



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MARCIO VAZ DA SILVA JUNIOR

**EMPACOTAMENTO DE FIOS MAGNÉTICOS EM CAVIDADES COM UM
SUBSTRATO NÃO COESIVO**

FORTALEZA

2023

MARCIO VAZ DA SILVA JUNIOR

EMPACOTAMENTO DE FIOS MAGNÉTICOS EM CAVIDADES COM UM SUBSTRATO
NÃO COESIVO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.
Coorientador: Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J1e Junior, Marcio Vaz da Silva.
EMPACOTAMENTO DE FIOS MAGNÉTICAS EM CAVIDADES COM UM SUBSTRATO NÃO
COESIVO / Marcio Vaz da Silva Junior. – 2023.
70 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

Coorientação: Prof. Dr. Michel Ferreira de Souza.

1. Esferas. 2. Magnetismo. 3. Empacotamento. 4. Substratos plásticos. I. Título.

CDD 530

MARCIO VAZ DA SILVA JUNIOR

EMPACOTAMENTO DE FIOS MAGNÉTICOS EM CAVIDADES COM UM SUBSTRATO
NÃO COESIVO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em: 11/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico meu trabalho as crianças e jovens que vivem e sofrem as consequências das guerras que elas não causaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe por seu incansável esforço e dedicação, muitas vezes ultrapassando limites, a fim de proporcionar-me as condições possíveis para priorizar a educação em minha vida. Sou imensamente grato também aos meus tios, tias e avó, cujo apoio financeiro e valiosos conselhos moldaram e continuam a moldar minha jornada, contribuindo significativamente para meu crescimento pessoal e ajudando-me a tornar uma pessoa melhor a cada dia.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ascânio Dias, pela dedicação em sempre verificar e avaliar os resultados construídos, estabelecendo uma direção para a pesquisa. Agradeço ainda, pela oportunidade de participar de um projeto que, embora seja simples do ponto de vista do alcance da Física contemporânea, é desafiador e pouco explorado.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Michel Ferreira, por sua dedicação e paciência, muitas vezes dedicando horas para nos auxiliar na resolução de problemas, seja em aspectos técnicos ou em conversas sobre as inquietações relacionadas às nossas aspirações para o futuro.

Agradeço ao Dr. Danilo Borges, o idealizador e construtor do experimento, por sua disponibilidade, mesmo a distância, de realizar várias reuniões para tirar dúvidas, apresentar dados e fornecer orientações sobre futuras abordagens.

Agradeço ao Prof. Dr. Nildo Loiola e ao Me. Francisco Márcio pela disponibilização dos instrumentos necessários para a realização dos experimentos, bem como pela devida orientação do seu uso..

Agradeço aos demais professores que se fizeram partícipes da minha jornada de conhecimento. A minha profunda e sincera admiração a todos.

Agradeço pelas amizades que desenvolvi ao longo da graduação, compartilhando momentos de tensão e alívio durante as disciplinas mais desafiadoras do curso. Em especial, expressei minha gratidão aos membros do grupo LSN, com os quais convivi intensamente nos últimos anos da minha formação acadêmica: Me. Igor Pereira, Me. Robert Bertoldo, Carlos Miguel, Jéssica Gomes, Thiago Sales, Alessandro Peixoto e Lucas Bezerra. A participação de cada um deles foi de fundamental importância para a construção desta pesquisa.

Agradeço também às inúmeras pessoas que passaram pela minha vida, aquelas que me fizeram rir, chorar e trocar juras de amor. No entanto, devido aos diferentes rumos que a vida nos reserva, algumas delas não estão presentes para testemunhar mais uma etapa sendo escrita.

"O homem não é nada além daquilo que a
educação faz dele." (Immanuel Kant)
(Sobre a pedagogia, 1999, p. 15.)

RESUMO

O empacotamento de partículas com propriedades magnéticas explora as interações entre si para a formação espontânea de cadeias ou estruturas ordenadas. Essa abordagem tem aplicações em sistemas auto responsivos e na organização de estruturas biológicas complexas. Este estudo investiga os padrões de empacotamento de partículas com propriedades magnéticas em uma cavidade circular bidimensional. Duas cadeias lineares formadas por esferas de neodímio, em formato de fios, foram injetadas diametralmente opostas em uma célula de Hele-Shaw contendo um substrato não interagente de esferas plásticas. A análise destaca a influência das configurações iniciais dos dipolos e da quantidade de substrato nas propriedades geométricas que emergem dos padrões formados no empacotamento. As distribuições de probabilidade das áreas dos laços seguem uma função log-normal, evidenciando uma região de entrelaçamento das curvas onde os vértices exibem probabilidades semelhantes, independente da quantidade de substrato. A relação entre a quantidade de laços e a fração de empacotamento revela uma área efetiva para a formação dos laços. A razão entre áreas e perímetros está em conformidade com modelos de empacotamento de fios metálicos. Durante o empacotamento dos fios magnéticos com substratos plásticos, observou-se diferenças qualitativas nos arranjos. Abordando-as quantitativamente, foram analisadas a distribuição de probabilidade dos menores caminhos entre os nós e a função de distribuição radial. Essas análises indicam uma transição da distribuição de probabilidades relativas às distâncias entre as esferas, passando de unimodal para bimodal, além de identificar arranjos estruturais em redes quadradas e triangulares entre os primeiros vizinhos. A aplicação do método de otimização "BFGS" na minimização da energia do sistema possibilitou a identificação de configurações das orientações dos dipolos magnéticos, revelando a predominância de domínios antiferromagnéticos no regime "Loop" e domínios ferromagnéticos no regime "Espiral". A energia por unidade de esfera, no regime "Loop", situa-se abaixo da energia relativa para formação de uma corrente infinita de esferas magnéticas. A variação da energia relativa, com o referencial no primeiro contato entre os fios, comportando-se semelhante ao estabelecido por Philipse e Maas (2002) para a aproximação de cadeias de bactérias magnetostáticas. Este estudo contribui para uma compreensão mais abrangente das propriedades e do comportamento de partículas magnéticas em sistemas confinados.

Palavras-chave: Esferas; Magnetismo; Empacotamento; Substratos plásticos.

ABSTRACT

The packing of particles with magnetic properties explores interactions among them to spontaneously form chains or ordered structures. This approach finds applications in self-responsive systems and the organization of complex biological structures. This study investigates the packing patterns of particles with magnetic properties in a two-dimensional circular cavity. Two linear chains formed by neodymium spheres, shaped like wires, were injected diametrically opposite into a Hele-Shaw cell containing a non-interacting substrate of plastic spheres. The analysis highlights the influence of the initial dipole configurations and substrate quantity on the geometric properties emerging from the packing patterns. The probability distributions of loop areas follow a log-normal function, revealing a region where the curves intersect, and vertices exhibit similar probabilities regardless of the substrate quantity. The relationship between the number of loops and the packing fraction reveals an effective area for loop formation. The ratio of areas to perimeters is consistent with models of metallic wire packing. During the packing of magnetic wires with plastic substrates, qualitative differences in arrangements were observed. Addressing them quantitatively, the probability distribution of the shortest paths between nodes and the radial distribution function were analyzed. These analyses indicate a transition in the probability distribution relative to distances between spheres, shifting from unimodal to bimodal, and identifying structural arrangements in square and triangular networks among the first neighbors. The application of the "BFGS" optimization method in minimizing the system's energy allowed the identification of dipole orientation configurations, revealing the predominance of antiferromagnetic domains in the "Loop" regime and ferromagnetic domains in the "Spiral" regime. The energy per sphere in the "Loop" regime is below the relative energy for the formation of an infinite chain of magnetic spheres. The variation of relative energy, with reference to the first contact between the wires, behaves similarly to what was established by Philippe e Maas (2002) for the approximation of magnetostatic bacterial chains. This study contributes to a more comprehensive understanding of the properties and behavior of magnetic particles in confined systems.

Keywords: Spheres; Magnetism; Packing; Plastic substrates.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Empacotamento de fios de cobre em uma cavidade circular.(a) Diagrama da célula de injeção bidimensional usada nos experimentos; (b) Disposição final do fio de cobre confinado na cavidade na máxima taxa de empacotamento de $p_{max} \sim 15\%$ 19
- Figura 2 – Fases morfológicas de um fio metálico confinado.(a) Diagrama de fase morfológica da espiral, plástica e clássicas obtidas numericamente; (b) Escala do número de loops para as morfologias clássica e plásticas para diferentes tamanhos de sistemas; (c) Fios empacotados em cavidades circulares, obtidas experimentalmente e por simulações. 20
- Figura 3 – Empacotamento bidimensional de um colar de contas.(a) Imagem ilustrando a configuração de uma única camada de colar-de-contas com diâmetro $D = 1.80$ cm em uma cavidade quadrada. (b) fração de empacotamento bidimensional p como função da fração de empacotamento δ ao longo do colar-de-contas. 21
- Figura 4 – Empacotamento de cadeias de esferas magnéticas em uma cavidade circular.(a) Padrões obtidos injetando fios de esferas magnéticas de lados opostos, obtidos por simulação e experimentos; (b) Configuração de energia mais baixa de uma rede triangular para experimento injetando a cadeia através do centro da cavidade e simulação Monte Carlo de dipolos em uma rede triangular. 22
- Figura 5 – (a) Esquema para a síntese de nanopartículas de cobalto ferromagnético dipolar usando ligantes de poliestireno com funcionalidade final na termólise de $Co_2(CO)_8$; (b) a fabricação de sistemas de nanoatuação magnética semelhantes a “cílios e flagelos artificiais”. 24
- Figura 6 – (a) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão para campo claro e campo magnético holográfico de cadeias de partículas de Co (15 nm) de múltiplas nanopartículas de largura; (b) Simulação e diagramas esquemáticos ilustrando campos dipolares e interações entre nanopartículas esféricas. 25
- Figura 7 – (a) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão de automontagem de ϵ -Co orientada por evaporação de nanocristais; (b) Exemplos de simulações de secagem espacialmente heterogêneas, nas quais são introduzidos pequenos anéis e cadeias de partículas gradualmente e localmente. . . . 26

Figura 8 – (a) Tomografia crioeletrônica de cadeias de magnetossomos; (b) Representação esquemática de dois mecanismos concorrentes: força magnética empurrando para alinhar os momentos magnéticos do magnetossomo ao longo das linhas de campo parasitas das partículas vizinhas, e mecanismo baseado em lipídios/proteínas modelado como um força de recuperação elástica agindo perpendicularmente ao eixo da cadeia	27
Figura 9 – Foto da cavidade circular similar a célula de Helle-Shaw: (a) Mesa com as chapas de acrílico demarcadas com as cavidades removíveis; (b) Visão frontal do esboço da cavidade com a indicação dos raios possíveis para a cavidade.	29
Figura 10 – Aparato experimental: (a) Estrutura de acrílico e madeira para o empacotamento das esferas magnéticas; (b) câmera Nikon CoolPix L810; (c) Suporte (PRIWE) para a câmera; (d) Micro Motor DC com caixa de redução; (e) Fonte de alimentação e cabos de conexão.	30
Figura 11 – Condições iniciais da orientação dos dipolos magnéticos: (a) Orientação paralela; (b) Orientação antiparalela.	32
Figura 12 – Arranjos resultantes das condições iniciais da orientação dos dipolos magnéticos: (a), (b) e (c) Arranjos para a orientação paralela; (d), (e) e (f) Arranjos para a orientação antiparalela.	33
Figura 13 – Passos para estimar o centro de massa das esferas magnéticas: (a) imagem registrada do empacotamento final livre de substratos; (b) Estabelecer um limiar de luminosidade a ser detectada; (c) Conversão da imagem para preto e branco.	34
Figura 14 – Distribuição dos tamanhos dos raios detectados em função dos índices das esferas.	35
Figura 15 – (a) Detecção das seções transversais das esferas, quando aplicado as transformação de Hough a um setor do arranjo empacotado; (b) Grafo de um setor do arranjo empacotado; (c) Confeção do arranjo das esferas magnéticos, utilizando o diâmetro médio entre as esferas detectadas.	36
Figura 16 – Segmento do fio, formado por esferas magnéticas, na representação da matriz confeccionado pelo implementação computacional, utilizando a condição de contorno da seção circular com diâmetro médio.	37

Figura 17 – Determinação das propriedades geométricas de área (regiões coloridas) e perímetro (contorno branco) dos laços construídos no empacotamento dos fios magnéticos.	37
Figura 18 – Distribuição de probabilidade das áreas $p(A^*)$ para o arranjo final do empacotamento na ausência de substrato ($\sigma = 0.0$) e com substrato plástico com taxa de 20 % ($\sigma = 0.2$) e 50 % ($\sigma = 0.5$) preenchido.	40
Figura 19 – Distribuição cumulativa complementar $C(A^*)$ para os arranjos finais do empacotamento na ausência de substrato ($\sigma = 0.0$) e com substrato plástico com taxa de 20 % ($\sigma = 0.2$) e 50 % ($\sigma = 0.5$) preenchido.	42
Figura 20 – Distribuição de probabilidade das áreas, ao longo do tempo, para a condição de orientação dos dipolos magnéticos paralelos (Figura 11.a).	43
Figura 21 – Distribuição de probabilidade das áreas, ao longo do tempo, para a condição de orientação dos dipolos magnéticos antiparalelos (Figura 11.b).	43
Figura 22 – (a) Determinação do coeficiente α para cada uma das condições de limitação inferior das áreas ; (b) Relação entre o número de laços e a fração de empacotamento para $\alpha = 1.53$	45
Figura 23 – Relação em escala logarítmica dos perímetros em função das áreas formadas ao longo da injeção do fio magnético, cuja orientação dos dipolos é do tipo paralela.	46
Figura 24 – Padrões de empacotamento observados para diferentes frações de preenchimento dos substratos: na ausência, 20 % e 50 % da cavidade preenchida, respectivamente.	47
Figura 25 – Distribuição da probabilidade das distâncias entre os nós observadas para as diferentes frações de preenchimento do substrato: 0 % ($\sigma = 0.0$) ; 20 % ($\sigma = 0.2$) e 50 % ($\sigma = 0.5$) da cavidade preenchida	48
Figura 26 – Ilustração das cascas circulares concêntricas com largura dr	49
Figura 27 – Diagrama ilustrativo das configurações estáveis de (a) cadeias antiparalelas e (b) paralelas, destacando a formação das redes quadradas e triangulares, respectivamente.	50
Figura 28 – Esquema ilustrativo dos primeiros vizinhos para (a) redes quadradas e (b) triangulares.	50

Figura 29 – Gráfico da função de distribuição radial, representado por $g(r)$, em função da distância r ao centro de cada esfera, normalizado pela diâmetro média d_{md} , referentes às (a) redes quadradas e (b) triangulares.	51
Figura 30 – Arranjos resultantes do empacotamento dos fios magnéticos em uma cavidade de 10 cm de diâmetro, com os dipolos magnéticos iniciais: (a) antiparalelos e (c) paralelos, onde (b) e (d) são os grafos dos respectivos arranjos.	52
Figura 31 – Função de distribuição radial do arranjo da Figura 30.a.	53
Figura 32 – Função de distribuição radial do arranjo da Figura 30.c.	53
Figura 33 – Representação gráfica da interação entre duas esferas uniformemente magnetizadas, ilustradas por meio de dipolos pontuais, cuja os momentos magnéticos (\vec{m}_i) são proporcionais a magnetização das esferas (\vec{M}_i).	55
Figura 34 – Configuração das orientações dos momentos dos dipolos magnéticos, associado ao estado de mínima energia, do arranjo apresentado na Figura 30.	57
Figura 35 – Linhas de campo nas configurações resultantes de esferas magnéticas, caracterizadas empiricamente pela disposição das limalhas de ferro e analiticamente pela equação 4.3.	58
Figura 36 – (a) Estrutura final do empacotamento do fio magnético na cavidade para o tipo "Loop"; (b) Orientação dos momentos para o regime de mínimo de energia; (c) Determinação das linhas de campo do arranjo.	60
Figura 37 – (a) Estrutura final do empacotamento do fio magnético na cavidade para o tipo "Espiral"; (b) Orientação dos momentos para o regime de mínimo de energia; (c) Determinação das linhas de campo do arranjo.	61
Figura 38 – Energia acumulada no sistema como função do número de esferas inseridas na cavidade, durante a formação do arranjo do tipo "Loop".	62
Figura 39 – Energia por unidade de esferas (U_{mag}/N) em relação ao número de esferas magnéticas (N) durante a formação do arranjo do tipo "Loop".	63
Figura 40 – Empacotamento do tipo "Loop". (a) Primeiro contato entre os fios magnéticos inseridos diametralmente opostos; (b) Deformação do fio semelhante ao verificado em hastes elásticas; (c) Formação da primeira área delimitada pelas esferas.	63

Figura 41 – (a) Função da variação da energia por unidade de esferas ($\Delta U/N$) em relação ao número N de esferas magnéticas inseridas; (b) Dois dipolos embutidos em uma esfera de raio R , onde σ representa a máxima aproximação entre as partículas, as quais são componentes de duas cadeias interagindo entre si; (c) Variação da energia de interação V entre dipolos, decorrente da aproximação das cadeias de bactérias magnetostáticas. 64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL	18
2.1.1	<i>EMPACOTAMENTO DE FIOS METÁLICOS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR</i>	18
2.1.2	<i>EMPACOTAMENTO DE ESFERAS LIGADAS POR UM FIO EM UMA CAVIDADE QUADRADA</i>	20
2.1.3	<i>EMPACOTAMENTO DE CADEIAS DE ESFERAS MAGNÉTICAS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR</i>	22
2.2	PROCESSO DE AUTO-ORGANIZAÇÃO EM PARTÍCULAS COESIVAS	23
2.2.1	<i>INTERAÇÕES MAGNÉTICAS EM SISTEMAS QUÍMICOS E BIOLÓGICOS</i>	23
3	EXPERIMENTO	29
3.1	APARATO EXPERIMENTAL	29
3.2	MÉTODO EXPERIMENTAL	31
3.2.1	<i>CONDIÇÕES DE CONTORNO DO EXPERIMENTO</i>	32
3.3	ANÁLISE DAS IMAGENS	34
4	RESULTADOS	38
4.1	DISTRIBUIÇÃO DAS ÁREAS DELIMITADAS PELAS ESFERAS MAGNÉTICAS	38
4.2	RELAÇÃO PERÍMETRO-ÁREA	46
4.3	PADRÕES DE EMPACOTAMENTO	47
4.4	INTERAÇÃO ENTRE ESFERAS MAGNETIZADAS E AS CONFIGURAÇÕES DE MENOR ENERGIA	54
5	CONCLUSÕES	65
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

O empacotamento de materiais granulares constitui um tema de extrema relevância em diversos ramos da ciência e da indústria. Nas últimas décadas, as investigações sobre esse fenômeno têm despertado grande interesse, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental (ARANSON; TSIMRING, 2006; JAEGER *et al.*, 1996). Nesse contexto, compreender o processo de empacotamento destes materiais particulados assume um papel fundamental, especialmente quando o objetivo é elucidar aspectos da estrutura macroscópica de meios materiais com uma configuração essencialmente granular. A abordagem desse tipo de empacotamento envolve, dentre os diversos estudos das ciências naturais e tecnológicas, a utilização tanto de simulações computacionais quanto de experimentos simples e criativos.

Um processo de empacotamento realizado por materiais granulares é constituído majoritariamente por partículas sólidas, macroscópicas e discretas, que podem assumir diversas formas, tamanhos e propriedades mecânicas e químicas. Devido ao tamanho, relativamente grande em comparação com as partículas em escala molecular, tais arranjos não apresentam sua dinâmica afetada pelas flutuações térmicas, tornando-os notavelmente estáveis em relação às mudanças de temperatura (JAEGER; NAGEL, 1992).

Quando submetidos a condições de confinamento, como em recipientes fechados ou em ambientes controlados, esses materiais são propensos a formar uma ampla variedade de estruturas com diferentes composições topológicas. Essas estruturas podem variar desde arranjos altamente ordenados, como as estruturas cristalinas, à arranjos desordenados ou amorfos, a depender das interações intrínsecas entre as partículas e dos protocolos experimentais adotados (FRANCOIS *et al.*, 2013). Além disso, quando submetidos a forças externas, estes arranjos revelam-se na forma de um sistema complexo. Estas forças tendem a causar rearranjos nas partículas, levando-as a mudanças na geometria e na sua estabilidade global (BORGES, 2021).

Quanto as interações entre as partículas, os materiais granulares podem ser caracterizados como não coesivos, onde as interações se dão pelo contato ou atrito entre as partículas, e coesivos, que compartilham outras formas de interação além do contato, como interações elétricas ou magnéticas, identificadas por estabelecer interações de longo alcance entre suas partes constituintes. Quando os elementos particulados que compõem estes materiais possuem propriedades coesivas, estes apresentam a notável capacidade de se agruparem em cadeias por meio dos vínculos físicos, que emergem destas propriedades. Isso é evidenciado, por exemplo, em um cordão de contas, onde as partículas granulares não coesivas se unem por meio de um

agente externo, como um fio plástico transpondo todos eles. Já para as partículas coesivas, como esferas confeccionadas a partir de materiais com propriedades magnéticas, a atração e repulsão resultante da orientação dos dipolos magnéticos, permitem que estes possam agrupar-se na forma de fios ou mantas (HALL *et al.*, 2013). Nessas configurações particulares, os materiais granulares exibem propriedades, como deformação e flexibilidade, comuns às hastes elásticas, o que possibilita a determinação de uma rigidez à flexão magnética efetiva para uma dada cadeia de esferas magnéticas (VELLA *et al.*, 2014). Essas similaridades com as hastes elásticas, permitem que os materiais granulares coesivos sejam utilizados de maneira análoga, proporcionando excelentes estimativas para a dinâmica de flambagem e de vibração em arranjos na forma de cadeias lineares ou circulares (VELLA *et al.*, 2014).

Em recentes investigações científicas, que englobam tanto simulações computacionais quanto experimentos laboratoriais, têm se dedicado à análise da morfologia de estruturas formadas quando cadeias ou fios elásticos, compostos por materiais coesivos ou não coesivos, são inseridos em cavidades. Esses estudos destacam características distintas que variam em função da elasticidade do material, da geometria da cavidade, da inclinação do plano de empacotamento e das forças de atrito em ação durante o processo de injeção. Entre os resultados mais notáveis, merecem destaque a construção de um diagrama de fase que descreve a evolução da morfologia dos fios inseridos (STOOP *et al.*, 2008), assim como a caracterização da transição morfológica entre dois padrões de empacotamento resultantes da injeção de fios magnéticos (BORGES, 2021). Essa transição mostra-se dependente da inclinação do plano da cavidade e do atrito estático da superfície. Tais experimentos têm reforçado a presença de leis de escalas e dimensões fractais nas estruturas formadas durante o empacotamento desses fios.

Conduzidos pela diversidade de propriedades intrínsecas ao processo de empacotamento de fios em cavidades, propõe-se o prosseguimento dos estudos, por meio de experimentos, da injeção de esferas magnéticas agrupadas na configuração de fio em uma cavidade circular rígida, apresentado por Borges (2016), contudo a cavidade a ser preenchida possuirá um substrato não coesivo de esferas plásticas. Assim, diferentemente dos experimentos apresentados por Donato (2006), que trataram do empacotamento de fios metálicos flexíveis e contínuos em uma cavidade circular, governadas por interações de curto alcance, investiga-se, nesta monografia, as propriedades geométricas e físicas que emergem do empacotamento de fios dotados de propriedades magnéticas, caracterizadas por interações de longo alcance. Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos a partir das imagens capturadas durante as filmagens

dos experimentos e posteriormente analisadas pelas ferramentas de processamento de imagens disponibilizadas pela linguagem de programação MATLAB. Para a implementação dos métodos números aplicados a minimização da energia do sistema, para a devida obtenção das orientações dos dipolos magnéticos, utilizou-se a linguagem de programação Python.

