



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

EMANUEL PEREIRA SILVEIRA

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM PERFIL AERODINÂMICO EM
ESCOAMENTOS DE BAIXO NÚMERO DE REYNOLDS UTILIZANDO MÉTODOS
NUMÉRICOS DISTINTOS**

RUSSAS

2023

EMANUEL PEREIRA SILVEIRA

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM PERFIL AERODINÂMICO EM
ESCOAMENTOS DE BAIXO NÚMERO DE REYNOLDS UTILIZANDO MÉTODOS
NUMÉRICOS DISTINTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientadora: Profa. Dra. Silvia Teles Vi-
ana.

RUSSAS

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S587s Silveira, Emanuel Pereira.
Simulação computacional de um perfil aerodinâmico em escoamentos de baixo número de Reynolds utilizando métodos numéricos distintos / Emanuel Pereira Silveira. – 2023.
84 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, Curso de Engenharia Mecânica, Russas, 2023.
Orientação: Profa. Dra. Silvia Teles Viana.
1. Aerodinâmica. 2. Perfil aerodinâmico. 3. Mecânica dos fluidos computacional. 4. Baixo número de Reynolds. I. Título.

CDD 620.1

EMANUEL PEREIRA SILVEIRA

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM PERFIL AERODINÂMICO EM
ESCOAMENTOS DE BAIXO NÚMERO DE REYNOLDS UTILIZANDO MÉTODOS
NUMÉRICOS DISTINTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovada em: 27/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Silvia Teles Viana (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Camilo Augusto Santos Costa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Tiago de Oliveira Nogueira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

In Memoriam, a minha mãe Maria Diva e minha
tia Ana Cláudia. A minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a minha família por terem me amparado em todos os momentos difíceis e por me ajudarem a superar os desafios do curso. A minha orientadora Profa. Dra Silvia Teles Viana por todas as orientações, conhecimentos e paciência durante os 12 meses da elaboração deste trabalho. A todos os professores da Universidade Federal do Ceará (UFC) – *Campus* Russas que me lecionaram, que por meio dos diversos conhecimentos adquiridos, foi possível eu realizar este trabalho. Ao coordenador do projeto Aratinga Aerodesign Prof. Dr. Edvan Cordeiro de Miranda e a todos os membros, dos quais fiz boas amizades e dividi muitos desafios e experiências de trabalho em grupo nos últimos 4 anos. A todos do Laboratório de Ciências Térmicas e Fluidos da UFC de Russas, por terem me cedido o local e um computador para os meus estudos, e eu poder desenvolver este trabalho. A todos os meus amigos, tanto os que fiz dentro da UFC quanto os de fora da universidade, pois me estimularam e me ajudaram tornando a minha trajetória na graduação menos difícil. A Assistência Estudantil pelo apoio financeiro com a manutenção da Bolsa de Iniciação Acadêmica (BIA) que foi de fundamental importância para a minha permanência no curso, além de ter contribuído para a minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

"O que sabemos não é muito. O que não sabemos é imenso."

(Pierre Simon Laplace)

RESUMO

A aerodinâmica é o ramo da física que estuda os fenômenos que acompanham todo o movimento relativo entre um corpo e o ar que o envolve, determinando a relação entre a forma e o equilíbrio dinâmico deste corpo sobre a ação deste movimento relativo. Sabendo disso, um dos processos de grande importância para o projeto aeronáutico destinado à competição da SAE AeroDesign é a análise aerodinâmica do perfil aerodinâmico, que influencia diretamente na aerodinâmica global da aeronave. O presente estudo busca analisar os coeficientes aerodinâmicos do perfil NACA 4415 por meio da mecânica dos fluidos computacional em escoamentos de baixo número de Reynolds através de duas metodologias numéricas por dois softwares distintos e comparar os resultados em relação aos dados de túnel de vento de uma literatura. Um dos programas utilizados foi o ANSYS Fluent® do qual se baseia no Método dos Volumes Finitos (MVF) e o outro programa empregado foi o XFLR5® que se fundamenta no Método dos Painéis. Foram obtidos e analisados os coeficientes aerodinâmicos e a eficiência aerodinâmica do aerofólio NACA 4415 em diferentes ângulos de ataque e as distribuições de pressão ao longo do perfil aerodinâmico para escoamentos incompressíveis viscosos de baixo número de Reynolds com valor igual a 470.000 onde foi constatado uma boa aproximação dos resultados aos dados da literatura. Além disso, foram realizadas uma análise do efeito do número de painéis e uma análise do efeito do número de elementos de malha, ambos para verificar o comportamento dos coeficientes aerodinâmicos, onde se constatou que pela metodologia deste trabalho, 300 painéis e 200.000 elementos de malha se mostraram valores suficientes.

Palavras-chave: aerodinâmica; perfil aerodinâmico; mecânica dos fluidos computacional; baixo número de Reynolds.

ABSTRACT

Aerodynamics is the branch of physics that studies the phenomena that accompany all relative movement between a body and the air that surrounds it, determining the relationship between the shape and the dynamic balance of this body on the action of this relative movement. Knowing this, one of the processes of great importance for the aeronautical project destined to the SAE AeroDesign competition is the aerodynamic analysis of the aerodynamic profile, which directly influences the overall aerodynamics of the aircraft. The present study seeks to analyze the aerodynamic coefficients of the NACA 4415 profile through computational fluid mechanics in low Reynolds number flows through two numerical methodologies by two different softwares and compare the results in relation to wind tunnel data from a literature . One of the programs used was ANSYS Fluent®, which is based on the Finite Volume Method (MVF) and the other program used was XFLR5®, which is based on the Panel Method. The aerodynamic coefficients and the aerodynamic efficiency of the NACA 4415 airfoil at different angles of attack and the pressure distributions along the aerodynamic profile were obtained and analyzed for viscous incompressible flows of low Reynolds number with a value equal to 470,000 where a good approximation was verified from the results to data from the literature. In addition, an analysis of the effect of the number of panels and an analysis of the effect of the number of mesh elements were carried out, both to verify the behavior of the aerodynamic coefficients, where it was verified that by the methodology of this work, 300 panels and 200,000 mesh elements enough values were shown.

Keywords: aerodynamics; airfoil; computational fluid dynamics; low Reynolds number.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Competição anual da SAE BRASIL Aerodesign.	17
Figura 2 – Santos Dumont realizando o primeiro voo da história na sua aeronave, o 14-Bis.	21
Figura 3 – Evolução das aeronaves ao longo dos anos.	21
Figura 4 – Perfil aerodinâmico exemplificado na seção de uma asa.	22
Figura 5 – Características geométricas de um aerofólio.	23
Figura 6 – Ângulo de ataque.	23
Figura 7 – NACA Série 1.	24
Figura 8 – NACA 4 Dígitos.	24
Figura 9 – NACA 5 Dígitos.	25
Figura 10 – NACA Série 6	25
Figura 11 – Detalhes de um escoamento viscoso sobre um aerofólio.	29
Figura 12 – Características do escoamento na camada limite laminar e turbulento e separação do escoamento com formação de uma esteira viscosa.	29
Figura 13 – Distribuições de pressão (a) e de tensão de cisalhamento (b) na superfície do perfil.	30
Figura 14 – Componentes da força resultante em um aerofólio.	31
Figura 15 – Forças e momento atuantes em um perfil aerodinâmico.	31
Figura 16 – Distribuição de pressão em um aerofólio na geração de sustentação.	34
Figura 17 – Distribuição de pressão e forças e momento gerados.	35
Figura 18 – Variação do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque.	36
Figura 19 – Exemplo da curva de eficiência aerodinâmica com valor máximo aproximadamente no ângulo 7°	39
Figura 20 – Perfil aerodinâmico discretizado por meio de painéis. N representa o número de painéis.	42
Figura 21 – Ângulo β e relação com um ponto de controle i e um painel j	44
Figura 22 – Malha estruturada 2D.	51
Figura 23 – Malha não estruturada 2D.	52
Figura 24 – Condições de contorno em um domínio computacional de um aerofólio.	53
Figura 25 – Perfil aerodinâmico NACA 4415.	55
Figura 26 – Esquema da metodologia iterativa de solução invíscida/viscosa.	57
Figura 27 – Perfil aerodinâmico NACA 4415 executado no XFLR5.	58

Figura 28 – Domínio computacional tipo <i>C-mesh</i> bidimensional. C é o comprimento de corda do aerofólio.	59
Figura 29 – Domínio computacional discretizado em malha estruturada.	60
Figura 30 – Refinamento de malha nas regiões próximas ao perfil aerodinâmico.	61
Figura 31 – Estimativa da espessura ideal do primeiro elemento de malha para a camada limite.	61
Figura 32 – Condições de contorno adotadas no domínio computacional.	62
Figura 33 – Valor do coeficiente de sustentação (c_l) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de painéis (N).	64
Figura 34 – Valor do coeficiente de arrasto (c_d) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de painéis (N).	65
Figura 35 – Valor do coeficiente de momento (c_m) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de painéis (N).	66
Figura 36 – Valor do coeficiente de sustentação (c_l) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de elementos de malha (n).	67
Figura 37 – Valor do coeficiente de arrasto (c_d) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de elementos de malha (n).	68
Figura 38 – Valor do coeficiente de momento (c_m) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de elementos de malha (n).	69
Figura 39 – Dados do coeficiente de sustentação (c_l) em função do ângulo de ataque (α).	70
Figura 40 – Dados do coeficiente de arrasto (c_d) em função do ângulo de ataque (α).	71
Figura 41 – Dados do coeficiente de momento (c_m) em função do ângulo de ataque (α).	72
Figura 42 – Dados da eficiência aerodinâmica (c_l/c_d) em função do ângulo de ataque (α).	73
Figura 43 – Distribuições do coeficiente de pressão (C_p) no perfil NACA 4415 para $\alpha = 0^\circ$	74
Figura 44 – Distribuições do coeficiente de pressão (C_p) no perfil NACA 4415 para $\alpha = 10^\circ$	74
Figura 45 – Distribuição de gradientes de pressão ao redor do perfil NACA 4415 para $\alpha = 0^\circ$ através do ANSYS Fluent.	75
Figura 46 – Distribuição de gradientes de velocidade nos contornos do perfil NACA 4415 para $\alpha = 0^\circ$ através do ANSYS Fluent.	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características do computador empregado.	55
Tabela 2 – Parâmetros com valores constantes submetidos em todas as simulações. . .	56
Tabela 3 – Números de elementos das cinco malhas construídas com respectivos valores dos coeficientes aerodinâmicos para $\alpha = 10^\circ$	67
Tabela 4 – Coeficientes de sustentação máximos, ângulos de estol e ângulos de sustentação zero.	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CPU	<i>Central Processing Units</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial
MVF	Método dos Volumes Finitos
NACA	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
RANS	<i>Reynolds-Average Navier-Stokes</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
SAE	<i>Society of Automotive Engineers</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

b	Espessura do perfil aerodinâmico
c	Comprimento de corda do perfil aerodinâmico
c_d	Coefficiente de arrasto do perfil aerodinâmico
c_l	Coefficiente de sustentação do perfil aerodinâmico
$c_{l,max}$	Coefficiente de sustentação máximo do perfil aerodinâmico
c_m	Coefficiente de momento do perfil aerodinâmico
\bar{c}_d	Coefficiente de arrasto pelo método dos painéis
\bar{c}_l	Coefficiente de sustentação pelo método dos painéis
\bar{c}_m	Coefficiente de momento pelo método dos painéis
$\bar{c}_{m,x}$	Coefficiente de momento na direção x pelo método dos painéis
$\bar{c}_{m,y}$	Coefficiente de momento na direção y pelo método dos painéis
C_{b2}	Constante característica do modelo de turbulência de Spalart-Allmaras
C_f	Coefficiente de fricção
C_p	Coefficiente de pressão
$C_{p,i}$	Coefficiente de pressão no ponto de controle i
C_x	Integração na direção x
C_y	Integração na direção y
d	Força de arrasto do perfil aerodinâmico
e	Energia interna por unidade de massa
E	Energia total por unidade de massa
f	Resultante líquida das forças de corpo
g	Aceleração da gravidade
h	Elevação
i, j, k	Índices de elementos de um vetor ou uma matriz; pontos de controle
k_T	Coefficiente de condutividade térmica
l	Força de sustentação do perfil aerodinâmico

$m_{c/4}$	Momento em $\frac{1}{4}$ de corda do perfil aerodinâmico
n	Número de elementos de malha
N	Número de painéis
p	Pressão local
p_t	Pressão total
p_∞	Pressão atmosférica
q	Intensidade das fontes
q_H	Taxa de outras formas de transferência de calor
q_∞	Pressão dinâmica
r	Vetor entre o ponto de controle e o ponto onde está sendo calculada a velocidade induzida
Re	Número de Reynolds
s	Distância decorrida sobre o contorno do perfil
t	Tempo
T	Temperatura absoluta
u, v, w	Componentes da velocidade em x, y, z , respectivamente
$\tilde{\nu}$	Viscosidade cinética turbulenta do modelo de turbulência de Spalart-Allmaras
V	Velocidade local
V_b	Velocidade na borda da camada limite
$V_{t,i}$	Velocidade tangencial no ponto de controle i
V_∞	Velocidade do escoamento distante
x, y, z	Sistema de coordenadas cartesianas
x_i	Coordenada x do nó i
y_i	Coordenada y do nó i
y^+	Espaçamento adimensional da parede
α	Ângulo de ataque
α_{estol}	Ângulo de estol
$\alpha_{l=0}$	Ângulo de sustentação zero

$\beta_{i,j}$	Ângulo formado entre um ponto de controle i e os nós de um painel j
γ	Intensidade dos vórtices
$\delta_{i,j}$	Tensor delta de Kronecker
δ^*	Espessura de deslocamento
θ	Ângulo existente entre r e a direção horizontal
θ_b	Espessura do <i>momentum</i>
λ	Segundo coeficiente de viscosidade
μ	Coeficiente de viscosidade dinâmica
$\xi_{\tilde{v}}$	Taxa de dissipação de \tilde{v}
π	Número Pi
ρ	Densidade
σ	Desvio padrão
$\sigma_{i,j}$	Tensor de tensões viscosas
$\sigma_{\tilde{v}}$	Constante característica do modelo de turbulência de Spalart-Allmaras
τ	Tensor de tensão
τ_w	Tensão de cisalhamento na parede
ϕ	Potencial de velocidade total
ϕ_S	Potencial de velocidade induzida das fontes
ϕ_V	Potencial de velocidade dos vórtices
ϕ_∞	Potencial de velocidade do escoamento distante
$\Phi_{\tilde{v}}$	Taxa de produção de \tilde{v}

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivo	19
<i>1.1.1</i>	<i>Objetivo Geral</i>	19
<i>1.1.2</i>	<i>Objetivos Específicos</i>	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1	Perfis aerodinâmicos	22
<i>2.1.1</i>	<i>Características geométricas de perfis aerodinâmicos</i>	22
<i>2.1.2</i>	<i>Família de perfis aerodinâmicos</i>	24
2.2	NACA	25
<i>2.2.1</i>	<i>NACA 4 Dígitos</i>	26
2.3	Escoamento Externo	26
<i>2.3.1</i>	<i>Viscosidade</i>	27
<i>2.3.2</i>	<i>Número de Reynolds</i>	27
<i>2.3.3</i>	<i>Camada Limite</i>	28
2.4	Forças aerodinâmicas e momento em um aerofólio	30
<i>2.4.1</i>	<i>Equação de Bernoulli</i>	31
<i>2.4.2</i>	<i>Coefficiente de pressão</i>	33
<i>2.4.3</i>	<i>Distribuições de pressões e sustentação</i>	33
<i>2.4.4</i>	<i>Força e coeficiente de arrasto</i>	37
<i>2.4.5</i>	<i>Momento e coeficiente de momento de um perfil</i>	38
<i>2.4.6</i>	<i>Eficiência aerodinâmica</i>	38
2.5	Métodos Numéricos	39
2.6	Mecânica dos Fluidos Computacional	40
2.7	Método dos Painéis	41
2.8	Método dos Volumes Finitos	46
<i>2.8.1</i>	<i>Equações de Conservação</i>	46
<i>2.8.1.1</i>	<i>Equação da Continuidade – Conservação da Massa</i>	46
<i>2.8.1.2</i>	<i>Equações de Navier-Stokes – Conservação do Momento</i>	47
<i>2.8.1.3</i>	<i>Equação da Energia – Conservação da Energia</i>	49
<i>2.8.2</i>	<i>Introdução do MVF no CFD</i>	50

2.8.2.1	<i>Domínio Computacional</i>	50
2.8.2.2	<i>Malha</i>	51
2.8.2.3	<i>Condições de Contorno</i>	52
2.8.2.4	<i>Modelo de Turbulência</i>	53
2.8.2.4.1	Modelo de Turbulência de Spalart-Allmaras	54
3	METODOLOGIA	55
3.1	XFLR5	56
3.2	ANSYS Fluent	58
3.2.1	<i>Domínio Computacional</i>	59
3.2.2	<i>Geração de malha</i>	59
3.2.3	<i>Condições de contorno</i>	62
3.2.4	<i>Módulo de solução</i>	62
4	RESULTADOS	64
4.1	Estudo de independência de malha nos coeficientes aerodinâmicos da discretização em painéis no XFLR5	64
4.2	Estudo de independência de malha nos coeficientes aerodinâmicos da discretização em elementos no ANSYS Fluent	66
4.3	Avaliação dos coeficientes aerodinâmicos alcançados pelo ANSYS Fluent e pelo XFLR5	69
4.4	Distribuições de pressão e velocidade	74
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	77
5.1	Sugestões para trabalhos futuros	78
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

A capacidade de voar sempre foi uma das principais aspirações do ser humano desde o início de sua inteligência, pode-se citar como exemplo as histórias mitológicas de Dédalo e Ícaro da Grécia Antiga. Com o passar dos anos, houve inúmeras descobertas e contribuições para o conhecimento do voo mas foi no início do século XX, com a criação do avião motorizado, que a capacidade de voar livremente se tornou real na humanidade e desde então a evolução das aeronaves se procedeu de maneira rápida, com aplicações não apenas para tráfego aéreo e transporte de carga, mas também para utilização bélica (TORENBEEK; WITTENBERG, 2009).

Atualmente, existe uma competição acadêmica nacional da SAE BRASIL AeroDesign, realizada anualmente, destinada para estudantes de engenharias, do qual o objetivo principal é de fomentar os conhecimentos de engenharia aeronáutica e inserir os universitários à desafios reais da indústria aeronáutica. Tal competição consiste no projeto e construção de uma aeronave, em escala reduzida, não tripulada e rádio controlada, para realizar o transporte de determinadas cargas por certas trajetórias dentro de limites pré-definidos de projeto (SAE BRASIL, 2023).

Figura 1 – Competição anual da SAE BRASIL Aerodesign.



Fonte: SAE BRASIL (2023)

Nessa competição, as equipes universitárias formadas por cada instituição elaboram

e desenvolvem os processos de um projeto aeronáutico. Um dos processos de grande importância é a análise aerodinâmica dos perfis aerodinâmicos onde é ponderada a escolha do melhor perfil aerodinâmico para a construção da asa ou da empenagem, onde estas influenciam diretamente no desempenho da aeronave (RODRIGUES, 2014). Torenbeek e Wittenberg (2009) também ressalta que as propriedades aerodinâmicas de uma superfície sustentadora, são geralmente determinadas pela forma de suas seções.

Houve na história muitos estudos de aerofólios, mas foi a partir da década de 1920 que o antigo comitê da NACA, precursora da NASA, começou um trabalho notável. Anderson Jr (2016) afirma que a NACA desenvolveu uma série de aerofólios, projetados de forma racionalizada e sistematizada com o propósito de criar superfícies sustentadoras mais eficientes para as aeronaves. Além disso, foram examinadas e medidas as propriedades aerodinâmicas destes aerofólios por meio de ensaios de túnel de vento (experimento prático). Os aerofólios da NACA são designados por uma nomenclatura, em que os caracteres referem-se à algumas dimensões geométricas do perfil (ANDERSON, 2016).

Segundo Ferziger *et al.* (2020), as equações de mecânica de fluidos são conhecidas há mais de um século e embora, sejam extremamente fundamentais para ajudar no entendimento e cálculo do fluxo de fluido, raramente podem ser utilizadas de forma direta em projetos de engenharia. Diante disso, é essencial o engenheiro recorrer a alternativas que promovam o desenvolvimento de seus projetos, tendo os métodos computacionais como uma solução viável e eficiente. A área do conhecimento que trata dos métodos computacionais para simular fenômenos de mecânica dos fluidos, com ou sem transferência de calor ou outros fenômenos associados é denominada de mecânica dos fluidos computacional ou do inglês *Computational Fluid Dynamics* (CFD). A aplicação do CFD esta cada vez mais indispensável nos processos industriais (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Neste trabalho o objeto de estudo foi o aerofólio NACA 4415 onde foram obtidos os seus coeficientes aerodinâmicos a partir do emprego de *softwares* que utilizam diferentes métodos numéricos. Um dos programas foi o pacote ANSYS Fluent® versão 2023 R1 com licença estudantil, do qual se baseia no Método dos Volumes Finitos (MVF) e o outro programa utilizado foi o *software* livre XFLR5® versão 6 que aplica a abordagem do Método dos Painéis. Os resultados obtidos através dos programas foram comparados com os dados de uma literatura com a finalidade de compreender o comportamento aerodinâmico do aerofólio quando simulado computacionalmente por diferentes métodos e a proximidade aos dados da literatura para

corroborar a validação do estudo. Além disso, os resultados alcançados das análises realizadas no aerofólio NACA 4415 deste trabalho fazem parte do projeto aerodinâmico da asa e da empenagem horizontal de uma aeronave do ano de 2023 da equipe Aratinga Aerodesign da Universidade Federal do Ceará – *Campus Russas*. Vale ressaltar, que a escolha dos *softwares* deste trabalho se deve pela implementação desses programas por parte da equipe Aratinga Aerodesign e que esta equipe se compromete com a competição da SAE BRASIL AeroDesign.

1.1 Objetivo

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar os coeficientes aerodinâmicos do perfil NACA 4415 por meio da mecânica dos fluidos computacional em escoamentos de baixo número de Reynolds através de duas metodologias numéricas por dois softwares distintos e comparar os resultados em relação aos dados de túnel de vento de uma literatura.

1.1.2 Objetivos Específicos

O presente estudo também tem por finalidade alguns objetivos secundários como:

- Analisar o gráfico do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque;
- Analisar o gráfico do coeficiente de arrasto em função do ângulo de ataque;
- Analisar o gráfico do coeficiente de momento em função do ângulo de ataque;
- Examinar o gráfico de eficiência aerodinâmica do perfil;

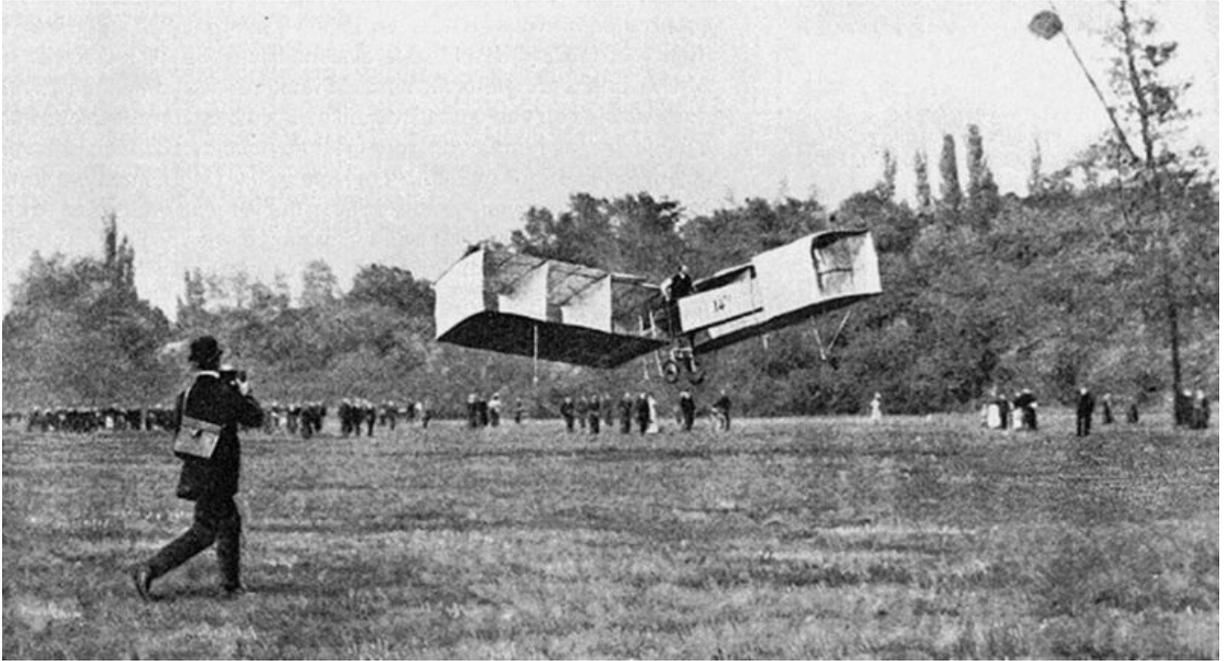
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para Souza (1991), “A aerodinâmica é o ramo da física que estuda os fenômenos que acompanham todo o movimento relativo entre um corpo e o ar que o envolve, determinando a relação entre a forma e o equilíbrio dinâmico deste corpo sobre a ação deste movimento relativo”. A aerodinâmica sempre esteve relacionada às aeronaves e os automóveis, pois foi no contexto da criação dessas máquinas que surgiu a demanda pela capacidade de se locomover com o mínimo de atrito possível com o ar para atingir maiores velocidades e utilizar menos combustível (RODRIGUES, 2014). Vale ressaltar, que o desenvolvimento de uma máquina que pudesse realizar um voo completo foi o principal objetivo da aerodinâmica moderna e apesar de a origem desta ciência ser reconhecida apenas a partir da era moderna, sua história esta enraizada com a história da mecânica dos fluidos (ANDERSON, 1997).

