



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

SUZANA MATOS FRANÇA DE OLIVEIRA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA VERDADEIRAMENTE SEM MALHA EM
ESTRUTURAS MULTIMATERIAIS ELASTOSTÁTICAS: O USO DO MÉTODO DE
PETROV-GALERKIN LOCAL SEM MALHA DIRETO**

FORTALEZA

2024

SUZANA MATOS FRANÇA DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA VERDADEIRAMENTE SEM MALHA EM ESTRUTURAS
MULTIMATERIAIS ELASTOSTÁTICAS: O USO DO MÉTODO DE PETROV-GALERKIN
LOCAL SEM MALHA DIRETO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Ciência da Computação. Área de Concentração: Computação Gráfica.

Orientador: Prof. Dr. Creto Augusto Vidal.

Coorientador: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante-Neto.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O51o Oliveira, Suzana Matos França de.
Otimização topológica verdadeiramente sem malha em estruturas multimateriais elastostáticas: o uso do método de Petrov-Galerkin local sem malha direto : o uso do método de Petrov-Galerkin local sem malha direto / Suzana Matos França de Oliveira. – 2024.
118 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação , Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Creto Augusto Vidal.
Coorientação: Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante-Neto.
1. Estruturas lineares elásticas. 2. Otimização topológica multimaterial. 3. Método DMLPG. 4. Método gBESO. I. Título.
-

SUZANA MATOS FRANÇA DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA VERDADEIRAMENTE SEM MALHA EM ESTRUTURAS
MULTIMATERIAIS ELASTOSTÁTICAS: O USO DO MÉTODO DE PETROV-GALERKIN
LOCAL SEM MALHA DIRETO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Ciência da Computação. Área de Concentração: Computação Gráfica.

Aprovada em: 21/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Creto Augusto Vidal (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante-Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Evandro Parente Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Fernando Campos Ramos Martha
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de incluir aqui todos aqueles que permitiram, de uma forma ou de outra, a realização deste trabalho, porém certamente serei imprecisa.

À minha esposa Amanda, pelo suporte dado por tantos anos e tolerância em relação aos altos e baixos que aconteceram em todo esse percurso. Além de todos os meus filhos de quatro patas, que me deram alegria e lembrança diária de que eu necessitava prosseguir.

A toda minha família, especialmente aos meus pais, Guaraciara e Antônio Câncio (*in memoriam*), que me deram toda a estrutura e apoio necessários para seguir com meu anseio por conhecimento, e também às minhas irmãs, Mariana, Juliana e Elisa, por toda a ajuda dada.

À Laise, por passar comigo todos os perrengues da pós-graduação juntas, sempre podendo contar com um incentivo mútuo.

Aos meus orientadores, que conheço desde a graduação, quando comecei com iniciação científica até agora com o doutorado. Em especial ao meu professor orientador Creto Vidal, que certamente fez este trabalho acontecer.

Aos colegas do CRAb, por todos os anos de discussões diversas dentro e fora do contexto de estudo.

Ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação (MDCC) da Universidade Federal do Ceará (UFC) pela oportunidade de realização deste doutorado, à Universidade Estadual do Piauí (UESPI) pelo apoio financeiro durante meu afastamento e à revista *Engineering Optimization*, pela oportunidade de publicar parte deste trabalho.

RESUMO

Esta tese apresenta um novo método para resolver problemas de otimização topológica envolvendo estruturas elásticas com múltiplos materiais, combinando as técnicas *Direct Meshless Local Petrov-Galerkin* (DMLPG, Petrov-Galerkin Local Sem Malha Direto) e *Gradual Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization* (gBESO, Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional Gradual). Nos últimos anos, os métodos sem malha têm sido usados em diversos campos da ciência e engenharia devido ao seu potencial. O método DMLPG se destaca como uma abordagem verdadeiramente sem malha, utilizando polinômios de baixo grau na integração numérica para obter resultados precisos e computacionalmente eficientes, sem a necessidade de funções de forma complexas. Na metodologia proposta, o DMLPG é empregado para determinar deslocamentos nodais, deformações e tensões suaves, enquanto o gBESO atualiza a geometria estrutural com base nos valores da sensibilidade da função objetivo, aumentando gradualmente o módulo de Young do material. A função objetivo da abordagem de otimização é minimizar a energia total de deformação sob restrições de volume. Exemplos numéricos são fornecidos para demonstrar a aplicabilidade e validade da abordagem.

Palavras-chave: Estruturas lineares elásticas; otimização topológica multimaterial; método DMLPG; método gBESO.

ABSTRACT

This thesis introduces a new method for solving topology optimization problems involving elastic structures with multiple materials, combining the *Direct Meshless Local Petrov-Galerkin* (DMLPG) and *Gradual Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization* (gBESO) techniques. In recent years, meshless methods have been used in several science and engineering fields due to their potential. The DMLPG method stands out as a truly meshless approach, utilizing low-degree polynomials in numerical integration to achieve accurate and computationally efficient results without the need for complex shape functions. In the proposed methodology, DMLPG is employed to determine smooth nodal displacements, strains and stresses, while gBESO updates the structural geometry based on the sensitivity values of objective function, gradually increasing the Young's modulus of the material. The objective function of the optimization approach is to minimize the total strain energy under volume constraints. Numerical examples are provided to demonstrate the applicability and validity of the approach.

Keywords: Linear elastic structures; multi-material topology optimization; DMLPG method; gBESO method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Categorias da otimização estrutural.	20
Figura 2 –	Comparação dos resultados com o SIMP e BESO para o problema de uma viga em balanço longa.	21
Figura 3 –	Comparação da discretização e da função de forma da maioria dos métodos baseados em MEF e de métodos sem malha.	22
Figura 4 –	Construção de um material compósito com dois materiais e o vazio.	25
Figura 5 –	Resultado obtido por Thomsen (1992) com dois materiais e o vazio para uma viga em balanço.	25
Figura 6 –	Resultado obtido por Tavakoli e Mohseni (2014) para o modelo de uma ponte com três forças pontuais para baixo.	28
Figura 7 –	Resultado obtido por Lieu e Lee (2017) para a parte simétrica de uma viga aplicando uma força pontual em cima.	30
Figura 8 –	Resultado obtido por Huang e Xie (2009) para a parte simétrica de uma viga aplicando uma força pontual em baixo.	35
Figura 9 –	Resultado obtido por Ghabraie (2015) com dois materiais para uma viga em balanço com diferentes projetos iniciais.	36
Figura 10 –	Resultado obtido por Zhang <i>et al.</i> (2018) para uma viga em balanço com diferentes restrições de porcentagem de volume, V , usando 12 componentes (inicialmente sobrepostas).	39
Figura 11 –	Resultado obtido por Huang e Li (2021) com uma possibilidade de escolha de dois materiais para uma viga em balanço restrita a massa 0,3 e os volumes são as variáveis V_i . O MAT2 tem o módulo de elasticidade sempre $E_2 = 1$ e a densidade $\rho_2 = 1$ enquanto que o MAT1 possui $\rho_1 = 0,5$ e o E_1 é variado.	40
Figura 12 –	Processo iterativo de otimização topológica em alto nível.	45
Figura 13 –	O domínio global Ω e a fronteira global Γ de um corpo heterogêneo arbitrário bidimensional com dois materiais. As fronteiras Γ_u e Γ_t são, nessa ordem, as partes de Γ em que as condições de contorno essencial e natural são especificadas. $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são os deslocamentos e as trações prescritas, respectivamente, \mathbf{n} é o vetor normal unitário em Γ e \mathbf{b} é a força de corpo.	47

Figura 14 – Ilustração da distribuição de nós para a abordagem DMLPG. Cada nó está associado a um subdomínio local e sua fronteira correspondente. Por exemplo, os nós J e K possuem subdomínios locais Ω_J e Ω_K , respectivamente, com fronteiras Γ_J e Γ_K . Quando um subdomínio está totalmente contido no domínio global, como o subdomínio de J , tem-se $\Gamma_J = \Gamma_{J0}$. Por outro lado, se o subdomínio de um nó cruza a fronteira global, como o subdomínio de K , sua fronteira local é definida como $\Gamma_K = \Gamma_{K0} \cup \Gamma_{Ku} \cup \Gamma_{Kt}$, onde Γ_{K0} representa a parte de Γ_K sem condições de contorno, enquanto Γ_{Ku} e Γ_{Kt} são, respectivamente, as partes de Γ_K com condições de contorno essenciais e naturais.	48
Figura 15 – Representação do raio r_w do suporte compacto de uma função peso centrada em \mathbf{x} . Alguns nós na vizinhança são exemplificados: J , K e L . Como o nó J é o mais próximo ao ponto \mathbf{x} , sua influência é maior do que a do nó K . O nó L não tem influência, pois está fora da região de suporte da função. . . .	54
Figura 16 – Representação da função de Heaviside em um caso bidimensional, centrada no nó I e com suporte compacto de raio r_e	55
Figura 17 – Visão geral da técnica proposta.	61
Figura 18 – Exemplo da instabilidade do tabuleiro de xadrez.	64
Figura 19 – Ilustração do processo de atualização com três materiais (0: branco, 1: azul, 2: vermelho) e um limite de movimento $\eta = 2$. Os números em cada posição representam a sensibilidade de um nó. Duas listas são criadas (decrecente e crescente), e os η primeiros nós nas listas têm os seus materiais trocados (tracejado).	65
Figura 20 – Ilustração do processo de atualização para objetos com eixo de simetria. Os nós simétricos têm prioridade em relação aos nós que estão no eixo de simetria.	66
Figura 21 – Processo de verificação da convergência de um passo s usando dois limiares, τ e τ'	68

Figura 22 – O segmento de reta criado pela interseção entre o subdomínio (Ω_I) e a fronteira do corpo (Γ) pode ser usada para criar os pontos de integração (\mathbf{x}_q) na fronteira Γ . Cada subdomínio é dividido em setores circulares de ângulo 90° , no máximo, onde os pontos de integração podem ser criados na fronteira do subdomínio, como em Γ_{I0} e Γ_J . Cada espaço de arco de circunferência e segmento de reta são parametrizados como um domínio linear com o espaço paramétrico $-1 \leq \xi \leq 1$	70
Figura 23 – Problema da viga em balanço.	71
Figura 24 – Passos e amostras das iterações entre os passos para o problema da viga em balanço com dois materiais.	72
Figura 25 – Histórico da função objetivo durante o processo de otimização na resolução do problema da viga em balanço com dois materiais.	72
Figura 26 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga em balanço com dois materiais.	73
Figura 27 – Testes para o problema da viga em balanço com dois materiais sem aplicar o algoritmo de tratamento de simetria. Os nós ressaltados não têm as variáveis de projeto simétricas.	73
Figura 28 – Passos para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio com discretização de 81×51 nós.	74
Figura 29 – Histórico da função objetivo durante o processo de otimização na resolução do problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio.	75
Figura 30 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio.	75
Figura 31 – Resultados de outras técnicas para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio.	76
Figura 32 – Testes para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio sem aplicar o algoritmo de tratamento de simetria.	76
Figura 33 – Testes para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio com cargas assimétricas em relação ao eixo de simetria com 81×51 nós e $\eta = 20$	77
Figura 34 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga em balanço com cinco materiais.	78

Figura 35 – Testes para o problema da viga em balanço com cinco materiais sem aplicação do filtro na sensibilidade.	78
Figura 36 – Problema da viga simplesmente apoiada.	79
Figura 37 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga simplesmente apoiada com um material e o vazio.	80
Figura 38 – Passos para o problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio com discretização de 71×71 nós.	80
Figura 39 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio.	81
Figura 40 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio.	82
Figura 41 – Problema da viga MBB.	83
Figura 42 – Efeito do projeto inicial no projeto ótimo para o problema da viga MBB com dois materiais e o vazio.	84
Figura 43 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga MBB com dois materiais e o vazio.	85
Figura 44 – Testes para o problema da viga MBB com dois materiais e o vazio sem aplicação do filtro na sensibilidade.	86
Figura 45 – Problema da ponte.	86
Figura 46 – Comparação dos resultados obtidos com método proposto e o da literatura aplicados ao de ponte com dois materiais e o vazio.	87
Figura 47 – Problema da viga em L.	88
Figura 48 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio.	89
Figura 49 – Resultados de outras técnicas para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio.	89
Figura 50 – Problema da viga em L com material predefinido em um círculo.	89
Figura 51 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio, com o vazio predefinido no círculo assinalado.	90
Figura 52 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio, com o material 1 predefinido no círculo.	90
Figura 53 – Representação do problema de otimização topológica.	107

Figura 54 – Representação de um material compósito.	108
Figura 55 – Representação da abordagem conjunto de nível para um único material. . .	110
Figura 56 – Aproximação da fronteira Γ do domínio global Ω por segmentos de retas. As fronteiras dos subdomínios locais, Γ_J , Γ_K e Γ_L , são construídas a partir de círculos centrados nos nós e de suas interseções com a borda Γ	113
Figura 57 – Representação da interseção de um círculo com a fronteira do domínio, formada por segmentos de retas ordenados no sentido anti-horário.	114
Figura 58 – Casos de interseção entre a reta que define o segmento $\overline{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}}$ e o círculo. . .	115
Figura 59 – Decomposição da fronteira de um subdomínio em retas e arcos.	116
Figura 60 – Representação do espaço paramétrico ξ e do segmento de reta $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$	117
Figura 61 – Representação do espaço paramétrico ξ e do arco de circunferência de raio r_e , com ângulo θ , definido pelos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo dos dados principais dos trabalhos apresentados.	41
Tabela 2 – Total de iterações, energia total de deformação, deslocamento vertical máximo para os exemplos do problema da viga em balanço com carga aplicada de forma assimétrica.	76
Tabela 3 – Total de iterações e tempo computacional para os exemplos do problema da viga em balanço.	78
Tabela 4 – Número de iterações e valor da função objetivo para todas as discretizações exploradas no problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio.	82
Tabela 5 – Total de iterações e tempo computacional nos casos do problema da viga MBB com dois materiais e o vazio.	84
Tabela 6 – Valores tabelados das posições paramétricas e dos pesos para diferentes quantidades de pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre. . . .	117

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAP	<i>Alternating Active Phase</i> (Fase Ativa Alternada)
AAPO	<i>Alternating Active Phase & Objective</i> (Objetivo & Fase Ativa Alternada)
BESO	<i>Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization</i> (Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional)
CS-RBF	<i>Compactly Supported Radial Basis Functions</i> (Funções de Base Radial com Suporte Compacto)
DMLPG	<i>Direct Meshless Local Petrov-Galerkin</i> (Petrov-Galerkin Local Sem Malha Direto)
DMO	<i>Discrete Material Optimization</i> (Otimização de Material Discreto)
EFG	<i>Element Free Galerkin</i> (Galerkin Livre de Elementos)
ESL	<i>Equivalent Single Layer</i> (Camada Equivalente Única)
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i> (Otimização Estrutural Evolucionária)
FPTO	<i>Floating Projection Topology Optimization</i> (Otimização Topológica de Projeção Flutuante)
GAN	<i>Generative Adversarial Network</i> (Rede Adversária Generativa)
gBESO	<i>Gradual Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization</i> (Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional Gradual)
GMLS	<i>Generalized Moving Least-Squares</i> (Mínimos Quadrados Móveis Generalizados)
ICM	<i>Independent Continuous Mapping</i> (Mapeamento Contínuo Independente)
IGA	<i>Isogeometric Analysis</i> (Análise Isogeométrica)
IVTM	<i>Inverse Virtual Temperature Method</i> (Método de Temperatura Virtual Inversa)
LS	<i>Level Set</i> (Conjunto de Nível)
MBB	Messerschmitt-Bolkow-Blohm
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i> (Petrov-Galerkin Local Sem Malha)
MLS	<i>Moving Least-Squares</i> (Mínimos Quadrados Móveis)
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i> (Método das Assíntotas Móveis)
MMC	<i>Moving Morphable Component</i> (Componente Morfável Móvel)

MTOP	<i>Multi-Resolution Topology Optimization</i> (Otimização de Topologia Multi-Resolução)
PTO	<i>Proportional Topology Optimization</i> (Otimização Topológica Proporcional)
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i> (Aproximação Racional das Propriedades dos Materiais)
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalisation</i> (Material Isotrópico Sólido com Penalização)
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i> (Programação Quadrática Sequencial)
UMMI	<i>Uniform Multiphase Materials Interpolation</i> (Interpolação Uniforme de Materiais Multifásicos)
VEM	<i>Virtual Element Method</i> (Método de Elemento Virtual)
XFEM	<i>eXtended FEM</i> (MEF estendido)

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Dimensão do problema
i, j, k, l, p, s	Valores indiciais
Ω	Domínio de um corpo
Γ	Fronteira de um corpo
Γ_u	Parte de Γ em que as condições de contorno essenciais são prescritas
Γ_t	Parte de Γ em que as condições de contorno naturais são prescritas
I, J, K, L	Nós no domínio ou na fronteira do corpo
Ω_I	Subdomínio associado ao nó I
Γ_I	Fronteira do subdomínio associado ao nó I
Γ_{Iu}	Parte de Γ_I em que as condições de contorno essenciais são prescritas
Γ_{It}	Parte de Γ_I em que as condições de contorno naturais são prescritas
Γ_{I0}	Parte de Γ_I em que não há condições de contorno prescritas
\mathbf{x}	Posição de um ponto
\mathbf{u}	Deslocamento ou função desconhecida
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Representação vetorial do tensor de deformação
$\boldsymbol{\sigma}$	Representação vetorial do tensor de tensão de Cauchy
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento prescrito
$\bar{\mathbf{t}}$	Tração prescrita
\mathbf{b}	Força de corpo
\mathbf{n}	Normal na fronteira do corpo
\mathbf{N}	Matriz das componentes de \mathbf{n}
v_{Ii}	Componente da função teste para um nó
\mathcal{V}	Vetor de valores arbitrários da função teste
Θ	Matriz diagonal da função teste que depende da posição
Ψ	Matriz com as derivadas das componentes de Θ
\mathbf{L}_d	Matriz de operadores diferenciais

\mathbf{D}	Tensor de elasticidade de um material isotrópico ou matriz dos coeficientes de rigidez elástica do material
E	Módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
λ, β, μ	Funcionais lineares
$\hat{\lambda}$	Aproximação de λ
a, c	Coefficientes das combinações lineares
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_k, \Phi, \phi$	Matrizes da aproximação GMLS
\mathcal{P}	Subespaço vetorial
\mathbf{p}	Vetores em \mathcal{P}
g	Ordem polinomial
G	Total de vetores na base de \mathcal{P}
w, ω	Funções peso
ϵ	Parâmetro da função peso gaussiana
r_w, r_{\min}	Raios das funções peso
r_e	Raio da função teste
M	Número total de funcionais que aproximam a solução
\tilde{N}	Número total de nós no domínio
N, \bar{N}	Número nós dentro do domínio de suporte da funções peso
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathbf{f}	Vetor de força
$\delta_{\mathbf{x}}$	Delta de Dirac
d_{\min}	Distância euclidiana mínima entre dois nós
f, C	Função objetivo ou energia total de deformação
m	Número total de materiais
\mathbf{y}	Variáveis de projeto
\mathcal{Y}	Lista de valores que uma variável de projeto pode assumir
V	Volume de um corpo

V_I	Volume nodal superestimado
V_p^*	Volume predefinido para o material p
V_p	Volume atual do material p
G_0, G_1	Valores que controlam o comportamento do gBESO
S	Número total de passos
$E_{(s)}^{(p)}$	Módulo de Young do material p no passo s
E_I	Módulo de Young usado por um nó
E_q	Módulo de Young usado por um ponto de integração de Gauss
$\alpha, \hat{\alpha}, \tilde{\alpha}$	Sensibilidade
η	Limite de movimento
ER	Erro calculado para verificar a convergência
τ, τ'	Limiares para convergência
ζ	Número de iterações associados à convergência
θ_{th}	Limite para um ângulo máximo de um arco no processo de integração
ξ	Espaço paramétrico usado na quadratura de Gauss-Legendre

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Objetivos e Contribuições	22
1.2	Organização do Trabalho	23
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1	Métodos Baseados nas Densidades dos Materiais	24
2.2	Métodos Baseados em Conjuntos de Nível	33
2.3	Métodos Baseados em Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional	34
2.4	Outros Métodos de Otimização Topológica	38
2.5	Considerações Finais	40
3	METODOLOGIA	45
3.1	Análise Numérica	45
3.1.1	<i>Problema de Valor de Contorno</i>	46
3.1.2	<i>Formulação Fraca Local</i>	47
3.1.3	<i>Funções Tentativas</i>	50
3.1.3.1	<i>Aproximação pelo Método GMLS</i>	51
3.1.3.2	<i>Função Peso</i>	53
3.1.4	<i>Funções Teste</i>	54
3.1.5	<i>Discretização</i>	54
3.1.6	<i>Aplicação das Condições de Contorno Essenciais</i>	57
3.1.7	<i>Obtenção dos Deslocamentos, Deformações e Tensões</i>	58
3.1.8	<i>Algoritmo do método DMLPG</i>	58
3.2	Otimização Topológica com Múltiplos Materiais	59
3.2.1	<i>Definição do Problema</i>	60
3.2.2	<i>Materiais Graduais</i>	61
3.2.3	<i>Matriz de Rigidez Elástica</i>	62
3.2.4	<i>Análise de Sensibilidade</i>	63
3.2.5	<i>Processo de Filtragem e Estabilização</i>	63
3.2.6	<i>Atualização do Projeto</i>	64
3.2.6.1	<i>Tratamento de Simetria Predefinida</i>	66
3.2.6.2	<i>Tratamento de Regiões com Materiais Predefinidos</i>	67

3.2.7	<i>Critério de Convergência</i>	67
3.3	Considerações Finais	67
4	RESULTADOS	69
4.1	Definição dos Parâmetros	69
4.2	Viga em Balanço	70
4.2.1	<i>Viga em Balanço com Dois Materiais</i>	70
4.2.2	<i>Viga em Balanço com Dois Materiais e o Vazio</i>	73
4.2.3	<i>Viga em Balanço com Cinco Materiais</i>	77
4.2.4	<i>Tempo Computacional</i>	78
4.3	Viga Simplesmente Apoiada	79
4.3.1	<i>Viga Simplesmente Apoiada com Um Material e o Vazio</i>	79
4.3.2	<i>Viga Simplesmente Apoiada com Dois Materiais e o Vazio</i>	79
4.4	Viga MBB	83
4.5	Ponte	86
4.6	Viga em Formato de L	87
4.6.1	<i>Viga em Formato de L Padrão</i>	88
4.6.2	<i>Viga em Formato de L com Material Predefinido</i>	88
4.7	Considerações Finais	91
5	CONCLUSÃO	92
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICE A – TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	107
	APÊNDICE B – PROCESSO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	113

1 INTRODUÇÃO

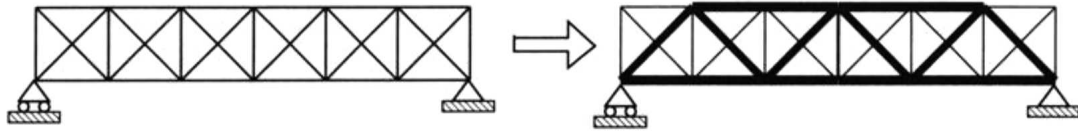
A otimização estrutural busca, dentro de um determinado conceito estrutural e de restrições de funcionalidade, obter uma estrutura que minimize uma dada função objetivo. Essa área se divide em três subáreas: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica. Em sua origem, o foco principal das pesquisas nessa área era a otimização dimensional, que visava principalmente a redução das dimensões dos elementos estruturais (espessuras ou áreas de seções transversais) com o intuito de reduzir o custo de fabricação da estrutura (DAXINI; PRAJAPATI, 2017). A otimização de forma faz modificações suaves nas fronteiras da estrutura, normalmente visando reduzir concentrações de tensões (UPADHYAY *et al.*, 2021). Já a otimização topológica é uma área de estudo que oferece mais flexibilidade no projeto em comparação com as outras duas abordagens, buscando determinar a distribuição ótima de material na estrutura, permitindo a inclusão de furos (UPADHYAY *et al.*, 2021). Nota-se que nas duas primeiras categorias, a topologia é fixa. Além disso, a otimização de forma pode ser vista como um pós-processamento feito após a criação de uma estrutura com a otimização topológica (DAXINI; PRAJAPATI, 2017). A Figura 1 mostra exemplos das categorias de otimização estrutural.

A otimização ocorre com a modificação dos valores das variáveis de projeto em direção ao seu valor ótimo. Na otimização dimensional, as variáveis de projeto variam as propriedades como a área da seção transversal de barras ou a espessura de placas (COUTINHO, 2006) (Figura 1a). Para reduzir o peso de uma estrutura, é possível criar furos, no entanto, seu formato é importante para garantir um bom desempenho. Assim, as variáveis de projeto na otimização de forma influenciam a forma dos furos (SIGMUND, 2000b), sendo essas, por exemplo, definidas como os pontos de controle de uma spline (Figura 1b). As variáveis de projeto na otimização topológica precisam indicar a distribuição do material na estrutura, sendo comumente representadas pela densidade dos elementos quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) (SIGMUND, 2000b) (Figura 1c).

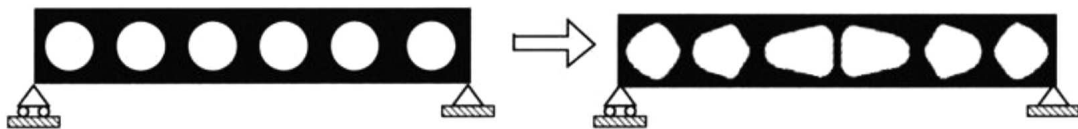
Devido à sua capacidade de oferecer maior flexibilidade nas estruturas criadas, a otimização topológica é aplicada em vários campos da engenharia e das ciências. As estruturas resultantes podem combinar diversas propriedades, como resistência ao calor ou propriedades antioxidantes (QUERIN *et al.*, 2015). Dessa forma, há a necessidade de usar uma composição com múltiplos materiais para fornecer essas multifuncionalidades. Surge então a seguinte questão: como distribuir um número finito de materiais com diferentes propriedades em um domínio fixo

Figura 1 – Categorias da otimização estrutural.

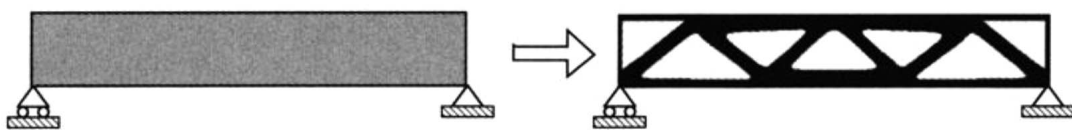
(a) Otimização dimensional.



(b) Otimização de forma.



(c) Otimização topológica.



Fonte: Sigmund (2000b).

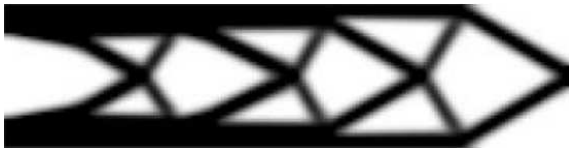
para otimizar uma determinada função objetivo sujeita a restrições específicas? Nos últimos anos, tem havido uma quantidade significativa de pesquisas em otimização estrutural envolvendo múltiplos materiais, permitindo o desenvolvimento de projetos multifuncionais, leves e com custos mais baixos (DEATON; GRANDHI, 2014; STOIBER; KROMOSER, 2021). Embora haja a possibilidade de aplicação em manufatura aditiva, essa área ainda é pouco explorada devido à escassez de programas computacionais que lidem com casos multimateriais (NAZIR *et al.*, 2023).

Diversos métodos são utilizados para resolver problemas com múltiplos materiais, dentre os quais os mais conhecidos são: Homogeneização (THOMSEN, 1992), *Solid Isotropic Material with Penalisation* (SIMP, Material Isotrópico Sólido com Penalização) (BENDSØE; SIGMUND, 1999; TAVAKOLI, 2014; CUI *et al.*, 2017; HABIBIAN *et al.*, 2021), *Level Set* (LS, Conjunto de Nível) (WANG; WANG, 2004; WANG *et al.*, 2015; AI; GAO, 2019) e *Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO, Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional) (HUANG; XIE, 2009; GHABRAIE, 2015). Além desses, outros métodos foram criados e aplicados na área, como o *Phase Field* (Campo de Fase) (ZHOU; WANG, 2006), o *Moving Morphable Component* (MMC, Componente Morfável Móvel) (ZHANG *et al.*, 2018), o *Independent Continuous Mapping* (ICM, Mapeamento Contínuo Independente) (YE *et al.*, 2019), o *Floating Projection Topology Optimization* (FPTO, Otimização Topológica de Projeção Flutuante) (HUANG; LI, 2021) e uma abordagem utilizando *Deep Learning* (Aprendizagem Profunda) (LI *et al.*, 2024).

Na maioria dos métodos, a quantidade das variáveis de projeto cresce linearmente com a quantidade de materiais. Vale ressaltar que, a técnica SIMP é a mais conhecida e utilizada, porém, usualmente, não possui uma distinção clara entre a fronteira dos materiais, devido ao uso de variáveis de projeto contínuas. Diversos procedimentos foram desenvolvidos para aliviar essa característica, contudo, dependem de valores de parâmetros que podem variar com os problemas a serem resolvidos. Em contraste, o BESO utiliza variáveis de projeto discretas fornecendo topologias com fronteiras bem definidas. Esse fenômeno pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Comparação dos resultados com o SIMP e BESO para o problema de uma viga em balanço longa.

(a) SIMP.



(b) BESO.



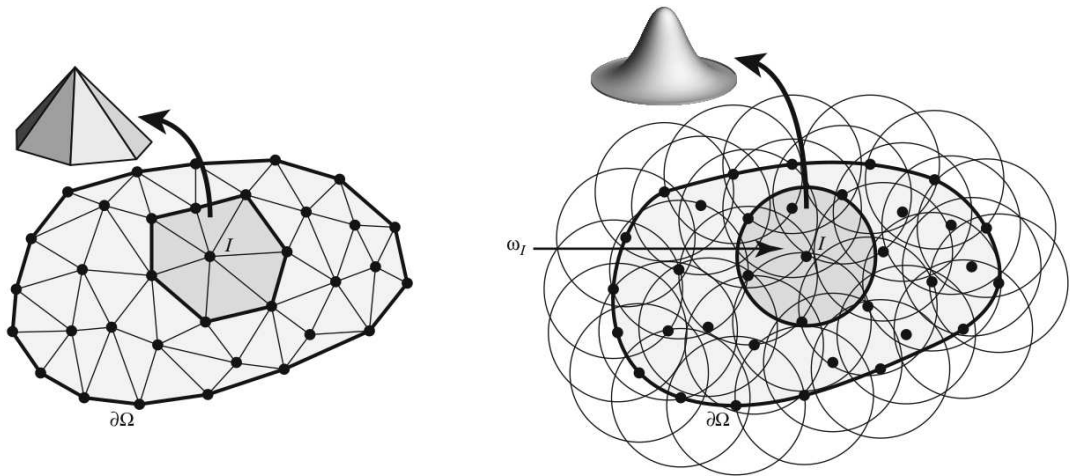
Fonte: Huang e Xie (2010b).

O processo de otimização topológica requer um método de análise numérica e uma estratégia de discretização. Tradicionalmente, o MEF é utilizado associado a uma discretização do domínio representada por uma malha (Figura 3a). Isso se deve à simplicidade e à disseminação desse método. No entanto, existem algumas dificuldades associadas ao uso de malha que tornam sua aplicação complicada e cara em alguns tipos de problemas complexos, uma vez que, além da necessidade de uma malha de boa qualidade, pode precisar ser recriada repetidas vezes (ZHENG *et al.*, 2012; ZHENG *et al.*, 2010; LI *et al.*, 2020; SOHOULI *et al.*, 2020). Vários métodos sem malha já foram propostos como alternativa para tentar aliviar tais dificuldades (GINGOLD; MONAGHAN, 1977; BELYTSCHKO *et al.*, 1994; LIU *et al.*, 1995; OÑATE *et al.*, 1996; BABUŠKA; MELENK, 1997; SUKUMAR *et al.*, 1998; ATLURI; ZHU, 1998; MIRZAEI; SCHABACK, 2013). Apesar de terem teorias diferentes, esses métodos discretizam o domínio com uma nuvem de pontos, e geralmente possuem funções de forma suaves (UPADHYAY *et al.*, 2021), como ilustrado na Figura 3b, ao contrário do processo padrão do MEF (Figura 3a). A otimização topológica com um único material possui diversos estudos utilizando métodos sem malha (CHO; KWAK, 2006; LI; ATLURI, 2008; ZHENG *et al.*, 2009; LUO *et al.*, 2012; HE *et al.*, 2014; ULLAH *et al.*, 2022; GONÇALVES *et al.*, 2022; SOUSA *et al.*, 2024). No entanto, poucas pesquisas foram realizadas considerando a área de múltiplos materiais (CUI *et al.*, 2017; AI; GAO, 2019; HABIBIAN *et al.*, 2021; ZHANG *et al.*, 2024a; ZHANG *et al.*, 2024b).

Figura 3 – Comparação da discretização e da função de forma da maioria dos métodos baseados em MEF e de métodos sem malha.

(a) Malha.

(b) Nuvem de pontos.



Fonte: Chen e Belytschko (2015).

Apesar de serem considerados métodos sem malha, a maioria das abordagens numéricas usa uma grade de fundo em alguma etapa do procedimento. Mirzaei (2011) propôs um método verdadeiramente sem malha chamado *Direct Meshless Local Petrov-Galerkin* (DMLPG, Petrov-Galerkin Local Sem Malha Direto), baseado em *Generalized Moving Least-Squares* (GMLS, Mínimos Quadrados Móveis Generalizados). Sua maior vantagem é que o processo de integração é realizado em polinômios de baixo grau, alcançando resultados com boa precisão e eficiência computacional (MIRZAEI, 2011; MIRZAEI; SCHABACK, 2013; MIRZAEI, 2015; MIRZAEI; SCHABACK, 2014; ILATI; DEHGHAN, 2016). Esse método pode atingir uma precisão equivalente a abordagens baseadas no MEF (ABBASZADEH *et al.*, 2022) e, como não requer a etapa de geração da malha, pode consumir menos tempo computacional (DEHGHAN *et al.*, 2022). O DMLPG já foi usado para resolver problemas em vários domínios, como condução de calor (MIRZAEI; SCHABACK, 2014), potenciais (MAZZIA *et al.*, 2012; ABBASZADEH; DEHGHAN, 2022), elastostática (MIRZAEI, 2015), elastodinâmica (MIRZAEI; HASANPOUR, 2016), eletrostática (TALEEI; DEHGHAN, 2014), termoelasticidade (HASANPOUR; MIRZAEI, 2018) e não-linearidade (DARANI, 2017; SHOKRI; BAHMANI, 2019; SHOKRI; BAHMANI, 2021).

1.1 Objetivos e Contribuições

Os métodos sem malha ainda são relativamente recentes se comparados com a longa e rica história dos métodos com malha. No entanto, em algumas situações eles são apenas

uma forma alternativa de resolver problemas satisfatoriamente, em outras situações eles podem oferecer vantagens complementares.

No campo dos métodos sem malha, os pesquisadores estão explorando as possibilidades e aplicações potenciais, seguindo a trajetória dos métodos baseados em malhas. Sendo assim, este trabalho visa investigar a viabilidade do método proposto de otimização topológica com múltiplos materiais utilizando um método verdadeiramente sem malha. O método proposto combina o método DMLPG com o método *Gradual Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization* (gBESO, Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional Gradual) (GHABRAIE, 2015).

O problema resolvido pela otimização visa minimizar a energia total de deformação de estruturas elásticas, restringindo o volume de cada material. No método gBESO, os materiais começam com um valor baixo do módulo de Young e são atualizados gradualmente até atingirem seus valores predefinidos, com a característica de que o resultado ótimo não é amplamente afetado pelo projeto de entrada. O projeto inicial contém uma disposição qualquer das variáveis de projeto com as frações de volumes dos materiais já empregadas.

Para viabilizar esse acoplamento, foram realizadas adaptações em ambos os métodos. É importante destacar que cada nó que discretiza o domínio requer somente uma variável de projeto, o que difere da abordagem da maioria dos métodos multimateriais. Além disso, foi incorporado ao método de otimização topológica o processo de aceitação de nós ao longo de um eixo de simetria, uma vez que as variáveis de projeto são atribuídas aos nós, e a atualização dessas variáveis pode prejudicar a simetria se não for bem processada. Também foi assimilada a possibilidade de predefinir materiais em regiões. O projeto ótimo resultante do processo iterativo serve de referência para a criação de estruturas que atendam a determinadas restrições.

