



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

LARA DOMINGOS HISSA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES COMPLEXAS

FORTALEZA

2024

LARA DOMINGOS HISSA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES COMPLEXAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.
Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H579m Hissa, Lara Domingos.

Modelo de opiniões extremas em redes complexas / Lara Domingos Hissa. – 2023.
58 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis.

1. Dinâmica de opinião. 2. Sistemas Complexos. 3. Transição de Fase. 4. Teimosia. I. Título.

CDD 530

LARA DOMINGOS HISSA

MODELO DE OPINIÕES EXTREMAS EM REDES COMPLEXAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física.
Área de Concentração: Física

Aprovada em: 24 de Janeiro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Erneson Alves de Oliveira
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, José Salim Hissa Júnior (*In Memoriam*) e Márcia Domingos Saboia Hissa, e ao meu irmão, Vinicius Salim, por todo suporte, apoio e força que me deram durante esta trajetória.

Ao meu orientador Prof. Saulo Davi Soares e Reis por toda a orientação durante a realização deste trabalho, sem sua orientação, atenção e compreensão este trabalho não seria possível.

Aos professores da banca, Prof. César Ivan Nunes Sampaio Filho e Prof. Erneson Alves de Oliveira, por terem aceitado o convite.

À CAPES e a Universidade Federal do Ceará pelo fornecimento da bolsa e toda a estrutura.

A todos integrantes do Laboratório de Sistemas Complexos. Especialmente aos que me acompanharam e se tornaram bons amigos no laboratório: Germano, Hermes, Edson, Rafael, Laísa e Samuel.

Aos meus demais amigos que me acompanharam durante todo esse percurso: Rômulo Sampaio, Victor Sales, Vasco Stascxak, Robert Bertoldo, André Albuquerque, Thiago Lima e Maria Eduarda.

"It's a long, long, long, long way

It's a long way

It's a long, it's a long, long, long

It's a long way

It's a long, long, long way

It's a long, long, long

It's a long way, it's a long"

(Veloso, 1972)

RESUMO

Neste trabalho investigamos a dinâmica de opinião em redes complexas, com foco na variação do parâmetro de teimosia (a). Reproduzimos e analisamos o modelo de opinião que propõe regras de ativação com esse parâmetro (RAMOS *et al.*, 2015), examinamos as transições de fase a partir da formação de aglomerados. Nossos resultados destacam a sensibilidade do sistema às condições iniciais e revelam que o parâmetro a desempenha um papel significativo nas transições de fase. Observamos que, para valores menores de a , as transições são mais abruptas, indicando maior maleabilidade nas opiniões individuais. À medida que a aumenta, a resistência à mudança intensifica, resultando em transições mais suaves. A construção do diagrama de fase para valores de $\langle k \rangle = 5$ e $\langle k \rangle = 4$ valida a proposta do modelo original de uma transição crítica de visões moderadas para extremas, caracterizada por um comportamento não linear.

Palavras-chave: dinâmica de opinião; sistemas complexos; transição de fase; teimosia.

ABSTRACT

In this work, we investigate the dynamics of opinion in complex networks, focusing on the variation of the stubbornness parameter (a). We reproduce and analyze the opinion model that proposes activation rules with this parameter (RAMOS *et al.*, 2015), examining phase transitions from cluster formation. Our results highlight the system's sensitivity to initial conditions and reveal that the parameter a plays a significant role in phase transitions. We observe that for smaller values of a , transitions are more abrupt, indicating greater flexibility in individual opinions. As a increases, resistance to change intensifies, resulting in smoother transitions. The construction of the phase diagram for values of $\langle k \rangle = 5$ and $\langle k \rangle = 4$ validates the original model's proposition of a critical transition from moderate to extreme views, characterized by nonlinear behavior.

Keywords: opinion dynamics; complex networks; phase transitions; stubbornness.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Representação do grafo do problema das pontes de Königsberg desenvolvido por Euler. As ilhas são os vértices roxos A, B, C e D. As pontes estão representadas pelas arestas que conectam esses vértices.</p>	14
<p>Figura 2 – a) Representação de um grafo não direcionado e b) representação de um grafo direcionado.</p>	16
<p>Figura 3 – (a) Diagrama de fases de um ferromagneto simples. Existe uma linha de transições de primeira ordem ao longo de $H = 0$ que termina em um ponto crítico em $T = T_c$. (b) Dependência de campo da energia livre. (c) Dependência de campo da magnetização. (d) Dependência de campo da suscetibilidade. (e) Dependência da magnetização com a temperatura. (f) Dependência da suscetibilidade com a temperatura</p>	27
<p>Figura 4 – Representação da definição de percolação e aglomerados: (a) mostra uma rede quadrada, (b) alguns quadrados são ocupados por pontos por probabilidade p, (c) grupos de vizinhos são formados quando apresenta mais de um quadrado preenchido em sua vizinhança.</p>	33
<p>Figura 5 – Apresentação das regras de ativação do modelo: Considere um nó com grau 3 que mantém uma opinião moderada $q = 0,5$ e possui uma teimosia $a = 0.8$. Existem três cenários possíveis nas diretrizes do modelo: (i) Se $\bar{q}(= 0,9) > q$ e do mesmo sinal que q, a opinião do nó se torna mais extrema $q \rightarrow \bar{q}$. (ii) Se $\bar{q} < q$, mas maior que uma fração de q dada por $1a$, então os vizinhos mais próximos não podem alterar a opinião do nó devido à sua obstinação. Consequentemente, a opinião permanece a mesma. (iii) Quando a opinião média dos vizinhos mais próximos é mais moderada ou oposta em sinal, ela pode influenciar a opinião do nó. Neste caso, para $\bar{q} = -0,7$, a opinião positiva do nó muda, tornando-se $q = 0,3$.</p>	42

- Figura 6 – Diagrama de fases extremas derivado do modelo em função de f_e e $\langle k \rangle$. As linhas pretas indicam transições de primeira ordem para $\langle k \rangle > k_c$, enquanto as linhas azuis representam transições contínuas para $\langle k \rangle > k_c$. Fase Moderada (Fase I) apresenta ausência de um aglomerado gigante. Fase Incipiente (Fase II) ilustra o surgimento de um e-cluster gigante, com efeitos em cascata em ascensão. Fase Extrema (Fase III) é caracterizada pelo consenso entre os extremistas para um grau médio suficientemente alto. 43
- Figura 7 – Transições críticas do modelo para a formação da Fig. 6. (a)-(d) Para $\langle k \rangle = 5 > k_c$. (e)-(h) Para $\langle k \rangle = 4 < k_c$. Os resultados apresentados são uma média de 50 redes ER (exceto para (b) e (f), onde foram para 300 redes) e o parâmetro de teimosia $a = 1$. Nas figuras (a) e (e) s_1^e e s_2^e vs f_0 . Os tamanhos dos clusters são normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede ($N = 10^5$). Nas figuras (b) e (f) o tamanho da maior cascata S^* vs f_0 . O que mostra a distribuição dos tamanhos das cascatas para diferentes valores de f_0 , exibindo um padrão de escalonamento de lei de potência ($N = 10^4$). Na (c) e (g) f_e e f vs f_0 ($N = 10^5$). Em (d) e (h) as curvas f e f_e para evidenciar o comportamento não linear. As regiões sombreadas em (d) correspondem aos saltos nas transições de primeira ordem, portanto, inacessíveis no limite de tamanho infinito. As áreas em tons azulados em (d) e (h) representam a região do regime de grandes cascatas S^* de (b) e (f), respectivamente. Elas indicam que a não linearidade está associada à ocorrência de cascatas progressivamente maiores à medida que f aumenta. Para maior clareza, considera-se apenas a fração de vértices positivos ($q > 0$) e extremamente positivos ($q_e > 0$) no cálculo de f e f_e 44
- Figura 8 – Resultados da simulação do modelo para $\langle k \rangle = 5$.(a) representam as curvas de f e f_e em função de f_0 . (b) Mostram os aglomerados S_1^e e S_2^e em função de f_0 , estando normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede. 46
- Figura 9 – Resultados da simulação do modelo para $\langle k \rangle = 4$.(a) representam as curvas de f e f_e em função de f_0 . (b) Mostram os aglomerados S_1^e e S_2^e em função de f_0 , estando normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede. 47
- Figura 10 – Comportamento das curvas de f , f_e em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 5$ 48

Figura 11 – Medida dos maiores aglomerado S_1^e e S_2^e , normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede, em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 5$	49
Figura 12 – Comportamento das curvas de f e f_e em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 4$	50
Figura 13 – Medida dos maiores aglomerados S_1^e e S_2^e , normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede, em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 4$	51
Figura 14 – Diagrama de fase para $\langle k \rangle = 5$	54
Figura 15 – Diagrama de fase para $\langle k \rangle = 4$	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REDES COMPLEXAS	14
2.1	Grafos em redes	15
2.1.1	<i>Grau, grau médio e distribuição de grau</i>	16
2.1.2	<i>Caminho mais Curto e Conectividade</i>	17
2.1.3	<i>Agrupamento</i>	18
2.2	Modelos de Redes	19
2.2.1	<i>Redes Aleatórias</i>	19
2.2.1.1	<i>Modelo Erdős-Rényi</i>	19
2.2.1.2	<i>A evolução estrutural da rede</i>	20
2.2.1.3	<i>Distribuição de graus</i>	21
2.2.1.4	<i>Comprimento médio do caminho mais curto</i>	21
2.2.1.5	<i>Coefficiente de agrupamento</i>	22
2.2.2	<i>Rede de mundo pequeno</i>	23
2.2.2.1	<i>Modelo Watts-Strogatz</i>	23
3	TRANSIÇÃO DE FASE	25
3.1	Transições de Primeira e Segunda Ordem	26
3.2	Expoentes críticos	28
3.3	Universalidade	29
3.4	Modelo de Ising	30
3.5	Teoria da Percolação	32
3.5.1	<i>Percolação como um fenômeno crítico</i>	34
4	DINÂMICA DE OPINIÃO	36
4.1	Modelos baseados em agentes	37
4.1.1	<i>Modelo com regras de ativação baseadas na teimosia</i>	39
5	RESULTADOS	46
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

No decorrer das últimas décadas, parece haver uma tendência mundial para divisão de opiniões públicas sobre diversos assuntos, as causas do surgimento de opiniões extremistas na sociedade tem ocasionado um intenso debate entre estudiosos (WATTS, 2002; SIMON; KLANDERMANS, 2001). Em muitos assuntos, verifica-se uma diminuição das opiniões moderadas para um surgimento concomitante de opiniões extremas (ABRAMOWITZ; SAUNDERS, 2008; MERKL; WEINBERG, 2014). Isso tem ocorrido não somente em assuntos sérios como política, mas também em temas mais simples como livros e filmes.

Entender como essas tendências se instalam na sociedade é um desafio. As interações entre os indivíduos desempenham relevância para propagar informações e ideias. Nesse processo, novas opiniões podem ser formadas e as que já existem podem ser fortalecidas ou enfraquecidas. A questão é compreender a dinâmica de polarização das opiniões públicas e permitir detectar a tendência dessa polarização.

Neste trabalho, fundamentamo-nos em um modelo desenvolvido por Ramos et al. (2015) (RAMOS *et al.*, 2015), que revela um preditor preciso para o aumento de tendências de opiniões extremas na sociedade. Ele descreve um comportamento não linear relacionado ao número de indivíduos com uma visão extrema e o número de indivíduos com uma opinião moderada e extrema. Essa abordagem delinea a dinâmica da opinião pública com base em dados disponíveis, antecipando a tendência à polarização antes de sua efetiva ocorrência. O método apresenta um parâmetro de medição de consenso chamado de teimosia. Esse parâmetro é estratégico para indicar a influência de um indivíduo ao outro.

No trabalho mencionado, uma não linearidade na relação entre a proporção de indivíduos extremistas e a proporção de indivíduos com opinião na mesma orientação, quer seja moderada ou extremista, emerge como um indicador revelador do momento em que o coletivo de indivíduos adota uma postura extremista. Em geral, para um sistema físico estatístico de agentes não interativos, a isometria é esperada.

Esta não linearidade inspirou a proposição do modelo no qual a teimosia dos indivíduos figura como o ingrediente fundamental para o surgimento da não linearidade mencionada.

No presente trabalho, investigaremos como a variação da teimosia indivíduos influencia na formação de grupos extremistas na redes sintéticas utilizadas por meio de métodos da Física Estatística e Física das Transições de Fases.

No segundo capítulo, apresentamos aspectos relevantes da Teoria de Redes, desde

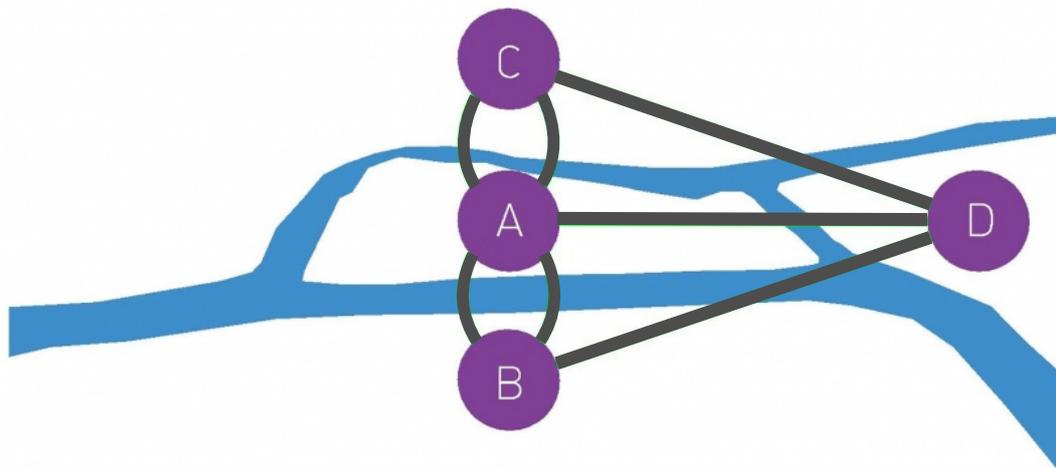
sua definição até propriedades e modelos relevantes para este estudo. O terceiro capítulo aborda a Teoria da Transição de Fases, apresentando conceitos como ponto crítico, expoentes críticos, universalidade e percolação como um fenômeno crítico. O quarto capítulo explora os conceitos e ferramentas básicas para a formação de modelos de opiniões, destacando os principais modelos encontrados na literatura.

O quinto capítulo apresenta nossos resultados sobre a variação do parâmetro de teimosia e as transições de fase em relação as opiniões com essa variação. Assim, concluímos e discutimos as perspectivas futuras no capítulo 6.

2 REDES COMPLEXAS

Por volta de 1735, na cidade de Königsberg, capital da Prússia Oriental, os matemáticos debatiam um problema intrigante sobre as pontes de Königsberg. A questão central consistia em descobrir se seria possível atravessar as sete pontes da cidade sem repetir nenhuma delas. Leonard Euler, renomado matemático, solucionou esse problema ao representar a situação da seguinte maneira: as áreas de terra seriam delineadas como pontos (vértices) A, B, C e D, enquanto as pontes seriam representadas por linhas (arestas) conectando esses pontos, conforme ilustrado na Figura 1 (EULER, 1741).

Figura 1 – Representação do grafo do problema das pontes de Königsberg desenvolvido por Euler. As ilhas são os vértices roxos A, B, C e D. As pontes estão representadas pelas arestas que conectam esses vértices.



Fonte: Retirada do livro (BARABÁSI, 2013)

A abordagem de Euler ao problema das pontes de Königsberg inaugurou um novo campo na matemática conhecido como teoria dos grafos. Nesse ramo, explora-se a dinâmica das relações entre elementos de um conjunto, permitindo a representação dessas relações de forma abstrata através de grafos. Ao analisar o esquema apresentado na Figura 1, Euler concluiu que não era possível encontrar um caminho que atravessasse todas as pontes exatamente uma vez. Ele estabeleceu um resultado fundamental, observando que em um grafo com mais de dois vértices e um número ímpar de arestas, não pode existir um caminho que satisfaça essa condição. No caso específico do problema das pontes, cada vértice possuía um número ímpar de arestas conectadas, impossibilitando a solução desejada (BARABÁSI, 2003).