Esta monografia está organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentam-se os experimentos que servirão como referências metodológicas para a obtenção e análise dos resultados do empacotamento de materiais em uma cavidade rígida. Além disso, serão abordados alguns exemplos de processos de auto-organização de partículas coesivas presentes na natureza em escalas diversas, como coloides e bactérias magnetostáticas, a fim de permitir a assimilação desses fenômenos ao arranjo dos fios magnéticos. No segundo capítulo, são apresentados os materiais utilizados nos experimentos, assim como a descrição de como foram realizados. Destaca-se também neste capítulo as condições de contorno possíveis para as orientações dos momentos dos dipolos magnéticos e as análises das imagens necessárias para a coleta dos dados das estruturas empacotadas. No terceiro capítulo, destacam-se as principais propriedades geométricas obtidas desses arranjos e a obtenção das orientações dos momentos dos dipolos magnéticos, mediante a minimização da energia do sistema. Por fim, a conclusão resgata os principais conceitos e resultados obtidos no processo de empacotamento dos fios magnéticos em uma cavidade circular rígida.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Fenômenos relacionados ao empacotamento de diversos materiais têm demonstrado sua importância nos campos científico, tecnológico e industrial. Em ambientes de produção industrial, por exemplo, busca-se encontrar a configuração mais densa e econômica dentro de uma geometria confinante para a instalação de redes de antenas de comunicação (KAZAKOV *et al.*, 2018). Na área da biologia, por outro lado, procura-se aprimorar a compreensão dos processos envolvidos no empacotamento do DNA em cápsulas virais (KATZAV *et al.*, 2006). Embora esses arranjos estejam associados a sistemas distintos e ocorram em escalas diversas, compartilham características físicas comuns. Dentre essas características, destacam-se as simetrias presentes nas estruturas empacotadas e a correspondência entre as dimensões topológicas das geometrias confinantes e dos objetos confinados. (KATZAV *et al.*, 2006).

Num passado não muito distante, em 1900, o matemático alemão David Hilbert apresentou, no congresso internacional de matemática em Paris, uma lista com 23 problemas não resolvidos na matemática (HILBERT, 1900). Esses problemas eram considerados pela comunidade científica como guias para as pesquisas ao longo do século XX. Dentre esses questionamentos, propôs-se a investigação e construção de métodos teóricos e empíricos, seguindo os princípios da geometria euclidiana, que maximizassem o espaço a ser preenchido por um número infinito de objetos iguais, sejam esferas ou poliedros regulares. Anteriormente, pelos estudos de Kepler (1611), sabia-se que o arranjo com maior taxa de empacotamento era o empilhamento piramidal de faces centradas, conhecido por conjectura de Kepler (LAGARIAS, 2011). Desde então, teorias, experimentos e pesquisas tecnológicas neste domínio desenvolveram-se para solucioná-lo. No entanto, somente em 1998, Thomas Hales apresentou uma prova auxiliada por computador, mostrando que a configuração mais densa para um conjunto infinito de esferas com o mesmo raio é um arranjo cúbico de face centrada, confirmado posteriormente em 2014 pelo projeto Flyspeck, de mesma autoria (HALES, 1997). Dessa forma, estabelecer como e qual a melhor forma dos objetos serem confinados em cavidades finitas é um problema de longa data e de interesse tanto prático quanto teórico.

Além disso, ao explorar o notável campo dos empacotamentos, é crucial considerar as dimensionalidades desse fenômeno. Na próxima seção, a análise aprofundará o empacotamento em duas dimensões, apresentando uma visão mais detalhada sobre as complexidades e aplicações práticas desses arranjos espaciais intrigantes.

2.1 EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL

No vasto campo da ciência e engenharia, a otimização do espaço é uma busca incessante para a eficiência e aprimoramento dos processos. Um desafio recorrente nesse contexto é o empacotamento de materiais, sejam eles contínuos ou discretos, em espaços bidimensionais. Esse fenômeno, que pode ser visualizado como a busca pela disposição mais eficiente e econômica de elementos em uma superfície plana, desencadeia uma série de questionamentos e problemáticas que intriga pesquisadores e profissionais das mais diversas áreas.

Ao lidar com materiais contínuos, como rolos de papel, tecidos ou filmes plásticos, a otimização do empacotamento em duas dimensões não apenas influencia a logística e distribuição desses produtos, mas também desempenha um papel crucial na minimização de resíduos e no uso eficiente dos recursos. Por outro lado, quando nos deparamos com materiais discretos, como peças industriais ou embalagens, os desafios se estendem para além da mera disposição espacial, abrangendo questões relacionadas à acessibilidade, manipulação e até mesmo à estética do arranjo.

À medida que se exploram as complexidades do empacotamento em duas dimensões, emergem conexões profundas com áreas como a geometria computacional, ciência dos materiais e logística avançada. Este texto busca, portanto, lançar luz sobre os fundamentos e desafios envolvidos no empacotamento de materiais em duas dimensões no âmbito científico.

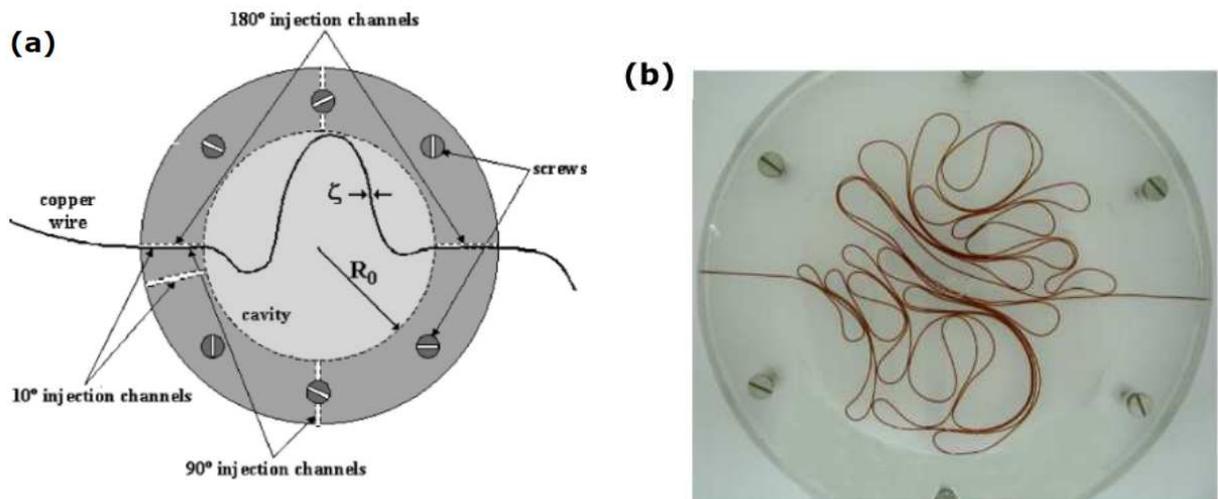
Como complemento a este estudo, apresenta-se alguns experimentos referenciais que contribuem para a compreensão mais ampla e aprofundada do empacotamento em duas dimensões. Esses experimentos servem como pontos de referência para o desenvolvimento e análise do experimento tratado neste trabalho, enriquecendo a abordagem científica e proporcionando uma visão abrangente do estado atual das pesquisas nesse campo.

2.1.1 EMPACOTAMENTO DE FIOS METÁLICOS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR

Donato *et al.* (2002) conduziram uma análise abrangente das propriedades estatísticas e geométricas do empacotamento de fios de cobre em duas dimensões (Figura 1.a). Seus estudos indicam que à medida que o comprimento do fio injetado em uma cavidade circular aumenta, a estrutura confinada, composta por uma coleção de laços de tamanhos decrescentes, torna-se progressivamente mais rígida. Esse aumento na rigidez encerra com uma queda abrupta na velocidade de injeção do fio, resultando em uma estrutura completamente rígida que limita o

sistema a uma fração máxima de empacotamento, $p_{max} \sim 15\%$ (Figura 1.b). Verifica-se que a massa (área projetada) da estrutura confinada exibe uma tendência de escalar conforme uma lei de potência, determinada por raios concêntricos ao centro de massa do arranjo, seguindo a relação $m(R) \sim R^d$, onde d é aproximadamente 1.9 ± 0.1 . É relatado, ainda, uma relação livre de escala na distribuição das áreas internas dos laços formados durante o empacotamento. Para esclarecer o comportamento experimental observado nesse processo de confinamento bidimensional, é introduzido um modelo hierárquico das interações do fio no interior da cavidade, revelando propriedades notáveis, como a condensação de energia elástica e uma difusão anômala.

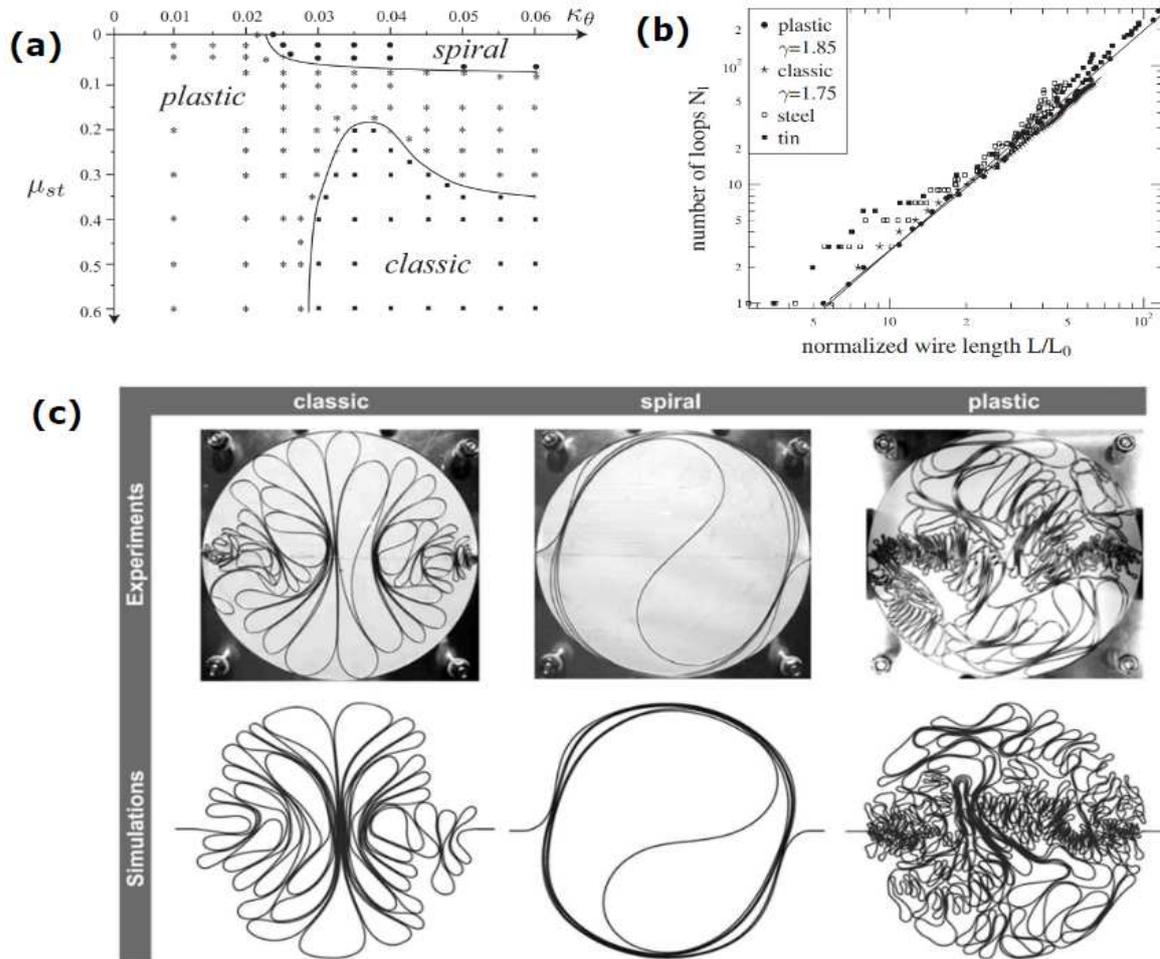
Figura 1 – Empacotamento de fios de cobre em uma cavidade circular.(a) Diagrama da célula de injeção bidimensional usada nos experimentos; (b) Disposição final do fio de cobre confinado na cavidade na máxima taxa de empacotamento de $p_{max} \sim 15\%$.



Fonte: Donato *et al.* (2002).

Com base no modelo experimental proposto por Donato *et al.* (2002), Stoop *et al.* (2008) destacam a elaboração de um diagrama de fases morfológicas para fios metálicos confinados em duas dimensões (conforme ilustrado na Figura 2.a). O estudo revela que tanto o escoamento plástico quanto o atrito emergem como fatores preponderantes na determinação da morfologia resultante. A análise morfológica, relacionada ao número de alças em função da densidade de empacotamento, revela um comportamento de lei de potência, com diferentes expoentes para cada morfologia (Figura 2.b). Ao explorar configurações específicas resultantes do processo de confinamento de fios de aço em uma cavidade circular, foram identificadas três morfologias distintas: clássica, espiral e plástica (Figura 2.c).

Figura 2 – Fases morfológicas de um fio metálico confinado. (a) Diagrama de fase morfológica da espiral, plástica e clássicas obtidas numericamente; (b) Escala do número de loops para as morfologias clássica e plásticas para diferentes tamanhos de sistemas; (c) Fios empacotados em cavidades circulares, obtidas experimentalmente e por simulações.



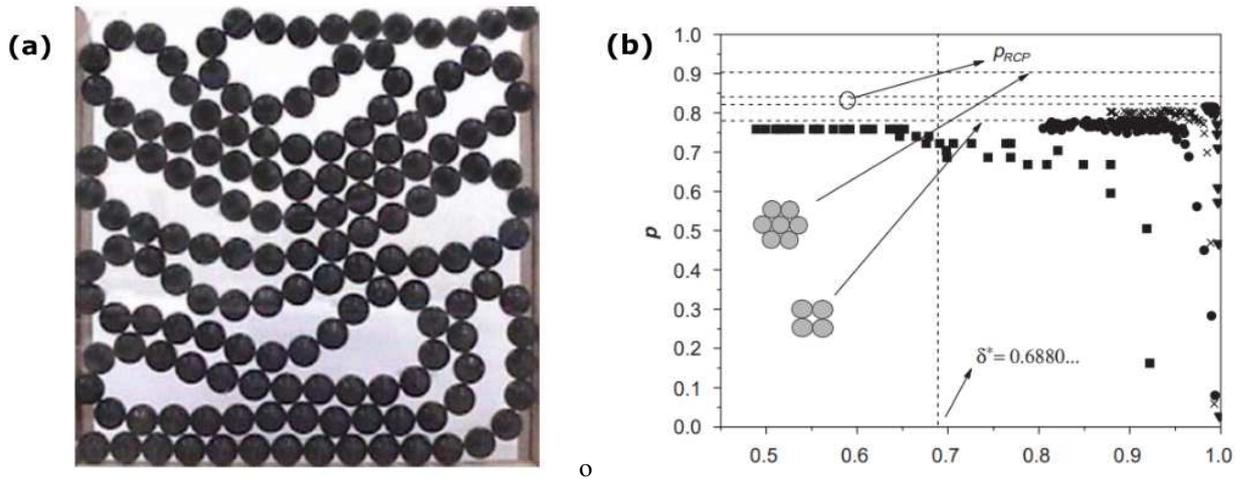
Fonte: Stoop *et al.* (2008).

2.1.2 EMPACOTAMENTO DE ESFERAS LIGADAS POR UM FIO EM UMA CAVIDADE QUADRADA

Com o intuito de analisar a densidade de empacotamento bidimensional de esferas em função de sua densidade ao longo de um fio, Brito *et al.* (2004) propõem um estudo experimental do empacotamento de um sistema finito de esferas conectadas por um cordão, livre para deslizar dentro de uma cavidade quadrada bidimensional. Esta geometria, representada por um colar de contas, tem sido objeto de interesse contínuo na física desde a primeira metade do século XVIII, quando Daniel Bernoulli e Leonard Euler investigaram os modos vibratórios de cordas carregadas. Nas últimas décadas, essa configuração tem despertado interesse em diversos contextos, destacando-se em conexão com problemas físicos, como em novos fenômenos de cris-

talização (LEONTIDIS *et al.*, 1999). Além de revela-se fundamental na biologia, apresentando aspectos essenciais da estrutura de fibras cromossômicas humanas (UZMAN, 2001).

Figura 3 – Empacotamento bidimensional de um colar de contas.(a) Imagem ilustrando a configuração de uma única camada de colar-de-contas com diâmetro $D = 1.80$ cm em uma cavidade quadrada. (b) fração de empacotamento bidimensional p como função da fração de empacotamento δ ao longo do colar-de-contas.



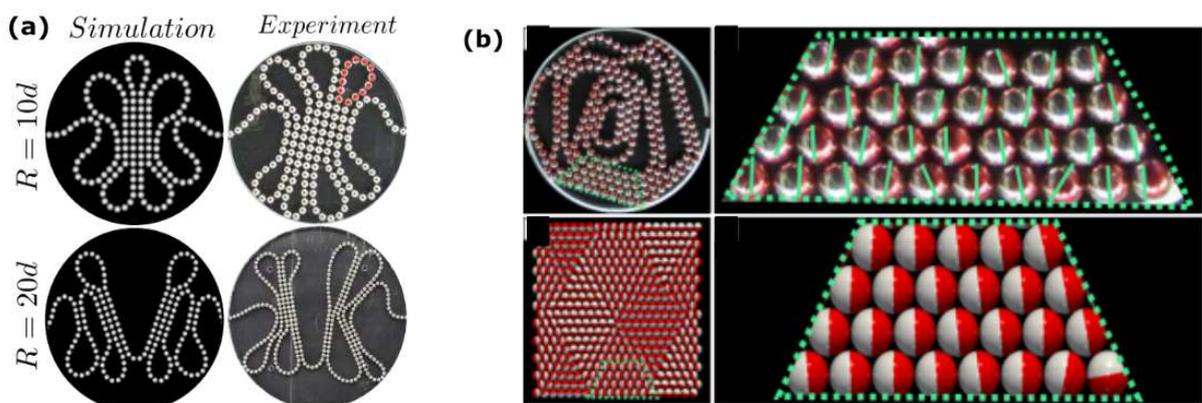
Fonte: Brito *et al.* (2004).

Na Figura 3.a, é apresentada a configuração de uma única camada de um colar de contas com diâmetro $D=1.8$ cm. Para os parâmetros de empacotamento utilizados, essa configuração está distante do limite de densidade para o random close packing, aproximadamente $p_{rcp} = 0,82 \pm 0,02$. A Figura 3.b ilustra a abordagem ao limite termodinâmico ($L/D \rightarrow \infty$), mostrando a dependência da densidade de empacotamento p do sistema de esferas em um cordão em função da fração de empacotamento δ ao longo do cordão, para diferentes razões L/D das esferas. O estudo concentra-se no comportamento não trivial de sistemas finitos, revelando, por exemplo, que para esferas maiores ($D = 3,80$ cm), a densidade máxima obtida é $p = 0,76$ quando $\delta \leq 0,66$, correspondendo a 95,2% da densidade de empacotamento ótima para 42 discos independentes em um quadrado. O gráfico também destaca um aumento acentuado na densidade de empacotamento à medida que δ diminui, evidenciando variações significativas na densidade com pequenas alterações em δ . Além disso, o estudo identifica um limiar crítico, $\delta_* = 0,688$, onde a densidade de empacotamento atinge seu valor máximo ao longo do cordão, independente do diâmetro das esferas. Esse valor crítico implica que, para $\delta > \delta_*$, a densidade de empacotamento pode diminuir com o aumento de δ , enquanto para $\delta < \delta_*$, a densidade é essencialmente constante, sendo esse limiar determinado por considerações geométricas.

2.1.3 EMPACOTAMENTO DE CADEIAS DE ESFERAS MAGNÉTICAS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR

Esferas magnéticas, ao se atraírem, constituem cadeias altamente estáveis. Borges *et al.* (2021) propõem um estudo, por meio de simulações e experimentos (Figura 4.a), que investiga a formação de padrões ao confinar essas cadeias dentro de uma cavidade circular, semelhante a uma célula de Hele-Shaw, inserindo-as tanto a partir das fronteiras quanto do centro da cavidade. Se duas cadeias são injetadas simultaneamente de lados opostos, devido às forças de atração ou repulsão entre os dipolos magnéticos opostos, as cadeias ao aproximarem-se têm a tendência de colapsarem em estruturas de redes quadradas ou triangulares, a depender da configuração mais energeticamente favorável. A competição entre essa cristalização e as forças de flexão elástica das cadeias resulta na formação de padrões semelhantes a pétalas, como ilustrado na Figura 4.a. Entretanto, se uma cadeia de esferas for injetada pelo centro, a cavidade será preenchida por hexágonos, característicos de redes triangulares.

Figura 4 – Empacotamento de cadeias de esferas magnéticas em uma cavidade circular.(a) Padrões obtidos injetando fios de esferas magnéticas de lados opostos, obtidos por simulação e experimentos; (b) Configuração de energia mais baixa de uma rede triangular para experimento injetando a cadeia através do centro da cavidade e simulação Monte Carlo de dipolos em uma rede triangular.



Fonte: Borges *et al.* (2021).

Por meio dos resultados obtidos, verificou-se que o número de laços formados e o número de contatos entre as esferas aumentam com a fração de empacotamento como leis de potência, com expoentes $\alpha = 1.72 \pm 0.06$ e $\beta = 1.19 \pm 0.03$, respectivamente. Através de uma simulação de Monte Carlo, efetuou-se a caracterização da interação entre os dipolos, evidenciando a formação das redes triangulares observadas durante a injeção central (Figura 4.b). Nesse cenário, as posições foram mantidas fixas, enquanto os ângulos dos dipolos eram livres

para girar, no intuito de encontrar a configuração que minimiza a energia do sistema.

2.2 PROCESSO DE AUTO-ORGANIZAÇÃO EM PARTÍCULAS COESIVAS

Quando se aplicam os materiais granulares ao processo de empacotamento, estes mostram-se equivalentes a muitos outros sistemas físicos, sejam eles microscópicos ou macroscópicos. De modo geral, estes materiais podem ser utilizados como modelos para estudo das propriedades que emergem nesses sistemas, dentro e fora do equilíbrio (Borges *et al.* (2021)). Quando os materiais granulares são do tipo coesivo, o empacotamento destas partículas explora as interações entre si para a formação espontânea de cadeias ou estrutura ordenadas, o que se denomina por processo de auto-organização.

A auto-organização de partículas desempenha um papel significativo tanto nas pesquisas científicas quanto na fabricação de sistemas de elementos em nanoescala. Esses estudos abrangem desde sistemas quânticos, que envolvem elétrons, até sistemas coloidais, que incluem partículas carregadas ou magnetizadas. Essas aplicações estimulam o desenvolvimento de dispositivos de tamanho reduzido, impactando diretamente a sociedade em questões como mobilidade e velocidade dos processos executados por aparelhos eletrônicos de diversas funções (DOMINGOS, 2013).

