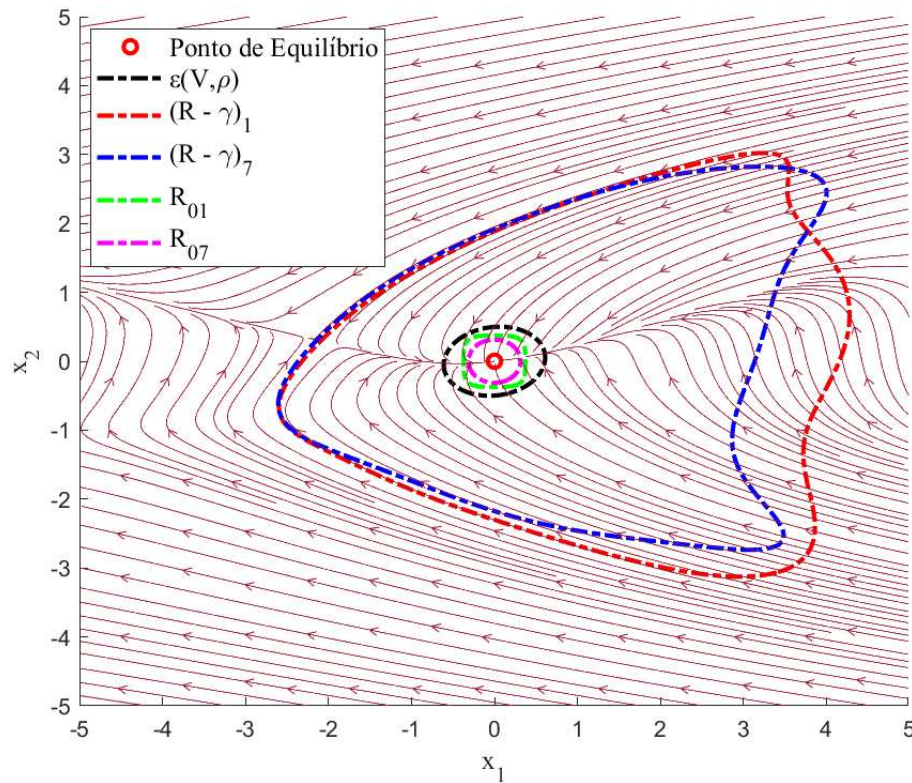


Fonte: elaborada pelo autor.

Então, conclui-se que a depender da função de inicialização é possível ter um domínio de atração maior gerado pelo método iterativo do Algoritmo 1. A Figura 10 ilustra a comparação entre os domínios de atração estimados através dos testes 1 e 7, os quais se mostraram mais abrangentes. É possível ver que os domínios estimados são similares, sua inicialização ocorre contida na região de atração obtida pela função de Lyapunov polinomial com funções polinomiais bem próximas do seu domínio.

Ademais, a Figura 10 indica que o domínio de atração estimado pela função de Lyapunov racional foi maior quando comparado ao caso polinomial em todos os casos. O domínio contrativo e invariante  $\varepsilon(R, \gamma)$  foi maior que o domínio  $\varepsilon(V, \rho)$ .

Figura 10 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Polinomial em Malha Fechada - Análise 05



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma das sugestões de inicialização dada no trabalho de Valmorbidia e Anderson (2017) é a função de Lyapunov do sistema linearizado. Dado o sistema (4.1)-(4.2), assumindo que o ponto de operação é  $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (0, 0)$ , podemos linearizar o sistema ao redor desse ponto. Primeiro, substituímos  $x_{1,0} = 0$  e  $x_{2,0} = 0$  nas equações diferenciais para encontrar as derivadas no ponto de operação:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2 \cdot x_2 + x_1^2 + x_1^2 \cdot x_2 + u\end{aligned}$$

Substituindo  $x_{1,0} = 0$  e  $x_{2,0} = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}$$

Agora, linearizando as equações em torno do ponto de operação, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_3 x_1 + A_4 x_2 + B_2 u\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}A_1 &= \left. \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} \\ A_2 &= \left. \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} \\ B_1 &= \left. \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \right|_{(0,0)} \\ A_3 &= \left. \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} \\ A_4 &= \left. \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} \\ B_2 &= \left. \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \right|_{(0,0)}\end{aligned}$$

Calculando essas derivadas e substituindo  $u = K \cdot (x_2 + x_2^2 + x_2^3)$ , obtemos os seguintes valores:

$$A_1 = -1$$

$$A_2 = 0$$

$$B_1 = K$$

$$A_3 = 1$$

$$A_4 = 2$$

$$B_2 = K$$

A matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $B$  é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix}$$

Agora, para encontrar a função de Lyapunov para o sistema linearizado, você pode procurar uma função quadrática do tipo:

$$V(x) = x^T P x$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica definida positiva. A derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema linearizado deve ser negativa definida. Portanto,  $V(x)$  é uma função de Lyapunov se a seguinte condição for satisfeita:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = x^T (A^T P + P A) x < 0$$

A função linearizada do sistema pode ser representada pelas equações diferenciais lineares:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + B_1 u$$

$$\dot{x}_2 = A_3 x_1 + A_4 x_2 + B_2 u$$

Substituindo os valores que calculamos anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + K \cdot (x_2 + x_2^2 + x_2^3) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + K \cdot (x_2 + x_2^2 + x_2^3)\end{aligned}$$

Se escolhermos  $P$  como a matriz identidade, então  $P$  será:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A derivada da função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  ao longo das trajetórias do sistema linearizado é dada por:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x$$

Substituindo  $A$  pelos valores calculados anteriormente e  $P$  pela matriz identidade, obtemos:

$$\dot{V}(x) = x^T \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) x$$

Simplificando a expressão, obtemos:

$$\dot{V}(x) = x^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{V}(x) = x^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + x^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{V}(x) = x^T \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + x^T \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(x) = x^T \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Para que  $\dot{V}(x)$  seja negativa definida, os autovalores da matriz  $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$  devem ter parte real negativa. Vamos calcular os autovalores:

Os autovalores  $\lambda$  podem ser encontrados resolvendo o determinante da matriz característica  $|\lambda I - A|$ :

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 4 & -3 \\ -4 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 6) + 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 12 = 0$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = 4$ . A função de Lyapunov proposta  $V(x) = x^T x$  é válida para este sistema linearizado.

