



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**JOÃO GABRIEL NAPOLEÃO SILVA**

**CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES BASEADO EM DADOS UTILIZANDO O  
LEMA DE PETERSEN E UMA ESTRATÉGIA ITERATIVA SUM-OF-SQUARES (SOS)**

**FORTALEZA**

**2023**

JOÃO GABRIEL NAPOLEÃO SILVA

CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES BASEADO EM DADOS UTILIZANDO O  
LEMA DE PETERSEN E UMA ESTRATÉGIA ITERATIVA SUM-OF-SQUARES (SOS)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Graduação em Engenharia elétrica do  
Centro de Tecnologia da Universidade Federal  
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do  
grau de bacharel em Engenharia elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Sousa  
Madeira.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S58c Silva, João Gabriel Napoleão.  
Controle de sistemas não lineares baseado em dados utilizando o lema de Petersen e uma estratégia iterativa Sum-of-Squares (SOS) / João Gabriel Napoleão Silva. – 2023.  
59 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira.
1. Sistemas dinâmicos polinomiais. 2. Controle não-linear baseado em dados. 3. Sum-of-squares. 4. Teoria de Lyapunov. I. Título.

CDD 621.3

---

JOÃO GABRIEL NAPOLEÃO SILVA

CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES BASEADO EM DADOS UTILIZANDO O  
LEMA DE PETERSEN E UMA ESTRATÉGIA ITERATIVA SUM-OF-SQUARES (SOS)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Graduação em Engenharia elétrica do  
Centro de Tecnologia da Universidade Federal  
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do  
grau de bacharel em Engenharia elétrica.

Aprovada em: 14 de Dezembro de 2023

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. José Willamy Medeiros Araújo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico a mim mesmo. Ao meu eu do passado, como um presente de final de um ciclo muito importante. E ao meu eu do futuro, como um marco no começo de uma jornada que até então eu não sabia que desajava trilhar.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, que me incentivaram a buscar o melhor para a minha educação. Aos meus amigos, que me acompanham e me apoiam mesmo que à distância. Aos meus professores, que me passaram o conhecimento necessário para que eu pudesse entender o mundo. Ao meu orientador Prof. Dr. Diego Madeira, que me apresentou ao mundo do controle não linear, ponto fundamental que me incentivou a perseguir uma carreira acadêmica nessa área tão fascinante. Aos companheiros de laboratório do LAMOTRIZ, professores e alunos, que me acompanharam tão de perto nesses meses de produção do trabalho de conclusão de curso. A todos que eu encontrei no meu caminho até aqui, pois, sem esses encontros, eu não seria quem sou.

"Enfrente a vida, sua dor, seu prazer, não deixe  
nenhum caminho por trilhar" (Neil Gaiman)

## RESUMO

A difícil tarefa de projetar leis de controle para sistemas dinâmicos não lineares é um desafio cada vez mais relevante em diversas áreas de atuação da engenharia. O estudo da estabilidade desses sistemas desempenha então um papel fundamental na sua compreensão e, conseqüentemente, na elaboração de métodos de controle estabilizante em torno de pontos de operação desejados. Nesse trabalho, foi aplicada a teoria de estabilidade de Lyapunov para controlar o modelo de um conversor buck e o oscilador de Van der Pol utilizando uma estratégia baseada em dados em que o lema de Petersen é essencial para obter uma condição de Lyapunov para estabilidade assintótica. Para a análise do sistema e o projeto do controlador foi empregado SOSTools, um pacote de ferramentas para o MATLAB, que utiliza abordagens em sum-of-squares para resolver inequações matriciais.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos polinomiais; Controle não-linear baseado em dados; Sum-of-squares; Teoria de Lyapunov.



## ABSTRACT

The design of control laws for nonlinear dynamical systems is an increasingly challenging task that holds relevance and prominence in control engineering. The study of system's stability plays a fundamental role in understanding them and, consequently, coping with methods able to stabilize control near desired operation points. In this context, we considered Lyapunov's stability approach in this work to devise controllers for a buck converter and Van der Pol's oscillator. In both applications a data-driven strategy was applied, where Petersen's lemma is vital in finding a Lyapunov condition for asymptotic stability. We conducted system analysis and controller synthesis via SOSTools, a MATLAB toolbox that employs a sum-of-squares approach to solve matrix inequalities.

**Keywords:** Polynomial dynamic systems; Nonlinear data-driven control; Sum-of-squares; Lyapunov's theory.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Estabilidade no sentido de Lyapunov . . . . .                                     | 16 |
| Figura 2 – Estabilidade assintótica . . . . .                                                | 17 |
| Figura 3 – Circuito esquemático de um conversor buck . . . . .                               | 37 |
| Figura 4 – Conversor buck - diagrama de fases - malha aberta . . . . .                       | 38 |
| Figura 5 – Conversor buck - Coleta de dados . . . . .                                        | 40 |
| Figura 6 – Conversor buck - Resposta no tempo - malha fechada . . . . .                      | 40 |
| Figura 7 – Conversor buck - Diagrama de fases - malha fechada . . . . .                      | 41 |
| Figura 8 – Oscilador de Van der Pol - diagrama de fases - malha aberta ( $e = 1$ ) . . . . . | 42 |
| Figura 9 – Oscilador de Van der Pol - Resposta no tempo - malha fechada . . . . .            | 43 |
| Figura 10 – Oscilador de Van der Pol - Diagrama de fases - malha fechada . . . . .           | 44 |
| Figura 11 – Oscilador de Van der Pol - Diagrama de fases - malha fechada - $x_0 = (-1;0,3)$  | 44 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|             |                                                                 |
|-------------|-----------------------------------------------------------------|
| <i>LMI</i>  | <i>Linear Matrix Inequality</i> /Desigualdade Matricial Linear  |
| <i>LTI</i>  | <i>Linear time-invariant</i> /Linear invariante no tempo        |
| <i>PWM</i>  | <i>Pulse Width Modulation</i> /Modulação por Largura de Pulso   |
| <i>SOF</i>  | <i>Static Output Feedback</i> /Realimentação estática de Saída  |
| <i>SOSP</i> | <i>Sum-of-Squares Program</i> /Programa de Soma de Quadrados    |
| <i>SOS</i>  | <i>Sum-Of-Squares</i> /Soma de Quadrados                        |
| <i>SSF</i>  | <i>Static State Feedback</i> /Realimentação estática de Estados |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                           |                                                                                         |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $A^T$                     | Matriz A transposta.                                                                    |
| $I_m$                     | Matriz identidade $m \times m$ .                                                        |
| $diag\{a_1, \dots, a_n\}$ | Matriz diagonal $n \times n$ com $a_1, \dots, a_n$ como elementos da diagonal principal |
| $ker(A)$                  | Núcleo de um operador matricial                                                         |
| $\forall x$               | para todo e qualquer valor de x                                                         |
| $A \succ 0$               | Matriz positiva definida                                                                |
| $A \succeq 0$             | Matriz positiva semidefinida                                                            |
| $A \prec 0$               | Matriz negativa definida                                                                |
| $A \preceq 0$             | Matriz negativa semidefinida                                                            |
| $\nabla$                  | Operador gradiente.                                                                     |
| $\Sigma[x]$               | Soma de quadrados em x.                                                                 |
| $\ x\ $                   | Norma Euclidiana do vetor x, dada por $\sqrt{x^T \cdot x}$ .                            |
| $\mathbb{R}$              | Conjunto dos números reais                                                              |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$ | Conjunto das matrizes reais $m \times n$                                                |
| $Hz$                      | Hertz - unidade de frequência                                                           |
| $H$                       | Henry - unidade de indutância                                                           |
| $F$                       | Farad - unidade de capacitância                                                         |
| $V$                       | Volt - unidade de tensão elétrica                                                       |
| $A$                       | Ampére - unidade de corrente elétrica                                                   |
| $\square$                 | QED - <i>Quod erat demonstrandum</i> /Como havia de ser demonstrado                     |

## SUMÁRIO

|              |                                                                          |           |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                        | <b>12</b> |
| <b>1.1</b>   | <b>Objetivo</b>                                                          | <b>13</b> |
| <b>2</b>     | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>                                             | <b>14</b> |
| <b>2.1</b>   | <b>Sistemas dinâmicos</b>                                                | <b>14</b> |
| <b>2.2</b>   | <b>Pontos de equilíbrio</b>                                              | <b>15</b> |
| <b>2.3</b>   | <b>Estabilidade de Lyapunov</b>                                          | <b>16</b> |
| <b>2.4</b>   | <b>Controle baseado em dados para sistemas lineares</b>                  | <b>18</b> |
| <b>2.4.1</b> | <i>Reformulações do conjunto <math>\mathcal{C}</math> e propriedades</i> | <b>19</b> |
| <b>2.4.2</b> | <i>Lema de Petersen e projeto de uma lei de controle</i>                 | <b>27</b> |
| <b>2.5</b>   | <b>Controle baseado em dados para sistemas polinomiais</b>               | <b>29</b> |
| <b>3</b>     | <b>MÉTODO APLICADO</b>                                                   | <b>33</b> |
| <b>3.1</b>   | <b>Abordagem utilizando LMIs e SOS</b>                                   | <b>33</b> |
| <b>3.2</b>   | <b>Coleta de dados</b>                                                   | <b>34</b> |
| <b>3.3</b>   | <b>Algoritmo</b>                                                         | <b>35</b> |
| <b>4</b>     | <b>EXPERIMENTO</b>                                                       | <b>37</b> |
| <b>4.1</b>   | <b>Sistema Linear - Conversor Buck</b>                                   | <b>37</b> |
| <b>4.2</b>   | <b>Sistema Polinomial - Oscilador de Van der Pol</b>                     | <b>41</b> |
| <b>5</b>     | <b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>                                    | <b>45</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                       | <b>47</b> |
|              | <b>APÊNDICE A –CÓDIGOS</b>                                               | <b>48</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos possibilita que seu comportamento seja modelado por equações matemáticas que descrevem a evolução desse sistema ao longo do tempo (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008). Na engenharia, é comum a necessidade de controlar tais sistemas para que seu comportamento seja o mais próximo do desejado para cada aplicação. Para isso, há a necessidade de controlar esses sistemas, majoritariamente por controle de realimentação, e o projeto de um controlador que modifique as entradas do sistema para que o efeito nas saídas do sistema seja de estabilização em um ponto de operação, rejeição de distúrbios, seguimento de referência, entre outros.

Abordagens de controle de sistemas dinâmicos, em sua maioria inerentemente não lineares, muitas vezes envolvem a linearização do sistema em torno de um ponto de operação desejado. Entretanto, essas abordagens desconsideram certas complexidades do sistema, o que pode resultar em erros entre o modelo obtido e o sistema real, ou atuação em faixas de operação limitadas. A complexidade crescente dos sistemas dinâmicos na engenharia requer cada vez mais o uso de abordagens que considerem as não-linearidades para uma modelagem mais precisa, o que resulta em leis de controle mais robustas.

Um dos conceitos extremamente importantes quando se analisa o um sistema dinâmico é o de estabilidade. Teorias de estabilidade dizem respeito aos comportamentos das trajetórias do sistema em torno de um ponto de equilíbrio, uma vez que os sistemas estão sempre sujeitos a perturbações externas e à faixa de precisão ou tolerância dos seus componentes (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008). A Teoria de Lyapunov fornece condições matemáticas para tal análise. Desenvolvida por Aleksandr Lyapunov, primariamente para o estudo de equilíbrio e movimento de sistemas mecânicos, a Teoria de Lyapunov apresenta condições que, se satisfeitas, garantem a estabilidade, estabilidade assintótica ou estabilidade exponencial. Suas implicações são de fundamental importância no estudo dos sistemas dinâmicos e no projeto de leis de controle.

Dito isso, para que seja possível a análise de um sistema, a modelagem das equações que descrevem seu comportamento é fundamental. Métodos bastante utilizados envolvem etapas de ensaios para coletas de dados do sistema – na qual submete-se o sistema a um sinal de excitação na sua entrada e observa-se o comportamento dos parâmetros que se quer controlar – e identificação – na qual, de posse dos dados obtidos com o ensaio, procura-se estimar os parâmetros e equações que modelam o sistema satisfazendo essas relações de entrada-

saída. Métodos de identificação são relevantes pois há casos em que não é possível modelar o sistema com base apenas em equações conhecidas que descrevem os fenômenos que regem o comportamento do sistema, como quando se desconhece os parâmetros de um sistema já em operação. Para contornar esse problema, existem as abordagens baseadas nos dados, ou *data-driven*, que visam não necessitar de uma etapa de identificação intermediária, projetando uma lei de controle apenas com os dados obtidos das medições do sistema. Esse tipo de abordagem ganha ainda mais importância em casos em que identificar o sistema requer muito tempo, em casos em que os dados estão sujeitos a distúrbios que provocam erros de medição ou casos em que há presença de não-linearidades no sistema (PERSIS C. ; TESI, 2020).