2.2.1 INTERAÇÕES MAGNÉTICAS EM SISTEMAS QUÍMICOS E BIOLÓGICOS

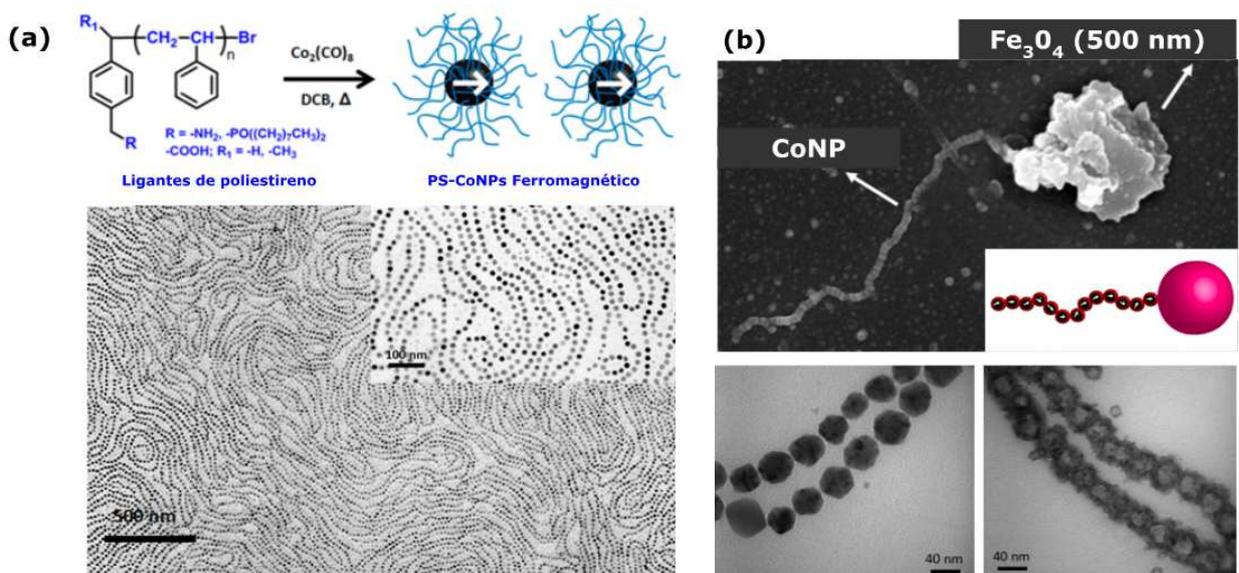
Quando investigamos interações anisotrópicas, isto é, interações cujas propriedades físicas dependam da direção, em sistemas químicos ou biológicos, estes revelam-se demasiadamente intrigantes quando consideramos a existência de coloides e bactérias com propriedades magnéticas. Estes agentes desempenham papéis essenciais na resposta dos organismos vivos aos campos magnéticos circundantes. Os coloides magnéticos, ao apresentarem propriedades únicas de resposta a estímulos magnéticos, abrem novas perspectivas para aplicações biotecnológicas. Por outro lado, as bactérias magnéticas, dotadas de magnetossomos, demonstram uma habilidade notável em orientar-se em direção aos gradientes magnéticos, desencadeando reflexões sobre os mecanismos evolutivos que moldam esses organismos.

A seguir serão apresentados alguns dos esforços de pesquisa vinculados a este tema. É crucial, portanto, compreender essas iniciativas, pois a investigação contínua nesse domínio não apenas contribui para a ampliação do conhecimento científico, mas também desempenha um

papel fundamental na inovação e no desenvolvimento de aplicações práticas. A compreensão desses elementos magnéticos a nível coloidal e bacteriano representa, assim, um desafio e uma oportunidade promissoras para a determinação dos princípios básicos das interações entre a bioquímica e os fenômenos magnéticos. Esse entendimento aprofundado não apenas amplia as fronteiras do conhecimento, mas também é essencial para abordar desafios contemporâneos e explorar possíveis avanços tecnológicos e científicos.

- Explorando o conceito da construção de cadeias mesoscópicas, chamadas de polímeros coloidais, Hill e Pyun (2014) abordam a utilização de nanopartículas magnéticas inorgânicas revestidas com polímeros. Seu enfoque concentra-se na síntese, montagem, polimerização e caracterização de monômeros coloidais dipolares baseados em nanopartículas ferromagnéticas de cobalto (Figura 5.a). Em seu estudo, destaca-se a utilização da decomposição térmica de complexos carbonílicos metálicos conduzida por ligantes de copolímeros funcionais para a formação das nanopartículas ferromagnéticas, estas interagem-se espontaneamente para a confecção de cadeias poliméricas coloidais através do acoplamento dos polos magnéticos norte e sul presentes nessas nanopartículas de domínio único. Estas cadeias têm sido usadas para a construção hierárquica de estruturas similares a “cílios e flagelos artificiais” (Figura 5.b).

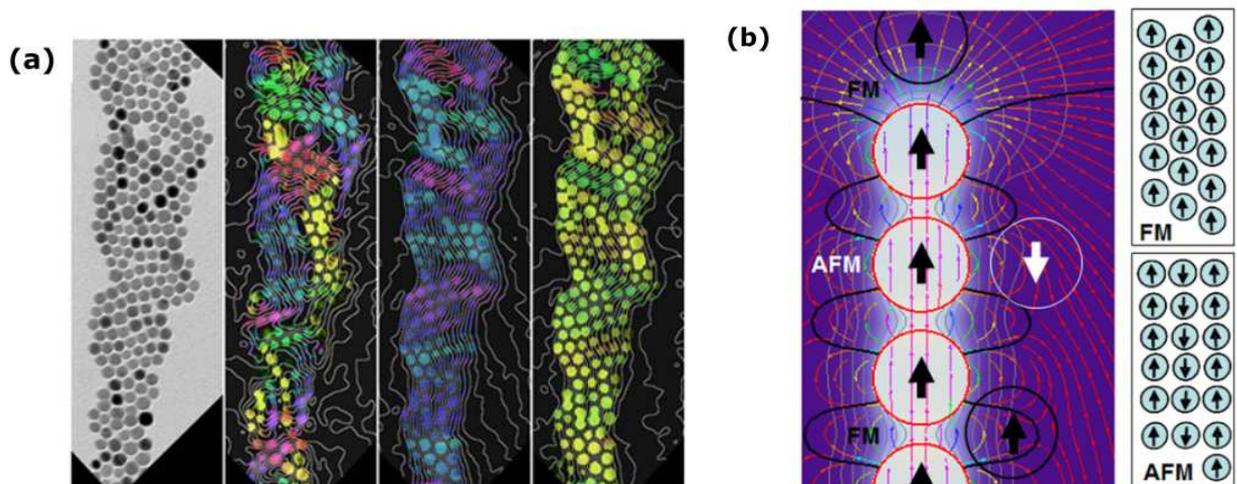
Figura 5 – (a) Esquema para a síntese de nanopartículas de cobalto ferromagnético dipolar usando ligantes de poliestireno com funcionalidade final na termólise de $Co_2(CO)_8$; (b) a fabricação de sistemas de nanoatuação magnética semelhantes a “cílios e flagelos artificiais”.



Fonte: Hill e Pyun (2014).

- Varón *et al.* (2013) indicam novas maneiras de projetar materiais e dispositivos magnéticos nanocristalinos, explorando as interações magnetostáticas entre nanopartículas. Esta abordagem ganha relevância na medida em que se torna possível o controle das propriedades magnéticas coletivas em escalas nanoscópicas. Utilizando microscopia eletrônica de transmissão e holografia eletrônica com resolução em subpartículas, observou-se a existência da ordenação dos dipolos magnéticos em estruturas de baixa dimensão formadas por partículas de cobalto automontadas (Figura 6.a). Após a saturação magnética, medições e simulações numéricas mostram que existe uma ordem ferromagnética geral nos conjuntos de nanopartículas, mesmo quando seu arranjo apresentava-se inicialmente completamente desordenado (Figura 6.b). Estes resultados indicam que a ordem magnética de curto alcance, com pequenos domínios, prevalece nos estantes iniciais, com ordens de magnitude dependentes da rede das partículas. Este fato, apoia a existência do ferromagnetismo dipolar amorfo, o que é contrário ao comportamento do vidro magnético encontrados em arranjos aleatórios tridimensionais de partículas, relevantes para o uso de conjuntos de nanopartículas em dispositivos magnéticos, como em sensores.

Figura 6 – (a) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão para campo claro e campo magnético holográfico de cadeias de partículas de Co (15 nm) de múltiplas nanopartículas de largura; (b) Simulação e diagramas esquemáticos ilustrando campos dipolares e interações entre nanopartículas esféricas.

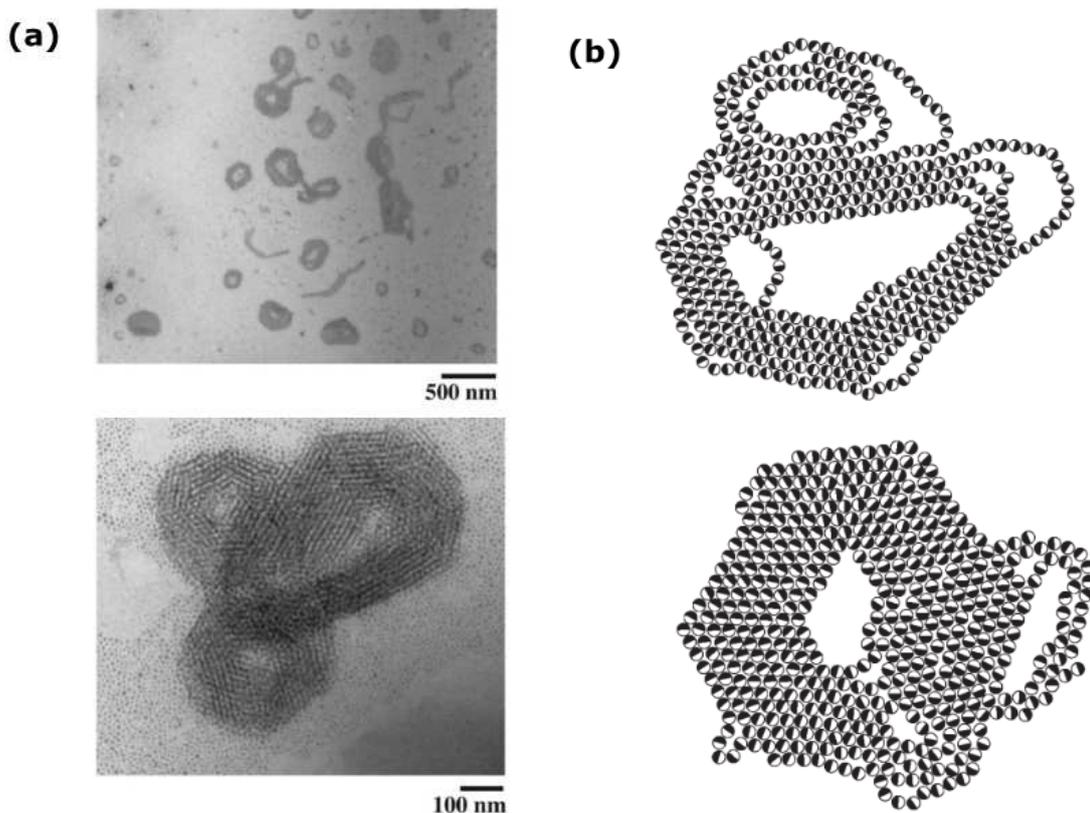


Fonte: Varón *et al.* (2013).

- Destacando que as nanopartículas, devido às interações magnéticas dipolares, podem formar padrões únicos e complexos quando depositadas em um substrato, Ku *et al.* (2010) observam que esses padrões diferem daqueles formados por partículas não magnéticas. Essa distinção é resultado das conexões transitórias entre domínios em crescimento e da

formação de agregados em forma de cadeia. O experimento é realizado inspecionando a reorganização espontânea de nanocristais coloidais de cobalto, dotados de um dipolo magnético substancial, depositado em uma solução cujo solvente é evaporado ao longo do tempo (Figura 7.a). Devido à natureza fortemente não equilibrada deste processo, os arranjos resultantes das partículas de nanocristais diferem substancialmente dos esperados, quando realizado a minimização da energia do sistema. As simulações computacionais desenvolvidas, propagam a dinâmica de uma coleção de nanopartículas ligadas ao substrato através de um esquema cinético de Monte Carlo com o critério de aceitação convencional de Metropolis para um sistema fechado em contato com um banho térmico. A este modelo, pôde-se identificar vários mecanismos dinâmicos que conduziram ao surgimento de morfologias incomuns e que estes estão diretamente relacionados as intensidades dos momentos de dipolo magnético de cada partícula (Figura 7.b).

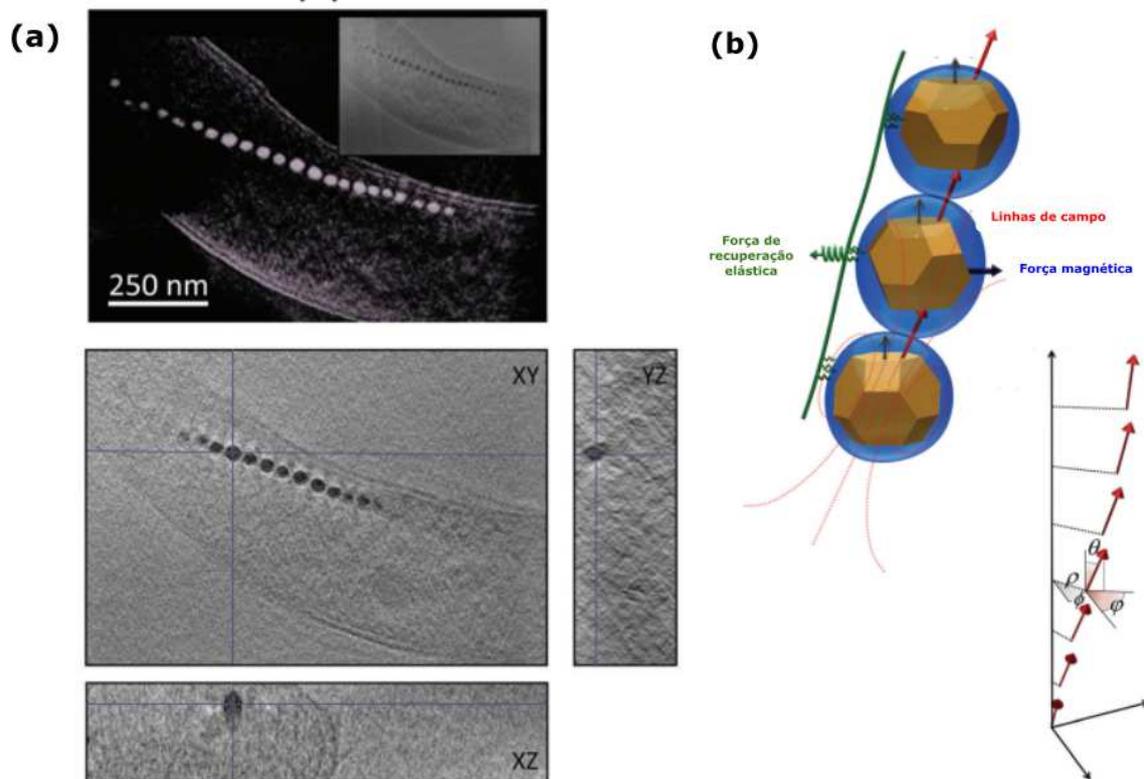
Figura 7 – (a) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão de automontagem de ϵ -Co orientada por evaporação de nanocristais; (b) Exemplos de simulações de secagem espacialmente heterogêneas, nas quais são introduzidos pequenos anéis e cadeias de partículas gradualmente e localmente.



Fonte: Ku *et al.* (2010).

- Em seu estudo sobre a configuração de cadeias de magnetossomos, Orue *et al.* (2018) abordam a análise das cadeias sintetizadas pela bactéria *Magnetospirillum gryphiswaldense*. Evidências fenomenológicas indicam que a forma ligeiramente curvada da cadeia (Figura 8.a) é resultado da competição entre as anisotropias magnetocristalinas e da forma, o que resulta na inclinação dos momentos magnéticos efetivos dos magnetossomos. Ao examinar as propriedades magnéticas das cadeias e o impacto desta inclinação nos arranjos, é apresentado um modelo que explica a configuração das cadeias com base em interações magnetostáticas e energia elástica (Figura 8.b). Este modelo de energia é fundamentado nas forças de recuperação elástica, modeladas segundo um mecanismo semelhante a uma mola. O estudo tem por objetivo esclarecer o processo de montagem destas cadeias durante o processo de biomineralização, destacando seu impacto em futuras aplicações, como micro robôs biológicos, utilizados como plataforma para o transporte de medicamentos em seres vivos, guiados por um campo magnético externo.

Figura 8 – (a) Tomografia crioelétrica de cadeias de magnetossomos; (b) Representação esquemática de dois mecanismos concorrentes: força magnética empurrando para alinhar os momentos magnéticos do magnetossomo ao longo das linhas de campo parasitas das partículas vizinhas, e mecanismo baseado em lipídios/proteínas modelado como um força de recuperação elástica agindo perpendicularmente ao eixo da cadeia



Fonte: Orue *et al.* (2018).

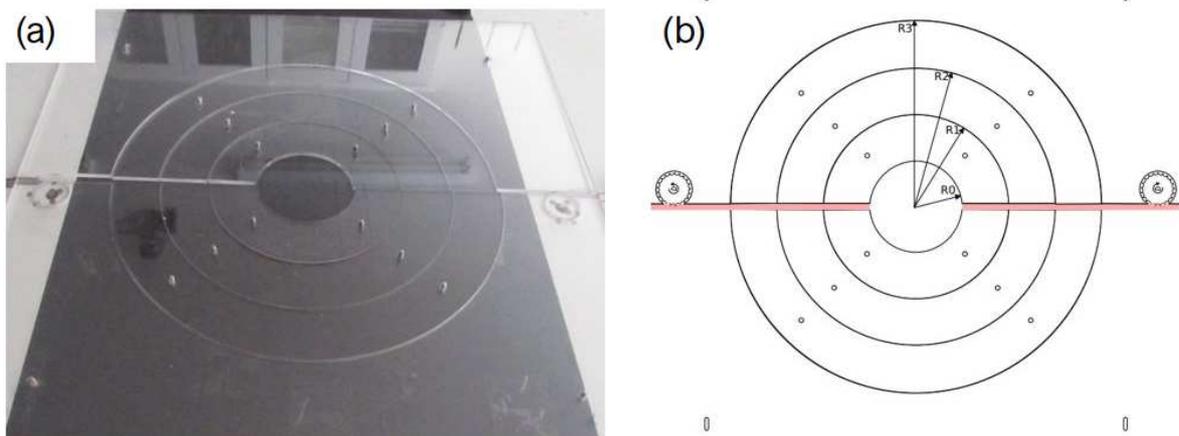
Após uma análise abrangente dos experimentos mais relevantes na literatura sobre empacotamentos bidimensionais e da observação de fenômenos que evidenciam o comportamento de partículas coesivas na natureza, esta pesquisa tem como objetivo aplicar as metodologias apresentadas para a caracterização dos arranjos. Adicionalmente, busca-se relacionar o comportamento dos fios magnéticos com o contexto de coloides e bactérias magnetostáticas.

3 EXPERIMENTO

3.1 APARATO EXPERIMENTAL

Para conduzir os experimentos, foram empregadas esferas de neodímio com um diâmetro de 5 mm como os elementos a serem empacotados. Devido à marcante intensidade do seu campo magnético, essas esferas demonstram uma notável habilidade de se atrair, originando um fio magnético resistente à deformação. Uma vez que esses fios se formam através do contato entre as esferas, são então inseridos em uma cavidade que se assemelha significativamente à estrutura de uma célula de Helle-Shaw. A estrutura é composta por duas placas de acrílico fixadas sob um placa principal de madeira (Figura 9.a). A placa inferior apresenta uma cavidade circular rígida que pode ser ajustada por meio da troca de peças circulares internas. No contexto deste estudo, optou-se por utilizar o raio da cavidade de $R_1 = 100$ mm para os experimentos destinados à caracterização das propriedades geométricas dos arranjos empacotados, enquanto o raio de $R_0 = 50$ mm foi adotado para a determinação das propriedades físicas intrínsecas das partículas magnéticas, como a orientação dos momentos dos dipolos magnéticos. (Figura 9.b).

Figura 9 – Foto da cavidade circular similar a célula de Helle-Shaw: (a) Mesa com as chapas de acrílico demarcadas com as cavidades removíveis; (b) Visão frontal do esboço da cavidade com a indicação dos raios possíveis para a cavidade.



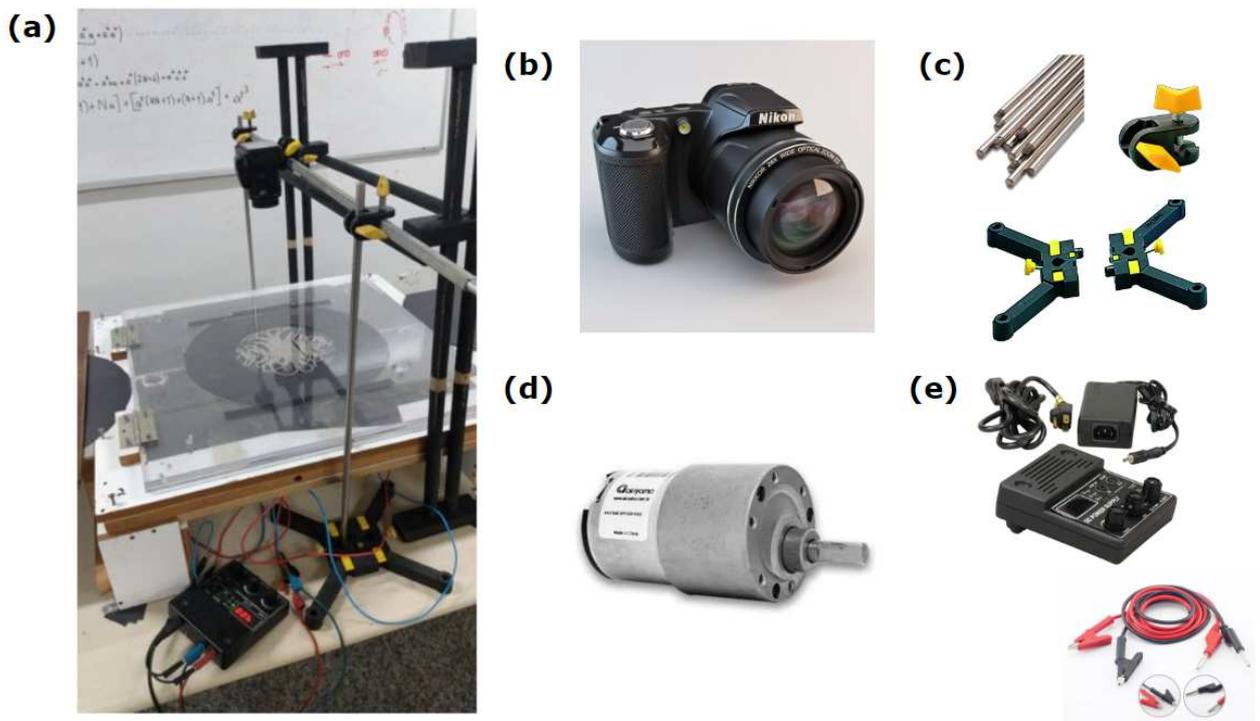
Fonte: Borges (2016).

A introdução dos fios ocorre por meio de um canal central que conecta a área externa à interna da cavidade. Inicialmente, as esferas, dispostas em forma de fio, são acopladas a uma polia dentada localizada na extremidade do canal. Ao ser acionada, esta polia gira, aplicando uma força sobre as esferas, permitindo sua injeção contínua na cavidade. Para assegurar a

simetria do processo, duas destas polias são posicionadas em extremidades diametralmente opostas, garantindo a injeção do fio a partir de lados contrários (Figura 9.b). Cada uma dessas polias está conectada a motores com características idênticas, os quais são controlados por uma fonte de corrente ajustável, possibilitando a regulação da velocidade de injeção das esferas na cavidade. Adicionalmente, um fundo negro, opaco e liso, é colocado sobre o fundo da cavidade, maximizando o contraste para as esferas, o que se revela benéfico para análises computacionais subsequentes, ao mesmo tempo em que reduz o atrito entre as esferas e a superfície do aparato.

A obtenção dos dados relacionados ao processo de empacotamento é realizada por meio da gravação em vídeo dos experimentos usando uma câmera Nikon Cool-Pix L810 (Figura 10.b), a qual é montada em um suporte e posicionada no centro da cavidade (Figura 10.a). Para a injeção das esferas magnéticas, foram empregados dois Micro Motor DC com caixa de redução (Figura 10.d), apresentando um torque máximo de 8.50kgf.cm . Esses motores são conectados a uma fonte de alimentação DC Programmable Power Supply por meio de cabos (Figura 10.e).

Figura 10 – Aparato experimental: (a) Estrutura de acrílico e madeira para o empacotamento das esferas magnéticas; (b) câmera Nikon CoolPix L810; (c) Suporte (PRIWE) para a câmera; (d) Micro Motor DC com caixa de redução; (e) Fonte de alimentação e cabos de conexão.