Portanto,  $V(x) = x^T x$  é uma função de Lyapunov para a função linearizada do sistema em torno do ponto de operação  $(0, 0)$  com  $P = I$ , podendo ser escrita como  $x_1^2 + x_2^2$  que já analisamos anteriormente. Valores foram atribuídos a matriz  $P$ , entretanto não foram encontradas soluções ao inicializar com essas outras candidatas nas situações em que  $P$  é uma matriz diagonal com elementos positivos.

## 4.2 Estabilização Local de um Sistema Não-Afim na Entrada

A análise de estabilidade em sistemas não afins na entrada, controlados com estabilidade local assintótica, é essencial para assegurar a robustez e o desempenho em sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas. Ao garantir estabilidade local assintótica mesmo diante de variações nas condições operacionais, proporciona-se resiliência ao sistema.

Considere o sistema polinomial não-afim na entrada (RIBEIRO *et al.*, 2020) descrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_1^3 + x_2^5 - u^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1^2 x_2^5 + u/4\end{aligned}\tag{4.11}$$

Seguindo os passos propostos no trabalho (RIBEIRO *et al.*, 2020), as linearizações são realizadas em torno de  $\bar{u} = 0$  e  $\bar{K}_0(x) = 0.39x_1 - 2.54x_2$ .

Ademais, analisando a dinâmica do sistema em malha aberta, como é exibida na Figura 11, é possível verificar que o sistema possui a origem como um PE localmente estável. Assim, dado que o objetivo deste trabalho é a análise da estabilidade, adotou-se o controle de estabilização na origem utilizado nos estudos de (RIBEIRO *et al.*, 2020) a qual teve o objetivo de expandir a Região de Atração.

Conforme a análise realizada na Seção 4.1, a primeira inicialização escolhida, usando o Algoritmo 1 e utilizando o SOSTOOLS, foi  $R_0 = x_1^2 + x_2^2$  e um  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em  $\gamma^* = 0.98$  e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

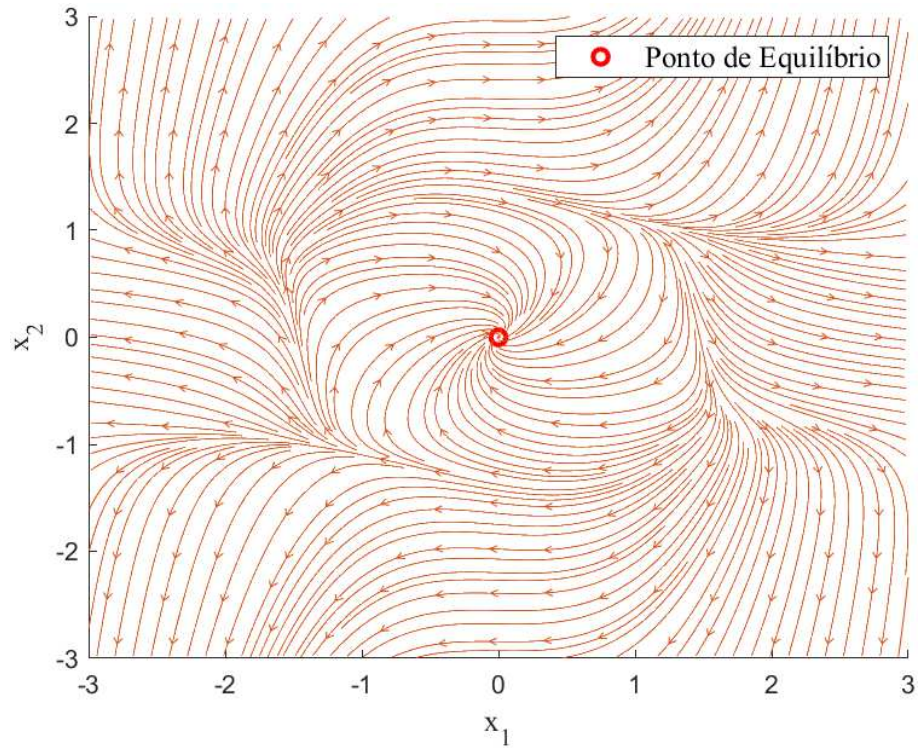
$$\begin{aligned}(R - \gamma)_1 &= 0.025123x_1^4 - 0.020568x_1^3x_2 - 0.2168x_1^2x_2^2 - 0.033929x_1x_2^3 + 0.8891x_2^4 \\ &+ 2.2917e - 08x_1^3 - 4.506e - 08x_1^2x_2 - 4.5234e - 08x_1x_2^2 + 2.9624e - 08x_2^3 + 0.37503x_1^2 \\ &+ 0.35067x_1x_2 + 0.13173x_2^2 - 0.98\end{aligned}\tag{4.12}$$

Semelhantemente, a segunda inicialização escolhida foi  $R_0 = x_1^4 + x_2^4$  mas, aplicando o Algoritmo 1, verificou-se que não foi possível encontrar uma solução. Desta maneira, é possível observar o resultado na Figura 13 da primeira estimativa do domínio de atração com uma função polinomial com a Função de Lyapunov Máxima gerada pelo Algoritmo 1.