O estudo dos fenômenos aerodinâmicos é essencial para o projeto final de uma aeronave, pois os muitos aspectos de uma investigação aerodinâmica influenciam diretamente as análises de outros setores do projeto aeronáutico, como da estabilidade e controle, do desempenho, como também, dos cálculos estruturais, visto que existem muitas soluções de missão entre um bom projeto aerodinâmico e um excelente projeto global da aeronave (GUDMUNDSSON, 2014).

Barros (2006) afirma que o brasileiro Alberto Santos Dumont realizou o primeiro voo completo da história ocorrido no dia 23 de Outubro de 1906 em Bagatelle, na França, como mostrado na Figura 2. Tal feito gerou um grande impacto no mundo. Anos depois o avião se tornaria o principal transporte transcontinental do planeta e mudaria as relações internacionais, bem como, o modo de viver na vida moderna. Desde então, muitos avanços foram alcançados por meio de estudos de aperfeiçoamentos na aerodinâmica e no desempenho das aeronaves, isto é, influenciou o desenvolvimento tecnológico promovendo condições de projetar e construir aeronaves capazes de realizar voos transcontinentais, voos acima da velocidade do som e até voos espaciais (RODRIGUES, 2014).

Figura 2 – Santos Dumont realizando o primeiro voo da história na sua aeronave, o 14-Bis.



Fonte: Rodrigues (2014)

Dantas (2014) diz que qualquer comercio mundial depende de suas mercadorias, pois são transportadas diariamente por aeronaves em todo o planeta. Explica ainda que tal globalização é possível graças as incansáveis investigações científicas e os investimentos para a melhoria gradativa dos conceitos de design, buscando sempre a melhor alternativa para o projeto de uma aeronave, sendo leve, econômica e potencialmente viável de ser construída. A Figura 3 mostra a evolução das aeronaves com o passar dos anos.

Figura 3 – Evolução das aeronaves ao longo dos anos.



Fonte: Adaptado de Torenbeek e Wittenberg (2009)

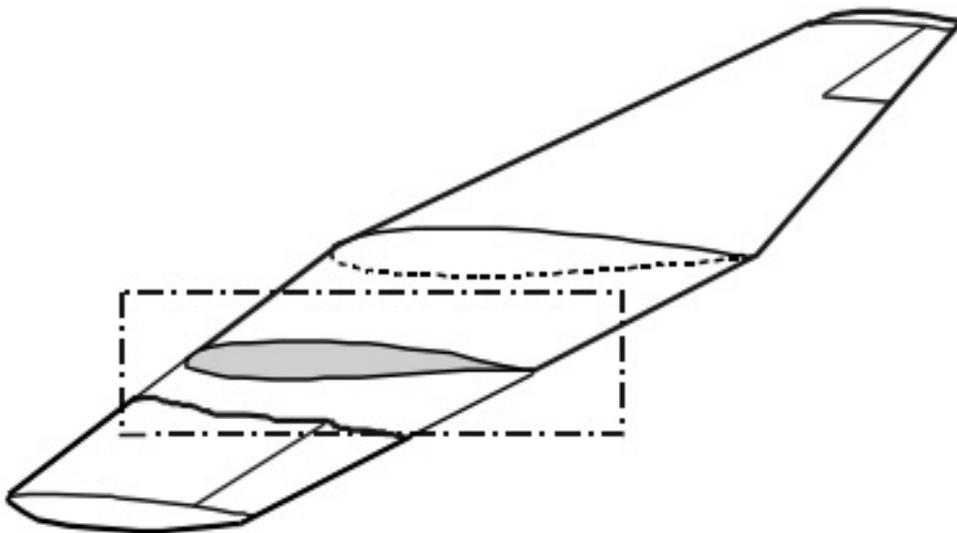
De acordo com Souza (1991), o surgimento das duas guerras mundiais foi um fator que acelerou abruptamente o processo de desenvolvimento aeronáutico, especialmente no decorrer da II Guerra Mundial por causa das excessivas pressões proporcionadas das consequências tecnológicas deste conflito. Küchemann (2012) complementa que os desenvolvimentos tecnológicos do transporte, em particular na aviação, são incentivados não apenas por estímulos de engenharia, mas também por suas implicações e contribuições sociais.

2.1 Perfis aerodinâmicos

A introdução do avião motorizado significou um feito histórico no início do século XX. Com isso a importância da aerodinâmica cresceu ligeiramente, despertando o interesse de estudiosos pelo entendimento dos fenômenos físicos das superfícies sustentadoras (ANDERSON, 2016).

Os perfis aerodinâmicos ou aerofólios são superfícies projetadas com a finalidade de se obter uma reação aerodinâmica a partir do escoamento do fluido ao redor do seu contorno (RODRIGUES, 2014). Raymer (1992) afirma que o perfil aerodinâmico é o coração do avião, pois é um elemento fundamental que afeta parâmetros como, a velocidade de cruzeiro da aeronave, distâncias de decolagem e pouso, qualidade de manuseio e influencia a eficiência aerodinâmica geral em todas as fases do voo.

Figura 4 – Perfil aerodinâmico exemplificado na seção de uma asa.



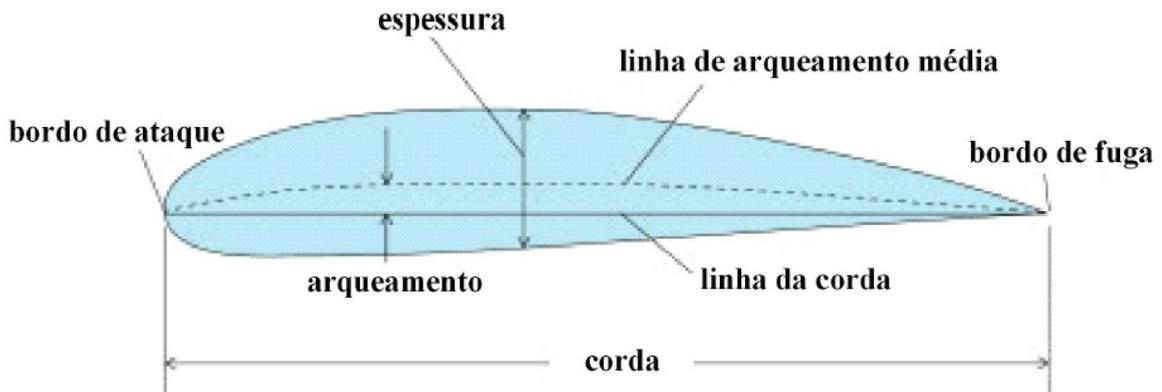
Fonte: Torenbeek e Wittenberg (2009)

2.1.1 Características geométricas de perfis aerodinâmicos

As características geométricas de um perfil aerodinâmico são apresentadas na Figura 3. A corda (c) representa a linha reta entre os pontos do bordo de ataque e bordo de fuga. A espessura (b) consiste na distância perpendicular a corda entre as superfícies superior (extradorso) e inferior (intradorso) do aerofólio. A razão entre a maior espessura do perfil e a corda é definida

como razão de espessura do perfil (b/c). A linha de arqueamento média consiste do segmento de pontos médios entre os pontos do extradorso e do intradorso do perfil aerodinâmico. O arqueamento representa a maior distância entre a linha de arqueamento média e a corda do perfil (RAYMER, 1992).

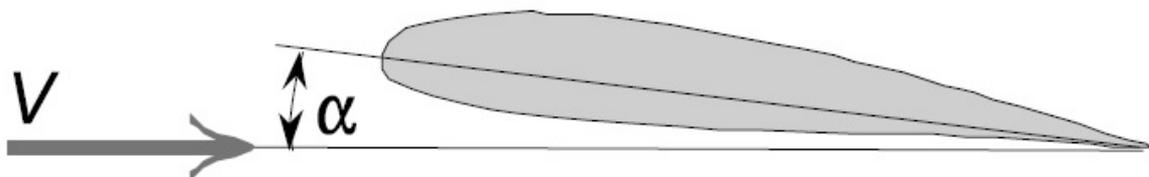
Figura 5 – Características geométricas de um aerofólio.



Fonte: Rodrigues (2014)

Outra variável relevante para a avaliação de perfis aerodinâmicos no escoamento é o ângulo de ataque (α), definido como sendo o ângulo formado entre a direção do vento relativo e a linha da corda do perfil aerodinâmico. Como mostrado na Figura 4. O ângulo de ataque influencia nas variáveis aerodinâmicas do aerofólio, no caso do aumento deste ângulo faz-se aumentar a força de sustentação, porém, até determinado ângulo, a sustentação atinge um valor máximo logo decai gradativamente com o aumento do ângulo de ataque, este fenômeno é chamado de estol. O aumento do ângulo de ataque também aumenta a força de arrasto (TORENBEEK; WITTENBERG, 2009). Neste trabalho as variáveis aerodinâmicas serão avaliadas em função do ângulo de ataque.

Figura 6 – Ângulo de ataque.



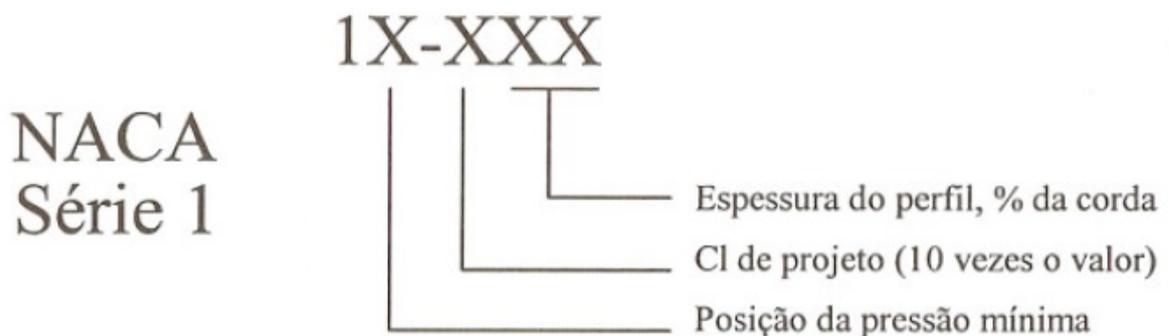
Fonte: Adaptado de Torenbeek e Wittenberg (2009)

2.1.2 Família de perfis aerodinâmicos

As famílias de perfis aerodinâmicos são grupos de aerofólios com geometrias distintas. Inicialmente, o desenvolvimento das famílias de perfis sucedeu de métodos experimentais em muitos tuneis de ventos, principalmente na Alemanha e nos Estados Unidos. Com o passar dos anos metodologias mais científicas foram sendo utilizadas e muitas famílias de aerofólios foram surgindo. Uma família clássica de perfis foi a Clark, dos Estados Unidos que desenvolveu o tradicional Clark Y além das séries: K; V; W; X; Z; YH; YM15; YM18; YS. Outra família clássica é a Gottingen, originária da Alemanha, dentre os seus aerofólios, vale destacar o Gottingen 398, tão eficiente quanto o Clark Y e ambos usados até hoje (ROSA, 2006).

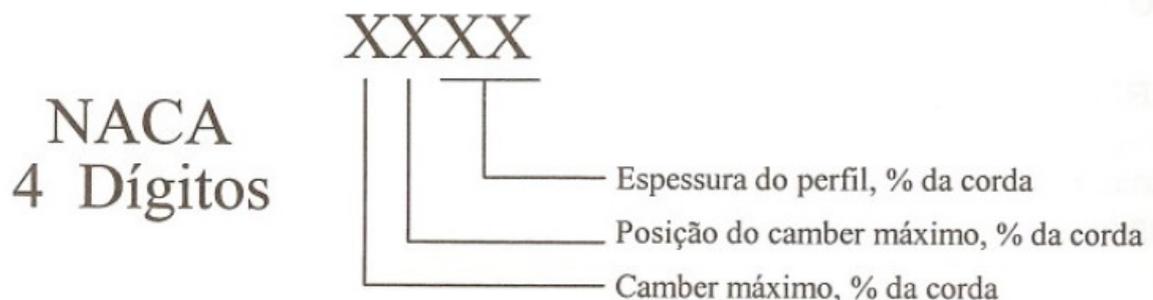
Segundo Dantas (2014), o trabalho de principal destaque no desenvolvimento de famílias de aerofólios e de ensaios experimentais adveio da NACA, antigo comitê aeronáutico estadunidense antecessor da NASA. Nas Figuras 7, 8, 9 e 10 estão apresentadas algumas das famílias NACA e suas nomenclaturas atreladas às características geométricas do aerofólio.

Figura 7 – NACA Série 1.



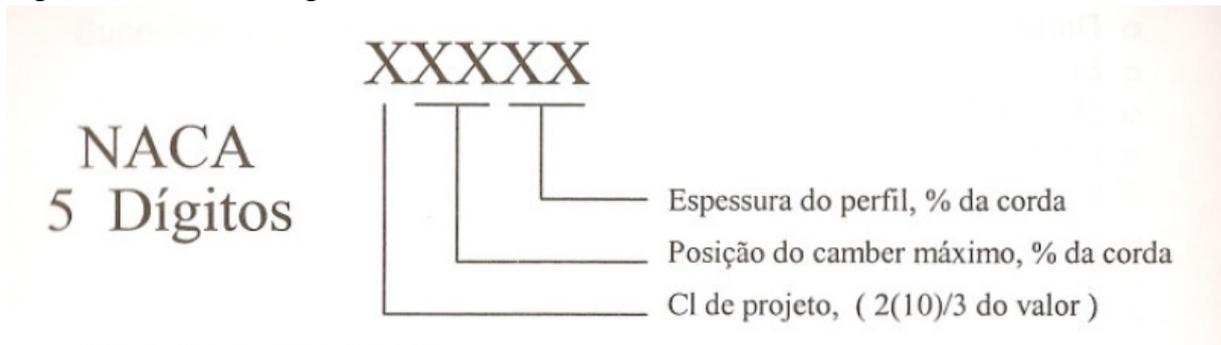
Fonte: Rosa (2006)

Figura 8 – NACA 4 Dígitos.



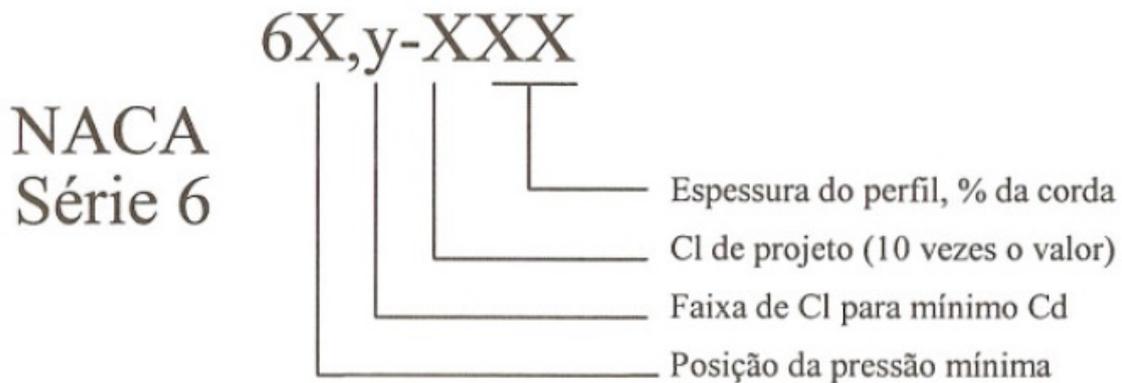
Fonte: Rosa (2006)

Figura 9 – NACA 5 Dígitos.



Fonte: Rosa (2006)

Figura 10 – NACA Série 6



Fonte: Rosa (2006)

2.2 NACA

Em 1915, o governo dos Estados Unidos fundou a NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*), comissão aeronáutica predecessora da NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), destinada para o desenvolvimento científico e tecnológico de aeronaves eficientes, bem como, para a pesquisa e a criação de aerofólios por meio de experimentações laboratoriais, e também para investigações de vários fenômenos aerodinâmicos. O primeiro laboratório para ensaios de escoamento por túnel de vento foi construído em 1917 (BILSTEIN, 1989).

Bilstein (1989) afirma que entre o final da década de 1920 e a década de 1930 a NACA já contava com mais laboratórios, onde desenvolveu vários perfis aerodinâmicos intensivamente experimentados e adotando uma designação para cada aerofólio desenvolvido.

Segundo Rosa (2006), o trabalho da NACA era totalmente fundamentado no conceito

geométrico da distribuição de espessuras e da linha média do aerofólio. A designação de um dado aerofólio era definida com base na superposição das espessuras para uma dada linha média.

De acordo com Anderson (2016), a NACA durante as décadas de 1930 e 1940 realizou diversos experimentos para medições dos coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento dos vários aerofólios criados. O ensaio em túnel de vento consistia de uma asa, de corda constante, tocando toda a seção de teste de uma parede lateral a outra. Dessa forma, para o fluxo a asa estaria “sem ponta” como uma asa de envergadura infinita. Uma vez que o aerofólio é o mesmo em qualquer seção da asa de envergadura infinita, as propriedades do aerofólio e da asa infinita são idênticas.

2.2.1 NACA 4 Dígitos

Segundo Abbott e Doenhoff (1959), o sistema numérico para a designação dos aerofólios NACA da família de 4 dígitos é com base na geometria do perfil. O primeiro dígito indica o valor máximo do arqueamento em percentual de corda. O segundo dígito fornece a posição do arqueamento máximo em décimos de linha de corda a partir do bordo de ataque. Os dois últimos dígitos são um único algarismo e indicam a razão de espessura do aerofólio.

O perfil NACA 4415, possui 4% de arqueamento máximo localizado a 4 décimos (40%) de corda e possui 15% de razão de espessura.

2.3 Escoamento Externo

Segundo Munson *et al.* (2004), escoamento externo é o escoamento em torno de um corpo totalmente imerso pelo fluido. A análise dos escoamentos externos de ar é bastante importante para o entendimento de voo das aeronaves.

Um escoamento pode ser classificado entre regime laminar, regime turbulento e em um regime transitório entre estas. Neste primeiro o escoamento é caracterizado por linhas de corrente moderadas e movimento altamente ordenado, já no regime de um fluxo turbulento é definido por flutuações de velocidades e movimento altamente desordenado. O trabalho experimental realizado por Osborne Reynolds, na década de 1880, resultou na idealização do número adimensional denominado número de Reynolds, Re , como o parâmetro-chave para a determinação do regime do escoamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2012).

2.3.1 Viscosidade

Uma das variáveis mais importantes na caracterização do comportamento mecânico de um fluido é a viscosidade. A viscosidade é uma propriedade física que implica na resistência do fluido ao escoamento. Ela configura a taxa de deformação do fluido resultante da aplicação de uma dada tensão de cisalhamento. Um corpo se locomove de forma mais fácil no ar, que possui viscosidade baixa, do que na água, que possui viscosidade 50 vezes maior do que o ar, sendo assim, mais difícil se mover (WHITE, 2011).

Segundo Çengel e Cimbala (2012), a viscosidade se origina de forças coesivas entre as moléculas em um líquido e de colisões moleculares nos gases. Todos os fluidos possuem algum grau dos efeitos viscosos no escoamento. Quando os efeitos da viscosidade são significativos nos escoamentos, denomina-se estes de escoamentos viscosos.

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

A Equação 2.1 representa a tensão de cisalhamento de fluidos newtonianos, como o ar, onde o fator de proporcionalidade da equação é o coeficiente de viscosidade dinâmica, μ e o termo $\frac{du}{dy}$ representa a taxa de deformação do fluido (ÇENGEL; CIMBALA, 2012).

2.3.2 Número de Reynolds

O número de Reynolds, Re , é um número adimensional utilizado para a avaliação da estabilidade do fluxo e com isso determinar se o escoamento de um fluido é regido de forma laminar, turbulenta ou de transição entre estas. Seu significado físico consiste da razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do fluxo. Além disso, o número de Reynolds representa a base do entendimento dos fenômenos físicos de sistemas reais utilizando protótipo reduzido, pois sistemas com o mesmo número de Reynolds são dinamicamente semelhantes (ANDERSON, 2016).

$$Re = \frac{\rho V_{\infty} c}{\mu} \quad (2.2)$$

A Equação 2.2 expressa matematicamente o número de Reynolds para um perfil aerodinâmico, onde V_{∞} é a velocidade do escoamento livre e ρ representa a densidade do fluido.

Segundo Rodrigues (2014), as aeronaves de escala reduzida destinadas a competição da SAE AeroDesign se enquadram em uma faixa de número de Reynolds compreendida entre 3×10^5 e 5×10^5 . Drela (1989) afirma que o escoamento em perfis aerodinâmicos de baixo número de Reynolds possuem valores menores que $1,2 \times 10^6$. Com isso, um aerofólio de uma aeronave da competição da SAE BRASIL AeroDesign experimenta escoamentos de baixo número de Reynolds onde implica em efeitos viscosos mais acentuados.

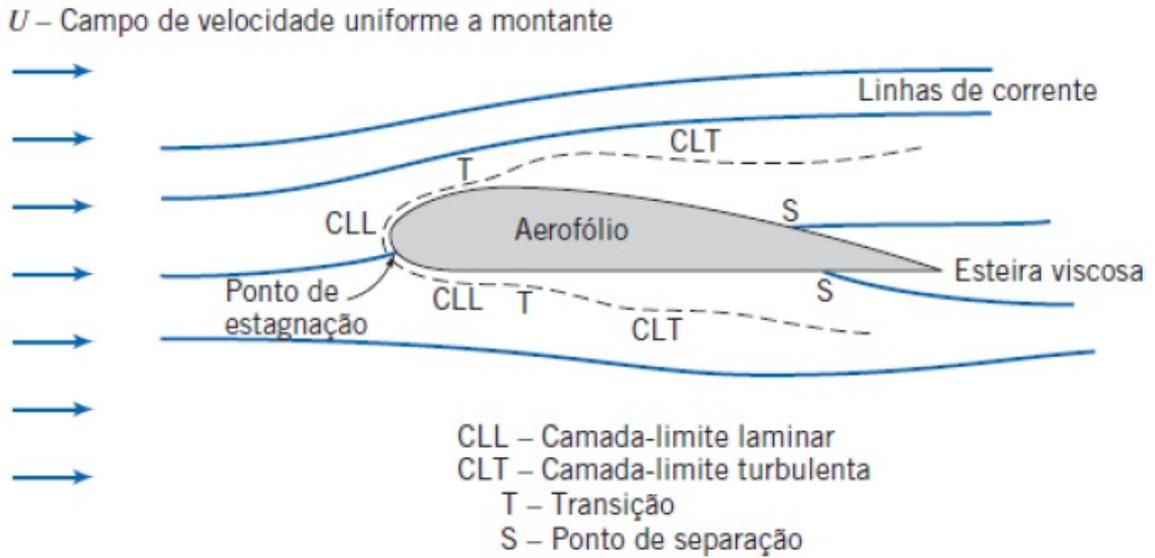
2.3.3 *Camada Limite*

Em um escoamento viscoso pode-se dividir a análise em duas regiões principais, uma nas proximidades das superfícies do corpo e a outra envolta de todo o escoamento excedente. A região próxima ao corpo é chamada de camada limite (GALIOTTO, 2017).

Kuethe e Chow (1997), salienta que a camada limite é uma região adjacente ao corpo onde os principais efeitos da viscosidade são predominantes. Fora da camada limite o escoamento será dito invíscido, ou seja, o efeito da viscosidade do fluido não é significativo no escoamento. Em um corpo sólido, a formação de uma camada limite fina está relacionada com altos números de Reynolds, pois, nesse caso as forças inerciais são predominantes sobre as forças viscosas, sendo que para baixos números de Reynolds a espessura da camada limite é menos fina (SCHLICHTING; GERSTEN, 2016).

Fox *et al.* (2014), demonstra que em um escoamento sobre um aerofólio, como apresentado na Figura 11, a corrente livre se separa contornando o corpo a partir do ponto de estagnação. O fluido adjacente às superfícies do perfil adquire velocidade devido à condição de não deslizamento. Em um caso real, em que a viscosidade do fluido é considerada, o escoamento cria camadas limites nas superfícies superior e inferior do perfil. Inicialmente, após o ponto de estagnação, as camadas limites são laminares, e a uma determinada distância transitam para camadas limites turbulentas. Não há um valor preciso do número de Reynolds em que ocorre a transição de escoamento laminar para escoamento turbulento. A distância onde ocorre a transição de regime de escoamento é medida a partir do bordo de ataque do perfil e sua magnitude é influenciada por parâmetros como: condições de fluxo livre, rugosidade das superfícies e por gradiente de pressão.

