



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**LIA BEATRIZ GOMES FURTADO**

**UTILIZAÇÃO DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS NO  
PROJETO DE VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO**

**FORTALEZA**

**2022**

LIA BEATRIZ GOMES FURTADO

UTILIZAÇÃO DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS NO  
PROJETO DE VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

F987u Furtado, Lia Beatriz Gomes.  
Utilização de concreto reforçado com fibras no projeto de vigas submetidas à flexão / Lia Beatriz Gomes Furtado. – 2022.  
94 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2022.  
Orientação: Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota.

1. Concreto Reforçado com Fibras. 2. Dimensionamento. 3. Vigas. 4. Flexão. I. Título.

CDD 620

---

LIA BEATRIZ GOMES FURTADO

UTILIZAÇÃO DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS NO  
PROJETO DE VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota

Aprovada em: 15/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Joaquim Eduardo Mota (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dra. Magnólia Maria Campêlo Mota  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus, por sempre me guiar.

Aos meus pais, por todo o apoio e dedicação.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Lenilúcia e Marcus, por priorizarem, valorizarem e incentivarem minha educação, por serem exemplo de dedicação e por me apoiarem sempre que precisei. Agradeço todo o esforço e todas as renúncias feitas em prol do meu bem-estar e do meu crescimento.

Aos meus irmãos, Pedro e Maíra, pelo companheirismo de tantos anos e por serem inspirações para mim.

À toda minha família, em especial aos meus tios Ivan, Marilac e Socorro e a minha avó Hozana (*in memoriam*), pelo suporte concedido desde a infância. Sou grata por fazer parte de uma família tão amorosa e unida.

Ao Renan, pelo apoio durante toda a graduação, pela parceria constante dos últimos anos e por me permitir compartilhar alegrias e angústias. Aprendo diariamente com você.

Aos amigos que puder fazer no curso de Engenharia Civil, que tornaram a graduação muito mais leve e feliz. Eu certamente não teria chegado até aqui sem a presença de vocês.

Aos professores e demais funcionários do Colégio Nossa Senhora das Graças e da Universidade Federal do Ceará, responsáveis pela minha formação acadêmica, a quem sou eternamente grata e tenho profunda admiração.

À TPF Engenharia, em especial à Beatriz Menezes e Francisco Diniz, pela oportunidade profissional, pelos ensinamentos transmitidos e, não menos importante, pelo apoio e amizade.

Ao Professor Dr. Joaquim Mota, pela dedicação e excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Dra. Magnólia Mota e Dr. Augusto Albuquerque, e à professora Dra. Marisete Aquino, pelo tempo e colaboração.

“Cumpe o pequeno dever de cada momento;  
faz o que deves e está no que fazes.”

Josemaría Escrivá

## RESUMO

O Concreto Reforçado com Fibras (CRF) vem sendo utilizado como reforço estrutural por, dentre outras razões, conferir ductilidade ao elemento estrutural antes frágil. Tal característica ocorre devido à “costura” das fissuras que acarreta a diminuição na concentração de tensão. Além disso, a diminuição da abertura de fissuras leva à redução da entrada de agentes agressores, tornando a estrutura mais durável. Outro benefício da utilização das fibras é o ganho de resistência à tração na flexão, o qual foi normatizado em 2021 pela Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT. Diante disso, o presente trabalho busca apresentar o método de dimensionamento para vigas submetidas à flexão adotado no Brasil por meio da ABNT e aplicá-lo em diferentes exemplos para avaliar a influência do modelo utilizado, da classe do concreto e do teor de fibras incorporado na matriz. Além disso, busca-se avaliar a viabilidade econômica da incorporação de fibras comparando com a solução obtida para o concreto convencional. Com isso, após estudo do método apresentado na ABNT NBR 16935:2021 – Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento, foi desenvolvida uma planilha de cálculo para a avaliação da capacidade resistente e para o dimensionamento de vigas submetidas à flexão utilizando os dois modelos propostos na referida norma: Rígido-plástico e Linear. A partir de resultados experimentais encontrados na literatura, foram realizadas, com auxílio da planilha, as análises pretendidas. Desse modo, os resultados deste trabalho apresentam, de forma quantitativa, a influência das variáveis mencionadas anteriormente no dimensionamento de vigas submetidas à flexão, bem como a avaliação dos custos das soluções com concreto convencional e com CRF. As conclusões deste trabalho mostram que quanto maior o teor de fibras incorporado, maior a resistência do elemento estrutural à tração na flexão, necessitando de uma menor área de armadura longitudinal, além disso, observa-se uma maior eficiência em concreto com baixas classes de resistência. Destaca-se ainda que o Modelo Linear se mostrou um modelo mais conservador que o Modelo Rígido-plástico. Acerca dos custos, estes ainda são mais elevados para as soluções utilizando CRF quando se trata de vigas dimensionadas à flexão, podendo apresentar maior competitividade quando analisados os aspectos qualitativos.