1.2 Organização do Trabalho

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, são descritos estudos relacionados ao assunto abordado nesta tese; no Capítulo 3, a metodologia é apresentada, expondo os dois métodos principais deste trabalho, o método de análise numérica e o método de otimização topológica multimaterial, descrevendo passo a passo como o problema é resolvido; no Capítulo 4, são apresentados os testes realizados e discutidos os resultados obtidos; finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são apresentados diversos estudos de otimização topológica com múltiplos materiais. Na Seção 2.1, apresentam-se os trabalhos que utilizam métodos baseados na densidade dos materiais componentes da estrutura, com especial destaque para a abordagem SIMP. Na Seção 2.2, descrevem-se alguns dos métodos baseados em LS. Na Seção 2.3, detalham-se os métodos conhecidos como BESO. Na Seção 2.4, apresentam-se os estudos que não se enquadram nas classificações anteriores. Finalmente, na Seção 2.5, tecem-se as considerações finais sobre este capítulo, incluindo uma tabela comparativa dos principais trabalhos apresentados. No Apêndice A, encontram-se as principais técnicas utilizadas na resolução de problemas de otimização topológica com um único material para eventual consulta.

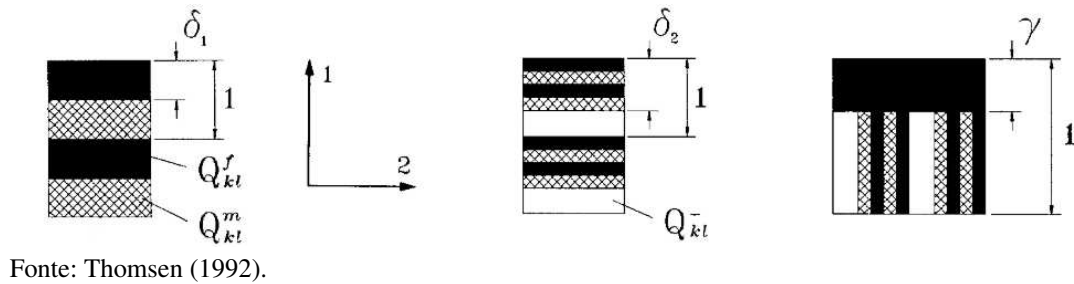
Vale ressaltar que, apesar deste trabalho utilizar um método sem malha, devido à falta de estudos com múltiplos materiais nessa área, grande parte das abordagens apresentadas utiliza o MEF para a análise numérica. Esta pesquisa foca nas abordagens que utilizam macroestrutura, no entanto, também são apresentados trabalhos importantes com microestruturas. Usualmente, os métodos descritos fazem uso da minimização da flexibilidade como função objetivo e aplicam restrições de volume. Os demais casos serão indicados.

2.1 Métodos Baseados nas Densidades dos Materiais

Thomsen (1992) propõe uma modificação no método de Homogeneização para criar uma otimização topológica de macroestruturas com um ou dois materiais, além de uma fase vazia. O modelo é constituído por materiais compósitos, nos quais materiais isotrópicos são organizados em camadas de forma alternada, podendo ter diversos níveis, dependendo da disposição dos materiais (Figura 4). O material compósito é formado a partir de características geométricas, como espessura das camadas, orientação e densidade dos materiais. Esses valores são considerados como variáveis de projeto. Assim como nos métodos de Homogeneização com um único material, o cálculo da matriz de rigidez utilizada por um elemento é feito através da homogeneização dos materiais. A validação dos resultados com um único material é feita comparando-os com os resultados obtidos por Michell (1904 apud THOMSEN, 1992). Um exemplo com dois materiais e o vazio também é realizado, conforme mostrado na Figura 5.

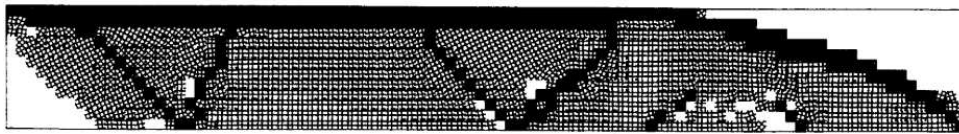
A pesquisa de Sigmund e Torquato (1997) tem como objetivo a criação de materiais com comportamento de expansão térmica não usuais, utilizando um método de otimização

Figura 4 – Construção de um material compósito com dois materiais e o vazio.
 (a) Nível 1. (b) Nível 2. (c) Nível 3.



Fonte: Thomsen (1992).

Figura 5 – Resultado obtido por Thomsen (1992) com dois materiais e o vazio para uma viga em balanço.



Fonte: Thomsen (1992).

com três fases. O método de Homogeneização é empregado para calcular as propriedades efetivas do material (Homogeneização Inversa, ver Apêndice A.1). Embora os autores não tenham denominado o método como SIMP até então, Lieu e Lee (2017) considera-o como tal, devido ao SIMP surgir da simplificação do método de Homogeneização, conforme explicado no Apêndice A.2. Os elementos finitos são projetados como materiais compósitos usando duas fases com diferentes módulos volumétricos e uma fase de vazio. Contudo, como o objetivo é criar materiais compósitos, as microestruturas são otimizadas e assumem formas mais complexas do que as utilizadas por Thomsen (1992). Para evitar os problemas mais comuns da otimização topológica, como a dependência de malha e a instabilidade de tabuleiro, um filtro passa-baixa é aplicado. Existem duas variáveis de projeto: a primeira é a densidade, que indica a quantidade de material presente em um elemento, e a segunda controla a mistura entre os dois materiais. O método de Homogeneização Inversa também foi utilizado em outros estudos de microestruturas (GIBIANSKY; SIGMUND, 2000; SIGMUND, 2000a).

O estudo de Bendsøe e Sigmund (1999) analisa como o método SIMP é modificado para sua aplicação em diversos problemas na área de otimização topológica, podendo ser considerado um artigo de revisão. Entretanto, é o primeiro trabalho analisado que utiliza a nomenclatura SIMP com múltiplos materiais de macroestruturas. Quando descreve a parte de multimaterial, restringe-se a três fases, sendo dois materiais e o vazio. Vale ressaltar que duas variáveis de projeto para um único elemento são usadas quando se trata de dois materiais, contudo, ao invés de focar na microestrutura como no artigo de Homogeneização (SIGMUND; TORQUATO, 1997),

a pesquisa se centraliza nos resultados da macroestrutura. Os autores também afirmam que a técnica pode ser utilizada em: multifísica, quando análises elásticas, térmicas e eletromagnéticas estão envolvidas; problemas não lineares, como a elastoplasticidade; e fases anisotrópicas, em que a rotação deve ser tratada como uma variável de projeto separada. Recomenda-se incorporar o método de Continuação (*Continuation*) no método SIMP (BENDSØE; SIGMUND, 2004a). Na Continuação, a penalidade, p , usualmente empregada no método SIMP (ver Apêndice A.2), muda gradualmente com o intuito de se alcançar um resultado sem elementos intermediários, ou seja, as variáveis de projeto que caracterizam as densidade dos materiais ficam próximas de 0 ou de 1. Com isso, comentam que bons resultados costumam ser obtidos, contudo, não é utilizado como um padrão da técnica, como é possível observar no código padrão de Sigmund (2001).

Um novo método é proposto por Yin e Ananthasuresh (2001) para a criação de mecanismos flexíveis. A ideia modifica os métodos que usam uma função de interpolação de material, ou seja, Homogeneização e SIMP, de forma que essa função passe a ser uma curva normal com vários picos (*peak function*). Essa modificação permite que o módulo de elasticidade seja calculado facilmente, baseado em um único somatório. Cada elemento do MEF possui uma única variável de projeto, independentemente da quantidade de materiais, sendo uma vantagem em relação ao SIMP de Bendsøe e Sigmund (1999), podendo assumir valores de $-\infty$ até $+\infty$. O vazio é modelado como uma fase, atribuindo um módulo de elasticidade baixo ao material. Apesar da facilidade de modelar múltiplos materiais, o método apresenta uma dificuldade na otimização numérica quando ocorre a troca de um material para o outro, podendo haver uma grande dependência do valor inicial atribuído. Para minimizar essa influência nos resultados finais, os autores recomendam que as variâncias associadas à curva normal de cada material sejam diminuídas gradualmente até que se alcance uma função próxima à função delta de Dirac. Apesar de parecer mais vantajoso por ter uma única variável de projeto, não foi um método muito disseminado.

Stegmann e Lund (2005) tiveram o propósito de realizar a otimização topológica de estruturas de cascas laminadas compósitas gerais, maximizando sua rigidez (minimizando a flexibilidade) e restringindo a massa. Utilizam o método *Equivalent Single Layer* (ESL, Camada Equivalente Única) para calcular a rigidez estrutural de um material laminado. O método de otimização utilizado é o *Discrete Material Optimization* (DMO, Otimização de Material Discreto), que é uma extensão do método SIMP (HVEJSEL; LUND, 2011), sendo resolvido com o *Method of Moving Asymptotes* (MMA, Método das Assíntotas Móveis) (SVANBERG,

1987). O modelo permite escolher um número finito de materiais e possibilita o uso de materiais ortotrópicos. A matriz constitutiva do material é tomada como sendo a soma ponderada das matrizes constitutivas dos materiais isotrópicos, de modo que o peso de uma das matrizes é considerado próximo de 1, enquanto que os das outras são direcionados para serem próximos de 0. Apesar disso, essa estratégia faz com que materiais factíveis e não factíveis sejam gerados. Cada material está associado a uma variável de projeto, porém a criação de uma variável de projeto extra se faz necessária para indicar a orientação do material. Uma variável de projeto denominada *patch* é introduzida com o intuito de tornar o método mais eficiente. Esse *patch* engloba os valores das variáveis de projeto de diversos elementos, diminuindo assim o custo computacional da otimização. O método DMO também foi usado por Lund e Stegmann (2005), para a maximização da rigidez e minimização da autofrequência (*eigenfrequency*). Considerando estruturas genéricas, em vez de laminadas, Gao e Zhang (2011) propuseram uma modificação do DMO, sendo esse renomeado para *Uniform Multiphase Materials Interpolation* (UMMI, Interpolação Uniforme de Materiais Multifásicos).

O método *Rational Approximation of Material Properties* (RAMP, Aproximação Racional das Propriedades dos Materiais) foi proposto por Stolpe e Svanberg (2001) como uma forma alternativa ao SIMP com um único material (BENDSØE, 1989; ROZVANY *et al.*, 1992), porém ambos calculam a interpolação entre um único material e o vazio. Hvejsel e Lund (2011) generalizaram esses dois métodos a fim de incluir diversos materiais anisotrópicos. Essa generalização foi feita de forma que, em pelo menos um, ou exatamente um material, seja escolhido em um subdomínio que pode incluir diversos elementos do MEF (similar ao *patch* proposto por Stegmann e Lund (2005)). A diferença entre os dois métodos ocorre na penalização do valor da variável de projeto e na escolha do valor do módulo de elasticidade para uma posição do domínio. A quantidade de variáveis de projeto depende do número de subdomínios e da quantidade de materiais utilizados. Mesmo com a modificação, as variáveis de projeto podem assumir valores intermediários, criando um material que é a interpolação de outros. Esses casos não factíveis acontecem quando a escolha de parâmetros não é adequada. Uma vez que também trabalha com materiais ortotrópicos, a angulação de um material em um elemento deve ser calculada entre alguns valores predefinidos. A otimização foi resolvida com o método *Sequential Quadratic Programming* (SQP, Programação Quadrática Sequencial).

Tavakoli e Mohseni (2014) explicam a teoria de como passar qualquer método que trabalha com duas fases para múltiplas fases. Sendo assim, propõem o algoritmo *Alternating*

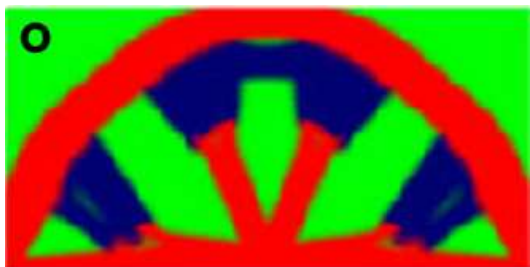
Active Phase (AAP, Fase Ativa Alternada), afirmando que as propriedades de convergência são herdadas do método original de duas fases. Utilizam o algoritmo de Andreassen *et al.* (2011), isto é, têm como base o método SIMP, resolvido com o critério de otimalidade, sendo alguns dos resultados mostrados na Figura 6. O número de variáveis de projeto para cada elemento é m – o número de fases –, de modo que o vazio é considerado uma fase com elasticidade de material baixa. O tensor de elasticidade é dado pela interpolação linear em função das variáveis de projeto, $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_m]^T$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^m y_i^p \mathbf{E}_i,$$

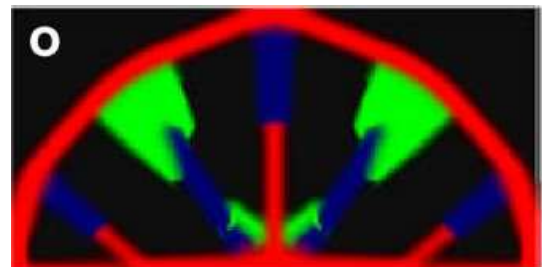
onde \mathbf{E}_i é o tensor de elasticidade do material da fase i e p é a penalidade usada no SIMP. Esse algoritmo assume um subproblema em que somente duas fases são consideradas, enquanto as outras permanecem com o último resultado obtido. No caso, existe um laço externo em que $m(m-1)/2$ subproblemas binários devem ser resolvidos parcialmente. Os autores usam um método semelhante ao de Gauss-Sidel para a aplicação da alternância das fases ativas. Diversos estudos foram feitos quanto aos parâmetros envolvidos, sugerindo, por exemplo, começar o processo com um raio de filtro suficientemente grande e diminuir gradualmente para evitar a ocorrência de mínimos locais, podendo melhorar a velocidade de convergência e o critério de término do algoritmo. Porém, o tamanho inicial do raio pode influenciar o resultado final. Além disso, Han e Wei (2022) afirmam que o método possui oscilações na hora da convergência. O método foi estendido para 3D por Park e Sutradhar (2015).

Figura 6 – Resultado obtido por Tavakoli e Mohseni (2014) para o modelo de uma ponte com três forças pontuais para baixo.

(a) Resultado com 3 fases.



(b) Resultado com 4 fases.



Fonte: Tavakoli e Mohseni (2014).

A pesquisa de Cui *et al.* (2017) é a mais citada por ter trabalhado com um método sem malha na otimização topológica de macroestruturas com múltiplos materiais. A abordagem proposta utiliza o método *Element Free Galerkin* (EFG, Galerkin Livre de Elementos) para a

análise numérica, enquanto aplica a teoria SIMP com o critério de otimalidade para a otimização topológica. Afirmam que, por utilizar um método sem malha, o problema de dependência da malha é reduzido, bem como não há necessidade de filtragem de sensibilidade. No entanto, uma suavização nas densidades precisa ser realizada, uma vez que as variáveis de projeto são as densidades relativas dos nós que são calculadas a partir da combinação da função de forma *Moving Least-Squares* (MLS, Mínimos Quadrados Móveis) com a interpolação de Shepard. Os múltiplos materiais são avaliados com o método AAP. (ZHANG *et al.*, 2024a; ZHANG *et al.*, 2024b) utilizaram a mesma combinação, EFG incorporado ao AAP com SIMP, para estruturas macro e microscópicas, respectivamente, onde materiais ortotrópicos também podem ser considerados.

Zuo e Saitou (2017) utilizam o método SIMP multimaterial ordenado, em que funções de potência com coeficientes de escala e translação são usadas na interpolação das variáveis de projeto. Sua vantagem é que a quantidade de variáveis de projeto por elemento não aumenta. Isso é possível devido à definição de diversos intervalos que são predefinidos para cada material. Assim, caso a variável de projeto mude de valor e entre em outro intervalo, o material atribuído é atualizado. A função objetivo é a flexibilidade, e as restrições de massa e de custo são impostas por dois multiplicadores de Lagrange determinados através do método da bisseção para resolver a otimização pelo critério de otimalidade. Nesse método, os autores propõem a filtragem do valor da sensibilidade para evitar instabilidades. Na resolução com o critério de otimalidade, o SIMP original possui um parâmetro constante que restringe o quanto uma variável de projeto pode mudar em uma iteração. No método atual, esse valor é diminuído a cada iteração, de forma a restringir ainda mais essa modificação à medida que o número de iterações aumenta. Dependendo do valor atribuído a esse parâmetro, a precisão pode melhorar, no entanto, a eficiência pode diminuir. Dada a necessidade de dois multiplicadores de Lagrange, na parte de definição do espaço de busca da solução, diversos critérios são analisados para melhorar a eficiência do método.

Lieu e Lee (2017) afirmam que o *framework* proposto proporciona um projeto de alta resolução e baixo custo computacional, sendo a parte de múltiplos materiais resolvida com o método AAP. Uma *Isogeometric Analysis* (IGA, Análise Isogeométrica) aproxima as soluções das incógnitas, tendo como vantagem uma representação exata da geometria. Faz uso de uma técnica denominada *Multi-Resolution Topology Optimization* (MTOP, Otimização de Topologia Multi-Resolução), em que diferentes tipos de discretizações são utilizadas, uma mais densa para

o cálculo das variáveis de projeto e outra mais grosseira para a análise numérica. Notar que a escolha das discretizações é o oposto do que foi utilizado em Stegmann e Lund (2005) e Hvejsel e Lund (2011). Por utilizar um método baseado em SIMP, possui a desvantagem de ter as arestas entre as fases mal definidas (vide Figura 7).

Figura 7 – Resultado obtido por Lieu e Lee (2017) para a parte simétrica de uma viga aplicando uma força pontual em cima.

(a) Resultado com 3 fases.



(b) Resultado com 4 fases.



Fonte: Lieu e Lee (2017).

A pesquisa de Cui *et al.* (2018) propõe alterações no método *Proportional Topology Optimization* (PTO, Otimização Topológica Proporcional) (BIYIKLI; TO, 2015), em que o problema de minimização da flexibilidade é resolvido sem a necessidade de calcular a sensibilidade. As variáveis de projeto são calculadas de forma proporcional e normalizadas a partir da flexibilidade do elemento. Usando como base uma função de regressão logística, a densidade é interpolada, proporcionando, segundo os autores, uma polarização melhor do que a interpolação comum, e eliminando a necessidade de penalizar a variável de projeto com um expoente. Os autores também sugerem o uso da função de Heaviside para obter projetos sem materiais intermediários na aplicação de filtro na densidade. Fazem uso de um coeficiente de balanço histórico, em que uma média ponderada entre a densidade atual e a anterior é realizada. Abordagens de Continuação são utilizadas para controlar tanto o balanço histórico quanto alguns parâmetros da função de Heaviside, modificando gradualmente os parâmetros para uma convergência mais estável.

Na otimização topológica, é comum o uso de uma malha fixa para os cálculos de todas as iterações. Apesar disso, Chau *et al.* (2018) propuseram o uso de uma abordagem que utiliza uma malha adaptativa baseada em *polytree*, isto é, os elementos do MEF são poligonais, e os polígonos iniciais podem ser subdivididos de forma sucessiva, formando uma estrutura de dados de árvore. O tratamento da otimização topológica com múltiplos materiais é feito com o método AAP, sendo a malha adaptada no laço mais externo desse método. Foi analisado o uso de um filtro padrão aplicado na densidade, no entanto, resultados inesperados ocorreram com

o uso de uma malha adaptativa. Desse modo, uma nova forma de aplicar o filtro foi proposta, fazendo com que o raio do filtro seja alterado em função do tamanho do elemento. O refinamento da malha é feito usando um indicador de erro que mostra a discrepância das densidades entre elementos adjacentes por aresta. Os resultados apresentados mostram que o método consegue ter contornos mais definidos entre as fases, apesar de usar um método baseado em SIMP.

Zhang *et al.* (2020) propuseram o uso de malha adaptativa para a resolução de otimização topológica para materiais hiperelásticos em problemas de grandes deformações. A interpolação do material é feita com uma função de energia construída da mesma maneira que no DMO. As variáveis de projeto são atualizadas com o método ZPR (Zhang-Paulino-Ramos) (ZHANG *et al.*, 2018). Modificações foram feitas para tratar tanto os valores de sensibilidade negativos quanto positivos. O método ZPR é baseado no critério de otimalidade, de modo que trabalha com um número arbitrário de restrições de volume, atualizando de forma independente as variáveis de projeto associadas a cada uma das restrições. A aproximação numérica é calculada com o método *Virtual Element Method* (VEM, Método de Elemento Virtual). Nesse método, elementos com formas arbitrárias podem ser utilizados, facilitando a implementação de malhas adaptativas. São adotadas estratégias de refinamento e de simplificação da malha. Os autores afirmam que um dos maiores problemas em otimização topológica utilizando grandes deformações é que os elementos de baixa densidade se distorcem muito, sendo assim, utilizam um material linear nesses elementos.

Doan *et al.* (2020) propuseram uma nova metodologia que auxilia o usuário na seleção entre projetos com diferentes combinações de materiais, os quais respeitam o valor predefinido de energia de deformação fornecido como entrada. A abordagem AAP é empregada para minimizar a energia de deformação de uma chapa cruzada com múltiplos materiais e determinar o custo associado aos materiais utilizados. Ao final, o método gera diversos gráficos que indicam a melhor opção em termos de custo e satisfação de requisitos.

No trabalho de Habibian *et al.* (2021), os autores continuaram as pesquisas de otimização topológica com Peridinâmica (*Peridynamic*) iniciadas por Kefal *et al.* (2019) e Sohoul *et al.* (2020), e defendem que a Peridinâmica é uma abordagem numérica sem malha bastante eficiente na resolução de problemas envolvendo fraturas. A inovação dessa pesquisa é o acoplamento das duas abordagens, a técnica Peridinâmica com a otimização topológica envolvendo múltiplos materiais resolvida através do método AAP. No método proposto, é preciso estabelecer o módulo de elasticidade da ligação para cada par de pontos materiais que estão a

uma distância mínima. Tal valor é calculado de forma que, se um dos pontos representar o vazio, o outro tenderá a convergir também para o vazio.

Nguyen e Bui (2022) utilizam um método PTO aplicado em placas, e propõem o uso de um novo elemento para tratar o problema de travamento por cisalhamento. O problema de múltiplos materiais é resolvido com o método AAP, modificado para utilizar a energia de deformação de um elemento ao invés da sensibilidade.

Han e Wei (2022) propuseram uma alteração no método AAP, renomeando-o para *Alternating Active Phase & Objective* (AAPO, Objetivo & Fase Ativa Alternada). Nessa nova abordagem, as fases e a função objetivo são alternadas, de modo que, se uma das fases for o vazio, uma função objetivo diferente é utilizada em comparação com aquela empregada quando existem duas fases com materiais sólidos. Essa modificação no método foi desenvolvida com o intuito de eliminar as oscilações de convergência que ocorrem no método original. Os resultados focam em exemplos com até três materiais, além do vazio, otimizando a topologia de metamateriais.

Uma modificação do algoritmo AAP é proposta por Huamaní e Gomes (2023), que transforma o problema de múltiplos materiais em m subproblemas de um único material. A otimização topológica se baseia no modelo SIMP, com filtro aplicado na densidade. Os autores afirmam que a redução contínua do raio do filtro não influencia a convergência como no método original, fazendo com que o custo computacional seja reduzido. Os resultados demonstraram que a discretização da malha não interfere na topologia, porém, apresenta uma distribuição diferente de materiais.

Duan *et al.* (2023) propuseram um método que trabalha com múltiplas escalas (micro e macro), múltiplos materiais e múltiplas camadas ao mesmo tempo. Porém, os resultados são restritos a uma camada com dois materiais e o vazio. A parte das multiescalas abrange a parte micro e macroestruturas, entretanto, a microestrutura só explora a angulação da fibra. Existem dois tipos de variáveis de projeto, as que operam na parte da angulação da microestrutura e as que manipulam os materiais da macroestrutura. Sendo assim, para cada possível angulação da fibra há uma variável de projeto associada, que é tratada com o método DMO, enquanto que, para cada material dado, existe sua variável de projeto respectiva, que é resolvida com o modelo SIMP. Uma vez que todas essas variáveis de projeto estão ligadas a cada elemento e a cada camada, é fácil verificar que o método tem um alto custo computacional. Além da filtragem aplicada à densidade, também utiliza uma função de projeção de limite parametrizado para tornar os resultados próximos ao discreto.

2.2 Métodos Baseados em Conjuntos de Nível

Wang e Wang (2004) propõem um método baseado em uma abordagem desenvolvida para segmentação de imagens, sendo a primeira técnica LS colorido que trata otimização topológica de múltiplos materiais. Sua maior vantagem é a necessidade de somente m funções de conjunto de nível (ver Apêndice A.3) para representar uma quantidade de 2^m materiais. Apesar disso, se não forem usados exatamente 2^m materiais, fases redundantes podem aparecer, isto é, uma interpretação adicional necessita ser realizada para cada fase extra (WANG *et al.*, 2015). Uma outra função é criada para controlar as m funções de conjunto de nível. Nesse método, a borda do domínio é móvel, funcionando, dessa forma, como se fosse uma abordagem de otimização de forma. Nenhuma técnica de filtragem é utilizada. O vazio é usualmente a fase de fundo, isto é, quando nenhuma função de conjunto de nível é definida. Os resultados precisam sempre iniciar com furos, pois eles não são criados pelo método. Se comparado com os métodos que se baseiam no SIMP, tem a vantagem de não possuir mistura de materiais, uma vez que as bordas são explícitas. Wang e Wang (2005), Wang *et al.* (2005) e Guo *et al.* (2014b) fizeram extensões dessa técnica. Em Guo *et al.* (2014b), restrições de tensão foram incorporadas através do método *eXtended FEM* (XFEM, MEF estendido), de modo que, a quantidade de fraturas e falhas na estrutura fossem reduzidas. Para isso, uma análise de sensibilidade mais rigorosa utilizando descrição Euleriana foi realizada, levando em consideração a descontinuidade do tensor de tensão nas interfaces dos materiais (ZHANG *et al.*, 2018).

O método proposto por Wang *et al.* (2015) tem cada fase representada por uma combinação de diversas funções de conjuntos de nível paramétricas, de modo que o material de um ponto qualquer é calculado de acordo com essa combinação. Necessita de m funções de conjuntos de nível para indicar $m + 1$ fases diferentes, com o vazio incluso, isto é, aumenta linearmente a quantidade de funções. Também utiliza funções explícitas, o que torna o cálculo da sensibilidade mais simples. Com o auxílio da função de Heaviside, as funções de conjunto de nível informam qual matriz de material deve ser utilizada para um ponto predefinido.

O método proposto por Ai e Gao (2019) projetou metamateriais mecânicos periódicos com microarquitetura combinando uma abordagem LS paramétrica com um método numérico sem malha baseado em *Compactly Supported Radial Basis Functions* (CS-RBF, Funções de Base Radial com Suporte Compacto). A otimização da microestrutura busca maximizar o módulo volumétrico, maximizar o módulo de cisalhamento ou minimizar o efeito do módulo de Poisson sob determinadas restrições de fração de volume. Os autores afirmam que o método proposto

não precisa de reinicialização (vide Apêndice A) ou de um procedimento extra para inserir furos, porém, todos os exemplos começam com espaços vazios. As variáveis de projeto são os coeficientes de expansão e são atualizadas com o MMA. Os testes realizados foram restritos ao uso de no máximo dois materiais e o vazio, apesar da formulação apresentada ser para quantidades arbitrárias de fases.

O estudo de Xia e Shi (2019) combinou uma abordagem LS com o método BESO, sendo o BESO utilizado para criar furos nas camadas das funções. Essa técnica, denominada de geração de furos generalizada, serve para criar o vazio ou incluir outro material, que se encontra na camada abaixo. Na abordagem proposta, uma fase tem precedência em relação à outra. Inicialmente, a função de conjunto de nível da camada com material mais rígido é a única visível, e à medida que os furos são criados, a função de conjunto de nível da camada abaixo aparece. Esse processo continua até que o vazio seja formado. Os furos são abertos com base na sensibilidade, calculada com o BESO, e na restrição de volume. O Método das Diferenças Finitas (MDF) é utilizado para resolver a equação de Hamilton-Jacobi, e uma reinicialização ocorre periodicamente. Os autores afirmam que, para simplificar o método, os furos são abertos apenas entre dois materiais adjacentes, e não entre qualquer par de materiais.

O estudo de Sha *et al.* (2021) utiliza uma modificação do método LS paramétrico com o algoritmo de AAP. Cada função de conjunto de nível representa um material de forma ordenada, semelhante ao que ocorre em Xia e Shi (2019). Os autores afirmam que a técnica foi desenvolvida de modo que cada subproblema do método de AAP atualiza as variáveis de projeto de uma única função de conjunto de nível em um domínio fixo.

2.3 Métodos Baseados em Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional

A técnica original do BESO, com um único material e o vazio, requer uma variável de projeto para cada elemento (QUERIN *et al.*, 1998). Para lidar com múltiplos materiais, Huang e Xie (2009) propuseram uma atualização desse método, que exige uma variável de projeto para cada material presente na otimização por elemento, similar a diversos métodos baseados em densidade. Isso resulta em um aumento linear na quantidade de variáveis de projeto, uma característica que poucos métodos conseguiram evitar até o momento. O módulo de elasticidade é determinado por uma interpolação linear entre duas fases vizinhas, com as fases sendo ordenadas de acordo com os módulos de Young, do maior para o menor. As variáveis de projeto assumem apenas os valores de x_{min} ou 1, ao contrário do SIMP, no qual podem

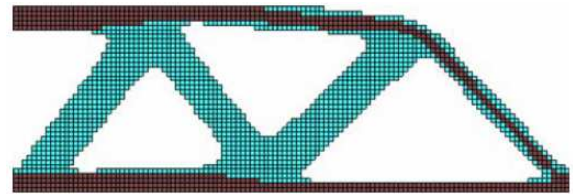
assumir qualquer valor no intervalo $[x_{min}, 1]$ (ver Apêndices A.2 e A.4). A filtragem é realizada em dois passos. Primeiramente, é calculada a média da sensibilidade para os nós, utilizando a sensibilidade dos elementos adjacentes. Em seguida, a sensibilidade dos elementos é atualizada considerando a média das sensibilidades dos nós que os compõem. Além disso, é realizada uma estabilização no valor da sensibilidade considerando seu histórico evolutivo. A abordagem proposta faz uso de um expoente de penalidade semelhante ao método SIMP.

Figura 8 – Resultado obtido por Huang e Xie (2009) para a parte simétrica de uma viga aplicando uma força pontual em baixo.

(a) Resultado com 2 fases.



(b) Resultado com 3 fases.



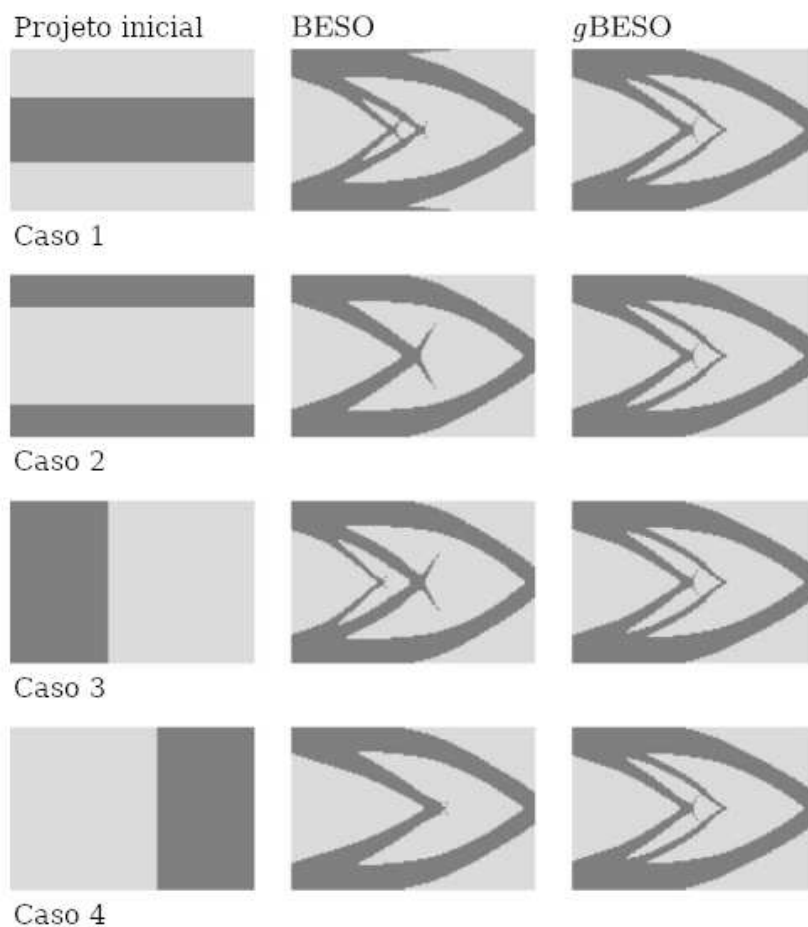
Fonte: Huang e Xie (2009).

Existem trabalhos com o método BESO que utilizam dois materiais distintos, sem o vazio, como em Huang *et al.* (2012), Yan *et al.* (2014), Huang *et al.* (2015) e Lopes *et al.* (2021). Por possuírem somente duas fases, não são considerados como abordagens que tratam múltiplos materiais. No entanto, a abordagem de Xu e Xie (2015), apesar de também envolver apenas duas fases, é relevante por ser utilizada como base para outras pesquisas. O método proposto por Xu e Xie (2015) aborda a criação de objetos com duas fases que podem sofrer cargas dinâmicas, otimizando duas microestruturas, que são criadas a partir de duas fases, formadas por dois materiais ou um material e o vazio. Diversos parâmetros foram incluídos no BESO para especificar as informações necessárias para cada fase dos materiais microscópicos, bem como as informações da parte macroscópica. Existe uma variável de projeto para a parte macro e duas para a micro. Xu *et al.* (2015) alterou o método incluindo o vazio na macroestrutura. Recentemente, o método foi utilizado por Zhao *et al.* (2021), propondo uma nova maneira de calcular a função objetivo. Além disso, Da *et al.* (2017) estendeu o método de Xu *et al.* (2015) para utilizar três ou mais materiais na microestrutura, porém a macroestrutura continuou utilizando somente dois materiais compósitos.

Ghabraie (2015) apresenta um algoritmo baseado no BESO que utiliza uma abordagem de continuação para tratar múltiplos materiais. Um novo filtro de sensibilidade também é proposto. O método começa considerando todos os valores dos módulos de Young próximos

ao valor mais fraco e, em cada passo (*step*), aumenta gradualmente esses valores para alcançar os parâmetros desejados. Devido a essa característica, o procedimento foi denominado de Gradual BESO (gBESO). Existe uma variável de projeto, que assume valores discretos, para cada elemento que indica o material a ser utilizado. A atualização do material a ser empregado em um elemento depende do valor da sensibilidade. O processo de atualização é simplificado uma vez que o volume dos materiais é prescrito desde o início do processo. Apesar disso, se entradas diferentes são consideradas, isto é, se os materiais são dispostos de maneira diferente no projeto inicial, os resultados finais são semelhantes, o que não é visto em diversos métodos. Essa característica é ilustrada na Figura 9. No entanto, outros parâmetros necessários para o funcionamento do método podem influenciar no projeto final.

Figura 9 – Resultado obtido por Ghabraie (2015) com dois materiais para uma viga em balanço com diferentes projetos iniciais.



Fonte: Adaptada de Ghabraie (2015).

O método proposto por Yang e Li (2018) visa minimizar a flexibilidade com a menor massa em objetos multimateriais. Os autores desenvolveram uma teoria e uma técnica

numérica baseadas em um processo de regulação de densidade. Considerado uma variação do método BESO quando lida com mais de três materiais, o método trata apenas dois materiais por vez, solucionando um subproblema. Ao final do processo, o resultado com todos os materiais disponíveis é alcançado.

O trabalho proposto por Gan e Wang (2021) apresenta um método que pode simular simultaneamente características estáticas e dinâmicas de corpos com múltiplos materiais. Para lidar com instabilidades numéricas, foi implementada uma filtragem na densidade como pré-processamento. O método requer uma variável de projeto para cada fase e utiliza os autovalores e autovetores como restrição no problema de otimização, resolvido com o método de multiplicadores de Lagrange. Os autores observaram um problema modal local em regiões de baixa densidade, resultando em oscilações numéricas, e resolveram isso com um esquema de interpolação polinomial.

O método proposto por Li *et al.* (2022) foca na otimização topológica de pontes feitas com aço e concreto. A técnica de otimização topológica utilizada foi previamente empregada em pesquisas envolvendo estruturas 2D e 3D (LI; XIE, 2021a; LI; XIE, 2021b). O projeto ótimo considera o tipo de material para atuar em uma função específica, ou seja, utilizando aço para áreas que sofrem tensão e concreto para áreas sob compressão. A metodologia inclui o vazio, contudo, apesar de usar três fases, possui apenas duas variáveis de projeto por elemento: uma indica a presença de material e a outra especifica o tipo de material. Não calcula a sensibilidade, em vez disso, usa um valor baseado nas tensões do elemento para determinar o material ideal. Esse valor é submetido a um pós-processamento de filtragem e estabilização, semelhante ao BESO tradicional, mas com um tratamento especial para o caso de múltiplas cargas atuando no corpo, sendo necessário avaliar as tensões obtidas em cada caso de carga.