## 1.1 Objetivo

Baseado nesses conceitos introdutórios acima, é crescente o número de trabalhos que fornecem propostas de métodos para controle baseado em dados para sistemas não lineares. Este trabalho tem como objetivo aplicar algoritmos que projetem leis de controle para sistemas lineares e para sistemas polinomiais, uma classe particular de sistemas não lineares. O método em que se baseiam os algoritmos é o proposto em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022), que utiliza o Lema de Petersen e a Teoria de Lyapunov para projetar um controlador que garanta estabilidade assintótica na origem do sistema.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para realizar o controle de sistemas dinâmicos, é necessário inicialmente desenvolver as ferramentas matemáticas necessárias para descrever seu comportamento ao longo do tempo. É através dessa modelagem matemática dos fenômenos físicos que fazem parte dos sistemas que pretende-se controlar que se analisa

### 2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico não-linear consiste de um conjunto de possíveis estados tais que o conhecimento do valor inicial desses estados, combinado ao conhecimento de uma entrada externa ao sistema, determina completamente seu comportamento em qualquer instante de tempo (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008). Esses sistemas podem ser representados por um conjunto de equações diferenciais que relacionam a taxa de variação de cada uma das variáveis do sistema com as demais variáveis e com o sinal entrada. Sendo assim, considere um vetor de estados  $x \in \mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$  e uma entrada  $u \in \mathcal{U} \in \mathbb{R}^m$ , tais que

$$\dot{x} = F(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in [t_0, t_1] \quad (2.1)$$

O sistema (2.1) é referido como não-linear *variante no tempo* e, para os casos em que a dinâmica entrada-saída do sistema não muda a medida que o tempo passa, o sistema é dito como *invariante no tempo* ou *autônomo*, podendo ser definido como

$$F(t_0, x, u) = F(t, x, u), \quad \forall (t, x, u) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \quad (2.2)$$

Além disso, a equação (2.2) pode ser escrita como um sistema afim na entrada:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.3)$$

Baseados em (2.3), casos particulares podem ser modelados de forma mais específica. No caso em que o sistema é *Linear time-invariant/Linear invariante no tempo (LTI)*,  $f(x)$  e  $g(x)$  podem ser representadas por matrizes de coeficientes constantes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que multiplicam vetores contendo os estados e o controle, respectivamente. A saída do sistema  $y$  é



definida analogamente e ao realimentar a saída  $y$  no próprio sistema, para fins de controle, ele passa a ser um sistema em *malha fechada*. Se  $y$  for influenciada por todos os estados de  $x$ , é dito que o sistema possui *Static State Feedback/Realimentação estática de Estados (SSF)*. Se não há todos os estados presentes na saída, seja por impossibilidade de medição, ou decisão de projeto não levar em consideração todos os estados, é dito que o sistema possui *Static Output Feedback/Realimentação estática de Saída (SOF)*. A representação matemática em *espaços de estados* de (2.3) para *LTI* está escrita a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.4}$$

No caso em que  $f(x)$  e  $g(x)$  são polinômios, elas podem ser escritas da seguinte forma (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = AZ(x) + BW(x)u\tag{2.5}$$

O vetor  $Z(x) \in \mathbb{R}^N$  e a matriz  $W(x) \in \mathbb{R}^{M \times m}$  de 2.5 são chamados de regressores e são compostos pelos monômios dos estados de  $x$ . As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times M}$  de 2.5 possuem os coeficientes dos monômios de  $Z$  e  $W$ . Analogamente a (2.3), pode-se definir uma saída do sistema  $y \in \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$ , tal que

$$y = h(x) + d(x)u\tag{2.6}$$

Essa realimentação é dita ser uma *SSF*, se  $h(x)$  possuir todos os estados de  $x$ . Caso haja menos que o número total de estados, como, por exemplo, na impossibilidade de medição de algum deles, é dita ser uma *SOF*.

Neste trabalho, foram feitos algoritmos de análise de estabilidade e controle baseado em dados para sistemas polinomiais com *SSF*.

## 2.2 Pontos de equilíbrio

Um ponto  $x_{eq}$  é definido como *ponto de equilíbrio* de (2.1) se o valor de  $x$  fica suficientemente perto de  $x_{eq}$  quando o sistema é submetido a perturbações arbitrariamente

pequenas, ou seja,  $x_{eq} \in \mathcal{X}$  tal que  $x \rightarrow x_{eq}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Além disso, um ponto de equilíbrio  $x_{eq} \in \mathcal{X}$  de 2.1 é um ponto de equilíbrio *isolado* se existe uma bola aberta  $B_\varepsilon(x_{eq})$  em torno dele – definida como  $B_\varepsilon(x_{eq}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_{eq}\| < \varepsilon\}$  – que não contenha nenhum outro ponto de equilíbrio além de  $x_{eq}$ .

### 2.3 Estabilidade de Lyapunov

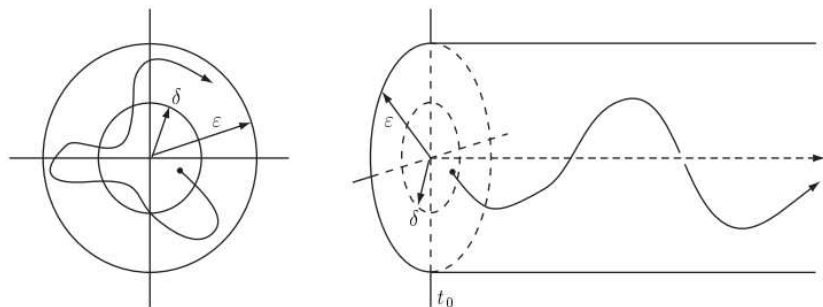
Como mostrado em (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008), a Teoria da Estabilidade de Lyapunov é uma ferramenta matemática que analisa o comportamento de um sistema dinâmico em relação a seus possíveis pontos de equilíbrio. Considerando o sistema dinâmico não-linear

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x(t) \in \mathcal{X}, \quad 0 \in \mathcal{X}, \quad (2.7)$$

e supondo que  $f(0) = 0$  e que  $f(x)$  é uma função Lipschitz-contínua, i.e.,  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y$  – o que implica na existência de uma função  $x(t)$  que é solução de (2.7) e que é diferente para cada condição inicial – a estabilidade da Teoria de Lyapunov é definida como:

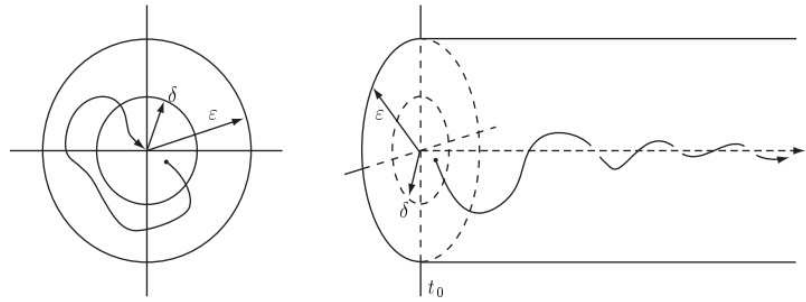
- Definição 1** (i) A solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.7) é estável no sentido de Lyapunov se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que, se  $\|x(0)\| < \delta$ , então  $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq 0$ .
- (ii) A solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.7) é assintoticamente estável se é estável no sentido de Lyapunov e existe  $\delta > 0$  tal que, se  $\|x(0)\| < \delta$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .
- (iii) A solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.7) é exponencialmente estável se existem constantes  $\alpha, \beta$  e  $\delta$  tais que, se  $\|x(0)\| < \delta$ , então  $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|e^{-\beta t}, t \geq 0$ .

Figura 1 – Estabilidade no sentido de Lyapunov



Fonte: (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008)

Figura 2 – Estabilidade assintótica



Fonte: (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008)

As figuras 1 e 2 ilustram como é o comportamento da trajetória de uma variável  $x$  para as estabilidades no sentido de Lyapunov e assintótica. Nota-se que a estabilidade no sentido de Lyapunov não garante a convergência para um ponto de equilíbrio, ela apenas garante que os valores de  $x$  nunca ficam consideravelmente afastados dados  $\delta$  e  $\epsilon$ . Já a estabilidade assintótica garante uma convergência para o ponto de equilíbrio a medida que o tempo tende ao infinito.

**Teorema 1 (Teorema de Lyapunov)** *Considere o sistema dinâmico não-linear (2.7) e assuma a existência de uma função continuamente diferenciável  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, & V(x) &> 0, & x \in \mathcal{X}, x \neq 0, \\ \nabla V(x)^T f(x) &\leq 0, & && x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

*Então, a solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.7) é estável no sentido de Lyapunov. Se, além disso,*

$$\nabla V(x)^T f(x) < 0, \quad x \in \mathcal{X}, x \neq 0, \quad (2.9)$$

*então a solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.7) é assintoticamente estável. Por fim, se existem escalares  $\alpha, \beta, \epsilon > 0$  e  $p \geq 1$ , tais que*

$$\begin{aligned} \alpha \|x\|^p &\leq V(x) \leq \beta \|x\|^p, & x \in \mathcal{X}, \\ \nabla V(x)^T f(x) &\leq -\epsilon V(x), & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

*então a solução  $x(t) \equiv 0$  de (2.7) é exponencialmente estável.*

A importância do Teorema de Lyapunov se dá pois, ao verificar a existência de uma função de Lyapunov  $V$  que satisfaça alguma das condições apresentadas no Teorema 1, é possível fazer afirmações sobre o grau de estabilidade do sistema analisado.

## 2.4 Controle baseado em dados para sistemas lineares

Os resultados apresentados nesta seção foram retirados ou demonstrados a partir dos resultados presentes em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022). Na modelagem do problema, foi considerado um sistema *LTI* com distúrbio.

$$\dot{x} = A_*x + B_*u + d, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

As matrizes  $A_*$  e  $B_*$  representam o modelo exato da planta que, na abordagem baseada em dados, são considerados desconhecidos. O objetivo é projetar uma lei de controle em *SSF*,

$$u = Kx \quad (2.12)$$

que faça com que a matriz de malha fechada  $A_* + B_*K$  seja Hurwitz-estável, i.e., com todos os seus auto-valores tendo parte real negativa. Como não se conhece o par  $[A_* \ B_*]$ , e o distúrbio  $d$  faz com que haja incerteza nos dados, isso resulta num conjunto  $\mathcal{C}$  que contém todos os pares de matrizes  $[A \ B]$  com matrizes compatíveis com os dados, incluindo  $[A_* \ B_*]$ .

As funções de Lyapunov para sistemas lineares possuem uma representação conhecida, sendo essa  $V = xPx^T$ ,  $P = P^T \succ 0$ . Então de acordo com a teoria de Lyapunov e com controle  $u$  em (2.12), o sistema em malha fechada é assintoticamente estável se

$$\dot{V} \prec 0$$

Aplicando a regra do produto em  $V = x^T Px$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} &\prec 0 \\ ((A + BK)x)^T Px + x^T P(A + BK)x &\prec 0 \\ x^T (A + BK)^T Px + x^T P(A + BK)x &\prec 0 \\ x^T ((A + BK)^T P + P(A + BK))x &\prec 0 \end{aligned}$$

Um produto  $x^T Mx$  é definido negativo se, e somente se,  $M$  for definido negativo. Logo, procura-se achar um  $P$  e um  $K$  que satisfaça

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) \prec 0 \quad (2.13)$$

Essa inequação conhecida como a condição de Lyapunov para sistemas *LTI*.

Para obter os dados, é aplicado no sistema uma sequência de entrada  $u(t_0), \dots, u(t_{T-1})$  de  $T$  amostras e são medidos os valores dos estados  $x(t_0), \dots, x(t_{T-1})$  e as suas derivadas  $\dot{x}(t_0), \dots, \dot{x}(t_{T-1})$ . O distúrbio  $d(t_0), \dots, d(t_{T-1})$  não pode ser medido, mas está presente nos dados coletados. Os dados obtidos são organizados em matrizes

$$\begin{aligned} X_0 &:= [x(t_0) \cdots x(t_{T-1})] \\ U_0 &:= [u(t_0) \cdots u(t_{T-1})] \\ X_1 &:= [\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{T-1})] \end{aligned} \quad (2.14)$$

e o distúrbio  $D_0 := [d(t_0) \cdots d(t_{T-1})]$  desconhecido é considerado ter energia limitada, ou seja,  $D_0 \in \mathcal{D}$ , onde, para alguma matrix  $\Delta$ ,

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathbb{R}^{n \times T} : DD^T \preceq \Delta \Delta^T\} \quad (2.15)$$

As medições em (2.14) e  $\mathcal{D}$  em (2.15) definem o conjunto de matrizes *compatíveis com os dados*

$$\mathcal{C} := \{[A \ B] : X_1 = A.X_0 + B.U_0 + D, D \in \mathcal{D}\}, \quad (2.16)$$

que contempla todos os pares de matrizes  $[A \ B]$  que poderiam gerar  $X_0$ ,  $U_0$  e  $X_1$  ao mesmo tempo que  $D_0$  satisfaz (2.15). Com o objetivo de projetar um sinal de controle 2.12, é necessário reformular o conjunto  $\mathcal{C}$ .

#### 2.4.1 Reformulações do conjunto $\mathcal{C}$ e propriedades

Ao substituir em (2.15), a definição do conjunto  $\mathcal{C}$ , obtém-se

$$\mathcal{C} = \{[A \ B] : X_1 = AX_0 + BU_0 + D, D \in \mathbb{R}^{n \times T}, DD^T - \Delta \Delta^T \preceq 0\} \quad (2.17)$$

Em seguida, isola-se o termo  $D$  na equação – resultando em  $D = X_1 - AX_0 - BU_0$  – e substitui-se a expressão obtida na inequação matricial.

$$(X_1 - AX_0 - BU_0)(X_1^T - X_0^T A^T - U_0^T B^T) - \Delta \Delta^T \preceq 0 \quad (2.18)$$

Desenvolvendo a expressão acima e reorganizando em um produto de matrizes:

$$\begin{aligned}
& X_1 X_1^T - X_1 X_0^T A^T - X_1 U_0^T B^T - A X_0 X_1^T + A X_0 X_0^T A^T \\
& + A X_0 U_0^T B^T - B U_0 X_1^T + B U_0 X_0^T A^T + B U_0 U_0^T B^T - \Delta \Delta^T \preceq 0 \\
& \begin{bmatrix} 1 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 X_1^T - \Delta \Delta^T & \begin{bmatrix} -X_1 U_0^T & -X_1 U_0^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -X_0 X_1^T \\ -U_0 X_1^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_0 X_0^T & X_0 U_0^T \\ -U_0 X_0^T & U_0 U_0^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A^T \\ B^T \end{bmatrix} \preceq 0 \\
& \begin{bmatrix} 1 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 X_1^T - \Delta \Delta^T & -X_1 \begin{bmatrix} X_0^T & U_0^T \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} X_1^T & \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^T & U_0^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A^T \\ B^T \end{bmatrix} \preceq 0 \\
& \begin{bmatrix} 1 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 X_1^T - \Delta \Delta^T & -X_1 \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \\ - \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} X_1^T & \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A^T \\ B^T \end{bmatrix} \preceq 0
\end{aligned}$$

A partir desse resultado, pode-se definir novas matrizes de dados  $A_d, B_d$  e  $C_d$  como

$$\begin{bmatrix} C_d & B_d^T \\ B_d & A_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X_1 X_1^T - \Delta \Delta^T & -X_1 \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \\ - \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} X_1^T & \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Com (2.19), o conjunto  $\mathcal{C}$  é reescrito de forma mais concisa em

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{[A \ B] : [1 \ A \ B] \begin{bmatrix} C_d & B_d^T \\ B_d & A_d \end{bmatrix} [1 \ A \ B]^T \preceq 0\} \\
&= \{[A \ B] = Z^T : C_d + B_d^T Z + Z^T B_d + Z^T A_d Z \preceq 0\}
\end{aligned} \quad (2.20)$$

Essa definição de  $\mathcal{C}$  como (2.20) assemelha-se à definição de elipsóides vetoriais.