**Palavras-chave:** Concreto Reforçado com Fibras. Dimensionamento. Vigas. Flexão.



## ABSTRACT

The Fiber-Reinforced Concrete (FRC) is being widely used on structural reinforcement actions due to, among other advantages, granting ductility to a body that presents a brittle failure behavior by itself. This occurs because the fiber has a bridging effect on micro-cracks, diminishing the resultant stress concentration caused by fractures. Besides, the size reduction of micro-cracks also allows a higher resistance against the entrance of potential harmful external agents, increasing the structural durability. The FRC utilization also provides a mechanical performance increase against bending stresses, as officialized in 2021 by the Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Therefore, this work presents aims the implementation of a sizing method adopted in Brazil for FRC beams subjected to bending stresses, employing it in distinct circumstances in order to thoroughly evaluate the influence of the model utilized, the concrete characteristics and the incorporated fiber ratio. Besides that, this work also assesses the economic viability of the fiber incorporation by comparing it against the budget used for standard concrete structures. Thus, considering the method presented by the ABNT NBR 16935:2021 - Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento, an Excel sheet was developed in order to evaluate the mechanical capacities and also to complete the sizing procedure for beams subjected to bending stresses for both proposed models in the previously cited NBR: Linear and rigid-plastic. Given the experimental results found within the literature, the structural analysis process was completed by the sheet employment. Thereupon, the results presented in this work numerically show the influence of multiple factors already defined on the sizing of Fiber-Reinforced Concrete beams subjected to bending stresses, as well as an evaluation on the expenses comparing structures of the aforementioned concrete against standard ones. This work concludes that the structural performance for beams subjected to tension by bending stresses increases along with the incorporated fiber ratio, which implies a smaller steel reinforcement area in these bodies. Besides, it is more efficient in low-resistance classes of concrete. It is important to highlight that the linear model presented a more conservative performance when compared to the rigid-plastic one. Also, about the implementation cost, it is indeed bigger for FRC beams subjected to the aforementioned stresses, but it presents a better competitiveness when qualitative variables are taken into consideration.

**Keywords:** Fiber-Reinforced Concrete. Sizing. Beams. Bending.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pista do O'Hare Airport reforçada com fibras de aço .....	23
Figura 2 – Revestimento de túneis segmentados reforçados com fibras de aço.....	24
Figura 3 – Pontes com seção PI utilizando UHPC com fibras de aço.....	24
Figura 4 – Fossas sépticas reforçadas com macrofibras sintéticas.....	24
Figura 5 – Concreto projetado reforçado com fibras.....	25
Figura 6 – Fibras de aço .....	27
Figura 7 – Fibras de polipropileno .....	27
Figura 8 – Influência do teor de fibras na resistência residual .....	28
Figura 9 – Volume crítico de fibras .....	29
Figura 10 – Comportamento de softening e hardening .....	29
Figura 11 – Influência do Módulo de Elasticidade e Resistência das fibras .....	30
Figura 12 – Propagação de tensões do Concreto Simples fissurado .....	31
Figura 13 – Propagação de tensões do CRF fissurado .....	32
Figura 14 – Formação de ouriços no CRF.....	33
Figura 15 – Diagrama ELU para vigas de CRF submetidas à flexão.....	37
Figura 16 – Domínios de ELU de uma seção transversal.....	38
Figura 17 – Posição do entalhe na seção do corpo de prova .....	39
Figura 18 – Arranjo típico para determinação de CMOD .....	40
Figura 19 – Arranjo típico para determinação do deslocamento vertical .....	40
Figura 20 – Obtenção de $F_L$ .....	41
Figura 21 – Diagrama de cargas x CMOD .....	42
Figura 22 – Hipóteses de leis constitutivas de pós-fissuração.....	44
Figura 23 – Modelo Rígido-plástico.....	45
Figura 24 – Diagrama ELU – Concreto sem fibras .....	47
Figura 25 – Diagrama ELU – Concreto com fibras.....	49
Figura 26 – Exemplo de rótulo de fibras de aço.....	53
Figura 27 – Aumento do momento resistente.....	58
Figura 28 – Comparação das áreas para cada teor de fibras.....	60
Figura 29 – Representação da configuração da viga .....	61
Figura 30 – Comparação das áreas de aço necessárias em cada caso .....	64
Figura 31 – Custo total para cada teor de fibras .....	67