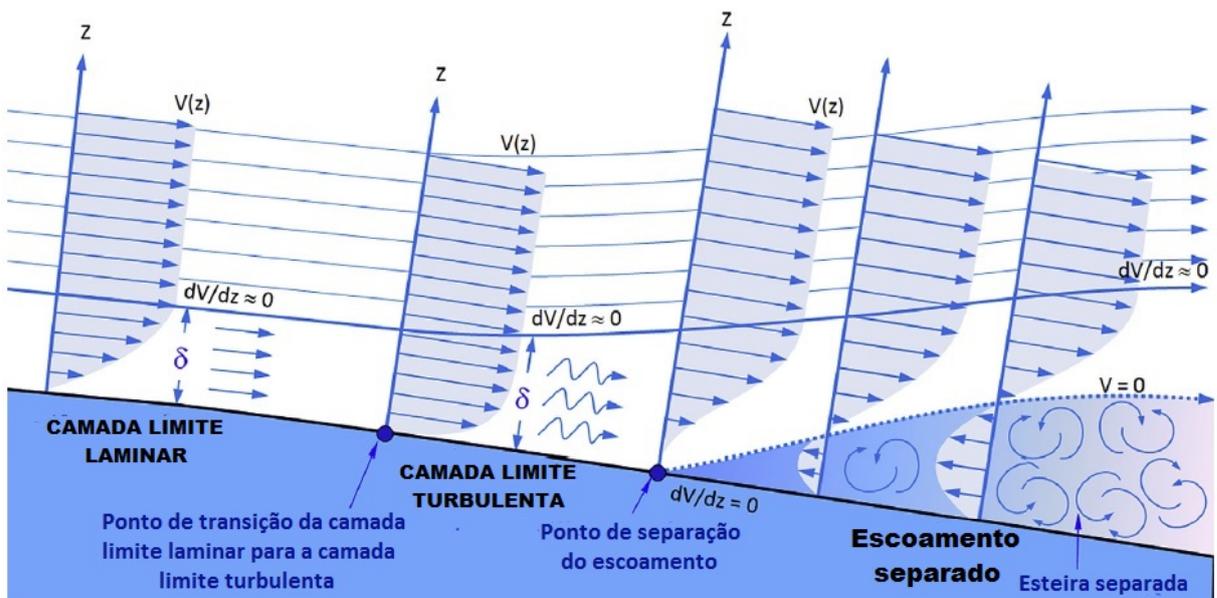
Figura 11 – Detalhes de um escoamento viscoso sobre um aerofólio.



Fonte: Fox *et al.* (2014)

Um gradiente de pressão adverso pode implicar na separação do escoamento sobre as superfícies do corpo porque ele se opõe ao movimento do fluido, tendendo a desacelerar as partículas fluidas. Com isso, o fluido passa a formar uma esteira viscosa após os pontos de separação, conforme apresentado na Figura 12, resultando em uma baixa eficiência para a aeronave (FOX *et al.*, 2014).

Figura 12 – Características do escoamento na camada limite laminar e turbulento e separação do escoamento com formação de uma esteira viscosa.



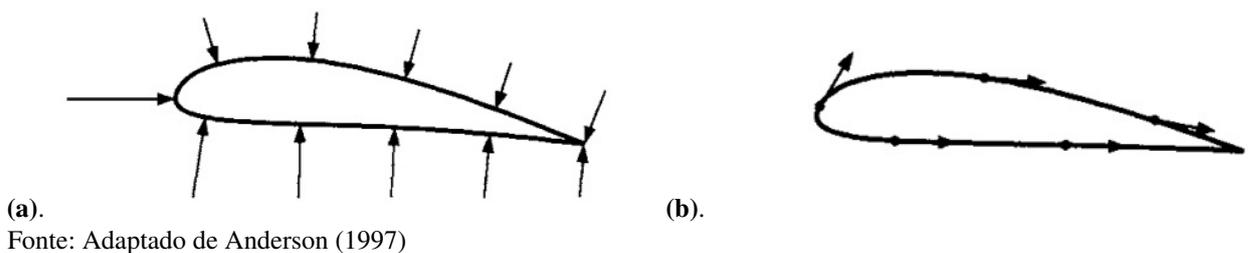
Fonte: Adaptado de Gudmundsson (2014)

2.4 Forças aerodinâmicas e momento em um aerofólio

De acordo com Souza (1991) as forças aerodinâmicas são as reações decorrentes do escoamento de ar sobre o corpo.

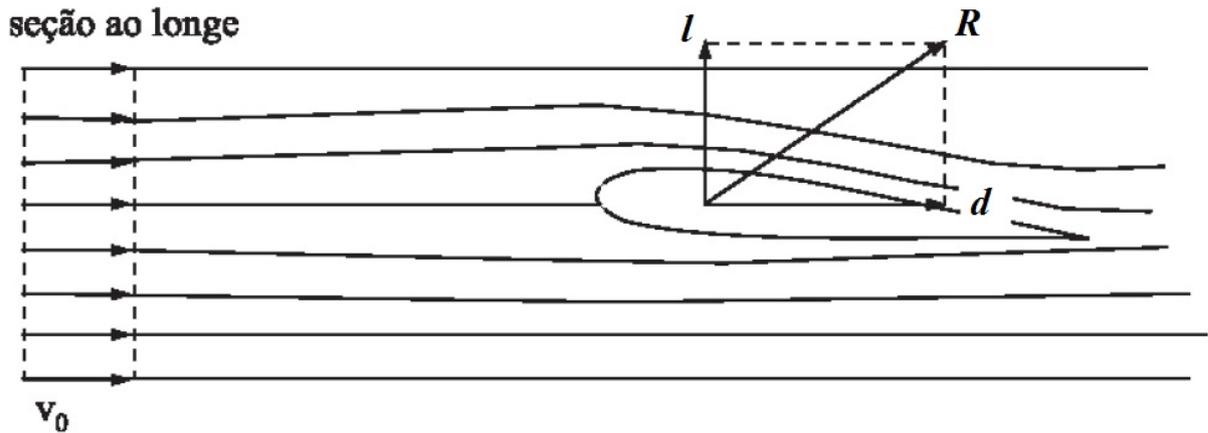
As forças aerodinâmicas surgem a partir da distribuição de pressão e da distribuição de tensão de cisalhamento nas superfícies do corpo imerso, como apresentado na Figura 13. A pressão p do fluido é uma tensão normal em qualquer plano por um elemento de fluido em repouso, dita positiva para compressão. Na distribuição de pressões, a pressão exercida varia de ponto a ponto sobre a superfície e cada ponto atua perpendicularmente a superfície local. A distribuição de tensões de cisalhamento surge em consequência do atrito criado entre o ar em movimento e a superfície do corpo. Em cada ponto, a tensão de cisalhamento também varia, mas atua tangencialmente a superfície local (ANDERSON, 1997).

Figura 13 – Distribuições de pressão (a) e de tensão de cisalhamento (b) na superfície do perfil.



Para o estudo envolvendo aerofólio e fluido, a observação dos efeitos aerodinâmicos é feita pela seguinte hipótese, considera-se que o sistema de referência é o perfil sólido, supõe que o corpo está inercialmente parado e o fluido esta em movimento possuindo velocidade com magnitude igual e sentido contrário ao do perfil sólido estudado (BRUNETTI, 2008). Nesse caso, o aerofólio estará submetido a uma força que é resultante das tensões de cisalhamento e de pressão atuantes no mesmo, assim como mostrado na Figura 14. Considerando-se de um fluxo bidimensional a força resultante pode ser decomposta em duas componentes: força de arrasto (d), que é paralela ao sentido de escoamento e força de sustentação (l), que é perpendicular ao sentido de escoamento. A soma vetorial dessas forças é a resultante R , chamada de força resultante aerodinâmica (FOX *et al.*, 2014).

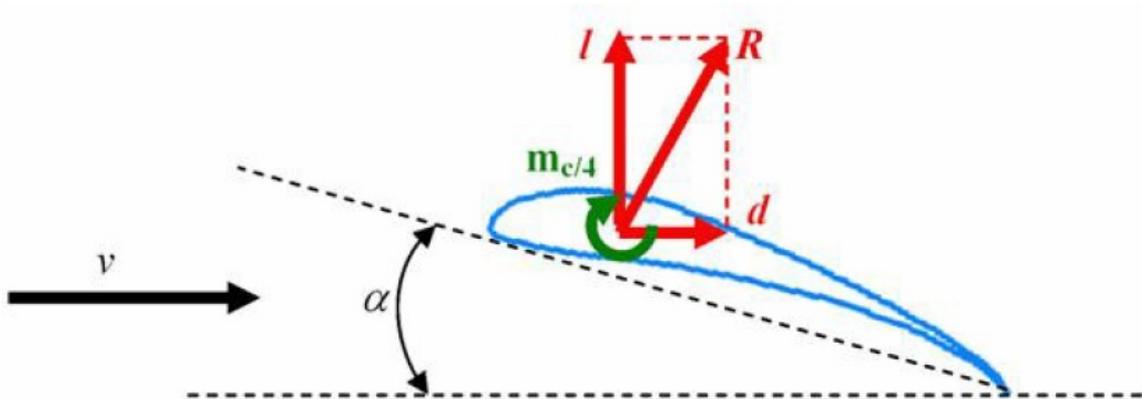
Figura 14 – Componentes da força resultante em um aerofólio.



Fonte: Adaptado de Brunetti (2008)

Um fluxo de ar sobre um perfil aerodinâmico além de gerar forças aerodinâmicas, produz também um momento na direção do bordo de ataque. A existência de um momento promove uma rotação no aerofólio. Geralmente os cálculos de momento são realizados adotando um ponto de referência para a atuação do momento em torno do perfil, este ponto fica localizado a $\frac{1}{4}$ de corda a partir do bordo de ataque e é chamado de centro aerodinâmico (RODRIGUES, 2014). A Figura 15 mostra as forças aerodinâmicas e o momento em torno do centro aerodinâmico.

Figura 15 – Forças e momento atuantes em um perfil aerodinâmico.



Fonte: Rodrigues (2014)

2.4.1 Equação de Bernoulli

Segundo Çengel e Cimbala (2012) a equação de Bernoulli provou ser uma ferramenta bastante útil para a mecânica dos fluidos, ela expressa a conservação das energias cinética, potencial e de escoamento em uma corrente de fluido, bem como, a conversão entre estas formas

de energias nas regiões do fluxo onde se considera como desprezível o efeito médio das forças viscosas e onde se aplicarem outras condições restritivas.

A equação de Bernoulli é uma formulação que relaciona pressão, velocidade e elevação e sua aplicação é válida para regiões de escoamentos incompressíveis e em regime permanente, onde as forças de atrito resultantes – devido aos efeitos viscosos – são desprezíveis, comparadas aos efeitos da inércia, da gravidade e da pressão (ÇENGEL; CIMBALA, 2012). É matematicamente expressa pela Equação 2.3.

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh = \text{constante}. \quad (2.3)$$

Quando escrevemos a equação de Bernoulli por unidade de massa, obtém-se

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gh = \text{constante}. \quad (2.4)$$

A Equação 2.4 pode ser interpretada como uma equação de energia, pois $\frac{p}{\rho}$ representa a energia de pressão, $\frac{1}{2}V^2$ a energia cinética e gh a energia potencial. Dessa forma, um elemento de fluido irá conservar sua energia total no decorrer do deslocamento em uma linha de corrente (TORENBEEK; WITTENBERG, 2009).

De acordo com Torenbeek e Wittenberg (2009), no fluxo de ar ao redor de uma aeronave o deslocamento vertical dos elementos é pequeno, sendo assim desprezível a variação da energia potencial em comparação aos outros termos. Dessa forma, a equação de Bernoulli se reduz para

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{constante}, \quad (2.5)$$

onde, o termo $\frac{1}{2}\rho V^2$ também se referido a q_∞ , é denominado de pressão dinâmica e equivale à energia cinética transmitida por segundo a uma unidade de volume de ar de densidade ρ quando acelerado até a velocidade V . Para um escoamento incompressível invíscido a soma da pressão estática e dinâmica é uma constante chamada pressão total (p_t), sendo

$$p_t = p + q_\infty = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (2.6)$$

2.4.2 Coeficiente de pressão

Segundo Gudmundsson (2014), na aerodinâmica é proveitoso mesclar certas propriedades físicas em números adimensionais, no caso da pressão estática e da pressão dinâmica não são exceções. A pressão estática é formulada como uma sobrepressão ou sucção subtraindo a pressão estática atmosférica (p_∞). O coeficiente de pressão (C_p) é dado pela Equação 2.7:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \quad (2.7)$$

Para escoamentos incompressíveis o coeficiente de pressão pode ser determinado utilizando a Equação de Bernoulli, sendo formulado como a Equação 2.8, de acordo com Gudmundsson (2014):

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 \quad (2.8)$$

A Equação 2.8 diz que para um dado V_∞ , o coeficiente de pressão é determinado a partir da velocidade local (V). Torenbeek e Wittenberg (2009) ressaltam ainda que os valores de podem representar determinadas influências no escoamento incompressível, como nos casos:

Aumento de pressão: $p > p_\infty$ e $V < V_\infty \rightarrow C_p > 0$

Redução de pressão: $p < p_\infty$ e $V > V_\infty \rightarrow C_p < 0$

Ponto de estagnação: $V = 0$ e $p = p_t \rightarrow C_p = 1$

Fluxo permanente: $V = V_\infty$ e $p = p_\infty \rightarrow C_p = 0$

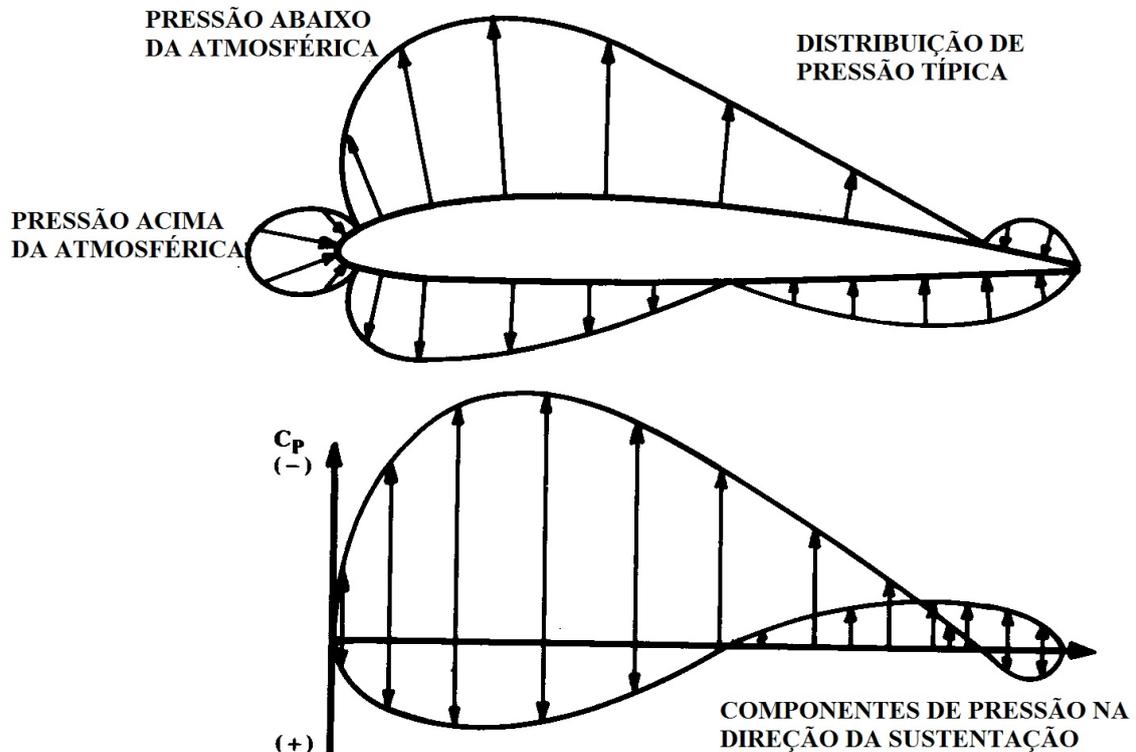
2.4.3 Distribuições de pressões e sustentação

A sustentação é a componente perpendicular a direção do escoamento, sendo essa força a responsável por fazer a aeronave sair do solo.

Conforme Raymer (1992), a geração de sustentação esta relacionada com as diferentes velocidades do ar que passam na região superior e inferior do aerofólio. O ângulo de ataque e a curvatura do perfil induz o ar a escoar mais rápido em cima do que embaixo. A Equação de Bernoulli diz que para velocidades mais altas produzem pressões estáticas mais baixas, isso implica que a superfície superior do aerofólio tende a ser puxada para cima por pressões estáticas abaixo da pressão ambiente enquanto que a superfície inferior tende a ser empurrada para cima

devido às pressões estáticas acima da pressão ambiente. A Figura 16 mostra a distribuição de pressão característica de um perfil aerodinâmico que produz sustentação.

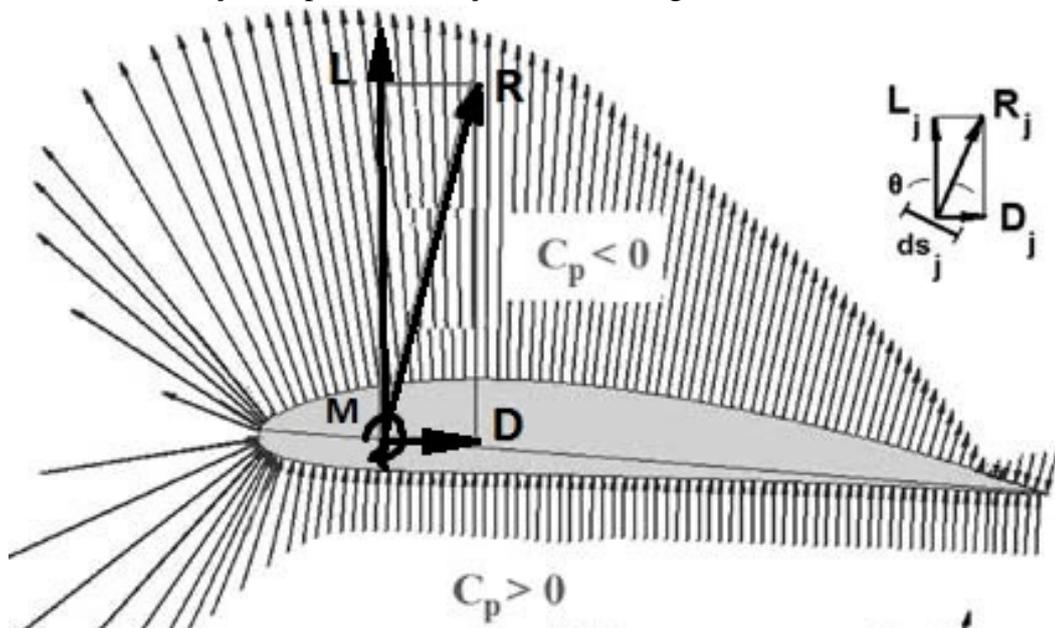
Figura 16 – Distribuição de pressão em um aerofólio na geração de sustentação.



Fonte: Adaptado de Raymer (1992)

A integração da distribuição de pressão nas regiões superior e inferior do perfil resulta tanto na força de sustentação, quanto em uma força de arrasto e em um momento de arfagem (PANARAS, 2012). Como pode ser visto na Figura 17.

Figura 17 – Distribuição de pressão e forças e momento gerados.



Fonte: Adaptado de Panaras (2012)

Bertin e Cummings (2009) explica que a sustentação atuante em uma asa de envergadura infinita (como um perfil aerodinâmico) não varia na direção da envergadura. Para este escoamento bidimensional se busca a sustentação aplicada em uma unidade de largura de asa, a chamada sustentação por unidade de envergadura (l) que segundo Rodrigues (2014) é expressa como:

$$l = \frac{1}{2} \rho V^2 c_{cl} \quad (2.9)$$

Na Equação 2.9 tem-se o coeficiente de sustentação do perfil, c_l , no lado direito da equação, isolando-o, tem-se sua expressão como sendo:

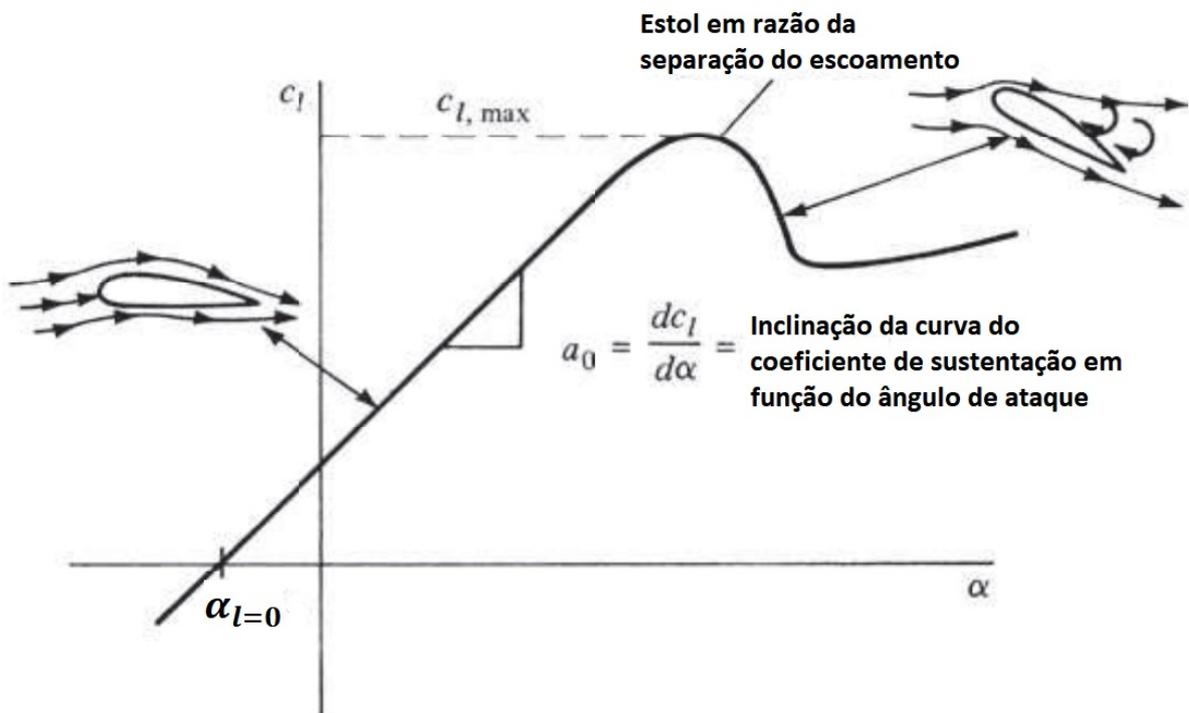
$$c_l = \frac{l}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \frac{l}{q_{\infty} c} \quad (2.10)$$

A determinação do coeficiente de sustentação geralmente é feita a partir de experimentos em túnel de vento ou em softwares voltados para simular um túnel de vento. O coeficiente de sustentação caracteriza a eficiência do aerofólio em produzir sustentação e é função do modelo do perfil, do número de Reynolds e do ângulo de ataque (RODRIGUES, 2014).

Uma alteração característica das propriedades aerodinâmicas é o estol (do inglês *stall*) que consiste de um decaimento acentuado do coeficiente de sustentação a partir de um

determinado ângulo de ataque, chamado de ângulo de estol. O estol é um dos aspectos mais importantes do perfil aerodinâmico pois influencia diretamente na velocidade mínima que uma asa precisa para produzir sustentação suficiente para suportar o peso da aeronave. A causa do estol está relacionado com o aumento do gradiente de pressão adverso no extradorso do perfil que conforme o aumento do ângulo de ataque o gradiente adverso tende a separar o escoamento da superfície superior do aerofólio. Na Figura 18 é ilustrado o gráfico típico do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque, onde o coeficiente de sustentação máximo ($c_{l,max}$) está localizado a um determinado ângulo de estol e pode-se observar também o ângulo de ataque para o qual a sustentação é zero, denotado por $\alpha_{l=0}$, que sempre apresenta valor negativo para perfis aerodinâmicos de arqueamentos positivos. Vale ressaltar sobre o estol que, a separação do escoamento além de implicar em um declínio rápido de sustentação, também favorece um aumento significativo de arrasto (ANDERSON, 2016).

Figura 18 – Variação do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque.



Fonte: Adaptado de Anderson (2016)

2.4.4 Força e coeficiente de arrasto

A força de arrasto ou apenas arrasto, é a componente da força resultante aerodinâmica paralela a direção do escoamento do vento relativo. É desvantajoso, pois age de forma a frear o movimento do perfil aerodinâmico por meio do ar. Dessa forma, em um estudo aerodinâmico sempre se busca alternativas para reduzir o arrasto o máximo possível, pois resultará em menores solicitações de potencia do motor, maiores velocidades e maior sustentação em uma aeronave (SOUZA, 1991; RODRIGUES, 2014).

Souza (1991) explica que existem dois tipos de arrasto associados a um aerofólio: arrasto de pressão e arrasto de atrito. O primeiro está atrelado aos diferenciais de pressões distribuídas na superfície do perfil devido as diferentes velocidades locais do fluido, como também em consequência da formação da esteira de ar turbulento atrás do perfil, em que esta esteira se caracteriza como uma região de baixa pressão. Já o arrasto de atrito é uma força de resistência do ar ao deslocamento do perfil, proveniente da viscosidade do fluido e da rugosidade superficial do corpo imerso.

De forma similar a sustentação, o arrasto do perfil possui seu valor expresso por unidade de envergadura sendo formulado matematicamente como:

$$d = \frac{1}{2} \rho V^2 c c_d \quad (2.11)$$

Isolando o coeficiente de arrasto do perfil, c_d , da Equação 2.11, tem-se:

$$c_d = \frac{d}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \frac{d}{q_\infty c} \quad (2.12)$$

Assim como o coeficiente de sustentação esta em consonância com a força de sustentação, o coeficiente de arrasto representa a eficiência do aerofólio em gerar força de arrasto. Para um perfil aerodinâmico a geração de menores coeficientes de arrasto aliado a maiores coeficientes de sustentação caracteriza um perfil ser aerodinamicamente eficiente. O coeficiente de arrasto também é função do modelo do perfil, do número de Reynolds e do ângulo de ataque (RODRIGUES, 2014).

2.4.5 Momento e coeficiente de momento de um perfil

Para realizar uma análise completa das forças que atuam em uma asa é necessário o conhecimento do momento atuante, e este depende fundamentalmente da obtenção dos dados de momento do perfil (ABBOTT; DOENHOFF, 1959).