A mesma análise foi aplicada para outras funções polinomiais  $R_0$  como será apresentado a seguir.

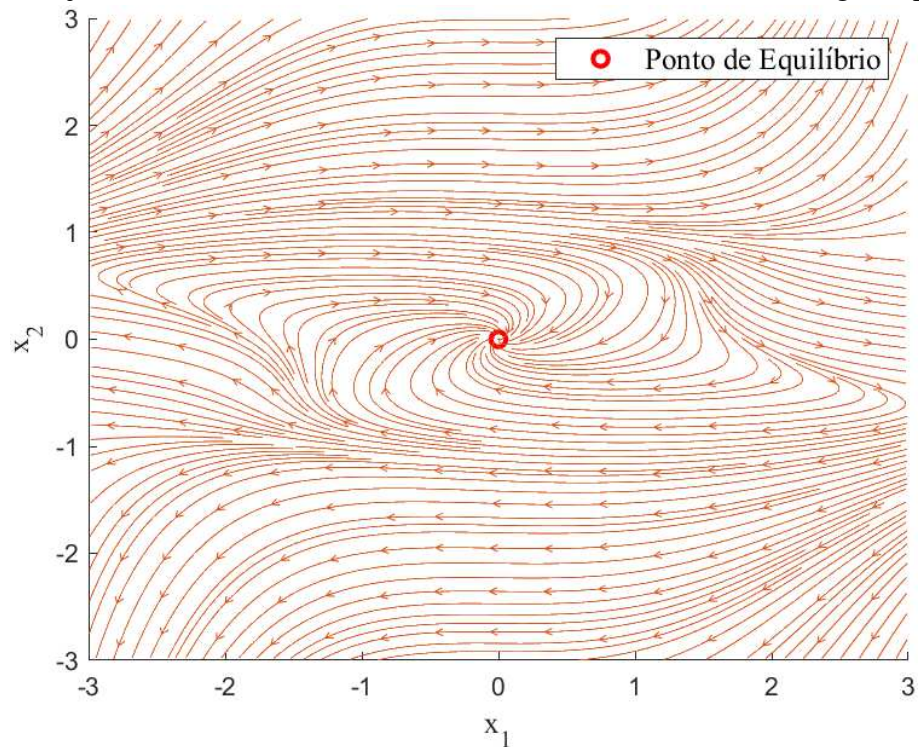


Figura 11 – Trajetórias do Sistema Não-Afim na Entrada em Malha Aberta



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 12 – Trajetórias do Sistema Não-Afim na Entrada estabilizado na origem após controle

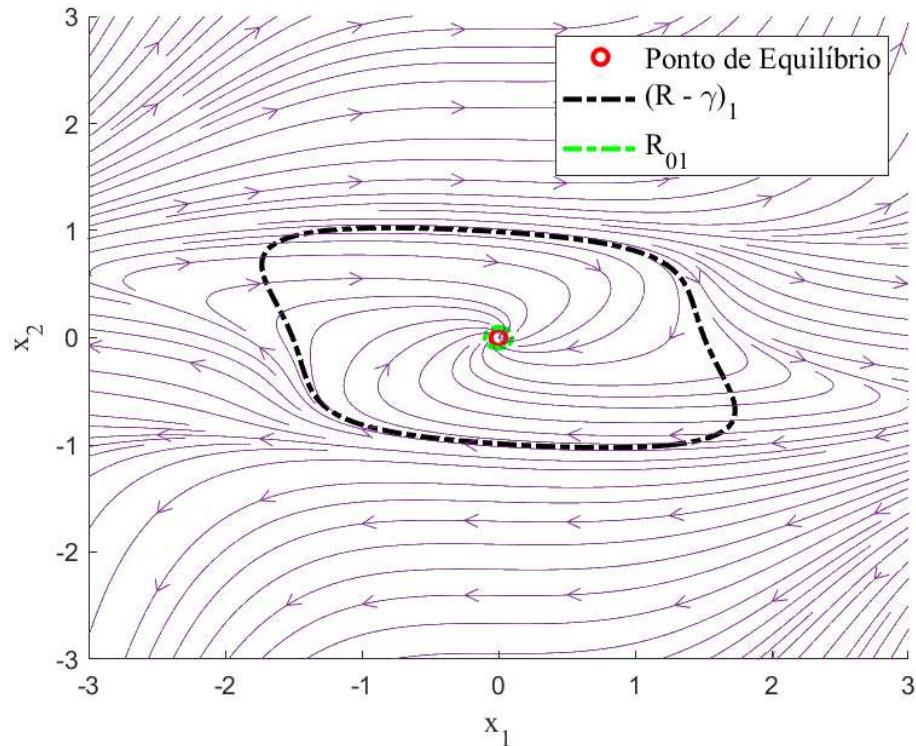


Fonte: elaborada pelo autor.