Um elipsóide vetorial é definido por parâmetros  $c \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^q$  e  $a \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , tais que  $\{z \in \mathbb{R}^q : c + b^T z + z^T b + z^T a z \leq 0\}$ . Essa semelhança permite tratar dessa análise do sistema vindo o conjunto  $\mathcal{C}$  como um elipsóide que contém  $[A \ B]$ , e é feita uma outra reformulação na expressão do conjunto  $\mathcal{C}$ , em que

$$\mathcal{C} = \{[A \ B] = Z^T : (Z - \zeta)^T A_d (Z - \zeta) \preceq Q\} \quad (2.21)$$

$$\zeta := -A_d^{-1} B_d, \quad Q := B_d^T A_d^{-1} B_d - C_d \quad (2.22)$$

Para comprovar a equivalência de (2.20) e (2.21), substitui-se (2.22) em (2.21), como demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} (Z - \zeta)^T A_d (Z - \zeta) &\preceq Q \\ (Z + A_d^{-1} B_d)^T A_d (Z + A_d^{-1} B_d) &\preceq B_d^T A_d^{-1} B_d - C_d \\ Z^T A_d Z + Z^T A_d A_d^{-1} B_d + B_d^T A_d^{-1} A_d Z + B_d^T A_d^{-1} A_d A_d^{-1} B_d &\preceq B_d^T A_d^{-1} B_d - C_d \\ Z^T A_d Z + Z^T B_d + B_d^T Z + B_d^T A_d^{-1} B_d &\preceq B_d^T A_d^{-1} B_d - C_d \\ Z^T A_d Z + Z^T B_d + B_d^T Z + C_d &\preceq 0 \end{aligned}$$

Como, nas matrizes de dados em (2.19), apenas  $C_d$  depende da energia total do ruído, e nas matrizes do elipsoide em (2.22), apenas  $Q$  depende de  $C_d$ , pode-se dizer que o tamanho do elipsóide (2.21) é influenciado pelo tamanho do ruído, visto que quanto maior a energia total do ruído, maior o número de pares  $[A \ B]$  capazes de gerar os dados analisados, aumentando a incerteza do conjunto  $\mathcal{C}$ . Sendo assim,  $Q$  pode ser visto como o raio da incerteza de  $\mathcal{C}$ , e  $\zeta$ , que não depende do ruído, é o centro do conjunto. Nessa interpretação, o caso ideal seria se  $Q$  fosse o mais próxima de zero possível, e  $\zeta$  como o centro da incerteza, se aproximaria de  $[A_* \ B_*]$  em (2.11).

Para que os dados sejam um conjunto de valores que descrevam completamente o comportamento do sistema, é necessário que a matriz  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  tenha suas *linhas completas* (WILLEMS JAN C.; RAPISARDA, 2005). Essa condição está relacionada com a persistência de excitação de  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$ , que implica no fato de ela conter informação suficiente para descrever qualquer relação entrada-saída do sistema como uma combinação linear dos dados obtidos (PERSIS C. ; TESI, 2020). Caso essa condição não seja garantida, pode-se aumentar o número de amostras a fim de possuir uma quantidade suficientemente grande que garanta a persistência de excitação. Então,  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  ser persistentemente excitada, influencia diretamente em  $A_d$  (2.19) e  $Q$  (2.22) conforme apresentado nos lemas a seguir:

**Lema 1** Assumindo que  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  seja da classe de matrizes com linhas completas,  $A_d \succ 0$  e  $Q \succeq 0$ .

*Prova:*  $A_d \succ 0$  é consequência direta da persistência de excitação de  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  (PERSIS C. ; TESI, 2020), com  $A_d$  é definida em (2.19). Já  $Q$  pode ser escrita substituindo (2.19) em (2.22)

$$\begin{aligned} Q &= B_d^T A_d^{-1} B_d - C_d \\ &= X_1 \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} X_1 - X_1 X_1^T + \Delta \Delta^T \end{aligned}$$

Definindo  $Q_p := \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  verifica-se que  $Q_p^2 = Q_p$ , o que a classifica como uma matriz de projeção. Então

$$Q = X_1 Q_p X_1^T - X_1 X_1^T + \Delta \Delta^T \quad (2.23)$$

Sendo  $X_1 = A_* X_0 + B_* U_0 + D_0 = \begin{bmatrix} A_* & B_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} + D_0$ , logo

$$\begin{aligned} X_1 Q_p - X_1 &= \left( \begin{bmatrix} A_* & B_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} + D_0 \right) \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} A_* & B_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} - D_0 \\ &= \begin{bmatrix} A_* & B_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} + D_0 \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} A_* & B_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix} - D_0 \\ &= D_0 Q_p - D_0 \square \end{aligned}$$

Analogamente ao resultado acima, temos que  $Q_p X_1^T - X_1^T = (X_1 Q_p - X_1)^T = (D_0 Q_p - D_0)^T = Q_p D_0^T - D_0^T$ , portanto, substituindo em (2.23), temos



$$\begin{aligned}
Q &= X_1 Q_p X_1^T - X_1 X_1^T + \Delta \Delta^T \\
&= (X_1 Q_p - X_1) X_1^T + \Delta \Delta^T \\
&= (D_0 Q_p - D_0) X_1^T + \Delta \Delta^T \\
&= D_0 (Q_p X_1^T - X_1^T) + \Delta \Delta^T \\
&= D_0 (Q_p D_0^T - D_0^T) + \Delta \Delta^T \\
&= D_0 Q_p D_0^T - D_0 D_0^T + \Delta \Delta^T
\end{aligned}$$

Já que  $Q_p \succeq 0$  e  $D_0 \in \mathcal{D}$  (2.15),

$$\begin{aligned}
Q &= D_0 Q_p D_0^T + \Delta \Delta^T - D_0 D_0^T \\
&\succeq \Delta \Delta^T - D_0 D_0^T \\
&\succeq 0.
\end{aligned}$$

**Lema 2** Assumindo que  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  seja da classe de matrizes com linhas completas,  $\mathcal{C}$  é um conjunto limitado em relação à qualquer norma matricial.

*Prova:* Considerando  $\mathcal{C}$  em (2.21), que é um conjunto não vazio, já que  $\zeta^T \in \mathcal{C}$ .  $Z^T \in \mathcal{C}$  se, e somente se, para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v^T (Z - \zeta)^T A_d (Z - \zeta) v \leq v^T Q v$ . Então, denota-se  $\lambda_{mx}(A_d)$  o maior autovalor de  $A_d$ . Aplicando a raiz quadrada nos dois lados da inequação, obtém-se

$$|A_d^{1/2}| |(Z - \zeta)v| \leq |Q^{1/2}v|, \forall v : |v| = 1$$

Utilizando a norma-2 induzida como  $|A_d^{1/2}|^2 = \lambda_{mx}((A_d^{1/2})^T A_d^{1/2}) = \lambda_{mx}(A_d)$  e  $|Mv| = \sup_{|v|=1} |Mv|$  (HORN ROGER A.; JOHNSON, 2013), implica em

$$\sqrt{\lambda_{mx}(A_d)} \sup_{|v|=1} |(Z - \zeta)v| \leq \sup_{|v|=1} |Q^{1/2}v|$$

Desenvolvendo a expressão acima e a partir da desigualdade triangular reversa, pode-se obter

$$\begin{aligned}
\sup_{|v|=1} |(Z - \zeta)v| &\leq \lambda_{mx}(A_d)^{-1/2} \sup_{|v|=1} |Q^{1/2}v| \\
\implies \|Z - \zeta\| &\leq \lambda_{mx}(A_d)^{-1/2} \|Q^{1/2}\| \\
\implies \|Z\| - \|\zeta\| &\leq \|Z - \zeta\| \leq \lambda_{mx}(A_d)^{-1/2} \|Q^{1/2}\| \\
\implies \|Z\| &\leq \|\zeta\| + \lambda_{mx}(A_d)^{-1/2} \|Q^{1/2}\|
\end{aligned}$$

Como todas os valores do lado direito da inequação não são infinitos,  $Z$  é limitado em relação à norma-2. Além disso, quaisquer normas matriciais são equivalentes através de uma constante finita  $C_{ab}$ , tal que  $\|M\|_a \leq C_{ab}\|M\|_b$  para qualquer matriz  $M$  (HORN ROGER A.; JOHNSON, 2013). Logo, se  $Z$  é limitada em relação à norma-2, implica em ela ser limitada para qualquer norma-n.  $\square$

Para que possa ser aplicado lema de Petersen – que será apresentado posteriormente –, será feita uma última reformulação de  $\mathcal{C}$ . Define-se o conjunto

$$\mathcal{E} := \{\zeta + A_d^{-1/2}\Upsilon Q^{1/2} : \|\Upsilon\| \leq 1\} \quad (2.24)$$

e demonstra-se que ele é equivalente ao conjunto  $\mathcal{C}$  na proposição a seguir.

**Proposição 1** Sendo  $A_d \succ 0$  e  $Q \succeq 0$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{E}$

*Prova:* É suficiente provar que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$  e  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ .

Para  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ , suponha que  $Z^T \in \mathcal{E}$ , ou seja,  $Z^T = \zeta + A_d^{-1/2}\Upsilon Q^{1/2}$ , para alguma matriz  $\Upsilon$  que satisfaça  $\|\Upsilon\| \leq 1$ . Logo,

$$\begin{aligned}
(Z - \zeta)^T A_d (Z - \zeta) &= (A_d^{-1/2}\Upsilon Q^{1/2})^T A_d (A_d^{-1/2}\Upsilon Q^{1/2}) \\
&= Q^{1/2}\Upsilon^T A_d^{-1/2} A_d A_d^{-1/2}\Upsilon Q^{1/2} \\
&= Q^{1/2}\Upsilon^T \Upsilon Q^{1/2} \\
&\preceq Q^{1/2} Q^{1/2} = Q
\end{aligned}$$

Para  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ , suponha que  $Z^T \in \mathcal{C}$ , ou seja,  $(Z - \zeta)^T A_d (Z - \zeta) \preceq Q$ . Precisa-se encontrar uma matriz  $\Upsilon$  tal que  $Z = \zeta + A_d^{-1/2}\Upsilon Q^{1/2}$ , ou seja,

$$\Upsilon Q^{1/2} = A_d^{1/2}(Z - \zeta) \quad (2.25)$$

Se  $Q^{1/2} = 0$ , essa condição pode ser satisfeita tomando  $\Upsilon = 0$ . Se  $Q^{1/2} \succ 0$ , ela possui  $i \in \{1, \dots, n\}$  que definem a matriz diagonal  $\Lambda_i := \text{diag}\{\lambda, \dots, \lambda_i\} \succ 0$ . Já que  $Q^{1/2}$  é simétrica, existe uma matriz ortogonal real  $T$  ( $T^T T = T T^T = I$ ), tal que a decomposição em autovalores e  $Q^{1/2}$  é

$$Q^{1/2} = T \Lambda T^T := T \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^T \quad (2.26)$$

e  $Q^{1/2} \succ 0$  se  $i = n$ , então (2.26) admite  $\Lambda = \Lambda_i$  nesse caso. Escrevendo  $T =: [T_1 \ T_2]$ , implica em

$$T^T T = I \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} = I \quad (2.28)$$

$$T_1 T_1^T + T_2 T_2^T = I \quad (2.29)$$

$$T T^T = I \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = I \quad (2.31)$$

$$\begin{bmatrix} T_1^T T_1 & T_1^T T_2 \\ T_2^T T_1 & T_2^T T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Então, escolhendo

$$\Upsilon = A_d^{1/2}(Z - \zeta) Q^{-1/2} = A_d^{1/2}(Z - \zeta) T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T, \quad (2.33)$$

verifica-se se  $\|\Upsilon\| \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
\Upsilon^T \Upsilon &= T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T (Z - \zeta)^T A_d^{1/2} A_d^{1/2} (Z - \zeta) T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \\
\stackrel{(2.21)}{\implies} \Upsilon^T \Upsilon &\preceq T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T Q T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \\
&= T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^T T \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \\
&= T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \\
&= T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T T_1 \Lambda_i^2 T_1^T T_1 \Lambda_i^{-1} T_1^T \stackrel{(2.32)}{=} T_1 \Lambda_i^{-1} \Lambda_i^2 \Lambda_i^{-1} T_1^T \\
&= T_1 T_1^T = 1
\end{aligned}$$

Então, verifica-se se (2.25) é válida. Sendo (2.25) equivalente a

$$\Upsilon Q^{1/2} = \Upsilon \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^T = A_d^{1/2} (Z - \zeta) \quad (2.34)$$

$$\iff \begin{bmatrix} \Upsilon T_1 \Lambda_i & 0 \end{bmatrix} = A_d^{1/2} (Z - \zeta) T \quad (2.35)$$

$$\iff \begin{bmatrix} \Upsilon T_1 \Lambda_i & 0 \end{bmatrix} = A_d^{1/2} (Z - \zeta) \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\iff \Upsilon T_1 \Lambda_i = A_d^{1/2} (Z - \zeta) T_1 \quad (2.37)$$

$$0 = A_d^{1/2} (Z - \zeta) T_2 \quad (2.38)$$

(2.37) é válida por causa da escolha do  $\Upsilon$  em (2.33). (2.38) se as colunas de  $T_2$  estão em  $\ker(Q^{1/2})$  e  $\ker(Q^{1/2}) \subseteq \ker(A_d^{1/2}(Z - \zeta))$ . A primeira condição –  $T_2 \in \ker(Q^{1/2})$  – é verdadeira, pois

$$Q^{1/2} T_2 = T \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} T_2 \stackrel{(2.32)}{=} T \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0. \quad (2.39)$$

A segunda condição –  $(\ker(Q^{1/2}) \subseteq \ker(A_d^{1/2}(Z - \zeta)))$  – é verdadeira, pois se  $v \in \ker(Q^{1/2})$ ,  $v$  satisfaz  $Q^{1/2}v = 0$ , logo, a partir de (2.21),

$$\begin{aligned}
0 &= v^T Q^{1/2} Q^{1/2} v \\
&= v^T Q v \\
&\geq v^T (Z - \zeta) A_d (Z - \zeta) v \\
&= |A_d^{1/2} (Z - \zeta) v|^2
\end{aligned}$$

Então, como  $|A_d^{1/2} (Z - \zeta) v|^2 \leq 0$  e  $|M| \geq 0, \forall M$ , logo  $A_d^{1/2} (Z - \zeta) v = 0$ .  $\square$

### 2.4.2 Lema de Petersen e projeto de uma lei de controle

Neste trabalho, foi utilizado o resultado do lema de Petersen na obtenção de um método de projetar um controlador baseado nos dados de um sistema. A versão utilizada do lema foi a não estrita, apresentada em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022).