O momento em torno de um perfil, como da Figura 17 é chamado de momento de arfagem, atua no centro aerodinâmico no plano da força de sustentação e da força de arrasto e possui valor positivo quando tende a aumentar o ângulo de ataque (HOUGHTON *et al.*, 2013).

Para Rosa (2006), o cálculo do momento em um perfil é mais útil considerar o centro aerodinâmico, como ponto de referência, do que o centro de pressão, pois a posição do centro de pressão é muito variável com mudanças do ângulo de ataque, tornando assim, complexa a análise.

De acordo com Rodrigues (2014) a equação do momento de arfagem em um perfil aerodinâmico é expressa como:

$$m_{c/4} = \frac{1}{2} \rho V^2 c^2 c_m \quad (2.13)$$

Similarmente a sustentação e ao arrasto. o momento é expresso por unidade de envergadura. Isolando o coeficiente de momento do perfil, c_m da Equação 2.13 obtém-se sua formulação

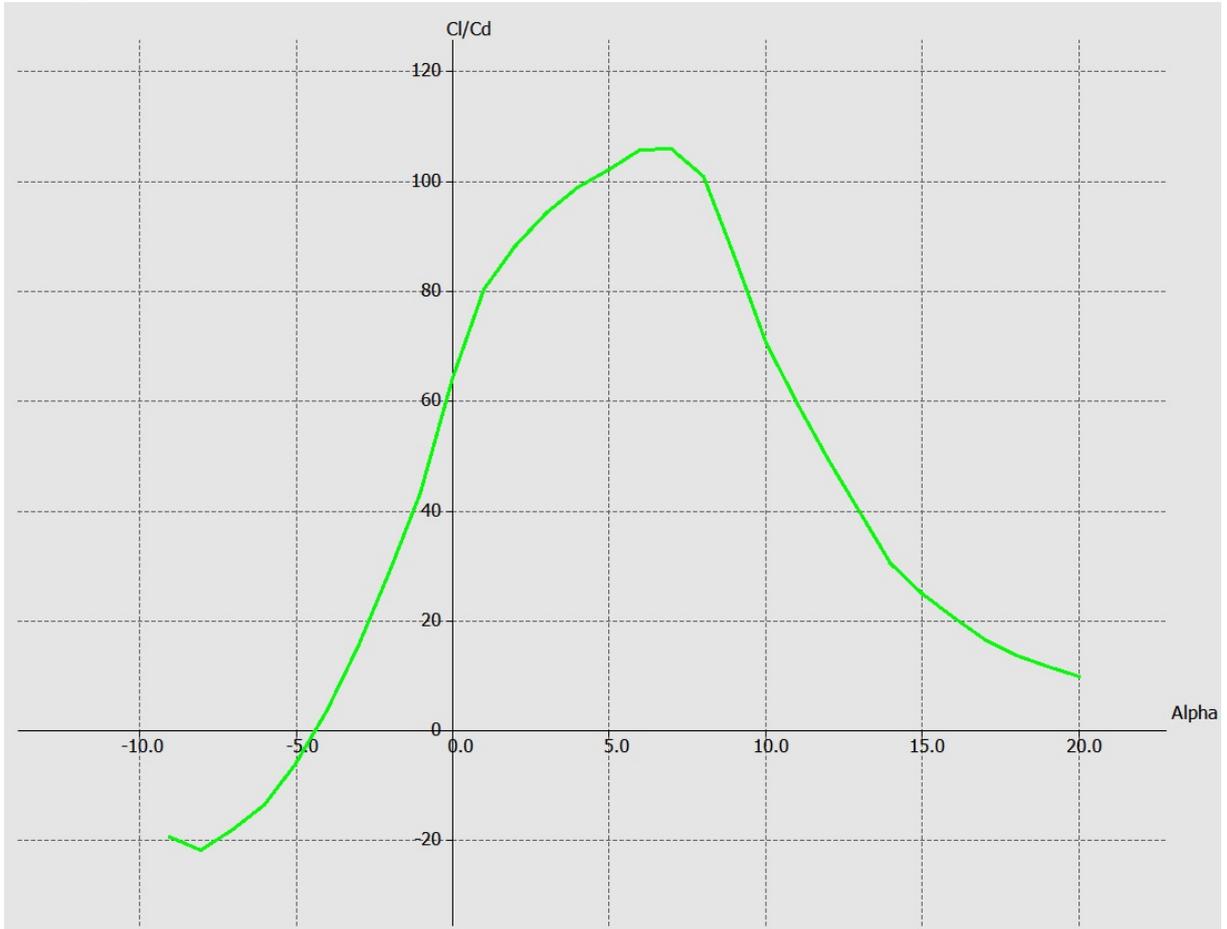
$$c_m = \frac{m_{c/4}}{\frac{1}{2} \rho V^2 c^2} = \frac{m_{c/4}}{q_\infty c^2} \quad (2.14)$$

Além do valor do momento, da pressão dinâmica e da corda, como mostrado na Equação 2.14, Bertin e Cummings (2009), explica que o coeficiente de momento do perfil também é influenciado pelo arqueamento e pela espessura do aerofólio.

2.4.6 Eficiência aerodinâmica

Uma curva de grande importância para o desempenho da aeronave é a eficiência aerodinâmica do perfil (c_l/c_d versus α). Tal curva, representa a razão de produção de sustentação por produção de arrasto em função do ângulo de ataque, em que o valor máximo da relação c_l/c_d se encontra em um determinado $\alpha > 0^\circ$, onde neste ângulo de ataque, o perfil possui a maior geração de sustentação com o menor valor de arrasto possível (RODRIGUES, 2014).

Figura 19 – Exemplo da curva de eficiência aerodinâmica com valor máximo aproximadamente no ângulo 7° .



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.5 Métodos Numéricos

Os métodos numéricos consistem de um conjunto de ferramentas e metodologias utilizadas para a obtenção de uma solução aproximada. A aplicação desses métodos é necessária quando os problemas não possuem uma solução analítica, tendo assim, que resolver numericamente (BUFFONI, 2002).

Chapra e Canale (2008) expõem que, apesar de existirem diversos métodos numéricos, todos possuem uma característica em comum: invariavelmente envolvem grande número de cálculos aritméticos maçantes. Não é surpresa que, diante do rápido e eficiente desenvolvimento dos computadores, a importância dos métodos numéricos para solução de problemas de engenharia cresceu abruptamente nos últimos anos.

Os métodos numéricos são ferramentas bastante úteis para resolver problemas de engenharia. Tais métodos possuem uma ampla aplicabilidade, pois podem tratar de um grande número de equações, de não-linearidades e de geometrias complexas, que são demandas comuns

nas práticas de engenharia e geralmente impossíveis de se lidar com métodos analíticos. O profissional da engenharia encontrará, regularmente, situações onde terá de utilizar programas computacionais que possuem métodos numéricos acoplados ao sistema e diante disso, o uso inteligente desses programas, dependerá, em muitos casos, do conhecimento da teoria básica fundamental dos métodos (CHAPRA; CANALE, 2008).

2.6 Mecânica dos Fluidos Computacional

O escoamento de fluido com ou sem transmissão de calor faz parte de muitos processos físicos da engenharia onde raramente pode se obter uma solução de forma analítica ou com experimentos práticos. Com o surgimento do CFD devido ao advento do computador na década de 1950, houve uma revolução na maneira de solucionar problemas complexo de fluidodinâmica, pois as simulações numéricas dos escoamentos promoveram o entendimento e avaliação dos fenômenos físicos e possibilitou também a extração de resultados a nível que ensaios práticos e fundamentação analítica não alcançaram (FORTUNA, 2000).

Conforme Sayma (2009), a extração de resultados em problemas de mecânica dos fluidos trata-se da resolução das equações de Navier-Stokes, das quais são governadas por equações diferenciais parciais (EDP's), complexas para sua resolução. A metodologia numérica computacional transforma as equações governantes do escoamento em sistemas de equações algébricas, assim, podem ser facilmente solucionadas por um computador.

O CFD é uma ferramenta poderosa e prática para a obtenção de soluções numéricas onde engloba uma gama de aplicações e de formas geométricas. Além disso, possibilita a validação de métodos teóricos e práticos assegurando resultados mais próximos da realidade, como também promove a capacidade de alterar os parâmetros de interesse ou modelos físicos de uma análise até que se encontre uma solução viável para os requisitos de um determinado projeto (MALISKA, 2004).

Maliska (2004) aponta que o uso de simulação numérica computacional como ferramenta de trabalho não substitui outros métodos para desenvolver um projeto ou analisar um problema e sim complementa para resultar em um projeto melhor e barato.

Segundo Andersson *et al.* (2011) existem muitos softwares comerciais de CFD para uso geral disponíveis no mercado como por exemplo, ANSYS Fluent®, ANSYS CFX®, Star-CD®, FLOW-3D® e Phoenix®. Além disso, o autor afirma que todos os códigos CFD possuem uma metodologia em comum para resolver uma simulação, descrito geralmente como:

- a) modelagem geométrica:
 - criação da geometria;
 - criação do domínio computacional;
- b) geração de malha:
 - discretização do domínio computacional em elementos ou em segmentos definidos no programa;
- c) definição de modelos:
 - introdução de modelos físicos compatíveis com o que se propõe solucionar;
- d) definição de propriedades:
 - introdução das propriedades físicas do fluido, como densidade, viscosidade dinâmica, temperatura inicial etc.;
- e) definição de condições de contorno:
 - especificação das condições de entradas e saídas do domínio computacional, bem como as condições de parede e simetria em determinados casos;
- f) *solver*:
 - especificação de um solucionador segregado ou acoplado baseado em pressão ou em densidade;
 - definição de critérios de convergência;
 - para problemas não estacionários (que variam em função do tempo), deve-se escolher um método de passos de tempo;
- g) pós-processamento:
 - analisar a qualidade da solução.

2.7 Método dos Painéis

Há uma categoria de métodos numéricos utilizado na mecânica dos fluidos do qual se fundamenta apenas na discretização da fronteira do campo de escoamento por uma distribuição de segmentos discretos nos contornos (diferente de outros métodos numéricos que analisam o domínio inteiro), denominado de Método dos Elementos de Contorno (MUNSON *et al.*, 2004). Dentro desta categoria existe o chamado, Métodos dos Painéis, que possui destaque por sua ampla aplicação na indústria aeronáutica e tem o objetivo de analisar fluxos potenciais envolta de corpos rombudos e esbeltos (PEREIRA, 2005).

O método dos painéis emprega soluções analíticas da equação de Laplace por meio

uniforme (ϕ_∞), do potencial de velocidades induzidas pelas fontes de intensidade q (ϕ_S) e pelo potencial das velocidades induzidas pelos vórtices de intensidade γ (ϕ_V). Nas Equações 2.17 e 2.18, s representa uma coordenada do comprimento do arco que se estende por toda a superfície do perfil aerodinâmico.

$$\phi = \phi_\infty + \phi_S + \phi_V \quad (2.15)$$

Onde,

$$\phi_\infty = V_\infty x \cos \alpha + V_\infty y \sin \alpha \quad (2.16)$$

$$\phi_S = \int \frac{q}{2\pi} \ln r \, ds \quad (2.17)$$

$$\phi_V = - \int \frac{\gamma}{2\pi} \theta \, ds \quad (2.18)$$

Portanto, substituindo a Equações 2.16, 2.17 e 2.18 na Equação 2.15 obtém-se

$$\phi = V_\infty(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{i=1}^N \int \left[\frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right] ds \quad (2.19)$$

De acordo com Vargas (2006), a partir da Equação 2.19, realizando manipulações matemáticas e geométricas, chega-se no sistema de Equações 2.20, onde a resolução desse sistema de equações fornece as intensidades dos vórtices localizados no centro de cada painel (pontos de controle) e das intensidades das fontes que satisfazem à condição de tangência da velocidade (impermeabilidade) e a Condição de Kutta.

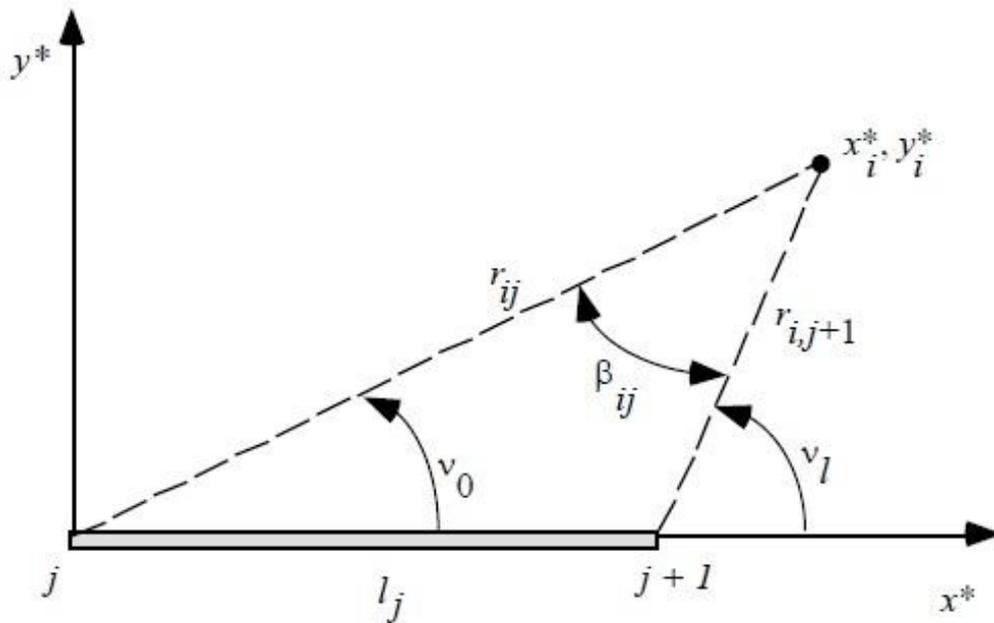
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,i} & \cdots & A_{1,N} & \cdots & A_{1,N+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,i} & \cdots & A_{i,N} & \cdots & A_{i,N+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,i} & \cdots & A_{N,N} & \cdots & A_{N,N+1} \\ A_{N+1,1} & \cdots & A_{N+1,i} & \cdots & A_{N+1,N} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_N \\ b_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Segundo Silveira (2001), através da solução do sistema de equações 2.20, é possível determinar a velocidade tangencial para cada ponto de controle por meio da Equação 2.21.

$$V_{t,i} = V_{\infty} \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{i=1}^N \left[\frac{q_j}{2\pi} \text{sen}(\theta_i - \theta_j) \beta_{i,j} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} \right] + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\text{sen}(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} \right] \quad (2.21)$$

O ângulo $\beta_{i,j}$ da Equação 2.21 é formado entre o centro do painel i (ponto de controle) e os nós do painel j como pode ser visto na Figura 21.

Figura 21 – Ângulo β e relação com um ponto de controle i e um painel j .



Fonte: Chaves (2012)

Tendo a velocidade tangencial de cada ponto de controle, segundo Silveira (2001) é possível determinar o coeficiente de pressão de cada ponto de controle ao longo da superfície do aerofólio através da equação 2.22.

$$C_{p,i} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{V_{t,i}}{V_{\infty}} \right)^2 \quad (2.22)$$

Onde $V_{t,i}$ é a velocidade tangencial para um dado ponto de controle calculada pela Equação 2.21.

De acordo com Chaves (2012), os coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento em torno do perfil são determinados pela integração da pressão das velocidades tangenciais dos pontos de controle. O coeficiente de sustentação e o coeficiente de arrasto são respectivamente expressos como:

$$\bar{c}_l = C_y \cos \alpha - C_x \sin \alpha \quad (2.23)$$

$$\bar{c}_d = C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha \quad (2.24)$$

onde

$$C_x = \oint C_p d\left(\frac{y}{c}\right) \cong \sum_{i=1}^N C_{p,i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{c}\right) \quad (2.25)$$

e

$$C_y = - \oint C_p d\left(\frac{x}{c}\right) \cong \sum_{i=1}^N C_{p,i} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{c}\right) \quad (2.26)$$

Conforme Chaves (2012) ainda, o coeficiente de momento ao redor do centro do aerofólio é dado pela seguinte formulação matemática:

$$\bar{c}_m = \bar{c}_{m,x} + \bar{c}_{m,y} \quad (2.27)$$

onde

$$\bar{c}_{m,x} \cong \sum_{i=1}^N C_{p,i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{c}\right) y_i \quad (2.28)$$

e

$$\bar{c}_{m,y} \cong - \sum_{i=1}^N C_{p,i} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{c}\right) (x_i - 0,5) \quad (2.29)$$

2.8 Método dos Volumes Finitos

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é uma técnica de discretização bastante empregada na solução de escoamento de fluidos. Fundamentado no conceito analítico de volume de controle da mecânica dos fluidos, o MVF inicialmente divide o domínio em diversos volumes de controle, onde a variável de interesse se localiza no centroide do volume de controle. Em seguida, integra-se a forma diferencial das equações governantes de cada volume de controle, sendo utilizados perfis de interpolação para representar a variação da variável buscada entre os centroides de cada volume de controle. A equação gerada é denominada de equação de discretização. Portanto, a equação de discretização demonstra o princípio de conservação para a variável buscada dentro do volume de controle (REZENDE, 2009).

Segundo Almeida (2017), a equação final do MVF corresponde a conservação de massa, de momento e de energia. Esta propriedade é totalmente satisfeita em cada volume de controle, sendo também ajustado para todo o domínio fluido global.

2.8.1 Equações de Conservação

A abordagem matemática das equações de conservação é formulada pelas equações de Navier-Stokes, onde estas modelam os fluxos de fluido compressíveis, incompressíveis, turbulentos e laminares. Para determinados parâmetros na modelagem do fluxo, como as características do fluido ou do escoamento, as equações podem ser simplificadas significativamente, visando à redução das dificuldades inerentes a solução numérica. Tais equações modelam matematicamente os três fenômenos físicos: conservação da massa; conservação do momento e conservação da energia (FORTUNA, 2000).

Vale ressaltar que no emprego das equações de Navier-Stokes o fluido é considerado contínuo, onde, segundo Fortuna (2000), em escalas macroscópicas a estrutura discreta e o movimento das moléculas são desprezíveis, pois, um elemento de fluido possui um número consideravelmente grande de moléculas para que as propriedades macroscópicas não sejam funções das propriedades das moléculas isoladas.

2.8.1.1 Equação da Continuidade – Conservação da Massa

O fluido sendo abordado como um meio contínuo, os campos de propriedades são determinados por formulações contínuas das coordenadas do espaço e do tempo. Desse modo,

segundo Zikanov (2010), os princípios de conservação são aplicados a um volume elementar em que a densidade e a velocidade são formuladas em termos de propriedades distribuídas sendo funções vetoriais espaciais e temporais.

O princípio de conservação é extremamente importante para a física, seu conceito consiste na idealização de que na ausência de fontes de massa ou de locais onde a massa possa desaparecer, a massa total que entra no sistema deve sair e/ou se acumular no mesmo (FORTUNA, 2000).

Segundo White (2011), a equação da conservação de massa (equação da continuidade) para um volume de controle infinitesimal tridimensional no sistema de coordenadas cartesianas é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (2.30)$$

O primeiro termo da Equação 2.30 expressa a variação da densidade em função do tempo no volume de controle, e os três termos posteriores representam a taxa do fluxo de massa entrando no volume de controle por unidade de volume em função dos vetores velocidades \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} dos respectivos eixos x , y e z .

De acordo com White (2011), pode-se reescrever a equação da continuidade para uma forma mais compacta. Os três últimos termos da Equação 2.30 são equivalentes ao divergente $\rho \nabla$. Utilizando o operador laplaciano nabla ∇ em coordenadas cartesianas, expresso pela Equação 2.31 e o vetor velocidade dado como $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ chega-se na Equação 2.32:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.32)$$

2.8.1.2 Equações de Navier-Stokes – Conservação do Momento

As equações de Navier-Stokes expressam as equações gerais do movimento dos fluidos, sendo aplicadas a todos os pontos no campo de escoamento, e dessa forma fornece

soluções para todos os detalhes do fluxo em cada ponto do domínio de escoamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2012).

Segundo Fox *et al.* (2014), as equações de Navier-Stokes se baseiam na segunda lei de Newton, onde as forças aplicadas em um elemento de fluido resultam na taxa de variação temporal do momento linear. A natureza das forças existentes são forças de corpo e forças de superfície, isto é, forças influenciadas pela gravidade e forças decorrentes da pressão exercida por um elemento externo ao redor e das tensões viscosas normais e de cisalhamento influenciadas pelo atrito dos volumes de fluido adjacentes em movimento (BLAZEK, 2001).

De acordo Zikanov (2010), a segunda lei de Newton aplicada a um volume de fluido infinitesimal é dada como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x + \frac{\partial \tau_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z,x}}{\partial z} \quad (2.33)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z,y}}{\partial z} \quad (2.34)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z,z}}{\partial z} \quad (2.35)$$

Onde f representa a resultante líquida das forças de corpo e $\tau_{i,j}$ representa o tensor de tensão, no qual seu valor é proveniente de duas parcelas, da pressão isotrópica e das tensões viscosas, conforme a Equação 2.36.

$$\tau_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \sigma_{i,j} \quad (2.36)$$

Na Equação 2.36, $\delta_{i,j}$ é o tensor delta de Kronecker e $\sigma_{i,j}$ representa o tensor de tensões viscosas. Neste ultimo, deve-se introduzir um modelo de tensões viscosas para caracterizar o escoamento de forma completa. O modelo linear para tensor de tensão desenvolvido por Stokes, segundo Zikanov (2010), pode ser adotado, conforme a Equação 2.37:

$$\sigma_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} (\nabla \mathbf{V}) + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.37)$$

Onde λ representa o segundo coeficiente de viscosidade sendo igual a $-\frac{2}{3}\mu$.

Após substituir a Equação 2.36 e a Equação 2.37 nas Equações 2.33, 2.34, 2.35 e adotando o valor de λ obtém-se a formulação final das equações de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \mathbf{V} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (2.38)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \mathbf{V} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2.39)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \mathbf{V} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2.40)$$

Tratando-se de um fluido incompressível com coeficiente de viscosidade constante e escrevendo na forma conservativa, as equações de Navier-Stokes se resumem na Equação 2.41.

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.41)$$

2.8.1.3 Equação da Energia – Conservação da Energia

As equações de Navier-Stokes combinadas a equação da continuidade descrevem o comportamento do fluido, porém, em casos onde exista a transferência de calor é significativa para o escoamento deve-se incorporar a equação da energia (NAVARRO, 2019).

Segundo Çengel e Cimbala (2012), o princípio de conservação de energia é regido pela Primeira Lei da Termodinâmica onde fornece as fundamentações para o entendimento das relações entre as várias formas de energia e das interações de energia. A Primeira Lei

da Termodinâmica estabelece que a taxa de variação de energia em um elemento de fluido é resultante do somatório da taxa de transferência de calor mais a taxa de trabalho realizada no elemento (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Conforme Hirsch (2007) a primeira lei da termodinâmica aplicada a um volume de fluido infinitesimal resulta na equação da energia dada na forma diferencial pela Equação 2.42:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}E) = \nabla(k_T \nabla T) + \nabla(\sigma_{i,j} \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V}\mathbf{f} + q_H \quad (2.42)$$

E representa a energia total por unidade de massa, dada pela Equação 2.43.

$$E = e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \quad (2.43)$$

Onde e representa a energia interna por unidade de massa do fluido. O primeiro termo antes da igualdade da Equação 2.42 representa a taxa de transferência de energia por unidade de volume para o elemento de fluido. O segundo termo representa o fluxo convectivo de energia. O primeiro termo depois da igualdade representa a taxa líquida de transferência de calor por condução, onde k_T é o coeficiente de condutividade térmica do fluido. O segundo termo seguinte expressa a taxa de trabalho sobre o fluido devido as tensões viscosas. O terceiro termo representa a taxa de trabalho sobre o fluido devido as forças de corpo e o último termo (q_H) representa a taxa de outras formas de transferência de calor, como radiação e calor liberado por reações químicas (HIRSCH, 2007).

2.8.2 Introdução do MVF no CFD

2.8.2.1 Domínio Computacional

A região em que é calculada o escoamento chama-se domínio computacional. É delimitado por superfícies (ou apenas arestas) geométricas e por esboços hipotéticos do fluido. Estes últimos são recursos necessários, pois a região do qual está sendo calculada é uma parte individual do aparato inteiro. Por exemplo: se o fluido for escoado em uma asa por um túnel de vento, o domínio computacional é o volume do túnel de vento subtraído do volume da asa (DURBIN; MEDIC, 2007).

Durbin e Medic (2007) explica que o escoamento no domínio computacional se inicia em uma superfície (ou aresta) artificial de uma entrada. Na entrada são atribuídas condições necessárias para o cálculo numérico. Da mesma maneira, no domínio computacional existe uma saída para o fluxo. Além de entrada e saída, outros tipos de delimitações artificiais podem ser atribuídos como: corpos sólidos, limites de campo distante e planos de simetria.