Semelhantemente, a terceira e quarta inicializações escolhidas foram respectivamente  $R_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  e  $R_0 = x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 + x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  ambos com  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em, respectivamente,  $\gamma^* = 0.65$  e  $\gamma^* = 0.43$



Figura 13 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 01



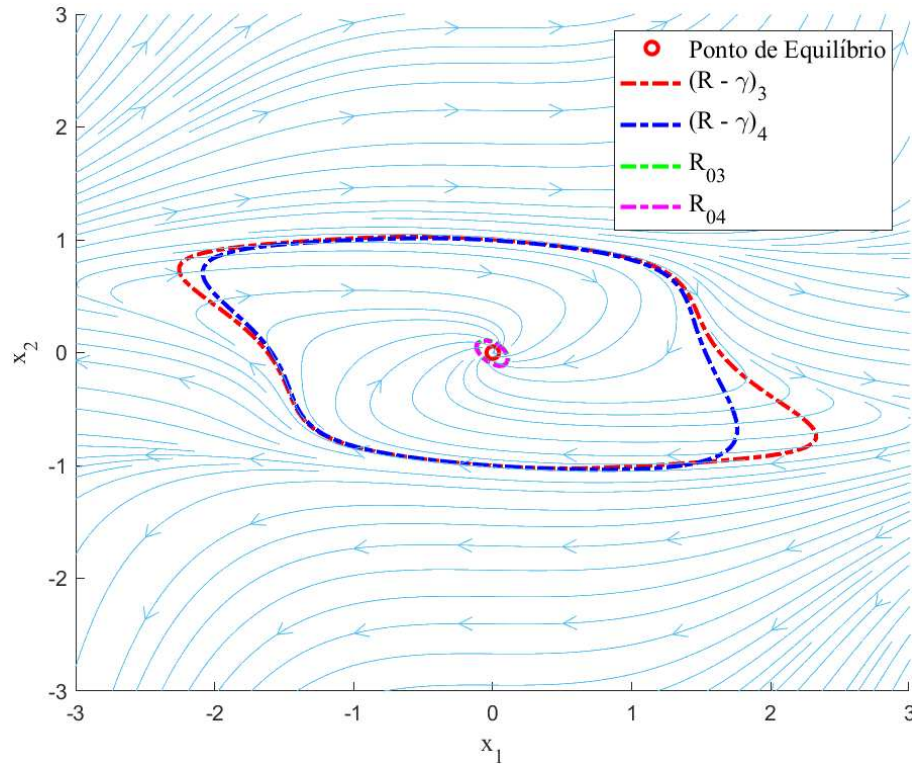
Fonte: elaborada pelo autor.

e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_3 = & 0.0056892x_1^6 + 0.020567x_1^5x_2 + 0.0091172x_1^4x_2^2 - 0.02721x_1^3x_2^3 + 0.38605x_1^2x_2^4 \\
 & + 0.31918x_1x_2^5 + 0.2082x_2^6 - 0.0010141x_1^5 - 0.0010028x_1^4x_2 + 0.00024498x_1^3x_2^2 - 0.0071945x_1^2x_2^3 \\
 & - 0.00158x_1x_2^4 - 0.0058188x_2^5 + 0.025422x_1^4 + 0.075282x_1^3x_2 - 0.33181x_1^2x_2^2 - 0.29724x_1x_2^3 \\
 & + 0.028731x_2^4 + 0.00065511x_1^3 + 0.004538x_1^2x_2 + 0.00041155x_1x_2^2 + 0.0048891x_2^3 + 0.13863x_1^2 \\
 & + 0.16059x_1x_2 + 0.40462x_2^2 - 0.65 \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_4 = & 0.0083558x_1^6 + 0.010117x_1^5x_2 - 0.0054543x_1^4x_2^2 - 0.017686x_1^3x_2^3 + 0.23064x_1^2x_2^4 \\
 & + 0.1747x_1x_2^5 + 0.17549x_2^6 + 0.0067532x_1^5 + 0.00037728x_1^4x_2 - 0.0019895x_1^3x_2^2 + 0.048969x_1^2x_2^3 \\
 & - 0.043585x_1x_2^4 + 0.17906x_2^5 + 0.016951x_1^4 + 0.059963x_1^3x_2 - 0.17483x_1^2x_2^2 - 0.11653x_1x_2^3 \\
 & + 0.022215x_2^4 - 0.0085669x_1^3 - 0.017875x_1^2x_2 + 0.065134x_1x_2^2 - 0.17392x_2^3 + 0.087119x_1^2 \\
 & + 0.07101x_1x_2 + 0.23408x_2^2 - 0.43 \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Figura 14 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 02



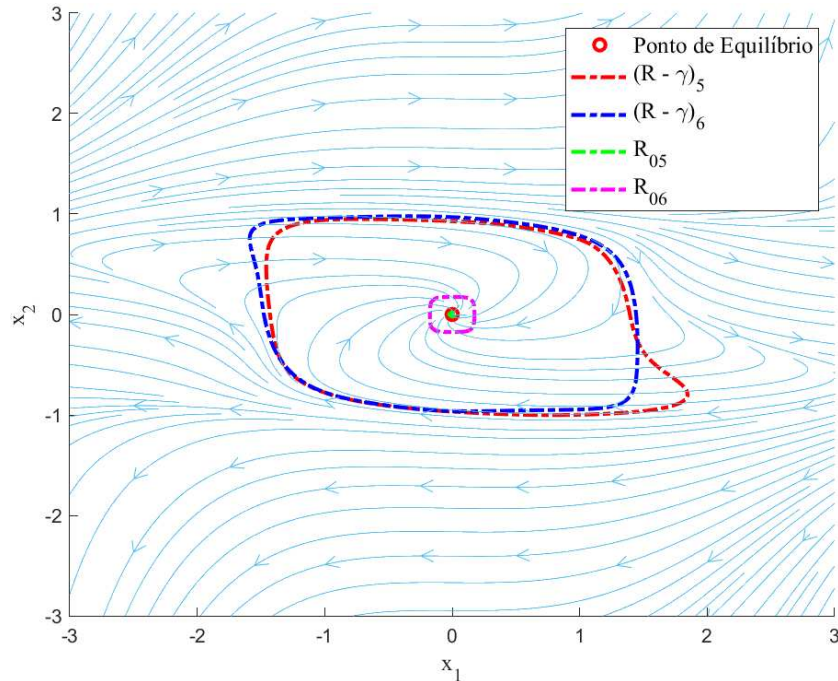
Fonte: elaborada pelo autor.