Jaimes *et al.* (2022) utilizam o BESO para fazer projeto de metamateriais ortotrópicos, isto é, buscam o projeto de uma célula unitária em que as propriedades efetivas são calculadas por meio da Homogeneização Inversa. A função objetivo é computada com os coeficientes de expansão térmica. Apesar de a ideia poder ser utilizada para múltiplos materiais, a teoria e os exemplos só trabalham com três fases. Uma vez que a forma final é encontrada com o algoritmo de otimização topológica, um pós-processamento é feito para a remoção das ilhas com materiais que não contribuem para o mecanismo. Esse procedimento é denominado de *Inverse Virtual Temperature Method* (IVTM, Método de Temperatura Virtual Inversa). O campo de temperatura das ilhas é analisado e o método decide quais podem ser removidas.

2.4 Outros Métodos de Otimização Topológica

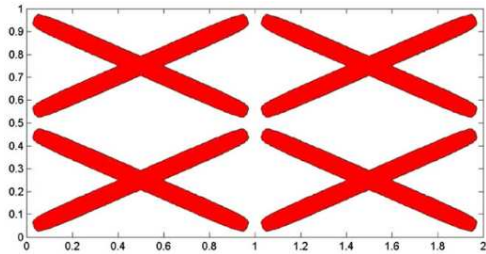
O método empregado por Zhou e Wang (2006) é o de Campo de Fase, que trabalha com materiais sólidos ou líquidos, usualmente utilizado em áreas de multifísica. No entanto, já foi aplicado anteriormente em otimização topológica (BOURDIN; CHAMBOLLE, 2003). Nesse trabalho, um processo de solidificação é usado, fazendo com que o sistema alcance estabilidade. Apesar de ser um método diferente, utiliza variáveis de projeto similares aos métodos de densidade, ou seja, indicando a densidade relativa de cada fase de material em um elemento. O problema a ser resolvido é a minimização da flexibilidade da estrutura de um sistema termodinâmico. A resolução é feita através da utilização de um modelo de Cahn–Hilliard generalizado, em que o problema é transformado em um conjunto de equações diferenciais parciais parabólicas não lineares de quarta ordem. Os autores fazem uso de uma técnica com *multigrid* para suavizar o erro, ao invés de utilizar filtragem. Essa técnica, segundo os autores, é mais versátil do que as baseadas em LS, uma vez que não precisam se preocupar com a criação de furos. No entanto, a abordagem é complexa, e, segundo Tavakoli (2014), sua taxa de convergência é baixa. É importante notar que os autores iniciaram desenvolvendo o método somente com três materiais (WANG; ZHOU, 2005).

Zhang *et al.* (2018) utilizam o método MMC (GUO *et al.*, 2014a), que resolve o problema de otimização topológica de forma mais direta e geométrica, permitindo ter menos variáveis de projeto. Diversos componentes são espalhados no domínio e suas informações geométricas são usadas como variáveis de projeto, como posição, angulação e tamanho. No caso de múltiplos materiais, o projeto inicial já possui componentes com os materiais a serem incorporados. Para decidir qual material será associado a um elemento, é preciso decompor os diferentes grupos de materiais e dar uma ordem de precedência baseada no módulo de elasticidade. Os autores ressaltam a importância de uma análise de sensibilidade correta, considerando os tensores de tensão e deformação nas interfaces dos materiais. Portanto, a análise de sensibilidade apresentada tem uma teoria mais complexa do que os métodos de SIMP e BESO. A forma inicial e alguns resultados são apresentados na Figura 10.

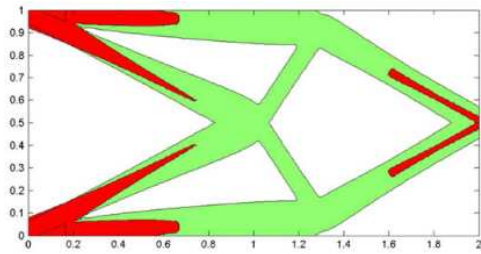
Ye *et al.* (2019) afirmam que o método ICM aplicado a um problema de minimização de peso com restrição de deslocamento é indicado para problemas de engenharia. Empregam o método somente para dois materiais e o vazio, de modo que duas variáveis de projeto são utilizadas, semelhante a outros métodos: a primeira indica se um elemento tem material, enquanto a segunda informa com qual material esse elemento está preenchido. Utilizam uma função de

Figura 10 – Resultado obtido por Zhang *et al.* (2018) para uma viga em balanço com diferentes restrições de porcentagem de volume, V , usando 12 componentes (inicialmente sobrepostas).

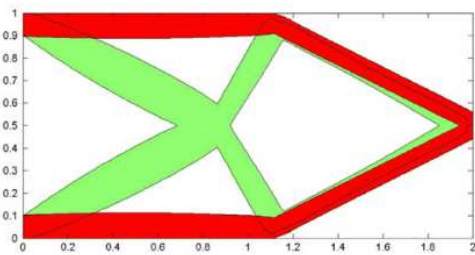
(a) Componentes iniciais.



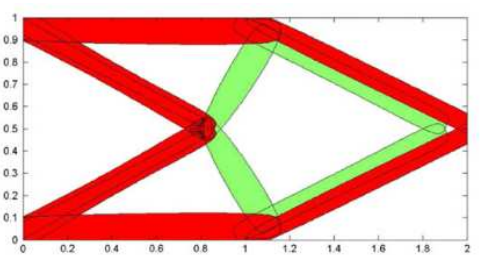
(b) $V_1 = 10\%$ e $V_2 = 30\%$.



(c) $V_1 = 20\%$ e $V_2 = 20\%$.



(d) $V_1 = 30\%$ e $V_2 = 10\%$.



Fonte: Zhang *et al.* (2018).

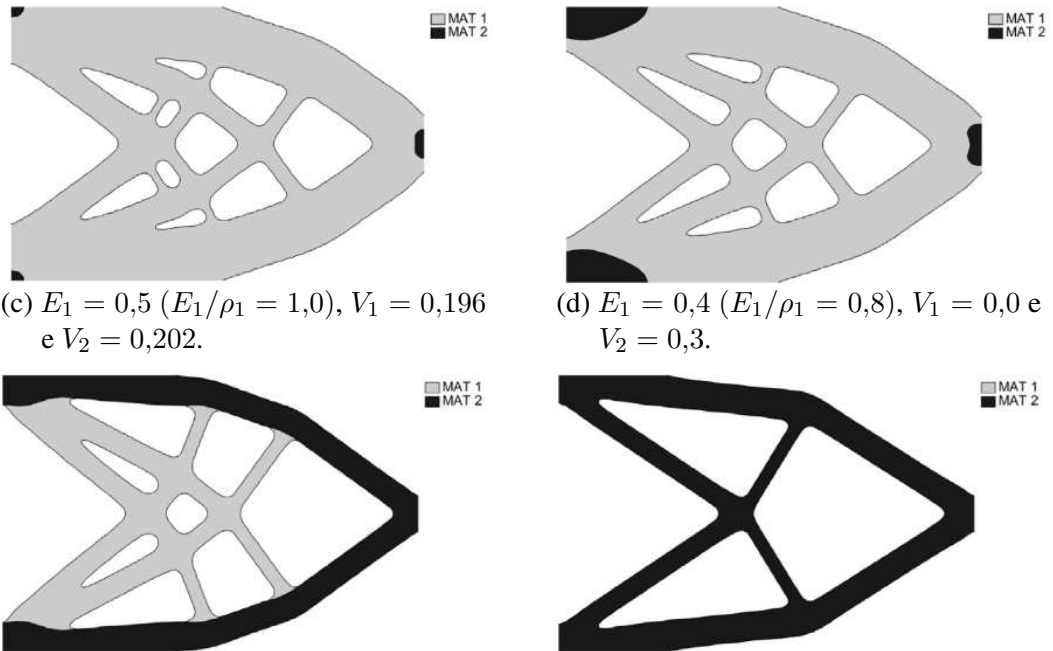
interpolação para a matriz de rigidez e outra para a função peso, ambas dependentes das duas variáveis de projeto. Contudo, as variáveis de projeto são penalizadas para a matriz de rigidez e não são penalizadas para a função peso. O problema de otimização é transformado em um problema de programação quadrática padrão, que é resolvido usando uma abordagem de programação quadrática sequencial. A restrição de deslocamento é expressa usando a expansão de Taylor de primeira ordem, enquanto a função peso da estrutura usa uma expansão de Taylor de segunda ordem.

A abordagem proposta por Huang e Li (2021) faz uso do método FPTO (HUANG, 2020), em que a restrição é aplicada na massa, ao invés do volume. Os autores afirmam que, dessa forma, o algoritmo tem mais liberdade para escolher os materiais a serem utilizados, inclusive podendo excluir completamente o uso de um material, caso seja mais conveniente para diminuir a função objetivo (Figura 11). Apontam que a maioria dos métodos de múltiplos materiais até então não conseguem ter uma solução em que as variáveis de projeto assumam apenas os valores 0 ou 1. Cada elemento do MEF tem uma variável de projeto vinculada a cada material, que pode ter valores entre x_{min} e 1 e está associada ao volume de cada material no elemento. Em vez de usar um expoente de penalidade como na abordagem SIMP, as variáveis de projeto são alteradas via uma função de projeção. Funções de conjunto de nível são usadas para a visualização e verificação da convergência. Quando a flexibilidade do método FPTO

chega a um valor próximo ao calculado com a abordagem LS, a convergência é alcançada. Como em Tavakoli e Mohseni (2014) e Ghabraie (2015), o incremento de uma variável da função de projeção é feito de maneira gradual, fazendo com que o método tenha diversos momentos de semi-convergência.

Figura 11 – Resultado obtido por Huang e Li (2021) com uma possibilidade de escolha de dois materiais para uma viga em balanço restrita a massa 0,3 e os volumes são as variáveis V_i . O MAT2 tem o módulo de elasticidade sempre $E_2 = 1$ e a densidade $\rho_2 = 1$ enquanto que o MAT1 possui $\rho_1 = 0,5$ e o E_1 é variado.

- (a) $E_1 = 0,9$ ($E_1/\rho_1 = 1,8$), $V_1 = 0,59$ e $V_2 = 0,005$. (b) $E_1 = 0,7$ ($E_1/\rho_1 = 1,4$), $V_1 = 0,513$ e $V_2 = 0,043$.



Fonte: Huang e Li (2021).

Li *et al.* (2024) propuseram um método baseado em Aprendizagem Profunda, no qual uma *Generative Adversarial Network* (GAN, Rede Adversária Generativa) é treinada com um conjunto de dados contendo configurações topológicas multimaterial para gerar o projeto. O modelo proposto foi nomeado como ResUNet-GAN. O conjunto de dados de treinamento é gerado com o método SIMP, e a rede é desenvolvida para mapear os parâmetros de projeto para as configurações topológicas multimateriais correspondentes.

2.5 Considerações Finais

Este capítulo teve como objetivo mostrar o histórico de diversas técnicas que trabalham com múltiplos materiais na otimização topológica. Em geral, os resultados apresentados se

concentram em macroestruturas. Entretanto, alguns trabalhos com outras estruturas também foram descritos a fim de demonstrar as diversas utilizações da otimização topológica. Os trabalhos foram divididos em quatro categorias: métodos baseados em densidade dos materiais, métodos baseados em LS, métodos baseados em BESO e outros métodos.

A Tabela 1 apresenta um resumo das principais pesquisas discutidas neste capítulo. É válido notar que a maior parte dos métodos utiliza o MEF, existindo uma escassez de estudos utilizando métodos sem malha. A maior quantidade se concentra em trabalhos baseados em densidade, especificamente baseados no SIMP, uma vez que o AAP mais utilizado emprega o método SIMP como base. Quase todos os modelos têm um aumento linear na quantidade de variáveis de projeto em relação ao número de materiais utilizados por elemento. Além disso, alguns trabalhos tratam o vazio como uma fase à parte, enquanto outros o consideram um material. Nem todos os métodos precisam utilizar filtragem, e não há um consenso sobre se é melhor aplicá-la no valor da densidade ou na sensibilidade. No próximo capítulo, será abordado o método proposto que acopla um método sem malha, como alternativa ao MEF, com um método de otimização topológica multimaterial.

Tabela 1 – Resumo dos dados principais dos trabalhos apresentados.

Trabalhos	Otimização topológica multimaterial	Análise numérica	Tipo de estrutura	Nº de variáveis	Filtro aplicado
Thomsen (1992)	Homogeneização	MEF	micro e macro	4 (2 materiais e vazio)	-
Sigmund e Torquato (1997)	Homogeneização / SIMP	MEF	micro	2 (2 materiais e vazio)	na energia de deformação
Bendsøe e Sigmund (1999)	SIMP	MEF	macro	2 (2 materiais e vazio)	-
Yin e Ananthasuresh (2001)	SIMP modificado (<i>Peak function</i>)	MEF	mecanismos flexíveis	1 (m fases)	-
Stegmann e Lund (2005)	DMO	MEF	macro e casca laminada	$m + 1$ (ângulo e m materiais)	-

Trabalhos	Otimização topológica multimaterial	Análise numérica	Tipo de estrutura	Nº de variáveis	Filtro aplicado
Hvejsel e Lund (2011)	SIMP e RAMP modificados	MEF	macro	$m + 1$ (m materiais, ângulo e vazio)	-
Tavakoli e Mohseni (2014)	AAP	MEF	macro	m (m fases)	na sensibilidade
Cui <i>et al.</i> (2017)	AAP	EFG	macro	m (m fases)	na densidade
Zuo e Saitou (2017)	SIMP ordenado	MEF	macro	1 (m fases)	na sensibilidade
Lieu e Lee (2017)	AAP	IGA	macro	m (m fases)	na sensibilidade
Cui <i>et al.</i> (2018)	PTO modificado	MEF	macro	$m - 1$ (m fases)	na densidade
Chau <i>et al.</i> (2018)	AAP	MEF	macro	m (m fases)	na densidade
Zhang <i>et al.</i> (2020)	ZPR	VEM	macro	m (m materiais e vazio)	na densidade
Habibian <i>et al.</i> (2021)	AAP	Peridinâmica	macro	m (m fases)	na sensibilidade
Nguyen e Bui (2022)	PTO com AAP modificado	MEF	macro (placas)	m (m fases)	na densidade
Han e Wei (2022)	AAPO	MEF	micro	m (m fases)	não disponível
Huamaní e Gomes (2023)	AAP modificado	MEF	macro	m (m materiais)	na densidade
Duan <i>et al.</i> (2023)	SIMP e DMO	MEF	macro	$m + \bar{m}$ (m materiais, \bar{m} ângulos e vazio)	na densidade

Trabalhos	Otimização topológica multimaterial	Análise numérica	Tipo de estrutura	Nº de variáveis	Filtro aplicado
Wang e Wang (2004)	LS colorido	MEF	macro	m funções (2^m materiais e vazio)	-
Wang <i>et al.</i> (2015)	LS paramétrico	MEF	macro	m funções (m materiais e vazio)	-
Ai e Gao (2019)	LS paramétrico	CS-RBF	micro	m funções (m materiais e vazio)	-
Xia e Shi (2019)	LS com BESO	MDF	macro	m funções (m materiais e vazio)	-
Sha <i>et al.</i> (2021)	LS paramétrico com AAP	MEF	macro	m funções (m materiais e vazio)	-
Huang e Xie (2009)	BESO	MEF	macro	2 (2 materiais e vazio)	na sensibilidade
Da <i>et al.</i> (2017)	BESO	MEF	micro e macro	$2m + 1$ (m fases da microestrutura)	na sensibilidade
Ghabraie (2015)	gBESO	MEF	macro	m (m fases)	na sensibilidade
Yang e Li (2018)	BESO modificado	MEF	macro	m (m fases)	na sensibilidade
Gan e Wang (2021)	BESO	MEF	macro	m (m fases)	na densidade
Li <i>et al.</i> (2022)	BESO	MEF	macro	2 (2 materiais e vazio)	na tensão
Jaimes <i>et al.</i> (2022)	BESO	MEF	micro	2 (2 materiais e vazio)	na sensibilidade
Zhou e Wang (2006)	campo de fase	MEF	macro	m (m fases)	-

Trabalhos	Otimização topológica multimaterial	Análise numérica	Tipo de estrutura	Nº de variáveis	Filtro aplicado
Zhang <i>et al.</i> (2018)	MMC	MEF	macro	depende do número de componentes	-
Ye <i>et al.</i> (2019)	ICM	MEF	macro	2 (2 materiais e vazio)	não disponível
Huang e Li (2021)	FPTO	MEF	macro	m (m materiais)	-
Li <i>et al.</i> (2024)	ResUNet-GAN treinado com SIMP	-	macro	m (m materiais)	-

Fonte: Elaborada pela autora.

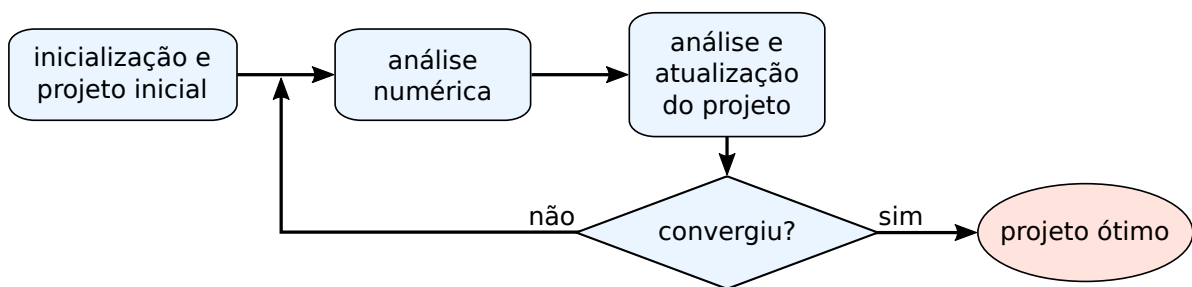
Nota: Micro representa microestruturas e macro representa macroestruturas.

Nota: O termo fase indica que o vazio é tratado como um material e existe uma variável de projeto associada.

3 METODOLOGIA

A otimização topológica de estruturas pode ser realizada por diversos métodos, alguns dos quais são capazes de lidar com múltiplos materiais. Esses métodos seguem uma abordagem iterativa, que requer uma análise do comportamento da estrutura utilizando um projeto existente para propor um novo, como ilustrado na Figura 12. Portanto, é essencial utilizar um método de análise numérica que forneça informações como deslocamentos, deformações e tensões em cada iteração, permitindo que o projeto seja atualizado de acordo com a avaliação dessas informações. Embora o MEF seja o mais usado (THOMSEN, 1992; HUANG; XIE, 2009; TAVAKOLI; MOHSENI, 2014; WANG *et al.*, 2015; ZHANG *et al.*, 2018; HUANG; LI, 2021), existem diversas alternativas que não dependem de malha e também podem ser eficazes. O processo de otimização continua até que um critério predefinido seja atingido.

Figura 12 – Processo iterativo de otimização topológica em alto nível.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma vez que o método de otimização topológica requer apenas algumas informações da abordagem de análise numérica, os dois métodos são tratados separadamente, dividindo este capítulo em três seções. Primeiramente, a análise numérica é apresentada em que o método DMLPG é usado (Seção 3.1). Em seguida, a otimização topológica multimaterial com o método gBESO é adaptada para incluir a abordagem sem malha (Seção 3.2). As considerações finais deste capítulo são abordadas na Seção 3.3.

3.1 Análise Numérica

O método DMLPG, introduzido por Mirzaei (2011), é uma abordagem de análise numérica que já foi aplicada em diversas áreas da computação e da engenharia (MIRZAEI; SCHABACK, 2014; MIRZAEI; HASANPOUR, 2016; HASANPOUR; MIRZAEI, 2018; DARANI, 2017; SHOKRI; BAHMANI, 2019; SHOKRI; BAHMANI, 2021), devido à sua eficácia

e precisão (ABBASZADEH *et al.*, 2022; DEGHAN *et al.*, 2022). Sua principal vantagem é a eliminação da necessidade de funções de forma complexas, como no *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG, Petrov-Galerkin Local Sem Malha) (ATLURI; ZHU, 1998), realizando o processo de integração apenas sobre polinômios, similar ao MEF, que são muito mais baratos para avaliar (MIRZAEI; SCHABACK, 2013).

Nesta seção, apresenta-se a teoria do método DMLPG. Inicialmente, o problema de valor de contorno é definido na Seção 3.1.1, onde a especificação da formulação fraca local na forma matricial acontece na Seção 3.1.2. Na Seção 3.1.3, demonstra-se a construção das funções tentativas através do GMLS, enquanto na Seção 3.1.4, indica-se a função teste utilizada. Na Seção 3.1.5, o sistema linear global é montado e em seguida é modificado, na Seção 3.1.6, para a aplicação das condições de contorno essenciais. A Seção 3.1.7 aborda a obtenção dos deslocamentos, deformações e tensões necessários para a técnica de otimização topológica. Para resumir de forma objetiva a abordagem sem malha, um algoritmo de alto nível é formulado na Seção 3.1.8.

3.1.1 Problema de Valor de Contorno

Considere um corpo heterogêneo, ilustrado na Figura 13, com um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) delimitado pela fronteira Γ , sujeito a deformações infinitesimais. O problema elástico linear é governado pela equação diferencial de equilíbrio

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \text{ em } \Omega, \quad (3.1)$$

onde σ_{ij} representa as componentes do tensor de tensão de Cauchy e b_i as componentes da força de corpo, para $1 \leq i, j \leq d$, em que $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial x_j$. As componentes σ_{ij} estão relacionadas às componentes do tensor de deformação infinitesimal, ε_{kl} , para $1 \leq k, l \leq d$, por meio da lei de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ij} = e_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.2)$$

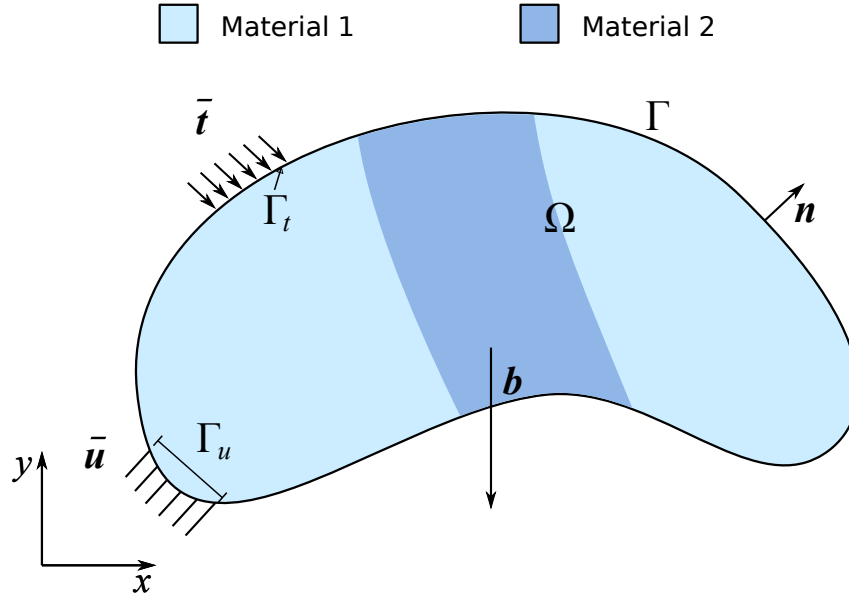
onde e_{ijkl} representa os coeficientes de rigidez elástica do material.

O tensor de deformação infinitesimal no ponto \mathbf{x} no domínio Ω é dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}, \quad (3.3)$$

onde u_i e u_j são as componentes do deslocamento no ponto \mathbf{x} .

Figura 13 – O domínio global Ω e a fronteira global Γ de um corpo heterogêneo arbitrário bidimensional com dois materiais. As fronteiras Γ_u e Γ_t são, nessa ordem, as partes de Γ em que as condições de contorno essencial e natural são especificadas. \bar{u} e \bar{t} são os deslocamentos e as trações prescritas, respectivamente, \mathbf{n} é o vetor normal unitário em Γ e \mathbf{b} é a força de corpo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Dois tipos de condições de contorno são estabelecidas em Γ : a condição de contorno essencial em $\Gamma_u \in \Gamma$, e a condição de contorno natural em $\Gamma_t \in \Gamma$ (Figura 13), isto é,

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ em } \Gamma_u, \quad (3.4a)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i, \text{ em } \Gamma_t, \quad (3.4b)$$

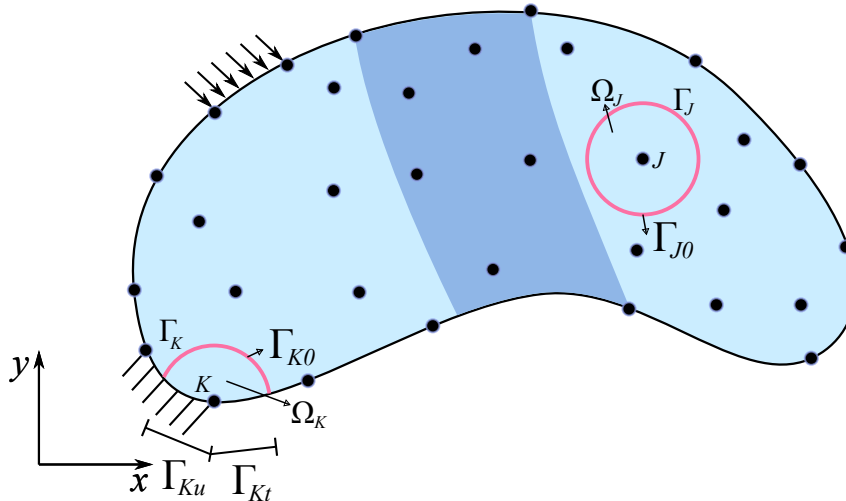
onde \bar{u}_i representa a i -ésima componente do deslocamento prescrito em Γ_u , \bar{t}_i representa a i -ésima componente da tração prescrita em Γ_t e n_j é a j -ésima componente do vetor normal unitário na fronteira Γ . O campo de deslocamento deve ser a solução da Equação (3.1) em cada ponto \mathbf{x} no domínio Ω e deve satisfazer as Equações (3.4a) e (3.4b) na fronteira Γ .

3.1.2 Formulação Fraca Local

Suponha que o corpo, Ω , e sua fronteira, Γ , sejam discretizados por nós distribuídos de forma arbitrária, onde cada nó I está associado a um subdomínio local Ω_I com uma fronteira local Γ_I (Figura 14). Esses subdomínios podem ter formas variadas, como quadrados, círculos, entre outros (ATLURI; SHEN, 2002). Mirzaei (2015) observou que tanto formas circulares quanto quadrilaterais obtêm resultados satisfatórios em métodos sem malha. Assim, a escolha

entre essas formas é principalmente uma questão de conveniência (LIU, 2009). Este trabalho utiliza exclusivamente subdomínios circulares.

Figura 14 – Ilustração da distribuição de nós para a abordagem DMLPG. Cada nó está associado a um subdomínio local e sua fronteira correspondente. Por exemplo, os nós J e K possuem subdomínios locais Ω_J e Ω_K , respectivamente, com fronteiras Γ_J e Γ_K . Quando um subdomínio está totalmente contido no domínio global, como o subdomínio de J , tem-se $\Gamma_J = \Gamma_{J0}$. Por outro lado, se o subdomínio de um nó cruza a fronteira global, como o subdomínio de K , sua fronteira local é definida como $\Gamma_K = \Gamma_{K0} \cup \Gamma_{Ku} \cup \Gamma_{Kt}$, onde Γ_{K0} representa a parte de Γ_K sem condições de contorno, enquanto Γ_{Ku} e Γ_{Kt} são, respectivamente, as partes de Γ_K com condições de contorno essenciais e naturais.



Fonte: Elaborada pela autora.

A fronteira do subdomínio, ilustrada na Figura 14, pode ser dividida em até três partes,

$$\Gamma_I = \Gamma_{I0} \cup \Gamma_{Iu} \cup \Gamma_{It}, \quad (3.5)$$

onde Γ_{I0} corresponde à região de Γ_I sem condições de contorno, e Γ_{Iu} e Γ_{It} representam as regiões de Γ_I com condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente.

Uma formulação fraca local generalizada sobre o subdomínio Ω_I para a Equação (3.1) pode ser representada como

$$\int_{\Omega_I} [\sigma_{ij,j} + b_i] v_{Ii} d\Omega = 0, \quad (3.6)$$

onde v_{Ii} é a i -ésima componente da função teste definida sobre Ω_I . Observa-se que a Equação

ção (3.6) deve ser válida para qualquer valor de v_{Ii} , permitindo expressá-lo como

$$v_{Ii}(\mathbf{x}) = \theta_{Ii}(\mathbf{x})\mathcal{V}_{Ii}, \quad (3.7)$$

sendo $\theta_{Ii}(\mathbf{x})$ uma função definida de forma apropriada e \mathcal{V}_{Ii} um fator de escala arbitrário.

Ao aplicar o teorema da divergência na Equação (3.6), tem-se

$$\int_{\Gamma_I} \sigma_{ij}n_j v_{Ii} d\Gamma - \int_{\Omega_I} \sigma_{ij}v_{Ii,j} d\Omega + \int_{\Omega_I} b_i v_{Ii} d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Fazendo uso da decomposição da fronteira Γ_I , conforme a Equação (3.5), a Equação (3.8) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{I0}} \sigma_{ij}n_j v_{Ii} d\Gamma + \int_{\Gamma_{Iu}} \sigma_{ij}n_j v_{Ii} d\Gamma + \int_{\Gamma_{It}} \sigma_{ij}n_j v_{Ii} d\Gamma \\ - \int_{\Omega_I} \sigma_{ij}v_{Ii,j} d\Omega + \int_{\Omega_I} b_i v_{Ii} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Após a aplicação da condição de contorno natural, a Equação (3.9) é modificada para

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{I0}} \sigma_{ij}n_j v_{Ii} d\Gamma + \int_{\Gamma_{Iu}} \sigma_{ij}n_j v_{Ii} d\Gamma + \int_{\Gamma_{It}} \bar{t}_i v_{Ii} d\Gamma \\ - \int_{\Omega_I} \sigma_{ij}v_{Ii,j} d\Omega + \int_{\Omega_I} b_i v_{Ii} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A forma matricial da formulação fraca local pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_I^T \left[\int_{\Gamma_{I0}} \Theta_I \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_{Iu}} \Theta_I \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_{It}} \Theta_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right. \\ \left. - \int_{\Omega_I} \Psi_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_I} \Theta_I \mathbf{b} d\Omega \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é a representação do vetor coluna do tensor de tensão, \mathbf{V}_I^T é o vetor linha dos fatores de escala arbitrários, Θ_I é a matriz diagonal da parte da função teste que depende de \mathbf{x} (Equação (3.7)), \mathbf{N} é a matriz que contém as componentes do vetor normal unitário em relação à fronteira Γ , $\bar{\mathbf{t}}$ é o vetor de tração prescrita em Γ_{It} , \mathbf{b} é o vetor de força de corpo e $\Psi_I = \mathbf{L}_d \Theta_I$ é a matriz das derivadas de Θ_I , sendo \mathbf{L}_d a matriz de operadores diferenciais.

As Equações (3.2) e (3.3) podem ser reescritas na forma matricial como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.12a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_d \mathbf{u}, \quad (3.12b)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor que representa o tensor de deformação de engenharia, \mathbf{u} é o vetor de deslocamento e \mathbf{D} é a matriz dos coeficientes de rigidez elástica do material, sendo considerado um material isotrópico neste trabalho.

Lembrando que \mathcal{V}_I contém valores arbitrários, para que a Equação (3.11) seja verdadeira, é preciso que o que está entre os colchetes seja igual ao vetor nulo (HUGHES, 1987). Colocando o que restou em função de \mathbf{u} , isto é, substituindo as Equações (3.12), a forma fraca local pode ser expressa da seguinte forma (ATLURI; ZHU, 2000)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_I} \Psi_I^T \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_{I0}} \Theta_I \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_{Iu}} \Theta_I \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_{It}} \Theta_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_I} \Theta_I \mathbf{b} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para exemplificar o caso bidimensional, as matrizes e os vetores das Equações (3.11) a (3.13) podem ser representados da seguinte forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_I = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{I1} \\ \mathcal{V}_{I2} \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \Theta_I = \begin{bmatrix} \theta_{I1} & 0 \\ 0 & \theta_{I2} \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{para estado plano de tensão,} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases}$$

e

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{para estado plano de tensão,} \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases}$$

onde E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson do material.

3.1.3 Funções Tentativas

O GMLS é empregado no DMLPG para estimar o deslocamento. Essa estimativa é obtida por meio da definição de funcionais lineares, os quais são posteriormente estabelecidos

(Seção 3.1.5) utilizando a forma fraca local. Nesta seção, o GMLS e sua função peso são abordados de forma geral, tendo como fundamentação os estudos de Mirzaei e Schaback (2013) e Abbaszadeh e Dehghan (2022).

3.1.3.1 Aproximação pelo Método GMLS

Considerando a equação linear

$$\lambda(\mathbf{u}) = \beta, \quad (3.14)$$

onde λ e β são funcionais lineares e \mathbf{u} é uma função desconhecida, é necessário que $u_i \in C^g(\Omega)$, ou seja, as componentes de \mathbf{u} devem pertencer a um espaço de funções contínuas e ser g vezes diferenciáveis. Neste trabalho, \mathbf{u} é considerado como deslocamento.

Seja $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ um conjunto das posições de nós dispersos no domínio Ω ou na fronteira Γ . Vale ressaltar que N não precisa representar todos os nós que discretizam o domínio. O método GMLS visa aproximar o funcional linear $\lambda(\mathbf{u})$ por $\hat{\lambda}(\mathbf{u})$. Essa aproximação é realizada por meio de uma combinação linear

$$\lambda(\mathbf{u}) \approx \hat{\lambda}(\mathbf{u}) = \sum_{J=1}^N a_J(\lambda) \mu_J(\mathbf{u}), \quad (3.15)$$

onde $\mu_J(\mathbf{u})$ são funcionais associados aos coeficientes a_J . Como exemplo, os funcionais λ e μ_J podem ser avaliações pontuais de \mathbf{u} ou de qualquer uma de suas derivadas até a ordem g , integrais locais envolvendo \mathbf{u} ou suas derivadas, entre outras possibilidades (MIRZAEI; SCHABACK, 2013).

Seja $\mathcal{P} = \text{span}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_G\}$ um subespaço finito que contém funções polinômiais, em que a seguinte propriedade é válida: $p_{ki} \in C^g(\Omega)$, para as componentes $i = 1, \dots, d$ de um vetor base \mathbf{p}_k , com $k = 1, \dots, G$ e $G = \frac{(g+d)!}{g!d!}$. Por exemplo, supondo um espaço bidimensional, isto é $d = 2$, usando uma base canônica de polinômios e considerando uma ordem quadrática, $g = 2$, tem-se

$$\mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.16)$$

Para todas as funções $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, é correto afirmar que

$$\lambda(\mathbf{p}) = \sum_{J=1}^N a_J(\lambda) \mu_J(\mathbf{p}). \quad (3.17)$$

Dessa forma, é preciso encontrar uma aproximação, $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$, de \mathbf{u} que minimize

$$\left\{ \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mu_J(\mathbf{p}))^2 w_J \right\}, \quad (3.18)$$

sendo w_J o valor de uma função peso que designa a influência de um nó J .

Considerando a linearidade dos funcionais μ_J e expressando \mathbf{p} como a combinação linear dos vetores da base de \mathcal{P} , tem-se

$$\mu_J(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = \mu_J \left(\sum_{k=1}^G c_k \mathbf{p}_k(\mathbf{x}) \right) = \sum_{k=1}^G c_k \mu_J(\mathbf{p}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}, \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{p}_{\mu_J}^T = [\mu_J(\mathbf{p}_1(\mathbf{x})) \ \mu_J(\mathbf{p}_2(\mathbf{x})) \ \cdots \ \mu_J(\mathbf{p}_G(\mathbf{x}))]$ e $\mathbf{c}^T = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_G]$.

O problema de minimização irrestrita pode ser definido como

$$\underset{\mathbf{c}}{\text{minimizar}} \ \mathcal{J}(\mathbf{c}), \quad (3.20)$$

sendo

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c})^2 w_J \quad (3.21)$$

obtido ao substituir a Equação (3.19) na Equação (3.18).