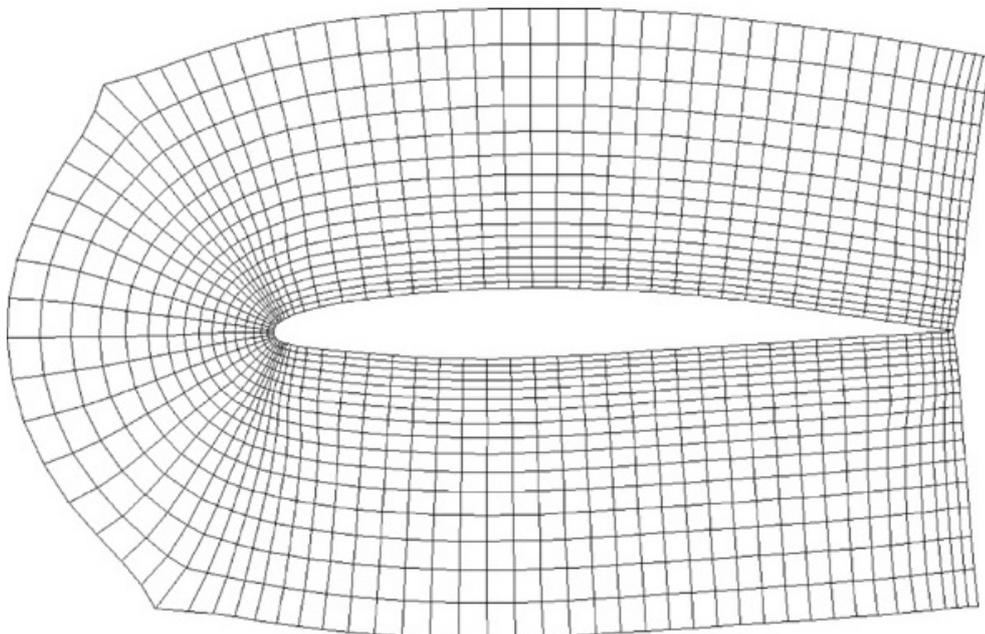
2.8.2.2 Malha

De acordo com Andersson *et al.* (2011), as equações governantes da mecânica dos fluidos são não-lineares, dessa forma no CFD o domínio fluido contínuo do sistema é discretizado adequadamente para que as equações obtenham uma solução numérica.

A discretização também chamada de geração de malha numérica ou simplesmente malha, é a forma transformada do domínio contínuo em uma divisão de subdomínios de número finito, geralmente em elementos bidimensionais ou tridimensionais, onde em cada elemento (volume de controle) será calculada as variáveis fluidodinâmicas. A aplicação do MVF na integração das equações governantes resulta em um sistema algébrico de equações. Esse sistema algébrico pode ser resolvido em um esquema acoplado pressão-velocidade em termos das variáveis fluidodinâmicas u , v , w e p para um único sistema (MALISKA, 2004).

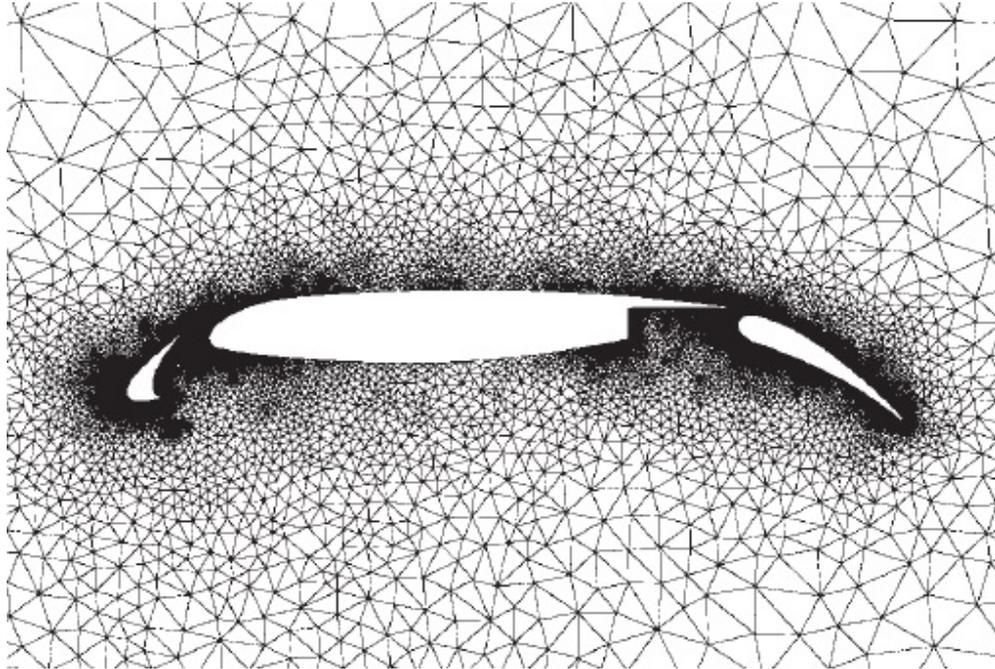
Os principais tipos de malhas, segundo Ferziger *et al.* (2020) são: malhas estruturadas e malhas não estruturadas, como pode ser visto nas Figuras 22 e 23.

Figura 22 – Malha estruturada 2D.



Fonte: Hirsch (2007)

Figura 23 – Malha não estruturada 2D.

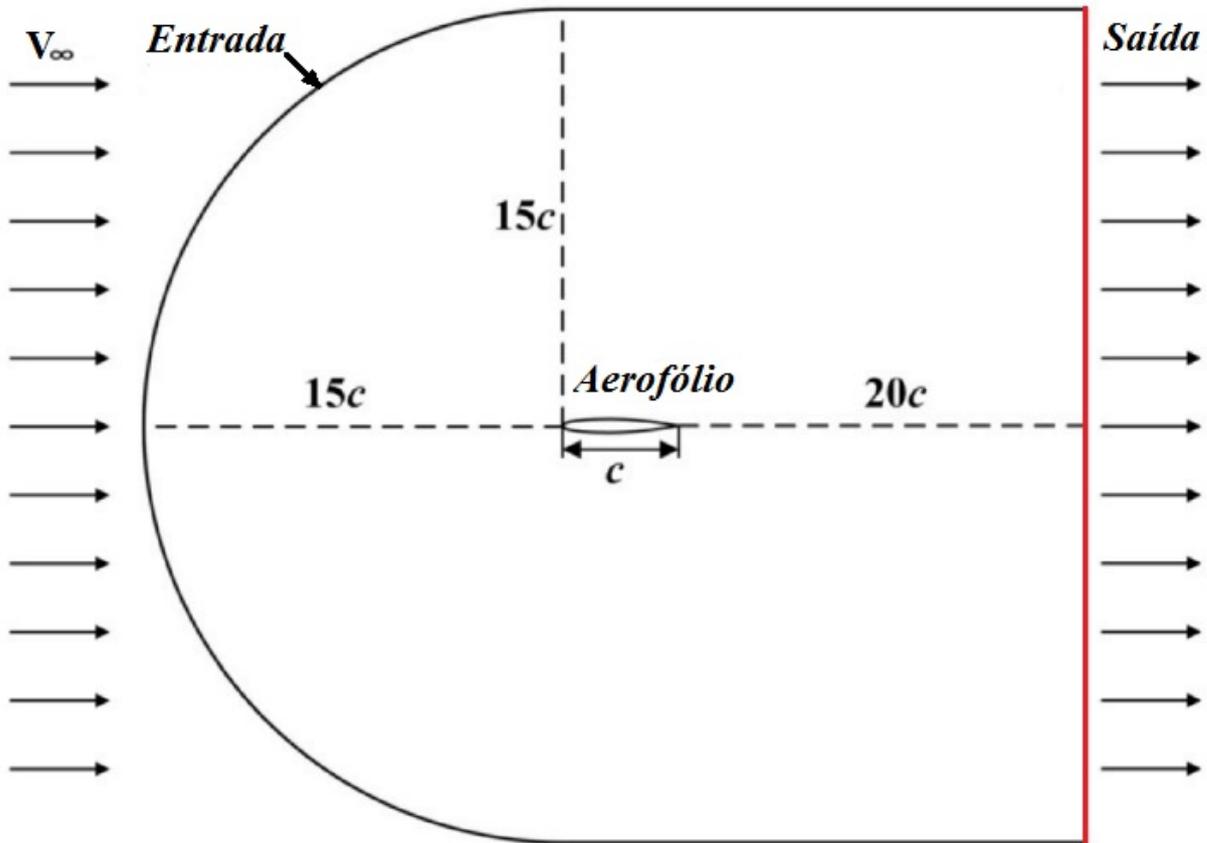


Fonte: Versteeg e Malalasekera (2007)

2.8.2.3 Condições de Contorno

A escolha ideal das condições de contorno é de fundamental importância no CFD para modelagem em MCF ou qualquer problema formulado em equações diferenciais parciais. A condição de parede sólida consiste de uma delimitação onde o fluido não é capaz de permear. Para o caso de estudo de um escoamento viscoso em uma parede sólida (como um aerofólio) é apropriado definir a velocidade tangencial do fluido em relação à parede como sendo igual à zero. Essa condição de parede sólida é dita sem-escorregamento (no-slip). As condições de contorno de entrada e saída representam regiões onde o fluxo de fluido entra e sai do domínio computacional, comumente definidas em termos de velocidade e pressão (FORTUNA, 2000). Na Figura 24 é exemplificado um domínio computacional de um perfil aerodinâmico com atribuição das condições de contorno de *Entrada* e *Saída* onde o fluido entra e sai do domínio e a condição de parede sólida em *Aerofólio*.

Figura 24 – Condições de contorno em um domínio computacional de um aerofólio.



Fonte: Adaptado de Sun *et al.* (2020)

2.8.2.4 Modelo de Turbulência

Embora as equações de Navier-Stokes modelem o comportamento do fluido, e apenas de forma numérica, pois essas equações não possuem uma solução analítica, não se pode afirmar se todas ou algumas das escalas de turbulência, responsáveis pelas oscilações temporais nos campos de velocidade e pressão, serão efetivamente resolvidas, pois exigiria um cálculo numérico muito complexo para formular os efeitos turbulentos que existem no escoamento, até mesmo para um computador atualmente (NAVARRO, 2019).

Segundo Navarro (2019), uma forma de modelar os efeitos turbulentos é a decomposição das variáveis de interesse em termos de valores médios, ou seja, trata-se de reformular as equações originais de Navier-Stokes em função das médias das propriedades descartando os detalhes da turbulência, onde se resulta em um novo conjunto de equações. Esta modelagem de turbulência é chamada de equações médias de Navier-Stokes de Reynolds ou do inglês *Reynolds Average Navier-Stokes* (RANS). Os modelos RANS possuem a vantagem de serem mais econômicos na resolução de cálculos de turbulência do escoamento.

2.8.2.4.1 Modelo de Turbulência de Spalart-Allmaras

O modelo de turbulência de Spalart e Allmaras (1992) é um modelo classificado como RANS, desenvolvido a partir de experimentos empíricos, análise dimensional e invariância de Galileu, onde dispõe de previsões coerentes e eficazes para escoamentos turbulentos que apresentam gradientes de pressão adversos (BLAZEK, 2001).

O modelo de turbulência de Spalart-Allmaras foi projetado para estudos de aerodinâmica em aerofólios e asas, sendo um modelo relativamente simples, sua formulação é baseada na resolução de uma única equação de transporte modelada para a viscosidade cinética turbulenta onde descreve a propriedade turbulenta em todo o campo de escoamento sendo influenciado por efeitos viscosos nas proximidades das paredes (ANSYS, 2018).

Segundo Versteeg e Malalasekera (2007) a expressão matemática do modelo de Spalart-Allmaras é dado pela Equação 2.44, onde $\tilde{\nu}$ é a viscosidade cinética turbulenta.

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\nu})}{\partial t} + \nabla(\rho\tilde{\nu}\mathbf{V}) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}}\nabla\left[(\mu + \rho\tilde{\nu}\nabla(\tilde{\nu}) + C_{b2}\rho\frac{\partial^2\tilde{\nu}}{\partial x_k^2})\right] + \Phi_{\tilde{\nu}} - \xi_{\tilde{\nu}} \quad (2.44)$$

$\sigma_{\tilde{\nu}}$ e C_{b2} são constantes do próprio modelo de turbulência com valores iguais a $\frac{2}{3}$ e 0,622, respectivamente. O primeiro termo da Equação 2.44 representa a taxa de variação de $\tilde{\nu}$. O segundo termo representa o transporte de $\tilde{\nu}$ por convecção. O terceiro termo expressa o transporte de $\tilde{\nu}$ por difusão turbulenta. O quarto termo ($\Phi_{\tilde{\nu}}$) e o último ($\xi_{\tilde{\nu}}$) representam a taxa de produção de $\tilde{\nu}$ e a taxa de dissipação de $\tilde{\nu}$, respectivamente.

Wilcox (2006) corrobora que este modelo de turbulência é uma excelente modelagem de engenharia para determinar propriedades dos escoamentos turbulentos com velocidades incompressíveis principalmente para aplicações aeronáuticas.

3 METODOLOGIA

No presente trabalho, as simulações computacionais dos escoamentos bidimensionais em torno do perfil aerodinâmico NACA 4415 foram realizadas com a utilização da abordagem numérica do método dos painéis onde foi usado o software XFLR5® e o método dos volumes finitos onde foi utilizado o programa ANSYS Fluent®. Para este último, necessitou-se adotar um modelo de turbulência, onde foi escolhido o modelo de Spalart-Allmaras, por sua ampla aplicabilidade em estudos aerodinâmicos. Na Tabela 1 é descrito as características do computador usado para as simulações.

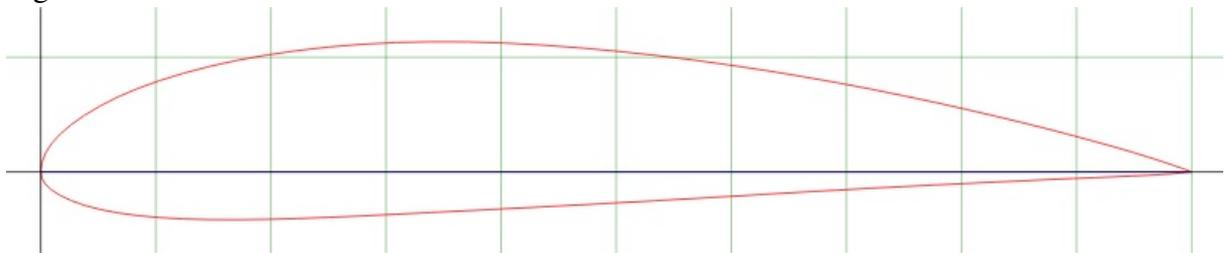
Tabela 1 – Características do computador empregado.

Sistema operacional	Windows 11 Home 64 bits
Processador	Intel® Core™ i5-1135G7 @ 2.40GHz
Núcleos	4
RAM	8 GB
Placa de vídeo	Intel® Iris® Xe Graphics
SSD	256 GB

Fonte: Elaborada pelo autor.

O aerofólio analisado neste trabalho é mostrado na Figura 25, onde possui como características geométricas: 4% de arqueamento máximo localizado a 40% da corda e possui 15% de razão de espessura localizado a 30,9% da corda. O valor da corda da asa adotado foi de 0,5 m, pois foi o valor planejado pela equipe do Aratinga Aerodesign para o projeto do ano de 2023.

Figura 25 – Perfil aerodinâmico NACA 4415.



Fonte: Airfoil Tools (2023)

Para os escoamentos em ambos os *softwares* foi adotado dados meteorológicos do ano de 2022 da cidade de São José dos Campos, local onde promove anualmente a competição da SAE BRASIL AeroDesign durante o mês de novembro, para determinar as variáveis termodinâmicas do ar vigente. Assim, segundo o INMET (2023) a temperatura e a pressão atmosférica da cidade no mês e ano citados anteriormente é de 14,2 °C (287,15 K) e 101 kPa, respectivamente.

Sabendo a temperatura e a pressão atmosférica do fluido e com o auxílio do programa EES, que determina variáveis termodinâmicas, foi possível calcular o valor da densidade, sendo igual a $1,225 \text{ kg/m}^3$, e o valor da viscosidade dinâmica, igual a $0,0000183 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Além da consideração da densidade e da viscosidade dinâmica do fluido como parâmetros constantes, a velocidade uniforme também foi considerada, com valor igual a 14 m/s .

A partir do comprimento de corda, velocidade uniforme, densidade e viscosidade dinâmica foi determinado o número de Reynolds, através da Equação 2.2, resultando em aproximadamente 470.000, sendo este um valor único em todas as simulações deste trabalho. Os resultados obtidos neste trabalho foram analisados comparando com dados de uma literatura para o número de Reynolds de 500.000 e os valores dos coeficientes aerodinâmicos do perfil foram determinados em função do ângulo de ataque para um intervalo de -6° a 20° , que segundo Rodrigues (2014), é um intervalo suficiente para estudar os coeficientes aerodinâmicos do perfil.

Na Tabela 2 é apresentado os parâmetros de valores constantes vinculados ao escoamento, ao fluido e ao aerofólio para todas as simulações do presente trabalho.

Tabela 2 – Parâmetros com valores constantes submetidos em todas as simulações.

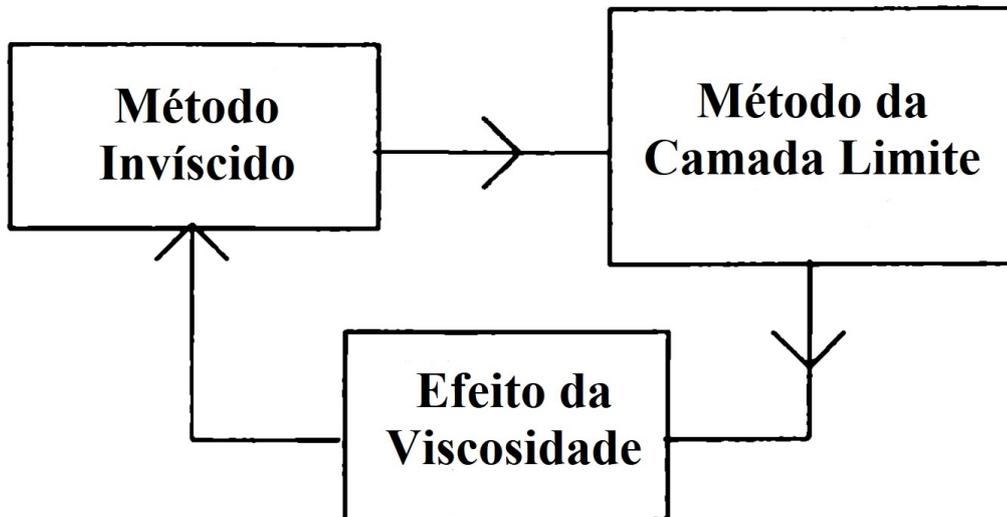
Parâmetro	Valor
Temperatura absoluta	287,35 K
Pressão atmosférica	101 kPa
Velocidade uniforme	14 m/s
Densidade	$1,225 \text{ kg/m}^3$
Viscosidade dinâmica	$0,0000183 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Comprimento de corda	0,5 m
Número de Reynolds	470.000

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1 XFLR5

XFLR5® é um *software* desenvolvido por André Deperrois e tem agregado o código XFOIL, escrito por Mark Drela. O código XFOIL utiliza método dos painéis de alta ordem e um método de interação viscoso/invíscido do escoamento totalmente acoplado para avaliar o arrasto e a transição e separação da camada limite (GUDMUNDSSON, 2014).

Figura 26 – Esquema da metodologia interativa de solução invíscida/viscosa.



Fonte: Adaptado de Cebeci (1999)

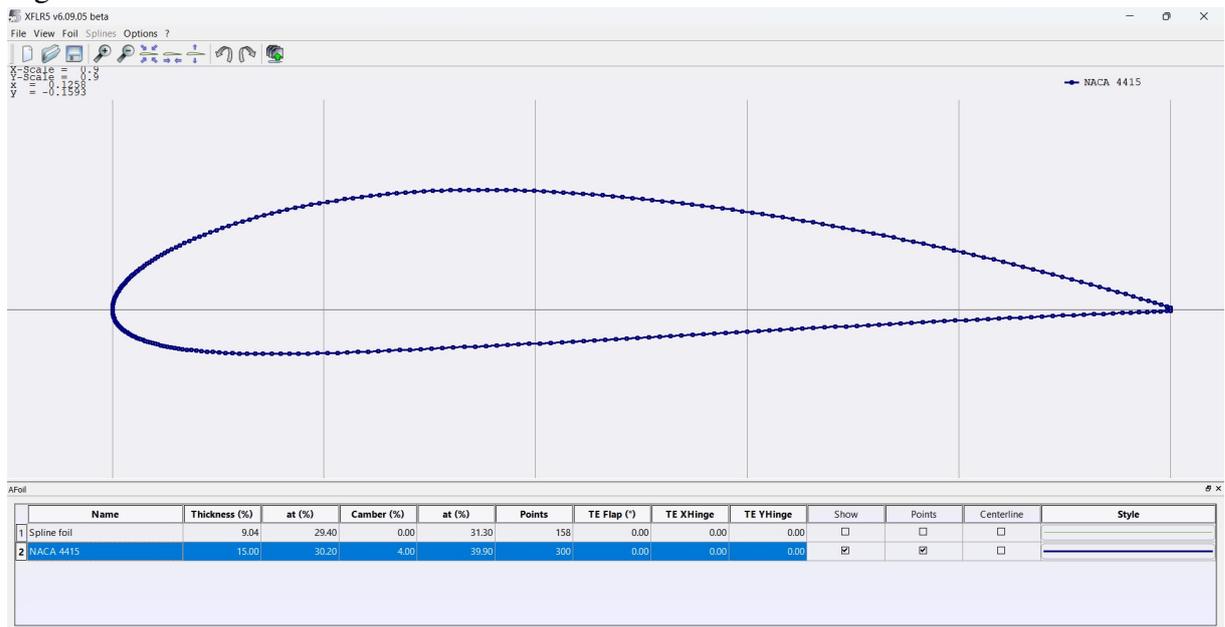
De acordo com o desenvolvedor do XFLR5®, Deperrois (2020), o solucionador diferencial do *software* possui uma formulação para a modelagem dos efeitos viscosos que são implementados aos resultados do método dos painéis gerados pelo XFOIL conforme esquematizado na Figura 26. A formulação dos efeitos viscosos ainda segundo Deperrois (2020), é baseada na obra de Cebeci e Cousteix (2005), onde este último define o *momentum* integral bidimensional de escoamentos laminares e turbulentos na camada limite conforme a Equação 3.1. O processo de solução do sistema de equações não lineares resultante é resolvido através do Método de Newton.

$$\frac{d\theta_b}{dx} + \left(\frac{\delta^*}{\theta_b} + 2\right) \frac{\theta_b}{V_b} \frac{dV_b}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (3.1)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V_b^2} \quad (3.2)$$

Onde θ_b representa a espessura do *momentum*, δ^* é a espessura de deslocamento, V_b representa a velocidade na borda da camada limite e C_f é o coeficiente de fricção.

Figura 27 – Perfil aerodinâmico NACA 4415 executado no XFLR5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 27 é mostrado o perfil NACA 4415 inicializado no *software* XFLR5® onde foi discretizado em 300 painéis para a modelagem numérica vigente. Drela (1989) destaca que a acurácia dos resultados e o tempo de solucionamento do algoritmo esta veiculada ao número de painéis atribuídos para a simulação, em que para um maior número de painéis utilizados os valores dos coeficientes aerodinâmicos apresentam um menor erro numérico com uma demanda maior de tempo computacional.

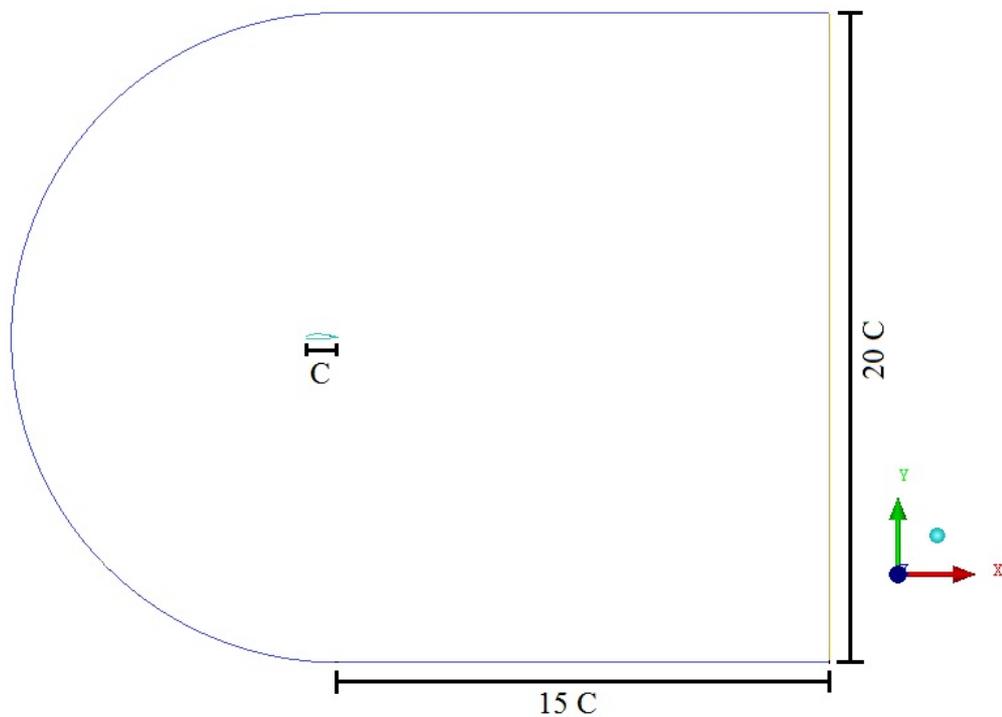
3.2 ANSYS Fluent

A segunda ferramenta computacional para a realização das simulações numéricas dos escoamentos em torno do aerofólio NACA 4415 no presente trabalho foi o ANSYS Fluent®. A metodologia neste software se dividiu em quatro etapas, onde a primeira etapa foi realizada a criação do domínio fluido computacional; a segunda etapa prosseguiu com o processo de discretização (malha) do volume de fluido; a terceira etapa sucedeu com a atribuição das condições de contorno e a quarta etapa consistiu das configurações do processamento da solução numérica.