Fonte: O autor

3.2 MÉTODO EXPERIMENTAL

Os experimentos foram iniciados com a montagem de dois fios de esferas magnéticas alinhadas nas extremidades opostas da cavidade. A fonte de alimentação foi configurada para uma diferença de potencial de 4V e ao aciona-la as polias dentadas começavam a girar na frequência correspondente. As extremidades destes fios são aproximadas às polias em movimento, iniciando a injeção. Durante esse processo, as esferas são inseridas na cavidade a uma taxa de 0.40 cm/s, formando elementos que interagem no seu interior. O foco inicial era identificar o comprimento crítico do fio que estivesse na iminência do entupimento. Isso foi feito com o objetivo de evitar que, quando as esferas se reorganizassem na cavidade devido à inserção de novas esferas, nenhuma parte do fio fosse deslocado para fora do plano principal de empacotamento, o que poderia comprometer a precisão dos dados posteriormente analisados computacionalmente. Assim, após determinar esse comprimento crítico, o procedimento foi repetido, sendo registrado em fotografias e vídeos.

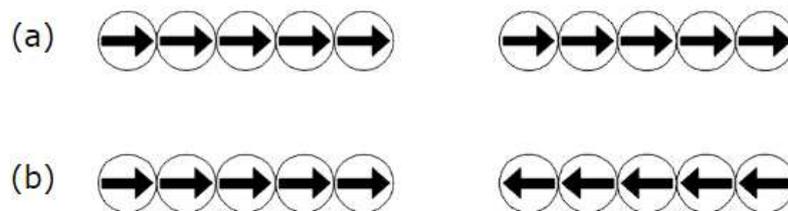
Posteriormente, introduziram-se substratos plásticos não coesivos na cavidade, seguindo os mesmos procedimentos previamente descritos. Para cada percentual de preenchimento do substrato, foi determinado um comprimento característico do fio que estava prestes a causar o entupimento. A coleta de dados durante a pesquisa foi dividida em duas etapas: a primeira envolveu registros do estágio final do empacotamento, e a segunda, gravações de vídeo do processo ao longo do tempo. O número de esferas magnéticas utilizadas variou de acordo com essas condições de contorno, totalizando em média 555, 490 e 345 esferas para os percentuais de preenchimento de 0%, 20% e 50% de substratos plásticos, respectivamente. Para a análise temporal do empacotamento, a injeção foi realizada sem a presença de substratos, observando um uso médio de 594 esferas.

No total, foram realizados 124 experimentos na pesquisa. Destes, 84 foram executados na primeira etapa, onde 21 registros fotográficos foram obtidos para a cavidade sem substratos, 33 para condições com 20% de ocupação por esferas plásticas e 30 para 50% de preenchimento. Na segunda etapa, foram gravados 40 vídeos para a injeção dos fios na configuração da cavidade sem substrato, sendo 25 deles relativos à condição inicial para a orientação dos dipolos paralelos e 15 vídeos para a orientações dos dipolos antiparalelos.

3.2.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO EXPERIMENTO

Aplicando as equações de Maxwell juntamente com as devidas condições de contorno para a eletrostática, é possível deduzir que as linhas de campo elétrico divergem de uma carga quando esta está positivamente carregada e convergem quando esta apresenta-se negativamente carregada. No entanto, tal associação não se aplica às linhas de campo magnético. Essas linhas não têm origem ou destinos específicos; em vez disso, formam circuitos fechados ou se estendem indefinidamente, indicando, do ponto de vista físico, que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (GRIFFITHS, 2013). Esse resultado demonstra a inexistência de monopolos magnéticos. Dessa forma, objetos magnetizados são caracterizados pela presença de polos magnéticos, comumente denominados como norte e sul. Com base nesse princípio, é possível estabelecer duas condições iniciais para a injeção dos fios magnéticos, tratados neste trabalho: uma em que a orientação resultante dos dipolos estão na mesma direção e sentido, o que denomina-se orientação paralela (Figura 11.a), e a outra em que as orientações estão na mesma direção, mas com sentidos opostos, denominado orientação antiparalela (Figura 11.b).

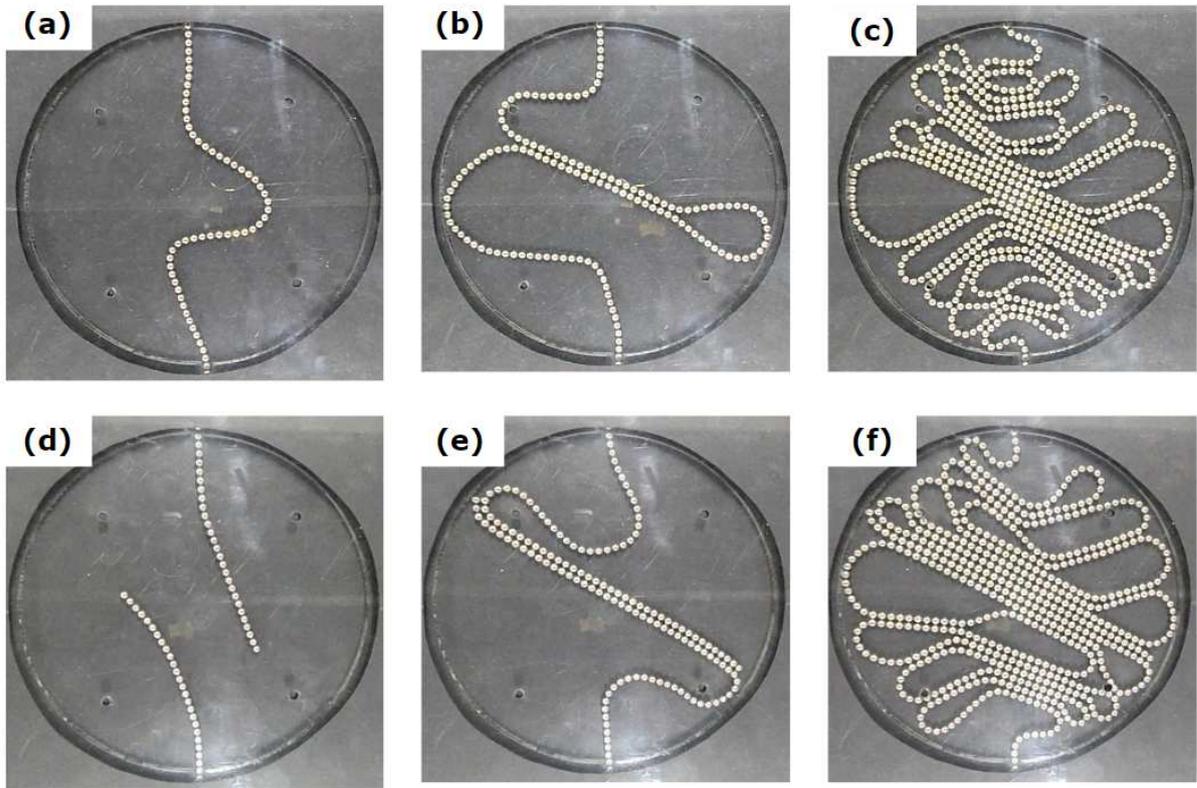
Figura 11 – Condições iniciais da orientação dos dipolos magnéticos: (a) Orientação paralela; (b) Orientação antiparalela.



Fonte: O autor

Conforme discutido por Borges (2016), ao impor estas condições iniciais para a orientação dos dipolos nos fios magnéticos, diametralmente opostos, inseridos em uma cavidade circular de 10 cm de diâmetro, verificou-se a formação de dois arranjos morfologicamente distintos, denominados de "Loop" e "Espiral", para as condições, respectivamente, apresentadas na Figura 11. No entanto, contrariamente a essas observações, quando os fios magnéticos são inseridos em uma cavidade com o dobro do diâmetro (20 cm), seus arranjos finais mostram-se demasiadamente semelhantes (Figuras 12.c e 12.f), com algumas distinções decorrentes das interações iniciais entre os fios (Figuras 12.b e 12.e).

Figura 12 – Arranjos resultantes das condições iniciais da orientação dos dipolos magnéticos: (a), (b) e (c) Arranjos para a orientação paralela; (d), (e) e (f) Arranjos para a orientação antiparalela.



Fonte: O autor

A variação morfológica apresentada por Borges (2016) para os arranjos resultantes do empacotamento não são persistentes quando os diâmetros da cavidade são modificados. Esta condição sugere que as magnitudes dos campos magnéticos intrínsecos das esferas, a velocidade de injeção e as dimensões da cavidade sejam suficientemente influentes para possibilitar a alteração do arranjo quando dispostos em diferentes condições de orientação. Assim, para o tamanho da cavidade utilizada neste trabalho, estas variações não ocorre de maneira tão pronunciada, uma vez que o fio apresenta-se mais dispersamente distribuído. Vale notar, entretanto, que nas primeiras interações, as estruturas resultantes para as diferentes condições de orientação dos dipolos apresentaram-se geometricamente distintas. Na Figura 12.b, observa-se a formação do primeiro laço, enquanto na Figura 12.e, uma estrutura rígida é formada, "isolando" as interações entre as duas partes dos fios inseridos.

Uma vez que as estruturas resultantes do processo de injeção estejam definidas, é crucial elaborar uma descrição mais fundamentada para identificar os fatores que influenciaram a formação dos padrões de empacotamento obtidos. É necessário estabelecer parâmetros geométricos, alguns já previamente analisados na literatura por Donato (2006) e Borges (2016), a fim

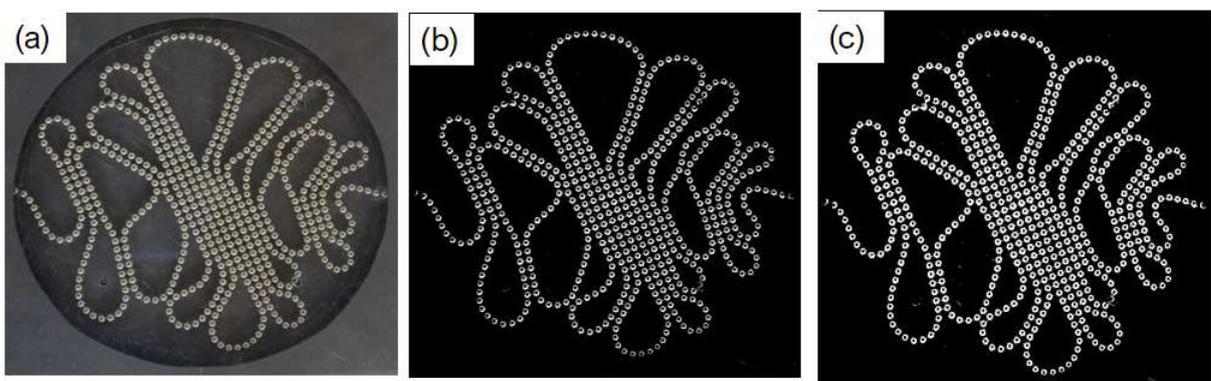
de esclarecer as correlações entre essas grandezas, evidenciando como evoluem à medida que o fio é introduzido na cavidade.

3.3 ANÁLISE DAS IMAGENS

À medida que os experimentos eram conduzidos, algoritmos na linguagem de programação MATLAB foram desenvolvidos para a identificação das esferas e a determinação das suas posições centrais. Para isso, uma imagem foi convertida em uma matriz de valores binários correspondentes a intensidade luminosa (pixels) das esferas quando capturadas por meio de filmagem ou fotografia. Após realizar uma análise quantitativa da imagem, tornou-se possível aplicar operações matemáticas e transformações nas matrizes para estimar medidas como área, perímetro e centro de massa do arranjo das esferas empacotadas.

Com o objetivo de determinar os centros de massa das seções transversais das esferas magnéticas, enquadrrou-se as imagens coletas da melhor forma, a fim de destacar os arranjos estabelecidos (Figura 13.a), posteriormente realizou-se a conversão da imagem original para um em tons de cinza, limitada pela intensidade luminosa (Figura 13.b). Para eliminar parcialmente resíduos oriundos dos elementos estáticos, como arranhões e o contorno da cavidade, foi utilizada uma imagem de referência capturada antes da inserção das esferas. Comparando as matrizes de ambas as imagens, o algoritmo exclui, torna unitário, o par de coordenadas com os mesmos valores (Figura 13.c). Após estas intervenções, a matrizes correspondente da imagem tratada foi transformada em binária.

Figura 13 – Passos para estimar o centro de massa das esferas magnéticas: (a) imagem registrada do empacotamento final livre de substratos; (b) Estabelecer um limiar de luminosidade a ser detectada; (c) Conversão da imagem para preto e branco.



Fonte: O autor

Na gravura resultante (Figura 13.c) do processamento de imagem mencionado anteriormente, aplica-se a transformação de Hough (YUEN *et al.*, 1990), por meio da função "*imfindcircle()*", no MATLAB, para detectar as seções circulares desejadas (Figura 15.a). Observa-se na Figura 15.a que as esferas não são perfeitamente delineadas; no entanto, a implementação do MATLAB é capaz de identificá-las, quando devidamente configurada. Essa abordagem, entretanto, não está isenta de desafios, podendo resultar em erros potenciais de centralidade e distância entre as esferas, conforme evidenciado na distribuição dos tamanhos dos raios detectados por esta implementação (Figura 14). A escala desses tamanhos é definida pelas dimensões (em pixels) das imagens utilizadas, sendo, por exemplo, 4601 x 4601 para o caso ilustrado na Figura 14, o que resulta num raio médio detectado de 38 unidades de pixel. Para mitigar essas questões, optou-se pela criação de uma representação, gerada por implementação computacional, que incorpora a distância média entre os primeiros vizinhos de cada centro detectado, determinada por meio da construção de um grafo (Figura 15.b). Cada esfera caracterizada é então preenchida com uma seção circular, cujo raio corresponde a metade do diâmetro médio (Figura 15.c). A matriz resultante é mais precisa do que a matriz binária apresentada na Figura 13.c. Nessa matriz confeccionada, foram atribuídos valores 0 para os pontos (pixels) internos das seções transversais das esferas e 1 para o fundo visível da cavidade (Figura 16). Essa representação final do arranjo possibilitou calcular propriedades geométricas, como as áreas e o perímetro das áreas circundadas por esferas magnéticas. (Figura 23)

Figura 14 – Distribuição dos tamanhos dos raios detectados em função dos índices das esferas.

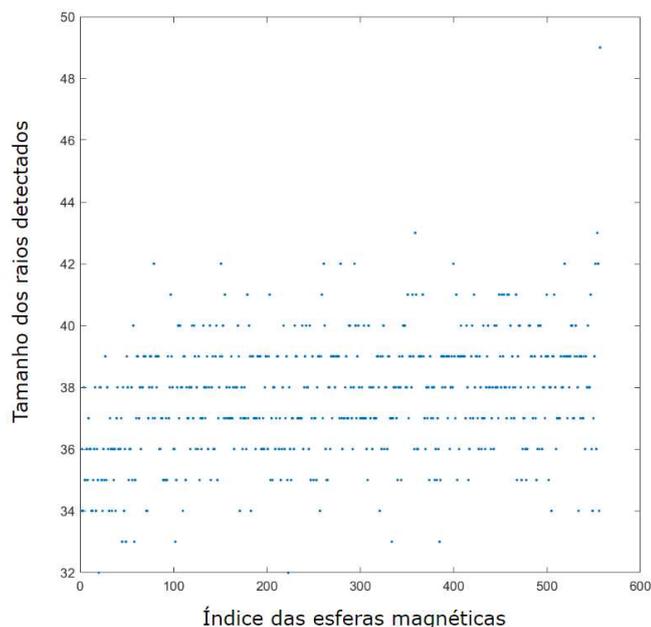


Figura 15 – (a) Detecção das seções transversais das esferas, quando aplicado as transformação de Hough a um setor do arranjo empacotado; (b) Grafo de um setor do arranjo empacotado; (c) Confeção do arranjo das esferas magnéticas, utilizando o diâmetro médio entre as esferas detectadas.

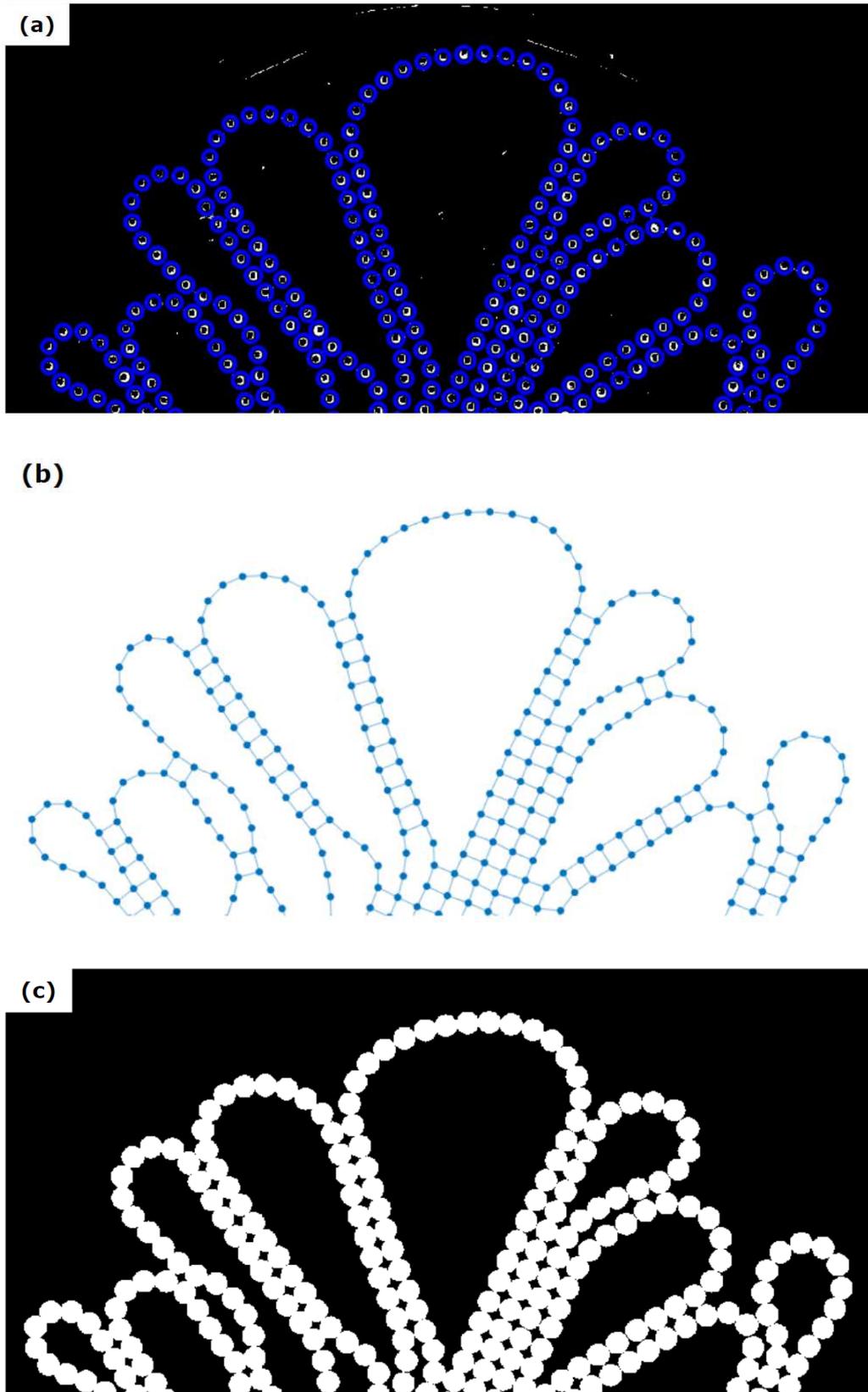
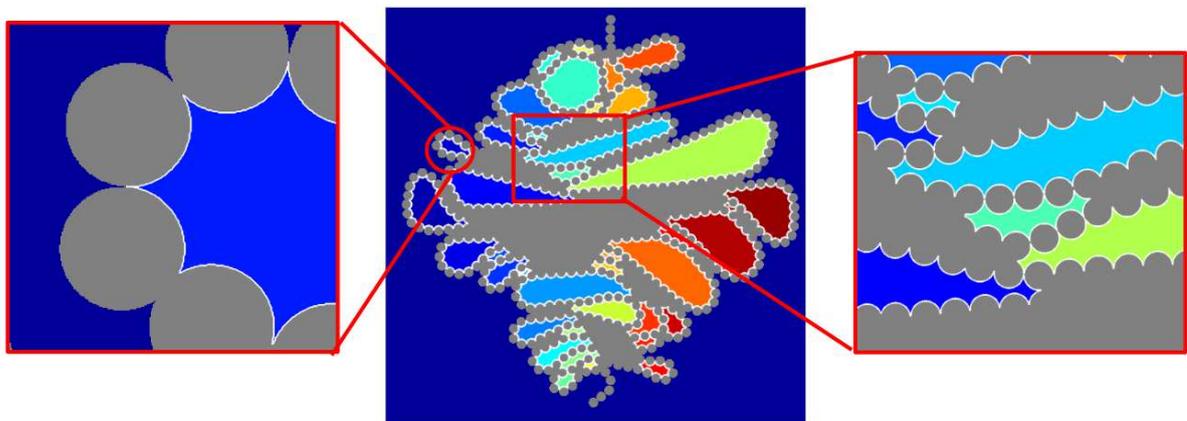


Figura 16 – Segmento do fio, formado por esferas magnéticas, na representação da matriz confeccionado pela implementação computacional, utilizando a condição de contorno da seção circular com diâmetro médio.



Fonte: O autor

Figura 17 – Determinação das propriedades geométricas de área (regiões coloridas) e perímetro (contorno branco) dos laços construídos no empacotamento dos fios magnéticos.



Fonte: O autor

4 RESULTADOS

Nesta seção, realiza-se uma análise detalhada dos aspectos físicos e geométricos resultantes dos arranjos observados no empacotamento de fios magnéticos considerando as diferentes condições de contorno para a orientação dos momentos dos dipolos magnéticos e a presença de substratos plásticos no inteiro da cavidade. O objetivo é caracterizar o comportamento fundamental do empacotamento de um fio magnético dentro de uma cavidade circular, com base nos parâmetros geométricos e físicos que emergem dessa processo de injeção.

4.1 DISTRIBUIÇÃO DAS ÁREAS DELIMITADAS PELAS ESFERAS MAGNÉTICAS

Em processos de empacotamento, é comum observar a fração de preenchimento, que corresponde à proporção da área ocupada pelos elementos injetados em relação ao espaço disponível na cavidade. Como previamente mencionado, em virtude das forças de interação magnética, é possível estabelecer uma analogia entre as cadeias de esferas magnetizadas e hastes elásticas (VELLA *et al.*, 2014). Um parâmetro geométrico de destaque, decorrente dessa propriedade, é a formação de laços, que são áreas fechadas delimitadas pelo contato entre as hastes. Os laços exibem uma característica intrínseca que estabelece uma relação direta entre sua curvatura e a retenção de energia de deformação (VELLA *et al.*, 2014). É importante ressaltar, contudo, que dentre os laços formados nos arranjos dos fios magnéticos, surgem áreas resultantes da frustração das interações magnéticas. Essas frustrações ocorre quando há impedimentos, também de natureza magnética, que dificultam a transição do arranjo para um estado de energia mínima. É relevante observar que tal fenômeno não é identificado nos empacotamentos de fios metálicos (DONATO, 2006). De todo modo, quantificar a estrutura com base no número de laços ou na distribuição das áreas desses elementos em função da fração de empacotamento, pode oferecer informações significativas sobre a morfologia das estruturas resultantes dos empacotamentos.

O limite de empacotamento nos experimentos está relacionado à configuração inicial das orientações dos dipolos magnéticos dos fios (BORGES, 2016), bem como a porcentagem dos substratos plásticos na cavidade. Este cenário proporciona a identificação de áreas abrangendo diversas magnitudes, correlacionadas à ordem de grandeza do raio escolhido para a cavidade. Contudo, procurou-se identificar uma tendência nessas áreas, associada a cada condição de contorno, em função da fração de empacotamento. Para tal propósito, foram conduzidos cinco

experimentos de teste com um número reduzido de esferas, visando determinar um valor médio para a quantidade característica de pixels correspondente a uma unidade de esfera detectada (A_0). O resultado desse procedimento indicou um valor aproximado de $A_0 = 8890$ pixels, considerando uma imagem com dimensão de 4601×4601 pixels. Esse procedimento visa normalizar as áreas, seguindo uma abordagem semelhante à realizada por Borges (2021). Assim, as áreas adimensionais (A^*), posteriormente calculadas, representarão a quantidade de esferas magnéticas necessárias para preencher os respectivos espaços, na forma $A^* = A_l/A_0$, onde A_l é a área delimitada pelos laços, medida em pixels.