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades de cada tipo de fibra .....	30
Tabela 2 – Coeficiente de majoração das ações – $\gamma_M$ .....	35
Tabela 3 – Coeficiente de minoração das resistências – $\gamma_m$ .....	36
Tabela 4 – Custo unitário dos materiais de reforço .....	52
Tabela 5 – Dados gerais da viga .....	56
Tabela 6 – Resultados experimentais.....	57
Tabela 7 – Relações mínimas .....	57
Tabela 8 – Momento resistente para cada teor de fibras.....	58
Tabela 9 – Aumento do Momento Resistente decorrente da incorporação de fibras .....	58
Tabela 10 – Dados gerais da viga .....	59
Tabela 11 – Dados de resistência à tração para cada teor de fibras .....	59
Tabela 12 – Área de aço necessária .....	59
Tabela 13 – Diminuição da área de aço decorrente da incorporação de fibras .....	60
Tabela 14 – Dados gerais da viga .....	60
Tabela 15 – Resistências à tração na flexão .....	62
Tabela 16 – Relações mínimas .....	63
Tabela 17 – Área de aço necessária em cada caso.....	63
Tabela 18 – Redução da área de aço com a incorporação das fibras.....	64
Tabela 19 – Verificação do momento resistente .....	65
Tabela 20 – Custo associado às fibras .....	66
Tabela 21 – Custo associado às armaduras.....	66
Tabela 22 – Custo total .....	67

## LISTA DE ABREVIATURAS

ABECE	Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	<i>American Concrete Institute</i> – Instituto Americano de Concreto
AR	Álcali-resistente
CAA	Concreto Auto-adensável
CBIC	Câmara Brasileira da Indústria da Construção
CG	Centro de Gravidade
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i> – Medida da abertura de entalhe
CRF	Concreto Reforçado com Fibras
CT	Comitê Técnico
ELU	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
<i>fib</i>	<i>Fédération internationale du béton</i> – <i>The International Federation for Structural Concrete</i> – Federação Internacional do Concreto
IBRACON	Instituto Brasileiro de Concreto
LOP	Limite de Proporcionalidade
NBR	Norma Técnica Brasileira
UHPC	<i>Ultra High Performance Concrete</i> – Concreto de Ultra Alta Resistência