3.2.1 Domínio Computacional

O domínio fluido computacional bidimensional foi desenvolvido no formato *C-mesh* como mostrado na Figura 28. Segundo Pozza (2021) este formato de domínio possui como vantagem a vetorização da velocidade na entrada, isto é, calcular as componentes x e y da velocidade por meio de relações trigonométricas para representar cada ângulo de ataque. Com isso, não se exige a construção de uma nova malha para cada ângulo de ataque, otimizando assim o tempo de trabalho computacional.

Figura 28 – Domínio computacional tipo *C-mesh* bidimensional. C é o comprimento de corda do aerofólio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

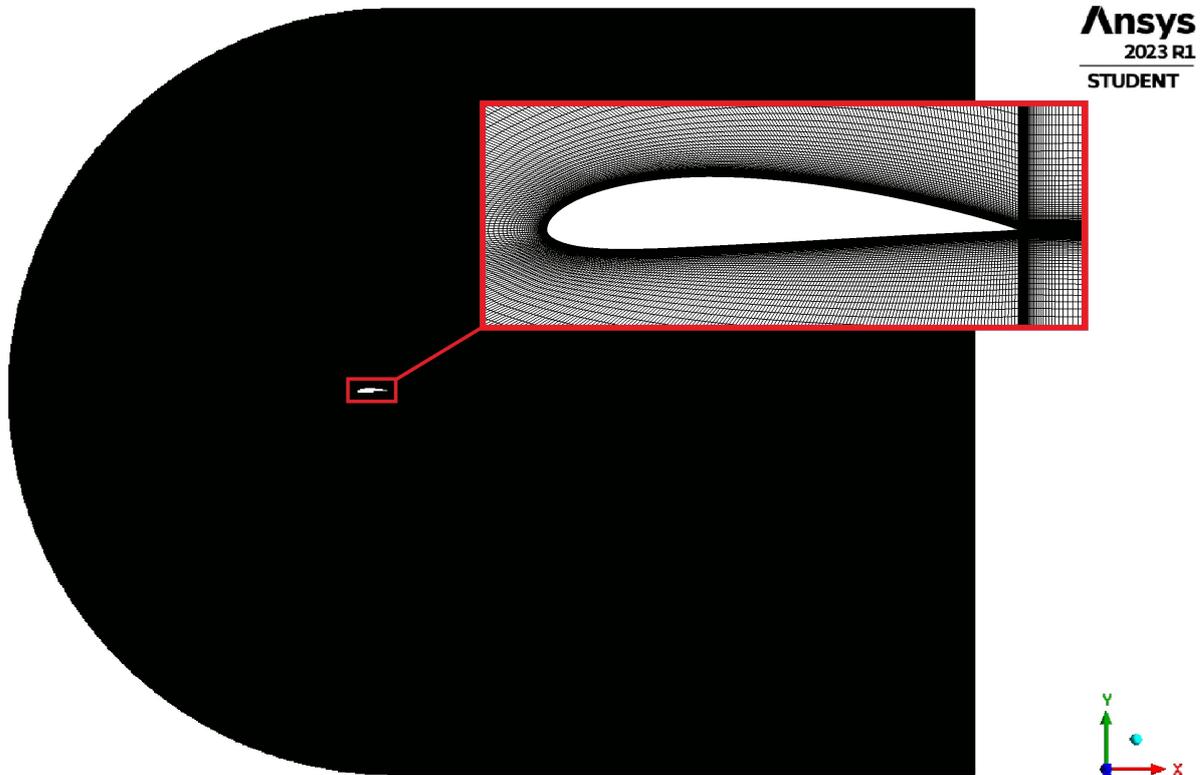
O dimensionamento adotado do volume de controle da Figura 28 foi de forma que não resultasse em um domínio muito aproximado ao perfil aerodinâmico para não interferir no escoamento e não muito distante para não gerar elementos de malha desnecessários onde demandaria mais tempo para a resolução numérica (ALMEIDA, 2017).

3.2.2 Geração de malha

Após o desenvolvimento do domínio computacional, foi realizada a geração da malha. Foi adotado o tipo de malha estruturada, que de acordo com Hirsch (2007) permite uma

melhor eficiência do ponto de vista CFD, em relação à precisão, tempo de CPU e requisitos de memória computacional. A malha gerada possui 508.268 elementos e 507.000 nós como mostrada na Figura 29.

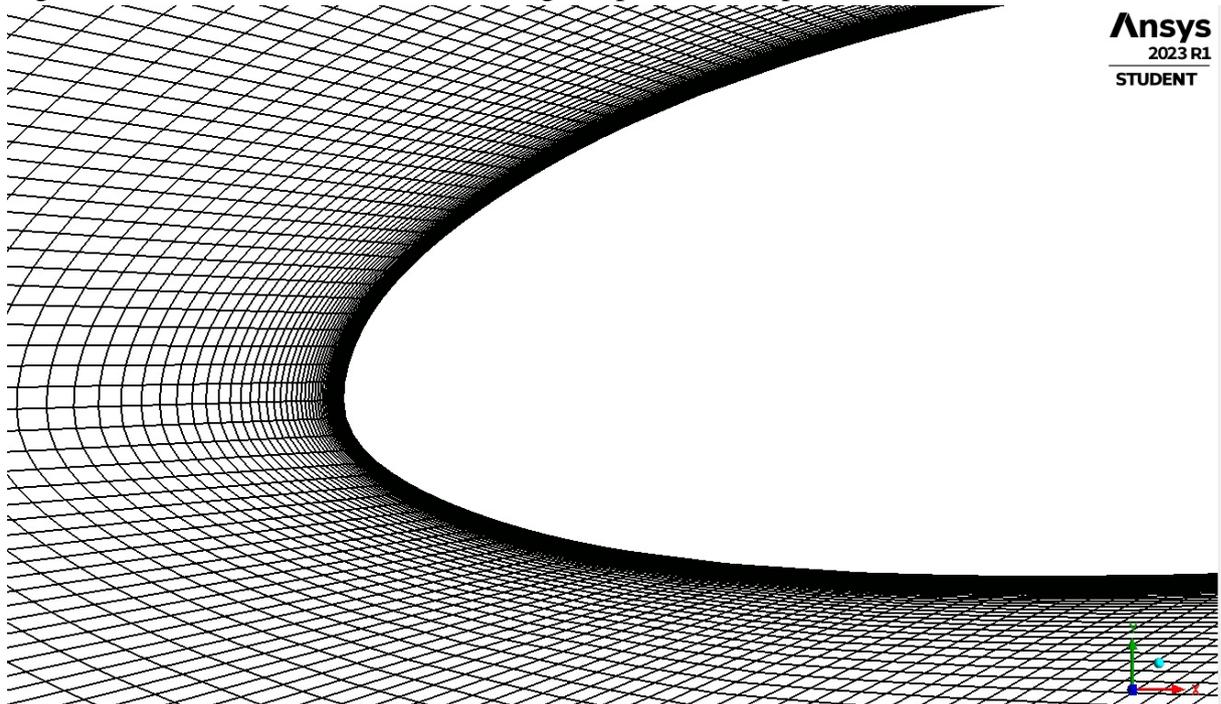
Figura 29 – Domínio computacional discretizado em malha estruturada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas proximidades do contorno do perfil aerodinâmico foi feito um refinamento da malha para modelar a camada limite e capturar os efeitos da viscosidade como mostrado na Figura 30. Dessa forma, foi estimada a espessura do primeiro elemento de malha adjacente ao aerofólio utilizando um espaçamento adimensional de parede, $y^+ = 1$ (MAVRIPLIS *et al.*, 2009), onde resultou em uma espessura de 0,000023 m. Esta estimativa foi feita por meio de uma calculadora disponível no site da *CFD Online* como exposto na Figura 31. A taxa de crescimento do espaçamento (*growth rate*) atribuída aos elementos normais à superfície do aerofólio foi de 1,1, que está de acordo com Mavriplis *et al.* (2009) onde cita que deve possuir um valor menor que 1,25.

Figura 30 – Refinamento de malha nas regiões próximas ao perfil aerodinâmico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Estimativa da espessura ideal do primeiro elemento de malha para a camada limite.

Y+ Wall Distance Estimation

Input

Freestream velocity:	<input type="text" value="14"/>	[m/s]
Density:	<input type="text" value="1.225"/>	[kg/m ³]
Dynamic viscosity:	<input type="text" value="1.83e-5"/>	[kg/ms]
Boundary layer length:	<input type="text" value="0.5"/>	[m]
Desired Y+ value:	<input type="text" value="1.0"/>	[]

Output

Reynolds number:	<input type="text" value="4.7e+5"/>	[]
Estimated wall distance:	<input type="text" value="2.3e-5"/>	[m]

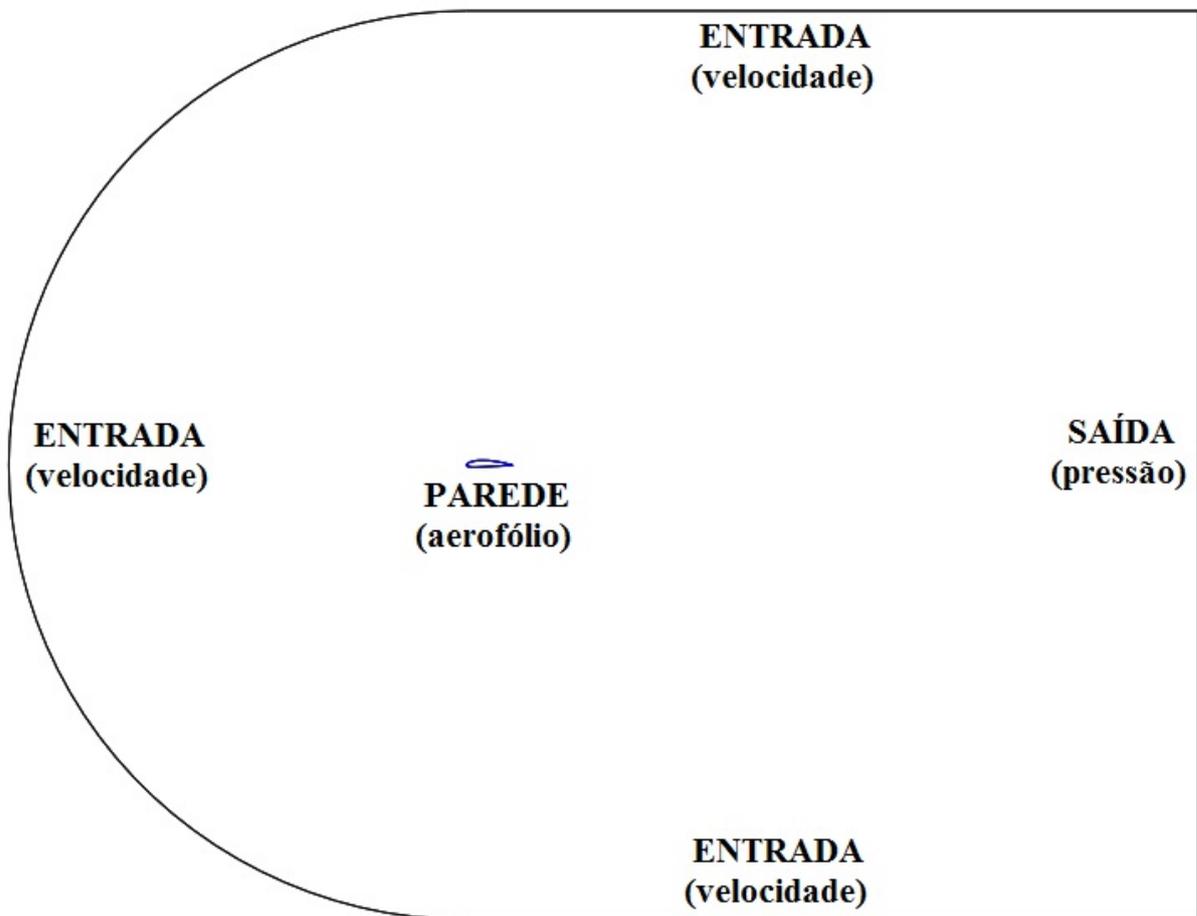
Fonte: CFD Online (2023)

3.2.3 Condições de contorno

As condições de contorno adotadas para a simulação foram: Entrada (*inlet*), Saída (*outlet*) e Parede (*wall*).

Na delimitação da Entrada foi atribuída uma velocidade de 14 m/s adentrando o sistema. Com o uso do formato *C-mesh* de domínio computacional, foi feita uma vetorização da velocidade, como já mencionado. Na fronteira Saída foi atribuída uma pressão de 0 Pa para a saída de fluxo do sistema, e para o aerofólio foi adotado a condição de Parede sem deslizamento (*no-slip*).

Figura 32 – Condições de contorno adotadas no domínio computacional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.4 Módulo de solução

No processamento de solução numérica do ANSYS Fluent foi utilizado um solucionador acoplado tipo pressão-velocidade (*pressure-velocity coupling*), sendo recomendável

para escoamentos incompressíveis. Na discretização espacial dos gradientes foi adotado o método *Least Squares Cell Based*, do qual assume-se que para os termos de difusão secundária e derivadas de velocidade a solução varia linearmente. Ainda, foram implementadas funções de segunda ordem para a pressão, *momentum* e viscosidade turbulenta.

Foi usado como critério de convergência, o valor de raiz quadrada média (*root mean square* ou RMS) de 10^{-6} para o resíduo numérico das equações governantes: equação da conservação de massa e equações da conservação do momento para os eixos x e y . Além disso foi adotado um critério de parada de 1000 iterações nos cálculos numéricos do programa para o caso de não convergir pelo resíduo numérico adotado.

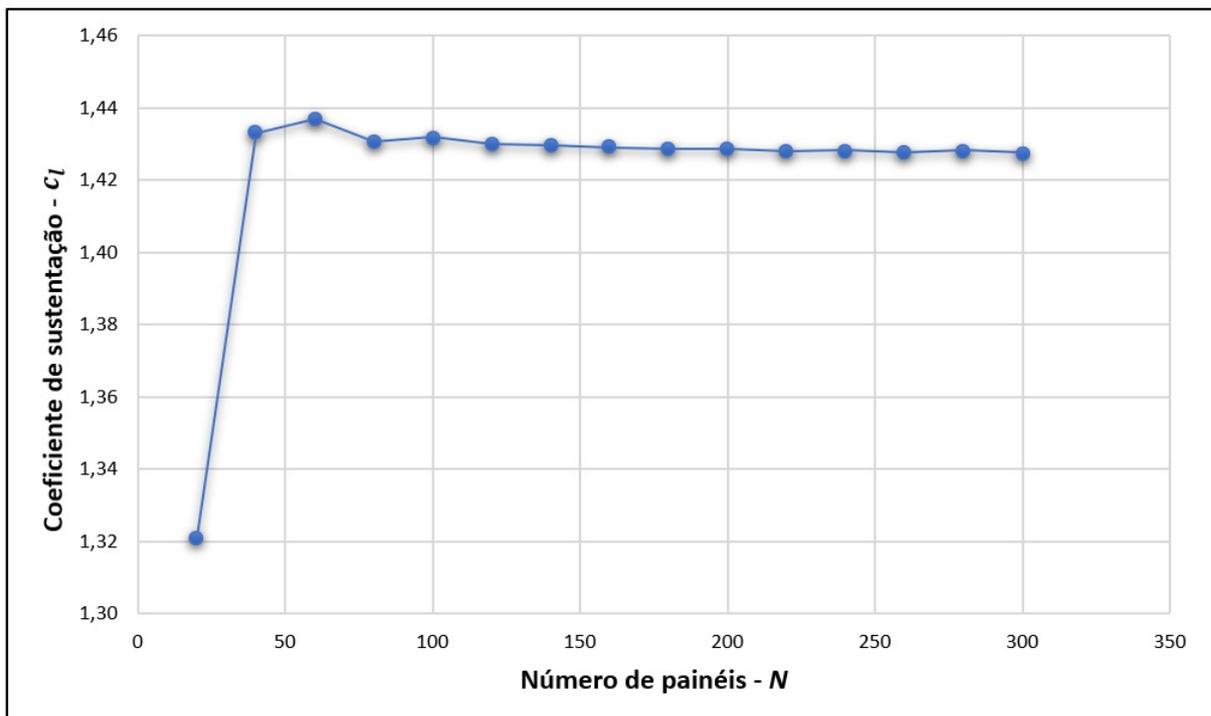
4 RESULTADOS

Após apresentada a metodologia do presente estudo, este capítulo procede com a exposição dos resultados e das análises acerca das simulações dos escoamentos bidimensionais em torno do perfil aerodinâmico NACA 4415 nos softwares XFLR5® e ANSYS Fluent®, onde cada algoritmo computacional abordou uma metodologia numérica distinta e alcançou resultados individuais.

4.1 Estudo de independência de malha nos coeficientes aerodinâmicos da discretização em painéis no XFLR5

Como já foi abordado anteriormente, o resultado do método dos painéis é muito influenciado pelo número de painéis (N). Diante disso, foi feito um levantamento de valores dos coeficientes aerodinâmicos para um ângulo de ataque fixo em função do número de painéis para investigar quaisquer aspectos da influência da quantidade de painéis. Os valores de N foram: 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160; 180; 200; 220; 240; 260; 280 e 300 painéis.

Figura 33 – Valor do coeficiente de sustentação (c_l) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de painéis (N).

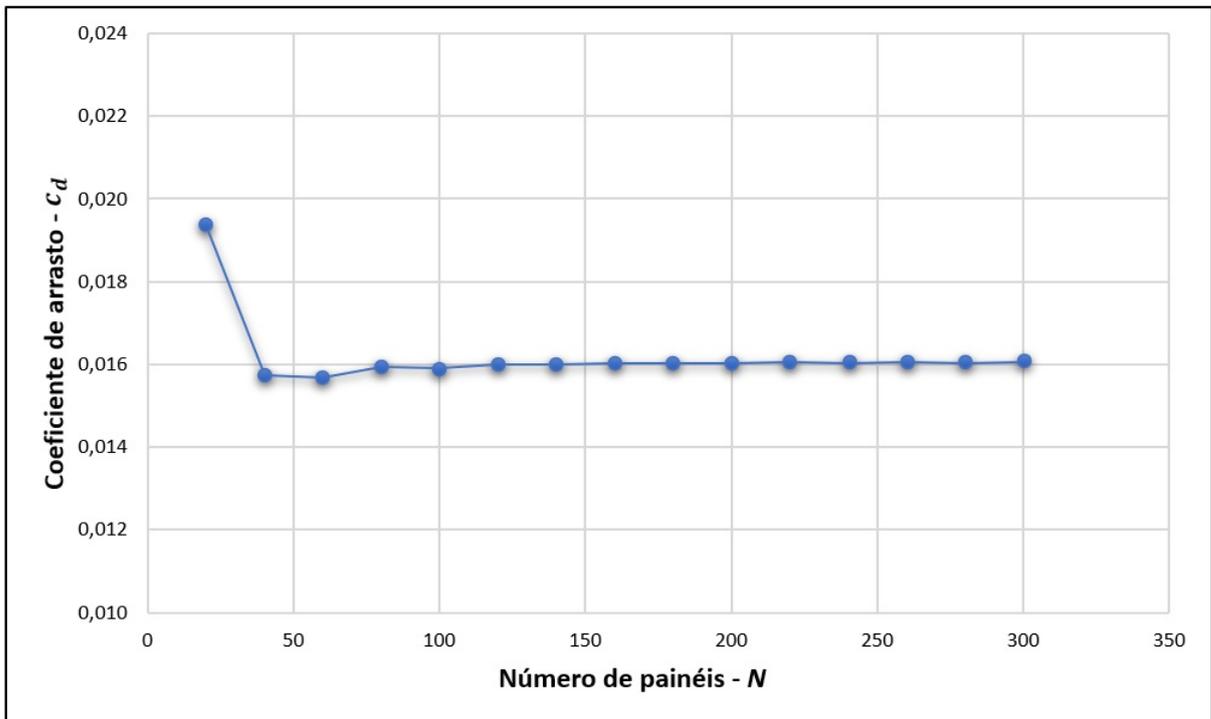


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 33 trata-se do coeficiente de sustentação em função do número de painéis

($c_l \times N$) onde pode-se perceber que houve uma grande variação de c_l entre 20 e 40 painéis. É possível observar também que o coeficiente de sustentação decai moderadamente a partir de 100 painéis até o número máximo de painéis analisado, que significa que os valores de c_l ainda variam consideravelmente até $N = 300$ painéis. Com isso, deve-se utilizar o número máximo de painéis disponível no XFLR5 ($N = 300$) para a obtenção do coeficiente de sustentação do NACA 4415 em escoamentos de baixo número de Reynolds.

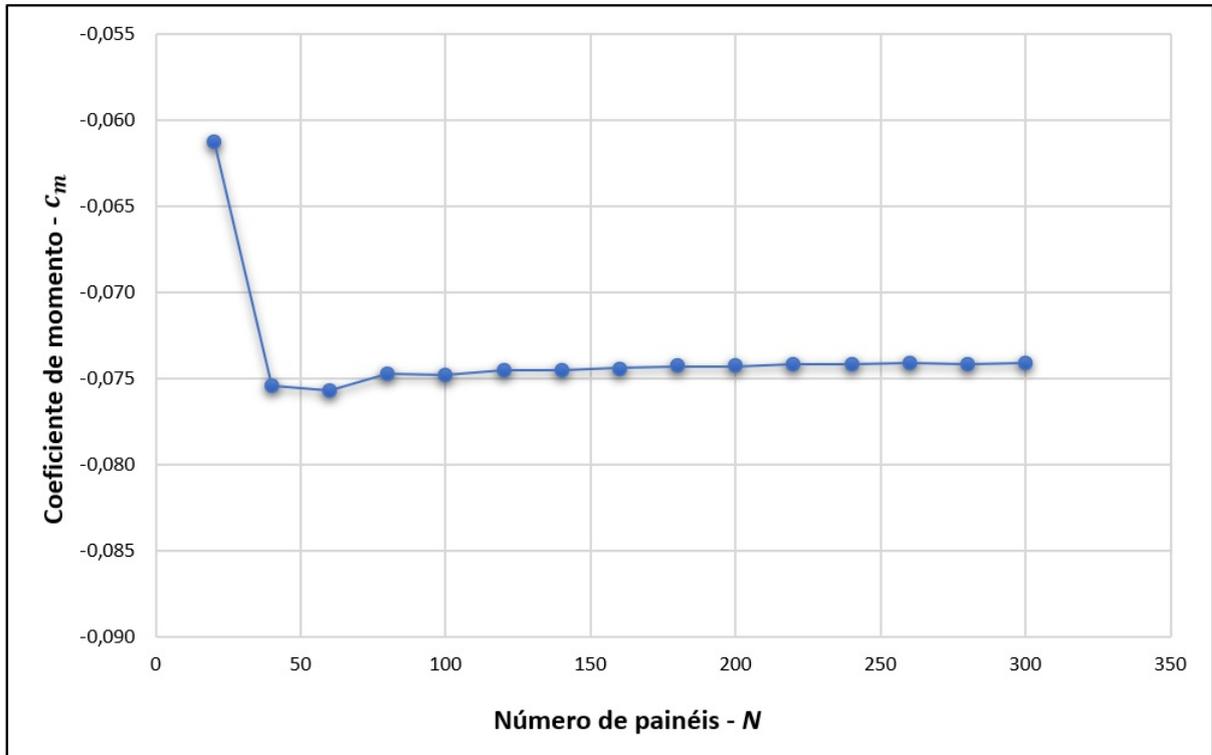
Figura 34 – Valor do coeficiente de arrasto (c_d) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de painéis (N).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 34 referente ao coeficiente de arrasto em função do número de painéis ($c_d \times N$), onde o valor do c_d permanece praticamente constante a partir de 120 painéis, o que representa uma independência do número de painéis a partir desse valor para o cálculo do coeficiente de arrasto do NACA 4415 no XFLR5 em escoamentos de baixo número de Reynolds.

Figura 35 – Valor do coeficiente de momento (c_m) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de painéis (N).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já na Figura 35 referente ao coeficiente de momento em função do número de painéis ($c_m \times N$) pode se notar que o c_m é constante a partir de 140 painéis, o que representa uma independência do valor do coeficiente de momento a partir desse número de painéis.