A solução de Euler foi essencial para o desenvolvimento da teoria dos grafos, que desde então tem aplicações em diversas áreas da Matemática, Física e Ciências da Computa-

ção. No âmbito da Teoria de Redes, uma rede corresponde, matematicamente, a um grafo, distinguindo-se por sua abordagem em resolver problemas de sistemas reais. Neste capítulo, apresentaremos as definições e notações de um grafo para compreender o uso matemático de uma rede. Dado que nosso trabalho envolve um problema de sistema real, abordaremos a construção de algumas redes, especialmente as aleatórias, e discutiremos suas propriedades.

2.1 Grafos em redes

Como mencionado anteriormente, uma rede, seja ela complexa ou não, pode ser representada matematicamente por meio de um grafo. O termo redes complexas refere-se a um grafo composto por um conjunto de nós que são interligados por meio de ligações em uma estrutura não trivial.

Definimos um grafo como um par de conjuntos $G = (V, A)$, onde V é um conjunto finito de vértices, e A é um conjunto finito de arestas que unem pares de vértices. Geralmente, cada aresta liga dois vértices distintos, mas, em casos excepcionais, os dois vértices podem coincidir, caracterizando a aresta como um auto-ciclo. Cada aresta é representada pelo par (i, j) , podendo ser direta (com sentido determinado) ou indireta (sem especificação de direção), estabelecendo que os índices i e j são vizinhos ou adjacentes. A representação visual de um grafo assemelha-se a um diagrama de pontos e linhas, exemplificado na Figura 1 pela representação de Euler, onde os pontos correspondem aos vértices e as linhas representam as arestas."

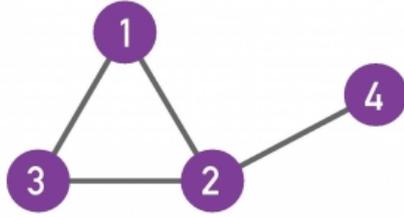
Grafos diretos ou dígrafos possuem arestas direcionadas e são úteis em redes com estruturas de envio de mensagens ou ligações telefônicas. Eles podem incluir auto-ciclos. Em contraste, grafos não-direcionados, onde o conjunto de arestas A é não ordenado ($A_{ij} = A_{ji}$), proíbem auto-ciclos. Na Figura 2a, temos a representação de um grafo não-direcionado com o conjunto de vértices $V = 1, 2, 3, 4$, e na Figura 2b, temos a representação de um grafo direcionado com o mesmo conjunto de vértices.

Os grafos fornecem informações importantes sobre redes, e neste estudo, adotamos o vocabulário próprio das redes. Portanto, os vértices serão frequentemente referidos como nós (N), representando os componentes do sistema, enquanto as arestas serão denominadas ligações (L), indicando as interações entre esses nós.

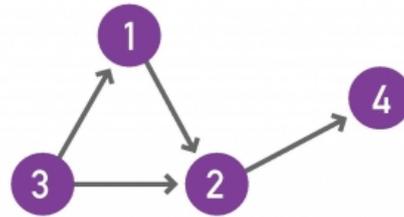
Assim, nas próximas seções, exploraremos propriedades fundamentais que os grafos oferecem sobre uma rede, tais como o grau dos nós, o grau médio da rede, distribuições de grau, a distância entre nós, a conectividade e o agrupamento. Essas características proporcionam

Figura 2 – a) Representação de um grafo não direcionado e b) representação de um grafo direcionado.

a) Rede não direcionada



b) Rede direcionada



Fonte: Retirada do livro (BARABÁSI, 2013)

informações refinadas sobre a estrutura e o comportamento das redes.

2.1.1 Grau, grau médio e distribuição de grau

O grau de um nó em uma rede não direcionada, representado por k_i , indica a quantidade de conexões que o nó possui com outros nós. Em outras palavras, o grau de um nó é equivalente ao número de vizinhos ou ligações que ele possui, referindo-se aos nós adjacentes em relação ao nó i . Essa medida é fundamental para compreender a conectividade individual dos nós em uma rede (NEWMAN *et al.*, 2006). O número total de ligações na rede pode ser calculado por

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i, \quad (2.1)$$

onde a divisão por 2 é realizada para evitar a contagem duplicada das ligações, uma vez que cada ligação é compartilhada por dois nós adjacentes.

O grau médio de uma rede não direcionada pode ser calculada por

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N}. \quad (2.2)$$

No caso de uma rede direcionada, o grau de uma rede é composto pelo número de ligações de saída k_i^{out} e o número de ligações de entrada k_i^{in} do nó i . Então, o grau do nó para esse tipo de rede é dada por

$$k_i = k_i^{in} + k_i^{out}. \quad (2.3)$$

E o grau médio de uma rede direcionada é dada por

$$\langle k^{in} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{in} = \langle k^{out} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{out} = \frac{L}{N}. \quad (2.4)$$

O conceito de "distribuição de grau" representa a probabilidade de um nó, escolhido aleatoriamente em uma rede, possuir um grau específico k . Essa probabilidade é denotada por $P(k)$ e requer normalização expressa como $\sum_{k=1}^{\infty} P(k) = 1$. No contexto de uma rede com N nós, a distribuição de grau pode ser visualizada como um histograma normalizado, sendo definida por

$$P(k) = \frac{N_k}{N}, \quad (2.5)$$

onde N_k é o número de nós de grau k .

Em redes aleatórias, a distribuição de graus é descrita por uma distribuição binomial. Isso significa que a probabilidade de um nó ter um grau alto diminui rapidamente à medida que o grau aumenta. Nessas redes, todos os momentos de k , que são medidas estatísticas da distribuição de graus, são finitos, mesmo quando o número de nós N tende ao infinito.

Por outro lado, muitas redes reais apresentam uma distribuição de grau que decai lentamente, indicando a presença de nós altamente conectados, conhecidos como *hubs*. Um exemplo comum desse tipo de distribuição é a lei de potência, caracterizada por $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Essas distribuições sem escala característica, onde os momentos dos graus são limitados por um limite superior, são observadas em redes livres de escala. O momento $\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k)$ não tende ao infinito para valores de n maiores do que o limite superior da soma. (NEWMAN; BARKEMA, 1999)

2.1.2 Caminho mais Curto e Conectividade

Em redes, a distância entre nós é determinada pelo comprimento do caminho, que representa o número de ligações percorridas. O caminho mais curto entre dois nós, i e j , é o trajeto que possui o menor número de ligações, sendo importante ressaltar que não contém ciclos nem interseções, garantindo a rota mais direta possível.

Em redes direcionadas, a distância entre os nós i e j pode diferir da distância entre j e i , ou seja, devido à assimetria das ligações direcionadas na rede. Portanto, a existência de um caminho do nó i para o nó j não implica necessariamente a existência de um caminho inverso do nó j para o nó i . Cada caminho deve ser analisado separadamente para determinar sua existência e comprimento.

Em redes reais, frequentemente é necessário determinar a menor distância, d_{ij} , entre dois nós. O comprimento do caminho mais curto entre os nós i e j pode ser definido como a

sequência de ligações que minimiza esse comprimento d_{ij} . Assim, o comprimento médio do caminho mais curto, $\langle d \rangle$, em toda a rede, pode ser calculado pela equação

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in i \neq j} d_{ij}. \quad (2.6)$$

A Eq. 2.6 permite obter uma medida média da distância entre todos os pares de nós na rede, fornecendo informações sobre a conectividade e a eficiência de comunicação na rede.

Em uma rede não direcionada, os nós i e j estão conectados se houver um caminho entre eles. Caso contrário, ou seja, se não houver um caminho entre eles, são considerados desconectados, e nesse caso, $d_{ij} = +\infty$. Uma rede é considerada conectada se todos os pares de nós estiverem conectados; caso contrário, é considerada desconectada se houver pelo menos um par de nós com $d_{ij} = +\infty$.

2.1.3 Agrupamento

Outra medida topológica importante para caracterizar redes é o coeficiente de agrupamento, que representa a probabilidade de três nós estarem conectados entre si.

Na teoria das redes, o coeficiente de agrupamento avalia a propensão à formação de agrupamentos locais (aglomerados locais) na rede, ou seja, a probabilidade de encontrar conjuntos de três nós em que cada nó está conectado aos outros dois. O coeficiente de agrupamento local c_i pode ser quantificado usando a seguinte equação

$$c_i = \frac{L}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.7)$$

onde c_i mede a proporção de arestas existentes entre os vizinhos do nó i em relação ao número máximo possível de arestas entre eles. Este coeficiente varia de 0 a 1, sendo 1 indicativo de um alto grau de agrupamento local. O coeficiente de agrupamento médio $\langle C \rangle$ de toda a rede é calculado como a média dos coeficientes de agrupamento locais de todos os nós da rede, conforme a Eq.2.8

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i \in G} c_i, \quad (2.8)$$

De acordo com a interpretação probabilística, $\langle C \rangle$ representa a probabilidade de que dois vizinhos de um nó selecionado aleatoriamente estejam conectados entre si. Essa definição é

aplicável a redes não direcionadas. Entretanto, o coeficiente de agrupamento também pode ser generalizado para redes direcionadas e ponderadas, levando em consideração a direção e o peso das conexões (BARRAT *et al.*, 2004; ONNELA *et al.*, 2005).

Além disso, quando todos os nós na rede estão conectados entre si, formando um aglomerado global, surge um componente gigante. Isso geralmente ocorre durante transições de fase em redes aleatórias, quando a densidade crítica de conexões é atingida.

2.2 Modelos de Redes

Modelos de rede são ferramentas essenciais para entender a complexidade das interconexões entre entidades. Destacam-se as redes aleatórias e as redes de mundo pequeno, cada uma oferecendo uma perspectiva única sobre a estrutura e dinâmica desses sistemas. Além dos modelos clássicos de Erdos-Rényi (para redes aleatórias) e Watts-Strogatz (para redes de mundo pequeno), existem outros, como o modelo de Barabási-Albert, que descreve a formação de redes livres de escala.

Neste capítulo, focaremos nos modelos de Erdos-Rényi e Watts-Strogatz, explorando suas propriedades principais para entender como contribuem para a compreensão das redes complexas.

2.2.1 Redes Aleatórias

Um dos desafios na construção de uma rede é determinar a posição das ligações entre os nós de forma a reproduzir a complexidade de um sistema real. Ao criar uma rede aleatória, parte-se do pressuposto de que as conexões são estabelecidas de forma aleatória entre os nós, de modo que cada par de nós está conectado com uma probabilidade p . Um dos modelos mais clássicos que adota essa abordagem é o Modelo de Erdős-Rényi. Nesse modelo, com N nós identificados, um número fixo L de ligações é estabelecido aleatoriamente entre eles. A seguir, abordaremos esse modelo em específico (BOLLOBÁS; BOLLOBÁS, 1998).

2.2.1.1 Modelo Erdős-Rényi

O estudo de redes aleatórias ganhou destaque devido ao interesse dos matemáticos Paul Erdős e Alfred Rényi, que propuseram um dos modelos mais fundamentais na teoria dos grafos. No modelo Erdos-Rényi (ER), é estabelecido um conjunto de redes denotadas

por $(G(N, p))$, onde N nós são conectados por ligações escolhidas aleatoriamente com uma probabilidade p . Nesse modelo, considera-se que existem um total de $L = N(N - 1)/2$ possíveis ligações não redundantes em uma rede de tamanho N . Cada uma dessas ligações é incluída na rede com probabilidade p , independentemente das outras ligações. Portanto, a probabilidade de uma ligação não ser incluída na rede é $1 - p$.

Uma das principais quantidades estudadas nesse modelo é o grau médio característico, representado por $\langle k \rangle$. No limite em que N tende ao infinito, o grau médio característico de uma rede ER é dado por $\langle k \rangle = p(N - 1) \simeq pN$. Essa relação estabelece que, no limite de grandes redes, o grau médio dos nós é proporcional ao número total de nós N , multiplicado pela probabilidade p de incluir uma ligação.

A seguir, apresentaremos algumas características importantes desse modelo.

2.2.1.2 A evolução estrutural da rede

Analisar a evolução das propriedades do modelo ER ao longo do tempo proporciona informações relevantes sobre o comportamento dinâmico das redes reais. A compreensão mais profunda do papel dessa rede na modelagem de sistemas complexos é destacada por meio da observação de como suas propriedades se desenvolvem. Nesse modelo, diversas características são influenciadas pelo valor de p . Supõe-se que $p(N) \sim N^{-z}$, onde z é uma variável ajustável no intervalo $[0, \infty)$ (ERDÖS, 1960). Diferentes valores de z refletem distintos comportamentos no modelo, como a prevalência de aglomerados isolados quando z ultrapassa $3/2$ ou a formação de aglomerados maiores à medida que z se aproxima de 1. Uma análise simples revela uma transição de fase na conectividade da rede quando $z = 1$, correspondendo a uma probabilidade crítica $p_c = 1/N$ e um grau médio crítico $\langle k \rangle_c = 1$. A seguir, destacam-se algumas características dessa transição:

- Para $p < p_c$, a rede não possui aglomerados maiores que $O(\ln N)$ e qualquer aglomerado presente possui mais de um auto-ciclo;
- Quando $p = p_c$, emerge um aglomerado gigante de tamanho $O(N^{2/3})$, esse aglomerado é um componente conectado massivo, geralmente envolvendo uma grande fração dos nós na rede. Na vizinhança da transição, a distribuição do tamanho do aglomerado segue uma lei de potência, $P(s) \sim s^{-\mu}$, com um expoente $\mu = 5/2$ (ou $3/2$ quando tratamos da distribuição do tamanho do aglomerado de nós escolhidos aleatoriamente);
- Para $p > p_c$, a rede possui um aglomerado de tamanho $O(N)$. Isso corresponde a uma

transição de fase de segunda ordem, pertencente à classe de universalidade de percolação em dimensão infinita.

Essas propriedades indicam que o modelo ER exibe comportamentos distintos dependendo do valor de p , com transições de fase bem definidas e características estatísticas específicas em cada regime. Transições de fase serão melhores discutidas no Capítulo 3.

2.2.1.3 Distribuição de graus

A distribuição de grau $P(k_i)$ no modelo ER com uma probabilidade de ligação p segue uma distribuição binomial, conforme representado por

$$P(k_i = k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (2.9)$$

onde p^{k_i} representa essa probabilidade, enquanto os outros nós têm a probabilidade de ter ausência de ligações, $(1-p)^{N-1-k_i}$. O fator $\binom{N-1}{k_i}$ representa o número de maneiras de arranjar as k_i ligações dentre as $N-1$ possíveis.

A distribuição exata de grau em uma rede aleatória segue a distribuição binomial. No entanto, no limite termodinâmico, com $N \rightarrow \infty$ e $\langle k \rangle = pN$ finito, a distribuição binomial é bem aproximada pela distribuição de Poisson, dada por

$$P(k) \simeq e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!} = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (2.10)$$

Ambas as formulações descrevem a mesma distribuição e possuem propriedades idênticas, mas são expressas em termos de parâmetros diferentes: a distribuição binomial depende de p e N , enquanto a distribuição de Poisson possui apenas um parâmetro, $\langle k \rangle$. A simplicidade da forma de Poisson a torna preferível nos cálculos.

Portanto, apesar de haver várias maneiras de organizar as ligações, o modelo ER é considerado homogêneo, onde a maioria dos nós apresenta um grau médio aproximadamente igual a $\langle k \rangle$.

2.2.1.4 Comprimento médio do caminho mais curto

No cenário do modelo ER, cada nó i mantém $\langle k \rangle$ primeiros vizinhos em média, possibilitando, por meio dessas conexões iniciais, alcançar, em média, $\langle k \rangle^2$ segundos vizinhos a uma distância d . Quando o número de nós na rede atinge uma magnitude considerável, com

$\ln(N)$ muito superior a $\langle k \rangle$, a quantidade de nós separados do nó i por um caminho mais curto de comprimento d_i experimenta um crescimento exponencial, e o número de nós na d -ésima camada assume uma ordem de $O(N)$ (ERDŐS; RÉNYI, 1961).

Ao resolver a equação $\langle k \rangle^d = N$ por meio da função logarítmica, resultamos na seguinte equação:

$$\langle d \rangle \sim \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.11)$$

A Eq. 2.11 simboliza o comprimento médio do caminho mais curto. Portanto, $\langle d \rangle$ depende assintoticamente do logaritmo de N . Esse comportamento peculiar do caminho médio mais curto é emblemático do fenômeno denominado "mundo pequeno", onde, mesmo em redes extensas, o trajeto entre dois nós é notavelmente curto. Detalharemos esse fenômeno posteriormente na subseção 2.2.2.