Para encontrar o mínimo de \mathcal{J} , a derivada de \mathcal{J} em relação aos coeficiente c_k necessita ser calculada e igualada a zero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_1} &= -2 \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}) \mu_J(\mathbf{p}_1) w_J = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_2} &= -2 \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}) \mu_J(\mathbf{p}_2) w_J = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_G} &= -2 \sum_{J=1}^N (\mu_J(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c}) \mu_J(\mathbf{p}_G) w_J = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A Equação (3.22) pode ser simplificada e reorganizada da forma

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_1) w_J \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c} &= \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_1) w_J \mu_J(\mathbf{u}), \\ \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_2) w_J \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c} &= \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_2) w_J \mu_J(\mathbf{u}), \\ &\vdots \\ \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_G) w_J \mathbf{p}_{\mu_J}^T \mathbf{c} &= \sum_{J=1}^N \mu_J(\mathbf{p}_G) w_J \mu_J(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

A forma matricial do sistema de equações lineares definido na Equação (3.23) pode ser representada como

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}), \quad (3.24)$$

com $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}$, onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\mu_1}^T \\ \mathbf{p}_{\mu_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{\mu_N}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mu_1(\mathbf{u}) \\ \mu_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \mu_N(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, os coeficientes \mathbf{c}^* do polinômio ótimo, \mathbf{p}^* , são calculados como

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}). \quad (3.25)$$

No método GMLS, a solução ótima é representada pela aproximação $\hat{\lambda}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{p}^*)$ (MIRZAEI; SCHABACK, 2013). Portanto, é possível usar a propriedade discutida para o funcional μ na Equação (3.19), e aplicar para o funcional λ , fazendo uso da Equação (3.25). Com isso, obtém-se

$$\hat{\lambda}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}_\lambda^T \mathbf{c}^* = \mathbf{p}_\lambda^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}). \quad (3.26)$$

3.1.3.2 Função Peso

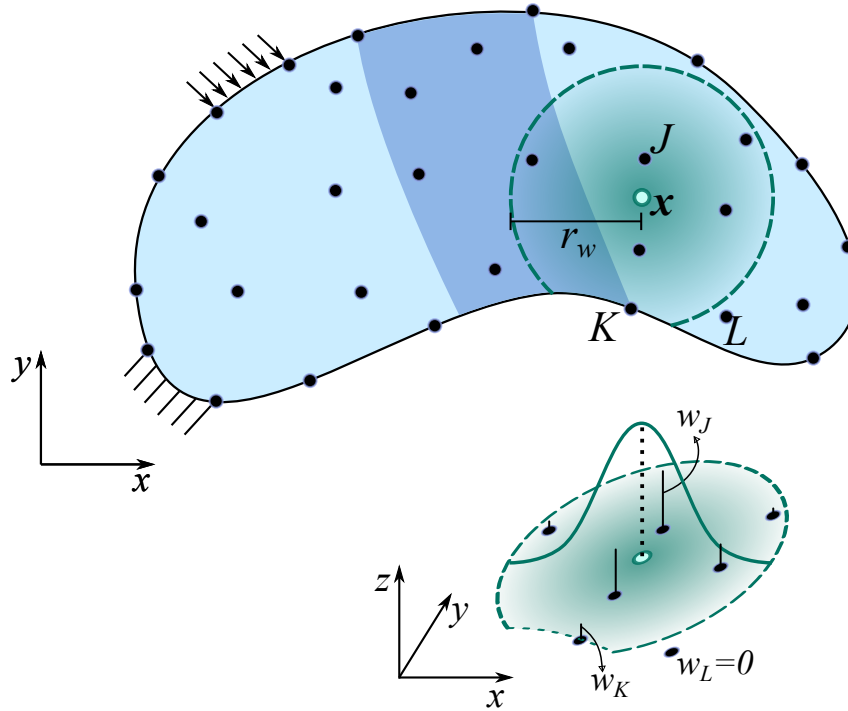
A função peso adotada neste estudo é a função gaussiana com suporte circular compacto, expressa como (MIRZAEI, 2015)

$$w_J = w(r_J) = \frac{\exp(-(\epsilon r_J)^2) - \exp(-\epsilon^2)}{1 - \exp(-\epsilon^2)}, \quad (3.27)$$

para $0 \leq r_J \leq 1$, onde $r_J = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_J\|/r_w$, sendo r_w o raio do suporte circular compacto centrado em \mathbf{x} , e ϵ um parâmetro que regula a curvatura do perfil em forma de sino da função. A Figura 15 ilustra as contribuições para um determinado ponto \mathbf{x} . A contribuição é maior quanto mais próximo um nó estiver do ponto \mathbf{x} . No entanto, a contribuição poderá ser nula ($w(r_J) = 0$) caso o nó esteja além da região de suporte ($r_J \geq r_w$), como exemplificado na Figura 15 através do nó L .

Conforme discutido em Atluri e Zhu (1998) e Liu (2009), para a Equação (3.25) ser válida, a matriz \mathbf{A} precisa ser invertível. Para garantir essa condição, é necessário que $N \geq G$, onde N é o número de nós dentro do domínio de suporte da função peso centrada em \mathbf{x} e G é o número de vetores que pertencem à base de \mathcal{P} .

Figura 15 – Representação do raio r_w do suporte compacto de uma função peso centrada em \mathbf{x} . Alguns nós na vizinhança são exemplificados: J , K e L . Como o nó J é o mais próximo ao ponto \mathbf{x} , sua influência é maior do que a do nó K . O nó L não tem influência, pois está fora da região de suporte da função.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.1.4 Funções Teste

A abordagem DMLPG5 (MIRZAEI, 2015), adotada neste trabalho, considera a função teste como uma função de Heaviside, centrada em cada nó e possuindo suporte compacto de raio r_e (Figura 16). Conforme definido na Equação (3.7), tem-se (LI *et al.*, 2003)

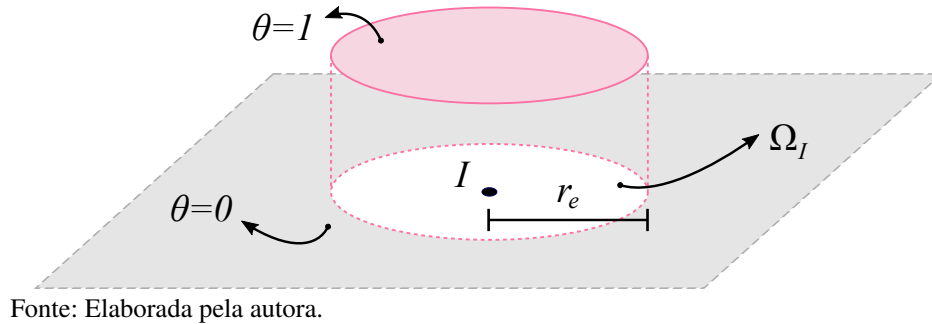
$$\theta_{I_i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_I, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.28)$$

para $i = 1, \dots, d$.

3.1.5 Discretização

Uma vez que a função de Heaviside, que assume valores constantes, é utilizada como função teste, implica que a integral de domínio que aparece do lado esquerdo da Equação (3.13) não precisa ser resolvida. Levando em consideração a aproximação descrita na Equação (3.14),

Figura 16 – Representação da função de Heaviside em um caso bidimensional, centrada no nó I e com suporte compacto de raio r_e .



Fonte: Elaborada pela autora.

o problema pode ser formulado em sua forma discreta como

$$\lambda_I(\mathbf{u}) = \beta_I, \quad (3.29)$$

onde

$$\lambda_I(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{u}) \\ \lambda_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \lambda_d(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = - \int_{\Gamma_{I0} \cup \Gamma_{Iu}} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Gamma, \quad (3.30)$$

e

$$\beta_I = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_d \end{pmatrix} = \int_{\Gamma_{It}} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_I} \mathbf{b} d\Omega. \quad (3.31)$$

com $I = 1, \dots, M$. Os funcionais $\lambda(\mathbf{u})$ e β (Equação (3.14)) são definidos para cada dimensão $i = 1, \dots, d$. Assumindo \tilde{N} o total de nós que discretizam do domínio, para garantir a existência de solução, é necessário que $M \geq \tilde{N}$ (MIRZAEI; SCHABACK, 2013). Por conveniência, considera-se $M = \tilde{N}$, isto é, os funcionais são avaliados nas \tilde{N} localizações nodais. Vale apontar que, devido a utilização do DMLPG5, caso não haja aplicação de força de corpo, há integração somente na fronteira do subdomínio.

As componentes de $\boldsymbol{\mu}$, nas Equações (3.15) e (3.26), são tomadas como as avaliações do deslocamento nas direções $i = 1, \dots, d$ para os nós J . Sendo assim, $\lambda_I(\mathbf{u})$ pode ser aproximado como

$$\hat{\lambda}_I(\mathbf{u}) = \sum_{J=1}^N a_J(\lambda_I) \mathbf{u}(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}_{\lambda_I}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}, \quad (3.32)$$

em que $N \leq \tilde{N}$ é o número de nós dentro do domínio de suporte da função peso centrada em \mathbf{x}_I , ou seja, esse somatório é aplicado a todos os nós J onde $w_J > 0$. A matriz em bloco, $\Phi \in \mathbb{R}^{dG \times dN}$, é definida como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1N} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{G1} & \Phi_{G2} & \cdots & \Phi_{GN} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

onde cada bloco $d \times d$ é montado com o elemento $\phi_{kJ} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}]_{kJ}$,

$$\Phi_{kJ} = \begin{bmatrix} \phi_{kJ} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{kJ} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{kJ} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

A matriz $\mathbf{p}_{\lambda_I}^T \in \mathbb{R}^{d \times dG}$ é descrita como

$$\mathbf{p}_{\lambda_I}^T = [\lambda_I(\mathbf{p}_1) \ \lambda_I(\mathbf{p}_2) \ \cdots \ \lambda_I(\mathbf{p}_G)], \quad (3.35)$$

sendo

$$\lambda_I(\mathbf{p}_k) = - \int_{\Gamma_{I_0} \cup \Gamma_{I_u}} \mathbf{NDP}_k d\Gamma \quad (3.36)$$

para $k = 1, \dots, G$ e

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{L}_d \left[\text{diag}\{\mathbf{p}_k\} \right]. \quad (3.37)$$

A matriz $\text{diag}\{\mathbf{p}_k\}$ é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são as componentes dos vetores \mathbf{p}_k , que pertencem à base do conjunto \mathcal{P} , aplicados ao ponto \mathbf{x} . É válido observar que, de acordo com Mirzaei e Schaback (2013), é possível melhorar a estabilidade e precisão da aproximação modificando a base canônica dos polinômios. Nesse caso, os termos dos monômios que compõem os polinômios na forma natural, $\{x^\kappa\}_{0 \leq \kappa \leq g}$, podem ser deslocados e escalonados da seguinte forma

$$\left\{ \frac{(x-z)^\kappa}{d_{\min}^\kappa} \right\}_{0 \leq \kappa \leq g}, \quad (3.38)$$

onde z é uma avaliação da posição do nó I e d_{\min} é a distância euclidiana mínima entre dois nós. Com isso, a exemplificação da Equação (3.16) é modificada como

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_{I1}}{d_{\min}} \\ \frac{d_{\min}}{x_1 - x_{I1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_{I2}}{d_{\min}} \\ \frac{d_{\min}}{x_2 - x_{I2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(x_1 - x_{I1})^2}{d_{\min}^2} \\ \frac{(x_1 - x_{I1})^2}{d_{\min}^2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{(x_1 - x_{I1})(x_2 - x_{I2})}{d_{\min}^2} \\ \frac{(x_1 - x_{I1})(x_2 - x_{I2})}{d_{\min}^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(x_2 - x_{I2})^2}{d_{\min}^2} \\ \frac{(x_2 - x_{I2})^2}{d_{\min}^2} \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

O sistema linear construído a partir da Equação (3.29) pode ser representado como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.39)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{f} são vetores coluna de dimensões compatíveis com a matriz \mathbf{K} , que é quadrada e de dimensões $(dM) \times (dM)$. A matriz de rigidez \mathbf{K} é uma matriz bloco em que cada bloco $\mathbf{K}_{IJ} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é calculado como

$$\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{p}_{\lambda_I}^T \Phi_{:,J}, \quad (3.40)$$

enquanto os vetores \mathbf{f}_I que compõem o vetor de força \mathbf{f} são definidos como

$$\mathbf{f}_I = \beta_I. \quad (3.41)$$

Na Equação (3.40), a notação “:” representa a J -ésima coluna da matriz bloco Φ . A quadratura de Gauss-Legendre, apresentada no Apêndice B, é utilizada para resolver as integrais das Equações (3.36) e (3.31) que formam cada bloco \mathbf{K}_{IJ} e cada vetor \mathbf{f}_I , respectivamente. A matriz de rigidez criada é esparsa devido aos suportes compactos das funções utilizadas, porém não é simétrica. Essa assimetria se deve à possibilidade de os tamanhos dos suportes serem diferentes de nó para nó, e especialmente ao fato de que o sistema linear global ainda precisa ser modificado para levar em conta as condições de contorno essenciais.

3.1.6 Aplicação das Condições de Contorno Essenciais

Neste trabalho, o método de colocação do MLS é usado para aplicar as condições de contorno essenciais (LIU, 2009; MIRZAEI, 2015). Isso é necessário devido ao fato de que a propriedade do delta de Kronecker não pode ser garantida. A linha do sistema global

(Equação (3.39)) correspondente ao eixo i de um nó I que pertence à fronteira Γ_u deve ser recalculada com base na Equação (3.15). Considerando λ como a avaliação do ponto em \mathbf{x}_I , isto é, $\lambda = \delta_{\mathbf{x}_I}$, e μ como o deslocamento do nó J , na posição \mathbf{x}_J , tem-se

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}_I) = \sum_{J=1}^N a_J(\delta_{\mathbf{x}_I}) u_i(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}_I}}^T \boldsymbol{\phi} \mathbf{u}_i, \quad (3.42)$$

onde $\bar{u}_i(\mathbf{x}_I)$ é a condição de contorno essencial prescrita no nó I para $i = 1, \dots, d$, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}_I}}^T = [p_{1i}(\mathbf{x}_I) \ p_{2i}(\mathbf{x}_I) \ \dots \ p_{Gi}(\mathbf{x}_I)]$ e $\mathbf{u}_i^T = [u_{1i} \ u_{2i} \ \dots \ u_{Ni}]$.

3.1.7 Obtenção dos Deslocamentos, Deformações e Tensões

A resolução do sistema linear retorna uma boa aproximação dos deslocamentos nos nós (MIRZAEI *et al.*, 2012). Contudo, é possível obter o deslocamento real em um ponto \mathbf{x} a partir de

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N a_J(\delta_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(\mathbf{x}_J) = \mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}}}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}, \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}}}^T = [\mathbf{p}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{p}_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{p}_G(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{d \times dG}$. Para calcular a deformação e a tensão no ponto \mathbf{x} , as Equações (3.12) devem ser utilizadas associadas à Equação (3.37) para obtenção das derivadas de $\mathbf{p}_{\delta_{\mathbf{x}}}$.

3.1.8 Algoritmo do método DMLPG

O Algoritmo 1 apresenta os passos do método DMLPG. A entrada consiste na definição do modelo e das condições de contorno. A discretização é realizada na Linha 1. Na Linha 3, o algoritmo determina os nós, J , que estão dentro dos domínios de suporte de cada nó I , considerando o raio, r_w , da função de peso (Equação (3.27)), e então calcula as matrizes $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ (Equação (3.24)). Nas Linhas 5 a 11, os pontos de integração são criados dentro dos subdomínios de raio r_e e a matriz de rigidez local e o vetor de força local são determinados e montados no sistema global (Equações (3.39) a (3.41)). Se $\mathbf{x}_I \in \Gamma_u$, a condição de contorno essencial é imposta no sistema nas Linhas 12 a 17 (Equação (3.42)). Finalmente, na Linha 19, o sistema linear, $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, é resolvido para obter os deslocamentos nodais, \mathbf{u} (Equação (3.43)).

Algoritmo 1: Método DMLPG.

Input: Domínio Ω ; Contorno Γ ; Número total de nós M ; Número total vetores da base polinomial G ; Raios r_w e r_e .

Output: Deslocamentos aproximados nos nós, \mathbf{u} .

```

1  $\mathcal{M} \leftarrow \text{CriarNós}(M, \Omega, \Gamma)$ 
2 for  $\mathbf{x}_I \in \mathcal{M}$  do
3    $\mathcal{C} \leftarrow \text{EncontrarVizinhos}(\mathcal{M}, \mathbf{x}_I, r_w)$ ; // nós  $J$  com  $w(\|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I\|) > 0$ 
4    $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \leftarrow \text{CalcularMatrizA}^{-1}\mathbf{B}(\mathcal{C}, \mathbf{x}_I, G)$ 
5    $\mathcal{Q} \leftarrow \text{CriarPontosIntegração}(\mathbf{x}_I, r_e, \Gamma)$ 
6   for  $\mathbf{x}_q \in \mathcal{Q}$  do
7      $\mathbf{f}_I \leftarrow \text{CalcularVetorForçaLocal}(\mathbf{x}_q)$ 
8      $\mathbf{K}_{IJ} \leftarrow \text{CalcularMatrizRigidezLocal}(\mathbf{x}_q, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathcal{C})$ ; //  $J$  são os
       vizinhos  $\mathcal{C}$  representados nas colunas da matriz  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 
9     MontarVetorForçaGlobal( $\mathbf{f}_I, \mathbf{f}$ )
10    MontarMatrixRigidezGlobal( $\mathbf{K}_{IJ}, \mathbf{K}$ )
11  end
12  if CondiçãoContornoEssencial( $\mathbf{x}_I$ ) then
13     $\mathcal{L} \leftarrow \text{EixosComCondiçãoContorno}(\mathbf{x}_I)$ 
14    ZerarLinhasSistemaLinear( $\mathcal{L}, \mathbf{f}, \mathbf{K}$ )
15    ImporCondiçãoContornoEssencialVetorForçaGlobal( $\mathbf{x}_I, \mathcal{L}, \mathbf{f}$ )
16    ImporCondiçãoContornoEssencialMatrizRigidezGlobal( $\mathbf{x}_I, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathbf{K}$ )
17  end
18 end
19  $\mathbf{u} \leftarrow \text{ResolverSistemaLinear}(\mathbf{K}, \mathbf{f})$ 

```

3.2 Otimização Topológica com Múltiplos Materiais

Este trabalho utiliza um algoritmo evolutivo, o gBESO, uma extensão do método BESO, que por sua vez é uma modificação do *Evolutionary Structural Optimization* (ESO, Otimização Estrutural Evolucionária). Munk *et al.* (2015) menciona que alguns autores simplificam dizendo que o ESO é como uma abordagem discreta do SIMP. No entanto, Munk *et al.* (2015) defendem que, apesar de a implementação do método mudar pouco, ainda assim permite uma complexidade adicional e eficiência computacional. Afirmam também que o SIMP se preocupa com o valor numérico da sensibilidade, enquanto os algoritmos evolutivos usam uma listagem desse valor com base em sua magnitude. O gBESO trabalha de forma iterativa, semelhante aos métodos anteriores, porém simplifica a atualização do projeto e incrementa gradualmente os valores dos materiais para obtenção do projeto ótimo.

Nesta seção, é abordada uma variação da técnica gBESO, na qual são realizadas modificações para utilizar um método verdadeiramente sem malha como análise numérica, o DMLPG. A Seção 3.2.1 define o problema a ser resolvido. A Seção 3.2.2 elucida como os

múltiplos materiais são tratados. A Seção 3.2.3 modifica a maneira como a matriz dos coeficientes de rigidez elástica é computada na análise numérica, levando em consideração a atualização das variáveis de projeto. A Seção 3.2.4 demonstra o cálculo da sensibilidade, em que esse valor passa por um pós-processamento, explanado na Seção 3.2.5. A Seção 3.2.6 exemplifica como ocorre a atualização do projeto a fim de chegar no projeto ótimo, que é alcançado após a convergência descrita na Seção 3.2.7.

3.2.1 Definição do Problema

Uma formulação geral de um problema de otimização topológica para multimateriais pode ser estruturada como,

$$\underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^M}{\text{minimizar:}} \quad f(\mathbf{y}), \quad (3.44a)$$

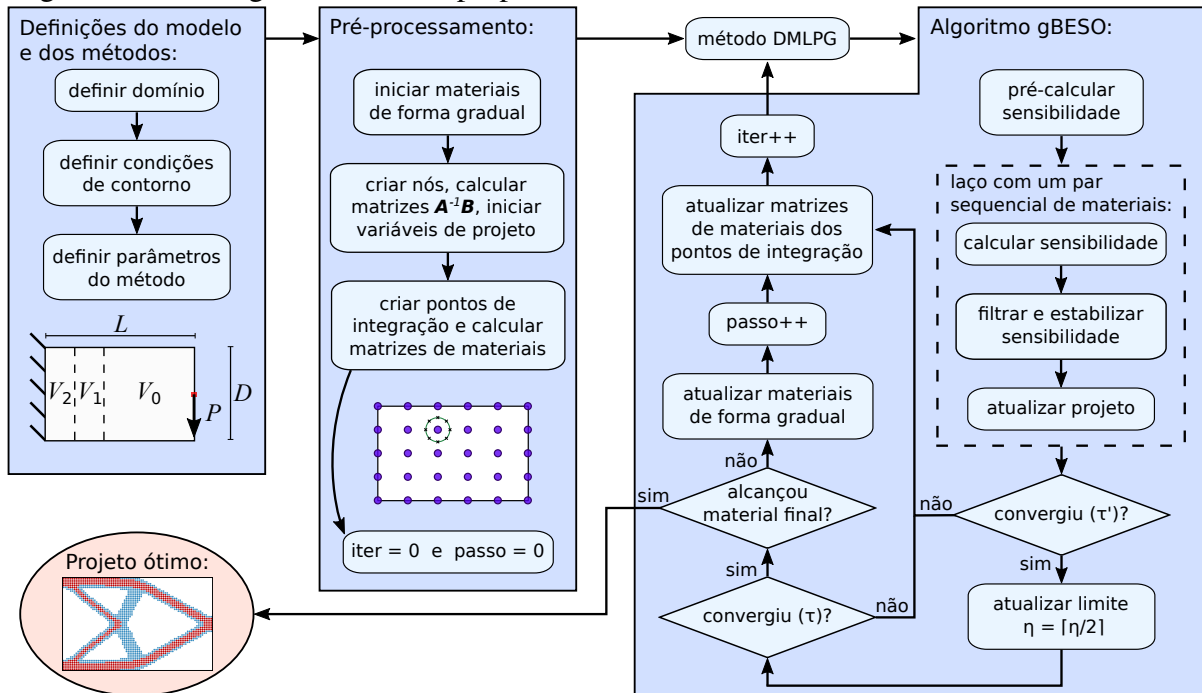
$$\text{restrição: } V_p^* - V_p(\mathbf{y}) = 0, \quad p = \{1, \dots, m - 1\}, \quad (3.44b)$$

onde $f : \mathcal{Y}^M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo, $\mathcal{Y} = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ é a lista de valores possíveis para uma variável de projeto, V_p é o volume do material p , V_p^* é o volume predefinido pelo usuário para o material p , m é o número total de materiais e M é o número total de variáveis de projeto no vetor $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M]^T$. Uma variável de projeto, $y_I = p$, indica que o módulo de elasticidade $E^{(p)}$ é atribuído ao nó I . Sem perda de generalidade, os materiais são ordenados de maneira ascendente com base no valor de E , ou seja, $E^{(0)} < E^{(1)} < \dots < E^{(m-1)}$. Geralmente, quando $E^{(0)}$ é significativamente menor que os outros valores, ele é usado para representar o vazio (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), evitando singularidade na matriz de rigidez (HUANG; XIE, 2009).

O fluxograma da Figura 17 resume a técnica proposta, na qual uma abordagem de otimização topológica multimaterial, gBESO (GHABRAIE, 2015), é adaptada para a utilização de uma abordagem verdadeiramente sem malha no processo de análise numérica. Diversas etapas do método proposto serão abordadas nas seções seguintes com mais profundidade.

Os parâmetros iniciais, ilustrados no fluxograma, são definidos para os dois métodos usados, DMLPG e gBESO. Além disso, é essencial determinar o projeto inicial com suas condições de contorno e as restrições de volume aplicadas. O domínio e sua fronteira são discretizados em um conjunto de nós, aos quais são associados pontos de integração. É possível computar a matriz $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ (Equação (3.25)) em cada nó, uma vez que seu valor não muda no decorrer do método.

Figura 17 – Visão geral da técnica proposta.



Fonte: Elaborada pela autora.

A análise DMLPG inicia a abordagem iterativa retornando os deslocamentos, deformações e tensões em cada nó. Os valores das sensibilidades nos nós são pré-calculados e, em seguida, modificados levando em consideração um par sequencial de materiais (Seção 3.2.4). Um filtro e um processo de estabilização são aplicados para diminuir e até evitar instabilidades numéricas (Seção 3.2.5). Em seguida, a abordagem escolhe pares de nós, em fases sequenciais, cujos materiais são trocados (Seção 3.2.6), e, se o processo de otimização satisfaz todos os critérios de convergência (Seção 3.2.7), o projeto ótimo é alcançado. Se a convergência para o projeto ótimo ainda não for obtida, o algoritmo pode ou não atualizar os materiais gradualmente dependendo de um critério (Seção 3.2.2), contudo a atualização das contribuições para a matriz de rigidez elástica em cada ponto de integração é sempre necessária (Seção 3.2.3), e o processo iterativo continua.

3.2.2 Materiais Graduais

A abordagem gBESO inicializa o módulo de elasticidade de todos os materiais com valores próximos ao módulo de elasticidade do material mais fraco, de modo que o primeiro subproblema de otimização a ser resolvido seja quase convexo (GHABRAIE, 2015). Em seguida, os materiais mais rígidos são gradualmente incrementados e um novo subproblema é resolvido até que o módulo de elasticidade de cada material atinja seu valor verdadeiro. Sempre que um

novo subproblema é iniciado, significa que um novo *passo* é dado no algoritmo, e os valores atribuídos aos materiais mais rígidos devem ser atualizados. Cada passo é constituído de várias *iterações*, que realizam mudanças no projeto até que o subproblema seja convergido.

Considerando o módulo de elasticidade mais rígido, $E^{(m-1)}$, e o menor, $E^{(0)}$, o módulo de elasticidade dos materiais é interpolado em cada passo, s , conforme

$$\begin{aligned} E_{\langle 0 \rangle}^{(m-1)} &= G_0 E^{(0)}, \\ E_{\langle s \rangle}^{(m-1)} &= G_1 E_{\langle s-1 \rangle}^{(m-1)}, \quad s > 0, \\ E_{\langle s \rangle}^{(p)} &= E^{(0)} + \frac{E_{\langle s \rangle}^{(m-1)} - E^{(0)}}{E^{(m-1)} - E^{(0)}} (E^{(p)} - E^{(0)}), \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, m-2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $E_{\langle s \rangle}^{(p)}$ denota o valor do material p no passo s , enquanto que $G_0 > 1$ e $G_1 > 1$ são constantes dadas. De acordo com Ghabraie (2015), G_0 deve ser próximo de 1 para garantir que o primeiro subproblema seja quase convexo.

Nota-se que o valor utilizado para o material mais rígido, $E_{\langle s \rangle}^{(m-1)}$, depende inicialmente, $s = 0$, apenas de E_0 e G_0 . Nos passos seguintes, esse valor depende diretamente do seu valor anterior, $E_{\langle s-1 \rangle}^{(m-1)}$, e de G_1 . O valor do material mais fraco permanece inalterado durante o processo, enquanto os valores dos outros materiais são interpolados. Com base nisso, é possível determinar um valor de G_1 em função do número total de passos, S , utilizando

$$G_1(S) = \left(\frac{E^{(m-1)}}{E^{(0)} G_0} \right)^{\frac{1}{(S-1)}}. \quad (3.46)$$

3.2.3 Matriz de Rigidez Elástica

A variável de projeto, y_I , é definida, determinando qual material será atribuído ao nó I . Para calcular sua matriz de rigidez elástica $\mathbf{D}(y_I)$ (Equação (3.12a)), um esquema de interpolação com os módulos de Young atualizados, $E_{\langle s \rangle}$ (Equação (3.45)), é utilizado. Assim, a interpolação linear entre duas fases sequenciais é dada por

$$E_I(y_I) = E_{\langle s \rangle}^{(p-1)} + (y_I - p + 1)(E_{\langle s \rangle}^{(p)} - E_{\langle s \rangle}^{(p-1)}), \quad (3.47)$$

para $p = 1, \dots, m-1$ e $y_I = p-1$ ou p . Note que os resultados possíveis são $E_{\langle s \rangle}^{(p-1)}$ ou $E_{\langle s \rangle}^{(p)}$.

Há situações em que é necessário calcular a matriz de rigidez elástica para um ponto de integração, como na Equação (3.36). Nesses casos, o módulo de elasticidade, E_q , para o ponto de integração q , é estimado como uma média ponderada dos valores de E nos nós vizinhos,

$$E_q = \frac{\sum_{J=1}^N w(r_J) E_J}{\sum_{J=1}^N w(r_J)}, \quad (3.48)$$

onde w é a função de peso centrada em q (Equação (3.27)) e N é o número de nós dentro do raio de influência r_w . Note que as matrizes de rigidez elástica para cada ponto de integração e para cada nó devem ser atualizadas em todas as iterações, pois as variáveis de projeto estão em constante mudança.

3.2.4 Análise de Sensibilidade

Neste trabalho, a função objetivo é definida como a energia total de deformação, C , que, conforme descrito por Munk *et al.* (2015), a flexibilidade pode ser entendida como a energia total de deformação da estrutura ou como o trabalho externo realizado pelas cargas aplicadas. Ao optar pela primeira definição e expressá-la em função da tensão e da deformação, tem-se

$$f(\mathbf{y}) = C(\mathbf{y}) \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \boldsymbol{\sigma}_I V_I = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathbf{D}(y_I) \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I, \quad (3.49)$$

onde V_I é o volume nodal superestimado e y_I é a variável de projeto associada ao nó I , indicando um dos m materiais possíveis.

Uma aproximação da derivada da energia total de deformação em relação às variáveis de projeto é usada para estimar o valor da sensibilidade. Assim, utilizando a Equação (3.47), essa derivada aproximada é calculada como

$$\alpha_I = \frac{\partial C}{\partial y_I} \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial E_I} \frac{\partial E_I}{\partial y_I} \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I = \frac{E^{(p)} - E^{(p-1)}}{2E_I} \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathbf{D}(y_I) \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I, \quad (3.50)$$

Uma vez que $(\boldsymbol{\varepsilon}_I^T \mathbf{D}(y_I) \boldsymbol{\varepsilon}_I V_I) / (2E_I)$ é independente de p , esse valor é calculado fora do laço dos materiais (Figura 17).

3.2.5 Processo de Filtragem e Estabilização

A instabilidade do tabuleiro de xadrez é bem conhecida e geralmente é possível ser notada em métodos de otimização topológica mais antigos, como em Thomsen (1992). Métodos mais recentes conseguiram superar esse problema usualmente utilizando um tipo de

filtro passa-baixa comum em processamento de imagens (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Essa característica está ilustrada na Figura 18.

Figura 18 – Exemplo da instabilidade do tabuleiro de xadrez.

(a) Com instabilidade.

(b) Sem instabilidade.



Fonte: Sigmund e Petersson (1998).

A técnica de filtragem usada para evitar padrões em tabuleiro de xadrez é baseada na proposta por Ghabraie (2015). Define-se o raio r_{\min} , usado para determinar os nós adjacentes. O novo valor de sensibilidade, $\hat{\alpha}_I$, é calculado como

$$\hat{\alpha}_I = \frac{\sum_{J=1}^{\bar{N}} \omega(r_{IJ}) E_J \alpha_J}{\sum_{J=1}^{\bar{N}} \omega(r_{IJ})}, \quad (3.51)$$

onde

$$\omega(r) = \begin{cases} r_{\min} - r, & \text{se } r < r_{\min}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.52)$$

e $r = r_{IJ}$ é a distância euclidiana entre os nós I e J , com \bar{N} sendo o número de nós que estão dentro da zona de influência de raio r_{\min} .

O processo de estabilização baseado em Huang e Xie (2010b) é aplicado para alcançar uma melhor convergência, reduzindo oscilações que podem ocorrer no processo de otimização (HUANG; XIE, 2010a). A média das informações históricas é calculada, utilizando o valor de sensibilidade da iteração atual, k , e seu valor anterior, como

$$\tilde{\alpha}_I = \frac{\hat{\alpha}_{I,k} + \tilde{\alpha}_{I,k-1}}{2}. \quad (3.53)$$

Este esquema é utilizado em cada iteração, exceto quando um novo passo é iniciado.

3.2.6 Atualização do Projeto

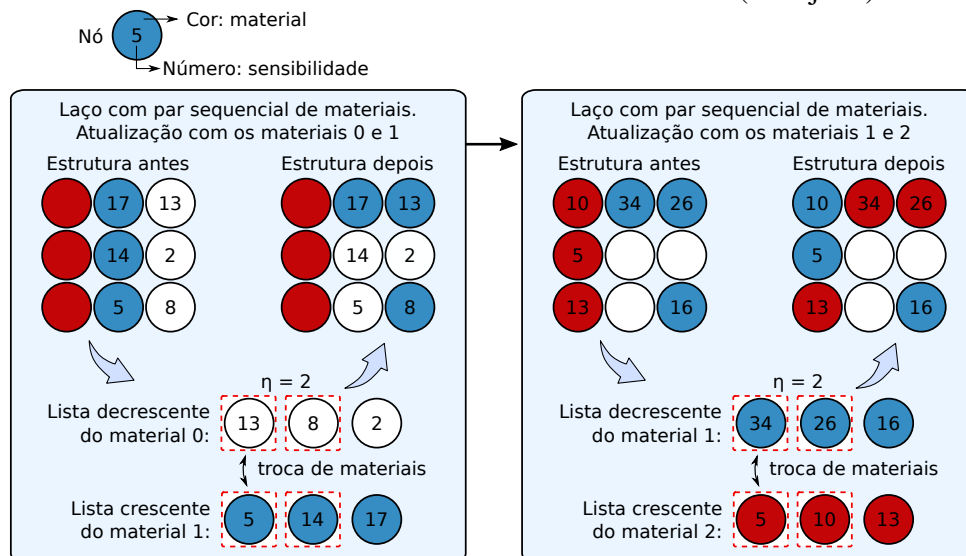
Para alcançar o projeto ótimo, o arranjo dos materiais deve ser atualizado, ou seja, as variáveis de projeto associadas a cada nó devem mudar de acordo com um critério. As variáveis de projeto são inicializadas de forma que as frações volumétricas, V_p^* , sejam atendidas da melhor

forma possível. O volume total da estrutura, $V = \sum_{p=0}^{m-1} V_p^*$, permanece constante ao longo do processo de otimização. Com isso, a atualização do projeto consiste em trocar os materiais atribuídos a pares de nós com materiais diferentes, porém vizinhos na sequência crescente de materiais, de modo que as restrições das frações volumétricas permaneçam as mesmas.

Em cada iteração, uma certa quantidade de nós (limite de movimento), η , em duas fases sequenciais, $p - 1$ e p , deve ser trocada. Para determinar os nós envolvidos no processo de uma iteração pertencente ao passo s , as sensibilidades dos nós de cada fase devem ser ordenadas. As propriedades dos materiais dos nós da fase $p - 1$, que têm os valores de sensibilidade mais altos, mudam para $E_{\langle s \rangle}^{(p)}$. Por outro lado, as propriedades dos materiais dos nós da fase p , que têm os valores de sensibilidade mais baixos, mudam para $E_{\langle s \rangle}^{(p-1)}$.

Para ilustrar o processo de atualização, considere a Figura 19 como exemplo para três materiais, assumindo $\eta = 2$ com as diferenças $E_{\langle s \rangle}^{(1)} - E_{\langle s \rangle}^{(0)} = 1$ e $E_{\langle s \rangle}^{(2)} - E_{\langle s \rangle}^{(1)} = 2$. Na primeira iteração do laço, os materiais 0 e 1 são atualizados (à esquerda). As sensibilidades são ordenadas conforme mostrado nas listas, onde as posições com tracejado vermelho indicam os nós cujos materiais devem ser trocados. Na próxima iteração do laço, o processo se repete, agora operando com os materiais 1 e 2 (à direita). É importante observar que os valores das sensibilidades mudam devido à diferença entre os módulos de Young dos materiais 1 e 2 ser distinta da diferença entre os valores dos materiais 0 e 1.

Figura 19 – Ilustração do processo de atualização com três materiais (0: branco, 1: azul, 2: vermelho) e um limite de movimento $\eta = 2$. Os números em cada posição representam a sensibilidade de um nó. Duas listas são criadas (decrescente e crescente), e os η primeiros nós nas listas têm os seus materiais trocados (tracejado).



Fonte: Elaborada pela autora.