4.2 Estudo de independência de malha nos coeficientes aerodinâmicos da discretização em elementos no ANSYS Fluent

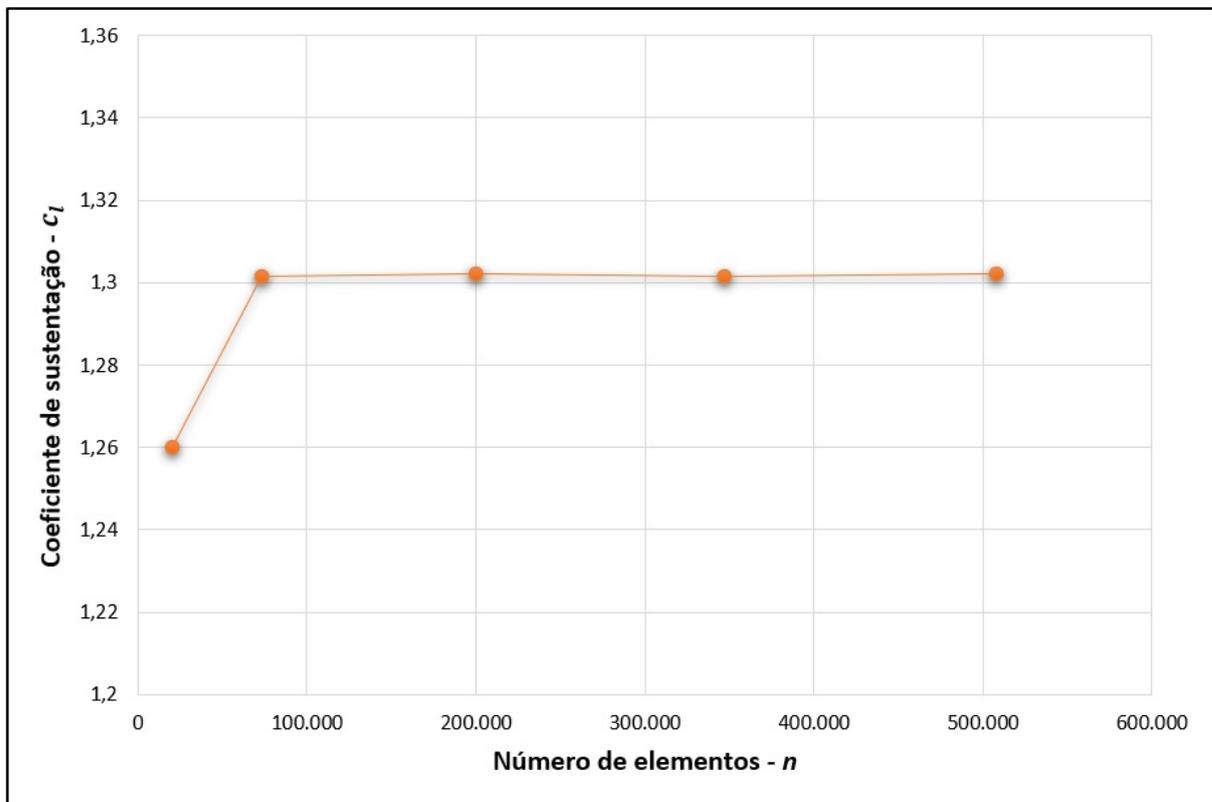
Assim como foi feito um levantamento de dados dos coeficientes aerodinâmicos com um α fixo para investigar a influência do número de painéis no XFLR5 também foi realizado um outro levantamento de valores dos coeficientes aerodinâmicos com um α fixo por meio do ANSYS Fluent para analisar a influência do número de elementos de malha (n). Foram construídas cinco malhas com números de elementos diferentes como pode ser visto na Tabela 3, onde a Malha 1 foi a malha principal do presente trabalho utilizada na avaliação dos coeficientes aerodinâmicos. Nesta análise, foram adotadas as mesmas condições físicas e configurações de solução citadas na metodologia.

Tabela 3 – Números de elementos das cinco malhas construídas com respectivos valores dos coeficientes aerodinâmicos para $\alpha = 10^\circ$.

Malha	Número de elementos (n)	coef. de sustentação (c_l)	coef. de arrasto (c_d)	coef. de momento (c_m)
1	508.268	1,3020	0,02709	-0,06133
2	347.348	1,3015	0,02711	-0,06122
3	199.628	1,3023	0,02708	-0,06137
4	73.288	1,3015	0,02727	-0,06154
5	20.428	1,2601	0,03099	-0,05860

Fonte: Elaborada pelo autor.

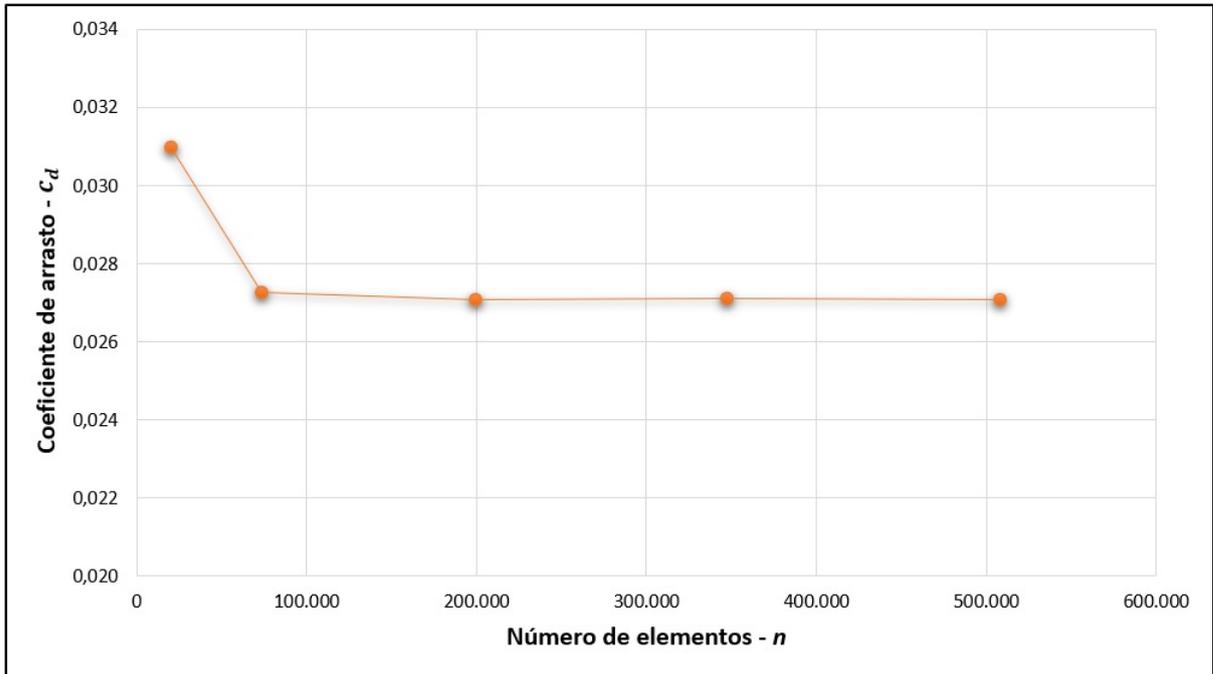
Figura 36 – Valor do coeficiente de sustentação (c_l) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de elementos de malha (n).



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 36 trata-se dos valores do coeficiente de sustentação para o ângulo de ataque de 10° em função do número de elementos de malha. No gráfico, pode-se observar que a maior variação do valor de c_l ocorreu para menos de 100.000 elementos (desvio padrão, $\sigma = 0,0207$) e que, a partir desse número de elementos a variação de c_l foi menor, com σ igual a 0,0003311.

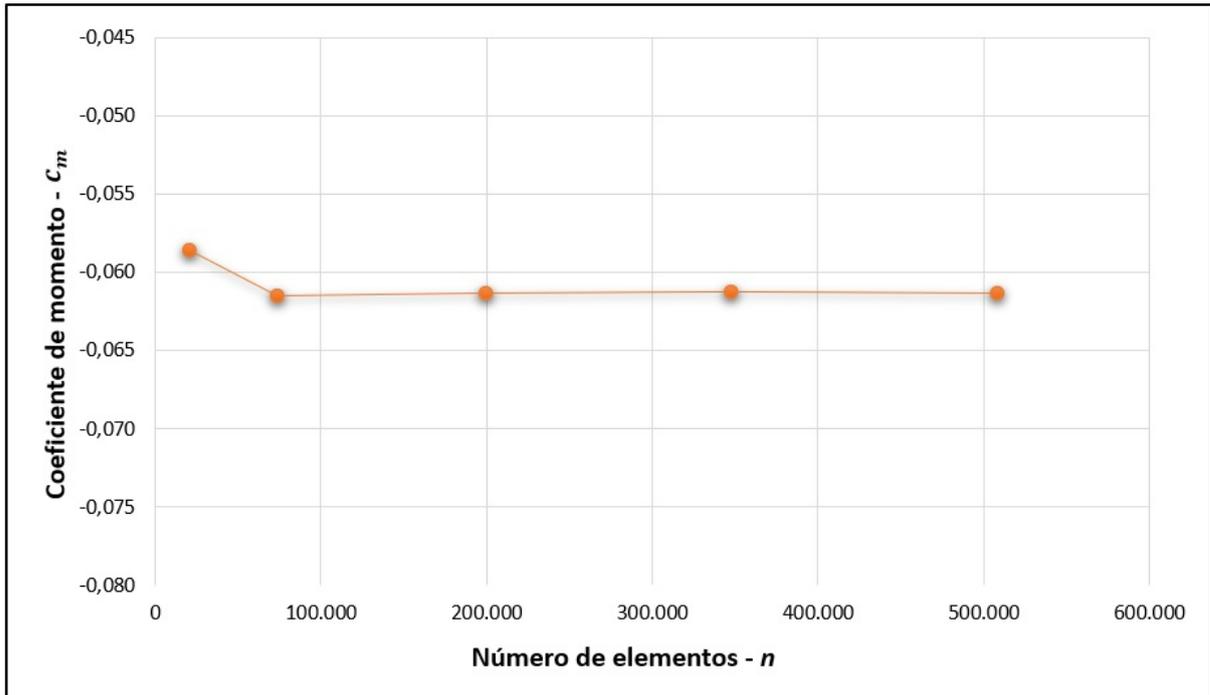
Figura 37 – Valor do coeficiente de arrasto (c_d) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de elementos de malha (n).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Prosseguindo, na Figura 37 consta o gráfico do coeficiente de arrasto para o ângulo de ataque de 10° em função do número de elementos de malha. Pode-se perceber que houve variações significativas no valor de c_d entre a Malha 5 e Malha 4 ($\sigma = 0,0018589$) e entre a Malha 4 e Malha 3 ($\sigma = 0,000094538$). Contudo, a partir da Malha 3 que possui aproximadamente 200.000 elementos, pode-se notar que a partir desse número de elementos ocorreu uma variação baixíssima no valor do coeficiente de arrasto ($\sigma = 0,0000101721$), sendo assim, um número de elementos suficiente para simulação do arrasto no NACA 4415 pelas condições de contorno e configurações adotadas.

Figura 38 – Valor do coeficiente de momento (c_m) para $\alpha = 10^\circ$ em função do número de elementos de malha (n).



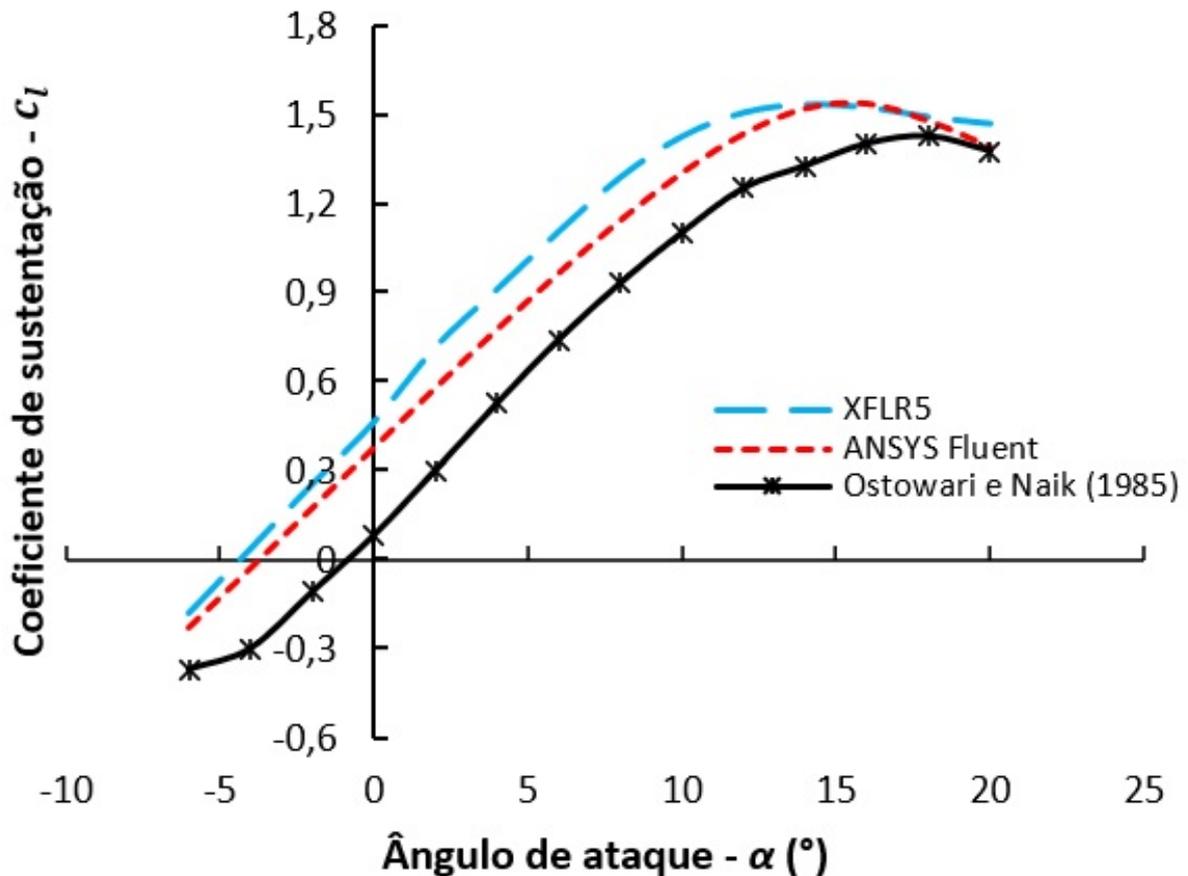
Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a Figura 38 representa o gráfico do coeficiente de momento para o ângulo de ataque de 10° em função do número de elementos de malha. No gráfico, é visível que a maior variação de c_m ocorreu para menos de 100.000 elementos de malha ($\sigma = 0,001472$) e que a partir desse número de elementos a variação nos valores de c_m foram menores, com desvio padrão igual a 0,0001158.

4.3 Avaliação dos coeficientes aerodinâmicos alcançados pelo ANSYS Fluent e pelo XFLR5

Os coeficientes aerodinâmicos obtidos em função dos ângulos de ataque foram comparados com os dados experimentais de túnel de vento de Ostowari e Naik (1985) com número de Reynolds de 500.000 para servir de validação aos resultados da metodologia adotada do presente trabalho.

Figura 39 – Dados do coeficiente de sustentação (c_l) em função do ângulo de ataque (α).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 39 é apresentado os valores dos coeficientes de sustentação em função dos ângulos de ataque. Inicialmente, pode se notar que as três curvas referentes aos dois *softwares* desenvolvidas pelo autor e os dados de Ostowari e Naik (1985) apresentam uma correlação e uma semelhança por caracterizar uma região linear entre os ângulos -4° e 10° . Contudo, importante observar também que o $c_{l,max}$ e o ângulo de estol (α_{estol}) de cada curva possuem valores diferentes. A Tabela 4 apresenta especificamente os valores de $c_{l,max}$ e α_{estol} de cada curva, bem como, os valores de $\alpha_{l=0}$ também.

Tabela 4 – Coeficientes de sustentação máximos, ângulos de estol e ângulos de sustentação zero.

	XFLR5	ANSYS Fluent	Ostowari e Naik (1985)
$c_{l,max}$	1,5357	1,5350	1,4000
α_{estol}	14°	16°	18°
$\alpha_{l=0}$	$-4,3^\circ$	$-3,7^\circ$	$-0,8^\circ$

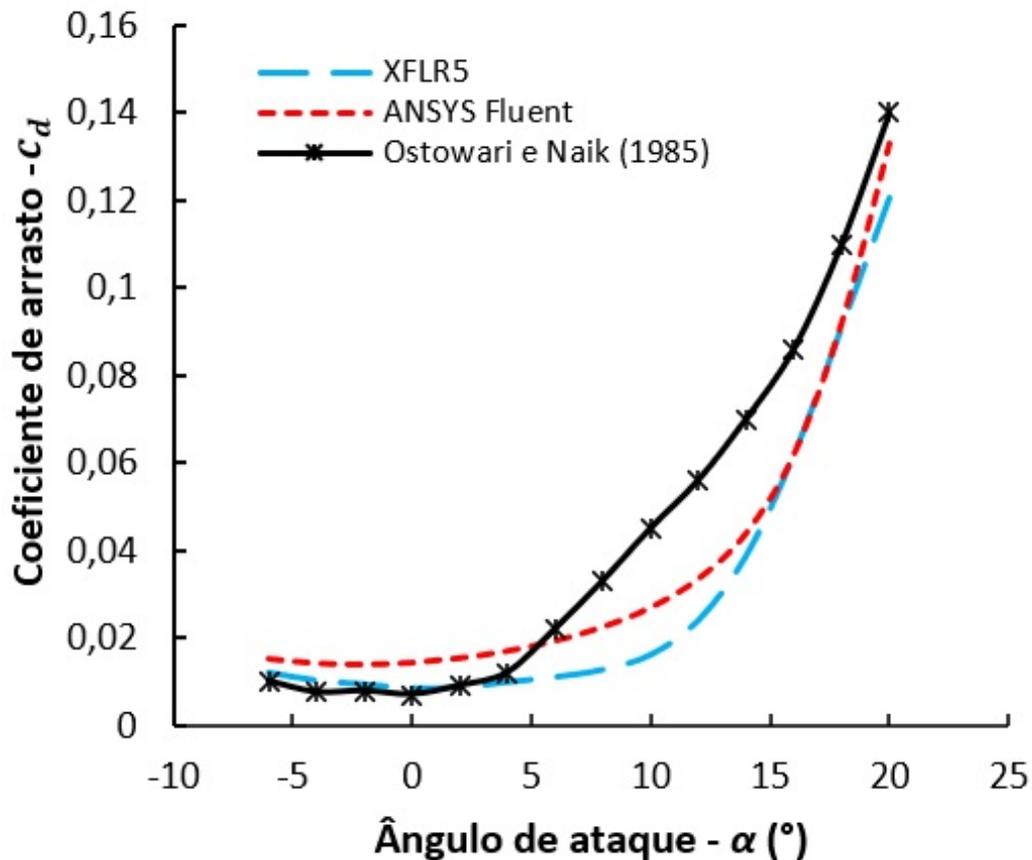
Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo a Tabela 4 o estol nos valores experimentais de Ostowari e Naik (1985)

ocorre no ângulo 18° enquanto que no XFLR5 ocorre para o ângulo de 14° , sendo assim uma diferença de 4 graus, que é um desvio um tanto significativo pois equivale a um erro de 22,22% para o ângulo real onde ocorre a perda da sustentação do perfil. Já no ANSYS Fluent este erro possui valor menor, sendo de 11,11%.

O próximo coeficiente aerodinâmico avaliado do NACA 4415 foi coeficiente de arrasto de acordo com o gráfico $c_d \times \alpha$ como pode ser visto na Figura 40.

Figura 40 – Dados do coeficiente de arrasto (c_d) em função do ângulo de ataque (α).

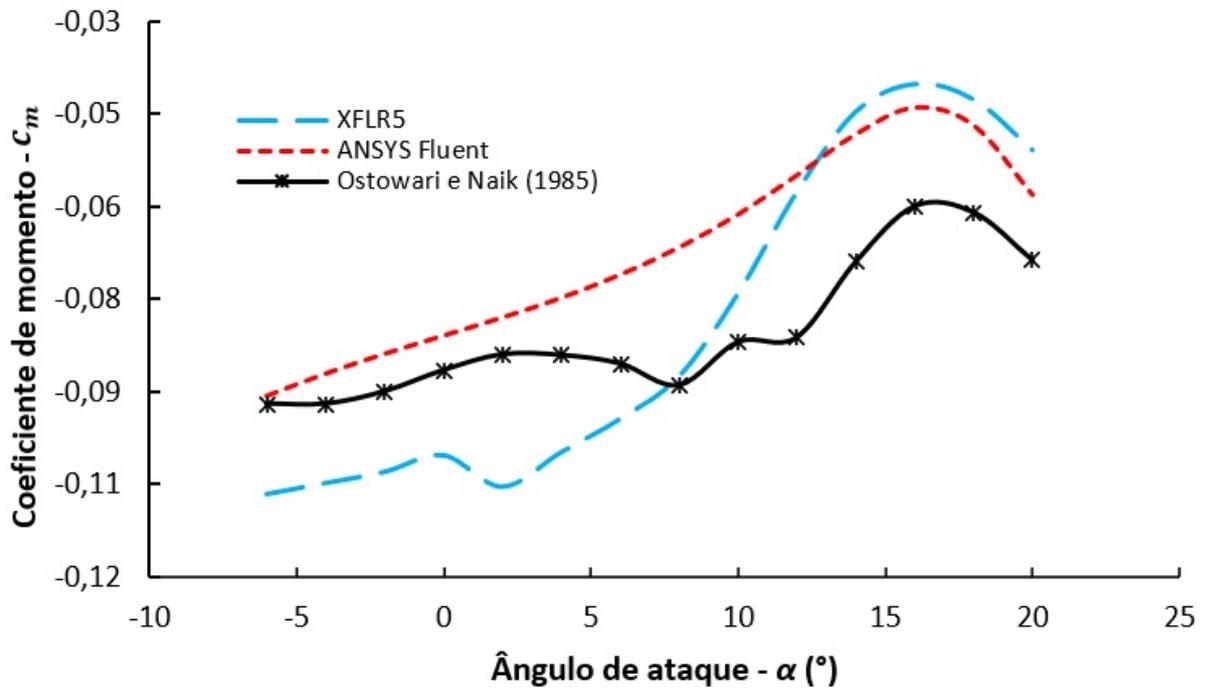


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 40 as curvas de $c_d \times \alpha$ apresentam uma tendência e uma moderada semelhança. Pode-se notar que a curva do XFLR5 teve maior eficiência quanto a proximidade aos dados de Ostowari e Naik (1985) entre os ângulos -6° e 4° . Entretanto, na curva do XFLR5 um aumento considerável do coeficiente de arrasto se iniciou no ângulo de 10° e sucedeu um comportamento exponencial a partir de seu ângulo de estol (14°) enquanto que na curva de Ostowari e Naik (1985) o aumento significativo se originou no ângulo de 5° onde cresceu quase linearmente até 15° e aumentou de forma exponencial a partir deste ângulo. Já na curva do ANSYS Fluent o aumento considerável do coeficiente de arrasto se iniciou no ângulo de 10°

onde aumentou exponencialmente a partir do ângulo de 15° , próximo ao seu ângulo de estol, 16° . O aumento expoente do coeficiente de arrasto no ângulo de estol observado no gráfico $c_d \times \alpha$ está de acordo com o conhecimento teórico.

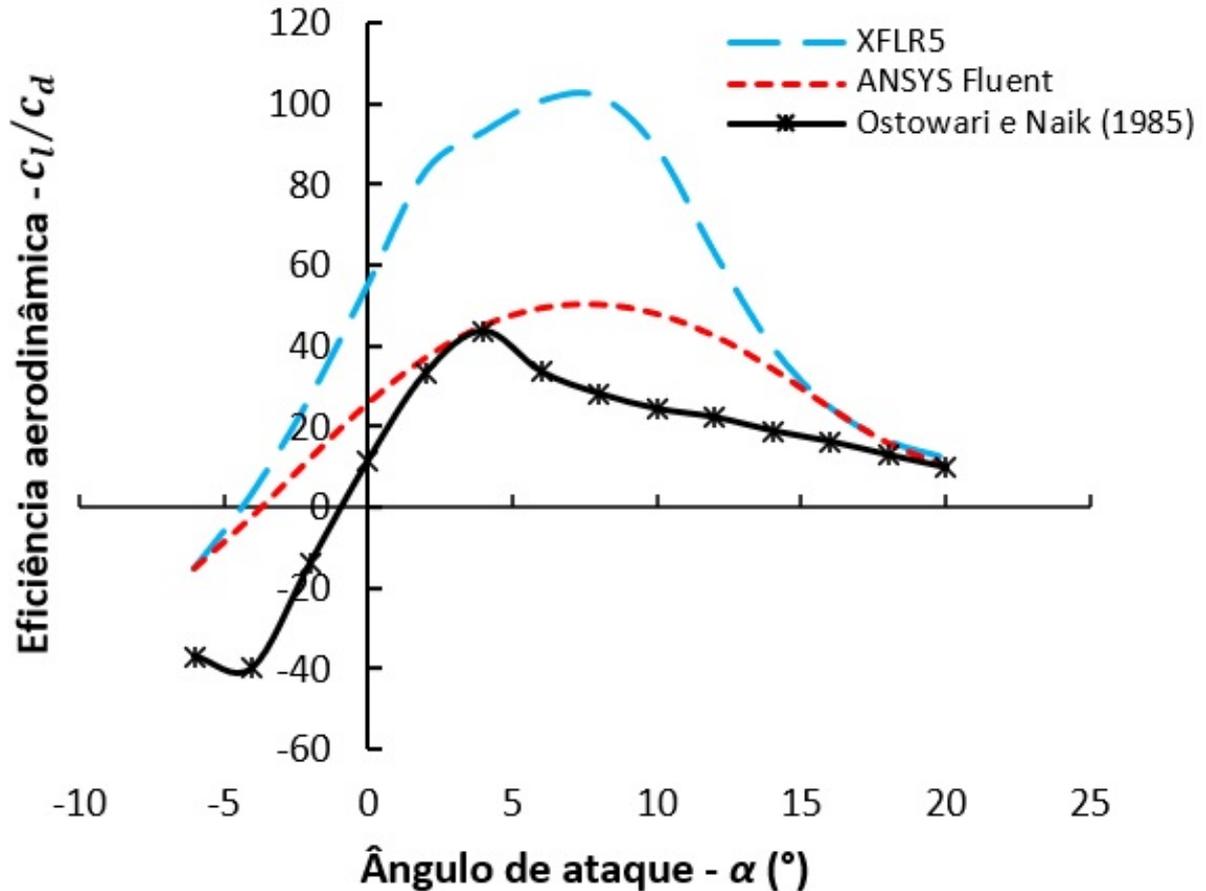
Figura 41 – Dados do coeficiente de momento (c_m) em função do ângulo de ataque (α).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 41 é apresentado o gráfico do coeficiente de momento (em $\frac{1}{4}$ de corda, no centro aerodinâmico) em função do ângulo de ataque. Como pode ser visto, as três curvas possuem uma tendência. As curvas do XFLR5 e ANSYS Fluent apresentaram uma dispersão aos dados de Ostowari e Naik (1985), porém na curva do ANSYS Fluent a dispersão foi menor comparada com a dispersão da curva do XFLR5, o que representa que, os *softwares* simularam o comportamento físico mas a precisão não foi suficiente para uma melhor aproximação aos dados de Ostowari e Naik (1985), principalmente em relação ao XFLR5.