**Lema 3** (*Lema de Petersen Não Estrito*) Considere as matrizes  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\bar{F} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , com  $C = C^T$  e  $\bar{F} = \bar{F}^T \succ 0$ , e definindo um  $\mathcal{F}$  como

$$\mathcal{F} := \{F \in \mathbb{R}^{p \times q} : F^T F \preceq \bar{F}\}. \quad (2.40)$$

Suponha também  $E \neq 0$  e  $G \neq 0$ . Então,

$$C + EFG + G^T F^T E^T \preceq 0, \forall F \in \mathcal{F} \quad (2.41)$$

se, e somente se, existe um  $\lambda > 0$  tal que

$$C + \lambda EE^T + \lambda^{-1} G^T \bar{F} G \preceq 0. \quad (2.42)$$

*Prova:* Para detalhes da prova do Lema 3, ver (BISOFFI *et al.*, 2022).  $\square$

De posse do lema de Petersen, é proposto um método de projetar uma lei de controle em *SSF* com base na teoria de estabilidade de Lyapunov.

**Teorema 2** Assumindo que  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$  é de classe de matrizes com linhas completas. Com dados  $U_0$ ,  $X_0$  e  $X_1$  em (2.14) e matrizes obtidas a partir do dados  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$  em (2.19). A factibilidade de (2.13) é equivalente à factibilidade de

$$\text{encontrar } Y \text{ e } P = P^T \succ 0 \quad (2.43)$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} -C_d & B_d^T - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \\ B_d - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} & -A_d \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (2.44)$$

Se (2.43)-(2.44) é solucionável, o ganho de controle é dado por  $K = YP^{-1}$ .

*Prova:* Graças à proposição 1, (2.13) é equivalente ao fato de que para todo  $[A \ B] \in \mathcal{E}$

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T \prec 0$$

Encontrar um  $K$  e um  $P = P^T \succ 0$  tal que essa inequação matricial seja válida para todo  $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in \mathcal{E}$  é equivalente a achar  $Y$  e um  $P = P^T \succ 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T \prec 0$$

De acordo com (2.24),  $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = Z^T \in \mathcal{E} \iff Z = \zeta + A_d^{1/2} \Upsilon Q^{1/2}$ , para algum  $\Upsilon$  satisfazendo  $\Upsilon \Upsilon^T \preceq I$ , logo

$$(\zeta + A_d^{1/2} \Upsilon Q^{1/2})^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T (\zeta + A_d^{1/2} \Upsilon Q^{1/2}) \prec 0$$

Separando a expressão acima, de modo a obter uma expressão em que possa ser aplicado o lema 3, temos

$$\zeta^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \zeta + Q^{1/2} \Upsilon^T A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2} \prec 0 \quad (2.45)$$

Aplicando o lema de Petersen, fazendo  $C = \zeta^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \zeta$ ,  $E = \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2}$ ,  $F = \Upsilon$ ,  $\bar{F} = I$  e  $G = Q^{1/2}$ , obtém-se que (2.45) é válida se, e somente se, existe um  $\lambda > 0$  tal que

$$\zeta^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \zeta + \lambda \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2} A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \lambda^{-1} Q^{1/2} I Q^{1/2} \prec 0$$

$$\zeta^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \zeta + \lambda \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \lambda^{-1} Q \prec 0$$

Multiplicando ambos os lados da inequação por  $\lambda$  e "absorvendo-o" em  $P$  e  $Y$ , implica em

$$\zeta^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \zeta + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + Q \prec 0$$

Então, substitui-se  $\zeta$  e  $Q$  em (2.22) na expressão acima.

$$\begin{aligned}
& -B_d^T A_d^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1} B_d + \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T A_d^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} + B_d^T A_d^{-1} B_d - C_d \prec 0 \\
\iff & -C_d + (B_d - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix})^T A_d^{-1} (B_d - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}) \prec 0
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade do complemento de Schur, resulta em

$$\begin{bmatrix} -C_d & B_d^T - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}^T \\ B_d - \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} & -A_d \end{bmatrix} \prec 0 \square$$

## 2.5 Controle baseado em dados para sistemas polinomiais

Assim como na seção anterior, os resultados apresentados nesta seção foram retirados ou demonstrados a partir dos resultados presentes em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022). Na modelagem do problema, foi considerado um sistema polinomial também com distúrbio.

$$\dot{x} = f_*(x) + g_*(x)u + d = A_*Z(x) + B_*W(x)u + d, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^n \quad (2.46)$$

$Z(x)$  e  $W(x)$  são regressores conhecidos, ou seja, tem-se uma estimativa do grau de complexidade dos monômios que descrevem a planta, e é importante ressaltar que  $Z$  e  $W$  podem conter mais monômios do que os presentes em  $f_*$  e  $g_*$ , respectivamente, visto que, em uma etapa de identificação do sistema, esses monômios a mais seriam identificados idealmente com coeficientes nulos. Dito isso,  $A_*$  e  $B_*$  são tratados como desconhecidos. O distúrbio  $d$  representa ruídos de medição.

Para obter os dados, é aplicado no sistema uma sequência de entrada  $u(t_0), \dots, u(t_{T-1})$  de  $T$  amostras e são medidos os valores dos estados  $x(t_0), \dots, x(t_{T-1})$  e as suas derivadas  $\dot{x}(t_0), \dots, \dot{x}(t_{T-1})$ . O distúrbio  $d(t_0), \dots, d(t_{T-1})$  não pode ser medido, mas está presente nos dados coletados. Os dados obtidos são organizados em matrizes

$$\begin{aligned}
V_0 &:= [W(x(t_0))u(t_0) \cdots W(x(t_{T-1}))u(t_{T-1})] \\
Z_0 &:= [Z(x(t_0)) \cdots Z(x(t_{T-1}))] \\
X_1 &:= [\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{T-1})]
\end{aligned} \quad (2.47)$$

e o distúrbio  $D_0 := [d(t_0) \cdots d(t_{T-1})]$  desconhecido é considerado o mesmo de (2.15). As medições em (2.47) e  $\mathcal{D}$  em (2.15) definem o conjunto de matrizes *consistentes com os dados*

$$\mathcal{C} := \{[A \ B] : X_1 = A.Z_0 + B.V_0 + D, D \in \mathcal{D}\}, \quad (2.48)$$

que contempla todos os pares de matrizes  $[A \ B]$  que poderiam gerar  $V_0$ ,  $Z_0$  e  $U_0$  ao mesmo tempo que  $D_0$  satisfaz (2.15). Com o objetivo de projetar um sinal de controle em realimentação de estados  $u = k(x)$ , é necessário reformular o conjunto  $\mathcal{C}$  analogamente ao caso linear, porém considerando a matriz de dados  $\begin{bmatrix} Z_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$  no lugar de  $\begin{bmatrix} X_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$ .

Com isso, é proposto um método de projetar uma lei de controle em realimentação de estados com base na teoria de estabilidade de Lyapunov.

**Proposição 2** *Assumindo que  $\begin{bmatrix} Z_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$  é de classe de matrizes com linhas completas e  $Z(0) = 0$ . Dados os polinômios positivos definidos  $l_1$  e  $T$ , com  $l_1$  sendo radialmente ilimitado, suponha que existem polinômios  $V, k, \lambda$  com  $V(0) = 0$  e  $k(0) = 0$ , tais que para cada  $x$*

$$V(x) - l_1(x) \geq 0 \quad (2.49)$$

$$\begin{bmatrix} T(x) + \nabla V(x)^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} & (A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix})^T & (\lambda(x)Q^{1/2}\nabla V(x))^T \\ A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} & -\lambda(x)I & 0 \\ \lambda(x)Q^{1/2}\nabla V(x) & 0 & -4\lambda(x)I \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (2.50)$$

$$\lambda(x) > 0 \quad (2.51)$$

Então, a origem é globalmente assintoticamente estável para  $\dot{x} = AZ(x) + BW(x)k(x) =: f_{A,B}(x)$ .

*Prova:* É importante notar que, já que  $Z(0) = 0$  e  $k(0) = 0$ , a origem é um ponto de equilíbrio de  $f_{A,B}$ ,  $[A \ B] \in \mathcal{C}$ . Então, para provar essa proposição, é necessário mostrar que  $V$  é uma função de Lyapunov para todos os sistemas  $\dot{x} = f_{A,B} \in \mathcal{C}$ . Especificamente, mostrar que  $V$  positiva definida e radialmente ilimitada, e que a derivada de  $V$  satisfaz

$$\nabla V^T f_{A,B}(x) \leq -T(x), \quad \forall x, \forall [A \ B] \in \mathcal{C} \quad (2.52)$$

A presença de  $T(x)$ , sendo  $T(x) > 0$ , garante que  $\nabla V^T f_{A,B}(x)$  seja negativa definida, implicando na estabilidade assintótica. Visto que  $V(0) = 0$  e  $V$  satisfazendo (2.49), é garantido que  $V$  é positiva definida e radialmente ilimitada. Quanto à condição de Lyapunov, representada por (2.52), é provada ser equivalente à (2.50) substituindo a parametrização de  $[A \ B]$  em (2.24).



$$\begin{aligned}
-T(x) &\geq \nabla V^T f_{A,B}(x) = \nabla V^T \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \\
&= \nabla V^T (\zeta + A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2})^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \\
&= \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + \nabla V^T (A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2})^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \\
&= \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (\nabla V^T (A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2})^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix})^T \\
&\quad + \frac{1}{2} \nabla V^T (A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2})^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \\
&= \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2} \frac{1}{2} \nabla V \\
&\quad + \frac{1}{2} \nabla V^T Q^{1/2} \Upsilon^T A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A desigualdade acima é válida para qualquer  $\Upsilon$  que satisfaça  $\|\Upsilon\| \leq 1$ . A separação de um termo do lado direito da inequação em  $x = \frac{1}{2}x^T + \frac{1}{2}x$  é possível quando  $x \in \mathbb{R}$ , pois  $x = x^T$ , . Aplica-se então o lema de Petersen em

$$\begin{aligned}
&\nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + T(x) \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2} \Upsilon Q^{1/2} \frac{1}{2} \nabla V \\
&\quad + \frac{1}{2} \nabla V^T Q^{1/2} \Upsilon^T A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall \Upsilon \text{ com } \|\Upsilon\| < 1 \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Fazendo  $C = \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + T(x)$ ,  $E = \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2}$ ,  $F = \Upsilon$ ,  $\bar{F} = 1$  e  $G = Q^{1/2} \frac{1}{2} \nabla V$ , (2.53) é válida se, e somente se, existe um  $\frac{1}{\lambda(x)} > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
& \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + T(x) + \frac{1}{\lambda(x)} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix}^T A_d^{-1/2} A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \\
& + \lambda(x) \frac{1}{2} \nabla V^T Q^{1/2} Q^{1/2} \frac{1}{2} \nabla V \leq 0 \\
\iff & \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + T(x) + \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix}^T \frac{A_d^{-1}}{\lambda(x)} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} \\
& + \nabla V^T \frac{\lambda(x) Q}{4} \nabla V \leq 0 \\
\iff & \nabla V^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} + T(x) \\
& + \begin{bmatrix} [Z(x)]^T A_d^{-1/2} & \nabla V^T \lambda(x) Q^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda(x)} I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\lambda(x)} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d^{1/2} [Z(x)] \\ \lambda(x) Q^{1/2} \nabla V \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade do complemento de Schur na inequação acima, obtém-se

$$\begin{bmatrix} T(x) + \nabla V^T \zeta^T [Z(x)] & [Z(x)]^T A_d^{-1/2} & \nabla V^T \lambda(x) Q^{1/2} \\ A_d^{-1/2} [Z(x)] & -\lambda(x) & 0 \\ Q^{1/2} \nabla V & 0 & -4\lambda(x) I \end{bmatrix} \preceq 0 \quad \square \quad (2.54)$$

### 3 MÉTODO APLICADO

#### 3.1 Abordagem utilizando LMIs e SOS

Para que sejam verificadas as condições apresentadas no Teorema 2 utilizou-se do pacote de ferramentas *SOSTools*, comumente empregado na resolução de problemas envolvendo *Linear Matrix Inequality/Desigualdade Matricial Linear (LMI)* (PARRILO, 2021). Com o *SOSTools*, é possível programar algoritmos que determinem os coeficientes de matrizes escalares de acordo com restrições impostas no próprio algoritmo por parte do usuário. Desta forma, é possível implementar as condições de Lyapunov obtidas para projetar uma lei de controle para sistemas lineares.

Já no caso de sistemas polinomiais, para que sejam verificadas as condições apresentadas na Proposição 2, utilizou-se uma abordagem de *Sum-Of-Squares/Soma de Quadrados (SOS)*, visto que há ferramentas computacionais disponíveis para tal análise e que são amplamente utilizadas em problemas dessa natureza. Um polinômio  $p(x) \in \mathbb{R}^n$  pode ser decomposto em uma soma de quadrados se ele pode ser escrito na forma

$$p(x) = z.M.z^T, \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad M \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.1)$$

onde  $z$  é um vetor de monômios de  $x$ , e  $M$  é uma matriz contendo os coeficientes dos produtos desses monômios.