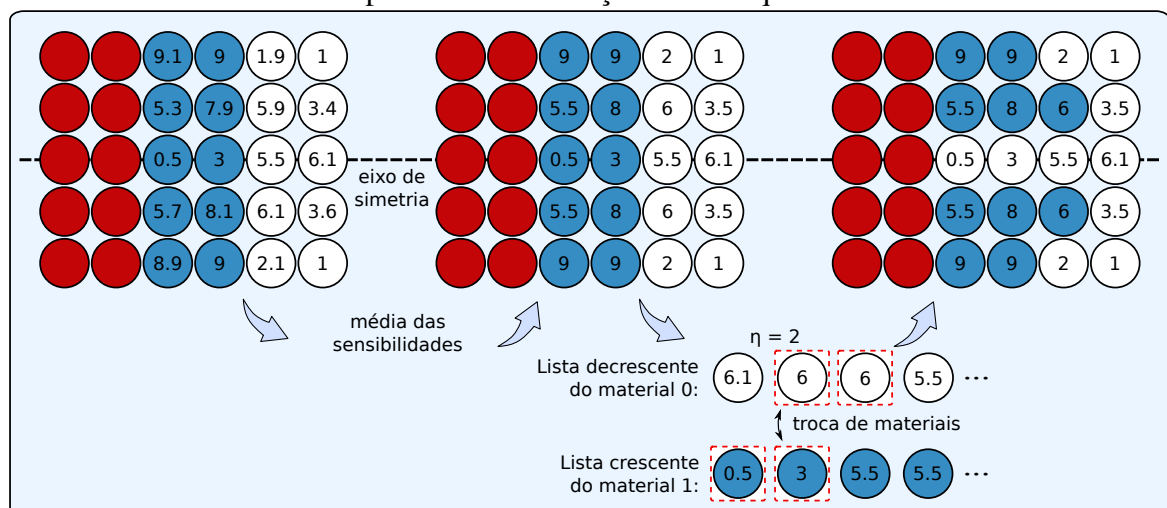
3.2.6.1 Tratamento de Simetria Predefinida

Existem problemas resolvidos por otimização topológica em que se espera resultados simétricos em relação a algum eixo. Em alguns casos, é possível simular apenas a parte simétrica. No entanto, se for necessário produzir toda a estrutura, algumas modificações são necessárias.

É importante notar que podem ocorrer erros numéricos durante o processo. Quando há casos de objetos que possuem simetria em relação a algum eixo, a implementação do método original do gBESO tem a possibilidade de fazer uma média das sensibilidades em posições simétricas, apesar de não ser necessária na maioria dos casos. Contudo, no estudo original, não há consideração para elementos localizados no eixo de simetria.

O método proposto neste trabalho estende essa possibilidade, permitindo a presença de nós na linha do eixo de simetria. Para isso, é crucial garantir que os nós simétricos troquem de material juntos, mesmo que um nó que esteja no eixo de simetria tenha uma sensibilidade melhor. Por exemplo, se faltar uma única vaga para completar uma lista e o próximo colocado possuir um nó simétrico, então o nó em cima do eixo de simetria, que foi incluído por último na lista de troca, deve ser desconsiderado da lista. Esse processo é exemplificado na Figura 20, com a lista 0. Para que essa modificação funcione, η deve ser par.

Figura 20 – Ilustração do processo de atualização para objetos com eixo de simetria. Os nós simétricos têm prioridade em relação aos nós que estão no eixo de simetria.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.2.6.2 Tratamento de Regiões com Materiais Predefinidos

Sigmund (2001) apresentou um algoritmo básico para o método SIMP e examinou a criação de elementos passivos para predefinir furos no projeto. Para isso, um nó que pertence ao furo teria sua variável de projeto sempre atribuída ao valor mínimo, ou seja, representaria um nó sem material em todas as iterações. Com essa ideia, é possível expandir essa abordagem para atribuir um material específico em casos de múltiplos materiais.

Para manter a restrição durante todo o processo, é necessário inicialmente definir a região e atribuir às variáveis de projeto dos nós passivos dentro da área o valor que representa o material requisitado, p . No processo iterativo, o nó só pode ser elegível para entrar na lista de troca de materiais se não for um nó passivo. É preciso considerar o volume dessa região na fração de volume prescrita, V_p^* .

3.2.7 Critério de Convergência

Uma variação da função objetivo é adotada para o critério de convergência (HUANG; XIE, 2009). Neste caso, um erro é calculado como

$$ER = \frac{\left| \sum_{i=1}^{\zeta} (C_{k-i+1} - C_{k-\zeta-i+1}) \right|}{\sum_{i=1}^{\zeta} C_{k-i+1}} \quad (3.54)$$

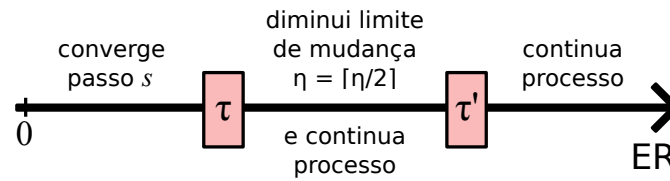
onde k é o número da iteração atual e ζ define as iterações em que a função objetivo é analisada.

Um procedimento de término em duas etapas para um passo s é estabelecido por Ghabraie (2015), em que são utilizados dois limiares, τ e τ' (Figura 21). O limite de movimento é reduzido para $\eta = \lceil \eta/2 \rceil$ quando o método está próximo da convergência, ou seja, $\tau < ER \leq \tau'$. A convergência de um subproblema é alcançada quando $ER \leq \tau$. Se o material utilizado no passo atual for o prescrito, ou seja, não precisa mais ser aumentado gradualmente, isso significa que o subproblema atual e o problema global convergiram. Vale ressaltar que a convergência é alcançada quando a energia total de deformação se estabiliza por 2ζ iterações.

3.3 Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentados os métodos DMLPG e gBESO, incluindo as modificações necessárias para que funcionem em conjunto. Em relação à primeira abordagem,

Figura 21 – Processo de verificação da convergência de um passo s usando dois limiares, τ e τ' .



Fonte: Elaborada pela autora.

destaca-se o desenvolvimento da formulação fraca local sobre subdomínios locais associados aos nós que discretizam o domínio. A abordagem GMLS foi utilizada para aproximar essa forma fraca local, eliminando a necessidade de criação de funções de forma complicadas e necessitando trabalhar apenas com polinômios. As condições de contorno essenciais foram aplicadas diretamente pelo método de colocação MLS. Esse procedimento não faz uso de nenhuma malha em qualquer etapa do seu desenvolvimento, sendo classificado como um método verdadeiramente sem malha. Além disso, as tensões e deformações obtidas apresentam suavidade em todo o domínio, característica comum a métodos sem malha (UPADHYAY *et al.*, 2021).

A parte de otimização topológica com múltiplos materiais foi desenvolvida com base em uma variação proposta do método gBESO. Partes do método original foram mantidas, como a interpolação gradual dos materiais a cada novo passo. No entanto, foi proposto calcular G_1 em função do número total de passos, baseando-se na abordagem gradual do método. Para integrar a análise sem malha ao método, foi necessário modificar a forma como o DMLPG recupera o valor do módulo de Young em um ponto de integração. A função objetivo foi alterada para usar a energia total de deformação em função das tensões e deformações, o que exigiu adaptações na sensibilidade. A forma de filtragem também foi modificada, pois o método original operava em duas etapas (sensibilidade dos elementos para os nós e depois dos nós para os elementos), e agora só existe uma única etapa. Além disso, foi adicionado um processo de estabilização do valor da sensibilidade, comumente utilizado em métodos baseados em BESO. O cerne do método, a atualização do projeto, foi levemente alterado com a inclusão de tratamentos para simetria predefinida e regiões com materiais predefinidos. O critério de convergência do BESO, mais eficiente que o original, foi escolhido para ser usado em conjunto com o critério de convergência de duas etapas do gBESO. O próximo capítulo apresentará uma série de testes que demonstram a viabilidade da combinação proposta dos métodos DMLPG e gBESO.

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os testes realizados para validar a combinação dos métodos DMLPG e gBESO em problemas de otimização topológica multimaterial. O algoritmo foi implementado em C++ utilizando a biblioteca Eigen (GUENNEBAUD *et al.*, 2021) para lidar com operações de matriz e resolver sistemas lineares. Os parâmetros comuns a todos os exemplos são definidos na Seção 4.1. Em seguida, diversos exemplos são estudados. O teste da viga em balanço é apresentado na Seção 4.2. Na Seção 4.3, os testes de uma viga simplesmente apoiada são mostrados. O efeito do projeto inicial é estudado na Seção 4.4, por meio de um teste da viga Messerschmitt-Bolkow-Blohm (MBB). Na Seção 4.5, uma simplificação de uma ponte é examinada. Na Seção 4.6, uma viga em formato L é analisada. Por fim, as considerações finais são elaboradas na Seção 4.7. É importante notar que os resultados são considerados válidos quando são equivalentes aos encontrados na literatura (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001; LI; ATLURI, 2008). Os testes de custo computacional foram realizados com 11ª Gen Intel® Core™ i7-11800H @ 2.30GHz × 16, 16.0GB RAM, utilizando o sistema operacional Ubuntu 21.10.

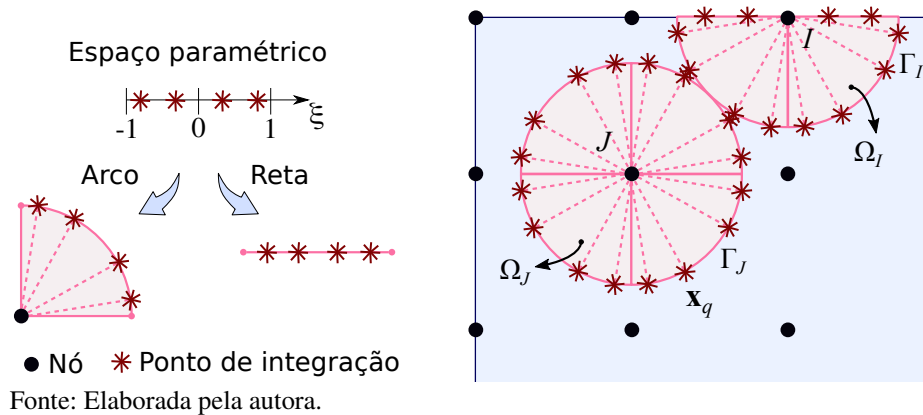
4.1 Definição dos Parâmetros

Os testes apresentados são todos bidimensionais no estado plano de tensão, e alguns parâmetros são comuns a todos eles. No caso do método DMLPG, os seguintes parâmetros são usados como entrada: a ordem do polinômio é $g = 2$, para definir a base polinomial canônica que é modificada de acordo com a Equação (3.1.5); o parâmetro que controla a forma da função Gaussiana é $\epsilon = 4$; os raios são $r_w = 4d_{\min}$ e $r_e = 0,7d_{\min}$, onde d_{\min} é a distância euclidiana mínima entre dois nós. Vale ressaltar que, se a matriz \mathbf{A} for singular (Equação (3.25)), o raio r_w é aumentado em 10% (TALEEI; DEGHAN, 2014). Todos os materiais consideram $\nu = 0,3$. No método gBESO, os valores fixados são: o raio para o filtro é $r_{\min} = 3d_{\min}$; o número de iterações para convergência é $2\zeta = 12$; e os limiares de convergência são $\tau' < 5 \times 10^{-4}$ e $\tau < 10^{-4}$. Com base nos experimentos de Ghabraie (2015), adotou-se $G_0 = 1,05$. As restrições de volume são aplicadas de forma que os materiais fiquem na quantidade mais próxima do volume prescrito e preencham toda uma coluna, ou linha, do modelo.

Uma quadratura de Gauss-Legendre foi utilizada para resolver as integrais nas Equações (3.36) e (3.31), que são realizadas apenas ao longo da fronteira do domínio e do subdomínio. Notar que não há integrais de subdomínio uma vez que não é considerada força de

corpo. Um espaço paramétrico, ξ , é definido para curvas (Figura 22), que representam uma linha ou arco de no máximo 90° do subdomínio, com quatro pontos de Gauss criados em cada espaço paramétrico. O Apêndice B apresenta mais detalhes sobre o processo de integração numérica.

Figura 22 – O segmento de reta criado pela interseção entre o subdomínio (Ω_I) e a fronteira do corpo (Γ) pode ser usada para criar os pontos de integração (x_q) na fronteira Γ . Cada subdomínio é dividido em setores circulares de ângulo 90° , no máximo, onde os pontos de integração podem ser criados na fronteira do subdomínio, como em Γ_{I0} e Γ_J . Cada espaço de arco de circunferência e segmento de reta são parametrizados como um domínio linear com o espaço paramétrico $-1 \leq \xi \leq 1$.



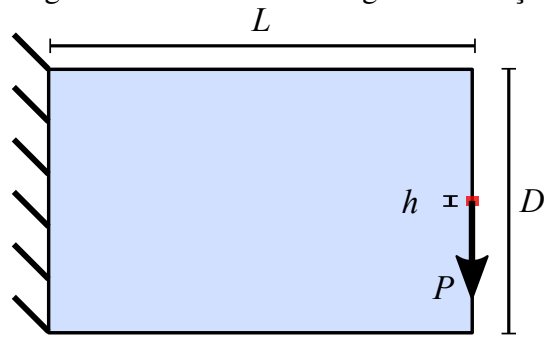
4.2 Viga em Balanço

A Figura 23 apresenta o problema da viga em balanço, exibindo o domínio de projeto, a carga aplicada e as condições de contorno. As dimensões são $L = 0,08\text{m}$ e $D = 0,05\text{m}$, com uma força aplicada de $P = 3000\text{N}$ distribuída sobre uma região de $h = 0,001\text{m}$ multiplicada pela espessura de $0,001\text{m}$. Nas três subseções seguintes, a otimização topológica da viga em balanço é realizada para três diferentes composições de materiais: dois materiais, dois materiais e o vazio, e cinco materiais. Em seguida, o tempo computacional dos exemplos é analisado.

4.2.1 Viga em Balanço com Dois Materiais

A discretização utilizada neste exemplo para o método proposto foi de 81×51 nós. O limite de movimento é determinado como uma porcentagem do número total de nós, resultando em $\eta = 0,005M = 20$ nós. Os módulos de Young dos materiais são $E^{(0)} = 30\text{GPa}$ e $E^{(1)} = 200\text{GPa}$, e os volumes predefinidos são aproximadamente $V_0^* \approx 60\%$ e $V_1^* \approx 40\%$, respectivamente. O valor de $G_1 = 1,59$ foi calculado a partir de $S = 5$.

Figura 23 – Problema da viga em balanço.



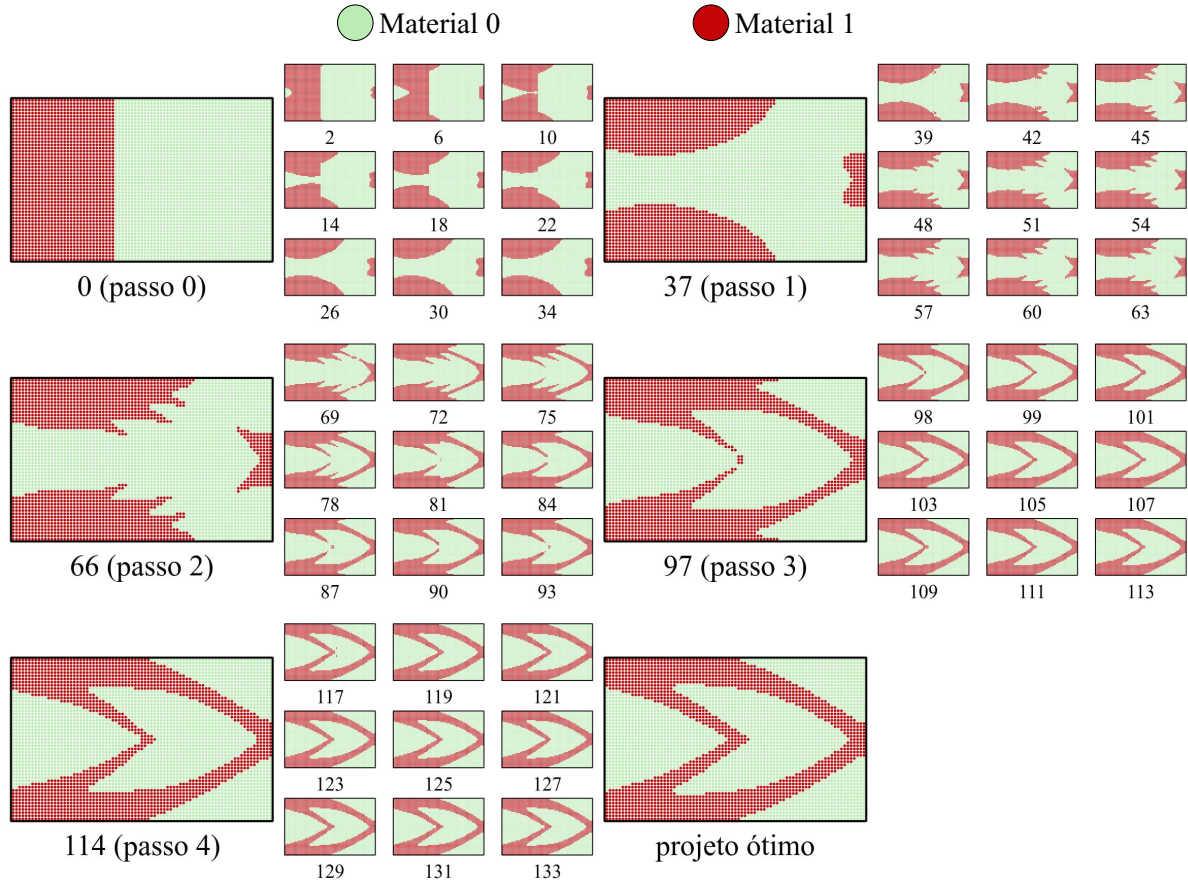
Fonte: Elaborada pela autora.

Para demonstrar o funcionamento do método, a Figura 24 ilustra todos os passos do teste, assim como algumas das iterações entre os passos. É possível notar uma mudança mais significativa nos passos iniciais em comparação com os passos finais, devido à aproximação da convergência. Por exemplo, ao comparar a diferença entre a estrutura inicial e a do início do passo 2 com a diferença entre a estrutura do início do passo 3 e o projeto ótimo, nota-se uma movimentação maior do material no primeiro caso. Também é perceptível a convergência dos subproblemas, que deve ocorrer nas $2\zeta = 12$ últimas iterações entre os passos, como nas iterações 87, 90, 93 e 97, em que a mudança ocorre especialmente na área central do domínio. Em outros casos, essa diferença é pouco perceptível.

O histórico da função objetivo durante o processo de otimização é mostrado na Figura 25. As quedas acentuadas no final de cada passo ocorrem devido ao fato de que o material mais rígido recebe um acréscimo na rigidez na etapa de aumento gradual, como mostrado por $E_{<s>}^{(1)}$ no topo do gráfico, ou seja, aumentando a rigidez da estrutura e diminuindo a energia total de deformação. A linha contínua indica como seriam os valores da função objetivo se o módulo de elasticidade original fosse usado. A linha pontilhada, por outro lado, indica os valores da função objetivo com os valores graduais. No entanto, é possível observar que, na etapa final, ambas as linhas atingem o mesmo valor.

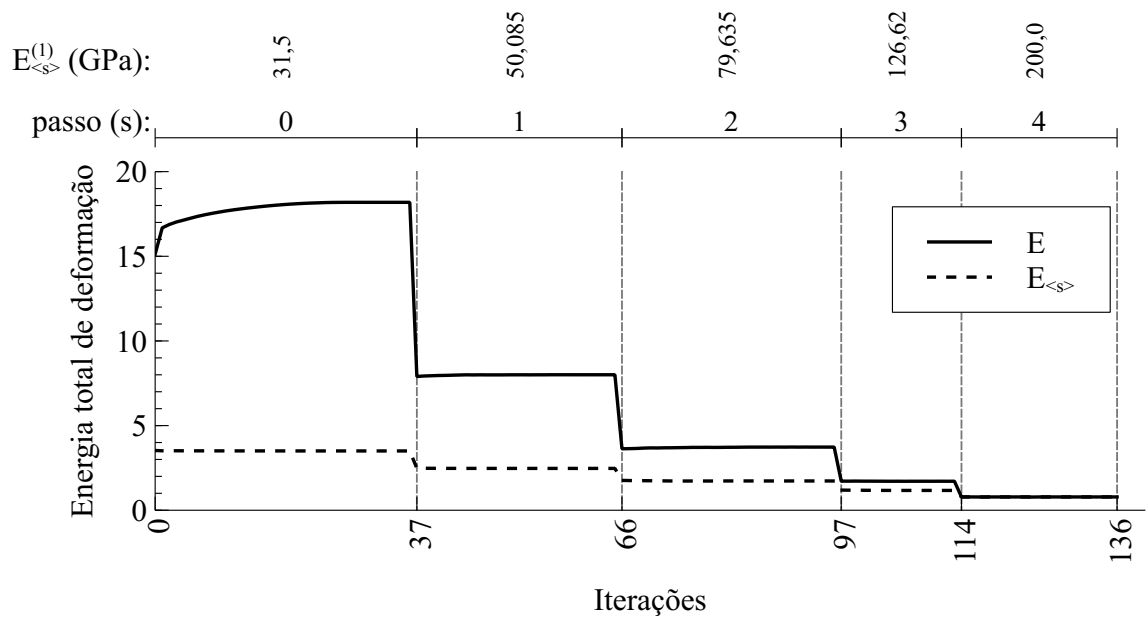
Para permitir a comparação do método proposto com um algoritmo baseado em MEF, uma implementação em MATLAB de Ghabraie (2015) foi utilizada. A discretização do modelo foi de 80×50 elementos, permitindo uma equivalência em número de nós com o método sem malha. Em ambos os testes, são utilizados os mesmos valores graduais, G_0 e G_1 , bem como a proporção de $\eta = 0,005M = 20$ elementos. A distribuição geral de material em ambos os métodos é semelhante, como notado nas Figuras 26a e b. Apesar das pequenas diferenças, esses projetos também são semelhantes a outro resultado apresentado por Bendsøe e Sigmund (1999) (Figura 26c), embora o método e os parâmetros sejam diferentes.

Figura 24 – Passos e amostras das iterações entre os passos para o problema da viga em balanço com dois materiais.



Fonte: Elaborada pela autora.

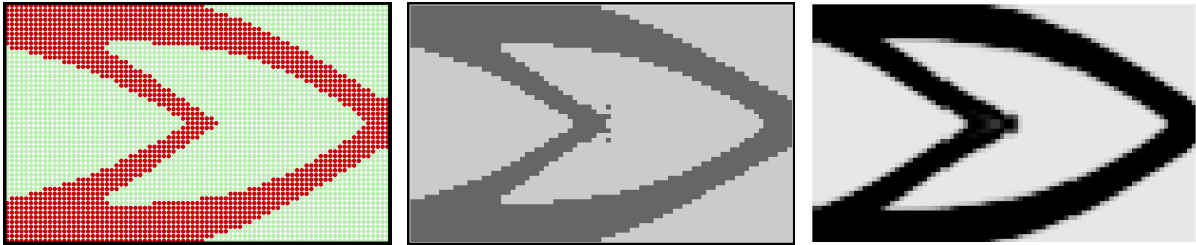
Figura 25 – Histórico da função objetivo durante o processo de otimização na resolução do problema da viga em balanço com dois materiais.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 26 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga em balanço com dois materiais.

- (a) Projeto ótimo com 81×51 nós e $\eta = 20$.
 (b) Projeto ótimo baseado em MEF de Ghabraie (2015) com 80×50 elementos e $\eta = 20$.
 (c) Projeto ótimo de Bendsøe e Sigmund (1999).

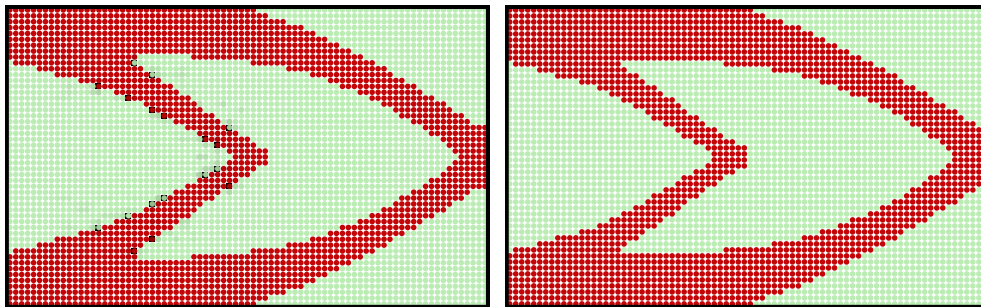


Fonte: Elaborada pela autora e extraída de Bendsøe e Sigmund (1999).

O algoritmo que trata a simetria foi utilizado no exemplo apresentado. No entanto, é interessante analisar o teste sem esse tratamento, como ilustrado na Figura 27. Observa-se que o exemplo com a discretização ímpar, isto é, que possui nós sobre o eixo de simetria, resultou em uma solução final não simétrica, evidenciada por uma borda preta nos nós com falha, contudo não impactou significativamente a topologia (Figura 27a). Por outro lado, o exemplo com discretização par não apresentou problemas (Figura 27b).

Figura 27 – Testes para o problema da viga em balanço com dois materiais sem aplicar o algoritmo de tratamento de simetria. Os nós ressaltados não têm as variáveis de projeto simétricas.

- (a) Teste com 81×51 nós e $\eta = 20$.
 (b) Teste com 80×50 nós e $\eta = 20$.



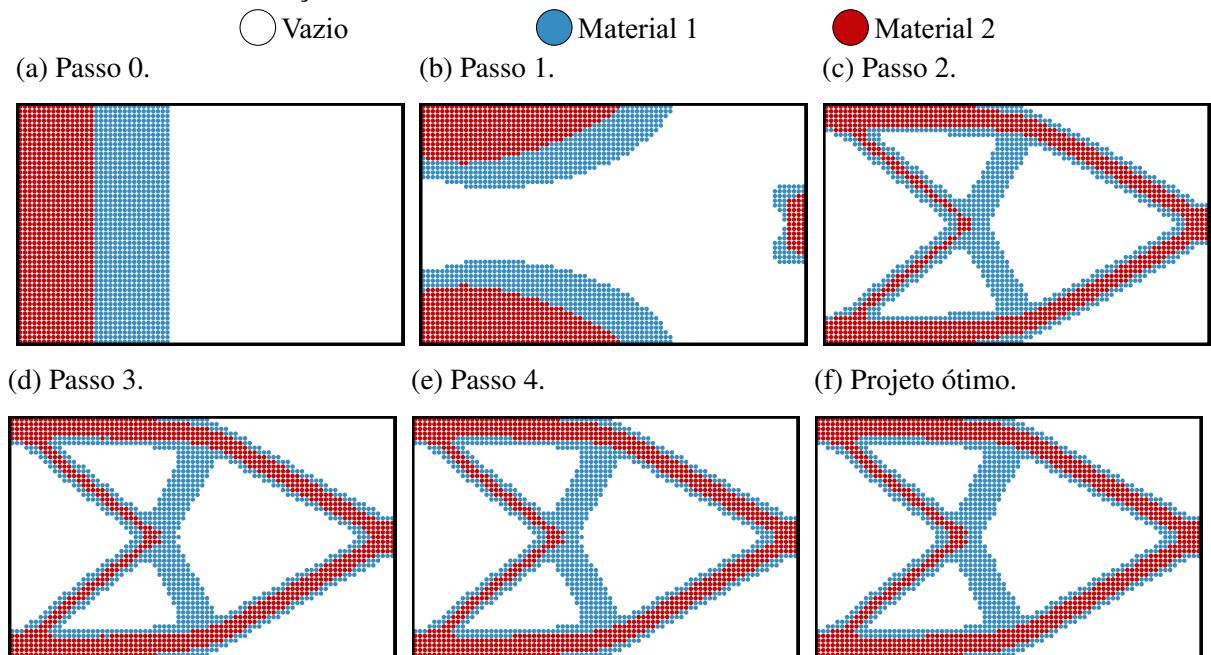
Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.2 Viga em Balanço com Dois Materiais e o Vazio

Os módulos de elasticidade dos três materiais (vazio, material 1 e material 2) são, respectivamente, $E^{(0)} = 1\text{kPa}$, $E^{(1)} = 30\text{GPa}$ e $E^{(2)} = 200\text{GPa}$, e seus volumes prescritos são $V_0^* \approx 60\%$, $V_1^* \approx 20\%$ e $V_2^* \approx 20\%$. O valor de $G_1 = 117,48$ é maior do que no exemplo anterior, apesar de $S = 5$, devido à maior diferença entre $E^{(0)}$ e $E^{(2)}$. Os passos da otimização são ilustrados na Figura 28 com uma discretização de 81×51 nós e $\eta = 0,005M = 20$ nós.

A Figura 29 é o equivalente da Figura 25. No entanto, neste caso, como a diferença entre o material mais rígido e o material menos rígido é muito grande, foi utilizada uma escala logarítmica no eixo vertical. Isso permite observar as quedas da energia total de deformação no final de cada etapa. Novamente, o valor da função objetivo que poderia ser alcançado usando o valor original do módulo de Young (linha sólida) e o resultado usando os valores graduais (linha tracejada) são mostrados

Figura 28 – Passos para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio com discretização de 81×51 nós.

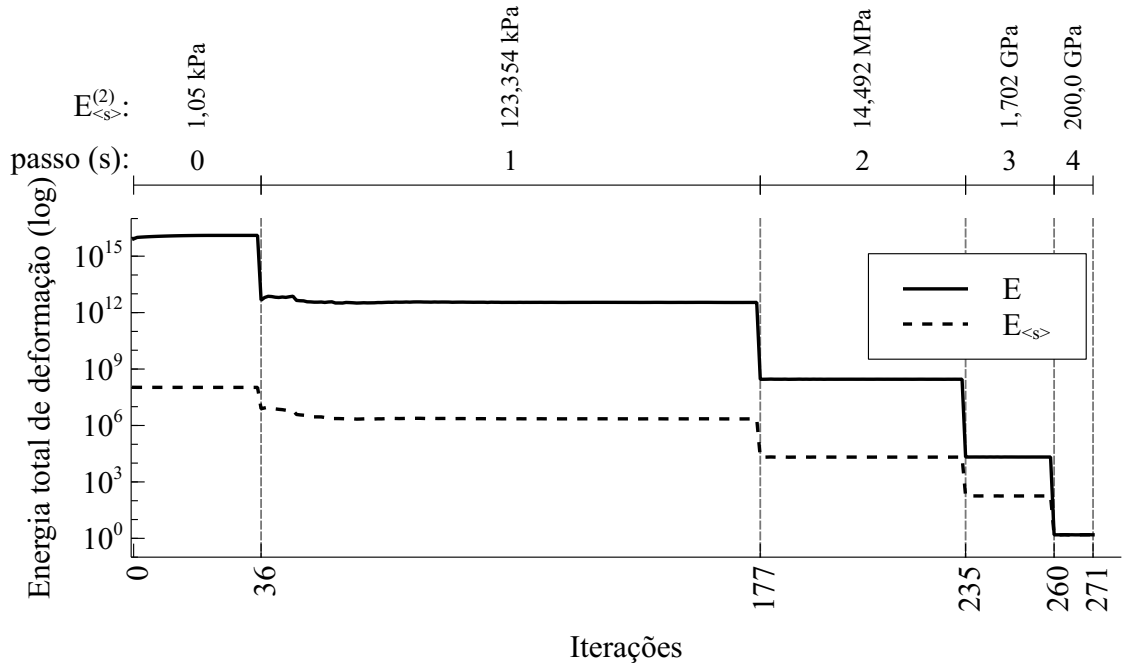


Fonte: Elaborada pela autora.

O problema foi analisado com mais duas discretizações para ver como a densidade de nós afeta a distribuição ótima de material: 65×41 , 97×61 . Os resultados mostrados na Figura 30 apresentaram projetos ótimos semelhantes. A Figura 31 exhibe resultados alcançados por outros métodos para um problema de dois materiais e o vazio, porém podem ter especificações de materiais diferentes. Apesar disso, é possível verificar que os resultados obtidos pelo método proposto são possíveis de serem obtidos.

Para demonstrar a importância do algoritmo de tratamento da simetria em casos que envolvem nós em cima de um eixo de simetria, apresenta-se o teste mostrado na Figura 32a. O problema ocorre devido a erros numéricos que resultam em sensibilidades desiguais nos nós simétricos, podendo escolher momentos diferentes para a troca de material. O acúmulo desses erros pode levar a resultados completamente assimétricos. Por outro lado, o exemplo com um número par de nós permaneceu simétrico (Figura 32b).

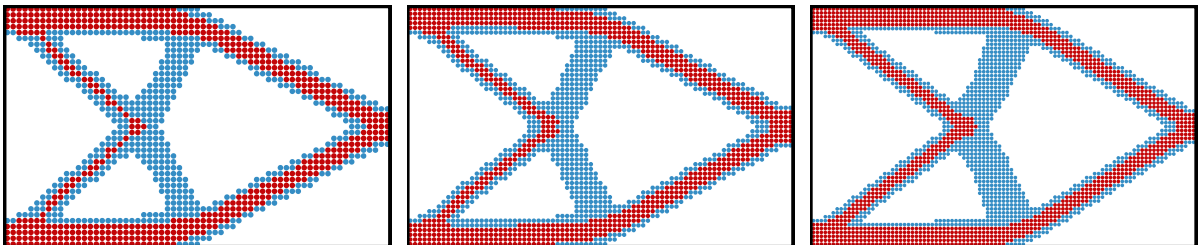
Figura 29 – Histórico da função objetivo durante o processo de otimização na resolução do problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 30 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio.

- (a) Projeto ótimo com 65×41 nós e $\eta = 14$. (b) Projeto ótimo com 81×51 nós e $\eta = 20$. (c) Projeto ótimo com 97×61 nós e $\eta = 30$.

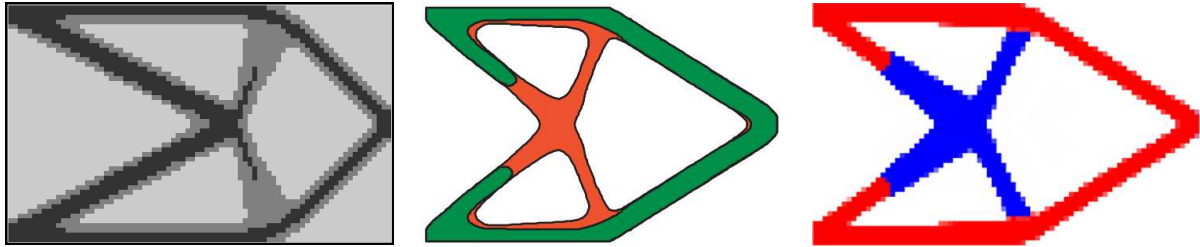


Fonte: Elaborada pela autora.

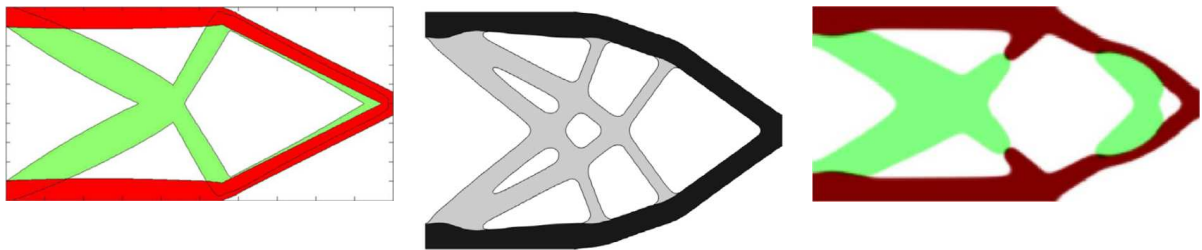
O tratamento de simetria também pode ser analisado quando há cargas aplicadas de forma assimétrica (Figura 33). Foram usados os mesmos valores definidos anteriormente em conjunto com a definição dada para calcular a proporção h_1 . Apesar de ter valores da função objetivo, deslocamento vertical máximo e iterações próximos, como mostra a Tabela 2, os projetos ótimo são bem diferentes. Além que, o resultado do teste que usa o tratamento de simetria é similar aos resultados anteriores.

Figura 31 – Resultados de outras técnicas para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio.

- (a) Projeto ótimo baseado em MEF de Ghabraie (2015) com 80×50 elementos e $\eta = 20$. (b) Projeto ótimo de Guo *et al.* (2014b). (c) Projeto ótimo de Long *et al.* (2018).



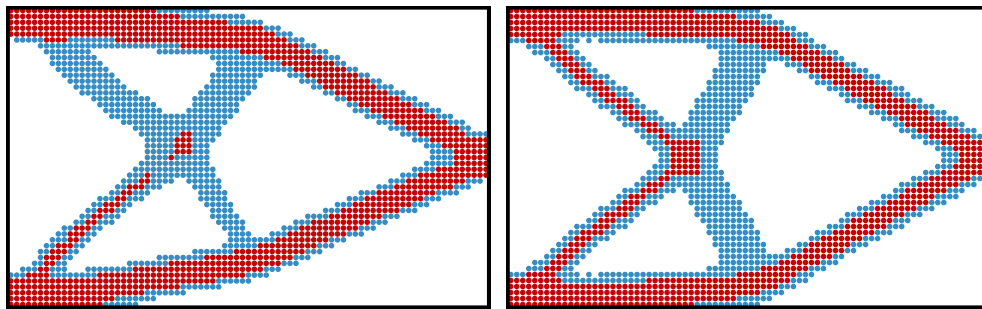
- (d) Projeto ótimo de Zhang *et al.* (2018). (e) Projeto ótimo de Huang e Li (2021). (f) Projeto ótimo de Jiang *et al.* (2023).



Fonte: Elaborada pela autora e extraída de Guo *et al.* (2014b), Long *et al.* (2018), Zhang *et al.* (2018), Huang e Li (2021), Jiang *et al.* (2023).

Figura 32 – Testes para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio sem aplicar o algoritmo de tratamento de simetria.