Ao fazer uso da Eq. 2.11, podemos expressar $\langle d \rangle$ como

$$\langle d \rangle \sim \frac{1}{1-z}. \quad (2.12)$$

A progressão do comprimento médio do caminho mais curto parte de $\langle d \rangle = 1$ e ascende para valores superiores quando $0 < z < 1$, eventualmente divergindo à medida que z se aproxima de 1 (ou conforme p se aproxima de p_c). Esse padrão sugere a existência de um aglomerado com características análogas a uma árvore no limiar crítico $p = p_c$. Por outro lado, valores negativos de $\langle d \rangle$ são observados quando $1 < z < \infty$, indicando que, nesse cenário, o grafo está, fundamentalmente, desconectado. Esse fenômeno retrata a natureza da conectividade em redes ER com densidades críticas.

2.2.1.5 Coeficiente de agrupamento

Considerando um nó em uma rede aleatória gerada pelo modelo ER, a probabilidade de dois vizinhos desse nó estarem conectados entre si é igual à probabilidade de dois nós escolhidos aleatoriamente estarem conectados. Isso estabelece o coeficiente de agrupamento do modelo ER, representado por

$$C_{ER} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (2.13)$$

Este coeficiente expressa a tendência de formação de agrupamentos locais na rede. Um valor mais alto de C_{ER} indica uma maior probabilidade de interconexão entre os vizinhos

de um nó específico. No entanto, é importante notar que, à medida que o tamanho da rede, representado por N , aumenta, a fração $C_{ER}/\langle k \rangle$ diminui.

Essa diminuição destaca uma característica importante do modelo ER: à medida que a rede cresce, a probabilidade relativa de agrupamentos locais em comparação com o grau médio da rede diminui. Isso destaca as limitações do modelo ER em capturar efetivamente os agrupamentos observados em redes do mundo real, que muitas vezes exibem uma forte tendência de formar comunidades e agrupamentos.

2.2.2 Rede de mundo pequeno

Em 1967, Stanley Milgram introduziu o conceito de "mundo pequeno". Seu experimento pioneiro consistiu no envio de uma carta entre duas pessoas nos EUA, representando nós reais em uma rede social. O participante "alvo" estava localizado em Boston, enquanto as "fontes" estavam em Omaha. A dinâmica envolvia adicionar nomes a uma lista, enviar um postal para Milgram e direcionar a caixa ao próximo participante. Surpreendentemente, apenas 5,2 vínculos sociais, em média, eram necessários para atingir o alvo, revelando a presença dos famosos "seis graus de separação" (MILGRAM, 1967; LEINHARDT, 1977).

Apesar das críticas relacionadas à natureza subjetiva do experimento, Watts e Strogatz conseguiram reproduzi-lo com sucesso. Usando e-mails entre alvos em diferentes países e fontes de todo o mundo, o estudo resultou em diversas cadeias. Com um comprimento médio de 4, várias dessas cadeias foram concluídas, solidificando a existência dos seis graus de separação. Este fenômeno evidencia a conectividade subjacente às redes sociais.

Assim, a definição do fenômeno do mundo pequeno afirma que dois indivíduos em qualquer lugar do mundo podem estar conectados por uma cadeia de no máximo seis conhecidos. Isso significa que a distância entre quaisquer dois nós em uma rede é surpreendentemente pequena.

2.2.2.1 Modelo Watts-Strogatz

O modelo Watts-Strogatz (WS) oferece uma boa abordagem para compreender o fenômeno do mundo pequeno em redes complexas. Analisando redes reais e o experimento de Milgram, os pesquisadores destacaram duas principais características. Primeiramente, redes reais exibem um elevado coeficiente de agrupamento C , indicando uma forte propensão ao agrupamento em comparação com o número total de nós N . Em segundo lugar, o experimento

de Milgram revelou que mesmo em redes extensas, as redes sociais apresentam uma média de distância d surpreendentemente pequena. Assim, o fenômeno do mundo pequeno é caracterizado por um crescimento lento, forma logarítmica, da média de distância d com o número de nós N (WATTS; STROGATZ, 1998).

Redes aleatórias clássicas apresentam coeficientes de agrupamento muito baixos, tornando-as inadequadas para modelar redes reais de mundo pequeno. Por outro lado, redes com grau médio constante possuem caminhos mais curtos mais longos, o que as impede de reproduzir os seis graus de separação. Watts e Strogatz conjecturaram e demonstraram que um modelo capaz de reproduzir o fenômeno do mundo pequeno deve ter uma topologia intermediária entre uma rede regular e uma rede totalmente aleatória.

O modelo WS consiste em adicionar ligações aleatórias a uma rede de qualquer dimensão ou topologia. Essas ligações podem ser introduzidas de duas maneiras distintas: adicionando-as entre pares de nós com probabilidade p ou alterando as ligações existentes na rede por meio de atalhos, também com probabilidade p . Auto-loops e ligações redundantes são proibidos no modelo WS.

Ao analisar o efeito da adição de atalhos, podemos observar o comportamento do coeficiente de agrupamento $C(p)$ e do comprimento médio do caminho mais curto $\langle d \rangle$ em função de p . Quando $p = 0$, a rede é um anel regular. O coeficiente de agrupamento $C(p)$ pode ser calculado considerando a probabilidade de encontrar um triângulo na rede. No caso $p = 0$, o coeficiente de agrupamento é $C = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}$, onde k é o grau médio dos nós.

Quando p tende a 1, a rede se torna completamente aleatória, com um valor médio de distância aproximado de $\frac{\ln(N)}{\ln(k)}$, e C aproximadamente igual a $\frac{2k}{N}$.

Adicionalmente, ao considerar uma rede aleatória com grau médio $\langle k \rangle$, um nó nessa rede tem, em média, $\langle k \rangle$ nós à distância um ($d = 1$), $\langle k \rangle^2$ nós à distância dois ($d = 2$), $\langle k \rangle^3$ nós à distância três ($d = 3$), e assim por diante. Isso implica que em uma rede com $\langle k \rangle \simeq 1000$, cada indivíduo pode estar a uma distância de apenas três passos de quase toda a população da Terra.

Essas características fazem do modelo uma ferramenta para capturar não apenas a estrutura global, mas também a eficiência na comunicação dentro de redes complexas.

3 TRANSIÇÃO DE FASE

Uma transição de fase é um fenômeno fundamental em diversos sistemas físicos, caracterizado por mudanças notáveis nas propriedades de uma substância à medida que condições como temperatura e pressão são variadas. Essas transições podem ocorrer em uma variedade de contextos, desde a transformação da água entre os estados sólido, líquido e gasoso até mudanças significativas em propriedades magnéticas de materiais (HAVLIN *et al.*, 1984).

Existem duas categorias principais de transições de fase: transições de primeira ordem e de segunda ordem. Uma transição de primeira ordem é marcada por mudanças abruptas nas propriedades, geralmente evidenciadas por saltos na densidade e no calor latente, como observado em transições líquido-gás. Já as transições de segunda ordem, caracterizadas por uma transição suave e contínua, exibem comportamentos mais graduais, como a diminuição gradual da diferença de densidade entre líquido e gás.

Ao explorar o diagrama de fases de um sistema, muitas vezes nos deparamos com um ponto conhecido como ponto crítico. Nesse ponto, as fronteiras entre diferentes fases tornam-se menos distintas, e as propriedades do material exibem grandes mudanças. No caso da água, por exemplo, o ponto crítico está associado a uma condição em que a diferença de densidade entre o líquido e o gás se torna zero, possibilitando uma transição suave entre esses estados.

A análise mais aprofundada desses fenômenos críticos envolve a introdução de expoentes críticos. Esses expoentes descrevem o comportamento assintótico das funções termodinâmicas próximas a uma transição de fase, sendo essenciais para compreender as características singulares que ocorrem nos pontos críticos. A ideia de universalidade destaca a semelhança nos comportamentos críticos de sistemas diferentes, indicando que certos aspectos dessas transições são independentes dos detalhes específicos do material, proporcionando uma abordagem unificada na descrição de fenômenos críticos em distintos contextos.

Neste capítulo, exploraremos transições de fases, aprofundando a compreensão das diferenças entre transições de primeira e segunda ordem. Destacaremos a relevância do ponto crítico, dos expoentes críticos e introduziremos o conceito de universalidade, fundamentais para analisar e interpretar fenômenos complexos, como o Modelo de Ising, que também será discutido. Adicionalmente, dedicaremos atenção ao fenômeno crítico no processo de percolação.

3.1 Transições de Primeira e Segunda Ordem

Uma transição de fase é caracterizada pela presença de uma singularidade em um potencial termodinâmico, tal como a energia livre. Se ocorre uma descontinuidade finita em uma ou mais das primeiras derivadas do potencial termodinâmico apropriado, a transição é classificada como de primeira ordem. No contexto ferromagnetismo de Ising, a energia livre de Helmholtz, expressa por $F = U - TS$, é o potencial relevante que exhibe uma descontinuidade na magnetização em função do campo magnético H quando $T < T_c$, indicando, assim, a natureza de primeira ordem da transição. Similarmente, para um fluido, a energia livre de Gibbs $G = F + PV$ torna-se relevante, e descontinuidades no volume e na entropia ao longo da curva de pressão de vapor são características distintivas de uma transição de primeira ordem. A presença de um salto na entropia sugere a associação com um calor latente (YEOMANS, 1992; STANLEY, 1971; STANLEY; WONG, 1972).

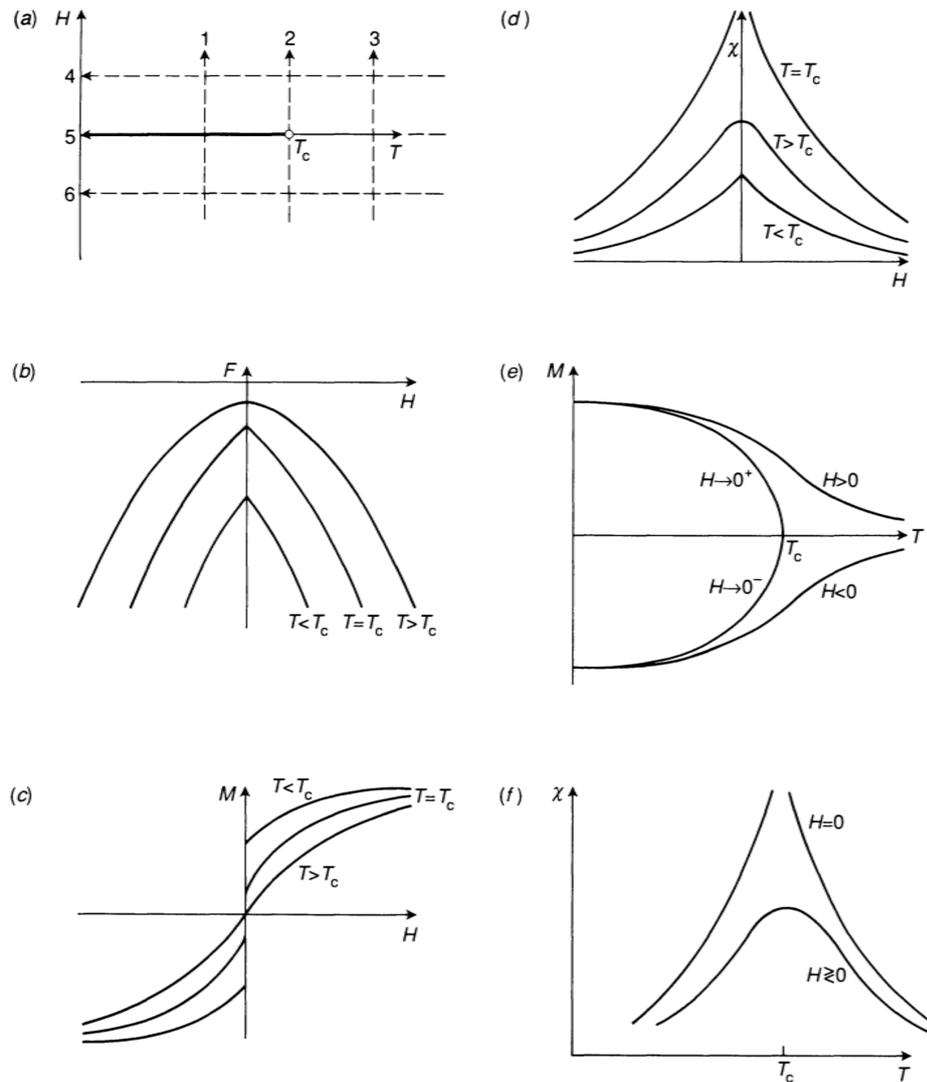
Entretanto, quando as primeiras derivadas são contínuas, mas as segundas derivadas são descontínuas ou divergem, a transição é descrita como de ordem superior, contínua ou crítica. Esse tipo de transição está ligado a uma suscetibilidade divergente, um comprimento de correlação infinito e uma lei de potência para o decaimento das correlações $\Gamma(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^{d-2+\xi}}$, em que r representa a distância e ξ é um expoente crítico.

Examinar de perto o comportamento das variáveis termodinâmicas durante uma transição de fase específica é esclarecedor. O objetivo é comparar as transições de primeira e ordens superiores, analisando detalhadamente estas últimas para definir os expoentes críticos, tópico a ser discutido na próxima seção.

Por exemplo, considera-se o caso do ferromagneto simples em um campo magnético, cujo diagrama de fase é representado na Figura 3(a). Destaca-se uma linha que indica transições de primeira ordem, começando em zero campo e estendendo-se desde a temperatura zero até atingir um ponto crítico em $T = T_c$. Apesar da simetria do diagrama de fases, que é resultado da simetria de um ferromagneto sob reversões de campo magnético, características distintas são evidentes. Para explorar essas características, começamos analisando a dependência do campo da energia livre e de suas derivadas em relação ao campo, à magnetização e à suscetibilidade, ao longo dos caminhos 1, 2 e 3 na Fig. 3(a). O objetivo é comparar o comportamento dessas funções em temperaturas abaixo, iguais e acima de T_c .

Enquanto na Figura 3(b), apresentamos a representação gráfica da energia livre, a qual se mostra convexa e simétrica em relação a $H = 0$. Nota-se uma cúspide se formando em

Figura 3 – (a) Diagrama de fases de um ferromagneto simples. Existe uma linha de transições de primeira ordem ao longo de $H = 0$ que termina em um ponto crítico em $T = T_c$. (b) Dependência de campo da energia livre. (c) Dependência de campo da magnetização. (d) Dependência de campo da suscetibilidade. (e) Dependência da magnetização com a temperatura. (f) Dependência da suscetibilidade com a temperatura



Fonte: Retirada do livro (YEOMANS, 1992)

$H = 0$ para $T < T_c$, indicando uma transição de fase de primeira ordem, conforme evidenciado pelo comportamento da magnetização, M .

A Fig. 3(c) mostra a variação de M em relação a H . Para $T > T_c$, essa variação é contínua, mas para $T < T_c$, observamos um salto em $H = 0$, indicando a transição de primeira ordem. Na temperatura crítica T_c , a magnetização é contínua em $H = 0$, porém, sua inclinação torna-se infinita. Ao derivarmos novamente, obtemos a suscetibilidade isotérmica χ , que revela

um comportamento distinto na temperatura crítica. A suscetibilidade é plotada em função do campo na Fig. 3(d). Para $T > T_c$, varia suavemente com o campo, como esperado. Abaixo de T_c , a suscetibilidade apresenta uma cúspide na transição de fase de primeira ordem em $H = 0$. No ponto crítico, a suscetibilidade diverge, caracterizando um comportamento típico de uma transição de fase de ordem superior.

A análise da variação da magnetização e suscetibilidade com a temperatura em campo constante, deduzida a partir das Fig.3(c) e Fig3(d) nos caminhos 4, 5 e 6 na Fig3(a), revela que, devido à simetria do diagrama de fases magnéticas, cruzar uma linha de transições de primeira ordem ao variar a temperatura não é possível em circunstâncias gerais. Ao seguir o caminho 5 com $H = 0$, atravessamos T_c e percorremos uma linha de coexistência bifásica até a temperatura zero. Nos caminhos 4 e 6, escolhidos para manter equidistância de $H = 0$ e melhor exibir a simetria do modelo, não ocorre transição de fase.