Continuamente, a quinta e sexta inicializações escolhidas foram respectivamente  $R_0 = 10x_1^2 + 10x_2^2$  e  $R_0 = 10x_1^4 + 10x_2^4$  ambos com  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em, respectivamente,  $\gamma^* = 6.07$  e  $\gamma^* = 1.81$  e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_5 = & 0.17448x_1^6 + 0.31324x_1^5x_2 + 1.1383x_1^4x_2^2 + 1.9012x_1^3x_2^3 + 4.8397x_1^2x_2^4 + 1.7319x_1x_2^5 \\
 & + 5.19x_2^6 - 0.33212x_1^5 - 0.54409x_1^4x_2 - 1.1225x_1^3x_2^2 - 1.8542x_1^2x_2^3 - 2.6224x_1x_2^4 - 4.7797x_2^5 \\
 & - 0.71313x_1^4 - 1.5656x_1^3x_2 - 7.8883x_1^2x_2^2 - 3.4219x_1x_2^3 - 9.8008x_2^4 + 0.71529x_1^3 + 1.0526x_1^2x_2 \\
 & + 1.5878x_1x_2^2 + 4.5787x_2^3 + 3.753x_1^2 + 2.6086x_1x_2 + 11.2105x_2^2 - 6.07 \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_6 = & 0.08567x_1^6 + 0.079559x_1^5x_2 - 0.10766x_1^4x_2^2 + 0.2252x_1^3x_2^3 + 0.8579x_1^2x_2^4 - 0.042102x_1x_2^5 \\
 & + 1.0078x_2^6 + 0.039834x_1^5 + 0.052301x_1^4x_2 + 0.11348x_1^3x_2^2 + 0.3322x_1^2x_2^3 + 0.39129x_1x_2^4 + 0.88579x_2^5 \\
 & + 0.035633x_1^4 - 0.12741x_1^3x_2 - 0.8572x_1^2x_2^2 - 0.088361x_1x_2^3 - 2.3155x_2^4 - 0.057597x_1^3 - 0.15528x_1^2x_2 \\
 & - 0.23799x_1x_2^2 - 0.838x_2^3 + 0.38698x_1^2 + 0.28598x_1x_2 + 3.2193x_2^2 - 1.81 \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Figura 15 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 03



Fonte: elaborada pelo autor.

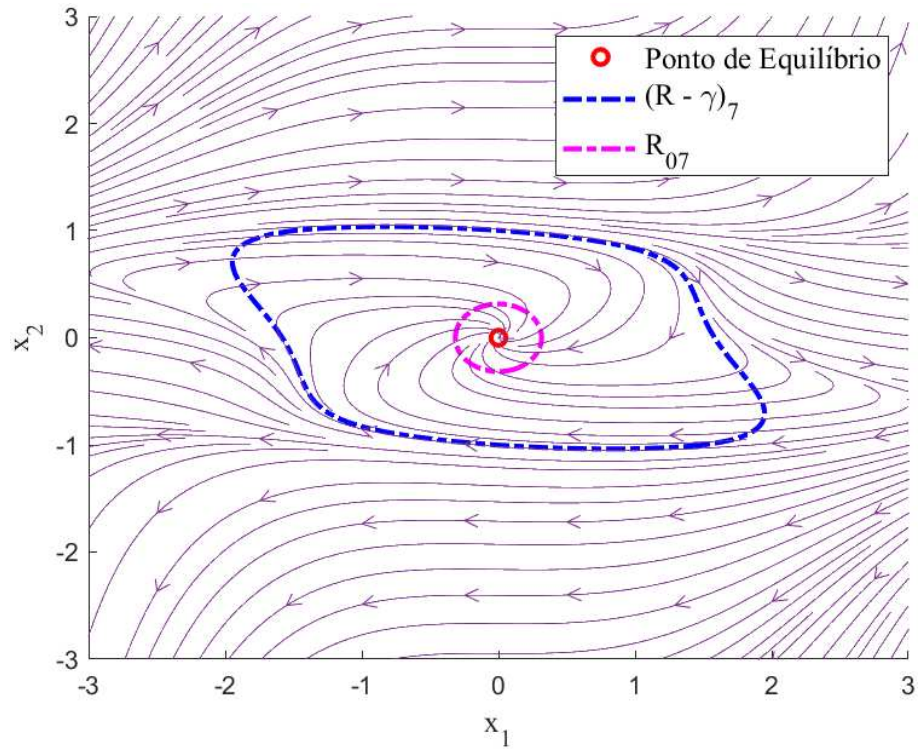
Por fim, as sétima e oitava inicializações escolhidas foram, respectivamente,  $R_0 = 0.1x_1^2 + 0.1x_2^2$  e  $R_0 = 0.5x_1^2 + 0.5x_2^2$ , ambas com  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em  $\gamma^* = 0.09$  para a sétima inicialização e, para a oitava inicialização, não foi possível encontrar solução. Além disso, a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