- (a) Teste com 81×51 nós e $\eta = 20$. (b) Teste com 80×50 nós e $\eta = 20$.



Fonte: Elaborada pela autora.

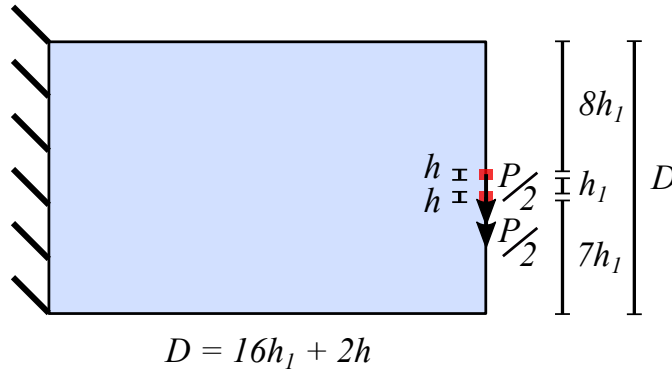
Tabela 2 – Total de iterações, energia total de deformação, deslocamento vertical máximo para os exemplos do problema da viga em balanço com carga aplicada de forma assimétrica.

Viga em balanço	Iterações	Energia total de deformação	Deslocamento vertical máximo (m)
Com tratamento de simetria	382	1,5993	-0,00109
Sem tratamento de simetria	313	1,6453	-0,00112

Fonte: Elaborada pela autora.

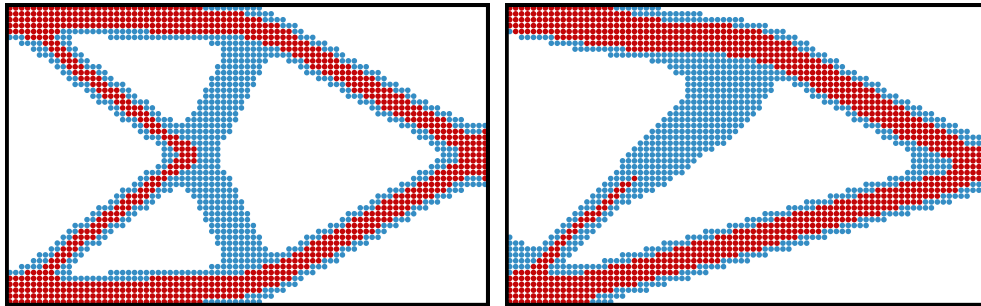
Figura 33 – Testes para o problema da viga em balanço com dois materiais e o vazio com cargas assimétricas em relação ao eixo de simetria com 81×51 nós e $\eta = 20$.

(a) Problema com cargas assimétricas.



(b) Com tratamento de simetria.

(c) Sem o tratamento de simetria.



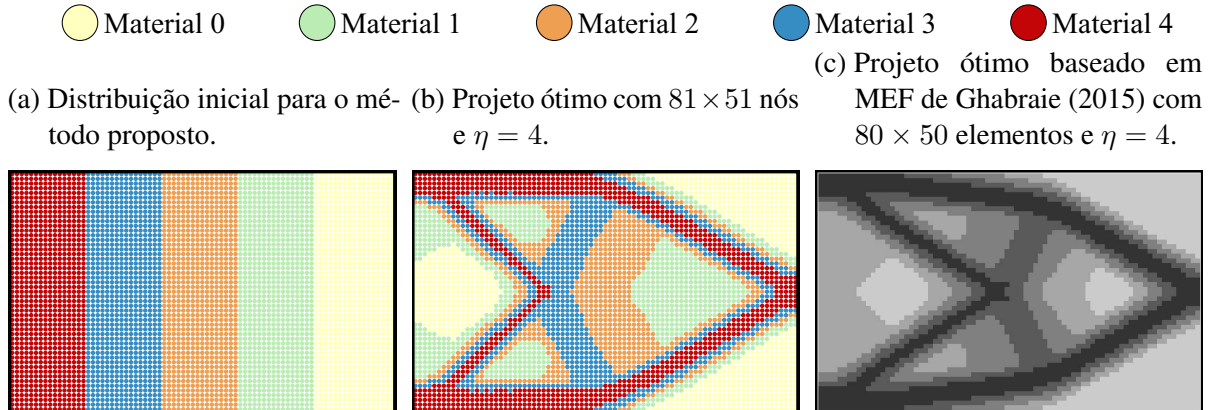
Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.3 Viga em Balanço com Cinco Materiais

Nesta seção, a otimização topológica sem malha proposta é aplicada a uma viga em balanço com cinco materiais. Os módulos de Young dos cinco materiais são $E^{(0)} = 20\text{MPa}$, $E^{(1)} = 200\text{MPa}$, $E^{(2)} = 2\text{GPa}$, $E^{(3)} = 20\text{GPa}$ e $E^{(4)} = 200\text{GPa}$, enquanto que o volume prescrito de cada material é aproximadamente 20%. Para comparar os resultados do método proposto com os do método de Ghabraie (2015), uma discretização de 81×51 nós foi utilizada, equivalente a uma discretização por MEF com 80×50 elementos, adotando $\eta = 0,001M = 4$ em ambos os casos. O valor de $G_1 = 9,88$ foi escolhido de forma que o procedimento gradual demandasse cinco etapas, ou seja, $S = 5$. A distribuição inicial do método proposto é ilustrada na Figura 34a. Os resultados, conforme mostrado na Figura 34, revelam características semelhantes.

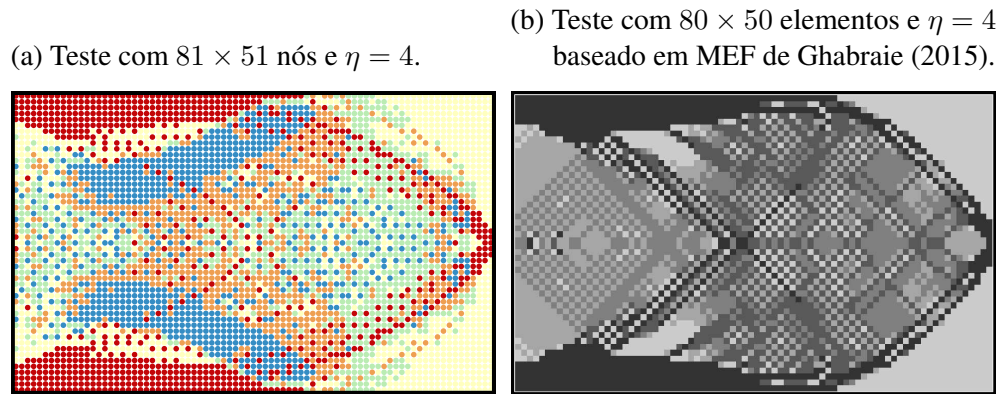
A Figura 35 apresenta o resultado do teste anterior sem a aplicação do filtro na sensibilidade. É possível observar claramente o padrão de tabuleiro de xadrez no teste com o MEF. No entanto, Yang *et al.* (2017) denominou o fenômeno que ocorre no exemplo sem malha como sendo tabuleiro de xadrez com estado pontual, uma vez que os materiais ficam mais dispersos.

Figura 34 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga em balanço com cinco materiais.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 35 – Testes para o problema da viga em balanço com cinco materiais sem aplicação do filtro na sensibilidade.



Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.4 Tempo Computacional

O tempo computacional para criação dos projetos ótimos do problema da viga em balanço são mostrados na Tabela 3. Pode-se observar que um aumento no número de nós ou no número de materiais leva a um aumento no tempo.

Tabela 3 – Total de iterações e tempo computacional para os exemplos do problema da viga em balanço.

Viga em balanço	Nós	Iterações	Tempo (s)
Dois materiais	81×51	136	153,704
Dois materiais e o vazio	65×41	254	128,989
	81×51	271	280,565
	97×61	233	456,456
Cinco materiais	81×51	402	423,701

Fonte: Elaborada pela autora.

4.3 Viga Simplesmente Apoiada

O problema de uma viga simplesmente apoiada é otimizada para dois casos: um material e o vazio, e dois materiais e o vazio. A Figura 36a mostra o modelo completo da viga, porém, devido à simetria, é considerada metade da estrutura com as condições de contorno apropriadas, sendo ilustrada pela Figura 36b. As dimensões indicadas e a carga são: $L/2 = 0,7\text{m}$, $D = 0,7\text{m}$ e a força aplicada $P/2 = 40000\text{N}$ é distribuída sobre uma região de $l/2 = 0,001\text{m}$ vezes a espessura de $0,01\text{m}$.

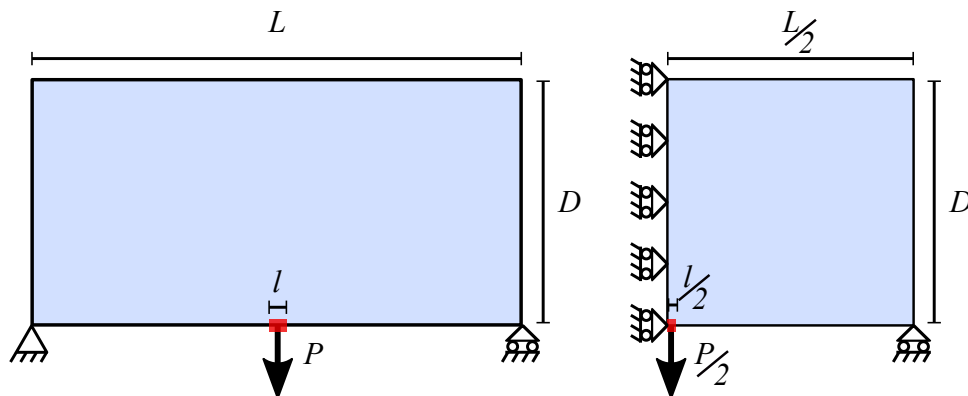
4.3.1 Viga Simplesmente Apoiada com Um Material e o Vazio

O exemplo considerado possui um vazio e um material com $E^{(0)} = 1\text{kPa}$, $E^{(1)} = 140\text{GPa}$, $V_0^* \approx 60\%$ e $V_1^* \approx 40\%$. Os parâmetros foram $S = 10$, levando a $G_1 = 8$ e $\eta = 0,005M = 26$ nós ou $\eta = 25$ elementos, usado na comparação do método sugerido com o algoritmo de MEF baseado em Ghabraie (2015) (Figura 37c). Os testes tiveram discretizações de 71×71 nós e 70×70 elementos, respectivamente. Os resultados exibem similaridade topológica inclusive com outro exemplo da literatura, como mostrado na Figura 37.

Figura 36 – Problema da viga simplesmente apoiada.

(a) Modelo completo.

(b) Metade simétrica do modelo.



Fonte: Elaborada pela autora.

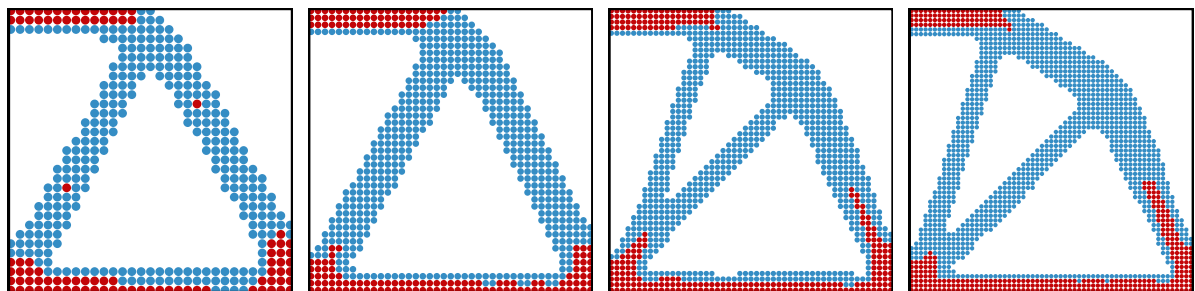
4.3.2 Viga Simplesmente Apoiada com Dois Materiais e o Vazio

Os módulos de elasticidade utilizados são $E^{(0)} = 1\text{kPa}$, $E^{(1)} = 70\text{GPa}$ e $E^{(2)} = 140\text{GPa}$, com as respectivas frações volumétricas $V_0^* \approx 60\%$, $V_1^* \approx 30\%$ e $V_2^* \approx 10\%$. Os parâmetros graduais são os mesmos do exemplo anterior. Os passos do processo de otimização com a discretização de 71×71 nós são mostrados na Figura 38.

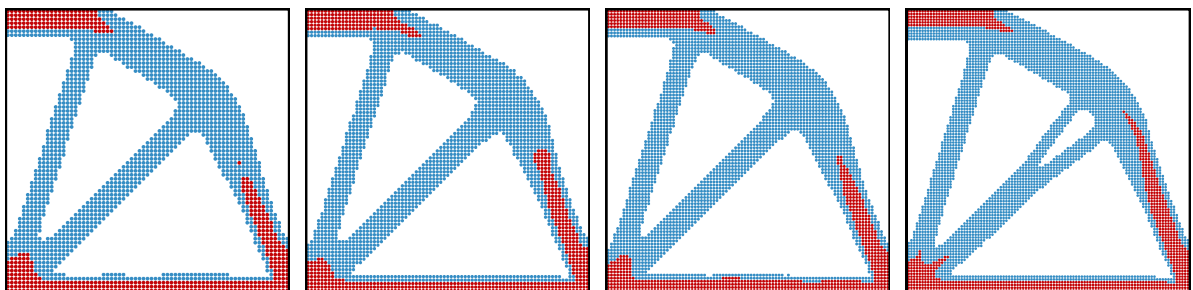
Foram consideradas diversas discretizações para demonstrar a sua influência no projeto final obtido com o método. Os resultados mostrados na Figura 39 indicam que diferentes discretizações podem resultar em projetos distintos. Geralmente, uma discretização mais fina tem maior probabilidade de criar um maior número de furos na estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2004b). No entanto, as discretizações de 61×61 até 91×91 apresentaram resultados semelhantes.

Figura 39 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio.

(a) Projeto ótimo com 31×31 nós e $\eta = 5$. (b) Projeto ótimo com 41×41 nós e $\eta = 9$. (c) Projeto ótimo com 51×51 nós e $\eta = 14$. (d) Projeto ótimo com 61×61 nós e $\eta = 19$.



(e) Projeto ótimo com 71×71 nós e $\eta = 26$. (f) Projeto ótimo com 81×81 nós e $\eta = 33$. (g) Projeto ótimo com 91×91 nós e $\eta = 42$. (h) Projeto ótimo com 101×101 nós e $\eta = 52$.



Fonte: Elaborada pela autora.

A Tabela 4 exibe o número de iterações e a função objetivo para todas as discretizações estudadas na Figura 39. As duas primeiras discretizações apresentam um valor de função objetivo maior do que as demais, o que é de se esperar, uma vez que apresentam uma estrutura com menos furos. Os menores valores ocorrem com as discretizações 51×51 e 71×71 , contudo, o número de iterações da primeira é maior do que o da segunda, mostrando que a estabilização da sensibilidade não remove completamente as oscilações durante a convergência.

A Figura 40 mostra os resultados obtidos com outras técnicas em comparação com o método proposto, apresentando o modelo completo da estrutura, no qual o resultado foi espelhado. Apesar de não garantir que os dados utilizados sejam iguais, os resultados são, em sua maioria, similares.

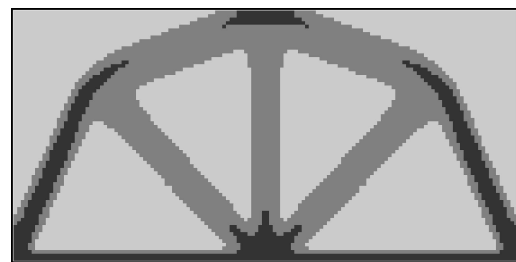
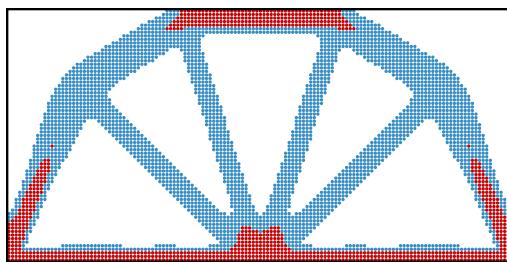
Tabela 4 – Número de iterações e valor da função objetivo para todas as discretizações exploradas no problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio.

Nós	Iterações	Energia total de deformação
31×31	457	29,2351
41×41	399	29,8650
51×51	919	27,3647
61×61	392	27,4606
71×71	425	27,4203
81×81	868	27,7698
91×91	339	27,7217
101×101	354	27,8330

Fonte: Elaborada pela autora.

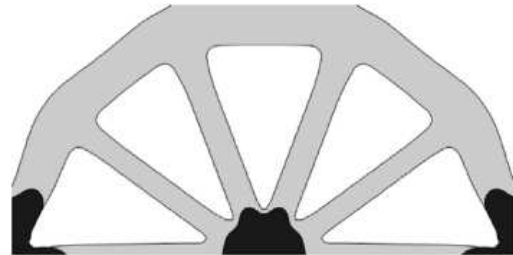
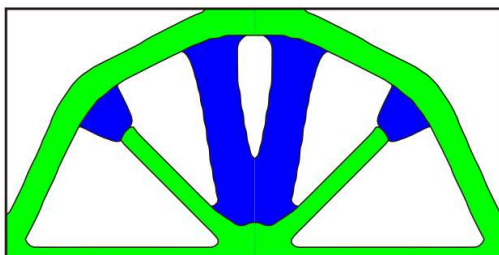
Figura 40 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga simplesmente apoiada com dois materiais e o vazio.

- (a) Projeto ótimo com 71×71 nós e $\eta = 26$ com a parte simétrica.
 (b) Projeto ótimo baseado em MEF de Ghabraie (2015) com 70×70 elementos e $\eta = 25$.



- (c) Projeto ótimo de Xia e Shi (2019).

- (d) Projeto ótimo de Huang e Li (2021).

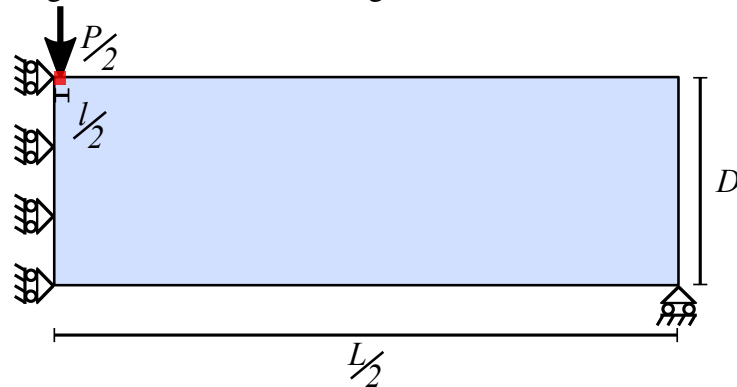


Fonte: Elaborada pela autora e extraída de Xia e Shi (2019), Huang e Li (2021).

4.4 Viga MBB

Nesta seção, uma viga MBB é otimizada. Devido à simetria, metade da estrutura com condições de contorno apropriadas é considerada (Figura 41). O teste foi realizado com $L/2 = 1,2\text{m}$, $D = 0,4\text{m}$, com uma força aplicada de $P/2 = 30000\text{N}$ distribuída sobre uma região de $l/2 = 0,005\text{m}$ multiplicada pela espessura de $0,01\text{m}$. Dois materiais e o vazio são usados com diferentes distribuições iniciais. Os módulos de Young dos materiais (vazio, material 1 e material 2) são, respectivamente, $E^{(0)} = 1\text{kPa}$, $E^{(1)} = 100\text{GPa}$ e $E^{(2)} = 200\text{GPa}$, e seus volumes objetivo são $V_0^* \approx 60\%$, $V_1^* \approx 25\%$ e $V_2^* \approx 15\%$.

Figura 41 – Problema da viga MBB.

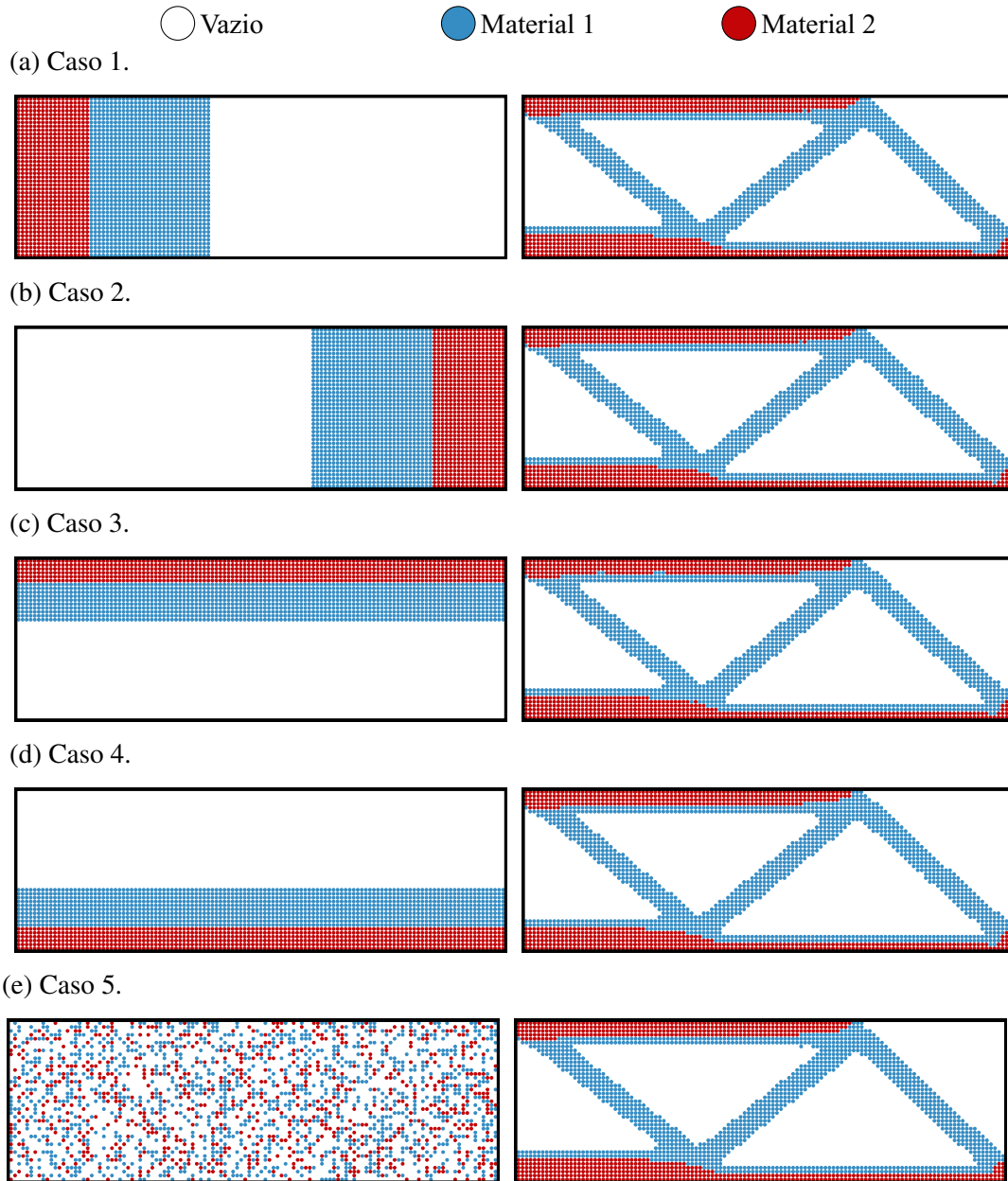


Fonte: Elaborada pela autora.

Cinco casos de distribuições de projeto inicial são considerados com a discretização de 121×41 nós e parâmetros graduais de $S = 10$, resultando em $G_1 = 8,32$, e $\eta = 0,005M = 25$ nós. Os resultados apresentados na Figura 42 demonstram que projetos ótimos similares são alcançados mesmo quando diferentes projetos iniciais são utilizados, incluindo um caso completamente aleatório.

A Tabela 5 traz as informações do número de iterações de cada caso e do tempo computacional. É possível notar que, apesar de chegarem a um resultado final muito próximo, o projeto inicial influencia na quantidade de iterações e no tempo gasto que o método leva para convergir. Vale ressaltar que o caso com variáveis aleatórias teve o segundo melhor número de iterações. Resultados da literatura, apresentados na Figura 43, são consistentes com as descobertas deste estudo (TAVAKOLI; MOHSENI, 2014; GUO *et al.*, 2014b; XIA; SHI, 2019; SHA *et al.*, 2021). Além de que, o método de Ghabraie (2015) (Figura 43b), que foi executado com parâmetros dos módulos de Young e de materiais graduais similares ao método proposto, convergiu após 792 iterações, ficando acima da média dos resultados apresentados na Tabela 5.

Figura 42 – Efeito do projeto inicial no projeto ótimo para o problema da viga MBB com dois materiais e o vazio.



Fonte: Elaborada pela autora.

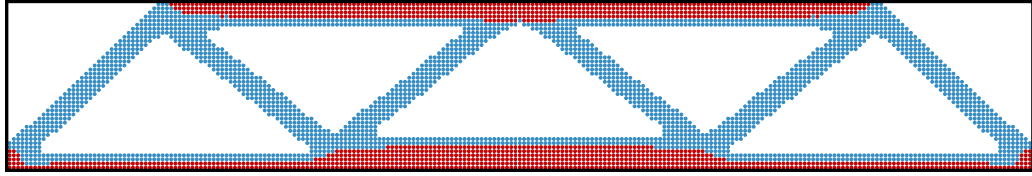
Tabela 5 – Total de iterações e tempo computacional nos casos do problema da viga MBB com dois materiais e o vazio.

Caso	Iterações	Tempo (s)
Caso 1	546	612,728
Caso 2	760	840,076
Caso 3	1137	1280,62
Caso 4	689	805,299
Caso 5	605	693,426

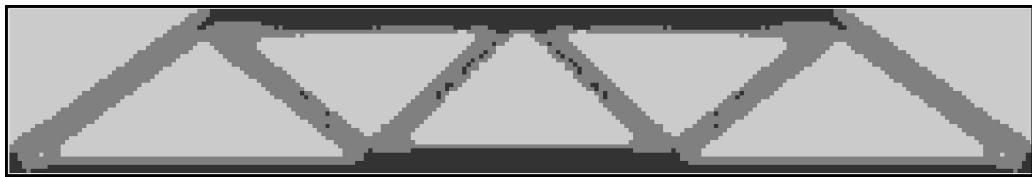
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 43 – Comparação dos resultados obtidos com DMLPG e MEF aplicados ao problema da viga MBB com dois materiais e o vazio.

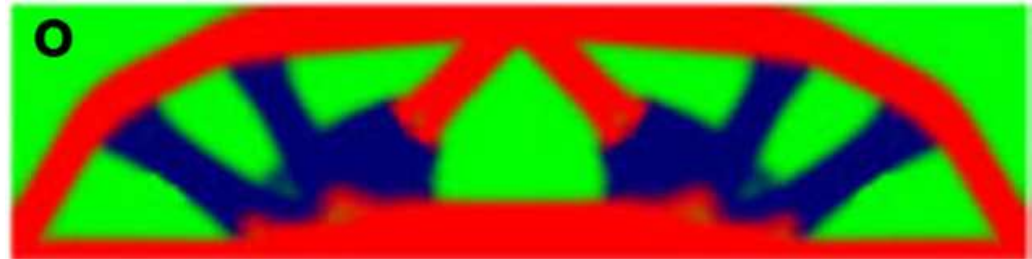
(a) Projeto ótimo com 121×41 nós e $\eta = 25$ com a parte simétrica do caso 1.



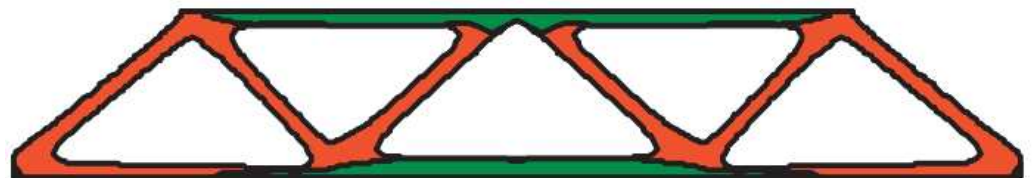
(b) Projeto ótimo baseado em MEF de Ghabraie (2015) com 120×40 elementos e $\eta = 24$.



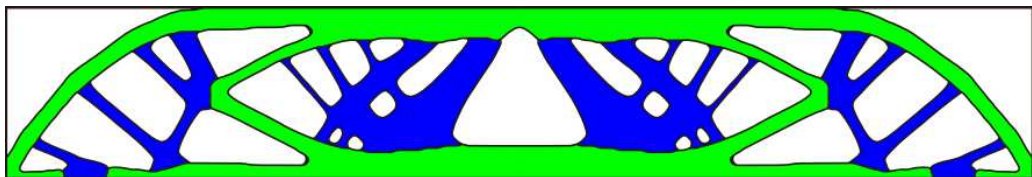
(c) Projeto ótimo de Tavakoli e Mohseni (2014).



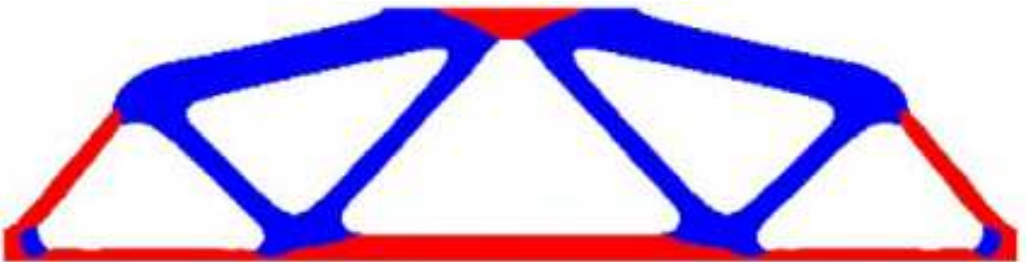
(d) Projeto ótimo de Guo *et al.* (2014b).



(e) Projeto ótimo de Xia e Shi (2019).



(f) Projeto ótimo de Sha *et al.* (2021).

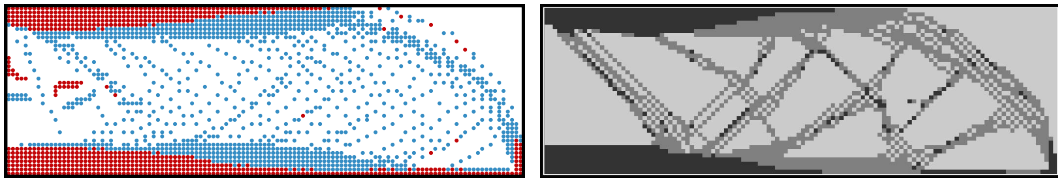


Fonte: Elaborada pela autora e extraída de Tavakoli e Mohseni (2014), Guo *et al.* (2014b), Xia e Shi (2019), Sha *et al.* (2021).

A aplicação do pós-processamento na sensibilidade também foi verificada no teste da viga MBB (Figura 44). Assim como no exemplo anterior em que o uso do filtro foi analisado, observa-se um espaçamento maior entre os materiais espalhados no domínio, ao contrário da formação do padrão de tabuleiro de xadrez, como ocorre no caso onde o MEF é aplicado.

Figura 44 – Testes para o problema da viga MBB com dois materiais e o vazio sem aplicação do filtro na sensibilidade.

- (a) Teste com 121×41 nós e $\eta = 25$.
 (b) Teste com 120×40 elementos e $\eta = 24$ baseado em MEF de Ghabraie (2015).

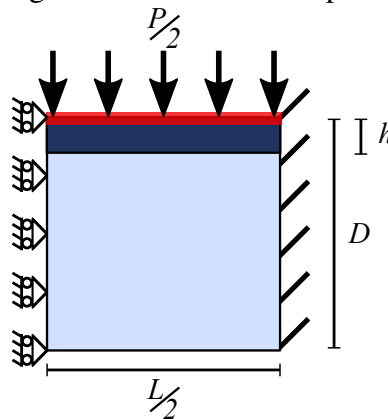


Fonte: Elaborada pela autora.

4.5 Ponte

As condições de contorno deste problema são baseadas no exemplo de Habibian *et al.* (2021). A metade simétrica de uma ponte é considerada, conforme apresentado na Figura 45, onde o domínio de projeto é reduzido devido à parte do domínio com material prescrito.

Figura 45 – Problema da ponte.



Fonte: Elaborada pela autora.

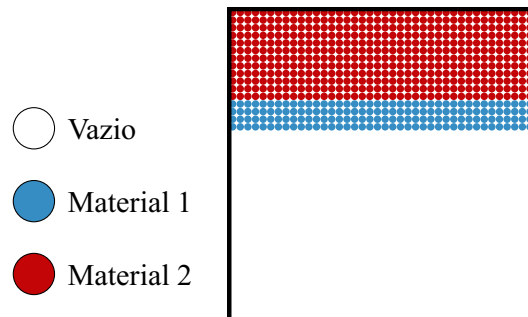
O teste foi realizado com $L/2 = 0,4\text{m}$, $D = 0,4\text{m}$, e uma força aplicada de $P/2 = 300000\text{N}$ distribuída sobre toda a região do topo em uma espessura de $0,01\text{m}$. Os módulos de Young dos materiais (vazio, material 1 e material 2) são, respectivamente, $E^{(0)} = 1\text{kPa}$, $E^{(1)} = 100\text{GPa}$ e $E^{(2)} = 200\text{GPa}$, e seus volumes objetivos são $V_0^* \approx 60\%$, $V_1^* \approx 10\%$ e $V_2^* \approx 30\%$. O exemplo foi feito com uma discretização de 41×41 nós e parâmetros graduais

de $S = 10$, ocasionando $G_1 = 8,32$, e $\eta = 0,005M = 8$ nós. Há uma camada fixa de nós com seis linhas, isto é $h = 0,56\text{m}$, que utiliza o material mais rígido (material 2) no topo do modelo, ou seja, um pouco mais de 15% do volume atribuído a este material é realmente atualizado no processo de otimização.

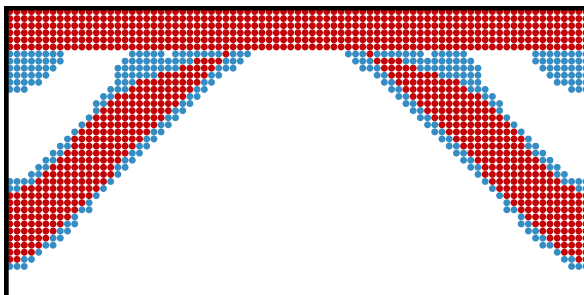
A Figura 46 mostra os resultados ótimos da técnica proposta e do estudo de Habibian *et al.* (2021), que também utiliza um método sem malha, denominado Peridinâmica, porém é acoplado com o método AAP baseado em SIMP. É possível notar que a distribuição dos materiais é diferente, entretanto a topologia é semelhante. Neste resultado, também é possível notar que o algoritmo de material passivo é eficaz.

Figura 46 – Comparação dos resultados obtidos com método proposto e o da literatura aplicados ao de ponte com dois materiais e o vazio.

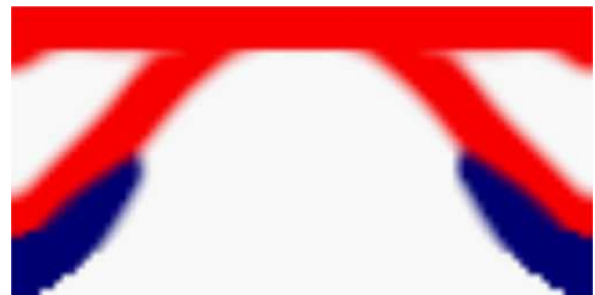
(a) Distribuição inicial para o método proposto.



(b) Projeto ótimo com 41×41 nós e $\eta = 8$ com a parte simétrica.



(c) Projeto ótimo de Habibian *et al.* (2021) com 40×40 com a parte simétrica.



Fonte: Elaborada pela autora e extraída de Habibian *et al.* (2021).

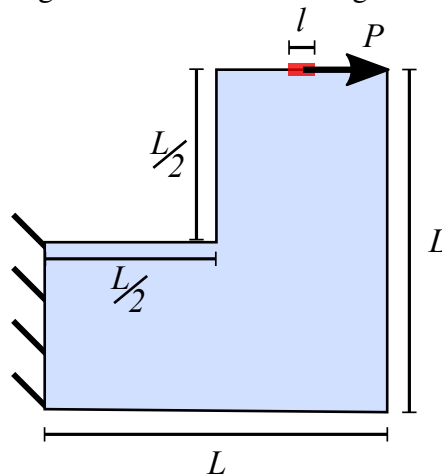
4.6 Viga em Formato de L

Nesta seção, uma viga em forma de L é considerada em dois modelos que são analisados nas próximas duas subseções. O primeiro modelo tem o formato padrão, enquanto o segundo apresenta um círculo com material predefinido.