Utilizando o software *SOSTools*, é possível formular *Sum-of-Squares Program/Programa de Soma de Quadrados (SOSP)* que determinem se polinômios, ou matrizes de polinômios, são *SOS*. Além disso, é possível impor condições na determinação desses polinômios para que eles atendam às propriedades que se quer testar. A importância de achar uma decomposição em *SOS* se dá pelo fato de serem positivas definidas, por serem uma soma de quadrados. Então, reescreve-se a Proposição 2 para uma abordagem em *SOS* no teorema a seguir.

**Teorema 3** *Assumindo que  $\begin{bmatrix} Z_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$  é de classe de matrizes com linhas completas e  $Z(0) = 0$ . Dados os polinômios positivos definidos  $l_1$  e  $T$ , com  $l_1$  sendo radialmente ilimitado, e um escalar positivo  $\varepsilon_\lambda$ , suponha que existem polinômios  $V, k, \lambda$  com  $V(0) = 0$  e  $k(0) = 0$ , tais que*

$$V(x) - l_1(x) \in \Sigma[x] \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} T(x) + \nabla V(x)^T \zeta^T \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} & (A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix})^T & (\lambda(x)Q^{1/2}\nabla V(x))^T \\ A_d^{-1/2} \begin{bmatrix} Z(x) \\ W(x)k(x) \end{bmatrix} & -\lambda(x)I & 0 \\ \lambda(x)Q^{1/2}\nabla V(x) & 0 & -4\lambda(x)I \end{bmatrix} \in \Sigma[x] \quad (3.3)$$

$$\lambda(x) - \varepsilon_\lambda \in \Sigma[x] \quad (3.4)$$

Então, (2.49)-(2.51) e a conclusão da proposição 2 são válidas.

$Z(x)$  e  $W(x)$  são regressores conhecidos;  $\zeta$ ,  $A_d$  e  $Q$  são matrizes obtidas a partir dos dados  $X_1, Z_0$  e  $V_0$ ;  $T(x)$ ,  $l_1(x)$  e  $\varepsilon_\lambda$  são parâmetros de projeto e  $V(x)$ ,  $k(x)$  e  $\lambda(x)$  são variáveis de decisão a serem determinadas utilizando o *SOSTools*. A inclusão de um  $\varepsilon_\lambda$  é necessária, pois o *SOSTools* não lida com inequações estritas, então, para garantir que o  $\lambda(x)$  encontrado seja positivo definido, adiciona-se essa restrição escolhendo valores suficientemente pequenos de  $\varepsilon_\lambda$ .

### 3.2 Coleta de dados

Os dados coletados dos sistemas testados foram gerados a partir de uma senóide durante um tempo de simulação definido pelo número de amostras  $T$  e pelo tempo de amostragem  $\tau_s$ . Como definido em (2.47), os valores assumidos pelo seno foram armazenados em vetores de entrada  $U_0$  e  $V_0$ , nos casos linear e polinomial respectivamente,.

O distúrbio  $d$  foi modelado por senóides de amplitude  $\sqrt{\delta}$  e frequência  $2\pi\omega$ , Dessa forma, garante-se que a energia total do distúrbio é limitada, pois  $|d| \leq \delta^2$ . Sendo assim, a sequência  $D$  em (2.15) também é limitada, já que  $DD^T \leq T\delta I$ , o que permite tomar  $\Delta = \sqrt{T\delta}I$ .

Durante a simulação, verifica-se o comportamento do sistema quando o sinal  $U_0$  (ou  $V_0$ ) é colocado na entrada. A taxa de variação dos estados durante o tempo de simulação foi determinada de acordo com (2.11) (ou (2.46)) e armazenada em  $X_1$ . Com isso, o valor dos estados foi determinado a partir da derivada discreta

$$\dot{x} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_s} \implies x_{k+1} = \tau_s \dot{x} + x_k \quad (3.5)$$

e foi construída a sequência  $Z_0$  de acordo com a complexidade de monômios desejada para identificar o sistema.

De posse dos vetores de dados  $Z_0$ ,  $V_0$  e  $X_1$ , foram montadas as matrizes de dados  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$ , e  $\zeta$  e  $Q$  como em (2.22).

### 3.3 Algoritmo

Tendo as matrizes de dados  $\zeta$ ,  $Q$ ,  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$ , foram formulados algoritmos baseado nos teoremas 2 e 3. Para o sistema linear, buscou-se estabilizar o sistema em um ponto de equilíbrio fora da origem. Como a teoria presente no teorema 2 tem como objetivo a estabilização assintótica na origem, após a coleta de dados foi realizada uma mudança de variável no sistema de modo que, nas novas coordenadas, a nova origem estivesse no ponto de equilíbrio desejado  $\bar{x}$ .

$$x_{novo} = x - \bar{x} \rightarrow x = x_{novo} + \bar{x} \quad (3.6)$$

Após se obter a lei de controle que estabilizasse a origem do sistema transladado, aplicou-se a lei obtida no sistema original transladando a expressão do controlador para o sistema de coordenadas anterior.

$$x = x_{novo} + \bar{x} \rightarrow x_{novo} = x - \bar{x} \quad (3.7)$$

O algoritmo desenvolvido possui a estrutura apresentada a seguir.

---

#### **Algoritmo 1:** Algoritmo de projeto da lei de controle - Sistemas lineares

---

**Entrada :**  $\bar{x}$

Encontre  $P = P^T \succ 0$  e  $Y$   
sujeitos a (2.43)-(2.44)

$$V \leftarrow x^T P x$$

$$K \leftarrow Y P^{-1}$$

**Saída :**  $K, V$

---

Entretanto, as restrições inseridas no *SOSTools* precisam ser lineares nos parâmetros que se quer determinar, e (3.3) apresenta bilinearidades: o produto entre  $\nabla V^T$  e  $\lambda$  e entre  $\nabla V^T$  e  $(x)$ . Para contornar esse problema, determina-se inicialmente  $k$  e  $\lambda$  para um  $V$  fixo, e posteriormente  $V$  com  $k$  e  $\lambda$  fixos. A estrutura do algoritmo está apresentada a seguir.

Como  $l_1$  não apresenta bilinearidades com nenhuma outra variável de decisão — variáveis determinadas pelo *SOSP*, optou-se por incluí-lo também como uma dessas variáveis.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo de projeto da lei de controle - Sistemas polinomiais
 

---

**Entrada :**  $l_0, c, \varepsilon_\lambda, i_{max}$

$V \leftarrow V_{inicial}, i \leftarrow 0$

**while**  $i < i_{max}$  **do**

PASSO 1) Encontre  $k \in \Sigma[x], \lambda \in \Sigma[x], T \in \Sigma[x], l_1 \in \Sigma[x]$   
 sujeitos a (3.2)-(3.4) com  $V$  fixo

$k \leftarrow k_{encontrado}; \lambda \leftarrow \lambda_{encontrado}$

PASSO 2) Encontre  $V \in \Sigma[x], T \in \Sigma[x], T \in \Sigma[x], l_1 \in \Sigma[x]$   
 sujeitos a (3.2)-(3.4) com  $k$  e  $\lambda$  fixos

$V \leftarrow V_{encontrado}$

**end**

**Saída** :  $k, V$

---

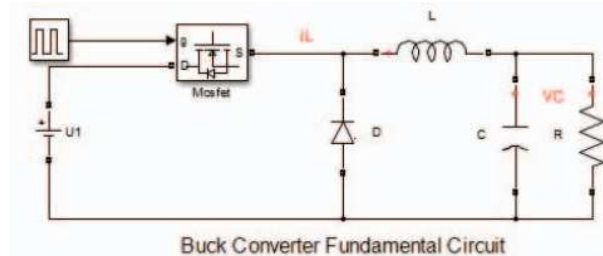
## 4 EXPERIMENTO

Foram escolhidos dois sistemas para aplicar a estratégia apresentada nos algoritmos do capítulo 3. Para o caso linear, foi considerado um conversor buck, que possui representação em espaços de estado linear, e seus parâmetros e modelagem foram obtidas em (TAN; HOO, 2015). Para o caso polinomial, foi escolhido o oscilador de Van der Pol, obtido em (KHALIL, 2002).

### 4.1 Sistema Linear - Conversor Buck

O sistema linear escolhido para ser aplicado a estratégia de controle baseada em dados proposta neste trabalho foi um conversor buck. A modelagem em espaços de estados, obtida em (TAN; HOO, 2015), apresenta dois estados: a corrente no indutor ( $i_L$ ) e a tensão no capacitor ( $v_C$ ), sendo  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente. O controle é realizado através da regulação do *duty cycle* do *Pulse Width Modulation*/Modulação por Largura de Pulso (*PWM*), e, dessa forma, tem-se como objetivo controlar a tensão de saída na carga, que corresponde à tensão no capacitor).

Figura 3 – Circuito esquemático de um conversor buck



Fonte: (TAN; HOO, 2015)

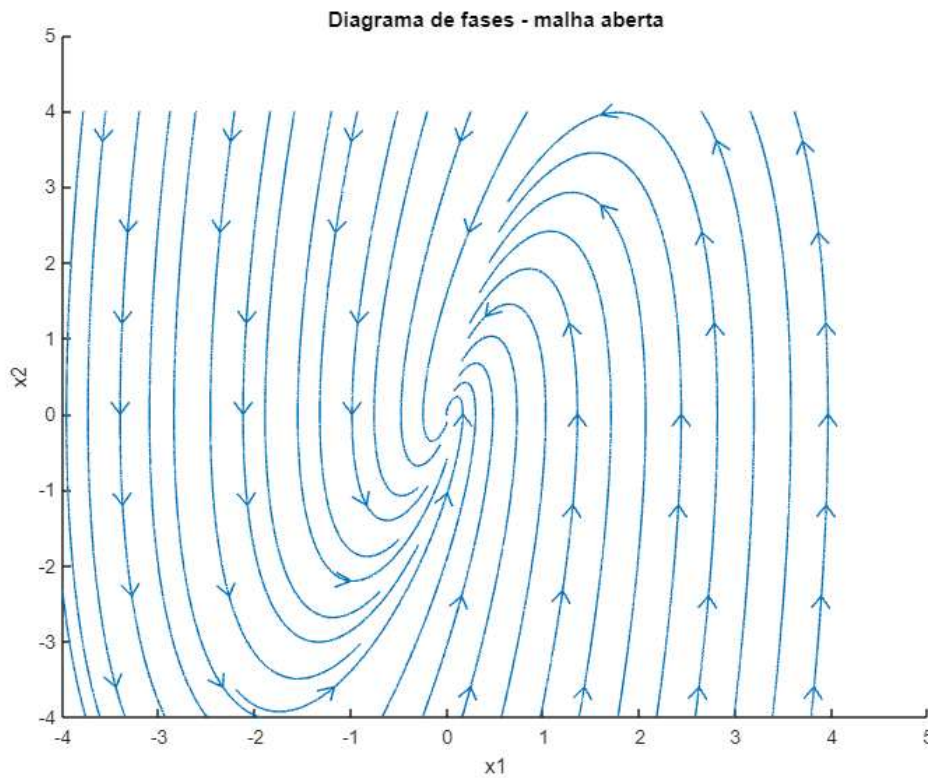
A figura 3 mostra o circuito esquemático de um buck com o posicionamento de seus componentes. A representação em espaço de estados desse circuito é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

Os parâmetros do circuito utilizados foram  $L = 2\text{mH}$ ,  $C = 220\mu\text{F}$ ,  $R = 3\Omega$  e  $V_{in} = 12\text{V}$  (TAN; HOO, 2015). Para análise do comportamento das trajetórias sistema em malha aberta, foi utilizado o diagrama de fases do circuito. A figura 4 mostra que o sistema em malha aberta é

estável na origem. Embora a origem seja um ponto de equilíbrio estável desejado em muitos sistemas, no caso de circuitos elétricos como esse conversor, isso apenas indicaria que a tensão e corrente iriam ser nulas. Escolheu-se então um ponto de operação baseado em uma tensão de saída desejada de 2,5 V.

Figura 4 – Conversor buck - diagrama de fases - malha aberta



Fonte: O próprio autor

Fixada a tensão de saída desejada ( $\bar{x}_2$ ), os valores de corrente  $\bar{x}_1$  e *duty cycle*  $\bar{u}$  para esse ponto de operação foram determinados, a partir de (4.1), igualando as taxas de variação a 0.

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\bar{x}_1 - \frac{1}{RC}\bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{x}_1 - \frac{1}{R}\bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{x}_1 &= \frac{\bar{x}_2}{R}\end{aligned}$$

Para  $\bar{x}_2 = 2.5$  e  $R = 3\Omega$ ,  $\bar{x}_1 = 0,8333A$



$$\begin{aligned}
-\frac{1}{L}\bar{x}_2 + \frac{1}{L}\bar{u} &= 0 \\
-\bar{x}_2 + V_{in}\bar{u} &= 0 \\
\bar{u} &= \frac{\bar{x}_2}{V_{in}}
\end{aligned}$$

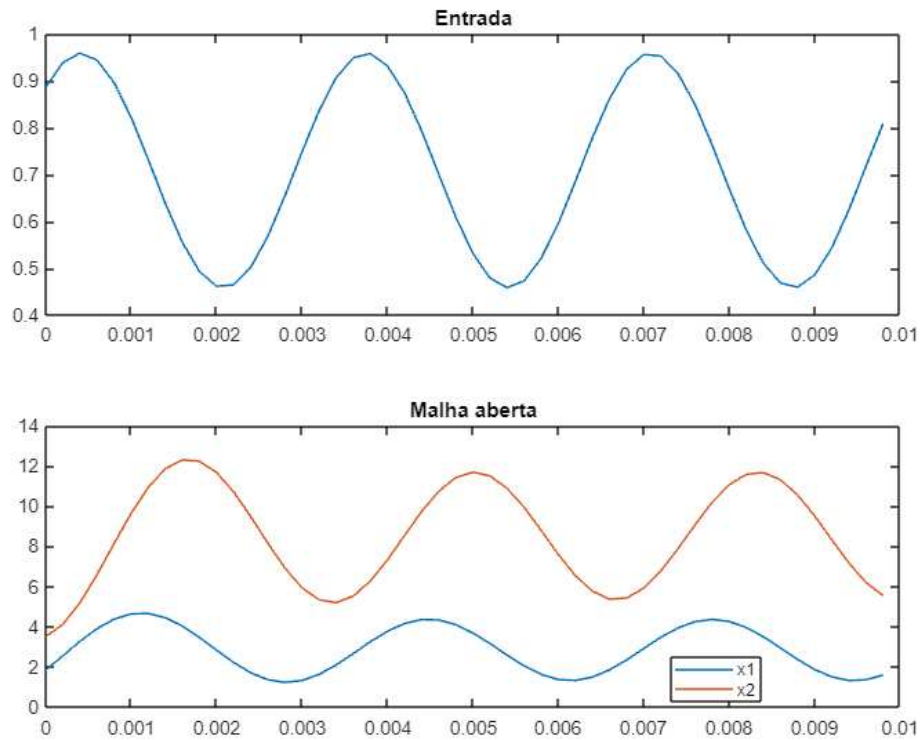
Para  $\bar{x}_1 = 0,8333A$  e  $V_{in} = 12V$ ,  $\bar{u} = 0,2083$ .