Após a determinação das áreas, parâmetro associado a eventos probabilísticos, uma variável primária de interesse reside na função densidade de probabilidade $P(A^*)$, destinada a modelar os tamanhos dos eventos observados. Neste contexto, emprega-se o método do estimador de máxima verossimilhança para identificar a distribuição de probabilidade $P(A^*)$ que governa o conjunto dos dados experimentais. A premissa fundamental desse método é maximizar a verossimilhança, ou seja, a probabilidade de observar os dados em conformidade com os parâmetros da distribuição. A função de verossimilhança dessas variáveis é estabelecida multiplicando as probabilidades resultantes para cada tamanho de evento observado experimentalmente. O objetivo é atingido ao derivar a função de verossimilhança em relação aos parâmetros, igualando-a a zero e resolvendo para os valores que a maximizam. O estimador resultante proporciona uma avaliação robusta dos parâmetros da distribuição, possibilitando uma descrição mais precisa e informativa dos dados experimentais.

Sabe-se que a probabilidade de observar áreas dentro do intervalo $[A_1^*, A_2^*]$ é expressa pela integral da função densidade de probabilidade, denotada por $P(A^*)$, ao longo desse intervalo, com a condição de que $P(A^*)$ esteja normalizado. Contudo, ao realizar a integral $C(x) = \int_x^\infty P(A^*) dA^*$, obtém-se a função de distribuição cumulativa complementar, representada por $C(A^*)$. Esta função indica a fração de eventos observados com tamanhos superiores a A^* , sendo particularmente valiosa na investigação de eventos extremos e do comportamento nas caudas da distribuição (SPARKS; MAAß, 2018).

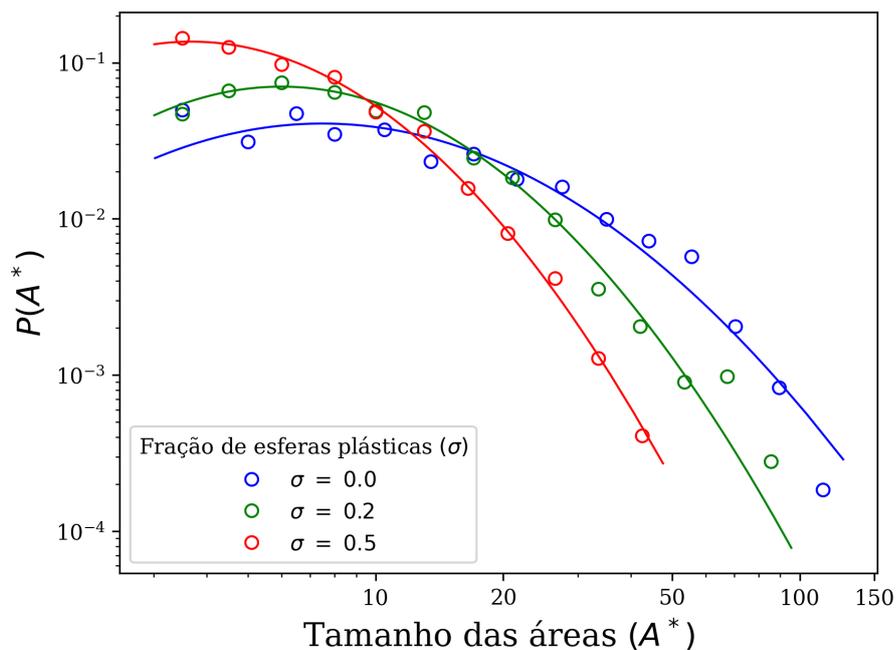
A utilização do pacote **powerlaw** (ALSTOTT *et al.*, 2014) automatiza a determinação das funções de distribuição de probabilidade e cumulativa complementar. Adicionalmente, os parâmetros de "razão de verossimilhança" e "p-value" são calculados. O parâmetro de "razão de verossimilhança" possibilita a comparação da adequação de diferentes modelos estatísticos para o conjunto de dados observado. Ao comparar a estatística de teste com uma distribuição

de probabilidade conhecida, determina-se o "p-value" associado, permitindo decidir se há evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula do modelo. Dessa maneira, as distribuições de probabilidade das áreas foram determinadas e comparadas utilizando este pacote, **powerlaw**, em Python.

Com a implementação do algoritmo estabelecida, foram iniciadas as análises das distribuições de probabilidade para os dados relativos as áreas delimitadas pelas esferas, considerando a presença de substratos plásticos no interior da cavidade. Visando mitigar possíveis erros provenientes da detecção das áreas pelo processamento das imagens no MATLAB, optou-se por considerar apenas as áreas correspondentes a mais de 3 unidades de esfera como um limiar para a caracterização de uma área. Essa abordagem abrange tanto os laços quanto as frustrações geométricas resultantes das interações magnéticas. Verificou-se que a distribuição que melhor se adéqua aos dados obtidos, segundo o método da máxima verossimilhança, é do tipo log-normal, da forma 4.1, como mostrados na Figura 18.

$$P(A^*, \mu, \sigma) = \frac{1}{A^* \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln(A^*) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (4.1)$$

Figura 18 – Distribuição de probabilidade das áreas $p(A^*)$ para o arranjo final do empacotamento na ausência de substrato ($\sigma = 0.0$) e com substrato plástico com taxa de 20 % ($\sigma = 0.2$) e 50 % ($\sigma = 0.5$) preenchido.



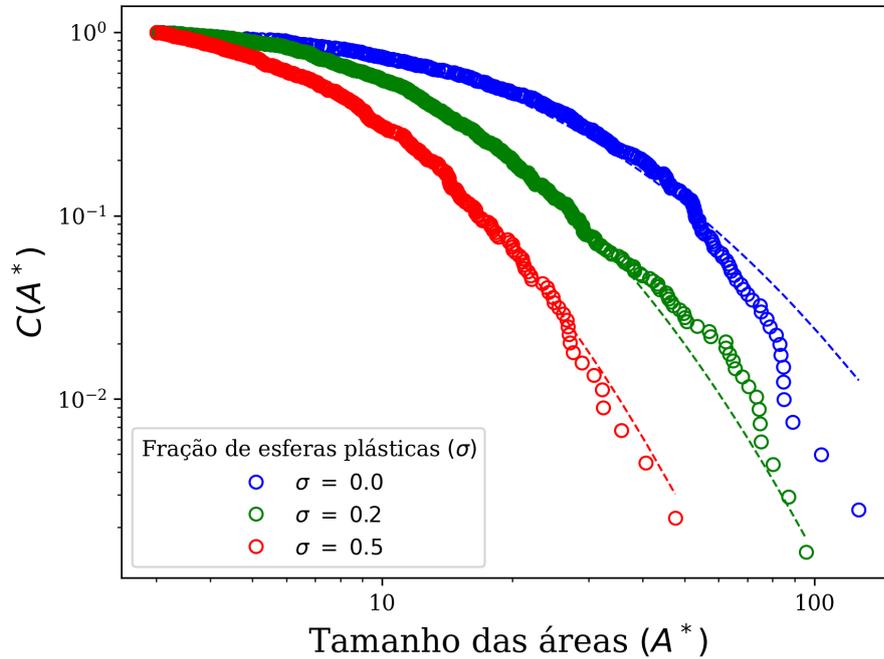
Fonte: O autor

Nas distribuições (Figura 18), foi observado que à medida que a porcentagem do substrato plástico aumenta, as curvas das distribuições deslocam-se para a esquerda e para cima, indicando uma maior probabilidade de ocorrência de eventos com áreas acessíveis menores. Esse comportamento sugere uma maior compactação no empacotamento. Adicionalmente, nas distribuições, destaca-se uma região específica, situada entre os valores de $10 < A^* < 20$ unidades de esferas, onde cada vértice possui a característica de apresentar a mesma probabilidade de ocorrência, independentemente da porcentagem do substrato adicionado à cavidade. Nota-se que essa região configura um "intervalo de transição", onde as curvas que exibem as maiores probabilidades de ocorrência para uma dada área $A^* < 10$, apresentarão as menores áreas acessíveis.

Na análise fundamentada na distribuição cumulativa complementar, investiga-se a fração acumulada de eventos observados com tamanhos superiores a um limiar específico em um conjunto de dados. Essa abordagem revela-se essencial ao examinar a ocorrência de eventos de baixa frequência. Observa-se, por exemplo, ao considerar valores de $C(A^*)$ iguais a 10^{-1} para as respectivas frações de substrato, pode-se inferir que todas as áreas acima desse limiar possuem uma probabilidade de 10% de ocorrência, indicando que os outros 90% já foram acumulados. No contexto do arranjo sem substratos, verifica-se que os 10% superiores ocorrem para valores de área acima de 70 unidades de esferas. Em contrapartida, para uma ocupação de 50% do substrato, esses 10% correspondem a áreas superiores a 20 unidades de esferas, conforme evidenciado na Figura 19, indicando novamente a compactação do empacotamento com a adição de substratos.

Ao adotar essa abordagem, observa-se que os valores das maiores áreas acessíveis em cada condição de preenchimento são pouco frequentes, o que pode resultar em desvios nos ajustes propostos, especialmente nas caudas da distribuição. Além disso, nota-se que a curva para $\sigma = 0.0$ representa a fronteira externa das áreas acessíveis nos experimentos, enquanto as curvas à esquerda representam todos os arranjos resultantes da variação dos substratos no interior da cavidade. Essas curvas se estendem até o limite em que a adição de substratos impede o entrelaçamento dos fios, fator que possibilita a formação dos laços.

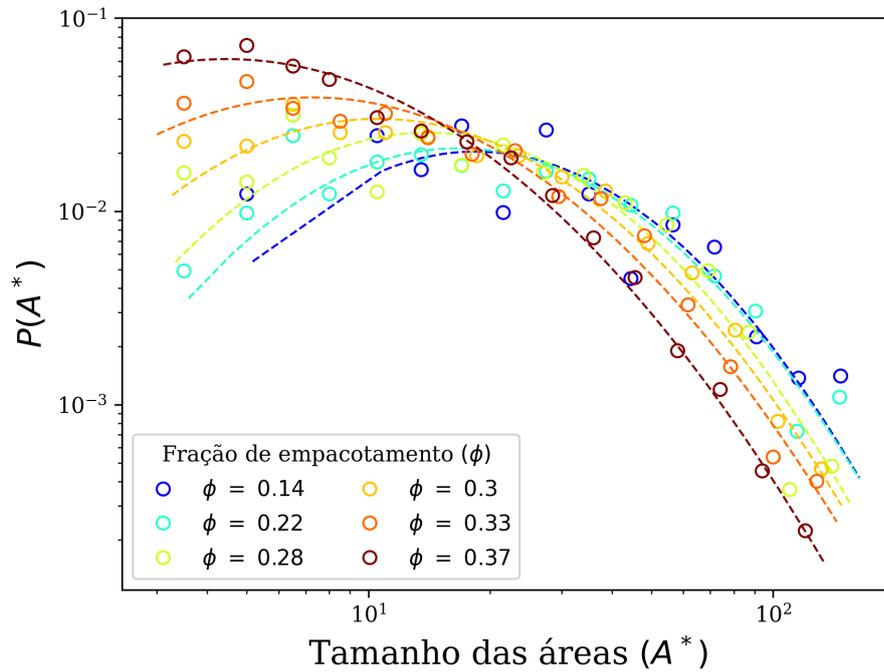
Figura 19 – Distribuição cumulativa complementar $C(A^*)$ para os arranjos finais do empacotamento na ausência de substrato ($\sigma = 0.0$) e com substrato plástico com taxa de 20 % ($\sigma = 0.2$) e 50 % ($\sigma = 0.5$) preenchido.



Fonte: O autor

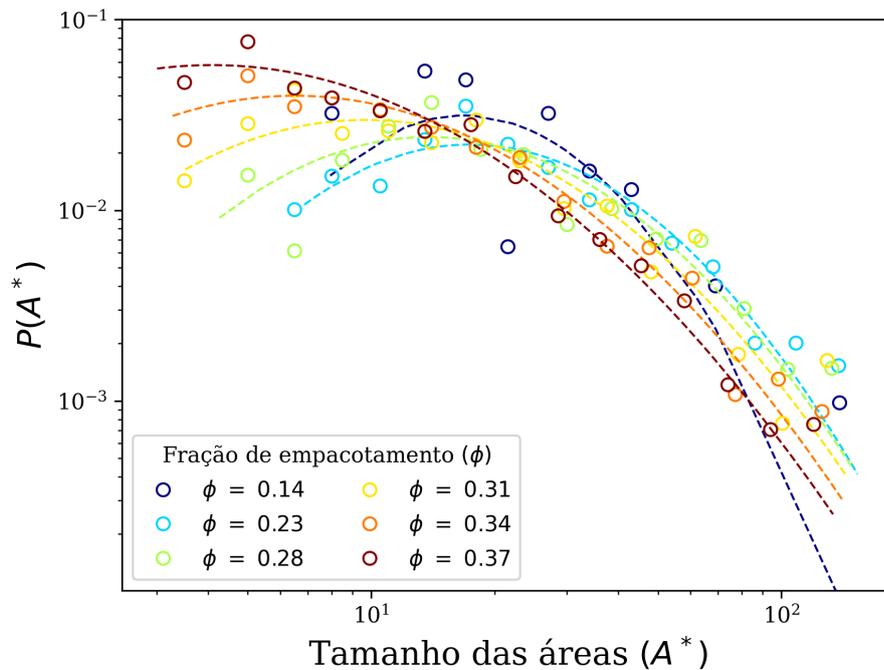
Ao examinar o processo de injeção dos fios magnéticos ao longo do tempo, considerando as diferentes condições iniciais das orientações dos dipolos magnéticos e a ausência de substratos plásticos na cavidade, as distribuições de probabilidade das áreas desses arranjos são apresentadas nas Figuras 20 e 21. Como já observado na Figura 18, as curvas para diferentes frações de empacotamento coincidem em uma região onde, independentemente da quantidade de esferas inseridas, a probabilidade de ocorrência é constante. Essa convergência é mais evidente para frações de empacotamento próximas ao máximo de confinamento ($\phi > 0.25$). A persistência desse entrelaçamento nas curvas das distribuições, independentemente das condições de orientação dos dipolos, em um intervalo de $10 < A^* < 20$ unidades de esfera, sugere a formação de uma estrutura básica nesses arranjos em uma fração próxima de $\phi = 0.25$. Essa estrutura mantém-se até o término do empacotamento, apresentando a mesma probabilidade de ocorrência. Este fenômeno destaca a estabilidade de uma configuração específica, independente das variações nas condições iniciais e na quantidade de esferas magnéticas injetadas.

Figura 20 – Distribuição de probabilidade das áreas, ao longo do tempo, para a condição de orientação dos dipolos magnéticos paralelos (Figura 11.a).



Fonte: O autor

Figura 21 – Distribuição de probabilidade das áreas, ao longo do tempo, para a condição de orientação dos dipolos magnéticos antiparalelos (Figura 11.b).

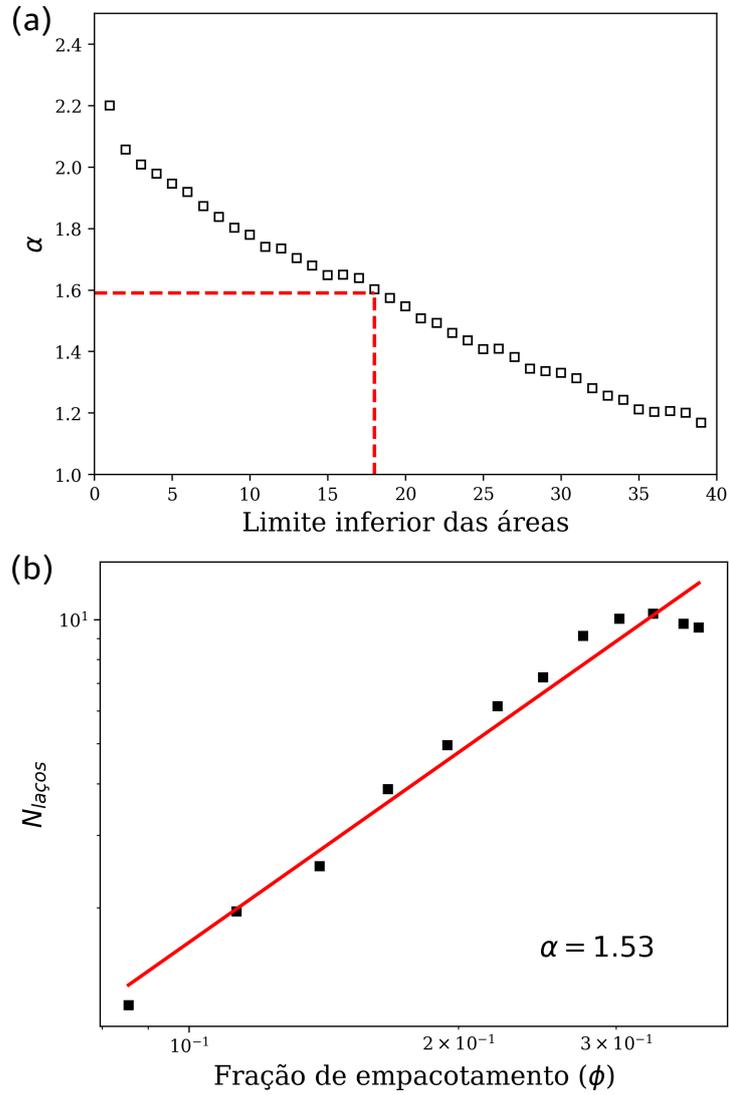


Fonte: O autor

O dimensionamento das áreas observadas durante o empacotamento é definido pelo balanço entre as forças externas e internas ao fio. Na tentativa de caracterizar a estrutura básica, denominada de laço, Borges (2016) propôs, por meio da inspeção direta da imagem, a contagem das áreas observadas para os arranjos com dipolos orientados inicialmente de forma paralela, em uma cavidade de 10 cm de diâmetro. Nessa configuração, em que a injeção das esferas enfileiradas ocorre com os dipolos apontados na mesma direção e sentido (Figura 11.a), surgem estruturas similares às observadas em empacotamentos de fios elásticos em cavidades circulares rígidas (DONATO, 2006). Para quantificar a formação destas estruturas nos arranjos resultantes do empacotamento, Borges (2016) investigou a relação entre o número dos laços e a fração de ocupação da cavidade, obtendo uma relação da forma $N_l \propto \phi^\alpha$, onde o parâmetro $\alpha_{magnético} = 1.52 \pm 0.02$. Por outro lado, Stoop *et al.* (2008) relatam variações nos valores de α nos regimes associados aos padrões clássico e plástico para a formação dos laços, apresentando $\alpha_{clássico} = 1.75 \pm 0.03$ e $\alpha_{plástico} = 1.85 \pm 0.04$, respectivamente. Borges (2016) justifica a variação observada no parâmetro α pela influência das interações de longo alcance entre os dipolos magnéticos das esferas. O expoente inferior, ao ser contrastado com os outros modelos, evidencia que a interação magnética por assumir natureza atrativa, restringe a diversidade de curvaturas permitidas e inibe a formação de grandes laços, em contraste com o que é observado no empacotamento dos fios metálicos, por exemplo.

Na busca pela obtenção do mesmo coeficiente α apresentado por Borges (2016), que é intrinsecamente livre de escala, realizou-se a calibração dos dados provenientes das áreas presentes nos arranjos. Estes arranjos são caracterizados pelo orientação dos dipolos magnéticos inicialmente paralelos (Figura 11.a) e injetados em uma cavidade com o dobro do diâmetro. A calibração consiste na restrição gradual dos limites inferiores das áreas coletadas, seguida pela contagem do número de laços correspondentes às áreas restantes, determinando assim o coeficiente α para cada situação (Figura 22.a). Este ajuste foi conduzido em diversos cenários, considerando, por exemplo, as áreas acima de 5, 10 e 15 unidades de esferas, resultando em valores de α iguais a 1.91, 1.73 e 1.57, respectivamente. Para o valor correspondente a $\alpha = 1.53$ (Figura 22.b), a área de corte foi estabelecida em 18 unidades de esfera, considerando essa área como efetiva para a formação dos laços, conforme caracterizado por Borges (2016).

Figura 22 – (a) Determinação do coeficiente α para cada uma das condições de limitação inferior das áreas ; (b) Relação entre o número de laços e a fração de empacotamento para $\alpha = 1.53$



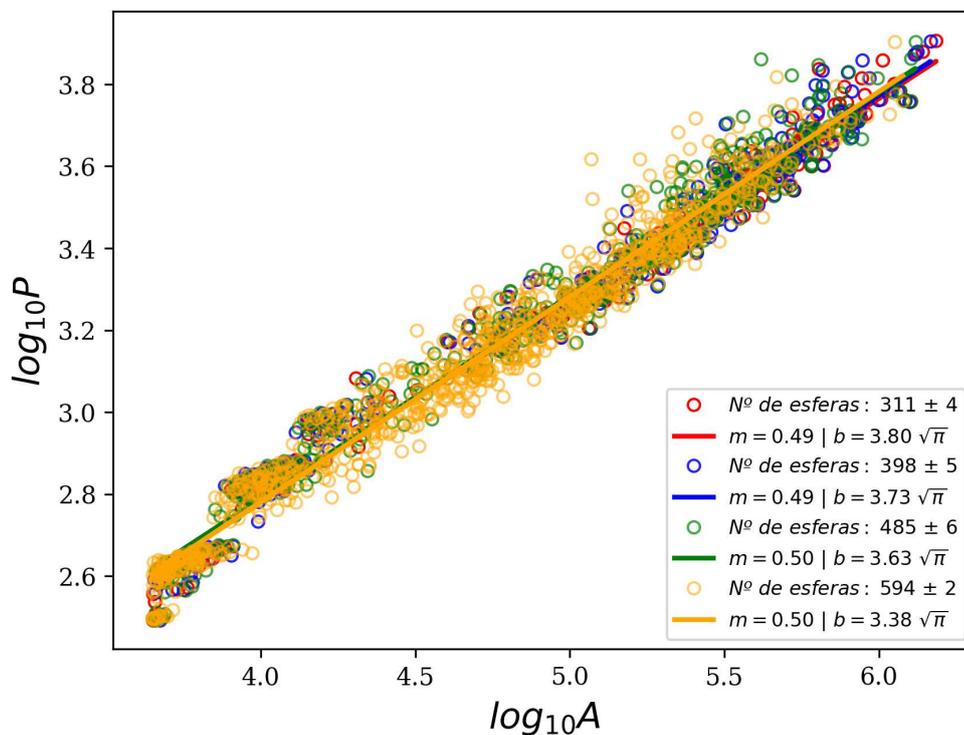
Fonte: O autor

4.2 RELAÇÃO PERÍMETRO-ÁREA

Para objetos Euclidianos bidimensionais, a razão $\rho = h/\sqrt{s}$, onde s é a área delimitada pelo perímetro h , é uma característica intrínseca do tipo de objeto e independente do seu tamanho. Por exemplo, para círculos, $\rho = 2\sqrt{\pi}$, e para quadrados, $\rho = 4$ (FEDER, 1988). Ao restringir a análise para áreas acima de 5 unidades de esfera e perímetros superiores a 1000 pixels, a Figura 23 apresenta a relação entre as áreas e os perímetros calculados para quatro diferentes frações de empacotamento, considerando a condição de confinamento cujas orientações iniciais dos dipolos são paralelas e a cavidade não possui substratos. O termo representado pela letra m , na legenda da Figura 23, denota o expoente da variável área (s). Esses resultados evidenciam a recuperação da potência em \sqrt{s} , característica dos objetos Euclidianos.

No regime de alta densidade, a relação observada entre as áreas e os perímetros, resultantes do empacotamento dos fios magnéticos, é descrita por $\rho = 3.37\sqrt{\pi}$. Donato (2006) reporta, para o empacotamento de fios metálicos, a razão $\rho = 3.17\sqrt{\pi}$. Esses comportamentos reforçam a natureza geométrica e morfológicas destes arranjos, demonstrando consistência com as expectativas teóricas para objetos bidimensionais.