A dependência da magnetização com a temperatura, apresentada na Fig. 3(e), mostra que para campos diferentes de zero, a magnetização aumenta suavemente com a diminuição da temperatura, atingindo saturação à temperatura zero. A curva de magnetização em campo zero reflete os estados com magnetização positiva ou negativa, indicando a simetria do sistema.

A Fig. 3(f) representa a suscetibilidade em função da temperatura, mostrando um pico em T_c para campo finito e uma divergência para $H = 0$, indicando o ponto crítico. Consideramos também a dependência das derivadas da energia livre em relação ao campo, magnetização e suscetibilidade em relação a T . Para campos diferentes de zero, a energia livre é analítica em função da temperatura. Quando $H = 0$, atravessamos um ponto crítico à medida que a temperatura diminui, refletindo nas segundas derivadas da energia livre.

3.2 Expoentes críticos

O ponto crítico é marcado pelas divergências no calor específico e na suscetibilidade. É importante para a teoria dos fenômenos críticos, compreender mais detalhadamente a forma dessas divergências e o comportamento singular de outras funções termodinâmicas próximas ao ponto crítico. Para isso, definimos um conjunto de expoentes críticos (STANLEY; WONG, 1972).

Seja $t = (T - T_c)/T_c$ uma medida do desvio da temperatura em relação à temperatura crítica T_c . O expoente crítico associado a uma função $F(t)$ é definido como:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln |F(t)|}{\ln |t|}, \quad (3.1)$$

ou, pode ser escrito como:

$$F(t) \sim |t|^\lambda. \quad (3.2)$$

A Eq. 3.2 representa apenas o comportamento assintótico da função $F(t)$ à medida que $t \rightarrow 0$. De forma mais genérica, podemos esperar:

$$F(t) = A|t|^\lambda (1 + bt^{\lambda_1} + \dots), \quad \lambda_1 > 0 \quad (3.3)$$

Para verificar se esta é uma forma razoável de descrever o comportamento principal das singularidades nas funções termodinâmicas, consideremos a magnetização de campo zero de um ferromagneto, como mostrado na Fig.3(e). Perto de T_c , uma estimativa sensata seria descrever a curva por uma fórmula $M \sim (-t)^\beta$, onde $\beta \sim 1/2$ devido à semelhança com uma parábola.

A suscetibilidade do campo zero diverge em T_c como mostrado na Fig. 3(f), e o calor específico do campo zero mostra um comportamento qualitativamente semelhante. Portanto, podemos escrever:

$$T \sim |t|^{-\gamma} \quad ; \quad C_H \sim |t|^{-\alpha} \quad (3.4)$$

onde α e γ são positivos.

Um quarto expoente, δ , é introduzido para descrever o comportamento do isoterma crítico perto do ponto crítico em $H = 0$:

$$H \sim |M|^\delta \text{sign}(M) \quad (T = T_c) \quad (3.5)$$

assim, pode-se conjecturar que $\delta \sim 2$.

Os valores de δ e ν estão associados à função de correlação de pares e ao comprimento de correlação. Em particular, ν descreve como o comprimento de correlação diverge à medida que a temperatura crítica se aproxima.

3.3 Universalidade

Com os expoentes críticos definidos, eles se tornam mais relevantes do que as temperaturas críticas T_c . Enquanto T_c depende sensivelmente dos detalhes das interações interatômicas,

os expoentes críticos são, em grande medida, universais, dependendo apenas de alguns aspectos fundamentais do fenômeno de interesse. Para modelos com interações de curto alcance, esses parâmetros são a dimensionalidade do espaço, d , e a simetria do parâmetro de ordem. Uma evidência marcante disso é apresentada em um gráfico de Guggenheim, pré-enviado já em 1945, no qual as curvas de coexistência de oito fluidos diferentes são plotadas em unidades reduzidas, T/T_c e ρ/ρ_c . Próximo ao ponto crítico (e longe dele), todos os dados se alinham na mesma curva, podendo ser descritos pelo mesmo expoente β .

Outro teste de universalidade é comparar esse valor com o obtido para uma transição de fase em um sistema completamente diferente com um parâmetro de ordem escalar. Exemplos notáveis incluem os ímãs com anisotropia uniaxial no espaço de spins para MnF_2 (HELLER; BENDEK, 1962) e a separação de fases na mistura de fluido binário $\text{CCl}_4 + \text{C}_7\text{F}_{16}$ (THOMPSON; RICE, 1964).

Cada classe de universalidade é caracterizada pela descrição da simetria do parâmetro de ordem, exemplos físicos e os valores dos expoentes críticos. Essas classes agrupam sistemas físicos diversos que manifestam comportamentos críticos semelhantes próximo a transições de fase, proporcionando uma compreensão abrangente e sistemática de fenômenos complexos.

3.4 Modelo de Ising

O modelo de Ising é um modelo de sistemas ferromagnéticos amplamente utilizado nas Física de Estado Sólido e Física Estatística. Este modelo dinâmico se concentra em transições de fase provenientes de interações de curto alcance em redes regulares d -dimensionais. Em sua formulação, cada spin de um átomo possui uma orientação preferencial, podendo ser para cima ($s_i = +1$) ou para baixo ($s_i = -1$). O modelo é notável por considerar interações entre spins vizinhos, oferecendo resultados que descrevem qualitativamente diversos fenômenos relacionados a transições de fase de sistemas magnéticos (OLIVEIRA *et al.*, 1993).

Além disso, o modelo de Ising pode ser interpretado como uma ferramenta na análise de fenômenos da dinâmica de opinião. Nessa perspectiva, os spins representam agentes que são influenciados pelo estado predominante entre seus parceiros de interação. Essa abordagem permite uma compreensão mais abrangente dos comportamentos emergentes, especialmente nas proximidades do ponto crítico, destacando a versatilidade do modelo de Ising em contextos além da física do estado sólido.

A rede regular do modelo de Ising é constituída por vértices associados a variáveis

$s_i = \pm 1$, representando o spin de cada átomo em uma estrutura $L \times L \times L$. A hamiltoniana para o modelo de Ising, sem a influência de um campo externo, é expressa pela Eq.3.6:

$$H = -J \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, \quad (3.6)$$

onde J mede a interação entre os spins, a notação $\langle i, j \rangle$ representa a soma sobre pares de primeiros vizinhos, indicando que cada elemento interage exclusivamente com vizinhos imediatos, estabelecendo uma interconexão no sistema. Mesmo sem interação direta entre spins não vizinhos, observam-se correlações, quantificadas pela função de correlação $C(r, t) = \langle s_i(t) s_{i+r}(t) \rangle - \langle s_i(t) \rangle$ com comprimento de correlação ξ analisado por meio de $C(r)$, indicando o alcance espacial dessas correlações. Esse comprimento aponta a distância típica pela qual uma perturbação em um componente afeta significativamente os demais. Como apresentado, o modelo de Ising é uma aproximação do Hamiltoniano de troca de Heisenberg (ASHCROFT; MERMIN, 2022), as interações ferromagnéticas, como descritas pela Eq. 3.6, promovem o alinhamento dos spins na mesma direção, estabelecendo uma ordem no sistema. No entanto, o ruído térmico introduz flutuações que tendem a desfazer essa ordem.

Quando a temperatura T no sistema é inferior à temperatura crítica T_c ($T < T_c$), o modelo de Ising exibe agrupamentos de spins orientados de maneira uniforme. Denotando o número de spins que apontam para cima como n , temos $N - n$ spins apontando na direção oposta, onde N é o total de spins (SALINAS, 2001; NEWELL; MONTROLL, 1953; STANLEY; WONG, 1972). A magnetização $m = \sum_i s_i / N$ quantifica a diferença $N - n$ entre spins orientados para cima ou para baixo. Se $T < T_c$, uma direção prevalece, como $s = +1$, então $m(T) > 0$. À medida que a temperatura aumenta, n diminui e $N - n$ aumenta, de modo que n e $N - n$ aproximam-se e tornam-se iguais em T_c . Nesse ponto, o número médio de spins orientados para cima ou para baixo é $N/2$. Para qualquer temperatura acima desse ponto crítico, a magnetização é nula.

Diante da temperatura crítica T_c , o modelo de Ising evidencia correlações de longo alcance, promovendo inter-relações entre todos os componentes do sistema e classificando os pontos de T próximos a T_c como a vizinhança da criticalidade. Estas correlações de longo alcance, fundamentadas no princípio da universalidade abordado no Capítulo 2, indicam que sistemas aparentemente distintos, quando se aproximam de seus pontos críticos, exibem um comportamento global idêntico, graças à natureza comum das correlações na proximidade da criticalidade. Como discutido anteriormente, a universalidade permite a análise do comporta-

mento emergente de sistemas com propriedades semelhantes, independentemente de detalhes microscópicos de suas interações.

No contexto do modelo de Ising, soluções exatas estão disponíveis para 1D e 2D (MENYHÁRD; ÓDOR, 1995; ONSAGER, 1944). Entretanto, em 3D, simulações oferecem perspectivas sobre os comportamentos esperados (BHATT; YOUNG, 1985). Diversos métodos computacionais, como o algoritmo de Metropolis-Hastings (ROBERT *et al.*, 2004), são empregados para investigar o modelo de Ising (NEWMAN; BARKEMA, 1999). O algoritmo de Metropolis-Hastings atua em conjuntos de sistemas com a mesma temperatura, variando aleatoriamente em outros aspectos. Magnetização, calor específico e susceptibilidade são amostrados conforme a distribuição de Boltzmann. Essa abordagem computacional gera redes com uma propriedade estrutural fixa, como assortatividade, permitindo o cálculo de grandezas como o coeficiente de aglomeração por meio de médias sobre o conjunto resultante. Assim, os métodos computacionais exploraram o comportamento do modelo de Ising em situações onde soluções analíticas são desafiadoras.

Ademais, é fundamental ressaltar que os efeitos do tamanho finito indicam que uma transição de fase ocorre estritamente no limite termodinâmico, isto é, $N \rightarrow \infty$. Nesse limite, é possível observar uma divergência nas grandezas termodinâmicas, como susceptibilidade ou calor específico (YEOMANS, 1992). Apesar de sistemas sociais não apresentarem um número infinito de pessoas, a finitude de N deve ser levada em consideração na análise desses sistemas (??). Geralmente, os modelos exploram para diversos valores de N e, por vezes, inferem o comportamento no limite $N \rightarrow \infty$. Essa abordagem auxilia na caracterização dos comportamentos qualitativos do sistema, permitindo discernir entre resultados universais daqueles dependentes de detalhes microscópicos. Assim, o modelo de Ising oferece uma interpretação simplificada para a compreensão da dinâmica de opinião em sistemas complexos (GRABOWSKI; KOSIŃSKI, 2006).

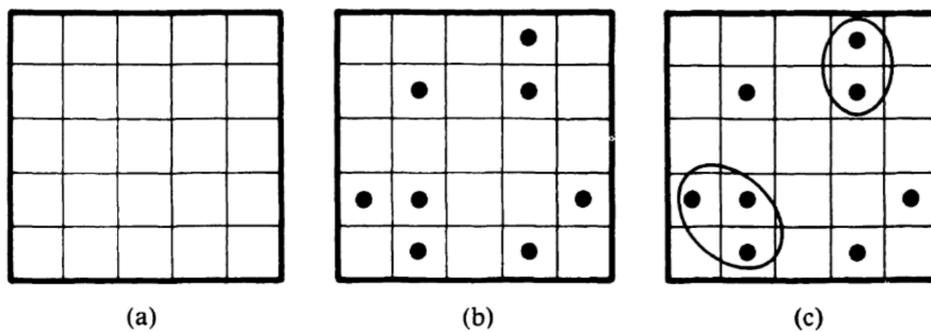
3.5 Teoria da Percolação

A teoria da percolação teve sua origem na rede Bethe, desenvolvida por Flory e Stockmayer durante a Segunda Guerra Mundial. Essa teoria tem como objetivo estudar a formação de aglomerados em uma rede e apresenta duas variantes principais: percolação de nós e percolação de ligação. Na percolação de nós, os aglomerados são formados por nós vizinhos ocupados, enquanto na percolação de ligação, os aglomerados são constituídos por conexões

abertas entre os nós ocupados (STAUFFER; AHARONY, 2018).

No processo de percolação de nós, os nós vizinhos são ocupados de forma aleatória com uma probabilidade p , enquanto os nós vazios são preenchidos com uma probabilidade $(1 - p)$. Esses locais ocupados e vazios podem representar diferentes propriedades físicas. Na Fig. 4 é uma representação da percolação em uma rede quadrada, onde os quadrados são os nós e estão ocupados de forma aleatória por pontos, cada quadrado é ocupado ou vazio de forma independente do seu vizinho e a partir da percolação há formação de grupos de nós vizinhos ocupados.

Figura 4 – Representação da definição de percolação e aglomerados: (a) mostra uma rede quadrada, (b) alguns quadrados são ocupados por pontos por probabilidade p , (c) grupos de vizinhos são formados quando apresenta mais de um quadrado preenchido em sua vizinhança.



Fonte: Retirada do livro (STAUFFER; AHARONY, 2018)

O limiar de percolação, denotado por p_c , é o ponto crítico no qual um aglomerado infinito emerge em uma rede de tamanho infinito. Para valores baixos de p , apenas pequenos grupos de nós ocupados estão presentes. À medida que a concentração p aumenta, o tamanho médio dos aglomerados também aumenta. Na concentração crítica p_c , um grande aglomerado surge, conectando as extremidades opostas da rede. Esse aglomerado é chamado de aglomerado infinito, uma vez que seu tamanho se torna infinito à medida que o tamanho da rede aumenta. À medida que a concentração p continua a aumentar, a densidade do aglomerado infinito também aumenta, incorporando mais e mais nós. Conseqüentemente, o tamanho médio dos aglomerados finitos, que não fazem parte do aglomerado infinito, diminui. Quando $p = 1$, todos os nós pertencem trivialmente ao aglomerado infinito (GRIMMETT; GRIMMETT, 1999).

A teoria de escala é utilizada para analisar as propriedades estatísticas dos aglomerados, como o número de aglomerados com s nós por nó da rede ($n_s(p)$). Ela estabelece relações entre os expoentes críticos, as amplitudes e o tamanho médio do aglomerado S .

Compreender o limiar de percolação e as propriedades dos aglomerados é fundamental para o estudo das redes. A percolação tem aplicações em diversas áreas, como estudos de redes complexas, sistemas dinâmicos em redes e propagação de epidemias. Nesta seção será mostrado a combinação de métodos teóricos exatos e simulações numéricas que contribui para uma compreensão aprofundada desses processos em redes.

3.5.1 Percolação como um fenômeno crítico

A transição de percolação é um exemplo simples de fenômeno de transição de fase. Trata-se de uma transição de fase geométrica em que a concentração crítica p_c separa uma fase composta por aglomerados finitos ($p < p_c$) de uma fase em que um aglomerado infinito está presente ($p > p_c$). Transições de fase térmicas, como a transição do estado sólido para o líquido, são exemplos mais comuns em que uma fase ordenada, o sólido, muda para uma fase desordenada, o líquido, em uma temperatura crítica T_c (BUNDE; HAVLIN, 2012).

Na transição de percolação, a mudança ocorre na conectividade dos aglomerados, determinando se existe ou não um caminho percolante de nós ocupados através da rede. A concentração p dos nós ocupados desempenha o mesmo papel que a temperatura nas transições de fase térmica. A transição de percolação é controlada por correlações de longo alcance e as quantidades relevantes próximas a p_c são descritas por leis de potência e expoentes críticos. Uma propriedade importante da transição de percolação é a probabilidade P_∞ de que um nó ou uma ligação pertença ao aglomerado infinito. Para valores de p abaixo de p_c , existem apenas aglomerados finitos e $P_\infty = 0$. À medida que p aumenta acima de p_c , P_∞ cresce seguindo uma lei de potência $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$, o valor β é um expoente crítico que depende apenas da dimensão do sistema. A probabilidade P_∞ descreve a ordem presente no sistema de percolação.