$$\begin{aligned}
 (R - \gamma)_7 = & 0.001978x_1^6 + 0.0021038x_1^5x_2 - 0.0005115x_1^4x_2^2 - 0.008043x_1^3x_2^3 + 0.044777x_1^2x_2^4 \\
 & + 0.063526x_1x_2^5 + 0.061809x_2^6 - 1.059e - 08x_1^5 - 5.2123e - 09x_1^4x_2 - 9.6255e - 09x_1^3x_2^2 \\
 & - 3.8033e - 08x_1^2x_2^3 + 9.842e - 09x_1x_2^4 - 1.0677e - 07x_2^5 + 0.0036391x_1^4 + 0.022924x_1^3x_2 \\
 & - 0.020633x_1^2x_2^2 - 0.023931x_1x_2^3 + 0.0077391x_2^4 + 1.6042e - 08x_1^3 + 2.5372e - 08x_1^2x_2 \\
 & - 3.4824e - 08x_1x_2^2 + 9.6258e - 08x_2^3 + 0.01441x_1^2 - 0.0011919x_1x_2 + 0.019356x_2^2 - 0.09
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Então, percebe-se que a depender da função de inicialização é possível ter um domínio de atração maior gerado pelo método iterativo do Algoritmo 1. A Figura 17 ilustra a comparação entre os domínios de atração estimados através dos testes 1 e 7, os quais se mostraram mais abrangentes. É possível ver que os domínios estimados são similares, dadi que sua inicialização é dada por regiões maiores.

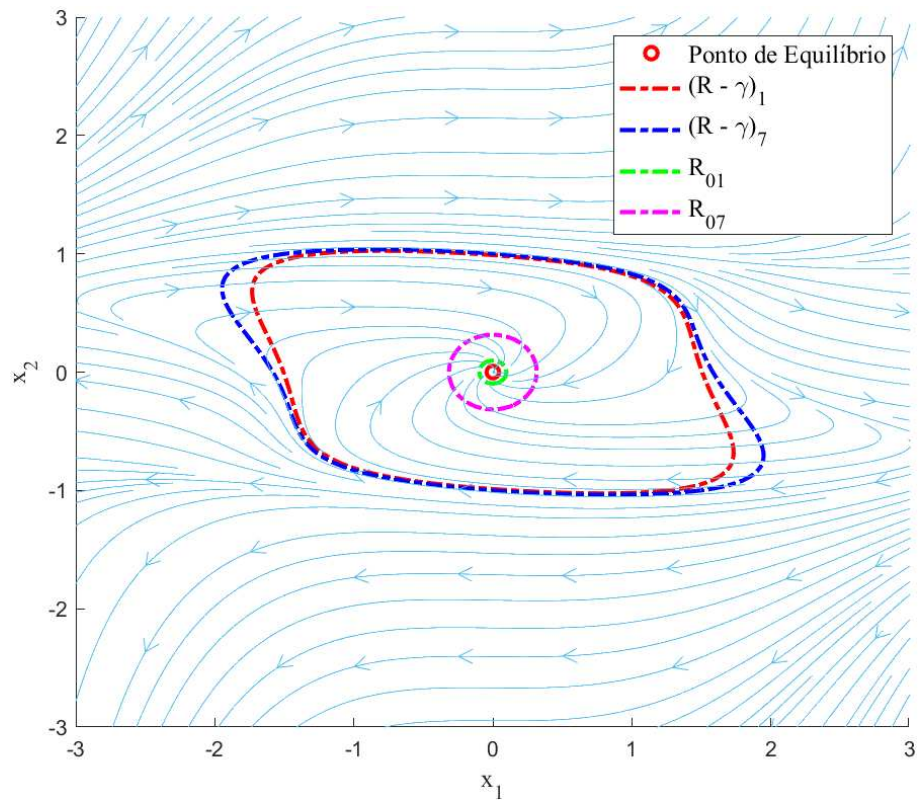


Figura 16 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 04



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 17 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 05



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim como no exemplo anterior, utilizaremos a sugestão de inicialização dada no trabalho de Valmorbidia e Anderson (2017) de utilizar a função de Lyapunov do sistema linearizado. Dado o sistema (4.11), assumindo que o ponto de operação é  $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (0, 0)$ , podemos linearizar o sistema ao redor desse ponto. As equações diferenciais do sistema são dadas por:

$$u = 0.39 \cdot x_1 - 2.54 \cdot x_2$$

$$\dot{x}_1 = -2 \cdot x_1 + x_2 + x_1^3 + x_2^5 - u^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 \cdot x_2^5 + \frac{u}{4}$$

Agora, para linearizar, podemos utilizar a expansão de Taylor ao redor do ponto de operação  $(0, 0)$ . Para simplificar, considere  $u = 0$  para a linearização, uma vez que estamos expandindo em torno da origem:

$$\dot{x}_1 \approx -2 \cdot x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 \approx -x_1 - x_2$$

As equações diferenciais linearizadas podem ser expressas de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, para encontrar a função de Lyapunov para o sistema linearizado, você pode procurar uma função quadrática do tipo:

$$V(x) = x^T P x$$

Substituindo  $P$  pela matriz identidade, que é uma matriz simétrica definida positiva, obtemos:

$$V(x) = x^T I x$$

$$V(x) = x^T x$$

A derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema linearizado é dada por:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x$$

Substituindo  $P$  pela matriz identidade e  $A$  pela matriz de coeficientes da equação linearizada, obtemos:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T I + I A) x$$

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T + A) x$$

Neste caso específico, a matriz  $A$  é:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\dot{V}(x) = x^T \left( \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) x$$

Simplificando,

$$\dot{V}(x) = x^T \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x$$

A função de Lyapunov para o sistema linearizado, considerando  $P$  como uma matriz identidade, é:

$$V(x) = x^T x$$

E a derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema linearizado é negativa definida. Portanto, a função  $V(x)$  é uma função de Lyapunov válida para o sistema linearizado ao redor do ponto de operação  $(0,0)$  com essa escolha específica de  $P$ .