Figura 23 – Relação em escala logarítmica dos perímetros em função das áreas formadas ao longo da injeção do fio magnético, cuja orientação dos dipolos é do tipo paralela.



Fonte: O autor

4.3 PADRÕES DE EMPACOTAMENTO

Apesar da diferença qualitativa ser evidente à observação visual (Figura 24), tornar-se necessário extrair informações quantitativas que possam estabelecer as diferenças quando se analisam as morfologias geradas durante o empacotamento dos fios na presença dos substratos plásticos.

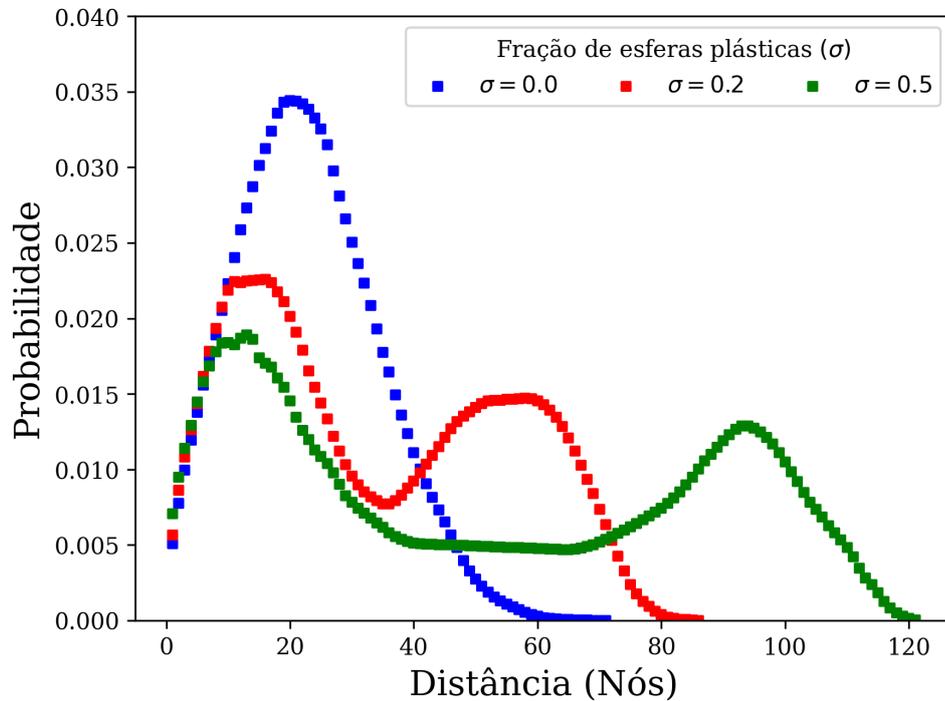
Figura 24 – Padrões de empacotamento observados para diferentes frações de preenchimento dos substratos: na ausência, 20 % e 50 % da cavidade preenchida, respectivamente.



Fonte: O autor

De maneira simplificada, tomou-se os grafos correspondentes a cada um dos arranjos, verificando a distribuição de probabilidade, em termos dos vértices, do menor caminho que conecta um dado nó a todos os demais (Figura 26). Observou-se que, para o regime livre de substratos, a distribuição é unimodal, caracterizada por um ponto de máximo na função de densidade de probabilidades e relativa simetria em torno do valor mais frequente da distribuição. À medida que os substratos são adicionados, a curva da distribuição se divide em duas, assemelhando-se a uma distribuição bimodal. No arranjo resultante do empacotamento, observou-se a formação de duas estruturas principais, ou clusters, que apresentam pontos próximos e conectados entre si, mas distantes um do outro, cuja conexão é estabelecida por esferas que possuem apenas dois graus de conectividade, como ilustrado na região central do regime de 50% de preenchimento da cavidade, na Figura 24. O comportamento dessas distribuições sugere uma transição de um regime unimodal para bimodal à medida que novas esferas plásticas são inseridas. Ao atingir o máximo possível de esferas plásticas, a curva da distribuição se estabiliza em um platô constante, caracterizado no arranjo confinado, em uma estrutura linear ou reta, sem a formação de laços ou quaisquer outras estruturas deformáveis.

Figura 25 – Distribuição da probabilidade das distâncias entre os nós observadas para as diferentes frações de preenchimento do substrato: 0 % ($\sigma = 0.0$) ; 20 % ($\sigma = 0.2$) e 50 % ($\sigma = 0.5$) da cavidade preenchida



Fonte: O autor

Uma abordagem adicional para analisar a morfologia resultante durante o empacotamento dos fios magnéticos consiste na determinação da função de distribuição radial, representada por $g(r)$. Esta distribuição é uma ferramenta analítica importante na investigação de arranjos bidimensionais complexos. Ela desempenha um papel fundamental na descrição estatística da distribuição espacial de elementos em um plano, fornecendo informações essenciais sobre a organização e a estrutura desses arranjos. A distribuição é empregada para determinar a probabilidade de encontrar uma partícula em uma distância radial específica em relação a um ponto de referência, oferecendo uma visão quantitativa da heterogeneidade espacial presente no sistema. Em contextos que envolvem materiais bidimensionais, como filmes finos, membranas celulares ou partículas auto-organizáveis em superfícies, como os fios magnéticos, a análise dessa função torna-se fundamental para compreender padrões de distribuição, como aglomerados, lacunas, redes de compactação ou qualquer organização específica. Para realizar a implementação da função de distribuição radial, é fundamental seguir uma série de passos gerais, os quais incluem:

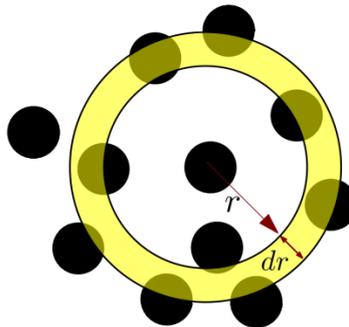
1. Definição do sistema e coleta dos dados

- Identifica-se o sistema ou arranjo bidimensional que seja analisado e coleta-se os dados relevantes acerca das posições destes elementos no plano.

2. Escolha dos pontos de referência

- A partir do centro de cada esfera, varia-se uma distância r na forma de cascas circulares concêntricas, com largura de dr .

Figura 26 – Ilustração das cascas circulares concêntricas com largura dr .



Fonte: Borges (2016).

3. Cálculo das distâncias radiais

- Calcule as distâncias radiais entre o ponto de referência e todos os outros pontos do sistema.

4. Agrupamento em anéis concêntricos

- Agrupe as distâncias calculadas em anéis concêntricos ao redor do ponto de referência.

5. Contagem de partículas em cada anel

- Determine o número de partículas contidas em cada anel concêntrico.

6. Normalização

- Normalize o número de partículas em cada anel pela área daquele anel.

7. Cálculo da função de distribuição radial

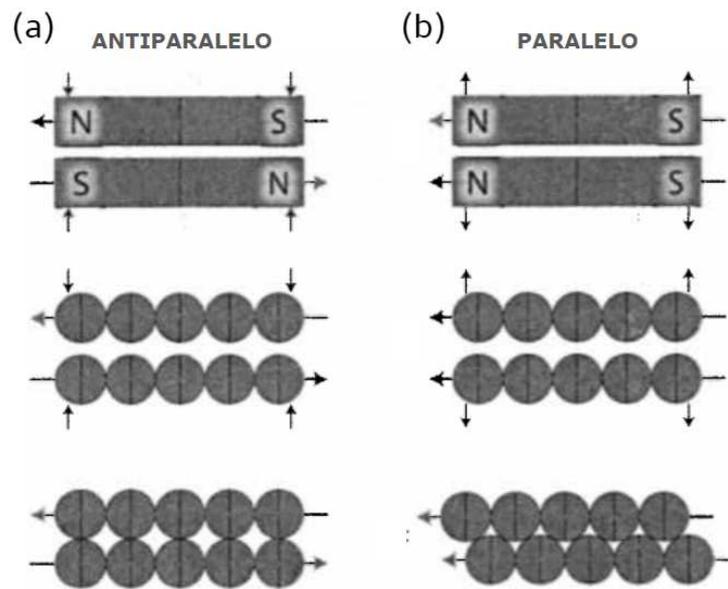
- Calcule a função de distribuição radial $g(r)$ pela equação 4.2

$$g(r) = \frac{\pi r_{med}^2}{N} \left\langle \frac{N^o \text{ de partículas com centro em } dr}{(2\pi r) dr} \right\rangle \quad (4.2)$$

onde r é a distância radial entre os pontos, r_{med} é a distância média entre os primeiros vizinhos, dr a largura do anel e N , o número total de partículas no sistema. O fator $\frac{\pi r_{med}^2}{N}$ é oriundo da utilização da densidade média de partículas para a normalização da função de distribuição radial $g(r)$.

Com base nas etapas descritas, propõe-se a análise de arranjos reduzidos observados nos empacotamentos dos fios magnéticos, com o objetivo de facilitar a interpretação apropriada dessa ferramenta para o caso estudado. Cada arranjo é composto por 20 esferas magnéticas, dispostas em duas camadas. O primeiro arranjo apresenta a disposição das camadas em uma rede quadrada (Figura 27.a), enquanto o segundo exibe uma configuração triangular (Figura 27.b).

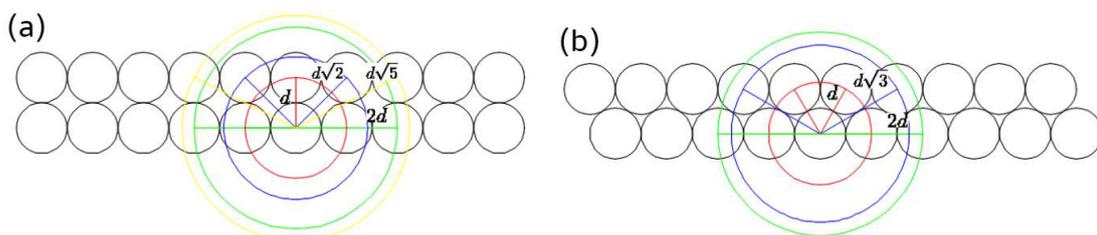
Figura 27 – Diagrama ilustrativo das configurações estáveis de (a) cadeias antiparalelas e (b) paralelas, destacando a formação das redes quadradas e triangulares, respectivamente.



Fonte: Boyd (2014)

Com base nas etapas 2, 3 e 4, previamente descritas, procura-se estabelecer a priori os picos esperados para os arranjos quadrados e triangulares. Utilizando uma esfera de referência, o raio é incrementado gradualmente até a detecção de um novo centro (Figura 28). Para a rede quadrada, as distâncias características entre os primeiros vizinhos são d , $\sqrt{2}d$, $2d$, $\sqrt{5}d$, $3d$, $\sqrt{10}d$, entre outras. Em contraste, para as redes triangulares, as distâncias incluem d , $\sqrt{3}d$, $2d$, $\sqrt{7}d$, e assim por diante.

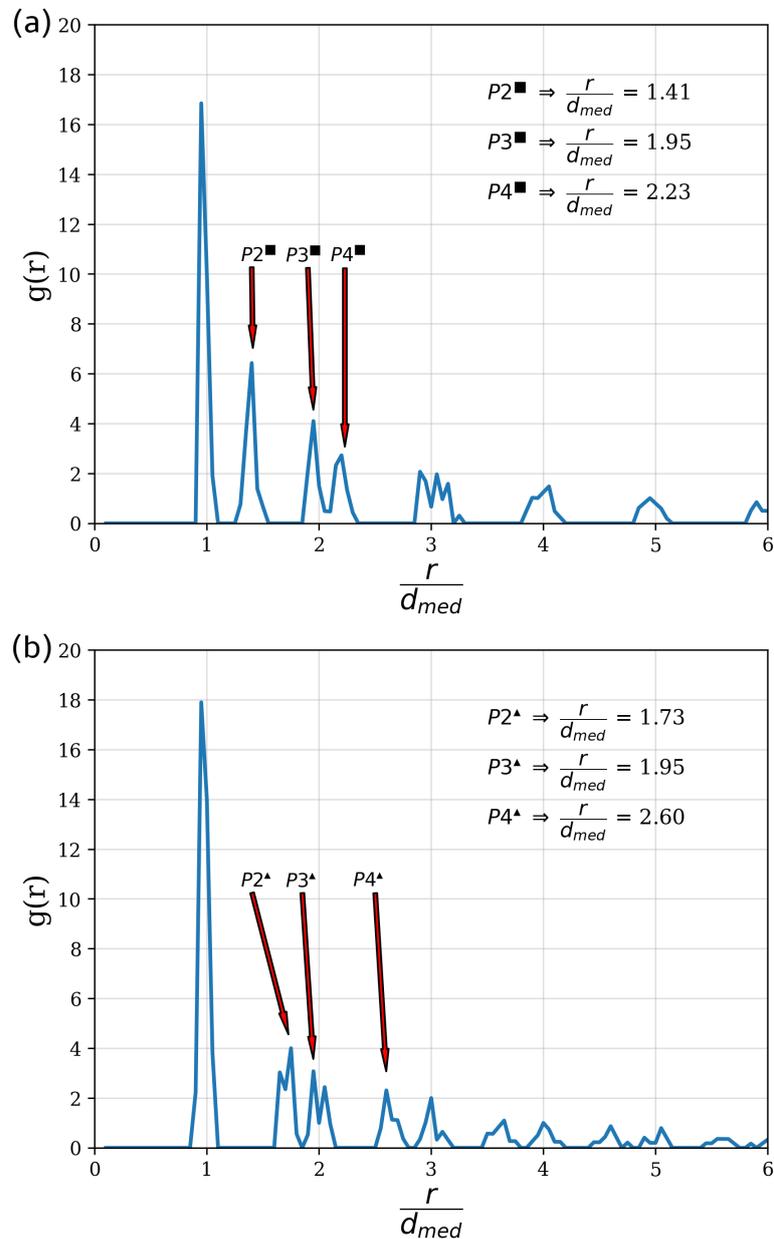
Figura 28 – Esquema ilustrativo dos primeiros vizinhos para (a) redes quadradas e (b) triangulares.



Fonte: O autor

As funções de distribuição radial $g(r)$ geradas para esses arranjos são exibidas na Figura 29, observa-se que os picos característicos correspondem aos valores dos primeiros vizinhos apresentados na Figura 28, o que evidencia a validade da implementação desenvolvida. No gráfico, o primeiro pico, notavelmente acentuado, corresponde aos primeiros vizinhos de cada esfera, situados a uma distância equivalente a um diâmetro. O pico P2 indica o segundo vizinho mais próximo, variando de acordo com o tipo de rede associado. O pico P3 representa as esferas distantes de dois diâmetros, e os demais picos semelhantes ao apresentado na Figura 28.

Figura 29 – Gráfico da função de distribuição radial, representado por $g(r)$, em função da distância r ao centro de cada esfera, normalizado pela diâmetro média d_{md} , referentes às (a) redes quadradas e (b) triangulares.

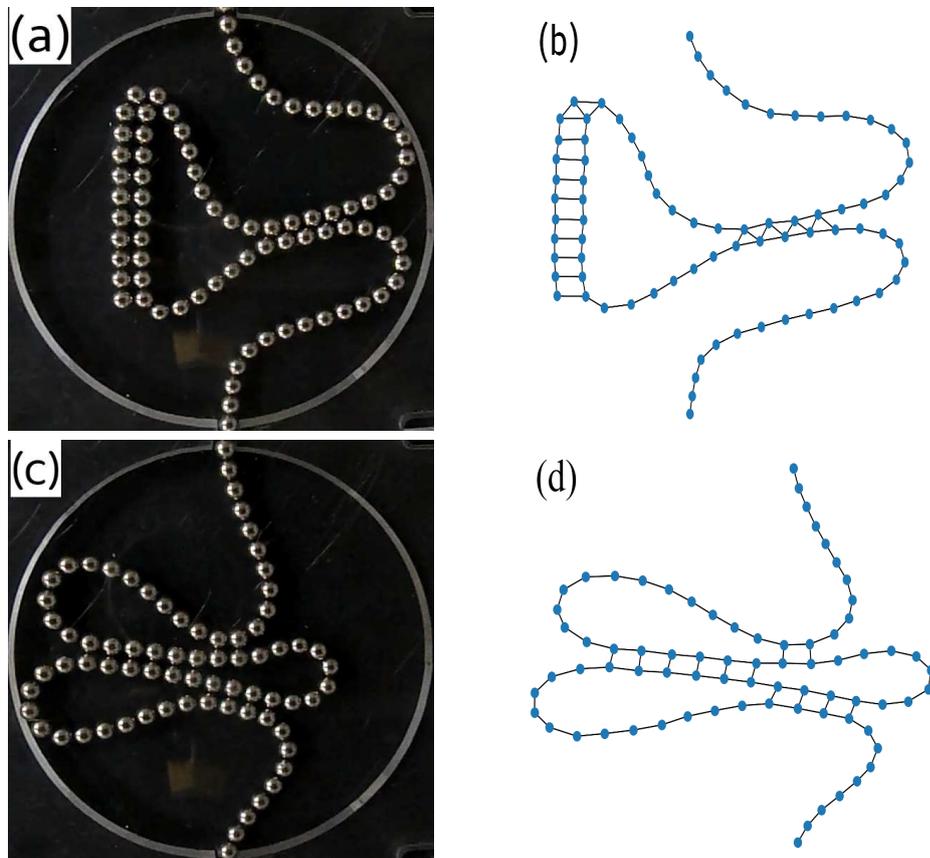


Fonte: O autor

Observa-se que o primeiro pico na rede triangular é mais acentuado do que na rede quadrada, apesar com o mesmo número de esferas nos arranjos. Essa disparidade resulta da capacidade de conexão direta com 6 esferas nas redes triangulares, em contraste com as redes quadradas, que podem conectar, no máximo, 4 esferas.

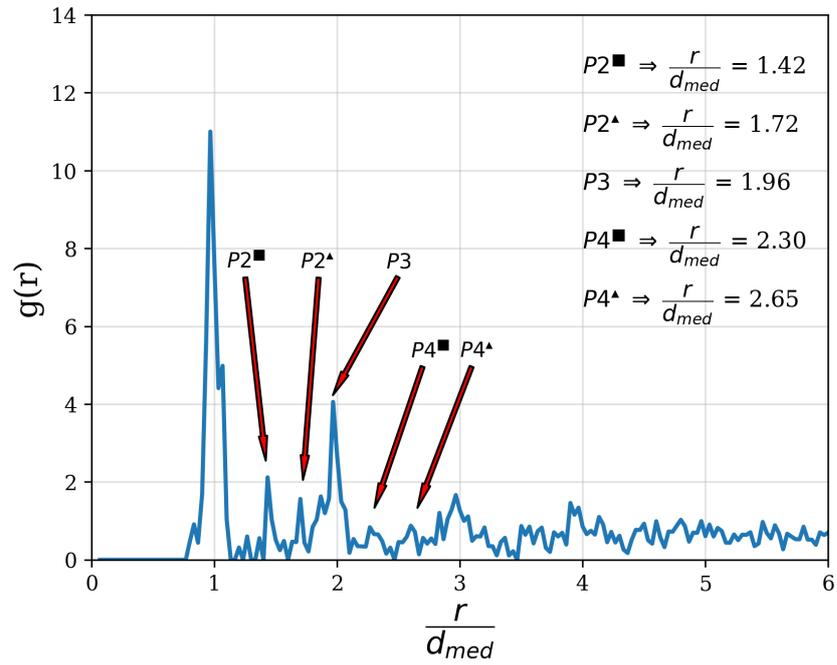
Considerando um arranjo resultante da inserção dos fios magnéticos na cavidade, busca-se identificar os picos característicos dos tipos de redes presentes nesse arranjo. Para simplificar essa abordagem, será adotado o menor dos raios da cavidade. Conforme relatado por Borges (2016) e verificado no presente estudo, esse raio corresponde a condição de contorno que possibilita a formação dos dois tipos de redes mencionados anteriormente. Na Figura 30, apresenta-se o arranjo a ser analisado, no qual se destaca a formação de duas regiões distintas evidenciadas pela presença das redes quadradas e triangulares. Aplicando a função de distribuição radial aos arranjos, identificam-se os picos característicos para ambas as redes (Figura 31 e Figura 32).

Figura 30 – Arranjos resultantes do empacotamento dos fios magnéticos em uma cavidade de 10 cm de diâmetro, com os dipolos magnéticos iniciais: (a) antiparalelos e (c) paralelos, onde (b) e (d) são os grafos dos respectivos arranjos.



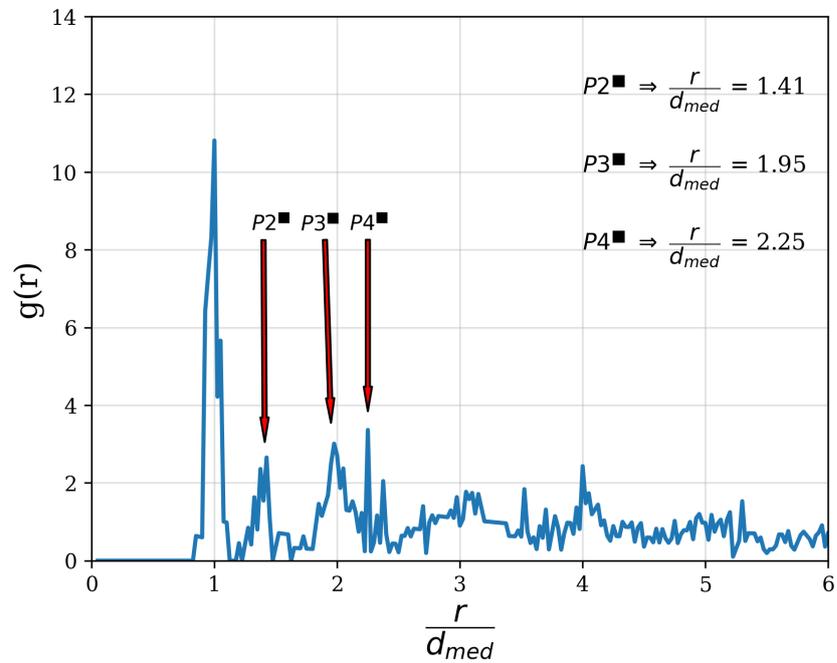
Fonte: O autor

Figura 31 – Função de distribuição radial do arranjo da Figura 30.a.



Fonte: O autor

Figura 32 – Função de distribuição radial do arranjo da Figura 30.c.



Fonte: O autor

4.4 INTERAÇÃO ENTRE ESFERAS MAGNETIZADAS E AS CONFIGURAÇÕES DE MENOR ENERGIA

Analisando a interação entre dois ímãs esféricos uniformemente magnetizados, nota-se que, devido aos seus momentos de dipolo não nulos, eles exercem maior influência em suas interações a distâncias significativas em comparação com suas dimensões individuais. Ao empregar argumentos de simetria, é possível estabelecer a equivalência entre o campo magnético fora dessas esferas e o campo resultante de um dipolo magnético pontual (JACKSON, 1999). As interações entre dipolos são frequentemente empregadas como ponto de partida em abordagens analíticas e numéricas para calcular as forças entre ímãs permanentes de diferentes formatos (VOKOUN *et al.*, 2009).

Do ponto de vista analítico (GRIFFITHS, 2013), o campo magnético em uma posição \vec{r} produzido por um dipolo magnético pontual \vec{m} localizado na origem, é dado por (4.3)

$$\vec{B}(\vec{m}, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \quad (4.3)$$

para $r = |\vec{r}|$ satisfazendo $r > 0$. Este campo pode ser obtido a partir do potencial escalar (4.4)

$$\varphi(\vec{m}, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (4.4)$$

Por meio da utilização de (4.5)

$$\vec{B}(\vec{m}, \vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \quad (4.5)$$

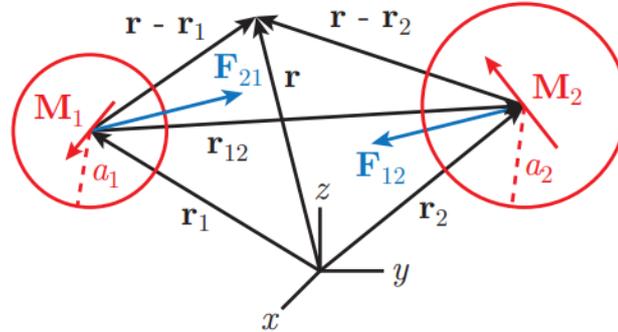
Tomando $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, φ satisfaz a equação de Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$.