4.6.1 Viga em Formato de L Padrão

No problema da viga em forma de L, ilustrada na Figura 47, as dimensões são de $L = 0,1\text{m}$. A força aplicada de $P = 25000\text{N}$ é distribuída sobre uma região de $l = 0,001\text{m}$ multiplicada pela espessura de $0,01\text{m}$. Os módulos de elasticidade de Young dos três materiais (vazio, material 1 e material 2) são, respectivamente, $E^{(0)} = 1\text{kPa}$, $E^{(1)} = 100\text{GPa}$ e $E^{(2)} = 200\text{GPa}$. Seus volumes prescritos são $V_0^* \approx 60\%$, $V_1^* \approx 20\%$ e $V_2^* \approx 20\%$.

Figura 47 – Problema da viga em L.



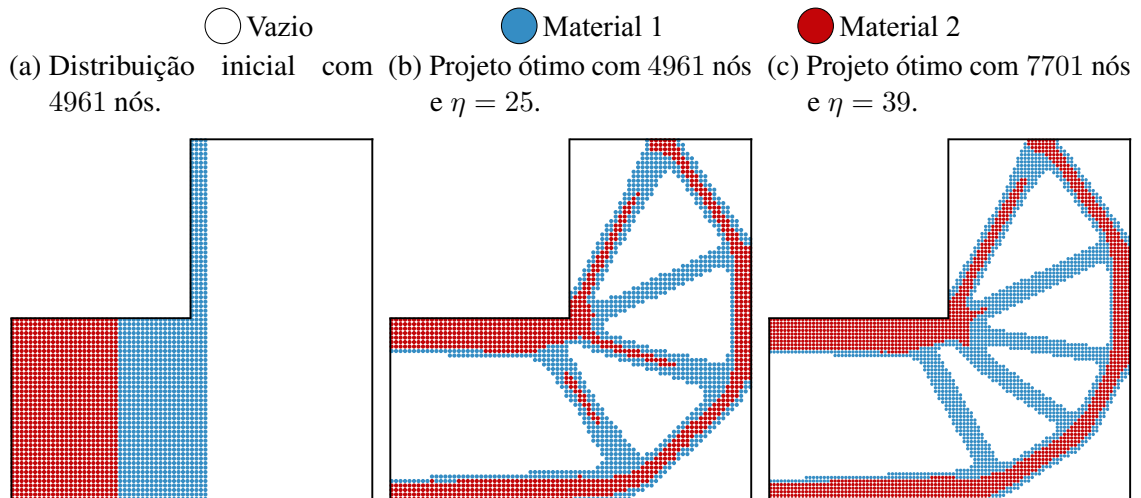
Fonte: Elaborada pela autora.

Os parâmetros utilizados para calcular os materiais graduais foram $S = 10$, resultando em $G_1 = 8,32$. O mesmo problema foi resolvido utilizando duas distribuições regulares de nós em uma região quadrada de dimensão $L \times L$. Os nós foram criados apenas dentro da região em forma de L, resultando em distribuições de 81×81 e 101×101 , com 4961 e 7701 nós dentro da região, respectivamente. Os valores de η foram de 25 e 39, respectivamente. A Figura 48 mostra que as formas obtidas são parecidas, porém o modelo com mais nós gerou um furo a mais do que o modelo com menos nós. Os resultados são plausíveis, pois são semelhantes a alguns resultados da literatura para o mesmo problema (GUO *et al.*, 2014b; LIEU; LEE, 2017; CUI *et al.*, 2017; HABIBIAN *et al.*, 2021; JIANG *et al.*, 2023), como ilustrado na Figura 49.

4.6.2 Viga em Formato de L com Material Predefinido

Uma modificação do problema anterior é analisada. Agora, existe uma predefinição do material que se encontra dentro de um círculo de raio $h = 0,01\text{m}$, centralizado no quadrado de lado $L/2$ do canto inferior direito, conforme ilustrado na Figura 50. Os demais parâmetros são iguais aos do teste anterior.

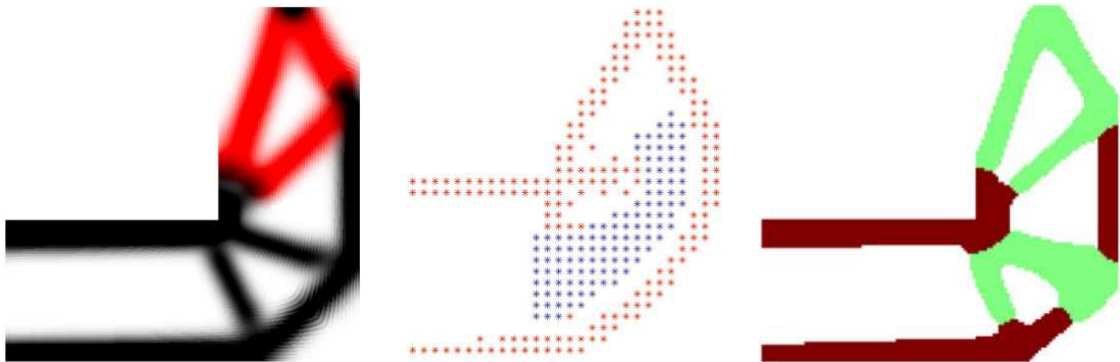
Figura 48 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio.



Fonte: Elaborada pela autora.

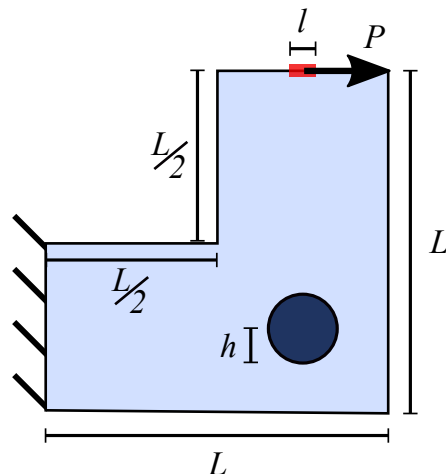
Figura 49 – Resultados de outras técnicas para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio.

- (a) Projeto ótimo de Lieu e Lee (2017). (b) Projeto ótimo de Cui *et al.* (2017). (c) Projeto ótimo de Jiang *et al.* (2023).



Fonte: Adaptado de Lieu e Lee (2017), Cui *et al.* (2017), Jiang *et al.* (2023).

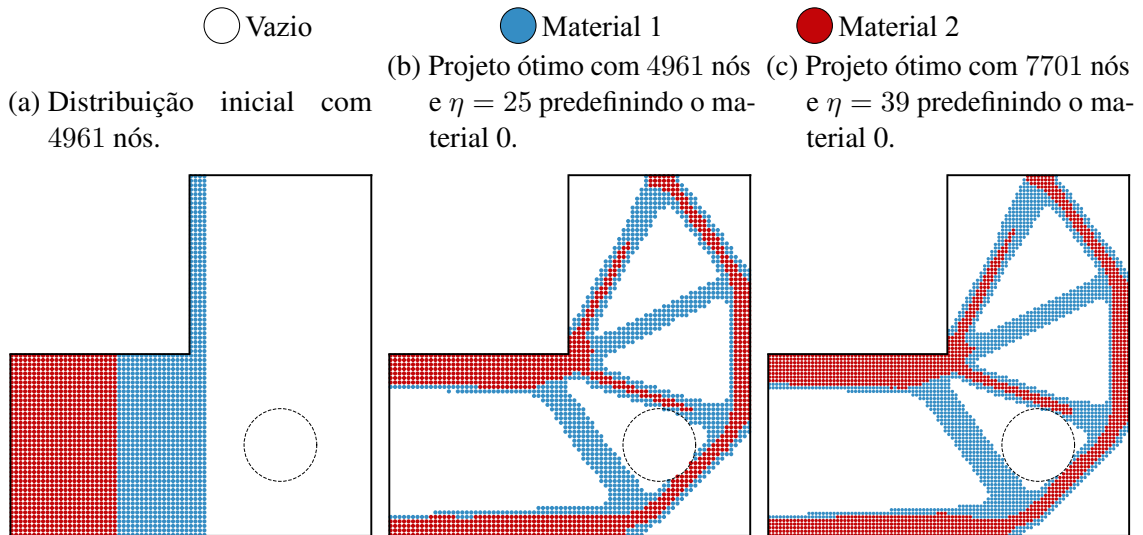
Figura 50 – Problema da viga em L com material predefinido em um círculo.



Fonte: Elaborada pela autora.

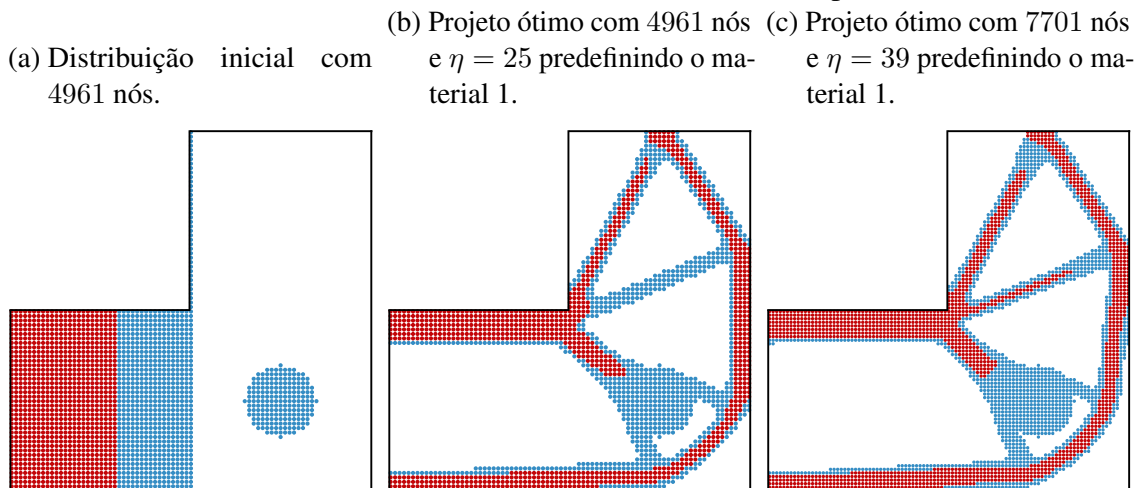
A Figura 51 exibe os resultados em que o círculo é predefinido como vazio nas duas discretizações estudadas no exemplo anterior. Quando o vazio é fixado, ambas as discretizações convergem para resultados similares, diferentemente do exemplo anterior (Figura 48). Observa-se inclusive que alcançam um resultado semelhante ao projeto ótimo criado com a menor discretização do exemplo anterior (Figura 48b), uma vez que não permite a criação da barra que passaria no lugar do círculo (Figura 48c). O círculo também pode ser preenchido com algum material, como apresentado na Figura 52. Nesse caso, a otimização tende a incorporar o material predefinido à estrutura, sem criar uma ilha desse material.

Figura 51 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio, com o vazio predefinido no círculo assinalado.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 52 – Efeito da discretização no projeto ótimo para o problema da viga em formato de L com dois materiais e o vazio, com o material 1 predefinido no círculo.



Fonte: Elaborada pela autora.

4.7 Considerações Finais

Neste capítulo, foram considerados diversos exemplos a fim de validar o método proposto. Testes foram conduzidos com dois materiais distintos, um material e o vazio, dois materiais e o vazio, e cinco materiais. A sequência de passos foi observada, incluindo algumas iterações para demonstrar o processo do algoritmo de otimização. O histórico da função objetivo e suas nuances foram analisados. A eficácia do tratamento de simetria foi verificada, assim como o uso do filtro no método de otimização topológica. Também foi investigado como a topologia ótima é influenciada pela discretização do domínio ou pelo projeto inicial. O procedimento que leva em consideração um material prescrito em uma região do domínio foi examinado. Em todos os exemplos possíveis, houve comparação com os resultados de outros métodos utilizados na literatura. Diversos testes foram comparados com os resultados obtidos pelo método gBESO utilizando o método MEF, confirmando a viabilidade do método proposto.

5 CONCLUSÃO

A modelagem de estruturas para propósitos específicos por meio de métodos de otimização topológica tem sido uma área de estudo bastante pesquisada há algumas décadas. Inicialmente focada em estruturas com um único material, hoje existem diversas técnicas capazes de criar objetos com múltiplos materiais, com o intuito de desenvolver projetos multifuncionais, leves e com menores custos. O processo para encontrar uma estrutura ótima envolve um método numérico que analisa a estrutura sendo formada. Apesar do MEF ser o mais comum, outros métodos de análise têm sido utilizados como alternativa.

Este trabalho teve como objetivo propor uma nova abordagem para a otimização topológica de estruturas com múltiplos materiais, acoplando os métodos DMLPG e gBESO. O método DMLPG, um método de análise numérica, foi utilizado para obter os deslocamentos, deformações e tensões da estrutura a ser otimizada. O gBESO, sendo um método de otimização topológica multimaterial, foi empregado para encontrar as distribuições ótimas dos diversos materiais que podem estar presentes na estrutura. Vale ressaltar que o uso de técnicas sem malha em otimização topológica com múltiplos materiais ainda é uma área pouco explorada.

O DMLPG é uma abordagem conhecida por ser verdadeiramente sem malha, ou seja, não necessita de uma malha de fundo em nenhuma parte do seu processo. Esse método alcança resultados precisos e eficientes quando comparado a outros métodos sem malha. Já o gBESO tem uma abordagem simples para a atualização das variáveis de projeto, sendo sua maior vantagem a obtenção de projetos semelhantes mesmo a partir de projetos iniciais diferentes.

Diversos testes foram realizados para mostrar a viabilidade da técnica proposta. Foram criadas estruturas com até cinco materiais, e alguns testes incluíram também a fase de vazio simulada com um material de baixo módulo de Young. Contudo, a técnica possui uma teoria que permite a utilização de um número maior de materiais. Alguns problemas comuns na otimização topológica são o padrão de tabuleiro de xadrez e a dependência da discretização. Os exemplos mostraram que o primeiro desaparece com o uso de um filtro de sensibilidade apropriado, no entanto, o último ainda existe, sendo mais perceptível quando há um número elevado de nós que discretizam o domínio. Para que o método funcione para discretizações com números pares ou ímpares de nós em uma direção, foi proposta uma nova atualização das variáveis de projeto para o caso de estruturas simétricas. Além disso, o procedimento que trabalha com materiais passivos foi associado ao método para predefinir materiais em uma região, com isso o projeto ótimo incorpora o material fixado na estrutura, inclusive o vazio. Com base

nos resultados obtidos, que apresentaram projetos semelhantes aos obtidos em outras abordagens na literatura, as alterações incorporadas para combinar as duas abordagens tornaram o método viável e ainda houve o incremento de outras funcionalidades.

Para tornar a técnica mais abrangente, é possível ampliar o método proposto em três frentes principais. Primeiramente, a implementação da técnica pode ser estendida para exemplos mais complexos levando em conta distribuição de nós arbitrários e problemas tridimensionais, explorando mais as vantagens das técnicas sem malha nesse contexto incluindo a adaptatividades da nuvem de pontos. Um aspecto essencial é a interseção entre o subdomínio e bordas arbitrárias. Além disso, é interessante que a técnica não utilize frações de volumes predefinidas, ao invés disso, seria mais vantajoso se essas frações fossem determinadas a partir do processo de otimização avaliando uma função de custo dos materiais, por exemplo. Para a criação de exemplos mais complexos, também se faz necessário expandir a técnica para o uso de múltiplas casos de carga.

REFERÊNCIAS

- ABBASZADEH, M.; BAYAT, M.; DEHGHAN, M. Numerical investigation of the magnetic properties and behavior of electrically conducting fluids via the local weak form method. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier Inc., v. 433, p. 127–293, 11 2022. ISSN 0096-3003.
- ABBASZADEH, M.; DEHGHAN, M. The fourth-order time-discrete scheme and split-step direct meshless finite volume method for solving cubic–quintic complex ginzburg–landau equations on complicated geometries. **Engineering with Computers**, Springer, v. 38, p. 1543–1557, 4 2022. ISSN 0177-0667. Disponível em: doi:10.1007/s00366-020-01089-6.
- AI, L.; GAO, X. L. Topology optimization of 2-d mechanical metamaterials using a parametric level set method combined with a meshfree algorithm. **Composite Structures**, Elsevier, v. 229, p. 111318, 12 2019. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2019.111318.
- ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, p. 1–16, 1 2011. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-010-0594-7.
- ATLURI, S. N.; SHEN, S. The meshless local petrov-galerkin (mlpg) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 3, p. 11–51, 2002. Disponível em: doi:10.3970/cmesci.2002.003.011.
- ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**, v. 22, p. 117–127, 8 1998. ISSN 0178-7675. Disponível em: doi:10.1007/s004660050346.
- ATLURI, S. N.; ZHU, T. The meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach for solving problems in elasto-statics. **Computational Mechanics**, Springer-Verlag, v. 25, p. 169–179, 3 2000. ISSN 0178-7675. Disponível em: doi:10.1007/s004660050467.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 727–758, 2 1997. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19970228)40:4<727::AID-NME86>3.0.CO;2-N.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 37, p. 229–256, 1 1994. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.1620370205.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, Springer-Verlag, v. 1, p. 193–202, 12 1989. ISSN 0934-4373. Disponível em: doi:10.1007/BF01650949.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197–224, 11 1988. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/0045-7825(88)90086-2.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)**, Springer Verlag, v. 69, p. 635–654, 11 1999. ISSN 0939-1533. Disponível em: doi:10.1007/s004190050248.

- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Springer Berlin Heidelberg, 2004. ISBN 978-3-642-07698-5. Disponível em: doi:10.1007/978-3-662-05086-6.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. Springer Berlin Heidelberg, 2004. ISBN 978-3-642-07698-5. Disponível em: doi:10.1007/978-3-662-05086-6.
- BIYIKLI, E.; TO, A. C. Proportional topology optimization: A new non-sensitivity method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in matlab. **PLOS ONE**, Public Library of Science, v. 10, p. e0145041, 12 2015. ISSN 1932-6203. Disponível em: doi:10.1371/journal.pone.0145041.
- BOURDIN, B.; CHAMBOLLE, A. Design-dependent loads in topology optimization. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, EDP Sciences, v. 9, p. 19–48, 2003. ISSN 1292-8119. Disponível em: doi:10.1051/COCV:2002070.
- CARVALHO, L. F. B. **Otimização topológica de estruturas com restrições de flambagem aplicada à manufatura aditiva**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, 7 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/47269>.
- CHAU, K. N.; CHAU, K. N.; NGO, T.; HACKL, K.; NGUYEN-XUAN, H. A polytree-based adaptive polygonal finite element method for multi-material topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 332, p. 712–739, 4 2018. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2017.07.035.
- CHEN, J.-S.; BELYTSCHKO, T. Meshless and meshfree methods. In: _____. **Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. p. 886–894. ISBN 978-3-540-70529-1.
- CHO, S.; KWAK, J. Topology design optimization of geometrically non-linear structures using meshfree method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 5909–5925, 9 2006. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2005.08.015.
- CHU, D.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 21, p. 239–251, 4 1996. ISSN 0168-874X. Disponível em: doi:10.1016/0168-874X(95)00043-S.
- COUTINHO, K. D. Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais. 5 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/15665>.
- CUI, M.; CHEN, H.; ZHOU, J.; WANG, F. A meshless method for multi-material topology optimization based on the alternating active-phase algorithm. **Engineering with Computers**, Springer London, v. 33, p. 871–884, 10 2017. ISSN 0177-0667. Disponível em: doi:10.1007/s00366-017-0503-4.
- CUI, M.; ZHANG, Y.; YANG, X.; LUO, C. Multi-material proportional topology optimization based on the modified interpolation scheme. **Engineering with Computers**, Springer London, v. 34, p. 287–305, 4 2018. ISSN 0177-0667. Disponível em: doi:10.1007/s00366-017-0540-z.

- DA, D. C.; CUI, X. Y.; LONG, K.; LI, G. Y. Concurrent topological design of composite structures and the underlying multi-phase materials. **Computers & Structures**, Pergamon, v. 179, p. 1–14, 1 2017. ISSN 0045-7949. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruc.2016.10.006.
- DARANI, M. A. Direct meshless local petrov–galerkin method for the two-dimensional klein–gordon equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 74, p. 1–13, 1 2017. ISSN 0955-7997. Disponível em: doi:10.1016/j.enganabound.2016.10.002.
- DAXINI, S. D.; PRAJAPATI, J. M. Parametric shape optimization techniques based on meshless methods: A review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 56, p. 1197–1214, 11 2017. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-017-1702-8.
- DEATON, J. D.; GRANDHI, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 49, p. 1–38, 1 2014. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-013-0956-z.
- DEGHAN, M.; HOOSHYARFARZIN, B.; ABBASZADEH, M. Numerical simulation based on a combination of finite-element method and proper orthogonal decomposition to prevent the groundwater contamination. **Engineering with Computers**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 38, p. 3445–3461, 10 2022. ISSN 0177-0667.
- DIJK, N. P. van; MAUTE, K.; LANGELAAR, M.; KEULEN, F. van. Level-set methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Verlag, v. 48, p. 437–472, 9 2013. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-013-0912-y.
- DOAN, Q. H.; LEE, D.; LEE, J.; KANG, J. Multi-material structural topology optimization with decision making of stiffness design criteria. **Advanced Engineering Informatics**, Elsevier, v. 45, p. 101098, 8 2020. ISSN 1474-0346. Disponível em: doi:10.1016/j.aei.2020.101098.
- DUAN, Z.; LIU, Y.; FAN, J.; LONG, K.; XU, B.; ZHU, J.; YAN, J. Concurrent multi-material and multi-scale design optimization of fiber-reinforced composite material and structures for minimum structural compliance. **Composite Structures**, Elsevier, v. 311, p. 116796, 5 2023. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2023.116796.
- ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review. **Applied Mechanics Reviews**, v. 54, p. 331–390, 7 2001. ISSN 0003-6900. Disponível em: doi:10.1115/1.1388075.
- FUJII, D.; KIKUCHI, N. Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the slp method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer-Verlag, v. 19, p. 113–121, 4 2000. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s001580050091.
- GAN, N.; WANG, Q. Topology optimization of multiphase materials with dynamic and static characteristics by beso method. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 151, p. 102928, 1 2021. ISSN 0965-9978. Disponível em: doi:10.1016/j.advengsoft.2020.102928.
- GAO, T.; ZHANG, W. A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 88, p. 774–796, 11 2011. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.3197.

GHABRAIE, K. An improved soft-kill beso algorithm for optimal distribution of single or multiple material phases. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Verlag, v. 52, p. 773–790, 10 2015. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-015-1268-2.

GIBIANSKY, L. V.; SIGMUND, O. Multiphase composites with extremal bulk modulus. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Pergamon, v. 48, p. 461–498, 3 2000. ISSN 0022-5096. Disponível em: doi:10.1016/S0022-5096(99)00043-5.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford Academic, v. 181, p. 375–389, 12 1977. ISSN 0035-8711. Disponível em: doi:10.1093/mnras/181.3.375.

GONÇALVES, D. C.; LOPES, J. D. F.; CAMPILHO, R. D. S. G.; BELINHA, J. Topology optimization using a natural neighbour meshless method combined with a bi-directional evolutionary algorithm. **Mathematics and Computers in Simulation**, North-Holland, v. 194, p. 308–328, 4 2022. ISSN 0378-4754. Disponível em: doi:10.1016/j.matcom.2021.11.021.

GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. *et al.* **Eigen v3.4**. 2021. [Http://eigen.tuxfamily.org](http://eigen.tuxfamily.org).

GUO, X.; ZHANG, W.; ZHONG, W. Doing topology optimization explicitly and geometrically—a new moving morphable components based framework. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers (ASME), v. 81, 8 2014. ISSN 0021-8936. Disponível em: doi:10.1115/1.4027609.

GUO, X.; ZHANG, W.; ZHONG, W. Stress-related topology optimization of continuum structures involving multi-phase materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 268, p. 632–655, 1 2014. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2013.10.003.

HABIBIAN, A.; SOHOULI, A.; KEFAL, A.; NADLER, B.; YILDIZ, M.; SULEMAN, A. Multi-material topology optimization of structures with discontinuities using peridynamics. **Composite Structures**, Elsevier, v. 258, p. 113345, 2 2021. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2020.113345.

HAN, Z.; WEI, K. Multi-material topology optimization and additive manufacturing for metamaterials incorporating double negative indexes of poisson's ratio and thermal expansion. **Additive Manufacturing**, Elsevier, v. 54, p. 102742, 6 2022. ISSN 2214-8604. Disponível em: doi:10.1016/j.addma.2022.102742.

HASANPOUR, K.; MIRZAEI, D. A fast meshfree technique for the coupled thermoelasticity problem. **Acta Mechanica**, Springer, v. 229, p. 2657–2673, 6 2018. ISSN 0001-5970. Disponível em: doi:10.1007/s00707-018-2122-6.

HE, Q.; KANG, Z.; WANG, Y. A topology optimization method for geometrically nonlinear structures with meshless analysis and independent density field interpolation. **Computational Mechanics**, Springer, v. 54, p. 629–644, 9 2014. ISSN 0178-7675. Disponível em: doi:10.1007/s00466-014-1011-7.

HUAMANÍ, D. C.; GOMES, F. A. M. An alternating active-phase algorithm for multi-material topology optimization. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 45, p. 27, 1 2023. ISSN 1678-5878. Disponível em: doi:10.1007/s40430-022-03938-5.

HUANG, X. Smooth topological design of structures using the floating projection. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 208, p. 110330, 4 2020. ISSN 0141-0296. Disponível em: doi:10.1016/j.engstruct.2020.110330.

HUANG, X.; LI, W. A new multi-material topology optimization algorithm and selection of candidate materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 386, p. 114114, 12 2021. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2021.114114.

HUANG, X.; XIE, Y.; JIA, B.; LI, Q.; ZHOU, S. Evolutionary topology optimization of periodic composites for extremal magnetic permeability and electrical permittivity. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 46, p. 385–398, 9 2012. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-012-0766-8.

HUANG, X.; XIE, Y.-M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. **Computational Mechanics**, Springer Verlag, v. 43, p. 393–401, 2 2009. ISSN 0178-7675. Disponível em: doi:10.1007/s00466-008-0312-0.

HUANG, X.; XIE, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications**. Wiley, 2010. ISBN 9780470746530. Disponível em: doi:10.1002/9780470689486.

HUANG, X.; XIE, Y.-M. A further review of eso type methods for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 41, p. 671–683, 5 2010. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-010-0487-9.

HUANG, X.; ZHOU, S.; SUN, G.; LI, G.; XIE, Y. M. Topology optimization for microstructures of viscoelastic composite materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 283, p. 503–516, 1 2015. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2014.10.007.

HUGHES, T. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. [S. l.]: Prentice-Hall, 1987. ISBN 0-13-317025-X.

HVEJSEL, C. F.; LUND, E. Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 43, p. 811–825, 6 2011. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-011-0625-z.

ILATI, M.; DEGHAN, M. Remediation of contaminated groundwater by meshless local weak forms. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier Ltd, v. 72, p. 2408–2416, 11 2016. ISSN 0898-1221. Disponível em: doi:10.1016/j.camwa.2016.09.009.

JAIMES, L. A.; VICENTE, W.; PAVANELLO, R. Metamaterials design with a desired thermal expansion using a multi-material beso method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 65, p. 355, 12 2022. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-022-03448-x.

JIANG, X.; MA, J.; TENG, X. Polygonal multiresolution topology optimization of multi-material structures subjected to dynamic loads. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, Springer Science and Business Media B.V., v. 19, p. 351–373, 6 2023. ISSN 1569-1713. Disponível em: doi:10.1007/s10999-022-09631-8.

KAMERMANS, M. P. 2011. <http://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html>. Acesso em: 22 de mar. de 2024.

KEFAL, A.; SOHOULI, A.; OTERKUS, E.; YILDIZ, M.; SULEMAN, A. Topology optimization of cracked structures using peridynamics. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, Springer New York LLC, v. 31, p. 1645–1672, 11 2019. ISSN 0935-1175. Disponível em: doi:10.1007/s00161-019-00830-x.

LI, J.; GUAN, Y.; WANG, G.; WANG, G.; ZHANG, H.; LIN, J. A meshless method for topology optimization of structures under multiple load cases. **Structures**, v. 25, p. 173–179, 6 2020. ISSN 2352-0124. Disponível em: doi:10.1016/j.istruc.2020.03.005.

LI, J.; YE, H.; WEI, N.; DONG, Y. Efficient multi-material topology optimization design with minimum compliance based on resnet involved generative adversarial network. **Acta Mechanica Sinica**, Springer, v. 40, p. 423185, 3 2024. ISSN 0567-7718. Disponível em: doi:10.1007/s10409-023-23185-x.

LI, Q.; SHEN, S.; HAN, Z.; ATLURI, S. Application of meshless local petrov-galerkin (mlpg) to problems with singularities, and material discontinuities, in 3-d elasticity. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, Tech Science Press, v. 4, p. 571–586, 1 2003. ISSN 1526-1492.

LI, S.; ATLURI, S. N. Topology-optimization of structures based on the mlpg mixed collocation method. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 26, p. 61–74, 2008. Disponível em: doi:10.3970/cmcs.2008.026.061.

LI, Y.; LAI, Y.; LU, G.; YAN, F.; WEI, P.; XIE, Y. M. Innovative design of long-span steel-concrete composite bridge using multi-material topology optimization. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 269, p. 114838, 10 2022. ISSN 0141-0296. Disponível em: doi:10.1016/j.engstruct.2022.114838.

LI, Y.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization for structures made of multiple materials with different properties in tension and compression. **Composite Structures**, Elsevier, v. 259, p. 113497, 3 2021. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2020.113497.

LI, Y.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization of spatial steel-concrete structures. **Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures**, International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), v. 62, p. 102–112, 6 2021. ISSN 1028-365X. Disponível em: doi:10.20898/j.iass.2021.015.

LIEU, Q. X.; LEE, J. A multi-resolution approach for multi-material topology optimization based on isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 323, p. 272–302, 8 2017. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/J.CMA.2017.05.009.

LIU, G. **Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. CRC Press, 2009. 794 p. ISBN 9781420082104. Disponível em: doi:10.1201/9781420082104.

LIU, W. K.; JUN, S.; ZHANG, Y. F. Reproducing kernel particle methods. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 20, p. 1081–1106, 4 1995. ISSN 0271-2091. Disponível em: doi:10.1002/flid.1650200824.

LONG, K.; WANG, X.; GU, X. Local optimum in multi-material topology optimization and solution by reciprocal variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Verlag, v. 57, p. 1283–1295, 3 2018. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-017-1811-4.

LOPES, H. N.; MAHFOUD, J.; PAVANELLO, R. High natural frequency gap topology optimization of bi-material elastic structures and band gap analysis. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 63, p. 2325–2340, 5 2021. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-020-02811-0.

LUND, E.; STEGMANN, J. On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parametrization. **Wind Energy**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 8, p. 109–124, 1 2005. ISSN 1099-1824. Disponível em: doi:10.1002/WE.132.

LUO, Z.; ZHANG, N.; GAO, W.; MA, H. Structural shape and topology optimization using a meshless galerkin level set method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 90, p. 369–389, 4 2012. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.3325.

LUO, Z.; ZHANG, N.; WANG, Y.; GAO, W. Topology optimization of structures using meshless density variable approximants. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 93, p. 443–464, 1 2013. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.4394.

MAZZIA, A.; PINI, G.; SARTORETTO, F. Numerical investigation on direct mlpq for 2d and 3d potential problems. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 88, p. 183–209, 2012. Disponível em: doi:10.3970/cmescs.2012.088.183.

MICHELL, A. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, p. 589–597, 11 1904. ISSN 1941-5982. Disponível em: doi:10.1080/14786440409463229.

MIRZAEI, D. **Development of Moving Least Squares Based Meshless Methods**. Tese (PhD in Applied Mathematics) – Amirkabir University of Technology, 7 2011. Disponível em: doi:10.13140/rg.2.2.20809.90729.

MIRZAEI, D. A new low-cost meshfree method for two and three dimensional problems in elasticity. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, p. 7181–7196, 12 2015. ISSN 0307-904X. Disponível em: doi:10.1016/j.apm.2015.02.050.

MIRZAEI, D.; HASANPOUR, K. Direct meshless local petrov–galerkin method for elastodynamic analysis. **Acta Mechanica**, Springer, v. 227, p. 619–632, 3 2016. ISSN 0001-5970. Disponível em: doi:10.1007/s00707-015-1494-0.

MIRZAEI, D.; HASANPOUR, K.; DEGHAN, M. On generalized moving least squares and diffuse derivatives. **IMA Journal of Numerical Analysis**, Oxford University Press, v. 32, p. 983–1000, 7 2012. ISSN 0272-4979. Disponível em: doi:10.1093/imanum/drr030.

MIRZAEI, D.; SCHABACK, R. Direct meshless local petrov–galerkin (dmlpg) method: A generalized mls approximation. **Applied Numerical Mathematics**, v. 68, p. 73–82, 6 2013. ISSN 0168-9274. Disponível em: doi:10.1016/j.apnum.2013.01.002.

MIRZAEI, D.; SCHABACK, R. Solving heat conduction problems by the direct meshless local petrov-galerkin (dmlpg) method. **Numerical Algorithms**, Kluwer Academic Publishers, v. 65, p. 275–291, 2 2014. ISSN 1017-1398. Disponível em: doi:10.1007/s11075-013-9711-1.

MLEJNEK, H. P.; SCHIRRMACHER, R. An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 106, p. 1–26, 7 1993. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/0045-7825(93)90182-W.

MUNK, D. J.; VIO, G. A.; STEVEN, G. P. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 52, p. 613–631, 9 2015. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-015-1261-9.

NAZIR, A.; GOKCEKAYA, O.; BILLAH, K. M. M.; ERTUGRUL, O.; JIANG, J.; SUN, J.; HUSSAIN, S. Multi-material additive manufacturing: A systematic review of design, properties, applications, challenges, and 3d printing of materials and cellular metamaterials. **Materials & Design**, Elsevier, v. 226, p. 111661, 2 2023. ISSN 0264-1275. Disponível em: doi:10.1016/j.matdes.2023.111661.

NGUYEN, M. N.; BUI, T. Q. Multi-material gradient-free proportional topology optimization analysis for plates with variable thickness. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 65, p. 1–16, 3 2022. ISSN 1615-1488. Disponível em: doi:10.1007/S00158-022-03176-2/TABLES/3.

OÑATE, E.; IDELSOHN, S.; ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 3839–3866, 11 1996. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R.

PARK, J.; SUTRADHAR, A. A multi-resolution method for 3d multi-material topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 285, p. 571–586, 3 2015. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2014.10.011.

PINTO, O. T. **Aplicação de homogeneização inversa para a obtenção de estrutura básica ótima para propriedades elásticas prescritas**. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica)) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/31385>.

QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. Evolutionary structural optimisation (eso) using a bidirectional algorithm. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Ltd., v. 15, p. 1031–1048, 12 1998. ISSN 0264-4401. Disponível em: doi:10.1108/02644409810244129.

QUERIN, O. M.; VICTORIA, M.; DÍAZ, C.; MARTÍ, P. Layout optimization of multi-material continuum structures with the isolines topology design method. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 47, p. 221–237, 2 2015. ISSN 0305-215X. Disponível em: doi:10.1080/0305215X.2014.882332.

REIS, R. F. A. **Análise de tensão em materiais compósitos de microestrutura periódica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Nova de Lisboa, 2016. Disponível em: <https://run.unl.pt/handle/10362/19015>.

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural Optimization**, Springer, v. 4, p. 250–252, 9 1992. ISSN 0934-4373. Disponível em: doi:10.1007/BF01742754.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização Topológica De Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas A Restrições De Flexibilidade E Tensão**. 1-174 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/3773>.

SETHIAN, J. A.; WIEGMANN, A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. **Journal of Computational Physics**, Academic Press, v. 163, p. 489–528, 9 2000. ISSN 0021-9991. Disponível em: doi:10.1006/jcph.2000.6581.

SHA, W.; XIAO, M.; GAO, L.; ZHANG, Y. A new level set based multi-material topology optimization method using alternating active-phase algorithm. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier B.V., v. 377, p. 113674, 4 2021. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2021.113674.

SHOKRI, A.; BAHMANI, E. Direct meshless local petrov–galerkin (dmlpg) method for 2d complex ginzburg–landau equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 100, p. 195–203, 3 2019. ISSN 0955-7997. Disponível em: doi:10.1016/j.enganabound.2018.05.008.

SHOKRI, A.; BAHMANI, E. A study of nonlinear systems arising in the physics of liquid crystals, using mlpg and dmlpg methods. **Mathematics and Computers in Simulation**, Elsevier B.V., v. 187, p. 261–281, 9 2021. ISSN 0378-4754. Disponível em: doi:10.1016/j.matcom.2021.02.024.

SIGMUND, O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. **International Journal of Solids and Structures**, Pergamon, v. 31, p. 2313–2329, 9 1994. ISSN 0020-7683. Disponível em: doi:10.1016/0020-7683(94)90154-6.

SIGMUND, O. A new class of extremal composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Pergamon, v. 48, p. 397–428, 2 2000. ISSN 0022-5096. Disponível em: doi:10.1016/S0022-5096(99)00034-4.