O tamanho linear dos aglomerados finitos, tanto abaixo quanto acima de p_c , é caracterizado pelo comprimento de correlação ξ , que é a distância média entre dois locais no mesmo aglomerado finito. O valor de ξ^2 é expresso por uma soma ponderada dada pela eq.

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (3.7)$$

onde n_s é a distribuição de tamanhos dos clusters e $2R_s^2$ é a distância média quadrática entre dois nós em um aglomerado de tamanho s .

Quando p se aproxima de p_c , o comprimento de correlação aumenta conforme $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$, sendo ν expoente crítico do comprimento de correlação que é o mesmo abaixo

e acima do limiar. Além disso, o número médio de nós, chamado de massa, em um aglomerado finito também diverge, $S \sim |p - p_c|^{-\gamma}$, novamente com o mesmo expoente crítico γ , relacionado ao tamanho médio dos aglomerados, tanto acima quanto abaixo de p_c . Para calcular os valores de ξ e S , são necessárias médias sobre todos os aglomerados finitos na rede.

Assim, os expoentes críticos β , ν e γ descrevem o comportamento crítico de quantidades típicas associadas à transição de percolação e são considerados universais, ou seja, não dependem dos detalhes estruturais da rede nem do tipo de percolação, mas apenas da dimensão d da rede. Essa propriedade de universalidade é uma característica geral das transições de fase que discutimos nas seções anteriores.

Além dos expoentes β , ν e γ , existem outros expoentes críticos que caracterizam a transição de percolação, como os expoentes τ e σ , que descrevem a distribuição de tamanho dos aglomerados de percolação.

Na distribuição dos tamanhos dos aglomerados n_s , indica a quantidade de aglomerados de tamanho s em relação ao número total de nós na rede N . No contexto fora do limiar de percolação, a distribuição dos tamanhos dos aglomerados diminui exponencialmente com o tamanho s , enquanto s tende para o aglomerado infinito, o decaimento segue uma lei de potência $n_s \sim s^{-\tau}$, conhecido como "Expoente de Fisher".

Já o tamanho característico do aglomerado S_ξ é definido como o tamanho do aglomerado que contribui significativamente para a parte singular de $\sum_s sn_s$ ou $\sum_s s^2 n_s$. Este tamanho torna-se maior nas proximidades das transições de fase, divergindo quando $p = p_c$. Postula-se que o comportamento próximo ao ponto crítico de percolação seja dominado pelo aglomerado de tamanho S_ξ , o qual segue uma lei de escala $S_\xi = |p - p_c|^{-\frac{1}{\sigma}}$

4 DINÂMICA DE OPINIÃO

Nas Ciências Sociais, a influência social engloba o impacto das emoções, opiniões e comportamentos individuais sobre outras pessoas, estando intrinsecamente ligada à atuação dos agentes sociais. Esses agentes, sejam indivíduos, grupos ou instituições, desempenham papéis ativos na dinâmica social, contribuindo para a formação de aquisições linguísticas, assimilações de normas culturais e o desenvolvimento de valores.

A interação entre os agentes sociais tende a torná-los mais semelhantes ao longo do tempo, refletindo a homogeneidade observada em sistemas sociais, desempenhando um papel significativo na formação de consensos, concordância ou uniformidade. Ao mesmo tempo, essa interação pode dar origem à sua contraparte, a fragmentação ou discordância, como delineado pelos cientistas sociais.

Dentro desse contexto, a Física Estatística desempenha um papel crucial ao buscar compreender as propriedades globais emergentes resultantes dessas interações, fazendo a distinção entre ordem e desordem, termos associados à concordância e discordância sociais pelos físicos. Nesse sentido, a dinâmica de opinião, enquanto fenômeno social, é caracterizada pelo surgimento de ordem a partir de uma situação inicialmente desordenada. A homogeneidade, uma consequência natural das interações repetidas entre os membros da população (ou seja, entre os agentes), se assemelha à analogia das interações ferromagnéticas entre magnetos na física, enquanto as interações anti-ferromagnéticas resultam na adoção de estados diferentes entre vizinhos.

Na modelagem da dinâmica de opiniões pública é comum o uso de modelos inspirados em sistemas de magnéticos e transições de fase, como o modelo de Ising (PATHRIA, 2016; STANLEY, 1971; YEOMANS, 1992) ou modelos de percolação (STAUFFER; AHARONY, 2018). Tais modelos são aplicados *a priori* em um substrato representado por uma rede. No contexto da dinâmica de opiniões modelada por um modelo inspirado em sistemas magnéticos como o de Ising, os nós da rede representam os indivíduos da sociedade, enquanto que os estados para os momentos de dipolos magnéticos das moléculas desempenham o papel da opinião de um indivíduo.

Outra metodologia possível é utilizar-se de modelos de percolação, onde o monitoramento do tamanho do agregado gigante de nós indicaria o surgimento de um grupo de opiniões coesas. Um exemplo do emprego dessa abordagem é a aplicação de modelos de ativação, ou percolação *bootstrap* (GOLTSEV *et al.*, 2006; HERZOG; HERTWIG, 2009). Neste caso, verifica-se

o número mínimo de vizinhos ativos de um nó inativo necessário para a propagação de uma informação, em nosso caso, uma opinião. Além disso, a dinâmica social pode ser influenciada por modelos sem limiar, nos quais o acesso à informação por um único vizinho é suficiente para a transmissão da informação. A compreensão desses mecanismos de propagação, centrados nos agentes, pode ter aplicações.

Neste capítulo discutiremos abordagens para o estudo da dinâmica de opinião pública utilizando modelos oriundos da Física Estatística. Estes modelos são caracterizados por meio de transições entre estados desordenados e ordenados. Essas transições são exploradas no estudo da dinâmica de opiniões públicas utilizando ferramentas introduzidas no estudo do modelo de Ising.

Em seguida, discutiremos modelos baseados em agentes como meio para introduzir a convicção, ou teimosia, de indivíduos como ingrediente responsável pelo surgimento de comportamentos não-lineares na proporção de frações de indivíduos extremistas na sociedade (RAMOS *et al.*, 2015).

4.1 Modelos baseados em agentes

Simulações computacionais desempenham importância na análise da dinâmica de opinião, complementando abordagens convencionais da Física teórica que buscam descrever sistemas por meio de equações resolvidas numericamente ou, quando possível, analiticamente. Na dinâmica de opinião, uma abordagem eficaz é a modelagem baseada em agentes, que envolve a criação de agentes computacionais com propriedades específicas, seguida de simulações para representar fenômenos reais.

A abordagem baseada em agentes, pioneiramente explorada por Reynolds, visa representar a realidade de agentes biológicos vivos, conhecida como vida artificial (termo cunhado por Langton (LANGTON; SHIMOHARA, 1997)). Reynolds introduziu modelos focados no indivíduo, investigando as implicações globais das interações locais entre membros de uma população. Esses modelos aplicam-se a diversos contextos, desde a simulação de ecossistemas com plantas e animais até a representação de trânsito, multidões e personagens autônomos em animações e jogos.

Assim, nestes modelos os indivíduos interagem em um ambiente conforme regras ajustadas por parâmetros característicos. Inicialmente desenvolvidos na comunidade de vida artificial, esses modelos tornaram-se essenciais em diversas áreas científicas, especialmente em estudos de sistemas sociais. No caso do problema tratado na dinâmica de opinião, o estado

interno dos agentes representa opiniões, e as regras de tomada de decisão correspondem às interações sociais. O foco não está nas características de cada indivíduo em específico, mas em propriedades globais que são calculadas realizando uma média sobre o estado de toda a população de agentes.

Portanto, a utilização desses modelos são viáveis devido à capacidade de representar agentes individuais com comportamentos autônomos, adaptativos e passíveis de aprendizado. Essa abordagem permite a simulação de interações locais, resultando em efeitos emergentes que refletem comportamentos globais em sistemas complexos (GALAM, 2002; KRAPIVSKY; REDNER, 2003). Além disso, a flexibilidade e escalabilidade desses modelos possibilitam sua aplicação em uma ampla gama de contextos (CROKIDAKIS *et al.*, 2014), enquanto a representação realista das interações individuais torna-os particularmente eficazes na modelagem de sistemas sociais e comportamentais. Essa metodologia facilita a exploração de condições iniciais, ajuste de parâmetros e análise da sensibilidade do sistema a diferentes influências, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada da dinâmica do sistema.

Exemplos notáveis desses modelos incluem o Modelo de Regra da Maioria (MR) (GALAM, 2002) e o Modelo de Sznajd (SZNAJD-WERON; SZNAJD, 2000). No MR, aplicado a uma população de N agentes com opiniões binárias (+1 ou -1), a dinâmica ocorre em iterações onde grupos de discussão aleatórios são formados, e os agentes adotam a opinião majoritária do grupo. O tamanho do grupo é variável e selecionado aleatoriamente, com a introdução de um viés em grupos de tamanho para evitar empates. Este modelo apresenta um limiar crítico, determinando a prevalência a longo prazo da opinião +1 ou -1, dependendo da fração inicial de agentes com opinião +1. O tempo de consenso escala como $\log N$.

Enquanto no Modelo de Sznajd, os agentes estão dispostos em uma cadeia linear, cada um com uma opinião binária. A dinâmica é regida por regras específicas de interação entre pares de agentes vizinhos. No Sznajd, dois agentes consecutivos influenciam seus vizinhos mais distantes de maneira única: se compartilham a mesma opinião, essa opinião é imposta aos vizinhos mais distantes; se têm opiniões diferentes, cada um impõe sua opinião ao vizinho mais distante do outro. A atualização das opiniões ocorre de maneira sequencial e aleatória. Inicialmente, com opiniões distribuídas aleatoriamente, o sistema evolui para dois tipos de estados estacionários: consenso (todos concordam) ou impasse (número igual de opiniões diferentes alternando).

Em adição, neste estudo, utilizaremos um modelo não consensual que lida com

opiniões contínuas. Este modelo investiga o surgimento de opiniões extremas na sociedade ao examinar uma ampla variedade de questões. Destaca-se a relação não linear entre a fração de indivíduos com opiniões extremas e moderadas como precursora do aumento de atitudes extremas (RAMOS *et al.*, 2015). No modelo proposto, são incorporadas regras de ativação que dependem de um parâmetro de "teimosia" dos indivíduos, proporcionando uma interpretação da não linearidade como uma transição abrupta, assemelhando-se à percolação de ativação que desencadeia cascatas de extremismo. A exploração detalhada desse método será aprofundada na subseção seguinte.

4.1.1 Modelo com regras de ativação baseadas na teimosia

Neste modelo, a abordagem metodológica está fundamentada na não linearidade, evidenciada por um crescimento desproporcional da fração de extremistas em dados reais que sinaliza a transição das sociedades para opiniões extremas. Essa presença do comportamento não linear atua como alerta antecipado para a transição crítica abrupta de cenários moderados para extremos, marcando o início de cascatas de pontos de vista extremos.

O modelo calcula a fração f_e de pessoas com visões extremas em relação à população total, sendo $f_e = N_e^+ / N$ (ou $f_e = N_e^- / N$), onde N_e^+ (ou N_e^-) representa o número de pessoas com pontos de vista extremos positivos (ou negativos), e N é o total de indivíduos. A fração de pessoas com visões moderadas, $f = N^+ / N$ (ou N^- / N), é também calculada. A não linearidade da dinâmica é observada em diversas áreas, como opiniões sobre livros, filmes, religião e política, apresentando um comportamento universal. Esse comportamento não linear é interpretado como uma transição crítica de um regime de visões moderadas para extremas, com o desvio do comportamento linear antecipando o aparecimento de um ponto crítico marcando a transição entre esses regimes.

O modelo, aplicado a uma rede complexa, considera a opinião do indivíduo, q , como valores reais entre $[-1, 1]$, onde o sinal de q indica o posicionamento (contra ou a favor), e o valor absoluto reflete o nível de "convicção". Estados de opiniões extremas ocorrem quando $|q| > q_e$, e opiniões positivas (negativas) quando $q > 0$ ($q < 0$), com o valor de equilíbrio sendo $q_e = 0,5$. O modelo se destaca pela introdução do parâmetro a ($0 \leq a \leq 1$), que quantifica a convicção dos indivíduos, componente importante para compreender o comportamento não linear da dinâmica de opinião. A dinâmica considera a opinião do indivíduo e a opinião média \bar{q} dos vizinhos na rede, com as seguintes regras específicas:

1. $q \rightarrow \bar{q}$, se $|\bar{q}| > |q|$ e q tem o mesmo sinal que \bar{q} ,
2. $q \rightarrow q$, se $(1-a)|q| \leq |\bar{q}| \leq |q|$ e q tem o mesmo sinal de \bar{q} ,
3. $q \rightarrow \bar{q} + aq$, se $[\bar{q} < (1-a)q$ e $q > 0]$ ou $[\bar{q} > (1-a)q$ e $q < 0]$.

Essa abordagem visa capturar a origem microscópica da formação de opiniões extremas em uma rede complexa. O modelo é simulado em redes de Erdos-Rényi (ER) com conectividade média $\langle k \rangle$ começando com uma fração f_0 dos sítios com opinião positiva. Para definir o estado inicial da dinâmica, simulada em uma rede de tamanho N , seleciona-se um valor de f_0 que representa a fração inicial de nós com opinião positiva. Depois disso, $f_0 N$ vértices são selecionados e atribuí-se a cada um deles um valor aleatório de opinião q uniformemente distribuída entre $[0, +1]$. Aos $(1 - f_0)N$ nós restantes, atribuí um valor aleatório para q uniformemente distribuído entre $[-1, 0]$. A cada passo de tempo t , as opiniões de todos os nós da rede são atualizadas de forma síncrona de acordo com as regras definidas acima. Extremistas positivos são minoria para qualquer condição inicial. No estado final, controlado por f_0 , calcula-se as frações f^+ (f^-), que corresponde a fração de sítios no estado final com $q > 0$ ($q < 0$), e f_e^+ (f_e^-), que é a fração de sítios no estado final com $q > q_e$ ($q < q_e$).

As regras descritas regem a dinâmica de opinião que são fundamentais para compreender como as interações entre os indivíduos influenciam a evolução das opiniões na sociedade. A regra 1 estipula que um nó adotará a opinião média dos seus vizinhos se essa média for mais "extrema" do que a própria opinião do nó. Isso faz sentido, pois pessoas com convicções mais fracas são mais propensas a serem influenciadas por indivíduos de opiniões mais fortes. Mesmo que o parâmetro a não esteja explicitamente presente nessa regra, observa-se que um indivíduo com uma opinião mais forte do que seus contatos tende a ser mais inflexível, dificultando a mudança de sua opinião.

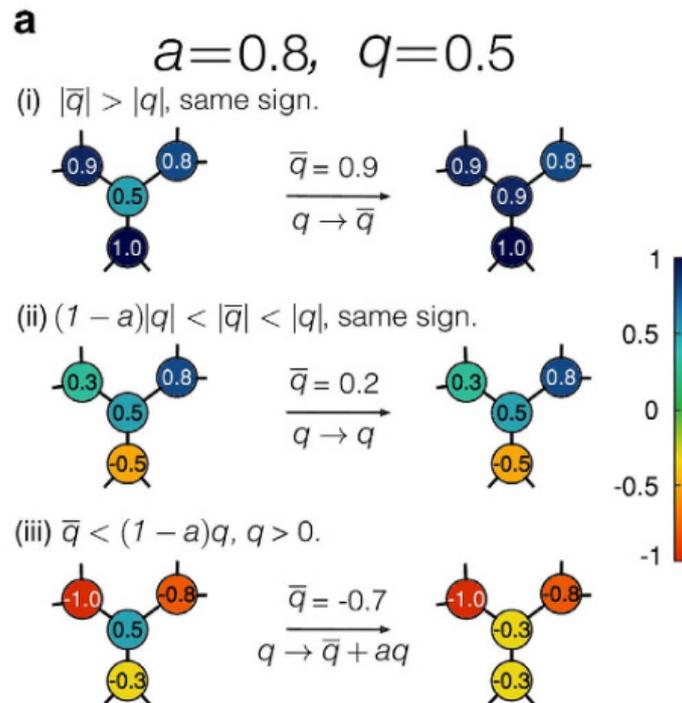
A regra 2 destaca que não ocorre mudança no estado do indivíduo para um intervalo de opiniões intermediárias de seus vizinhos. Esse intervalo é maior quanto maior for a teimosia e mais forte a opinião do nó. Por fim, a regra 3 estabelece que, quando a opinião média dos vizinhos é oposta ou menos radical do que a opinião do próprio nó, a nova opinião do sítio será $\bar{q} + aq$.