Considerando dois dipolos, \vec{m}_1 e \vec{m}_2 , localizados respectivamente nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Da equação (4.3), o campo produzido pelo dipolo \vec{m}_i é $\vec{B}_i(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{m}_i, \vec{r} - \vec{r}_i)$, onde $i = \{1, 2\}$ e $\vec{r} - \vec{r}_i$ é o vetor posição relativo do dipolo m_i (Figura 33). Logo, o campo do dipolo \vec{m}_i avaliado na localização de \vec{m}_j é (4.6)

$$\vec{B}_i(\vec{r}_j) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \vec{r}_{ij} - \frac{\vec{m}_i}{r_{ij}^3} \right) \quad (4.6)$$

onde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ é a posição de \vec{m}_j em relação a \vec{m}_i , $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Figura 33 – Representação gráfica da interação entre duas esferas uniformemente magnetizadas, ilustradas por meio de dipolos pontuais, cuja os momentos magnéticos (\vec{m}_i) são proporcionais a magnetização das esferas (\vec{M}_i).



Fonte: Edwards *et al.* (2017)

A energia de interação entre m_j e o campo magnético de m_i é dado por (4.7)

$$U_{ij} = -\vec{m}_j \cdot \vec{B}_i(\vec{r}_j) \quad (4.7)$$

substituindo $\vec{B}_i(\vec{r}_j)$, apresentado em (4.6), na equação (4.7) obtém-se

$$U_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \right] \quad (4.8)$$

Dado que as esferas utilizadas no experimento são idênticas, apresentando tamanho e magnetização semelhantes, torna-se possível estabelecer um potencial macroscópico adimensional, designado por (4.9).

$$U = \frac{2\pi D^3}{\mu m^2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (4.9)$$

onde D é o diâmetro da esfera e m o momento do dipolo magnético correspondente. É conveniente incorporar essa escala de energia, pois ela representa fisicamente o valor do potencial repulsivo entre dois dipolos paralelos quando estão em contato (MESSINA *et al.*, 2014).

Do ponto de vista teórico, a compreensão da auto-organização magnética, resultante das interações entre dipolos, é complexa devido à significativa dependência das direções nas interações de longo alcance presentes no sistema. Messina *et al.* (2014) antecipa as configurações resultantes da auto-organização de ímãs esféricos, alcançadas quando a energia do sistema (Eq. 4.9) é minimizada. Nesse modelo, é notável que os parâmetros que caracterizam as partículas no sistema em coordenadas esféricas, que incluem as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas angulares azimutal (φ) e polar (θ) , têm a possibilidade de variar. O objetivo de

Messina *et al.* (2014) foi encontrar o arranjo de energia mínima para cada uma das N esferas consideradas.

Como resultado do modelo, Messina *et al.* (2014) relata a transição de dimensionalidade nas estruturas de energia mínima à medida que o número de esferas no sistema é incrementado. Observa-se, ainda, a formação de estruturas 2D organizadas em camadas, semelhantes a uma cebola, com a presença de espaços vazados ou frustrações geométricas na estrutura, provenientes das interações magnéticas entre as partículas.

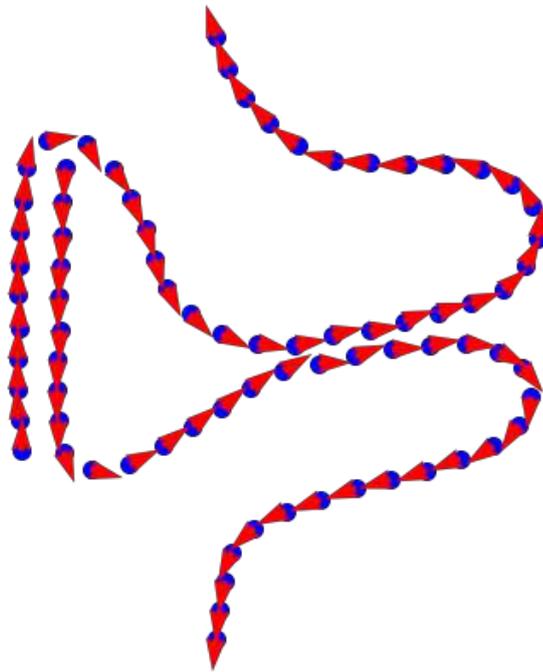
Utilizando os mesmos princípios, busca-se, neste trabalho, aplicar um algoritmo de minimização da energia do sistema, considerando as posições (x_i, y_i) e a orientação angular θ_i de cada dipolo \vec{m}_i . Com o intuito de explorar os diversos arranjos obtidos durante o processo de empacotamento, as posições das esferas são mantidas fixas, enquanto as orientações dos dipolos são tratadas como parâmetros livres. O algoritmo parte de orientações aleatórias dos momentos dos dipolos e, de maneira iterativa, busca atingir o mínimo de energia, ajustando ligeiramente os ângulos θ_i .

O método de otimização adotado é conhecido como BFGS, uma abreviação para "Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno". Trata-se de uma abordagem iterativa, derivada do método de Newton, desenvolvida para resolver problemas de otimização não lineares sem restrições. A condição de otimização de primeira ordem estipula que o gradiente da função seja zero, enquanto a condição de otimização de segunda ordem, visando minimizar a função custo, requer que a Hessiana seja definida positiva. O método BFGS utiliza o gradiente da função e estima a Hessiana, considerando a curvatura da função custo para determinar a trajetória de minimização. Esse método é aplicado para obter a configuração das orientações dos dipolos magnéticos, associadas a minimização da energia, para os diversos arranjos obtidos no empacotamento dos fios magnéticos, tais como o apresentado na Figura 30. Ao analisar as orientações magnéticas resultantes (Figura 34), observa-se que, no estado de mínima energia, as partículas geralmente formam arranjos ferromagnéticos em redes triangulares, enquanto nos domínios antiferromagnéticos, organizam-se em redes quadradas (FAZEKAS, 2007).

De modo a assimilar os resultados apresentados na função de distribuição radial para o mesmo arranjo ilustrado na Figura 30.a e as orientações dos dipolos (Figura 34), pode-se concluir que a natureza destas interações estabelece mínimos de energia nos intervalos característicos das redes associadas. Isso possibilita a determinação previa das orientações dos momentos dos dipolos magnéticos, apenas identificando os picos correspondentes a cada tipo

de rede formada na distribuição. Dessa forma, ao identificar picos nos valores de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, é possível inferir que o arranjo analisado possui estruturas compactas em redes quadradas e triangulares, simultaneamente.

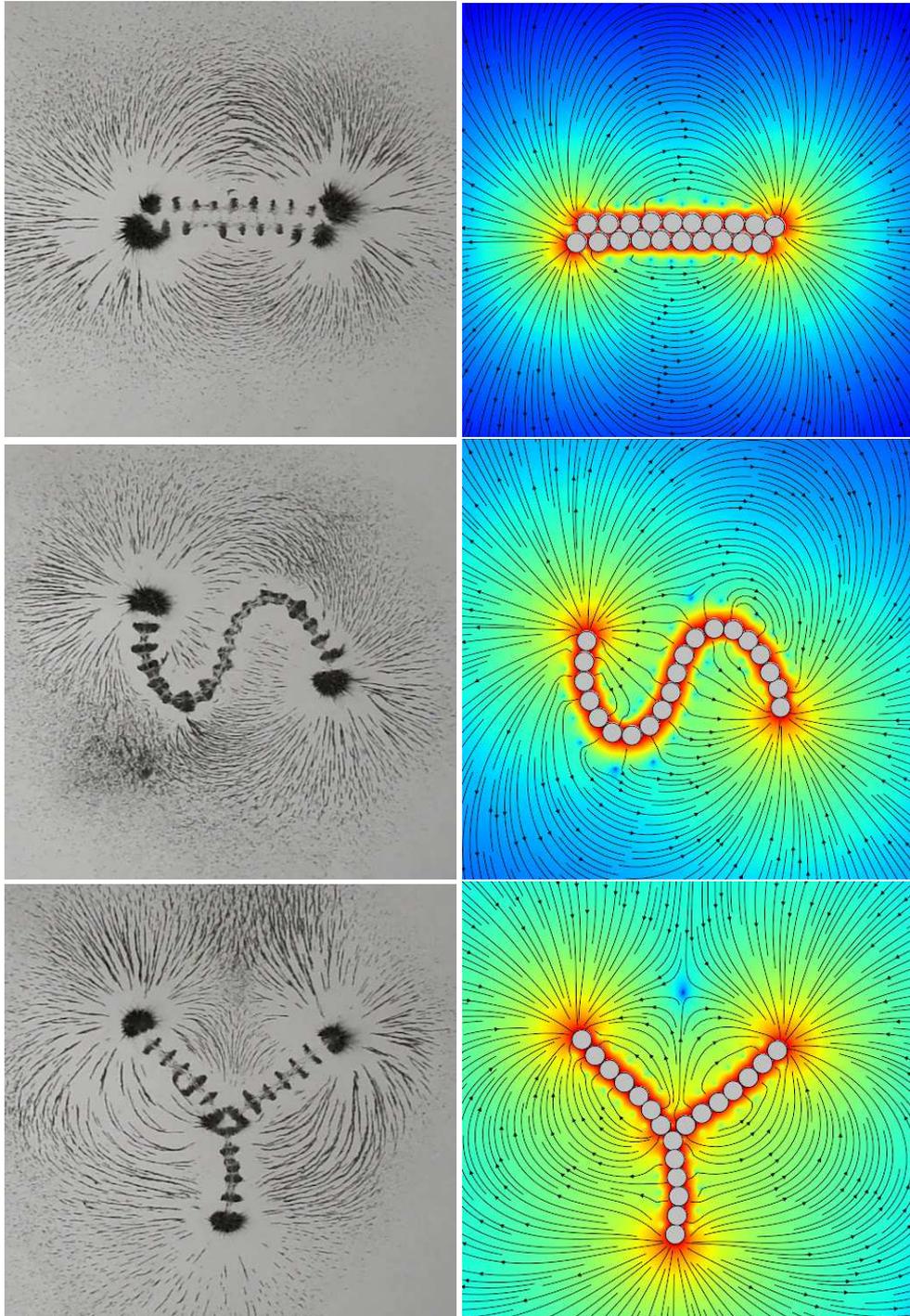
Figura 34 – Configuração das orientações dos momentos dos dipolos magnéticos, associado ao estado de mínima energia, do arranjo apresentado na Figura 30.



Fonte: O autor

Como meio de verificar a orientação dos momentos resultantes da minimização da energia do sistema, propõe-se a construção de pequenas estruturas compostas por algumas dezenas de esferas. Em um papel posicionado sobre essas estruturas, adicionou-se uma quantidade mínima de limalha de ferro, permitindo a caracterização das linhas de campo desses arranjos mediante movimentos suaves horizontais. Essas linhas de campo serviram como referência para a determinação dos campos magnéticos obtidas de maneira analítica, pela equação 4.3. Na Figura 35, são exibidas representações destas linhas de campo, evidenciando a concordância entre os arranjos visualizados empiricamente e aqueles determinados ao aplicar as orientações dos dipolos obtidas pela minimização da energia. Essa coerência fortalece a validação dos resultados obtidos.

Figura 35 – Linhas de campo nas configurações resultantes de esferas magnéticas, caracterizadas empiricamente pela disposição das limalhas de ferro e analiticamente pela equação 4.3.



Fonte: O autor

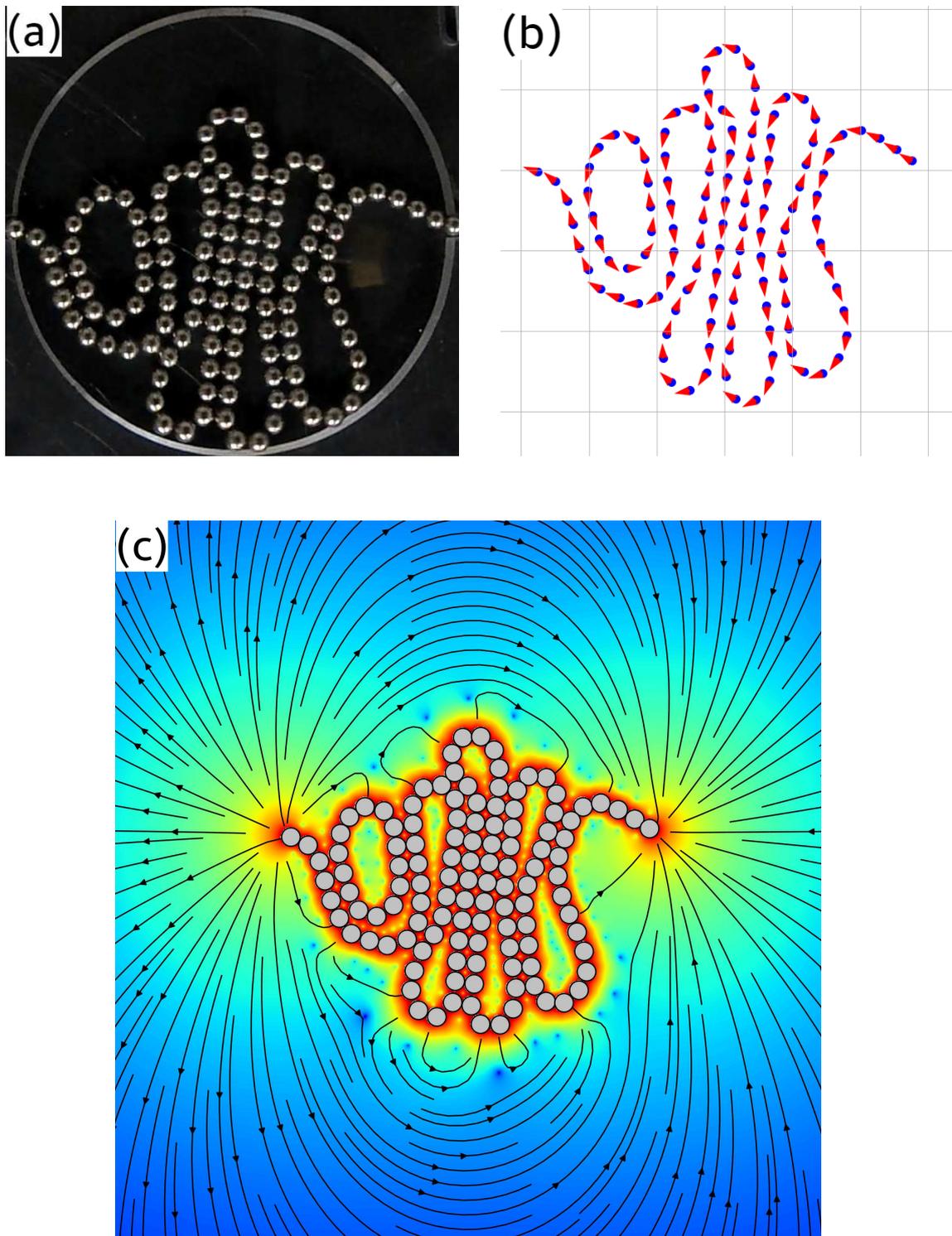
Como apresentado por Borges (2016), propõe-se a investigação do comportamento das linhas de campo nos arranjos resultantes do tipo "Loop" e "Espiral". Tomando uma estrutura final de cada um dos tipos de empacotamento (Figuras 36.a e 37.a), realiza-se o processo de minimização da energia do sistema, resultando nas orientações dos dipolos magnéticos correspondentes, apresentados nas Figuras 36.b e 37.b.

A análise dessas orientações revela a predominância de domínios antiferromagnéticos no regime de empacotamento do tipo "Loop" e domínios ferromagnéticos no regime do tipo "Espiral". Ao mapear mais detalhadamente a estrutura do tipo "Espiral", observa-se a coexistência de padrões ferromagnéticos e antiferromagnéticos. A presença desses regimes em uma única estrutura resulta na descaracterização do alinhamento dos dipolos nos pontos de encontro, resultando em frustrações geométricas mais pronunciadas.

Quanto às orientações dos dipolos magnéticos das esferas posicionadas nas extremidades dos arranjos, constata-se que, no empacotamento do tipo "Loop", a esfera situada à esquerda apresenta o polo norte voltado para o exterior, ao passo que a esfera do lado direito exibe o polo sul. Essa disposição garante que, no momento do primeiro contato, a cadeia de esferas injetadas pelo lado esquerdo possuía o polo sul direcionado para o interior da cavidade, enquanto a cadeia de esferas do lado direito apresentava o polo norte, ocasionando uma atração recíproca entre essas estruturas. Por outro lado, na configuração de empacotamento do tipo "Espiral", tanto a esfera à esquerda quanto a do lado direito manifestam o polo norte voltado para o interior da cavidade. Isso assegura que, na região mais próxima de contato entre os fios no início do empacotamento, ambos os lados estavam orientados para o norte, resultando em uma interação de repulsão mútua.

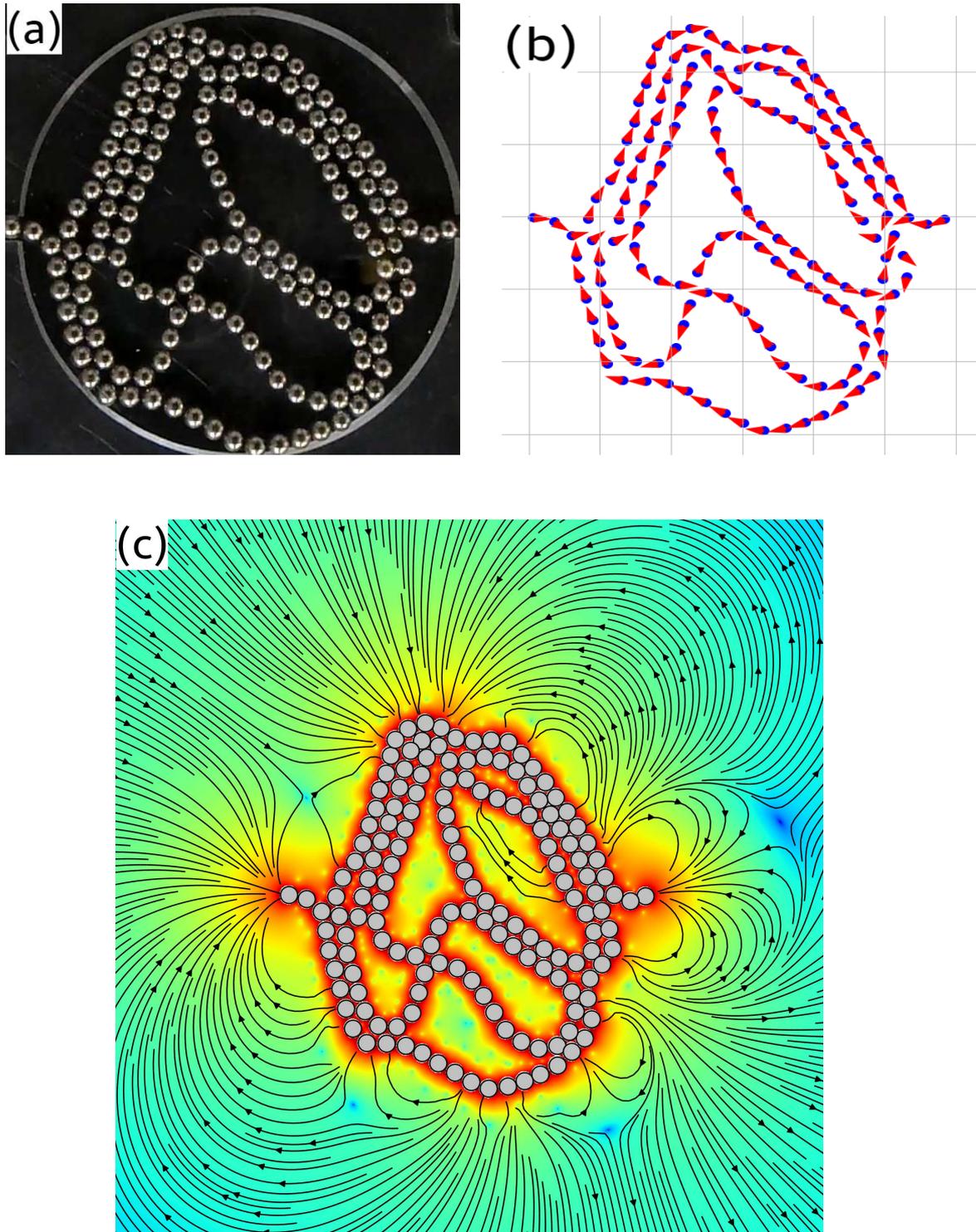
Mediante a aplicação da equação 4.3, é possível determinar o campo magnético circundante aos respectivos sistemas. As Figuras 36.c e 37.c apresentam as representações das linhas de campo magnético, destacando suas orientações específicas. No contexto do padrão "Loop", nota-se que as linhas de campo ao redor das bordas externas circundam a estrutura de maneira mais homogênea. Em contrapartida, no arranjo do tipo "Espiral", as linhas de campo no contorno externo exibem uma disposição mais radial, penetrando e emergindo da estrutura empacotada, caracterizando, desse modo, um padrão multipolar. Este fenômeno evidencia uma distinção substancial nos padrões magnéticos resultantes dos diferentes tipos de empacotamento, fortalecendo, assim, a integridade da análise realizada.

Figura 36 – (a) Estrutura final do empacotamento do fio magnético na cavidade para o tipo "Loop"; (b) Orientação dos momentos para o regime de mínimo de energia; (c) Determinação das linhas de campo do arranjo.



Fonte: O autor

Figura 37 – (a) Estrutura final do empacotamento do fio magnético na cavidade para o tipo "Espiral"; (b) Orientação dos momentos para o regime de mínimo de energia; (c) Determinação das linhas de campo do arranjo.

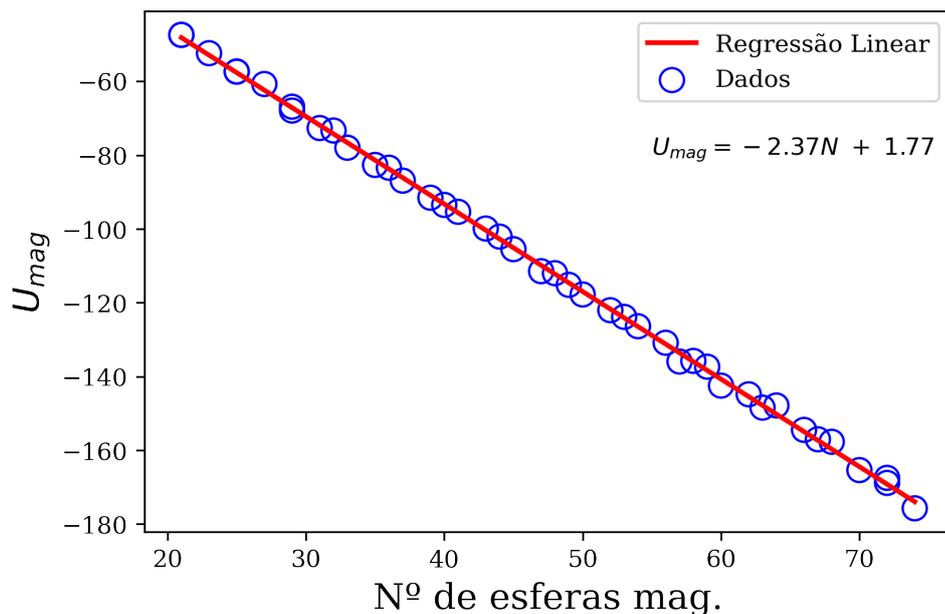


Fonte: O autor

Através da análise de minimização da energia do sistema, busca-se estimar a energia acumulada do arranjo como função do número de esferas inseridas na cavidade, ao longo do processo de empacotamento para a morfologia do tipo "Loop". Como mencionado anteriormente, a energia acumulada U_{mag} , dada por 4.9, é adimensional e posta em uma escala correspondente ao potencial repulsivo de dois dipolos paralelos em contato (MESSINA *et al.*, 2014).