Tendo os valores do ponto de operação desejado, realizou-se um ensaio como descrito na seção 3.2. Para escolher o tempo de simulação, a frequência de amostragem e a frequência e amplitude do sinal que iria ser utilizado para excitar o circuito, foram escolhidos valores baseados nos parâmetros do circuito obtido em (TAN; HOO, 2015). A frequência de amostragem precisa ser maior que a frequência de chaveamento do circuito e o tempo de amostragem necessita ser de ordem de grandeza não muito maior que o período de chaveamento, pois dessa forma obtém-se informação de mais de um ciclo de trabalho sem que os valores de tensão e corrente atinjam valores muito elevados no caso de o sistema ser instável. A frequência do sinal de excitação também segue o critério de ser próxima à frequência de operação do circuito, pois se for muito mais elevada, ela teria variações quase irrelevantes durante o tempo total de simulação escolhido. O tipo de sinal também é importante e foi escolhida uma senoide, pois ela consegue percorrer todos os valores que levam às não linearidades dos sistemas, mesmo o modelo do conversor buck sendo linear, essa será um critério adotado no caso polinomial. A amplitude do sinal de excitação escolhida obedece aos limites do *duty cycle* do *PWM*. Dito isso, o tempo de simulação foi de 0.01s e a senoide de excitação tinha frequência de 300Hz e amplitude de 0,5V com nível *offset* de 0,5V. O distúrbio foi simulado por funções senoidais somadas ao sinal de excitação de cada estado com frequências 1mHz e amplitude  $\delta = 0,0001$ . Os resultado do ensaio para coleta de dados está exposto na figura 5.

É importante ressaltar que os dados presentes na figura 5 já se encontram transladados para que a origem do sistema seja o ponto de operação desejado.

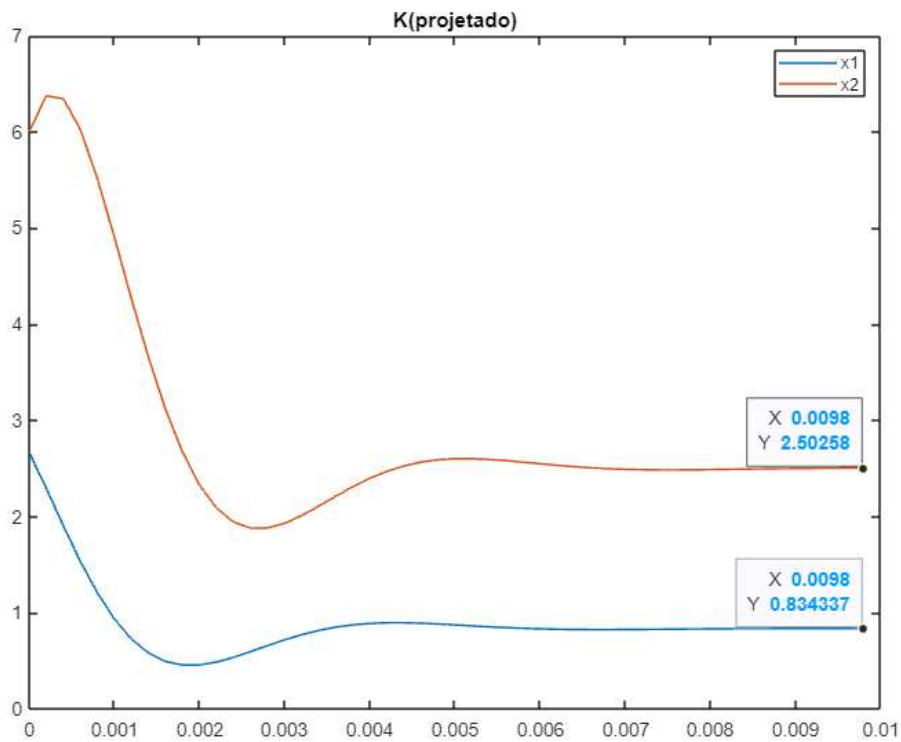
A lei de controle encontrada pelo algoritmo proposto na seção 3.3 foi de um ganho  $K = [-8,5142; -1,0463]$ . A função de Lyapunov encontrada foi  $V = 4186,48x_1^2 - 20632,1959x_1x_2 + 83366,7077x_2^2$ . Para verificar o comportamento do sistema em malha fechada com o controlador projetado, foi observado o diagrama de fases e a resposta no domínio do tempo em malha fechada. As figuras 6 e 7 mostram esses gráficos.

Figura 5 – Conversor buck - Coleta de dados



Fonte: O próprio autor

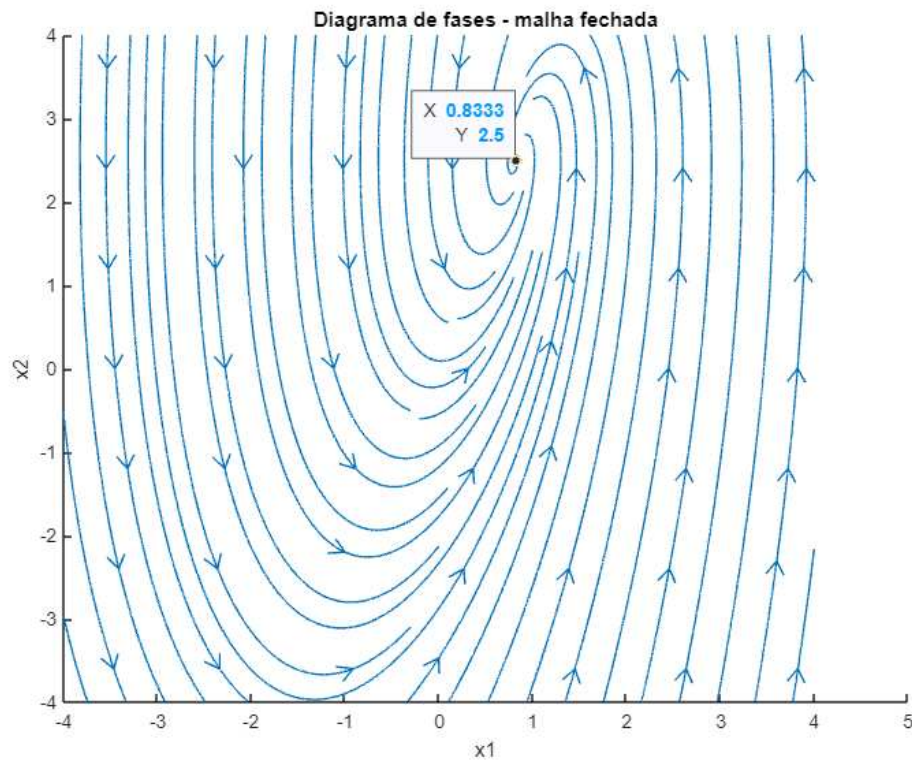
Figura 6 – Conversor buck - Resposta no tempo - malha fechada



Fonte: O próprio autor

Como é possível observar no gráfico da figura 6, o sistema apresentou estabilidade assintótica para o ponto de operação desejado. É possível também notar que, de acordo com

Figura 7 – Conversor buck - Diagrama de fases - malha fechada



Fonte: O próprio autor

o diagrama da figura 7, a região de estabilidade é aparentemente global, como é próprio de sistemas lineares.

## 4.2 Sistema Polinomial - Oscilador de Van der Pol

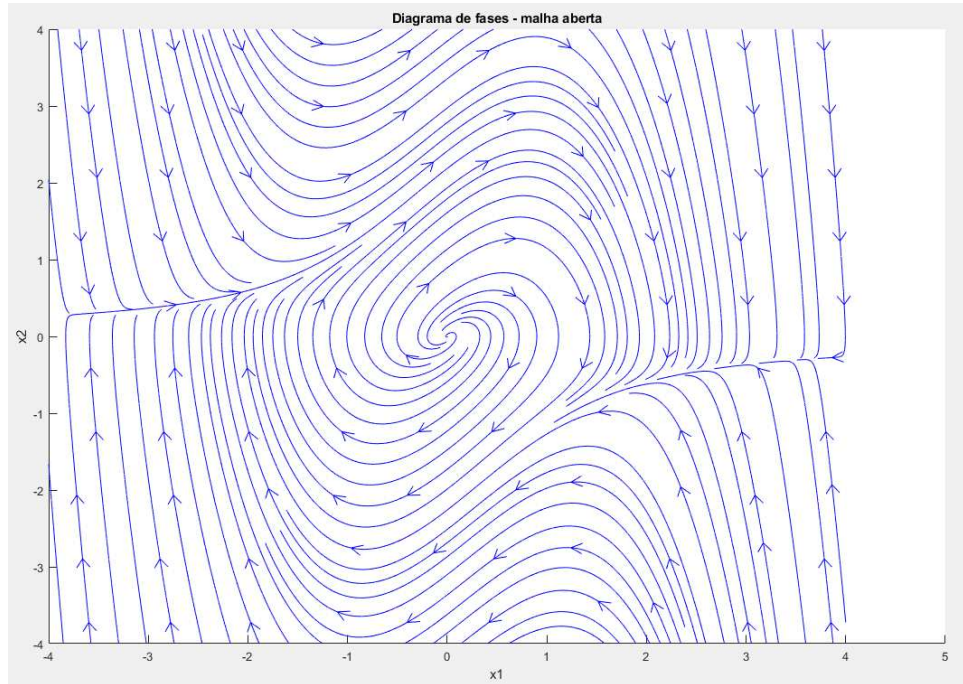
O sistema polinomial escolhido para ser aplicado a estratégia de controle apresentada no capítulo 3 foi o oscilador de Van der Pol, um sistema bem conhecido e amplamente utilizado no teste de métodos de controle de sistemas não lineares polinomiais (EBENBAUER; ALLGÖWER, 2006). A modelagem em espaços de estados foi obtida em (KHALIL, 2002).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ e * (1 - x_1^2) * x_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

O diagrama de fases em malha aberta está apresentado na figura 8.

De acordo com a figura 8, é possível notar que a origem do oscilador é instável, e que o sistema converge para uma trajetória em torno da origem que nunca entra em repouso. O ensaio realizado para coletar os dados foi feito excitando o sistema com uma senóide de frequência 3Hz e amplitude 0,5. Os critérios utilizados para modelar o sinal de

Figura 8 – Oscilador de Van der Pol - diagrama de fases - malha aberta (e = 1)



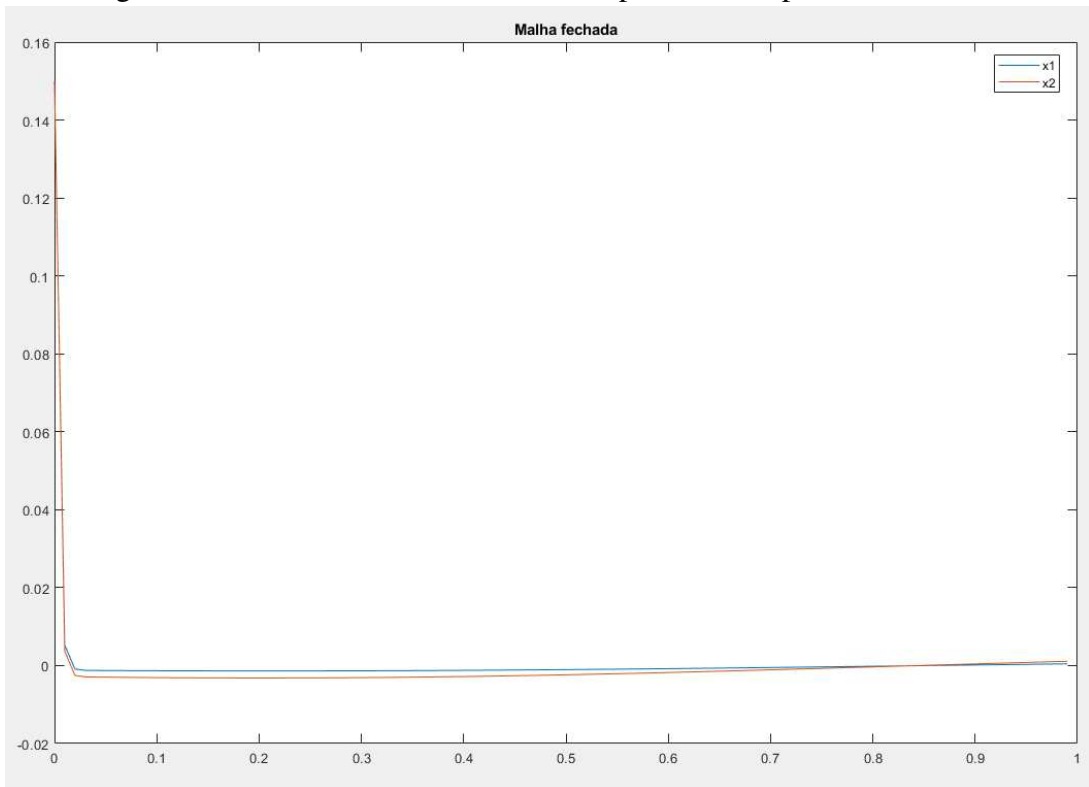
Fonte: O próprio autor

excitação foram os mesmos apresentados na seção 4.1 Os vetores de monômios utilizados foram  $Z(x) = \{x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3\}$ , escolhido ao se conhecer previamente a ordem dos polinômios que descrevem o oscilador de Van der Pol, e  $W(x) = 1$ , escolhido ao se estimar um peso unitário para a lei de controle. Os parâmetro de projeto considerado foi  $\varepsilon_\lambda = 10^{-5}$ , para garantir que  $\lambda$  seja estritamente positivo. O número de iterações realizadas foi  $i_{max} = 15$ , o mesmo utilizado em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022). Os graus de complexidade determinados para as variáveis de decisão foram de:  $k$  com graus de 1 a 2,  $\lambda$  com graus de 0 a 2,  $T(x)$  com graus de 2 a 4,  $l_1$  com grau 2 e  $V$  com grau 2.