Nota-se que o novo estado de um sítio não é influenciado apenas pelos seus contatos, mas também é parcialmente determinado por sua própria opinião, ponderada pela teimosia

a. Assim, a teimosia desempenha um papel duplo: se a é grande, não apenas \bar{q} deve estar suficientemente distante de q para haver mudança na opinião do sítio, mas a também reduz o efeito relativo à sua vizinhança. No caso limite $a = 0$, o intervalo de inflexibilidade colapsa, e o nó se comporta como os indivíduos mais flexíveis, facilmente influenciados pelo ambiente próximo e adotando a opinião média dos vizinhos, semelhante ao modelo da regra da maioria.

A teimosia é um componente essencial para manter uma população heterogênea, com opiniões diversas. Na ausência de teimosia ($a = 0$), todas as três regras se reduzem à única prescrição de adotar o valor médio dos vizinhos, resultando em um consenso de uma única opinião, como no modelo da regra da maioria. Em contrapartida, ao definir $a > 0$, pessoas com opiniões inicialmente diferentes não serão facilmente convencidas, e a heterogeneidade de opiniões persistirá no estado final. Isso resulta em uma distribuição contínua de opiniões, refletindo a variabilidade no nível de convicção de cada pessoa. A Fig. 5 mostra uma esquematização do modo de acordo com as regras de ativação apresentadas. Onde

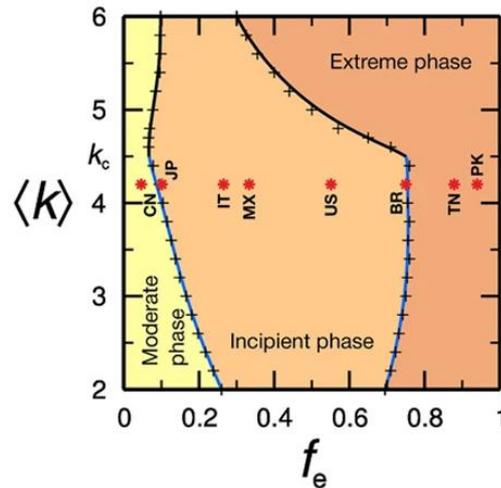
Figura 5 – Apresentação das regras de ativação do modelo: Considere um nó com grau 3 que mantém uma opinião moderada $q = 0,5$ e possui uma teimosia $a = 0.8$. Existem três cenários possíveis nas diretrizes do modelo: (i) Se $\bar{q}(= 0,9) > q$ e do mesmo sinal que q , a opinião do nó se torna mais extrema $q \rightarrow \bar{q}$. (ii) Se $\bar{q} < q$, mas maior que uma fração de q dada por $1-a$, então os vizinhos mais próximos não podem alterar a opinião do nó devido à sua obstinação. Conseqüentemente, a opinião permanece a mesma. (iii) Quando a opinião média dos vizinhos mais próximos é mais moderada ou oposta em sinal, ela pode influenciar a opinião do nó. Neste caso, para $\bar{q} = -0,7$, a opinião positiva do nó muda, tornando-se $q = 0,3$.



Fonte: Retirada do artigo (RAMOS *et al.*, 2015)

Através da fenomenologia do modelo e da interpretação da não linearidade na propagação de opiniões, observa-se transições entre diferentes fases, conforme ilustrado na Fig. 6. A compreensão desse fenômeno é aprimorada pela análise dos agrupamentos formados pelos sítios extremistas, chamados e-clusters. O sistema atravessa três fases distintas, demarcadas por dois pontos críticos, à medida que f_0 varia, como exemplificado na Fig. 6.

Figura 6 – Diagrama de fases extremas derivado do modelo em função de f_e e $\langle k \rangle$. As linhas pretas indicam transições de primeira ordem para $\langle k \rangle > k_c$, enquanto as linhas azuis representam transições contínuas para $\langle k \rangle < k_c$. Fase Moderada (Fase I) apresenta ausência de um aglomerado gigante. Fase Incipiente (Fase II) ilustra o surgimento de um e-cluster gigante, com efeitos em cascata em ascensão. Fase Extrema (Fase III) é caracterizada pelo consenso entre os extremistas para um grau médio suficientemente alto.



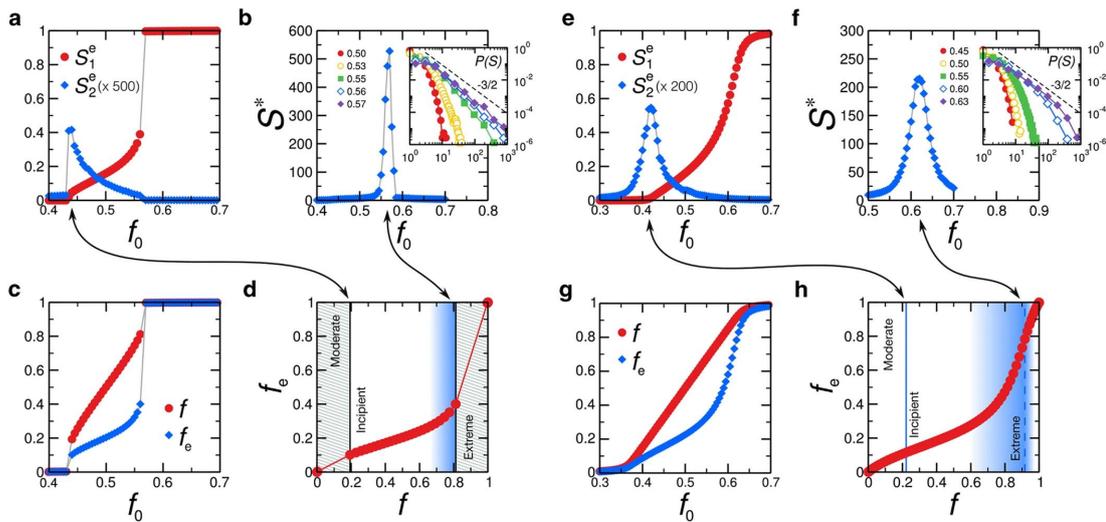
Fonte: Retirada do artigo (RAMOS *et al.*, 2015)

Esse diagrama de fases é retirado a partir das informações fornecidas dos gráficos f e f_e vs f_0 e seus respectivos aglomerados s_1^e (primeiro maior aglomerado) e s_2^e (segundo maior aglomerado) vs f_0 . E na formação de cascatas S^* vs f_0 . Esses resultados estão apresentados na Fig. 7 para $\langle k \rangle = 4$ e $\langle k \rangle = 5$.

Com isso, o modelo proposto visa interpretar o comportamento não linear em termos de transições de fase críticas, que normalmente não podem ser diretamente medidas a partir dos dados reais, dado que a rede de contatos geralmente é desconhecida. De acordo com a Fig. 6 o modelo identifica as seguintes fases:

- Na Fase I, ou fase moderada, para valores pequenos de f_0 , são observados e-clusters pequenos e isolados. O tamanho do maior e-cluster, s_1^e , em função de f_0 , tende a zero (Figs. 7a e 7e), e o comportamento da curva (f, f_e) permanece aproximadamente linear.
- Na Fase II, ou fase incipiente, acima do valor crítico $f_{0_{c1}}$, surge um e-cluster de tamanho s_1^e , ocupando uma fração finita da rede. Este evento é caracterizado pelo pico no tamanho do segundo maior e-cluster, s_2^e , junto com a descontinuidade em $f_{0_{c1}}$ para $\langle k \rangle > k_c$, indicando uma transição abrupta de primeira ordem. Para $\langle k \rangle < k_c$, a transição é de segunda ordem, evidenciada pelo crescimento contínuo de s_1^e em $f_{0_{c1}}$ e o pico em s_2^e . O fenômeno coletivo de "avalanches" de opiniões extremas ocorre após o surgimento do e-cluster gigante. Este

Figura 7 – Transições críticas do modelo para a formação da Fig. 6. (a)-(d) Para $\langle k \rangle = 5 > k_c$. (e)-(h) Para $\langle k \rangle = 4 < k_c$. Os resultados apresentados são uma média de 50 redes ER (exceto para (b) e (f), onde foram para 300 redes) e o parâmetro de teimosia $a = 1$. Nas figuras (a) e (e) s_1^e e s_2^e vs f_0 . Os tamanhos dos clusters são normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede ($N = 10^5$). Nas figuras (b) e (f) o tamanho da maior cascata S^* vs f_0 . O que mostra a distribuição dos tamanhos das cascatas para diferentes valores de f_0 , exibindo um padrão de escalonamento de lei de potência ($N = 10^4$). Na (c) e (g) f_e e f vs f_0 ($N = 10^5$). Em (d) e (h) as curvas f e f_e para evidenciar o comportamento não linear. As regiões sombreadas em (d) correspondem aos saltos nas transições de primeira ordem, portanto, inacessíveis no limite de tamanho infinito. As áreas em tons azulados em (d) e (h) representam a região do regime de grandes cascatas S^* de (b) e (f), respectivamente. Elas indicam que a não linearidade está associada à ocorrência de cascatas progressivamente maiores à medida que f aumenta. Para maior clareza, considera-se apenas a fração de vértices positivos ($q > 0$) e extremamente positivos ($q_e > 0$) no cálculo de f e f_e .



Fonte: Retirada do artigo (RAMOS *et al.*, 2015)

fenômeno é quantificado através da dinâmica de avalanches, inspirada pela percolação de inicialização.

Diferentemente da percolação de inicialização, as regras de ativação são mais complexas, dificultando a definição clara de sítios subcríticos. Para investigar as avalanches, o estado estacionário do sistema é perturbado, ativando iterativamente nós com opiniões moderadas positivas. O tamanho da avalanche, representado por S , é medido, sendo pequeno em torno de

$f_{0,c1}$ e aumentando rapidamente com f_0 . A tendência não linear nas curvas (f, f_e) do modelo está associada ao aumento dos tamanhos das avalanches. O início do regime não linear coincide com a fase extrema incipiente, tornando o sistema mais sensível a perturbações, resultando em avalanches de opiniões extremas induzidas por pequenas perturbações.

Na Fase III, também chamada como Fase Extrema, observa-se que o tamanho máximo de avalanches, S^* , atinge seu valor máximo no segundo ponto crítico $f_{0,c2}$. Este evento marca a transição para uma fase em que a sociedade como um todo se torna extrema. A natureza dessa transição, suave ou abrupta, depende do valor de $\langle k \rangle$. Para $\langle k \rangle > k_c$, a transição é abrupta de primeira ordem, evidenciada pela descontinuidade em $f_{0,c2}$. A distribuição de tamanhos de avalanche exibe uma cauda em lei de potência com expoente $3/2$, indicando que o modelo pertence à classe de universalidade da percolação de inicialização. Próximo ao ponto crítico, o tamanho do maior e-cluster se comporta como $|s_1^e - s_{1c}^e| \sim |f_0 - f_{0c}|^\zeta$, com $\zeta \approx 1/2$, assemelhando-se à percolação de inicialização.

As transições híbridas são evidenciadas pela descontinuidade em s_1^e em $f_{0,c2}$ e refletidas em f e f_e . O pico acentuado em S^* após o salto abrupto indica que quase todos os nós pertencem ao e-cluster gigante. Para $\langle k \rangle < k_c$, o pico em S^* é mais largo em $f_{0,c2}$, e a transição para a fase extrema é progressiva em termos de f e f_e . O impacto dessas transições críticas nas curvas (f, f_e) é ilustrado, mostrando que o surgimento da não linearidade na fase incipiente está associado ao aumento do tamanho das avalanches. A presença de cascata de extremistas na Fase II antecipa a não linearidade, agindo como um precursor das mudanças mais drásticas observadas quando o tamanho das avalanches é máximo.

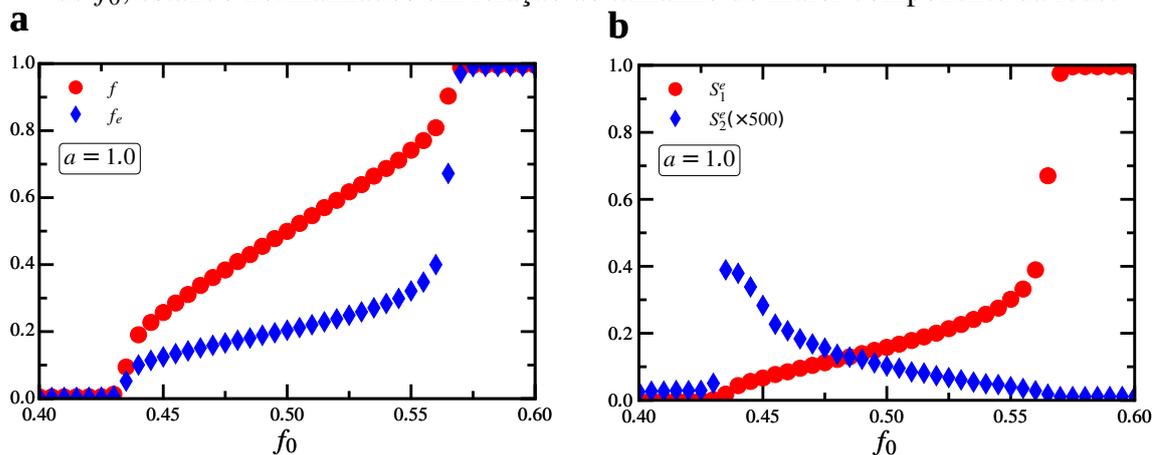
5 RESULTADOS

Nesta seção, reproduzimos e examinamos o modelo proposto (RAMOS *et al.*, 2015), utilizando os mesmos parâmetros do artigo original. Inicialmente, simulamos o modelo com $\langle k \rangle = 5$ e $\langle k \rangle = 4$, obtendo resultados consistentes com os apresentados na Fig 7 do capítulo anterior. Usamos esses valores de $\langle k \rangle$ pois no artigo original indica que há uma mudança de ordem na transição.

Utilizamos uma rede complexa do tipo Erdos-Rényi (ER) com conectividade média $\langle k \rangle$, um tamanho fixo de $N = 10^5$ nós e o parâmetro de teimosia $a = 1$ fixado. Cada simulação foi repetida 100 vezes para garantir consistência nos resultados. O parâmetro de opinião q foi mantido no intervalo $[-1, 1]$, refletindo a escala de posicionamento contra ou a favor, enquanto a fração inicial de nós com opinião positiva (f_0) foi variada no intervalo de $[0.3, 0.7]$.

As Fig. 8 e Fig. 9 apresentam a reprodução dos resultados para $\langle k \rangle = 5$ e $\langle k \rangle = 4$ respectivamente, destacando a evolução das frações de opiniões positivas ($f = N^+/N$) e extremas positivas ($f_e = N_e^+/N$) ao longo do tempo para diferentes valores de f_0 e também da formação dos aglomerados S_1^e e S_2^e em função de f_0 .

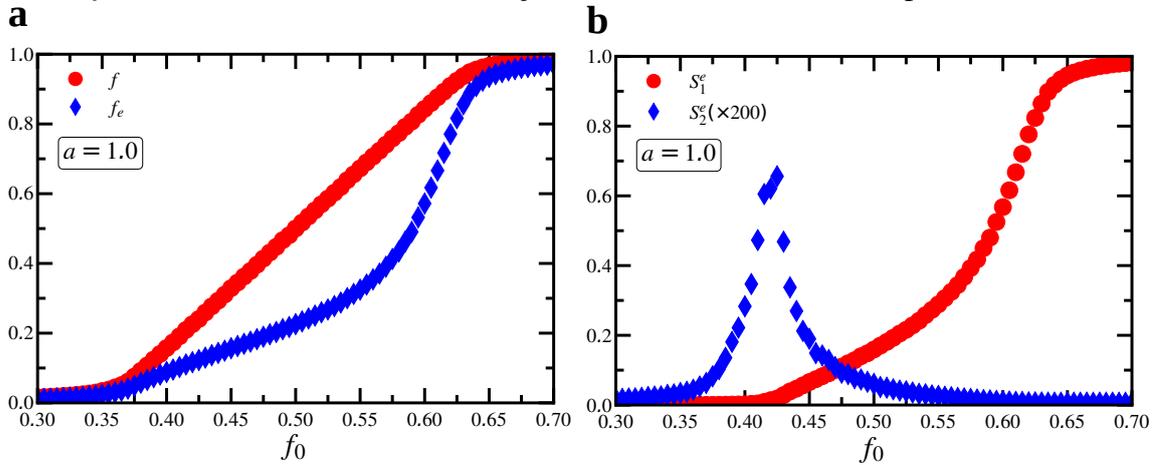
Figura 8 – Resultados da simulação do modelo para $\langle k \rangle = 5$.(a) representam as curvas de f e f_e em função de f_0 . (b) Mostram os aglomerados S_1^e e S_2^e em função de f_0 , estando normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede.