Portanto,  $V(x) = x^T x$  pode ser escrita como  $x_1^2 + x_2^2$  que já analisamos anteriormente. Valores foram atribuídos a matriz  $P$ , como uma matriz diagonal com elementos positivos. Suponha que:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$$

A derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do sistema linearizado é dada por:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x$$

Substituindo  $A$  pela matriz de coeficientes da equação linearizada e  $P$  pela matriz diagonal, obtemos:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} A) x$$

$$\dot{V}(x) = x^T \left( \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) x$$

$$\dot{V}(x) = x^T \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) x$$

$$\dot{V}(x) = x^T \begin{bmatrix} -2p_1 & p_1 + p_2 \\ p_1 + p_2 & -2p_2 \end{bmatrix} x$$

Agora, para garantir que  $\dot{V}(x)$  seja negativa definida, podemos escolher  $p_1$  e  $p_2$  como valores positivos. Uma escolha comum é fazer  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 2$  (ou outros valores positivos de sua escolha).

Então, uma alternativa para  $P$  seria:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

E a função de Lyapunov associada seria:

$$V(x) = x^T P x = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x = x_1^2 + 2x_2^2$$

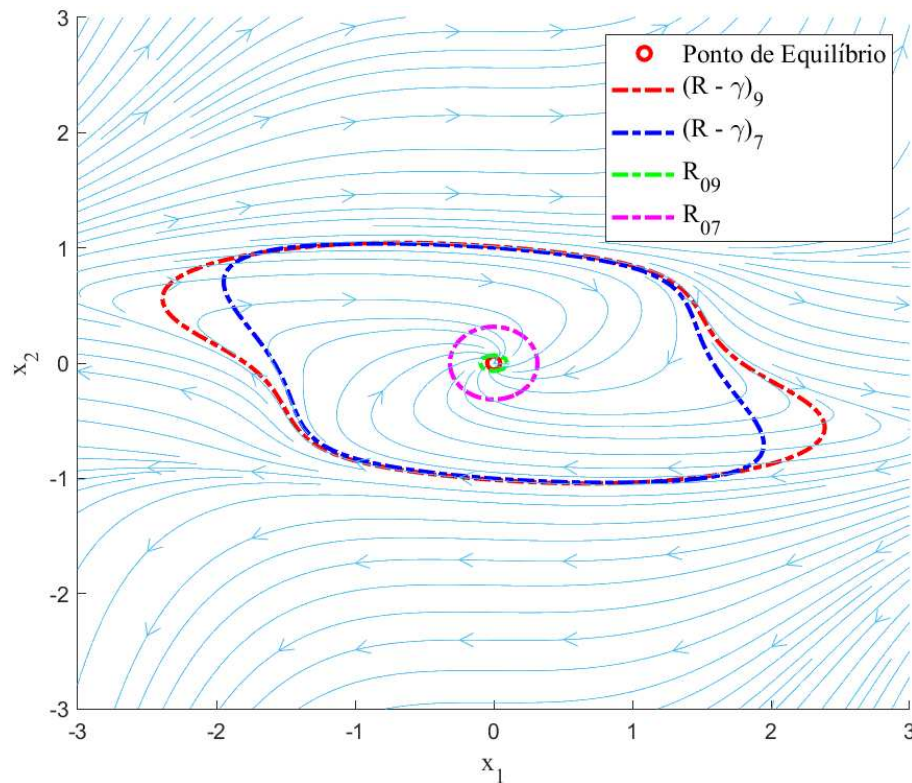
Desta forma, tomamos como inicialização  $R_0 = x_1^2 + 2x_2^2$  e um  $\gamma = 0.01$ . A aplicação do método resultou em  $\gamma^* = 1.7$  e a região de atração  $(R - \gamma)$  foi

$$\begin{aligned} (R - \gamma)_9 = & 0.015886x_1^6 + 0.00068878x_1^5x_2 + 0.098993x_1^4x_2^2 - 0.29785x_1^3x_2^3 + 0.58022x_1^2x_2^4 \\ & + 0.17876x_1x_2^5 + 0.753x_2^6 + 9.5791e - 06x_1^5 - 3.4747e - 05x_1^4x_2 + 0.00016679x_1^3x_2^2 - 0.0001656x_1^2x_2^3 \\ & + 0.00048334x_1x_2^4 + 2.1734e - 05x_2^5 - 0.079895x_1^4 + 0.32884x_1^3x_2 - 0.77015x_1^2x_2^2 + 0.11041x_1x_2^3 \\ & + 0.48905x_2^4 - 1.9951e - 05x_1^3 + 0.0001121x_1^2x_2 - 0.00044126x_1x_2^2 - 2.0066e - 05x_2^3 + 0.6241x_1^2 \\ & + 0.34308x_1x_2 + 0.36089x_2^2 - 1.7 \quad (4.18) \end{aligned}$$

Podemos observar na Figura 18 que conforme indicado nos estudos de Valmorbidia e Anderson (2017) a função linearizada do sistema é uma boa candidata ao parâmetro de inicialização  $R_0$ , mas não é uma regra, dado que diferentes atribuições de valores na Seção 4.1.



Figura 18 – Domínios de Atração Estimados para o Sistema Não-Afim em Malha Fechada - Análise 06



Fonte: elaborada pelo autor.

Em resumo, evidencia-se que a escolha da inicialização  $R_0$  exerceu influência significativa nos domínios finais em ambos os sistemas. A Seção 4.1 proporciona uma análise comparativa do desempenho entre funções de Lyapunov polinomiais e racionais, demonstrando que as LFs racionais estimaram domínios de atração substancialmente maiores do que aquelas obtidas com funções de Lyapunov polinomiais.