SIGMUND, O. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 358, p. 211–227, 2000. ISSN 1364-503X. Disponível em: doi:10.1098/RSTA.2000.0528.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 21, p. 120–127, 4 2001. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s001580050176.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 1031–1055, 12 2013. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-013-0978-6.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, Springer Verlag, v. 16, p. 68–75, 8 1998. ISSN 0934-4373. Disponível em: doi:10.1007/BF01214002.

- SIGMUND, O.; TORQUATO, S. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Pergamon, v. 45, p. 1037–1067, 6 1997. ISSN 0022-5096. Disponível em: doi:10.1016/S0022-5096(96)00114-7.
- SOHOULI, A.; KEFAL, A.; ABDELHAMID, A.; YILDIZ, M.; SULEMAN, A. Continuous density-based topology optimization of cracked structures using peridynamics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 62, p. 2375–2389, 11 2020. ISSN 1615-147X.
- SOUSA, L.; OLIVEIRA, S.; VIDAL, C.; CAVALCANTE-NETO, J. A truly meshless approach to structural topology optimization based on the Direct Meshless Local Petrov–Galerkin (DMLPG) method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 67, p. 110, 7 2024. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-024-03813-y.
- STEGMANN, J.; LUND, E. Discrete material optimization of general composite shell structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 62, p. 2009–2027, 4 2005. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.1259.
- STOIBER, N.; KROMOSER, B. Topology optimization in concrete construction: a systematic review on numerical and experimental investigations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 64, p. 1725–1749, 10 2021. ISSN 1615-147X.
- STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 22, p. 116–124, 2 2001. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/S001580100129/METRICS.
- SUKUMAR, N.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. The natural element method in solid mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, p. 839–887, 11 1998. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19981115)43:5<839::AID-NME423>3.0.CO;2-R.
- SVANBERG, K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 24, p. 359–373, 2 1987. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.1620240207.
- TALEEI, A.; DEHGHAN, M. Direct meshless local petrov–galerkin method for elliptic interface problems with applications in electrostatic and elastostatic. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 278, p. 479–498, 8 2014. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2014.05.016.
- TAVAKOLI, R. Multimaterial topology optimization by volume constrained allen–cahn system and regularized projected steepest descent method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 276, p. 534–565, 7 2014. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2014.04.005.
- TAVAKOLI, R.; MOHSENI, S. M. Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line matlab implementation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Verlag, v. 49, p. 621–642, 4 2014. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-013-0999-1.

THOMSEN, J. Topology optimization of structures composed of one or two materials. **Structural Optimization**, Springer-Verlag, v. 5, p. 108–115, 3 1992. ISSN 0934-4373. Disponível em: doi:10.1007/BF01744703.

ULLAH, B.; KHAN, W.; ISLAM, S. ul; ULLAH, Z. A coupled meshless element-free galerkin and radial basis functions method for level set-based topology optimization. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, v. 44, p. 89, 3 2022. ISSN 1678-5878. Disponível em: doi:10.1007/s40430-022-03382-5.

UPADHYAY, B. D.; SONIGRA, S. S.; DAXINI, S. D. Numerical analysis perspective in structural shape optimization: A review post 2000. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 155, p. 102992, 5 2021. ISSN 0965-9978. Disponível em: doi:10.1016/j.advengsoft.2021.102992.

WANG, M. Y.; CHEN, S.; WANG, X.; MEI, Y. Design of multimaterial compliant mechanisms using level-set methods. **Journal of Mechanical Design**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 127, p. 941–956, 9 2005. ISSN 1050-0472. Disponível em: doi:10.1115/1.1909206.

WANG, M. Y.; WANG, X. “color” level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 193, p. 469–496, 2 2004. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2003.10.008.

WANG, M. Y.; WANG, X. A level-set based variational method for design and optimization of heterogeneous objects. **Computer-Aided Design**, Elsevier, v. 37, p. 321–337, 3 2005. ISSN 0010-4485. Disponível em: doi:10.1016/j.cad.2004.03.007.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 192, p. 227–246, 1 2003. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/S0045-7825(02)00559-5.

WANG, M. Y.; ZHOU, S. Synthesis of shape and topology of multi-material structures with a phase-field method. **Journal of Computer-Aided Materials Design**, Springer, v. 11, p. 117–138, 6 2005. ISSN 0928-1045. Disponível em: doi:10.1007/S10820-005-3169-Y/METRICS.

WANG, S. Y.; LIM, K. M.; KHOO, B.; WANG, M. An extended level set method for shape and topology optimization. **Journal of Computational Physics**, Academic Press, v. 221, p. 395–421, 1 2007. ISSN 0021-9991. Disponível em: doi:10.1016/j.jcp.2006.06.029.

WANG, Y.; LUO, Z.; KANG, Z.; ZHANG, N. A multi-material level set-based topology and shape optimization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 283, p. 1570–1586, 1 2015. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2014.11.002.

XIA, L.; XIA, Q.; HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: A comprehensive review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer, v. 25, p. 437–478, 4 2018. ISSN 1134-3060. Disponível em: doi:10.1007/s11831-016-9203-2.

XIA, Q.; SHI, T. Generalized hole nucleation through beso for the level set based topology optimization of multi-material structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 355, p. 216–233, 10 2019. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/j.cma.2019.06.028.

XIE, Y.; STEVEN, G. Shape and layout optimization via an evolutionary procedure. In: **Proceedings of the international conference computational engineering science**. Hong Kong: [S. n.], 1992. p. 471.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, Pergamon, v. 49, p. 885–896, 12 1993. ISSN 0045-7949. Disponível em: doi:10.1016/0045-7949(93)90035-C.

XU, B.; JIANG, J. S.; XIE, Y. M. Concurrent design of composite macrostructure and multi-phase material microstructure for minimum dynamic compliance. **Composite Structures**, Elsevier, v. 128, p. 221–233, 9 2015. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2015.03.057.

XU, B.; XIE, Y. M. Concurrent design of composite macrostructure and cellular microstructure under random excitations. **Composite Structures**, Elsevier, v. 123, p. 65–77, 5 2015. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2014.10.037.

YAN, X.; HUANG, X.; ZHA, Y.; XIE, Y. M. Concurrent topology optimization of structures and their composite microstructures. **Computers & Structures**, Pergamon, v. 133, p. 103–110, 3 2014. ISSN 0045-7949. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruc.2013.12.001.

YANG, X.; LI, M. Discrete multi-material topology optimization under total mass constraint. **Computer-Aided Design**, Elsevier, v. 102, p. 182–192, 9 2018. ISSN 0010-4485. Disponível em: doi:10.1016/j.cad.2018.04.023.

YANG, X.; ZHENG, J.; LONG, S. Topology optimization of continuum structures with displacement constraints based on meshless method. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, Springer Netherlands, v. 13, p. 311–320, 6 2017. ISSN 1569-1713. Disponível em: doi:10.1007/s10999-016-9337-2.

YE, H.-L.; DAI, Z.-J.; WANG, W.-W.; SUI, Y.-K. Icm method for topology optimization of multimaterial continuum structure with displacement constraint. **Acta Mechanica Sinica**, Springer Verlag, v. 35, p. 552–562, 6 2019. ISSN 0567-7718. Disponível em: doi:10.1007/s10409-018-0827-3.

YIN, L.; ANANTHASURESH, G. K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 23, p. 49–62, 12 2001. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/S00158-001-0165-Z/METRICS.

ZHANG, J.; WU, S.; ZHANG, H.; ZHAO, L.; ZUO, Z.; WU, S. Topology optimization of orthotropic multi-material structures with length-scale control based on element-free galerkin method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 163, p. 578–592, 6 2024. ISSN 0955-7997. Disponível em: doi:10.1016/j.engabound.2024.03.031.

ZHANG, J.; ZHANG, Z.; ZHANG, H.; WU, S.; WU, S.; ZUO, Z.; GONG, S. Topology optimization of auxetic microstructures with isotropic and orthotropic multiple materials based on

element-free galerkin method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 166, p. 105811, 9 2024. ISSN 0955-7997. Disponível em: doi:10.1016/j.enganabound.2024.105811.

ZHANG, W.; SONG, J.; ZHOU, J.; DU, Z.; ZHU, Y.; SUN, Z.; GUO, X. Topology optimization with multiple materials via moving morphable component (mmc) method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 113, p. 1653–1675, 3 2018. ISSN 0029-5981. Disponível em: doi:10.1002/nme.5714.

ZHANG, X. S.; CHI, H.; PAULINO, G. H. Adaptive multi-material topology optimization with hyperelastic materials under large deformations: A virtual element approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 370, p. 112976, 10 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/J.CMA.2020.112976.

ZHANG, X. S.; PAULINO, G. H.; RAMOS, A. S. Multi-material topology optimization with multiple volume constraints: a general approach applied to ground structures with material nonlinearity. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Verlag, v. 57, p. 161–182, 1 2018. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-017-1768-3.

ZHAO, L.; XU, B.; HAN, Y.; RONG, J. Concurrent design of composite macrostructure and cellular microstructure with respect to dynamic stress response under random excitations. **Composite Structures**, Elsevier, v. 257, p. 113123, 2 2021. ISSN 0263-8223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2020.113123.

ZHENG, J.; LONG, S.; LI, G. The topology optimization design for continuum structures based on the element free galerkin method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, p. 666–672, 7 2010. ISSN 0955-7997. Disponível em: doi:10.1016/j.enganabound.2010.03.001.

ZHENG, J.; LONG, S.; LI, G. Topology optimization of free vibrating continuum structures based on the element free galerkin method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 45, p. 119–127, 1 2012. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-011-0667-2.

ZHENG, J.; LONG, S.; XIONG, Y.; LI, G. A finite volume meshless local petrov-galerkin method for topology optimization design of the continuum structures. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, Tech Science Press, v. 42, p. 19–34, 1 2009. ISSN 1526-1492. Disponível em: doi:10.3970/CMES.2009.042.019.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The coc algorithm, part ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 89, p. 309–336, 8 1991. ISSN 0045-7825. Disponível em: doi:10.1016/0045-7825(91)90046-9.

ZHOU, S.; WANG, M. Y. Multimaterial structural topology optimization with a generalized cahn–hilliard model of multiphase transition. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 33, p. 89–111, 12 2006. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-006-0035-9.

ZUO, W.; SAITOU, K. Multi-material topology optimization using ordered simp interpolation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Verlag, v. 55, p. 477–491, 2 2017. ISSN 1615-147X. Disponível em: doi:10.1007/s00158-016-1513-3.

APÊNDICE A – TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste apêndice, uma ideia geral das principais técnicas utilizadas na resolução de problemas de otimização topológica é apresentada. Na Seção A.1, o método de Homogeneização é discutido, enquanto que sua variante conhecida como *Solid Isotropic Material with Penalisation* (SIMP, Material Isotrópico Sólido com Penalização) é descrita na Seção A.2. Na Seção A.3, a metodologia Conjunto de Nível é explicada. Por último, na Seção A.4, as abordagens Evolucionárias são explanadas.

A.1 Homogeneização

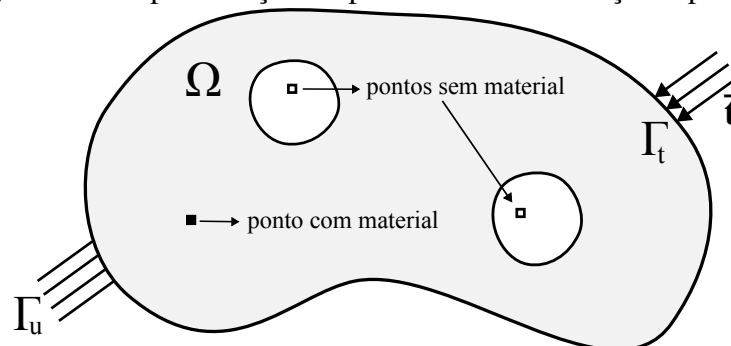
A otimização topológica consiste em determinar quais pontos do domínio contêm material e quais não contêm (Figura 53), ou seja, trata-se de um problema binário do tipo 0–1. Desse modo, o ideal é que existisse uma parametrização do tipo (BENDSØE; SIGMUND, 2004a),

$$D_{ijkl} = 1_{\Omega^{mat}} D_{ijkl}^0, \quad 1_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^{mat} \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases},$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega = Vol(\Omega^{mat}) \leq V = Vol(\Omega),$$

onde Ω é o domínio de projeto, Ω^{mat} é o subconjunto de Ω dos pontos que contêm material, D_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de elasticidade do material isotrópico dado e D_{ijkl} são as componentes do tensor calculadas para um ponto \mathbf{x} . Essa natureza discreta complica o processo

Figura 53 – Representação do problema de otimização topológica.

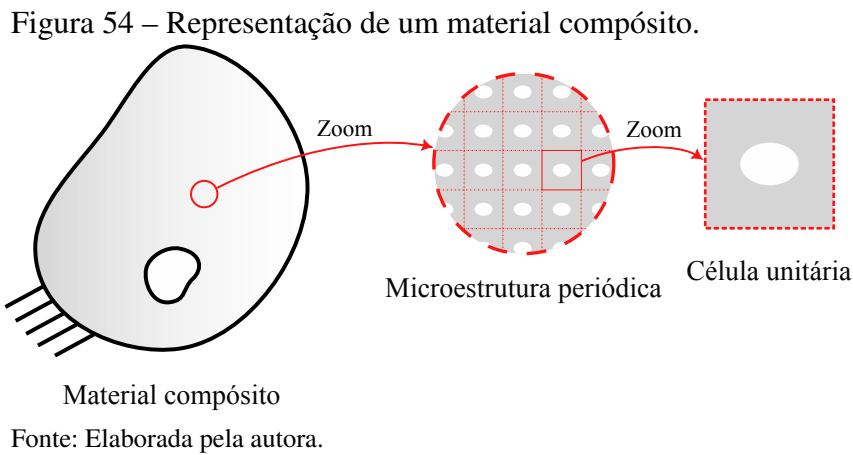


Fonte: Elaborada pela autora.

de resolução, pois envolve uma grande quantidade de variáveis de projeto e não há garantia de solução (SIGMUND; PETERSSON, 1998). A fim de relaxar esse problema, foi proposto o uso

de variáveis de projeto contínuas com o método de Homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

No método de Homogeneização, utiliza-se o conceito de materiais compósitos formados por células de base unitária, ou microestruturas, que se repetem de forma periódica gerando a heterogeneidade do meio (REIS, 2016), conforme ilustrado na Figura 54. Essas microestruturas são compostas por materiais homogêneos, geralmente isotrópicos. O meio heterogêneo é então substituído por um meio homogêneo equivalente (REIS, 2016), em que as propriedades efetivas são parametrizadas pelas características geométricas das microestruturas (SANT'ANNA, 2002).



Cada célula unitária possui várias variáveis de projeto que definem suas características geométricas e sua densidade. Assim, as seguintes equações são estabelecidas (SANT'ANNA, 2002)

$$D_{ijkl}(\mathbf{x}) = \tilde{D}_{ijkl}(\mu(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \dots, \theta(\mathbf{x})),$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mu(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \dots),$$

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \leq V,$$

$$0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1,$$

$$\mathbf{x} \in \Omega,$$

onde μ, γ, \dots são os parâmetros geométricos da célula e θ é sua orientação. \tilde{D}_{ijkl} são as componentes do tensor de elasticidade do material equivalente homogeneizado e ρ é a densidade de material na célula. A introdução da densidade como uma variável contínua é a ideia central do modelo para evitar as dificuldades associadas à resolução do problema de natureza discreta. O valor $\rho = 0$ indica um ponto sem material, $\rho = 1$ corresponde a um ponto com material e

os valores intermediários, ou seja, $0 < \rho < 1$, representam um material composto poroso e periódico.

Atualmente, existem duas vertentes associadas a esse método. Na abordagem original, conhecida somente como Homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), parte-se de considerações sobre a estrutura microscópica e chega-se ao comportamento macroscópico do material (PINTO, 2011). Enquanto que, na Homogeneização Inversa (SIGMUND, 1994), parte-se do comportamento macroscópico e busca-se obter as propriedades microscópicas do material (PINTO, 2011), isto é, o tensor do material é prescrito e utilizado como uma restrição no problema de otimização topológica.

A.2 Material Isotrópico Sólido com Penalização

O método SIMP, introduzido por Bendsøe (1989) e posteriormente por Mlejnek e Schirmacher (1993) e Fujii e Kikuchi (2000), é uma variação do método de Homogeneização, no qual uma única variável de projeto é considerada: a densidade do material, $\rho(\mathbf{x})$. Dependendo da geometria da microestrutura, muitos parâmetros devem ser otimizados, o que leva a uma elevação do custo computacional do método de Homogeneização. Dessa forma, o uso de uma única variável de projeto torna o procedimento mais simples.

Na abordagem SIMP, o tensor de elasticidade do material é parametrizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_{ijkl}(\mathbf{x}) &= \rho^p(\mathbf{x})D_{ijkl}^0, \\ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})d\Omega &\leq V, \\ 0 &\leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \\ \mathbf{x} &\in \Omega, \end{aligned}$$

onde p é o fator de penalização. A escolha do valor de penalização depende do problema físico a ser tratado. Por exemplo, para o problema da minimização da energia de deformação, $p > 1$ penaliza as densidades intermediárias tentando se aproximar de soluções do tipo 0–1. Escolher um valor para p muito baixo ou muito alto causa uma escala de cinza abundante ou uma convergência bastante rápida para mínimos locais (SIGMUND; MAUTE, 2013). Para problemas em que a restrição de volume é considerada, geralmente, a obtenção de projetos 0 – 1 é alcançada levando em conta $p \geq 3$ (BENDSØE; SIGMUND, 2004a). Um número “mágico” que garante uma boa convergência é $p = 3$ (BENDSØE; SIGMUND, 2004a; SIGMUND; MAUTE, 2013).

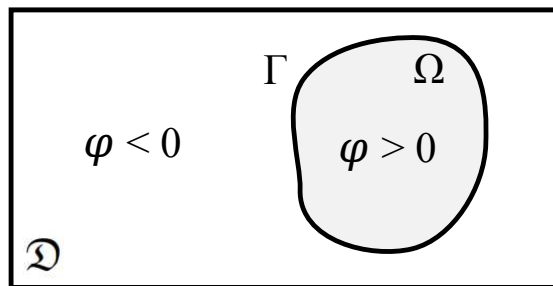
O problema de otimização pode ser resolvido com diferentes algoritmos de otimização baseados em gradiente, tais como (ZHENG *et al.*, 2012; LUO *et al.*, 2013): o método critério de otimalidade (ZHOU; ROZVANY, 1991); o método das assíntotas móveis (SVANBERG, 1987); e o método de programação linear sequencial (FUJII; KIKUCHI, 2000).

A.3 Conjunto de Nível

O método *Level Set* (LS, Conjunto de Nível) foi proposto na otimização topológica estrutural por Sethian e Wiegmann (2000). Nessa abordagem, a fronteira do domínio de projeto é definida pela curva de nível zero de uma função de conjunto de nível. Seja \mathcal{D} um domínio computacional e Ω o domínio de projeto que ocupa uma parte de \mathcal{D} (Figura 55). Se a estrutura projetada for composta de um único material, \mathcal{D} é considerado como sendo ocupado por dois materiais, um é o material sólido e o outro é vazio. Ω pode então ser representado implicitamente por uma função de conjunto de nível $\varphi(\mathbf{x})$, que é definida no domínio \mathcal{D} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &> 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ (material)}, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \text{ (interface)}, \\ \varphi(\mathbf{x}) &< 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus (\Omega \cup \Gamma) \text{ (vazio)}.\end{aligned}$$

Figura 55 – Representação da abordagem conjunto de nível para um único material.



Fonte: Elaborada pela autora.

A otimização topológica acontece através da movimentação da fronteira Γ (CARVALHO, 2020). Esse processo advém da atualização da função de conjunto de nível, que é geralmente realizada por meio da solução da equação de Hamilton-Jacobi expressa por (SIGMUND; MAUTE, 2013; DIJK *et al.*, 2013)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\bar{V} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$$

ou, considerando $\mathbf{n} = (\nabla\varphi)/(\|\nabla\varphi\|)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \bar{V}\|\nabla\varphi\| = 0,$$

onde t é um pseudo-tempo que representa a evolução do projeto no processo de otimização e \bar{V} é o módulo do vetor velocidade (*speed function*). A obtenção do resultado ótimo depende, em muitos casos, de um chute inicial para a topologia (SIGMUND; MAUTE, 2013; ULLAH *et al.*, 2022).

Durante o processo de atualização da função de conjunto de nível, os gradientes dessa função devem ser uniformes ao longo da interface, por exemplo, $\|\nabla\varphi\| \approx 1$ (SIGMUND; MAUTE, 2013). No entanto, a equação de Hamilton-Jacobi não garante esse requisito e esquemas de reinicialização são usados para evitar que os gradientes se tornem muito íngremes ou muito planos ao longo da interface (WANG *et al.*, 2003). O uso da equação de Hamilton-Jacobi também não permite a criação de novos furos durante o processo de otimização. A introdução de um novo furo normalmente é realizada em uma etapa separada, que pode afetar a convergência do processo (SIGMUND; MAUTE, 2013). Abordagens utilizando, por exemplo, derivadas topológicas (WANG *et al.*, 2007; ULLAH *et al.*, 2022) e combinando o método de conjunto de nível com funções de base radial já foram propostas (ULLAH *et al.*, 2022).

A.4 Otimização Estrutural Evolucionária e Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional

Visto que o problema de otimização topológica original é de natureza discreta, 0–1, é natural tentar resolvê-lo utilizando uma abordagem de otimização discreta. Um campo importante que faz uso desse tipo de abordagem são os métodos de otimização evolucionários. O método *Evolutionary Structural Optimization* (ESO, Otimização Estrutural Evolucionária) foi introduzido pela primeira vez por Xie e Steven (1992), Xie e Steven (1993). A ideia central consiste no conceito de que a estrutura evolui em direção a um ótimo removendo lentamente materiais de regiões consideradas “ineficientes”. Tipicamente baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), assim como as outras técnicas citadas anteriormente, a avaliação da ineficiência das regiões foi associada originalmente ao nível das tensões nos elementos. Elementos com tensões mais baixas são removidos da análise. Essa abordagem é conhecida como *hard-kill*. Com o intuito de maximizar a rigidez da estrutura, Chu *et al.* (1996) modificou o critério de tensão para a energia de deformação do elemento.

Uma extensão do ESO foi proposta por Querin *et al.* (1998), sendo denominada *Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO, Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional). O BESO permite não apenas retirar elementos ineficientes, mas também adicionar elementos em regiões consideradas “eficientes”. Novos elementos são adicionados em locais próximos aos elementos com tensões mais elevadas.

Nos métodos ESO e BESO originais, a remoção completa de um elemento do domínio do projeto pode resultar em dificuldades teóricas no processo de otimização topológica (HUANG; XIE, 2009; HUANG; XIE, 2010b). Algumas soluções podem ser encontradas na revisão de Xia *et al.* (2018), como a proposta por Huang e Xie (2009). Nessa abordagem, uma estratégia de penalização material, similar à utilizada na técnica SIMP, é incorporada ao método BESO por meio de uma metodologia *soft-kill*. Nessa metodologia, os elementos não são verdadeiramente removidos, são apenas suavizados, contribuindo pouco para a rigidez da estrutura.

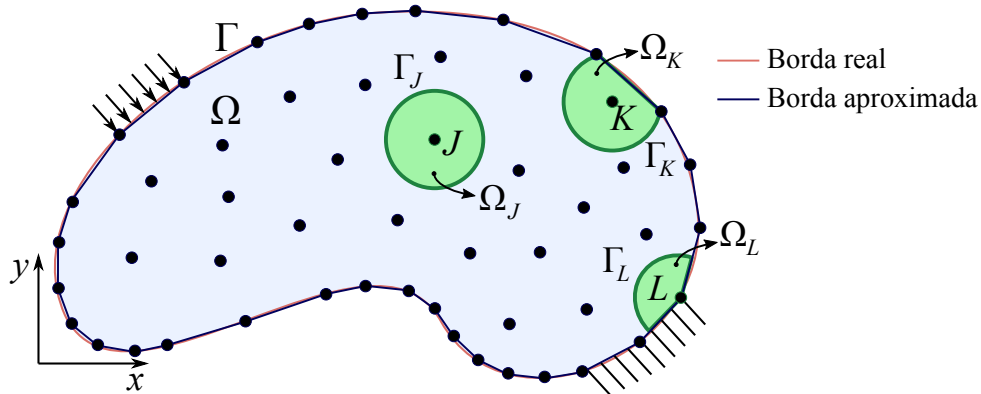
APÊNDICE B – PROCESSO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, as integrais são aproximadas através da quadratura de Gauss-Legendre. Sendo assim, este Apêndice apresenta uma breve explicação dos principais passos envolvidos nesse processo. A Seção B.1 mostra a construção dos subdomínios locais e suas fronteiras, enquanto que a Seção B.2 aborda como as integrais de borda são resolvidas.

B.1 Construção dos Subdomínios Locais e suas Fronteiras

Considerando um domínio Ω sua fronteira Γ é aproximada por segmentos de retas, como ilustrado na Figura 56. O corpo é discretizado por um conjunto de nós, em que cada nó I possui um subdomínio local, Ω_I , com uma fronteira local, Γ_I (Figura 56). Para construir os subdomínios, neste trabalho, são utilizados círculos centrados nos nós. As fronteiras locais podem ter suas formas modificadas, dependendo da interseção com a fronteira Γ , como exemplificado na Figura 56 com os nós K e L .

Figura 56 – Aproximação da fronteira Γ do domínio global Ω por segmentos de retas. As fronteiras dos subdomínios locais, Γ_J , Γ_K e Γ_L , são construídas a partir de círculos centrados nos nós e de suas interseções com a borda Γ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Para estabelecer a fronteira local, Γ_I , de um subdomínio, Ω_I , é necessário computar os pontos de interseção do círculo de raio r_e centrado no nó I , na posição $\mathbf{x}_I = [x_I \ y_I]^T$, com cada segmento de reta, $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}}$, no sentido anti-horário, como mostrado na Figura 57. Substituindo a equação paramétrica da reta que contém o segmento $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}}$,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_i + t(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) = \begin{cases} x(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i), \\ y(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.1})$$

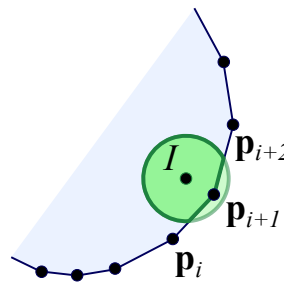
na equação do círculo,

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r_e^2, \quad (\text{B.2})$$

obtem-se

$$(x_i + t(x_{i+1} - x_i))^2 + (y_i + t(y_{i+1} - y_i))^2 = r_e^2. \quad (\text{B.3})$$

Figura 57 – Representação da interseção de um círculo com a fronteira do domínio, formada por segmentos de retas ordenados no sentido anti-horário.



Fonte: Elaborada pela autora.

A Equação (B.3) pode ser reescrita como uma equação de segundo grau na variável paramétrica t ,

$$\begin{aligned} & ((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2)t^2 \\ & + 2((x_i - x_I)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_I)(y_{i+1} - y_i))t \\ & + (x_i - x_I)^2 + (y_i - y_I)^2 - r_e^2 = 0. \end{aligned}$$

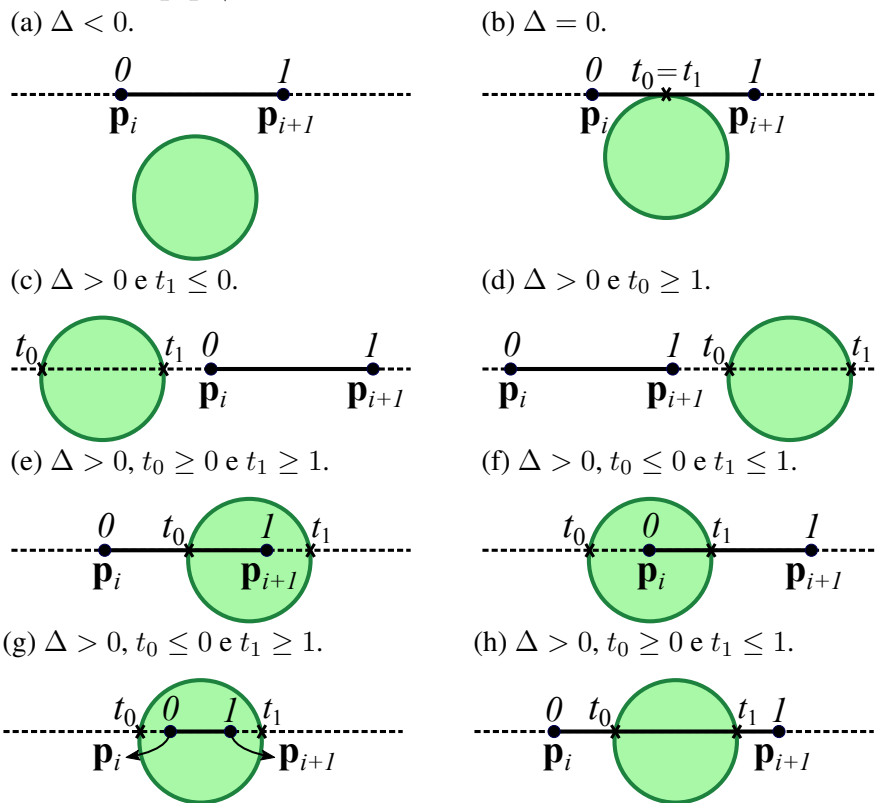
Definindo $a = (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$, $b = 2(\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_I) \cdot (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$ e $c = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_I) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_I) - r_e^2$, obtém-se a forma padrão

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (\text{B.4})$$

Resolvendo a Equação (B.4), três casos são possíveis dependendo do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$, então não existe interseção entre a reta que define o segmento e o círculo (Figura 58a). Se $\Delta = 0$, então existe um único ponto de interseção, isto é, $t_0 = t_1 = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ (Figura 58b). Caso contrário, $\Delta > 0$, existem dois pontos de interseção, dados pelas raízes reais, $t_0 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$ e $t_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$, porém, é necessário analisar onde ocorrem. Se $t_1 \leq 0$ ou $t_0 \geq 1$ (Figs. 58c e 58d), não existe interseção do segmento com o

círculo. Se $t_0 \geq 0$ e $t_1 \geq 1$ (Figura 58e), existe apenas um ponto de interseção no segmento de reta. O mesmo acontece para o caso em que $t_0 \leq 0$ e $t_1 \leq 1$ (Figura 58f). Se $t_0 \leq 0$ e $t_1 \geq 1$ (Figura 58g), não há interseção, contudo o segmento está completamente dentro do círculo. Se $t_0 \geq 0$ e $t_1 \leq 1$ (Figura 58h), existem dois pontos de interseção entre o círculo e o segmento de reta. Sendo assim, os casos que de fato alteram a fronteira do subdomínio são representados pelas Figuras 58e-58h.

Figura 58 – Casos de interseção entre a reta que define o segmento $\overline{p_i p_{i+1}}$ e o círculo.



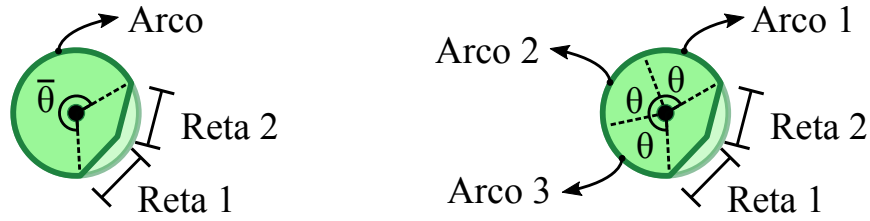
Fonte: Elaborada pela autora.

B.2 Quadratura de Gauss–Legendre

Uma vez que a força de corpo não é considerada neste trabalho, apenas integrais de borda precisam ser resolvidas (Equações (3.36) e (3.31)). Levando em conta o exemplo da Figura 57, após o cálculo das interseções (Seção B.1), a fronteira do subdomínio pode ser decomposta em dois casos: segmentos de reta e arcos de circunferência, conforme mostrado na Figura 59a. Seja θ_{th} um limiar para o ângulo máximo de um arco. Se $\bar{\theta} > \theta_{th}$ (Figura 59a), então é necessário subdividir o setor circular, criando arcos menores com ângulos $\theta \leq \theta_{th}$ (Figura 59b).

Dessa forma, após os processos mencionados anteriormente, os pontos de integração

Figura 59 – Decomposição da fronteira de um subdomínio em retas e arcos.
 (a) Subdomínio após a interseção com a fronteira do domínio global. (b) Subdivisão do setor circular para criar arcos com ângulos $\theta < \theta_{th}$.



Fonte: Elaborada pela autora.

podem ser gerados para cada caso. A Seção B.2.1 apresenta a quadratura de Gauss-Legendre para o caso do segmento de reta, enquanto que a Seção B.2.2 mostra para o caso do arco de circunferência.

B.2.1 Segmento de Retas

Considere a integral

$$\int_{\bar{\Gamma}_I} f(x, y) d\Gamma, \quad (\text{B.5})$$

onde f é a função a ser integrada e $\bar{\Gamma}_I$ é uma parte da fronteira Γ_I definida por um segmento de reta, $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$. Os pontos de integração da quadratura de Gauss-Legendre são estabelecidos em um espaço paramétrico ξ , para $-1 \leq \xi \leq 1$ (Figura 60), o que requer uma mudança de variável,

$$\int_{\bar{\Gamma}_I} f(x, y) d\Gamma = \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\xi)) \|\mathbf{p}'(\xi)\| d\xi. \quad (\text{B.6})$$

Tomando

$$\mathbf{p}(\xi) = \frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1}{2} + \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{2} \xi = \begin{cases} x(\xi) = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_1 - x_0}{2} \xi, \\ y(\xi) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} \xi, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

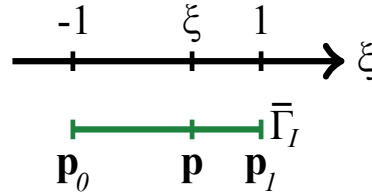
tem-se

$$\mathbf{p}'(\xi) = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{2} = \begin{cases} x'(\xi) = \frac{x_1 - x_0}{2}, \\ y'(\xi) = \frac{y_1 - y_0}{2}. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Assim sendo, a integral da Equação (B.5) é aproximada com a quadratura de Gauss-Legendre da seguinte forma,

$$\int_{\bar{\Gamma}_I} f(x, y) d\Gamma \approx \sum_{i=1}^Q \psi_i g(\xi_i), \quad (\text{B.9})$$

Figura 60 – Representação do espaço paramétrico ξ e do segmento de reta $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$.



Fonte: Elaborada pela autora.

onde Q é o total de pontos de integração, $g(\xi_i) = f(x(\xi_i), y(\xi_i))\|\mathbf{p}'(\xi_i)\|$ e ψ_i é o peso associado ao ponto i na posição ξ_i definido na Tabela 6. É importante notar que existem mais valores tabelados dependendo do total de pontos de integração utilizados para a aproximação (KAMERMANS, 2011).

Tabela 6 – Valores tabelados das posições paramétricas e dos pesos para diferentes quantidades de pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre.

Total de pontos (Q)	Posições paramétricas (ξ_i)	Pesos (ψ_i)
2	± 0.5773502691896257	1.0000000000000000
3	0.0000000000000000	0.8888888888888888
	± 0.7745966692414834	0.5555555555555556
4	± 0.3399810435848563	0.6521451548625461
	± 0.8611363115940526	0.3478548451374538

Fonte: Kamermans (2011).

B.2.2 Arco de Circunferência

Seja agora $\bar{\Gamma}_I$ um arco de circunferência de raio r_e , com ângulo $\theta \leq \theta_{th}$, definido pelos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 , como ilustrado na Figura 61. A mudança de variável na Equação (B.6) é feita de modo que

$$\mathbf{p}(\xi) = \begin{cases} x(\xi) = r_e \cos(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)), \\ y(\xi) = r_e \sin(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)), \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

onde

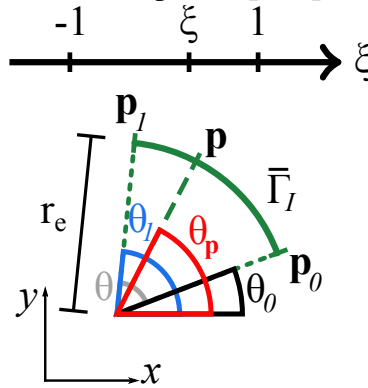
$$\theta_{\mathbf{p}}(\xi) = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\xi, \quad (\text{B.11})$$

em que θ_0 e θ_1 são os ângulos associados aos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 , respectivamente. Desse modo,

$$\mathbf{p}'(\xi) = \begin{cases} x'(\xi) = -r \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} \right) \sin(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)), \\ y'(\xi) = r \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} \right) \cos(\theta_{\mathbf{p}}(\xi)). \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

A integral é então resolvida com a aproximação da Equação (B.9).

Figura 61 – Representação do espaço paramétrico ξ e do arco de circunferência de raio r_e , com ângulo θ , definido pelos pontos \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 .



Fonte: Elaborada pela autora.