Fonte: Elaborado pelo autor

A análise da evolução de f e f_e em relação a f_0 demonstra a consistência do modelo reproduzido com o original. As variações em f_0 continuam a influenciar a dinâmica das opiniões, evidenciando a sensibilidade do modelo às condições iniciais. A observação das curvas f e f_e nas Fig. 8a e Fig. 9a confirma que o comportamento dessas curvas permanece inalterado, validando a capacidade do modelo em reproduzir a transição crítica de opiniões moderadas para

Figura 9 – Resultados da simulação do modelo para $\langle k \rangle = 4$. (a) representam as curvas de f e f_e em função de f_0 . (b) Mostram os aglomerados S_1^e e S_2^e em função de f_0 , estando normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede.



Fonte: Elaborado pelo autor

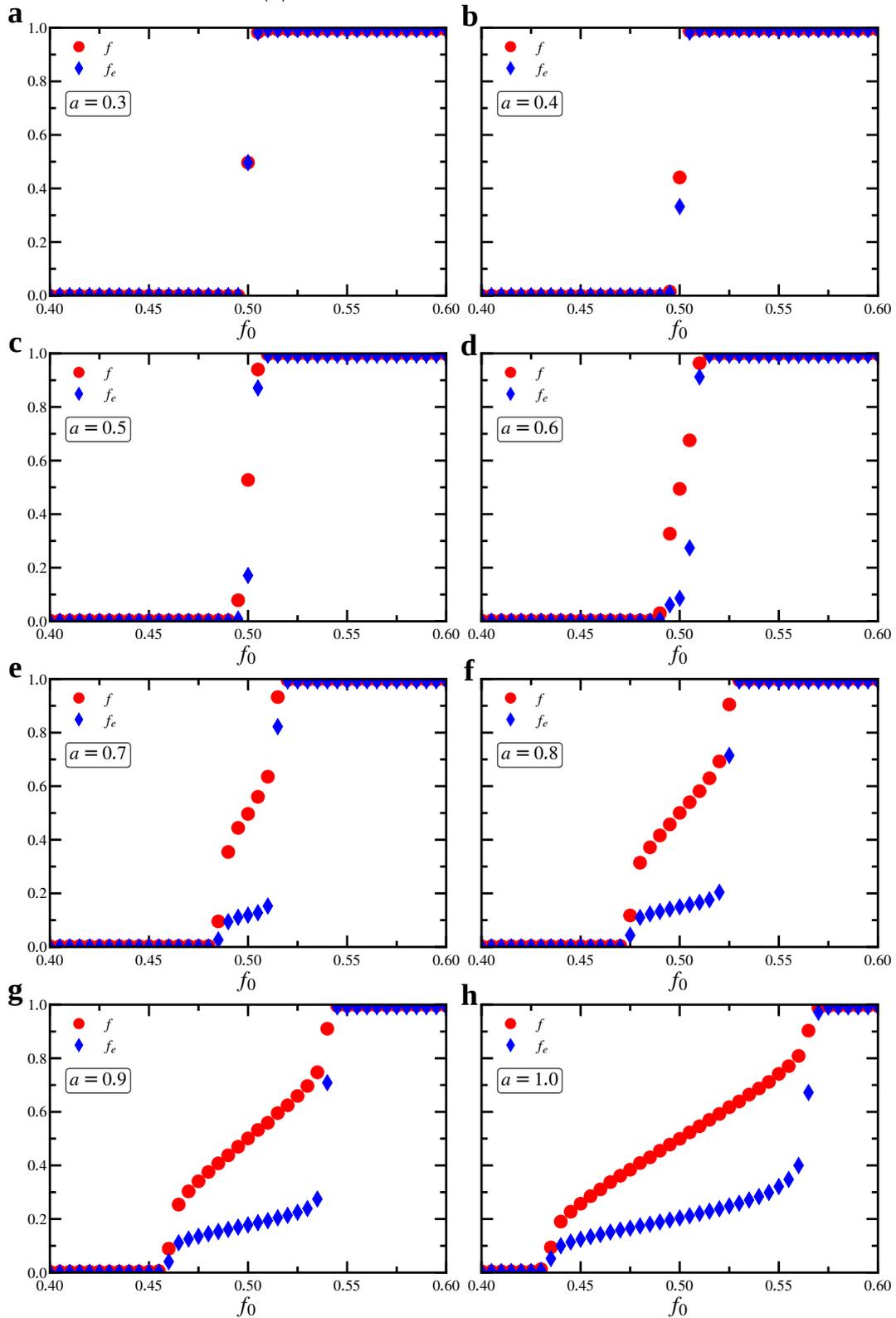
extremas, conforme representado na Fig. 7c e na Fig. 7g.

O mesmo vale para a formação dos aglomerados S_1^e e S_2^e . Observamos a formação dos dois aglomerados nas Figs. 8b e 9b, para os valores de $\langle k \rangle = 5$ e $\langle k \rangle = 4$, respectivamente, sendo semelhantes às apresentadas na Fig 7a e Fig.7e.

Após realizar essas reproduções, estendemos nosso estudo ao investigar o impacto do parâmetro de teimosia a na dinâmica de opinião do sistema. Variamos o parâmetro a no intervalo de $[0.3, 1.0]$, permitindo uma análise abrangente das transições e comportamentos emergentes, uma vez que no modelo em questão foi utilizado apenas o valor de $a = 1$. Ao considerar as regras da dinâmica do modelo, apresentadas na Subseção 4.1.1, notamos que essa variação influencia a resposta do sistema. As Figs. 10 e as Figs. 12 exibem as curvas de f e f_e em relação a f_0 . As Figs. 13 e as Figs. 11 ilustram a formação do primeiro maior aglomerado S_1^e para diferentes valores de a mantendo os mesmos valores de $\langle k \rangle$ utilizados anteriormente.

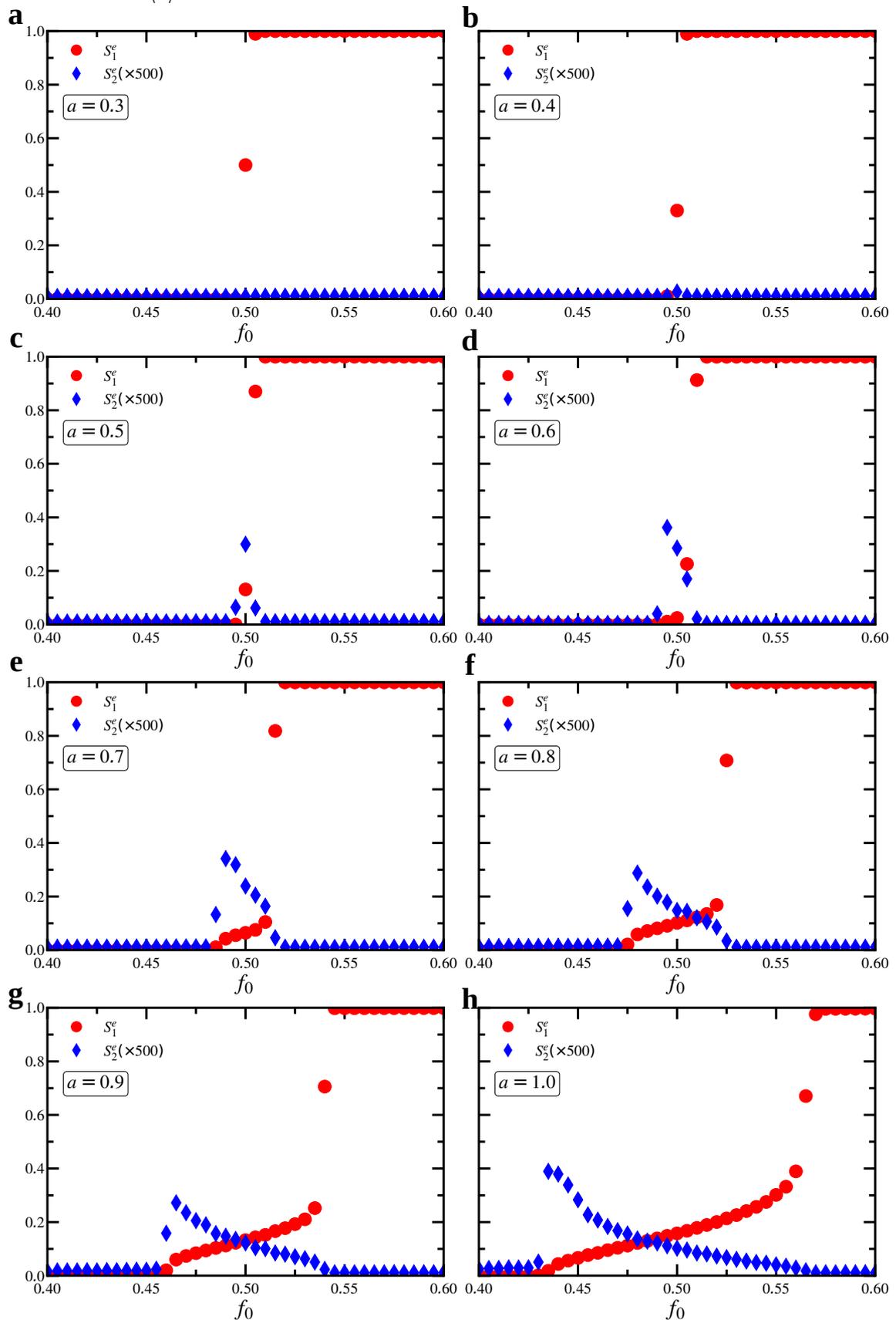
– Para $\langle k \rangle = 5$:

Figura 10 – Comportamento das curvas de f , f_e em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 5$.



Fonte: Elaborado pelo autor

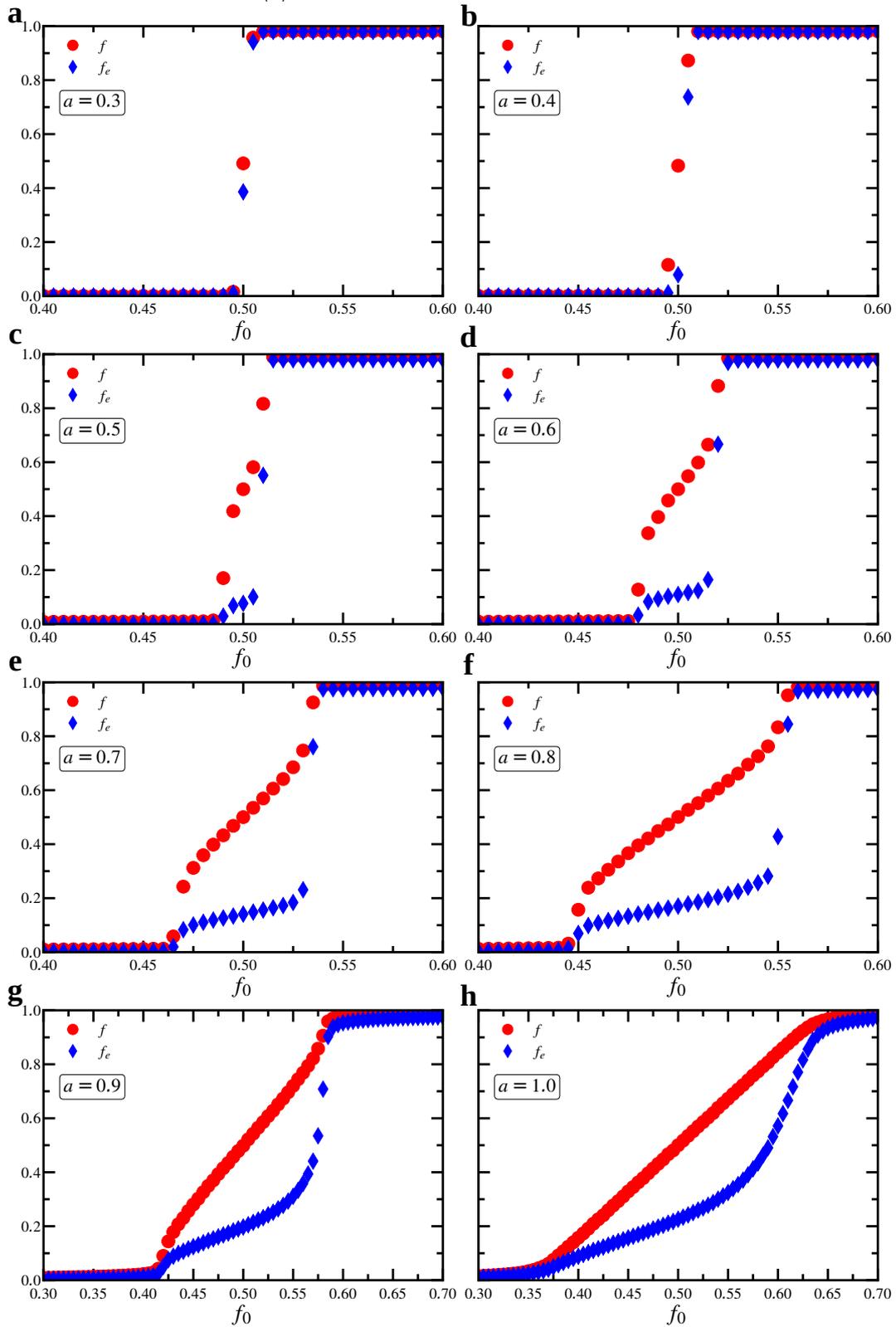
Figura 11 – Medida dos maiores aglomerado S_1^e e S_2^e , normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede, em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 5$.