A função de Lyapunov obtida pelo algoritmo foi  $V = 1,3448 \cdot 10^{-6}x_1^2 + 2,0785 \cdot 10^{-6}x_1x_2 + 1,4783 \cdot 10^{-6}x_2^2$  e a lei de controle foi  $k(x) = 6,4176x_1^2 - 73,8246x_1x_2 + 60,133x_2^2 - 169,1257x_1 + 72,6828x_2$ . As figuras 9 e 10 mostram a resposta no tempo em malha fechada e o diagrama de fases do sistema controlado. A figura 11 apresenta o mesmo controle, apenas com condições iniciais diferentes para verificar o tempo de assentamento.

Por fim, a estimativa do elipsóide de incertezas, em comparação com o par de

Figura 9 – Oscilador de Van der Pol - Resposta no tempo - malha fechada

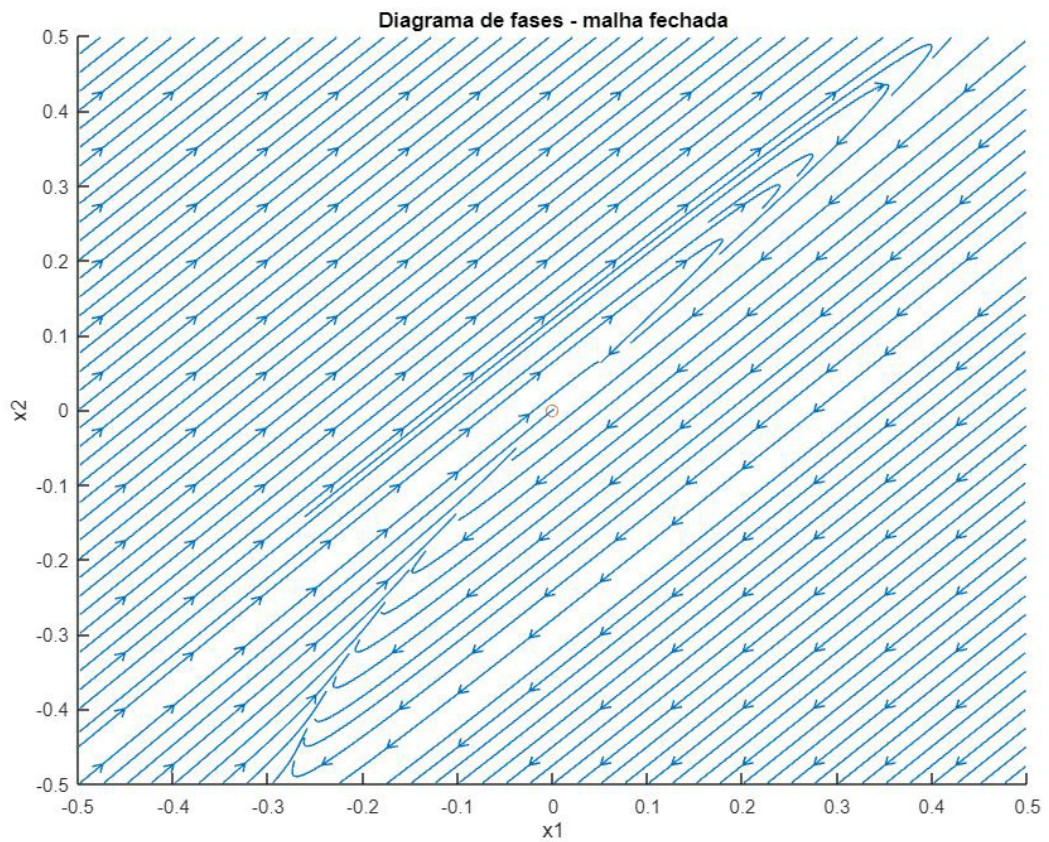


Fonte: O próprio autor

matrizes  $[A \ B]$ , obtido através dos dados nas matrizes  $\zeta$  e  $Q$  foram:

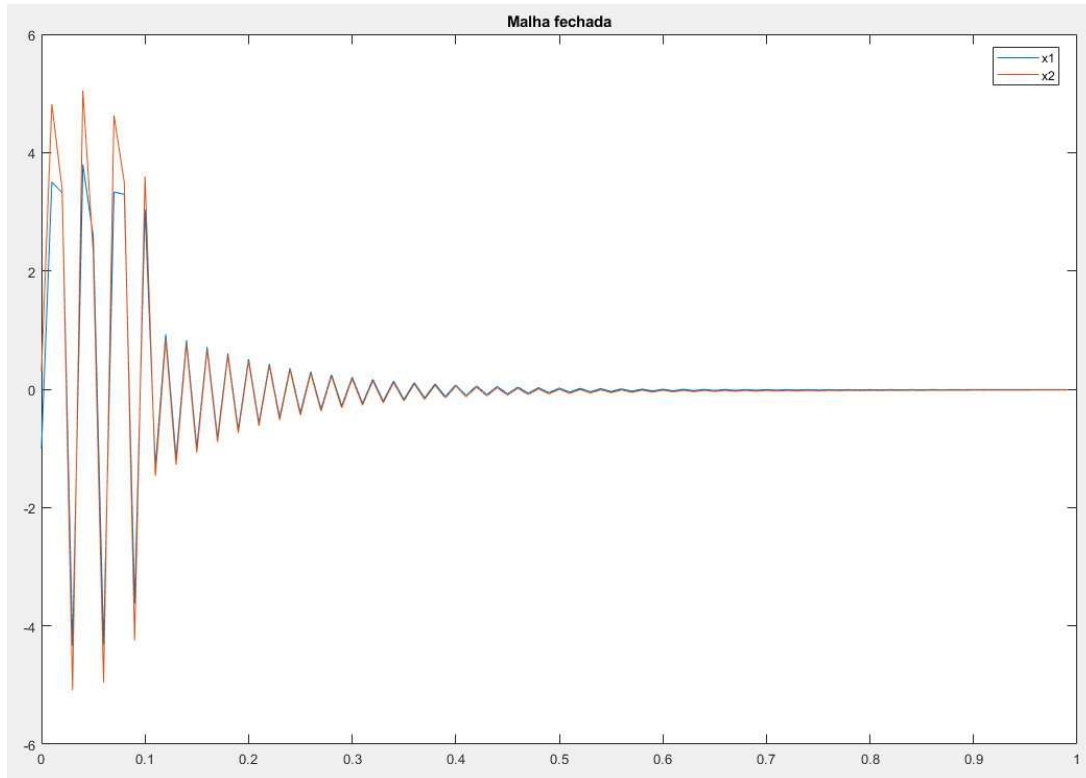
$$\zeta = \begin{bmatrix} -0.0224 & -0.9473 \\ 1.0716 & 0.9464 \\ -0.0193 & -0.0924 \\ 0.1329 & 0.0523 \\ -0.3402 & 0.0544 \\ 0.0074 & 0.0407 \\ 0.0468 & -1.0041 \\ -0.3242 & -0.0224 \\ 0.5919 & -0.0173 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad [A \ B]^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = 10^{-6} * \begin{bmatrix} 0.7781 & 0.0508 \\ 0.0523 & 0.9716 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Figura 10 – Oscilador de Van der Pol - Diagrama de fases - malha fechada



Fonte: O próprio autor

Figura 11 – Oscilador de Van der Pol - Diagrama de fases - malha fechada -  $x_0 = (-1;0,3)$



Fonte: O próprio autor

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Os algoritmos propostos neste trabalho utilizando os resultados e proposições demonstrados em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022) foram capazes de obter leis de controle que estabilizaram com êxito os sistemas de conversão de corrente contínua do conversor Buck e do oscilador de Van der Pol.

Ao decorrer do desenvolvimento deste trabalho, observou-se a importância do ensaio de coleta de dados e de que o sistema fosse persistentemente excitado, pois implica em dados com informações suficientes para descrever as trajetórias de relação entrada-saída do sistema. Embora as abordagens baseadas em dados terem como objetivo não necessitar de identificação do sistema, o método proposto em (BISOFFI A. ; DE PERSIS, 2022) apresenta um elipsóide de incertezas das matrizes compatíveis com os dados. A matriz  $\zeta$ , como centro desse elipsóide, em casos ideais, possui valores o mais próximo possíveis dos parâmetros reais do sistema. Já a matriz  $Q$ , como raio desse elipsóide, em casos ideais, possui valores próximos a zero, representando uma aproximação ideal e precisa do sistema analisado. Dito isso, ensaios muito longos, em especial para sistemas instáveis na origem e que não possuem pontos de equilíbrio em malha aberta, geram matrizes  $Q$  com valores muito elevados quanto mais o tempo passa. Isso significaria que o raio elipsóide de incertezas tende ao infinito, portanto os dados não são adequados para utilizar no projeto de uma lei de controle. Ao se analisar o circuito do conversor buck, por exemplo, buscou-se um tempo de simulação que estivesse próximo à ordem de grandeza da frequência de chaveamento do circuito informada em (TAN; HOO, 2015).

Como o trabalho foi feito por simulação, é possível comparar  $\zeta$  com o par  $[A \ B]$ , além de analisar a ordem de grandeza de  $Q$ , mostrados em (4.3). No caso do ensaio no oscilador de Van der Pol, é possível notar que  $\zeta$  e  $[A \ B]$  possuem valores suficientemente próximos, o que indica uma correta representação do sistema a partir dos dados, e os valores pequenos de  $Q$  reiteram essa representação, visto que o intervalo de incerteza está centrado muito próximo do sistema real e possui um tamanho pequeno. Além disso, embora não se tenha obtido as matrizes  $\zeta$  e  $Q$  no algoritmo do conversor buck, por se tratar de um caso linear, é possível determiná-las, pois foram obtidos  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$ . É importante ressaltar que a abordagem baseada em dados é implementada muitas vezes em casos em que se desconhecem os parâmetros do sistema. Apesar disso, a ordem de grandeza de  $Q$  pode se tornar relevante ao se analisar a qualidade da informação presente nos dados, além do fato do  $Q$  obtido ser positivo definido ou não, indicando se o sistema foi persistentemente excitado ou não, de acordo com o lema 1.

Outra parte relevante do experimento foi a influência dos graus de complexidade escolhidos, nas variáveis de decisão e nos polinômios a serem determinados pelo *SOSP*, na factibilidade e no tempo necessário para se executar o algoritmo de projeto da lei de controle. Como esperado nesse tipo de problema, graus muito simples não apresentavam resultados factíveis. Porém, quando se escolhia graus mais elevados de complexidade das funções, o tempo necessário para executar o algoritmo tornava-se cada vez mais extenso. O grau de complexidade da função do sistema em malha aberta também é um fator que influenciava consideravelmente nesse tempo de execução, visto que, se  $f(x)$  já possuía monômios de potências elevadas, as condições testadas naturalmente eram de ordem ainda mais elevadas, em consequência de haver produtos de polinômios. Além disso, o número de estados do sistema, se mostrou um ponto ainda mais crítico, pois em sistemas analisados nas fases iniciais do trabalho, que possuíam três ou mais estados, o experimento foi considerado imprático devido ao tempo de execução, durando horas.

Nesse contexto, uma necessidade, e um desafio, desse tipo de abordagem é a otimização computacional ou a busca por métodos que sejam mais rápidos do ponto de vista também computacional. Uma ideia possível para trabalhos futuros é a elaboração e implementação de um método baseado na Teoria da Dissipatividade, como o proposto em (MADEIRA; MACHADO, 2023), que tem como vantagem a necessidade de resolver apenas um único *SOSP* por iteração, potencialmente diminuindo os custos computacionais.



## REFERÊNCIAS

- BISOFFI, A.; PERSIS, C. D.; TESI, P. Data-driven control via petersen's lemma. **Automatica**, Elsevier BV, v. 145, p. 110537, nov. 2022. ISSN 0005-1098. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110537>.
- BISOFFI A. ; DE PERSIS, C. . T. P. Data-driven control via petersen's lemma. **Automatica**, Elsevier, v. 145, 2022.
- EBENBAUER, C.; ALLGÖWER, F. Analysis and design of polynomial control systems using dissipation inequalities and sum of squares. **Computers Chemical Engineering**, v. 30, n. 10, p. 1590–1602, 2006. ISSN 0098-1354. Papers form Chemical Process Control VII. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135406001463>.
- HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, V. **Nonlinear Dynamical Systems and Control**. [S. l.]: Princeton University Press, 2008.
- HORN ROGER A.; JOHNSON, C. R. **Matrix Analysis**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2013.
- KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. [S. l.]: Prentice Hall, 2002. (Pearson Education). ISBN 9780130673893.
- MADEIRA, D. de S.; MACHADO, G. Recurrent dissipativity-based inequalities for controller design. 08 2023.
- PARRILO, A. P. S. P. P. A. **SOSTOOLS: Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB**. 2021. Disponível em: <http://www.cds.caltech.edu/sostools>.
- PERSIS C. ; TESI, P. D. Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality, and robustness. **IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL**, IEEE CSS, v. 65, n. 3, 2020.
- TAN, R. H.; HOO, L. Y. H. Dc-dc converter modeling and simulation using state space approach. In: **2015 IEEE Conference on Energy Conversion (CENCON)**. [S. l.: s. n.], 2015. p. 42–47.
- WILLEMS JAN C.; RAPISARDA, P. M. I. D. M. B. L. A note on persistency of excitation. **System Control Letters**, Elsevier, v. 54, 2005.