## LISTA DE SIGLAS

$a$	Distância do CG das armaduras de tração até a face tracionada
$A_s$	Área de armadura utilizada na seção transversal da viga
$b$	Largura da viga
$d$	Altura útil da viga
$f_{cd}$	Resistência à compressão de cálculo do concreto
$f_{ck}$	Resistência à compressão característica do concreto
$f_d$	Resistência de cálculo
$f_k$	Resistência característica
$F_d$	Ação de cálculo
$F_k$	Ação característica
$f_{Fts}$	Resistência à tração direta de serviço do CRF
$f_{Ftud}$	Resistência à tração direta última de cálculo do CRF
$f_{Ftuk}$	Resistência à tração direta última característica do CRF
$f_L$	Limite de proporcionalidade
$f_{Ri}$	Resistência residual à tração na flexão do CRF
$f_{yd}$	Resistência de escoamento de cálculo do aço
$f_{yk}$	Resistência de escoamento característica do aço
$g$	Carga permanente
$q$	Carga variável
$h$	Altura da viga
$L$	Vão da viga
$M_{rd}$	Momento resistente de cálculo
$M_{sd}$	Momento solicitante de cálculo
$p$	Carga de protensão
$R_c$	Força resistente do CRF à compressão
$R_f$	Força resistente do CRF à tração
$R_s$	Força resistente do aço à tração
$V$	Volume da viga
$x$	Posição da linha neutra
$z_c$	Braço de alavanca de $R_c$ em relação à $R_s$
$z_f$	Braço de alavanca de $R_f$ em relação à $R_s$

$\alpha_c$	Coeficiente de redução da resistência do concreto
$\gamma_{\text{concreto}}$	Peso específico do concreto
$\gamma_c$	Coeficiente de minoração da resistência do CRF à compressão
$\gamma_f$	Coeficiente de minoração da resistência do CRF à tração
$\gamma_M$	Coeficiente de majoração das ações no ELU
$\gamma_m$	Coeficiente de minoração das resistências no ELU
$\gamma_s$	Coeficiente de minoração da resistência do aço
$\delta$	Deslocamento vertical do corpo de prova
$\epsilon_{cu}$	Máxima deformação de compressão do CRF
$\epsilon_{Fu}$	Deformação última do CRF
$\epsilon_{su}$	Máxima deformação de tração no aço
$\lambda$	Coeficiente de conversão parábola-retângulo
$\phi$	Diâmetro da barra de aço

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
1.1	Objetivos .....	18
1.1.1	<i>Objetivo Geral</i> .....	18
1.1.2	<i>Objetivos Específicos</i> .....	18
1.2	Justificativa.....	19
1.3	Organização do texto .....	19
2	CARACTERIZAÇÃO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS.....	21
2.1	Justificativa do uso do CRF .....	21
2.2	Aplicações típicas do CRF .....	23
2.3	Avanço dos estudos no Brasil .....	25
2.4	Comportamento das fibras.....	26
2.5	Atuação da fibra no controle da fissuração .....	31
2.6	Trabalhabilidade .....	32
3	ESTADO LIMITE ÚLTIMO DO CRF À FLEXÃO.....	34
3.1	Diagrama ELU para vigas de CRF submetidas à flexão .....	36
3.2	Resistência à tração do Concreto Reforçado com Fibras.....	38
3.2.1	<i>Determinação da resistência à tração na flexão do CRF</i> .....	38
3.2.2	<i>Relações mínimas entre as resistências</i> .....	43
3.2.3	<i>Determinação da resistência à tração direta última do CRF</i> .....	44
3.3	Equações de equilíbrio do ELU e determinação do momento resistente.....	46
3.3.1	<i>Modelo Rígido-plástico</i> .....	47
3.3.2	<i>Modelo Linear</i> .....	49
4	CUSTO DA IMPLEMENTAÇÃO DAS FIBRAS DE AÇO .....	51
5	ESPECIFICAÇÕES EM PROJETOS .....	53
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	55
6.1	Validação do Modelo Linear – Problema de verificação .....	56
6.2	Validação do Modelo Rígido-plástico – Problema de Dimensionamento.....	59
6.3	Avaliação da incorporação de fibras para diferentes $f_{cks}$ .....	60
6.4	Avaliação dos custos da incorporação de fibras de aço .....	65
7	CONCLUSÃO .....	69
	REFERÊNCIAS .....	71
	APÊNDICE A – APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE	

<b>DIMENSIONAMENTO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) – CASO 2 – COM O MODELO RÍGIDO-PLÁSTICO.....</b>	<b>73</b>
<b>APÊNDICE B – APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) – CASO 2 – COM O MODELO LINEAR.....</b>	<b>78</b>
<b>APÊNDICE C – APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) – CASO 2 – COM O MODELO RÍGIDO-PLÁSTICO.....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE D – APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) – CASO 2 – COM O MODELO LINEAR.....</b>	<b>88</b>
<b>APÊNDICE E – APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA CÁLCULO DOS CUSTOS DE EXEMPLO UTILIZANDO DADOS DE REAL <i>ET AL.</i> (2017) .....</b>	<b>93</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O Concreto Reforçado com Fibras (CRF) começou a ser utilizado dentro da Construção Civil a partir da década de 60 como alternativa de reforço ao concreto convencional visando conferir ductilidade a este material naturalmente frágil.