Figura 42 – Dados da eficiência aerodinâmica (c_l/c_d) em função do ângulo de ataque (α).



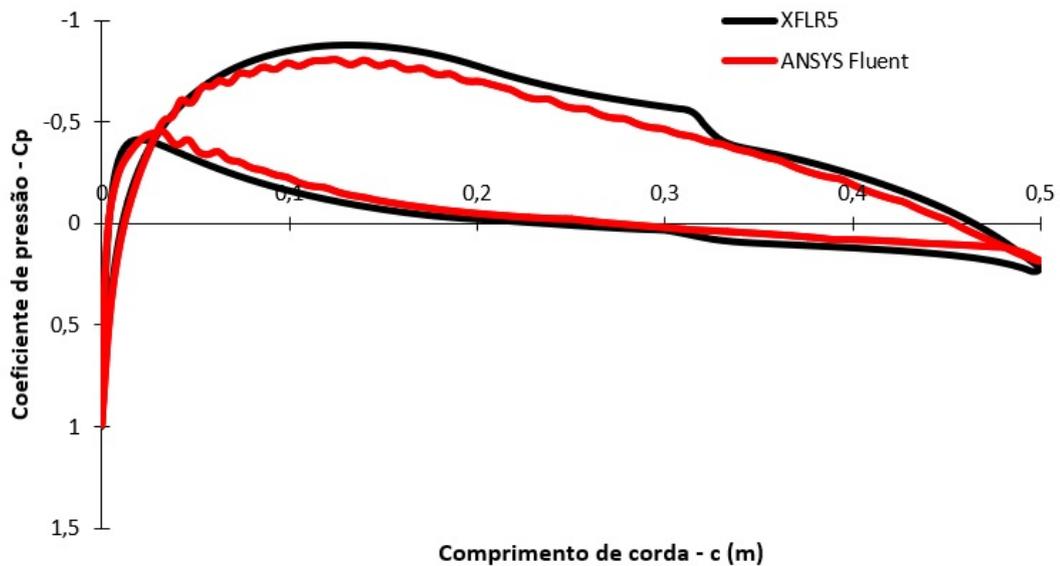
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 42 consiste do gráfico da eficiência aerodinâmica em função do ângulo de ataque para o NACA 4415. Conforme já abordado a curva da eficiência aerodinâmica leva em conta os parâmetros c_l e c_d , logo, representa a magnitude e o erro existente nos valores desses parâmetros. Pode-se observar que a curva do ANSYS Fluent obteve maior aproximação aos valores de Ostowari e Naik (1985), isto significa que em termos de c_l e c_d o ANSYS Fluent foi mais eficiente apresentando um menor erro numérico comparado ao XFLR5.

4.4 Distribuições de pressão e velocidade

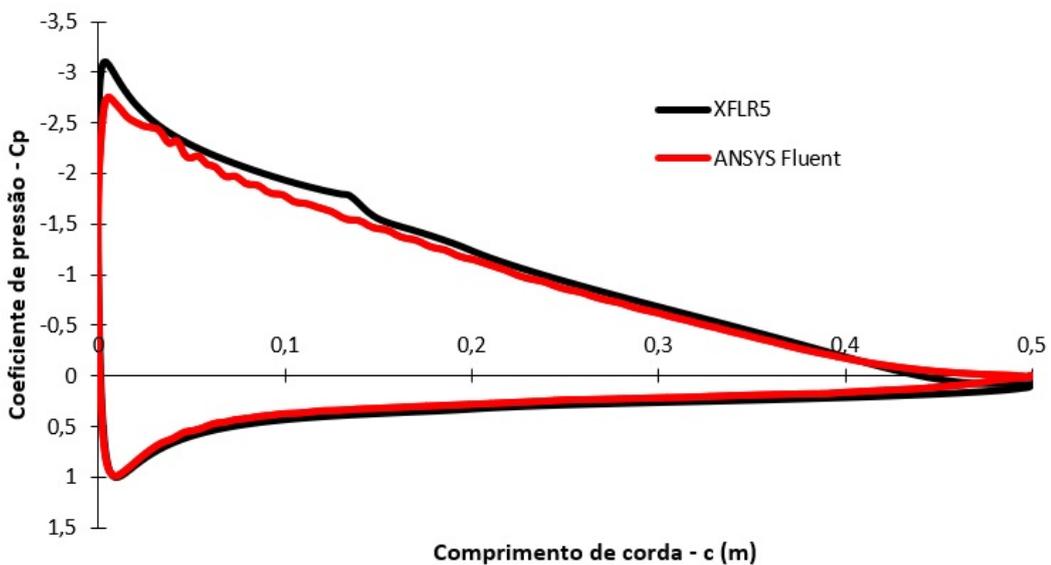
Através dos programas computacionais empregados também foi concebido as distribuição do coeficiente de pressão ao longo da superfície do perfil aerodinâmico. Além também de ter sido viável capturar os campos de gradientes de pressão e de velocidade ao redor do aerofólio.

Figura 43 – Distribuições do coeficiente de pressão (C_p) no perfil NACA 4415 para $\alpha = 0^\circ$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

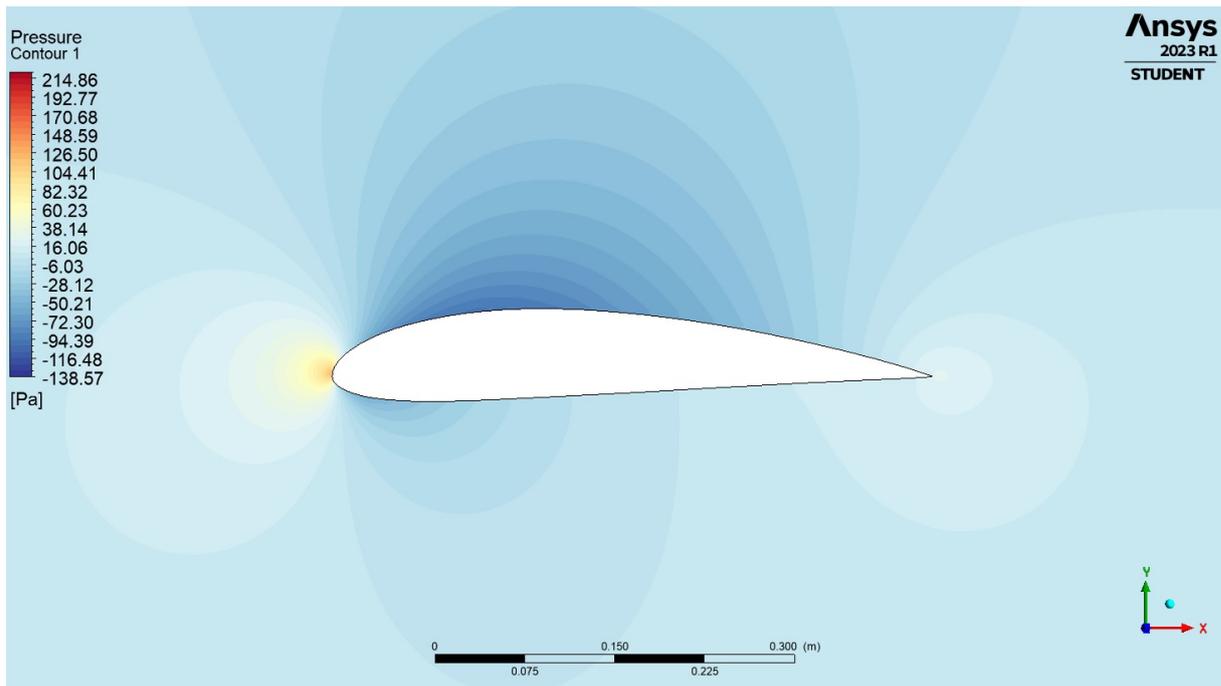
Figura 44 – Distribuições do coeficiente de pressão (C_p) no perfil NACA 4415 para $\alpha = 10^\circ$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 43 e 44 representam as distribuições de pressão ao longo do perfil NACA 4415 gerados para os ângulos de ataque 0° e 10° respectivamente, nos dois *softwares*. Em ambas as Figuras pode-se perceber que as curvas de cada programa são semelhantes e com valores de C_p próximos umas das outras. Os dados de distribuição de pressão de Ostowari e Naik (1985) não foram disponíveis ou calculados pelos mesmos.

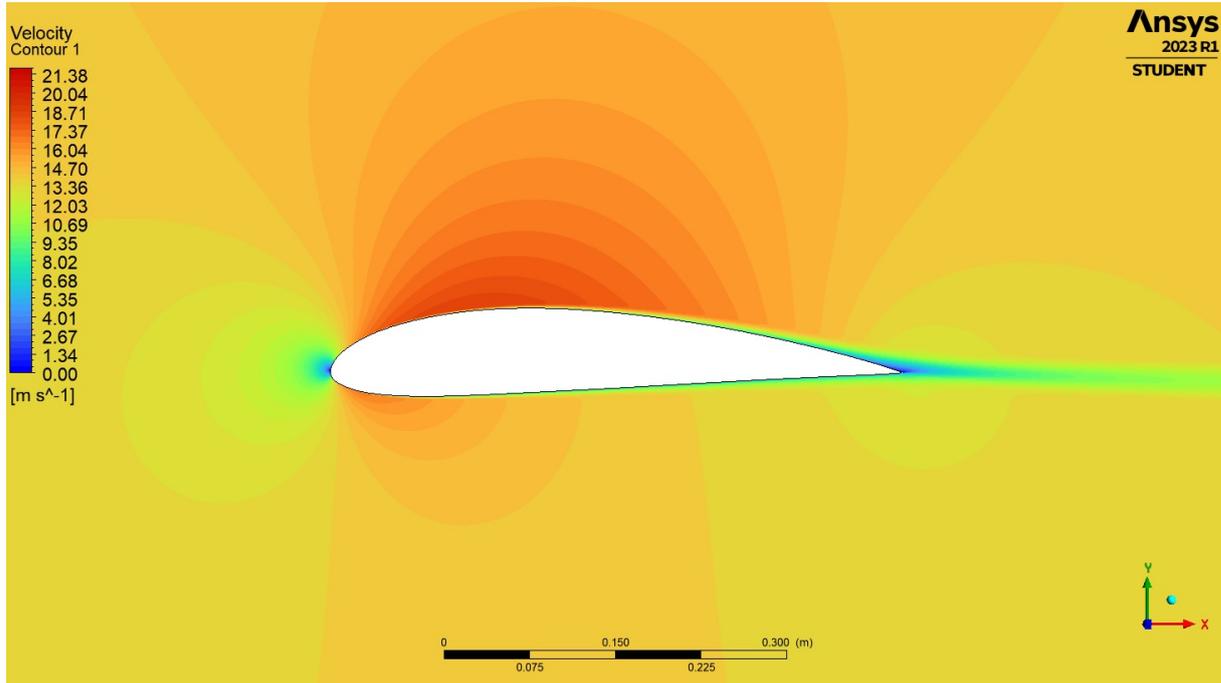
Figura 45 – Distribuição de gradientes de pressão ao redor do perfil NACA 4415 para $\alpha = 0^\circ$ através do ANSYS Fluent.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No ANSYS Fluent também foi desenvolvido as distribuições de pressão e velocidade ao redor do aerofólio NACA 4415. Na Figura 45 é apresentado o campo de pressão onde pode ser constatado que o gradiente de pressão no extradorso possui valores menores do que no intradorso do perfil aerodinâmico com arqueamento positivo. Diante disso ainda, na Figura 46 pode ser visto uma região de maior gradiente de velocidade no extradorso em relação ao gradiente de velocidade no intradorso do perfil, que é esperado, já que as pressões estáticas e dinâmicas se conservam de acordo com a Equação de Bernoulli.

Figura 46 – Distribuição de gradientes de velocidade nos contornos do perfil NACA 4415 para $\alpha = 0^\circ$ através do ANSYS Fluent.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 46 pode-se notar um ponto de estagnação no bordo de ataque, que além de baixos valores de velocidade também possui altos valores de pressão conforme na Figura 45, e que também está de acordo com o conhecimento teórico. E também é possível observar no bordo de fuga a esteira viscosa escoando com baixos gradientes de velocidades.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho foram obtidos e analisados os coeficiente aerodinâmicos, a eficiência aerodinâmica e as distribuições de pressão ao longo do aerofólio NACA 4415 para escoamentos incompressíveis viscosos de baixo número de Reynolds com valor de 470.000 em dois programas computacionais com métodos numéricos distintos, com um dos programas utilizando modelo de turbulência de Spalart-Allmaras. Este trabalho teve como motivação a necessidade de um estudo aerodinâmico detalhado de um perfil para servir no projeto aerodinâmico de uma asa ou de uma empenagem horizontal para a competição da SAE BRASIL AeroDesign. E diante do trabalho efetuado, pode-se concluir que os objetivos propostos foram alcançados.

Foi comprovado que o valor do coeficiente de sustentação e do coeficiente de arrasto aumentam conforme o aumento do ângulo de ataque até o ângulo de estol. Também foi comprovado que a partir do ângulo de estol a sustentação decai e o arrasto aumenta mais ainda, isso porque há a separação do escoamento na superfície do perfil, fenômeno físico este que foi capturado de forma satisfatória pela simulação dos *softwares*.

Na análise de influência do número de painéis nos coeficientes aerodinâmicos do NACA 4415 foi observado que a partir de $N = 120$ painéis a dispersão nos valores de c_d e c_m com o aumento do número de painéis foram mínimas e que para o c_l houve um decaimento significativo até 300 painéis, número máximo do *software*, sendo assim, o número de painéis recomendável para a obtenção dos três coeficientes pelo Método dos Painéis no XFLR5 com as condições físicas adotadas no presente trabalho. Já na mesma análise de influência, só que para o número de elementos de malha através do ANSYS Fluent foi notado que a menor dispersão nos valores dos três coeficientes ocorre a partir de 200.000 elementos, sendo dessa forma um número de elementos mínimo recomendável, segundo o modelo de turbulência, as condições de contorno, o tipo de malha e as configurações de malha e de solução adotadas.

Foi observado que, de forma geral, o programa ANSYS Fluent obteve maior aproximação e logo, menor erro, aos dados de Ostowari e Naik (1985) para os três coeficientes aerodinâmicos no intervalo de ângulos de ataque de -6° a 20° . Porém, especificamente entre os ângulos -6° e 4° da curva do coeficiente de arrasto, o XFLR5 obteve uma aproximação maior aos dados experimentais de Ostowari e Naik (1985) do que a aproximação do ANSYS Fluent.

No gráfico da eficiência aerodinâmica a curva do ANSYS Fluent interceptou a curva dos autores Ostowari e Naik (1985) nos ângulos 3° a 4° , o que representa uma boa validação do perfil para a situação de decolagem de uma aeronave participante da competição da SAE

BRASIL AeroDesign, em que consiste de ângulos de ataque de até 5° para essa situação. Além disso, no ANSYS Fluent foi constatado que há uma esteira de fluxo viscoso deixando o bordo de fuga do perfil a medida que o mesmo se move. Com isso, é recomendado para o projeto da aeronave, não alocar a empenagem tão próxima e na mesma altura da traseira da asa, para evitar da empenagem escoar no fluxo viscoso altamente desordenado que sai da asa, onde pode comprometer o desempenho da empenagem ou de até mesmo o desempenho da aeronave.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para o propósito de gerar novas pesquisas acerca do que o presente estudo explanou, segue abaixo algumas sugestões de trabalhos futuros:

- a) investigar e comparar os resultados dos escoamentos de baixo número de Reynolds por outros modelos de turbulência da categoria RANS, como os que possuem dupla equação, ou de modelos de uma outra categoria e assim, analisar os aspectos de cada resultado;
- b) investigar a influência do emprego de dispositivos hipersustentadores, como *flap* ou *slot* no NACA 4415 para escoamentos de baixo número de Reynolds;
- c) desenvolver uma análise aerodinâmica 3D de uma determinada asa ou de uma determinada empenagem horizontal utilizando o aerofólio NACA 4415 submetida a escoamentos de baixo número de Reynolds e investigar aspectos como:
 - caracterização dos coeficientes aerodinâmicos;
 - formação e propagação de estol nas superfícies;
 - formação dos vórtices de ponta de asa e como eles influenciam no desempenho da aeronave.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, I. H.; DOENHOFF, A. E. von. **Theory of wing sections: including a summary of airfoil data**. New York: Dover Publications, 1959.
- Airfoil Tools. **Airfoil Plotter (NACA4415-il)**. 2023. Disponível em: <http://airfoiltools.com/plotter/index>. Acesso em: 14 de março de 2023.
- ALMEIDA, A. L. B. d. Análise da influência do gurney flap nos coeficientes aerodinâmicos do perfil alar selig 1223 utilizando método de volumes finitos. Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2017.
- ANDERSON, J. D. **A History of Aerodynamics: And its impact on flying machines**. New York: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge Aerospace Series). ISBN 0521454352,9780521454353.
- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of Aerodynamics**. 6. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2016. ISBN 978-1-259-12991-9.
- ANDERSSON, B.; ANDERSSON, R.; HÅKANSSON, L.; MORTENSEN, M.; SUDIYO, R.; WACHEM, B. V. **Computational Fluid Dynamics for Engineers**. New York: Cambridge university press, 2011. ISBN 978-1-107-01895-2.
- ANSYS. Ansys fluent tutorial guide 18. **ANSYS, Inc**, Canonsburg, PA, v. 15317, p. 1052, 2018.
- BARROS, H. L. de. **Santos Dumont e a Invenção do Avião**. [S. l.]: CBPF, 2006.
- BERTIN, J. J.; CUMMINGS, R. M. **Aerodynamics for engineers**. 5. ed. [S. l.]: Pearson Education, 2009. ISBN 978-0-13-235521-6.
- BILSTEIN, R. E. **Orders of Magnitude: A history of the naca and nasa, 1915-1990**. Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration, Office of Management, Scientific and Technical Information Division, 1989. v. 4406. (The NASA History Series, v. 4406).
- BLAZEK, J. **Computational Fluid Dynamics: Principles and applications**. 1. ed. Oxford: Elsevier, 2001. ISBN 0-08-043009-0.
- BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 2008. ISBN 978-85-7605-182-4.
- BUFFONI, S. Apostila de introdução aos métodos numéricos-parte i. **Universidade Federal Fluminense**, 2002.
- CEBECI, T. **An engineering approach to the calculation of aerodynamic flows**. [S. l.]: Springer, 1999.
- CEBECI, T.; COUSTEIX, J. Modeling and computation of boundary-layer flows. **Berlin, Germany: Springer**, Springer, 2005.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e aplicações**. Porto Alegre: AMGH, 2012. ISBN 978.85.8055-066-5.

CFD Online. **Y+ Wall Distance Estimation**. 2023. Disponível em: <https://www.cfdonline.com/Tools/yplus.php>. Acesso em: 14 de março de 2023.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw Hill Brasil, 2008. ISBN 978-85-86804-87-8.

CHAVES, D. d. A. e. C. M. Método de painel para o cálculo do escoamento potencial em torno de vários perfis sustentadores. **Instituto Superior Técnico: Universidade Técnica de Lisboa**, 2012.

DANTAS, A. F. d. M. Análise aerodinâmica de perfis de asa para veículos aéreos não tripulados usando o software xflr5. **Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia)–Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Rio Grande do Norte**, 2014.

DEPERROIS, A. **XFLR 5: Theoretical background**. 2020.

DRELA, M. Xfoil: An analysis and design system for low reynolds number airfoils. In: SPRINGER. **Low Reynolds Number Aerodynamics: Proceedings of the Conference Notre Dame, Indiana, USA, 5–7 June 1989**. [S. l.], 1989. p. 1–12.

DURBIN, P. A.; MEDIC, G. **Fluid dynamics with a computational perspective**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2007. v. 10.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M.; STREET, R. L. **Computational methods for fluid dynamics**. Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland: Springer, 2020. v. 4. ISBN 978-3-319-99693-6.

FORTUNA, A. d. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Flúidos: Conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Edusp, 2000. ISBN 85-314-0526-2.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8. ed. [S. l.]: LTC, 2014. ISBN 978-8521623021.

GALIOTTO, W. Simulação numérica e estudo aerodinâmico de hélices destinadas a uma aeronave radiocontrolada de asas fixas. **Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do curso de Engenharia Mecânica na Universidade de Caxias do Sul. Área de concentração: Fenômenos de Transporte**, 2017.

GUDMUNDSSON, S. **General aviation aircraft design: Applied Methods and Procedures**. [S. l.]: Butterworth-Heinemann, 2014.

HIRSCH, C. **Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of computational fluid dynamics**. 2. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007. v. 1. ISBN 978-0-7506-6594-0.

HOUGHTON, E.; CARPENTER, P.; COLLICOTT, S. H.; VALENTINE, D. T. **Aerodynamics for Engineering Students**. 6. ed. Waltham: Butterworth-Heinemann, 2013. ISBN 978-0-08-096632-8.

INMET. **INMET: Mapa de Estações**. 2023. Disponível em: <https://mapas.inmet.gov.br/#>. Acesso em: 27 de maio de 2023.

KÜCHEMANN, D. **The Aerodynamic Design of Aircraft**. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautic, 2012. (AIAA Education Series).

KUETHE, A. M.; CHOW, C.-Y. **Foundations of Aerodynamics: Bases of aerodynamic design**. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1997. ISBN 0-471-12919-4.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. ISBN 978-8521613961.

MAVRIPLIS, D. J.; VASSBERG, J. C.; TINOCO, E. N.; MANI, M.; BRODERSEN, O. P.; EISFELD, B.; WAHLS, R. A.; MORRISON, J. H.; ZICKUHR, T.; LEVY, D. *et al.* Grid quality and resolution issues from the drag prediction workshop series. **Journal of aircraft**, v. 46, n. 3, p. 935–950, 2009.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D.; OKIISHI, T. **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2004. ISBN 978-8521203438.

NAVARRO, G. R. Modelos de turbulencia introductorio. **Costa Rican Institute of Technology (ITCR)**, 2019.

OSTOWARI, C.; NAIK, D. **Post-stall wind tunnel data for NACA 44XX series airfoil sections**. [S. l.], 1985.

PANARAS, A. G. **Aerodynamic principles of flight vehicles**. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2012. ISBN 978-1-60086-916-7.

PEREIRA, L. H. G. **ANÁLISE DO DESEMPENHO DO MÉTODO DOS PAINÉIS DE ORDEM SUPERIOR PARA O CÁLCULO DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM AEROFÓLIO**. Tese (Doutorado) – Univerdade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

POZZA, J. C. Análise de um perfil aerodinâmico em condições de escoamento rarefeito aplicado para diferentes ângulos de ataque. 2021.

RAYMER, D. **Aircraft Design: A conceptual approach**. 2. ed. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1992. (AIAA Education Series). ISBN 0-930403-51-7.

REZENDE, A. L. T. Análise numérica da bolha de separação do escoamento turbulento sobre placa plana fina inclinada. **PUC**, Rio de Janeiro, 2009.

RODRIGUES, L. E. M. J. **Fundamentos da Engenharia Aeronáutica com aplicações ao projeto SAE-AeroDesign: Aerodinâmica e Desempenho**. Salto/SP: Edição do autor, 2014. v. 1. ISBN 978-85-918113-0-4.

ROSA, E. **Introdução ao Projeto Aeronáutico: uma contribuição à competição SAE AeroDesign**. Santa Catarina: UFSC Centro Tecnológico, 2006.

SAE BRASIL. **SAE BRASIL Aerodesign**. 2023. Disponível em: <https://saebrasil.org.br/programas-estudantis/aero-design-sae-brasil/>. Acesso em: 29 de março de 2023.

SAYMA, A. **Computational Fluid Dynamics**. [S. l.]: Bookboon, 2009. ISBN 978-87-7681-430-4.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary-layer theory**. 9. ed. Berlin: Springer, 2016. ISBN 978-3-662-52917-1.

- SILVEIRA, R. A. da. Simulação numérica da formação de gelo na borda de ataque de perfis aerodinâmicos. Florianópolis, SC, 2001.
- SOUZA, H. A. F. de. **Fundamentos de Aeronáutica**. [S. l.]: Empresa Brasileira de Aeronáutica S. A., 1991.
- SPALART, P.; ALLMARAS, S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In: **30th aerospace sciences meeting and exhibit**. [S. l.: s. n.], 1992. p. 439.
- SUN, W.; XU, T.; HOU, Y.; MA, Z.; ZHANG, L. Numerical investigation of nitrogen condensation flow over airfoil in cryogenic wind tunnel. **Cryogenics**, Elsevier, v. 111, p. 103165, 2020.
- TORENBEEK, E.; WITTENBERG, H. **Flight Physics: Essentials of aeronautical disciplines and technology, with historical notes**. New York: Springer Science & Business Media, 2009. ISBN 978-1-4020-8664-9.
- VARGAS, L. A. T. de. Desenvolvimento e implementação de um procedimento numérico para cálculo de conjuntos asa-empenagens de geometria complexa em regime de voo subsônico, assimétrico e não linear. **Universidade Federal de Minas Gerais**, 2006.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**. 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.
- WHITE, F. M. **Mecânica dos fluidos**. 6. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011. ISBN 978-85-8055-009-2.
- WILCOX, D. C. **Turbulence Modeling for CFD**. La Canada, California: DCW industries, Inc, 2006. v. 3. ISBN 978-1-928729-08-2.
- ZIKANOV, O. **Essential Computational Fluid Dynamics**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010. ISBN 978-0-470-42329-5.