## APÊNDICE A – CÓDIGOS

Código-fonte 1 – Algoritmo de projeto da lei de controle - sistema linear - conversor buck

```
1  clc; clear; close all
2
3  clc; clear; close all
4
5  % % % Data-driven control via Petersen's lemma
6  % % Andrea Bisoffi, Claudio De Persis and Pietro Tesi
7
8  % conversor buck
9
10 T = 50;
11 delta = 1e-4;
12
13 % parametros do circuito
14 L = 2e-3;
15 C = 220e-6;
16 R = 3;
17 Vin = 12;
18
19 pvar x1 x2
20 vars = [x1;x2];
21
22 A = [0 -1/L;
23      1/C -1/(R*C)];
24 B = [Vin/L;0];
25
26 m = size(B,2); %tamanho de u
27 n = size(A,2); %tamanho de x
28 DELTA = T*delta*eye(n);
29
```

```

30 % gerando entrada u, senoide, tsim = 0.01s, freq = 2*pi*3/
    tsim, amplitude =
31 % 4
32 tsim = 0.01;
33 tsample = tsim/T;
34 t = 0:tsample:(tsim);
35 w = 2*pi*(3/tsim);
36 U0 = 0.25*(sin(w*t+pi/4))+0.5;
37
38 % gerando dados X0 e X1
39 X0 = zeros(n,T+1);
40 X0(:,1) = 1;           % condi es iniciais
41 d = zeros(n,T);
42
43 for i=2:(T+1)
44     d(:,i-1) = sqrt(delta)*[cos(2*pi*1e-3*t(i-1)); sin(2*pi
        *1e-3*t(i-1))] ;
45     X0(:,i) = X0(:,i-1) + tsample*(A*X0(:,i-1)+B*U0(i-1)+d
        (:,i-1));
46 end
47 X1 = (X0(:,2:T+1)-X0(:,1:T))/tsample;
48
49 % Ponto de equil brio desejado
50 x1bar = 0.8333;
51 x2bar = 2.5;
52 ubar = 0.2083;
53
54 X0 = X0(:,1:T)+[x1bar;x2bar];
55 U0 = U0(1:T)+ubar;
56 t = t(1:T);
57
58 % grafico dos dados gerados

```

```

59 figure
60 subplot(2,1,1)
61 plot(t,U0)
62 title('Entrada')
63
64 subplot(2,1,2)
65 plot(t,X0(1,:),t,X0(2,:))
66 legend('x1','x2','Location','best')
67 title('Malha aberta')
68
69 % construcao das matrizes de dados Ad, Bd, Cd
70 Ad = [X0;U0]*[X0;U0]';
71 Bd = -[X0;U0]*X1';
72 Cd = X1*X1'-DELTA*DELTA';
73 zeta = -inv(Ad)*Bd;
74 Q = Bd'*inv(Ad)*Bd - Cd;
75
76
77 % declaracao das variaveis LMI
78 prog = sosprogram(vars)
79
80 [prog, Y] = sospolynomialmatrixvar(prog,monomials(vars,0),[m,n]);
81 [prog, P] = sospolynomialmatrixvar(prog,monomials(vars,0),[n,n],
    symmetric');
82
83 % condicoes de estabilidade
84 prog = sosineq(prog, P);
85
86 condicao = [-Cd Bd'-[P;Y]';Bd-[P;Y] -Ad];
87 prog = sosineq(prog, -condicao);
88
89 % resolvendo

```

```
90 sol = sossolve(prog);
91
92 % solucao
93 Y = double(sosgetsol(sol,Y))
94 P = double(sosgetsol(sol,P))
95
96 % controlador obtido
97 K = Y*inv(P)
98
99 % grafico do sistema em malha fechada (dominio do tempo)
100 C = [1 0; 0 1];
101 D = [0 0;0 0];
102 figure
103 buck_malha_fechada = ss(A,B*K,C,D);
104 [X0_mf,tOut] = initial(buck_malha_fechada,X0(:,1),t);
105 plot(t,X0_mf'+[x1bar;x2bar])
106 legend('x1','x2','Location','best')
107 title('K(projetado)')
108
109 % funcao de Lyapunov obtida
110 pvar x1 x2
111 x = [x1; x2];
112 V = x'*P*x
113
114 % diagrama de fases - malha aberta
115 syms x1 x2
116 a=4;
117 [x1,x2] = meshgrid(-a:0.01:a,-a:0.01:a);
118
119 dx1 = A(1,1).*(x1)+A(1,2).*(x2);
120 dx2 = A(2,1).*(x1)+A(2,2).*(x2);
121
```

```

122 figure
123 streamslice(x1,x2,dx1,dx2,1)
124 title('Diagrama de fases - malha aberta')
125 xlabel('x1'), ylabel('x2')
126
127 % diagrama de fases - malha fechada
128 syms x1 x2
129 a=4;
130 [x1,x2] = meshgrid(-a:0.01:a,-a:0.01:a);
131
132 Kx = K(1).*(x1-x1bar) + K(2).*(x2-x2bar);
133
134 dx1 = A(1,1).*(x1-x1bar)+A(1,2).*(x2-x2bar) + Kx +ubar;
135 dx2 = A(2,1).*(x1-x1bar)+A(2,2).*(x2-x2bar) + Kx +ubar;
136 figure
137 streamslice(x1,x2,dx1,dx2,1)
138 title('Diagrama de fases - malha fechada')
139 xlabel('x1'), ylabel('x2')
140 hold on
141 plot(x1bar,x2bar,'o')

```

Código-fonte 2 – Algoritmo de projeto da lei de controle - sistema polinomial - oscilador de Van der Pol

```

1 clc; clear; close all
2
3 % % % Data-driven control via Petersen's lemma
4 % % Andrea Bisoffi, Claudio De Persis and Pietro Tesi
5
6 % Oscilador de Van der Pol
7 T = 100;
8 delta = 1e-5;

```

```
9
10 pvar x1 x2
11 vars = [x1;x2];
12 x = [x1;x2];
13
14 e = 1;
15 % f = [x2;
16 %      -x1 + e*(1-x1^2)*x2];
17 %
18 % g = [1 1];
19 %
20 % h = x1 + x2 + x1^2 + x1*x2 + x2^2;
21
22 m = 1; %tamanho de u
23 n = 2; %tamanho de x
24 DELTA = T*delta*eye(n);
25
26 % Initialization of regressors
27 A = [0 1 0 0 0 0 0 0 0;
28      -1 e 0 0 0 0 -1 0 0];
29 Z = [monomials(x,1:3)];
30
31 B = [1;
32      1];
33 W = monomials(x,0);
34
35 N = length(Z);
36 M = length(W);
37
38 % gerando entrada u, senoide, tsim = 1s, freq = 2*pi*3/tsim
39 %      , amplitude =
40 % 0.5
```

```

40 tsim = 1;
41 tsample = tsim/T;
42 t = 0:tsample:(tsim);
43 w = 2*pi*(3/tsim);
44 u = 0.5*(sin(w*t)+1);
45
46 % gerando dados Z0 e X1
47 X0 = zeros(n,T+1);           % initializing vetores de dados
48 X0(:,1) = 0.1;              % condico inicial
49 Z0 = zeros(N,T);
50 W0 = zeros(M,T);
51 V0 = zeros(M,T);
52 X1 = zeros(n,T);
53 d = zeros(n,T+1);
54
55 for i=2:(T+1)
56     Z0(:,i-1) = [X0(1,i-1); X0(2,i-1); X0(1,i-1)^2; X0(1,i
57                 -1)*X0(2,i-1);
58                 X0(2,i-1)^2; X0(1,i-1)^3; X0(1,i-1)^2*X0
59                 (2,i-1);
60                 X0(1,i-1)*X0(2,i-1)^2; X0(2,i-1)^3];
61     W0(:,i-1) = [1];
62     d(:,i-1) = sqrt(delta)*[cos(2*pi*0.4*t(i-1));sin(2*pi
63     *0.4*t(i-1))];
64     V0(:,i-1) = W0(:,i-1)*u(i-1);
65     X1(:,i-1) = A*Z0(:,i-1)+B*V0(:,i-1) +d(:,i-1);
66     X0(:,i) = X0(:,i-1)+tsample*X1(:,i-1);
67 end
68
69 X0 = X0(:,1:T);
70 V0 = V0(:,1:T);
71 t = t(1:T);

```



```
69 u = u(1:T);
70
71 % grafico dos dados gerados
72 figure
73 subplot(2,1,1)
74 plot(t,u)
75 title('Entrada')
76
77 subplot(2,1,2)
78 plot(t,X0(1,:),t,X0(2,:))
79 legend('x1','x2','Location','best')
80 title('Malha aberta')
81
82 % construindo as matrizes de dados Ad, Bd e Cd
83 Ad = [Z0;V0]*[Z0;V0]';
84 Bd = -[Z0;V0]*X1';
85 Cd = X1*X1'-DELTA*DELTA';
86
87 % construindo as matrizes de dados zeta e Q
88 zeta = -inv(Ad)*Bd;
89 Q = Bd'*inv(Ad)*Bd - Cd;
90
91 % parametros de projeto
92 l0 = 1e0*(x1^2+x2^2);
93 c = 1;
94 epsi = 1e-5;
95
96 % V inicial
97 V = x'*x;
98
99 % especifica o das iteracoes
100 i = 0;
```

```

101 i_max = 15;
102
103 while i<i_max
104
105 % resolvendo com SOSTools (V fixo)
106 prog = sosprogram(vars);
107
108 [prog,k] = sospolyvar(prog,[monomials(x,1:2)],'wscoeff');
109 [prog,lambda] = sospolyvar(prog,[monomials(x,0:2)],'wscoeff
    ');
110 [prog,Tx] = sospolyvar(prog,[monomials(x,2:4)],'wscoeff');
111 [prog,l1] = sospolyvar(prog,[monomials(x,2)],'wscoeff');
112
113 % restricoes SOS
114 prog = sosineq(prog,V-l1);
115
116 gradV = [diff(V,x1) diff(V,x2)];
117 estabilidade = [Tx+gradV*zeta'*[Z;W*k] [Z;W*k]'*Ad^(-1/2)
    gradV*lambda*Q^(1/2);
118                 Ad^(-1/2)*[Z;W*k] -lambda*eye(N+M) zeros(N+
    M,n);
119                 lambda*Q^(1/2)*gradV' zeros(n,N+M) -4*
    lambda*eye(n)];
120 prog = sosineq(prog,-estabilidade);
121
122 prog = sosineq(prog,lambda-epsi);
123
124 % k e lambda obtidos
125 sol = sossolve(prog);
126 k = sosgetsol(sol,k);
127 lambda = sosgetsol(sol,lambda);
128

```

```

129 % resolvendo com SOSTools (k e lambda fixos)
130 prog = sosprogram(vars);
131
132 [prog,V] = sospolyvar(prog,[monomials(x,2)],'wscoeff');
133 [prog,Tx] = sospolyvar(prog,[monomials(x,2:4)],'wscoeff');
134 [prog,l1] = sospolyvar(prog,[monomials(x,2)],'wscoeff');
135
136 % restricoes SOS
137 prog = sosineq(prog,V-l1);
138
139 gradV = [diff(V,x1) diff(V,x2)];
140 estabilidade = [Tx+gradV*zeta'*[Z;W*k] [Z;W*k]'*Ad^(-1/2)
141               gradV*lambda*Q^(1/2);
142               Ad^(-1/2)*[Z;W*k] -lambda*eye(N+M) zeros(N+
143               M,n);
144               lambda*Q^(1/2)*gradV' zeros(n,N+M) -4*
145               lambda*eye(n)];
146
147 prog = sosineq(prog,-estabilidade);
148
149 prog = sosineq(prog,lambda-epsi);
150
151 % V obtido
152 sol = sossolve(prog);
153 V = sosgetsol(sol,V);
154 i = i+1
155 end
156
157 Kc = full(k.coefficient);
158 % grafico do sistema em malha fechada (dominio do tempo)
159
160 for i=2:(T+1)
161     Z0(:,i-1) = [X0(1,i-1); X0(2,i-1); X0(1,i-1)^2; X0(1,i

```

```

-1)*X0(2,i-1);
158         X0(2,i-1)^2; X0(1,i-1)^3; X0(1,i-1)^2*X0
           (2,i-1);
159         X0(1,i-1)*X0(2,i-1)^2; X0(2,i-1)^3];
160 W0(:,i-1) = [1];
161
162 K = Kc(1)*X0(1,i-1)^2 + Kc(2)*X0(1,i-1)*X0(2,i-1) + Kc
           (3)*X0(2,i-1)^2 + ...
163 Kc(4)*X0(1,i-1) + Kc(5)*X0(2,i-1);
164
165 X0(:,i) = X0(:,i-1)+t*sample*(A*X0(:,i-1)+B*W0(:,i-1)*K+
           d(:,i-1));
166 end
167 figure
168 plot(t,X0(1,1:T),t,X0(2,1:T))
169 legend('x1','x2','Location','best')
170 title('Malha fechada')
171
172 % diagrama de fases - malha aberta
173 syms x1 x2
174 a=4;
175 [x1,x2] = meshgrid(-a:0.01:a,-a:0.01:a);
176
177 dx1 = x2;
178 dx2 = -x1 + e.*(1-x1.^2).*x2;
179
180 figure
181 streamslice(x1,x2,dx1,dx2,2)
182 title('Diagrama de fases - malha aberta')
183 xlabel('x1'), ylabel('x2')
184
185 % diagrama de fases - malha fechada

```

```
186 syms x1 x2
187 a=4;
188 [x1,x2] = meshgrid(-a:0.01:a,-a:0.01:a);
189
190 K = Kc(1).*x1.^2 + Kc(2).*x1.*x2 + Kc(3).*x2.^2 + Kc(4).*x1
      + Kc(5).*x2;
191
192 dx1 = x2 + K;
193 dx2 = -x1 + e.*(1-x1.^2).*x2 + K;
194
195 figure
196 streamslice(x1,x2,dx1,dx2,2)
197 title('Diagrama de fases - malha fechada')
198 xlabel('x1'), ylabel('x2')
199 hold on
200 plot(0,0,'o')
```