Fonte: Elaborado pelo autor

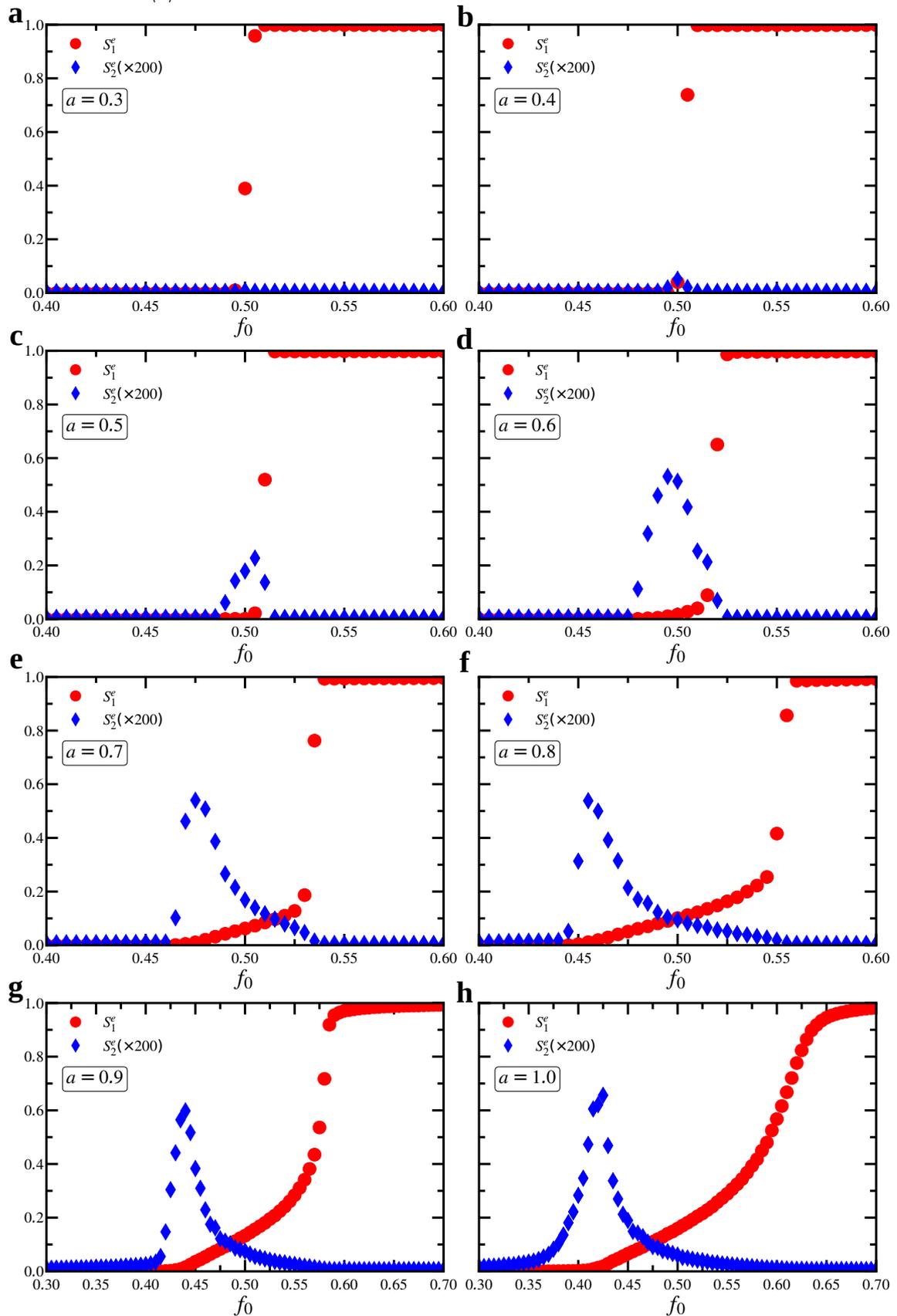
– Para $\langle k \rangle = 4$:

Figura 12 – Comportamento das curvas de f e f_e em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 4$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 13 – Medida dos maiores aglomerados S_1^e e S_2^e , normalizados em relação ao tamanho do maior componente da rede, em função de f_0 para diferentes valores de a e valor de $\langle k \rangle = 4$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nossos resultados destacam a importância da variação de a na dinâmica de opinião da rede, influenciando o comportamento da mudança de opiniões positivas e extremas positivas. Ao examinar qualitativamente as curvas de f e f_e para diferentes valores de a , apresentadas nas Figs. 10 para $\langle k \rangle = 5$, e Figs. 12 para $\langle k \rangle = 4$, observamos que em cenários onde a é pequeno, como $a = 0.3$ e $a = 0.4$, ocorre uma transição abrupta em f por volta de $f_0 \approx 0.5$, levando à adoção de opiniões positivas por todos os nós.

Conforme a aumenta, observamos uma redução no ponto de f_0 que desencadeia a mudança para opiniões positivas, indicando uma maior coesão nas opiniões à medida que a teimosia dos indivíduos se intensifica. Esse fenômeno é evidenciado pela continuidade na mudança de f conforme f_0 varia, especialmente para valores mais altos de a .

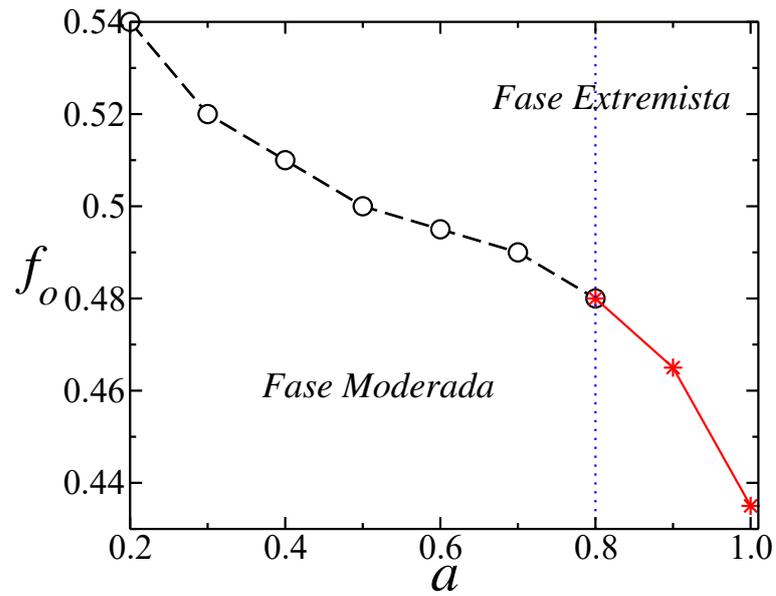
Ao analisarmos qualitativamente o comportamento do sistema em relação à variação do parâmetro de teimosia a e sua influência na fração de nós com opinião extrema positiva (f_e), observamos que, para valores reduzidos de a (como $a = 0.3$ e $a = 0.4$), o padrão assemelha-se ao comportamento anteriormente analisado para a fração de nós com opinião positiva (f). À medida que aumentamos o valor de a , notamos uma diminuição no valor de f_0 em que ocorre a mudança, tornando o comportamento mais contínuo.

Os aglomerados S_1^e e S_2^e , normalizados e representados em relação ao valor de f_0 , são apresentados nas Figs. 11 para $\langle k \rangle = 5$ e Figs. 13 para $\langle k \rangle = 4$, revelando o comportamento da ordem da transição e o ponto em que ocorre a transição de fase. O máximo de S_2^e indica o valor de f_0 em que a transição ocorre, marcando a evolução dos nós com opiniões moderadamente positivas para opiniões extremamente positivas. Observamos que, para valores menores de a , essas transições são imperceptíveis. À medida que aumentamos o valor de a , um pico distintivo emerge e se intensifica com esse aumento. Esse padrão é evidente para ambos os valores de $\langle k \rangle$.

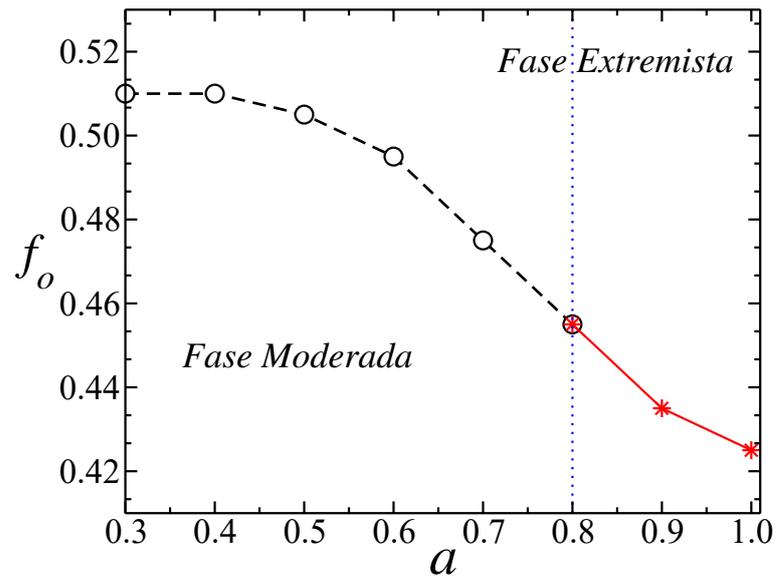
Ao analisar o gráfico de S_1^e , observamos que, para valores pequenos de a , como $a = 0.3$, a transição começa como uma transição de primeira ordem, caracterizada por um salto acentuado. À medida que aumentamos o valor de a , a magnitude desse salto parece diminuir. Notamos que, para $a = 0.8$, a transição parece passar de uma transição de primeira ordem para uma transição contínua, indicando um ponto tricrítico.

A partir do que apresentamos anteriormente conseguimos construir o diagrama de fase para os valores de $\langle k \rangle = 5$, apresentado na Fig. 14, e $\langle k \rangle = 4$, apresentado na Fig. 15. As linhas tracejadas indicam a transição de primeira ordem, enquanto a linha vermelha representa as transições de segunda ordem. Dividimos o diagrama em duas fases: uma fase moderada,

na qual os nós ainda não possuem opiniões extremas, e uma fase extremista, na qual os nós transformam suas opiniões moderadas em opiniões extremas. O diagrama que elaboramos oferece uma representação qualitativa do comportamento do sistema à medida que o parâmetro a varia.

Figura 14 – Diagrama de fase para $\langle k \rangle = 5$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 15 – Diagrama de fase para $\langle k \rangle = 4$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

A partir dos resultados apresentados, analisamos a dinâmica de opinião em redes complexas, com foco na influência do parâmetro de teimosia (a). Nossa reprodução do modelo proposto (RAMOS *et al.*, 2015) proporcionou uma análise qualitativa das transições de fase e da formação de aglomerados, ressaltando a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Os resultados evidenciam que o parâmetro de teimosia desempenha um papel significativo na natureza das transições de fase. Quando a é pequeno, observamos transições mais abruptas, indicando que a maleabilidade dos indivíduos contribui para mudanças rápidas nas opiniões. À medida que a aumenta, a resistência à mudança intensifica, resultando em transições mais suaves e contínuas.

A construção do diagrama de fase para distintos valores de $\langle k \rangle$ proporcionou uma visão abrangente do comportamento do sistema, destacando mudanças qualitativas em resposta a alterações em a . Observamos a validação da ideia proposta pelo modelo original de uma transição crítica de visões moderadas para extremas, caracterizada por um comportamento não linear. Diante dos resultados obtidos, surge a oportunidade de avançar para uma abordagem mais quantitativa do diagrama de fases. Explorar o ponto crítico em que ocorrem essas transições e calcular os expoentes críticos podem fornecer uma compreensão mais precisa e quantitativa desses fenômenos. Além disso, pode-se ser útil explorar alguns aspectos adicionais, como a introdução de heterogeneidade na teimosia dos indivíduos. Tornando o modelo mais representativo com a realidade.

REFERÊNCIAS

- ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. **Solid state physics**. [S. l.]: Cengage Learning, 2022.
- BARABÁSI, A.-L. **Linked: the new science of networks**. [S. l.]: American Association of Physics Teachers, 2003.
- BARABÁSI, A.-L. Network science. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society Publishing, v. 371, n. 1987, p. 20120375, 2013.
- BARRAT, A.; BARTHELEMY, M.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. The architecture of complex weighted networks. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 101, n. 11, p. 3747–3752, 2004.
- BHATT, R. N.; YOUNG, A. Search for a transition in the three-dimensional J₁-Ising spin-glass. **Physical review letters**, APS, v. 54, n. 9, p. 924, 1985.
- BOLLOBÁS, B.; BOLLOBÁS, B. **Random graphs**. [S. l.]: Springer, 1998.
- BUNDE, A.; HAVLIN, S. **Fractals and disordered systems**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- CROKIDAKIS, N.; BLANCO, V. H.; ANTENEODO, C. Impact of contrarians and intransigents in a kinetic model of opinion dynamics. **Physical Review E**, APS, v. 89, n. 1, p. 013310, 2014.
- ERDŐS, P. On the evolution of random graphs. **Publ Math Inst Hungarian Acad Sci**, v. 5, p. 17, 1960.
- ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the strength of connectedness of a random graph. **Acta Mathematica Hungarica**, Akadémiai Kiadó, co-published with Springer Science+ Business Media BV . . . , v. 12, n. 1, p. 261–267, 1961.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 128–140, 1741.
- GALAM, S. Minority opinion spreading in random geometry. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 25, p. 403–406, 2002.
- GOLTSEV, A. V.; DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. k-core (bootstrap) percolation on complex networks: critical phenomena and nonlocal effects. **Physical Review E**, APS, v. 73, n. 5, p. 056101, 2006.
- GRABOWSKI, A.; KOSIŃSKI, R. Ising-based model of opinion formation in a complex network of interpersonal interactions. **Physica A: statistical mechanics and its applications**, Elsevier, v. 361, n. 2, p. 651–664, 2006.
- GRIMMETT, G.; GRIMMETT, G. **What is percolation?** [S. l.]: Springer, 1999.
- HAVLIN, S.; NOSSAL, R.; TRUS, B.; WEISS, G. Universal substructures of percolation clusters: the skeleton. **Journal of Physics A: mathematical and general**, IOP Publishing, v. 17, n. 18, p. L957, 1984.

- HELLER, P.; BENEDEK, G. B. Nuclear magnetic resonance in MnF_2 near the critical point. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 8, p. 428–432, Jun 1962.
- HERZOG, S. M.; HERTWIG, R. The wisdom of many in one mind: Improving individual judgments with dialectical bootstrapping. **Psychological Science**, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 20, n. 2, p. 231–237, 2009.
- KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S. Dynamics of majority rule in two-state interacting spin systems. **Physical Review Letters**, APS, v. 90, n. 23, p. 238701, 2003.
- LANGTON, C. G.; SHIMOHARA, K. **Artificial life V**: proceedings of the fifth international workshop on the synthesis and simulation of living systems. [S. l.]: MIT Press, 1997. v. 5.
- AN EXPERIMENTAL study of the small world problem**the study was carried out while both authors were at harvard university, and was financed by grants from the milton fund and from the harvard laboratory of social relations. mr. joseph gerver provided invaluable assistance in summarizing and criticizing the mathematical work discussed in this paper. In: LEINHARDT, S.(Ed.). **Social Networks**. [S. l.]: Academic Press, 1977. p. 179–197.
- MENYHÁRD, N.; ÓDOR, G. Non-equilibrium phase transitions in one-dimensional kinetic ising models. **Journal of Physics A: mathematical and general**, IOP Publishing, v. 28, n. 16, p. 4505, 1995.
- MILGRAM, S. The small world problem. **Psychology today**, New York, v. 2, n. 1, p. 60–67, 1967.
- NEWELL, G. F.; MONTROLL, E. W. On the theory of the ising model of ferromagnetism. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 25, n. 2, p. 353, 1953.
- NEWMAN, M.; BARABÁSI, A.-L.; WATTS, D. J. **The Structure and Dynamics of Networks**. Princeton: Princeton University Press, 2006. ISBN 9781400841356.
- NEWMAN, M. E.; BARKEMA, G. T. **Monte Carlo methods in statistical physics**. [S. l.]: Clarendon Press, 1999.
- OLIVEIRA, M. D.; MENDES, J.; SANTOS, M. Nonequilibrium spin models with ising universal behaviour. **Journal of Physics A: mathematical and general**, IOP Publishing, v. 26, n. 10, p. 2317, 1993.
- ONNELA, J.-P.; SARAMÄKI, J.; KERTÉSZ, J.; KASKI, K. Intensity and coherence of motifs in weighted complex networks. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 71, p. 065103, Jun 2005.
- ONSAGER, L. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. **Physical Review**, APS, v. 65, n. 3-4, p. 117, 1944.
- PATHRIA, R. K. **Statistical mechanics**. [S. l.]: Elsevier, 2016.
- RAMOS, M.; SHAO, J.; REIS, S. D.; ANTENEODO, C.; ANDRADE, J. S.; HAVLIN, S.; MAKSE, H. A. How does public opinion become extreme? **Scientific reports**, Nature Publishing Group UK London, v. 5, n. 1, p. 10032, 2015.
- ROBERT, C. P.; CASELLA, G.; ROBERT, C. P.; CASELLA, G. The metropolis—hastings algorithm. **Monte Carlo statistical methods**, Springer, p. 267–320, 2004.

SALINAS, S. **Introduction to statistical physics**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2001.

STANLEY, H. E. **Phase transitions and critical phenomena**. [*S. l.*]: Oxford: Clarendon Press, 1971.

STANLEY, H. E.; WONG, V. K. Introduction to phase transitions and critical phenomena. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 40, n. 6, p. 927–928, 1972.

STAUFFER, D.; AHARONY, A. **Introduction to percolation theory**. [*S. l.*]: CRC press, 2018.

SZNAJD-WERON, K.; SZNAJD, J. Opinion evolution in closed community. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 11, n. 06, p. 1157–1165, 2000.

THOMPSON, D. R.; RICE, O. Shape of the coexistence curve in the perfluoromethylcyclohexane-carbon tetrachloride system. ii. measurements accurate to 0.0001°. **Journal of the American Chemical Society**, ACS Publications, v. 86, n. 17, p. 3547–3553, 1964.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998.

YEOMANS, J. M. **Statistical mechanics of phase transitions**. [*S. l.*]: Clarendon Press, 1992.