Os resultados revelam que a energia acumulada apresenta um comportamento linear em relação ao número de esferas empacotadas, com um coeficiente angular de $\alpha = -2.375$ (Figura 38). Ao considerar a energia por unidade de esferas, $u = U_i/N_i$, em um intervalo específico do empacotamento, observa-se na Figura 39 que as energias envolvidas para a caracterização dos arranjos do tipo "Loop" situa-se abaixo da energia relativa u para a formação de uma corrente infinita de esferas magnéticas, cujo o valor é $u_{\infty}^{(plano)} = -2.404$ (MESSINA *et al.*, 2014).

Figura 38 – Energia acumulada no sistema como função do número de esferas inseridas na cavidade, durante a formação do arranjo do tipo "Loop".

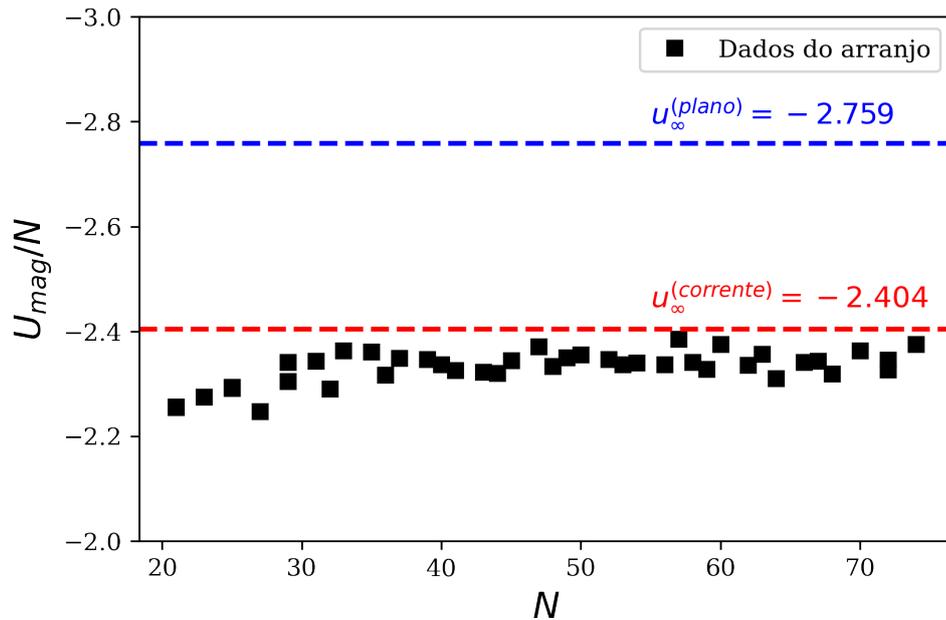


Fonte: O autor

Considerando como ponto de referência para a energia acumulada o estágio em que ocorre o primeiro contato entre os fios magnéticos inseridos diametralmente opostos, conforme ilustrado na Figura 41.a. Verifica-se que a variação da energia relativa por unidade de esferas magnéticas ($\Delta U/N$) em função do número de esferas nos respectivos instantes do empacotamento, ambas representadas em escala logarítmica (Figura 40.a), apresenta padrões semelhantes aos previamente estabelecidos para a formação de cadeias de bactérias magnetostáticas (PHILIPSE; MAAS, 2002), como mostrado nas Figuras 40.b e 40.c.

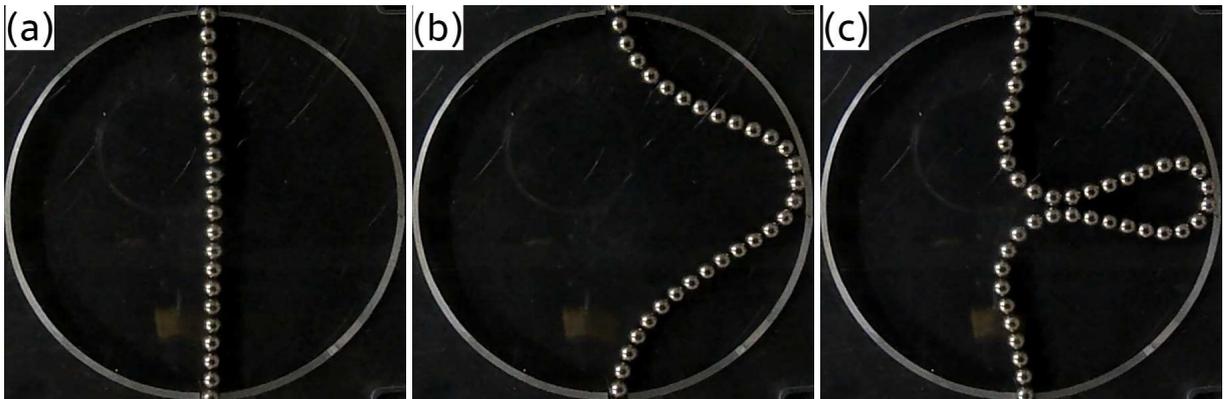
Essa analogia destaca similaridades fundamentais nos comportamentos energéticos desses sistemas, proporcionando uma perspectiva comparativa que contribui para a compreensão mais ampla das dinâmicas magnéticas em contextos diversos.

Figura 39 – Energia por unidade de esferas (U_{mag}/N) em relação ao número de esferas magnéticas (N) durante a formação do arranjo do tipo "Loop".



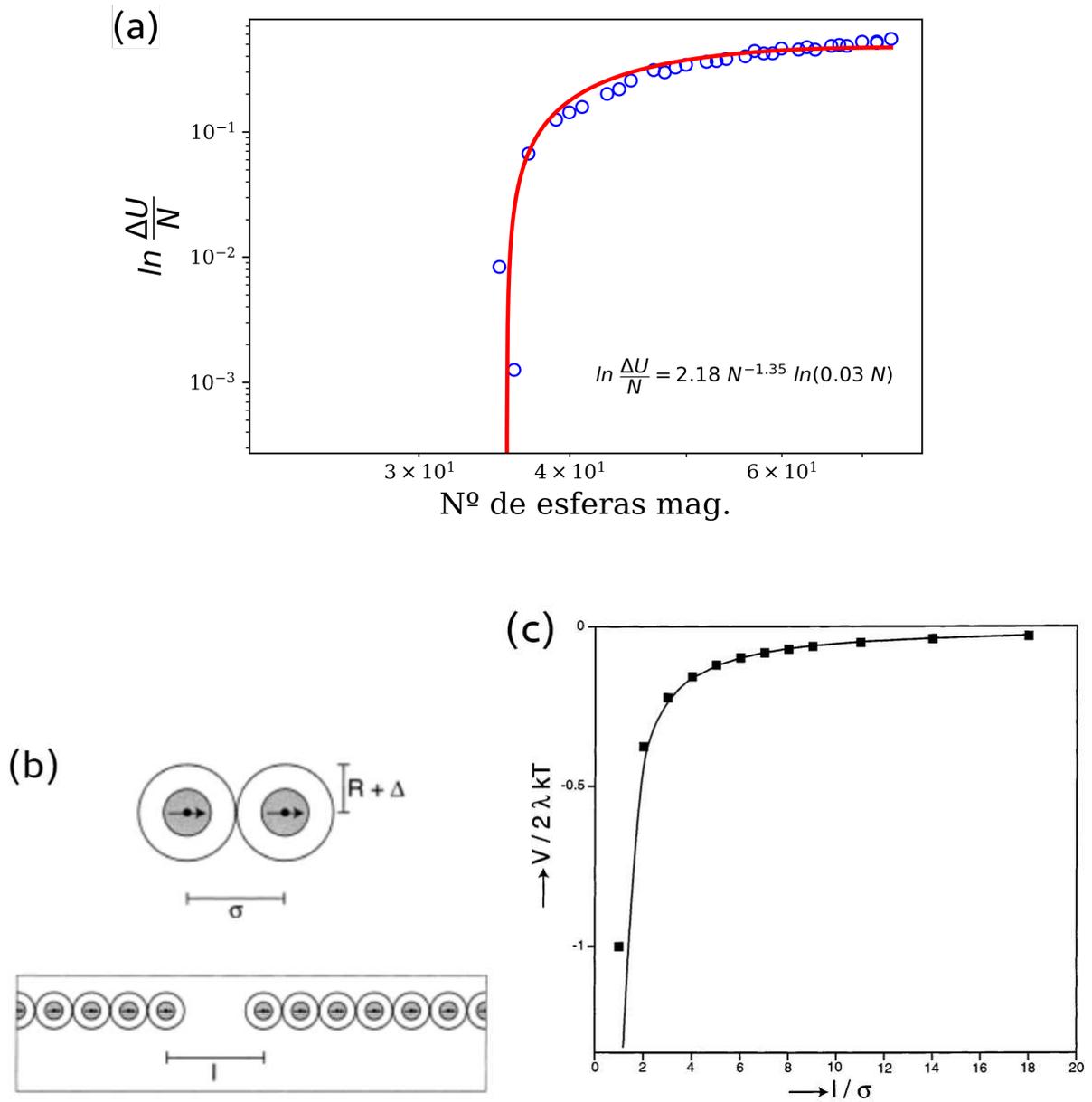
Fonte: O autor

Figura 40 – Empacotamento do tipo "Loop". (a) Primeiro contato entre os fios magnéticos inseridos diametralmente opostos; (b) Deformação do fio semelhante ao verificado em hastes elásticas; (c) Formação da primeira área delimitada pelas esferas.



Fonte: O autor

Figura 41 – (a) Função da variação da energia por unidade de esferas ($\Delta U/N$) em relação ao número N de esferas magnéticas inseridas; (b) Dois dipolos embutidos em uma esfera de raio R , onde σ representa a máxima aproximação entre as partículas, as quais são componentes de duas cadeias interagindo entre si; (c) Variação da energia de interação V entre dipolos, decorrente da aproximação das cadeias de bactérias magnetostáticas.



Fonte: (a) O autor; (b) e (c) Philipse e Maas (2002)

5 CONCLUSÕES

Neste estudo, é apresentado uma série de experimentos relacionados ao processo de injeção de fios magnéticos dentro de uma cavidade circular rígida, onde a disposição inicial das orientações dos dipolos magnéticos nas cadeias de esferas são sujeitas a alterações, adotando regimes tanto com momentos paralelos quanto antiparalelos (Figura 11). Diferentemente dos experimentos apresentados por Borges (2016), a cavidade a ser preenchida foi ocupada por diferentes porcentagens de um substrato não coesivo de esferas plásticas.

Nos experimentos realizados, observou-se que tanto a configuração inicial da orientação dos dipolos quanto a quantidade de substratos na cavidade exercem influência significativa nas propriedades geométricas que emergem do processo de empacotamento. Essa variabilidade resultou na formação de laços com diferentes áreas nas estruturas empacotadas. A análise sistemática permitiu a identificação de uma tendência nas áreas correspondentes às diversas condições de contorno.

As distribuições de probabilidade associadas a essas áreas revelam que, à medida que a porcentagem de substrato plástico aumenta, as áreas acessíveis tendem a diminuir, seguindo uma distribuição do tipo log-normal. Contudo, destaca-se uma região notável situada entre as curvas que representam áreas de 10 a 20 unidades de esferas, onde as probabilidades de ocorrência das áreas permanecem semelhantes, independentemente da quantidade de substratos.

As análises indicam, ainda, que a probabilidade de ocorrência de áreas extremas diminui à medida que há mais substrato na cavidade. Nota-se que a curva para $\sigma = 0.0$ representa a fronteira externa das áreas acessíveis nos experimentos, enquanto as curvas para $\sigma > 0.0$ representam todos os arranjos possíveis da variação dos substratos no interior da cavidade. Supõe-se que, a partir de uma fração de esferas plásticas com $\sigma > 0.5$, a curva da distribuição cumulativa complementar tenda a se aproximar de uma reta. Entretanto, à medida que esferas plásticas são incorporadas, as chances de formação de laços diminuem, tornando improvável alcançar essa transição.

Nas distribuições das áreas dos laços formados durante a injeção do fio, sem a presença de substrato, destaca-se uma região que converge para um ponto próximo de 18 unidades de área, onde a probabilidade de ocorrência permanece constante, independentemente da quantidade de esferas magnéticas inseridas. Observando que esse ponto de interseção ocorre próximo à máxima probabilidade quando a fração de empacotamento é $\phi = 0.14$ (Figura 20), sugere-se que essas áreas, mantendo-se igualmente prováveis, são estabelecidas no início da

injeção, preservando suas integridades ao longo de todo o experimento, ou representam áreas superiores que colapsam para esses valores à medida que o fio se reorganiza na cavidade. Esse achado indica a existência de uma configuração específica de laço cujas diferentes áreas convergem para este valor durante o processo de injeção.

Analisando a relação entre as áreas e os perímetros dos laços formados no empacotamento a partir da razão $\rho = h/\sqrt{s}$, revelou-se um comportamento característico de objetos Euclidianos bidimensionais aos arranjos obtidos, de aproximando-se $\rho = 3.37\sqrt{\pi}$, no regime de alta densidade. Os resultados obtidos indicam uma certa conformidade a razão ρ para o empacotamento de fios metálicos, apresentado por Donato (2006), no regime de alta densidade, em uma cavidade circular, da ordem de $\rho = 3.17\sqrt{\pi}$. Durante o processo de empacotamento, observa-se a variação deste coeficiente, sugere-se que esta variação se dá pela transição de áreas circulares para elípticas.

A formação de laços na cavidade é influenciada pelas interações magnéticas, com um expoente α que varia de 1.45 a 1.91 para as diferentes áreas efetivas de formação dos laços. Entretanto, com o objetivo de alcançar o respectivo coeficiente apresentado por Borges (2016), cujo o valor é de $\alpha_{magnético} = 1.52 \pm 0.02$, atribui-se como área efetiva para a formação dos laços, o valor de 18 unidades de esferas.

As diferenças qualitativas observadas visualmente nas morfologias durante o empacotamento de fios na presença de substratos plásticos ressaltou a necessidade de extrair informações quantitativas para estabelecer tais distinções. Utilizando os grafos correspondentes a cada arranjo, examinou-se a distribuição de probabilidade dos menores caminhos conectando um nó a todos os outros. No regime livre de substratos, a distribuição é unimodal, com simetria em torno do valor mais frequente. À medida que os substratos são adicionados, a distribuição torna-se bimodal, indicando a formação de dois clusters conectados por esferas de baixa conectividade. Essa transição de regime unimodal para bimodal sugere uma reorganização significativa das estruturas formadas. Propõe-se que no estágio de máximo preenchimento de esferas plásticas na cavidade, a distribuição estabiliza-se em um platô constante, caracterizado por uma estrutura linear sem formação de laços ou quaisquer outras estruturas deformáveis.

A análise da morfologia resultante dos empacotamento pôde ser aprimorada com a determinação da função de distribuição radial, $g(r)$, constando a formação de arranjos estruturais, para os primeiros vizinhos, de redes do tipo quadrada e triangular.

Com o objetivo de obter as configurações resultantes das orientações dos momentos

dos dipolos magnéticos associados a cada esferas no arranjo, aplicou-se o método de otimização "BFGS", associado a minimização da energia do sistema. Com os resultados, pode-se concluir que a natureza destas interações estabelece mínimos de energia nos intervalos característicos das redes associadas.

A análise das orientações dos dipolos magnéticos revela a predominância de domínios antiferromagnéticos no regime de empacotamento do tipo "Loop" e domínios ferromagnéticos no regime do tipo "Espiral".

Para o regime de empacotamento do tipo "Loop", a energia acumulada apresenta um comportamento linear em relação ao número de esferas inseridas durante o processo de empacotamento. Observa-se ainda que as energias por unidade de esferas ao longo desse empacotamento situam-se numa zona abaixo da energia relativa para a formação de um corrente infinita de esferas magnéticas, conforme demonstrado por Messina *et al.* (2014). AO analisar a variação da energia relativa em função do número de esferas magnéticas, observa-se um comportamento semelhante ao estabelecido por Philipse e Maas (2002) para a aproximação de cadeias de bactérias magnetostáticas.

Este estudo proporciona uma compreensão abrangente da formação de estruturas magnéticas durante o empacotamento, considerando diversas condições iniciais para as orientações dos dipolos e para a concentração de substratos na cavidade, contribuindo para o avanço no entendimento desses complexos fenômenos de confinamento com interações de longo alcance.

REFERÊNCIAS

- ALSTOTT, J.; BULLMORE, E.; PLENZ, D. powerlaw: A python package for analysis of heavy-tailed distributions. **PLoS ONE**, Public Library of Science (PLoS), v. 9, n. 1, p. e85777, jan. 2014. ISSN 1932-6203.
- ARANSON, I. S.; TSIMRING, L. S. Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 78, p. 641–692, Jun 2006.
- BORGES, D. S. **Um estudo sobre a injeção de fios magnéticos em cavidades**. 56 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- BORGES, D. S. **Transição de fase morfológica na injeção de fios magnéticos em cavidades**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.
- BORGES, D. S.; HERRMANN, H. J.; CARMONA, H. A.; ANDRADE, J. S.; ARAÚJO, A. D. Patterns formed by chains of magnetic beads. **EPJ Web of Conferences**, EDP Sciences, v. 249, p. 15004, 2021. ISSN 2100-014X.
- BOYD, F. E. Expert report: Educational value of neodymium magnet spheres in the matter of zen magnets, llc, cpsc docket n° 12-2. 2014.
- BRITO, V.; CASTRO, W.; COELHO, A.; GOMES, M. Beads-on-a-string packing in two dimensions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 342, n. 3, p. 419–427, 2004. ISSN 0378-4371.
- DOMINGOS, J. L. C. **Auto-organização de partículas coloidais magnéticas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- DONATO, C. C. **Estudo das propriedades físicas de estruturas heterogêneas de arames em cavidades bidimensionais**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- DONATO, C. C.; GOMES, M. A. F.; SOUZA, R. E. de. Crumpled wires in two dimensions. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 66, n. 1, jul. 2002. ISSN 1095-3787.
- EDWARDS, B. F.; RIFFE, D. M.; JI, J.-Y.; BOOTH, W. A. Interactions between uniformly magnetized spheres. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 85, n. 2, p. 130–134, fev. 2017. ISSN 1943-2909.
- FAZEKAS, S. Distinct element simulations of granular materials. *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem*, 2007.
- FEDER, J. **Fractals**. [S. l.]: Springer US, 1988. ISBN 9781489921246.
- FRANCOIS, N.; SAADATFAR, M.; HANIFPOUR, M.; CRUIKSHANK, R.; SHEPPARD, A. Crystallisation in a granular material. *AIP*, 2013. ISSN 0094-243X.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics; 4th ed.** Boston, MA: Pearson, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.
- HALES, T. C. Sphere packings, i. **Discrete and Computational Geometry**, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 1, p. 1–51, jan. 1997. ISSN 1432-0444.

HALL, C. L.; VELLA, D.; GORIELY, A. The mechanics of a chain or ring of spherical magnets. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Society for Industrial Applied Mathematics (SIAM), v. 73, n. 6, p. 2029–2054, jan. 2013. ISSN 1095-712X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1137/120897973>.

HILBERT, D. Problèmes futurs des mathématiques. In: _____. [S. l.]: Deuxième Congrès International des Mathématiciens, 1900. cap. XVIII Problème: Partition de l'espace en polyèdres congruents.

HILL, L. J.; PYUN, J. Colloidal polymers via dipolar assembly of magnetic nanoparticle monomers. **ACS Applied Materials and Interfaces**, American Chemical Society (ACS), v. 6, n. 9, p. 6022–6032, fev. 2014. ISSN 1944-8252.

JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3rd ed.. ed. New York, NY: Wiley, 1999.

JAEGER, H. M.; NAGEL, S. R. Physics of the granular state. **Science**, v. 255, n. 5051, p. 1523–1531, 1992.

JAEGER, H. M.; NAGEL, S. R.; BEHRINGER, R. P. Granular solids, liquids, and gases. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 68, p. 1259–1273, Oct 1996.

KATZAV, E.; ADDA-BEDIA, M.; BOUDAOU, A. A statistical approach to close packing of elastic rods and to dna packaging in viral capsids. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 103, n. 50, p. 18900–18904, dez. 2006. ISSN 1091-6490.

KAZAKOV, A.; LEMPERT, A.; TA, T. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-euclidean space. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier BV, v. 51, n. 32, p. 782–787, 2018. ISSN 2405-8963. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.450>.

KU, J.; ARUGUETE, D. M.; ALIVISATOS, A. P.; GEISSLER, P. L. Self-assembly of magnetic nanoparticles in evaporating solution. **Journal of the American Chemical Society**, American Chemical Society (ACS), v. 133, n. 4, p. 838–848, dez. 2010. ISSN 1520-5126.

LAGARIAS, J. C. Erratum to: Errata the kepler conjecture: The hales-ferguson proof. In: _____. **The Kepler Conjecture**. [S. l.]: Springer New York, 2011. p. E1–E4. ISBN 9781461411291.

LEONTIDIS, E.; KYPRIANIDOU-LEODIDOU, T.; CASERI, W.; KYRIACOU, K. C. From beads-on-a-string to colloidal aggregation: Novel crystallization phenomena in the peosds system. **Langmuir**, American Chemical Society (ACS), v. 15, n. 10, p. 3381–3385, abr. 1999. ISSN 1520-5827.

MESSINA, R.; KHALIL, L. A.; STANKOVIĆ, I. Self-assembly of magnetic balls: From chains to tubes. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 1, jan. 2014. ISSN 1550-2376.

ORUE, I.; MARCANO, L.; BENDER, P.; GARCÍA-PRIETO, A.; VALENCIA, S.; MAWASS, M. A.; GIL-CARTÓN, D.; VENERO, D. A.; HONECKER, D.; GARCÍA-ARRIBAS, A.; BARQUÍN, L. F.; MUELA, A.; FDEZ-GUBIEDA, M. L. Configuration of the magnetosome chain: a natural magnetic nanoarchitecture. **Nanoscale**, Royal Society of Chemistry (RSC), v. 10, n. 16, p. 7407–7419, 2018. ISSN 2040-3372.

PHILIPSE, A. P.; MAAS, D. Magnetic colloids from magnetotactic bacteria: Chain formation and colloidal stability. **Langmuir**, American Chemical Society (ACS), v. 18, n. 25, p. 9977–9984, nov. 2002. ISSN 1520-5827.

SPARKS, G.; MAAß, R. Nontrivial scaling exponents of dislocation avalanches in microplasticity. **Physical Review Materials**, American Physical Society (APS), v. 2, n. 12, dez. 2018. ISSN 2475-9953.

STOOP, N.; WITTEL, F. K.; HERRMANN, H. J. Morphological phases of crumpled wire. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 101, n. 9, 2008. ISSN 1079-7114.

UZMAN, A. Molecular cell biology (4th edition) harvey lodish, arnold berk, s. lawrence zipursky, paul matsudaira, david baltimore and james darnell; freeman amp; co., new york, ny, 2000, 1084 pp., list price 102.25, *isbn*0 – 7167 – 3136 – 3. **Biochemistry and Molecular Biology Education**, Wiley, v. 29, n. 3, p. 126–128, 2001. ISSN 1470 – 8175.

VARÓN, M.; BELEGGIA, M.; KASAMA, T.; HARRISON, R. J.; DUNIN-BORKOWSKI, R. E.; PUNTES, V. F.; FRANDBSEN, C. Dipolar magnetism in ordered and disordered low-dimensional nanoparticle assemblies. **Scientific Reports**, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 1, fev. 2013. ISSN 2045-2322.

VELLA, D.; PONTAVICE, E. du; HALL, C. L.; GORIELY, A. The magneto-elastica : from self-buckling to self-assembly. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 470, n. 2162, p. 20130609, fev. 2014. ISSN 1471-2946.

VOKOUN, D.; BELEGGIA, M.; HELLER, L.; ŠITTNER, P. Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, Elsevier BV, v. 321, n. 22, p. 3758–3763, nov. 2009. ISSN 0304-8853.

YUEN, H.; PRINCEN, J.; ILLINGWORTH, J.; KITTLER, J. Comparative study of hough transform methods for circle finding. **Image and Vision Computing**, Elsevier BV, v. 8, n. 1, p. 71–77, fev. 1990. ISSN 0262-8856.