Além disso, observa-se que a inicialização com funções de maior magnitude resultou em desempenho superior. Contrariando a intuição natural de que parâmetros de inicialização menores poderiam conduzir a uma maior precisão, os resultados indicam o contrário. Essa constatação destaca a importância crítica da escolha apropriada de parâmetros iniciais no processo de estimativa de domínios de atração.

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresenta resultados que contribuem para os estudos no controle de sistemas não lineares, utilizando a teoria da estabilidade de Lyapunov com funções racionais. A análise dos resultados permite comparar as diferentes inicializações do método iterativo proposto, investigando o comportamento em sistemas não lineares polinomiais afim da entrada e, posteriormente, em sistemas não lineares não-afim na entrada.

A pesquisa propõe a avaliação do desempenho de funções de Lyapunov racionais como estimativas de domínios de atração em sistemas já controlados, cujas regiões de atração são definidas por funções de Lyapunov polinomiais. A análise dos resultados obtidos através do algoritmo iterativo revela a influência direta dos parâmetros de inicialização nos resultados finais.

De maneira consistente em todos os casos analisados, observou-se que a utilização de funções máximas de Lyapunov de natureza racional proporciona estimativas mais amplas da região de atração em comparação com funções de Lyapunov polinomiais. Isto é especialmente relevante, considerando que a contratividade e invariância são garantidas mesmo com a expansão da região de atração em relação as estimadas com funções polinomiais de Lyapunov.

Os experimentos indicam que, nos casos em que a estimativa inicial da Região de Atração é dada por uma função polinomial mais ampla ou mesmo está contida e próxima da região definida pela função de Lyapunov polinomial, os resultados tendem a oferecer domínios mais abrangentes. Vale ressaltar que a análise cabe para sistemas que mesmo que não possuam a origem como ponto de equilíbrio em malha aberta, ao estar controlado possua o ponto de equilíbrio para a mesma, torna a análise viável dado que o objeto de estudo foram sistemas assintoticamente estabilizados em malha fechada.

Dado os resultados deste estudo, trabalhos futuros podem direcionar-se para a aplicação dessas análises em diferentes técnicas de controle e em aplicações práticas, como em sistemas de potência. Devido a restrições temporais, essa aplicação específica não pôde ser desenvolvida neste trabalho, apesar de sua importância, uma vez que a maioria dos sistemas de potência são racionais, uma classe que ainda não foi abordada nesta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- BINAZADEH, T.; RAHGOSHAY, M. A. Robust output tracking of a class of non-affine systems. **Systems Science & Control Engineering**, Taylor & Francis, v. 5, n. 1, p. 426–433, 2017.
- BLANCHINI, F. Set invariance in control. **Automatica**, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, 1999. ISSN 0005-1098.
- CHESE, G. Rational Lyapunov functions for estimating and controlling the robust domain of attraction. **Automatica**, v. 49, n. 4, p. 1051–1057, 2013. ISSN 0005-1098.
- CHIANG, H.-D.; HIRSCH, M.; WU, F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 33, n. 1, p. 16–27, 1988.
- HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. **Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach**. [S.l.]: Princeton university press, 2008.
- JARVIS-WLOSZEK, Z. W. **Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization**. [S.l.]: University of California, Berkeley, 2003.
- KHALIL, H. Nonlinear systems third edition, vol. 115. **Upper Saddle River, NJ, USA: Patience-Hall**, 2002.
- MADEIRA, D. S.; MACHADO, G. Recurrent dissipativity-based inequalities for controller design. **Authorea Preprints**, Authorea, 2023.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; ANDERSON, J.; VALMORBIDA, G.; PRAJNA, S.; SEILER, P.; PARRILO, P. A. **SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB**. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>, 2013.
- PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; PARRILO, P. A. Introducing SOSTOOLS: A general purpose Sum of Squares programming solver. In: **IEEE. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002**. [S.l.], 2002. v. 1, p. 741–746.
- RIBEIRO, A. M.; FIORAVANTI, A. R.; MOUTINHO, A.; PAIVA, E. C. d. Control design based on sum of squares programming for non-affine in input systems. In: **2020 IEEE 6th International Conference on Control Science and Systems Engineering (ICCSSE)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 130–135.
- TACCHI, M.; MARINESCU, B.; ANGHEL, M.; KUNDU, S.; BENAHMED, S.; CARDOZO, C. Power system transient stability analysis using sum of squares programming. In: **2018 Power Systems Computation Conference (PSCC)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1–7.
- TAN, W.; PACKARD, A. Stability region analysis using polynomial and composite polynomial Lyapunov functions and sum-of-squares programming. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 2, p. 565 – 571, 2008.
- TOPCU, U.; PACKARD, A. Local stability analysis for uncertain nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 5, p. 1042 – 1047, 2009.
- TOPCU, U.; PACKARD, A. K.; SEILER, P.; BALAS, G. J. Robust region-of-attraction estimation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 55, n. 1, p. 137 – 142, 2010.

VALMORBIDA, G.; ANDERSON, J. Region of attraction estimation using invariant sets and rational lyapunov functions. **Automatica**, v. 75, p. 37–45, 2017. ISSN 0005-1098.

VANNELLI, A.; VIDYASAGAR, M. Maximal lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems. **Automatica**, v. 21, n. 1, p. 69–80, 1985.

WU, C.; SCHAFT, A. van der; CHEN, J. Stabilization of port-hamiltonian systems based on shifted passivity via feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 66, n. 5, p. 2219–2226, 2021.