Conforme explica Figueiredo (2011, p. 29), a incorporação das fibras no concreto é responsável pela diminuição da abertura de fissuras, atuando como uma espécie de “costura” que diminui a concentração de tensões ocasionada pela fissuração. Conseqüentemente, não há o rompimento frágil do elemento estrutural, diferentemente do que acontece no concreto convencional.

Além disso, Buttignol *et al.* (2018, p. 1012) ressaltam que a redução na abertura de fissura acarreta a redução da permeabilidade e da entrada de agentes agressores na estrutura, os quais são responsáveis por diferentes manifestações patológicas. Desse modo, tem-se uma estrutura mais durável e com menor necessidade de manutenção.

Outro aspecto benéfico da utilização de fibras é o ganho de resistência à tração na flexão, o qual será estudado no presente trabalho para as vigas submetidas à flexão a partir dos requisitos e modelos adotados pela ABNT NBR 16935:2021 – Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento, que, por sua vez, foi baseada no *fib Model Code 2010*, desenvolvido pela Federação Internacional do Concreto.

Diante dos benefícios expostos acima, as fibras vêm sendo utilizadas em diferentes aplicações, cabendo destacar as lajes sobre o solo, peças pré-moldadas, como revestimento de túneis segmentados e vigas de pontes, além do concreto projetado, especialmente em estruturas com formas não usuais.

Entretanto, um dos obstáculos para o uso do CRF de forma estrutural até o ano de 2021 era a ausência de normas que padronizassem e regulassem seu uso com instruções para a elaboração de projetos. Para superar tal empecilho, alguns comitês técnicos foram criados visando o desenvolvimento de trabalhos técnicos e a elaboração das práticas recomendadas para a utilização do CRF.

É importante ressaltar que existem diferentes tipos de fibras que podem ser utilizadas no concreto, cabendo destaque as fibras de aço e as de polipropileno, por serem, segundo Thomaz (s.d., p.1), as mais utilizadas.

As fibras possuem influência também no estado fresco do concreto, necessitando de um maior cuidado, principalmente quando se tem elevadores teores, uma vez que nessas situações, tem-se maior dificuldade no que diz respeito à trabalhabilidade, havendo, em casos

mais graves, a formação de ouriços (emaranhados de fibras) que impedem a homogeneidade do concreto.

Dados os aspectos qualitativos da incorporação das fibras, o presente trabalho busca implementar os modelos de dimensionamento apresentados pela ABNT NBR 16935:2021 para a aplicação de alguns exemplos de modo a realizar diferentes análises acerca do ganho advindo das fibras conforme tais modelos. As análises versam na avaliação da influência do teor incorporado, da classe do concreto e do modelo adotado: Rígido-plástico ou Linear. Além disso busca-se realizar a análise dos custos para avaliar a viabilidade do emprego do CRF para vigas submetidas à flexão.

## **1.1 Objetivos**

### ***1.1.1 Objetivo Geral***

Identificar as vantagens e desvantagens técnicas e econômicas do Concreto Reforçado com Fibras (CRF) no projeto de vigas submetidas à flexão comparando com a solução utilizando concreto convencional.

### ***1.1.2 Objetivos Específicos***

- a) Compreender o que vem a ser o Concreto Reforçado com Fibras (CRF): tipos de fibras, dosagens e características mecânicas deste concreto.
- b) Estudar o comportamento e os critérios de dimensionamento à flexão para vigas de CRF no Estado Limite Último (ELU), bem como implementar uma planilha de cálculo.
- c) Aplicar os conceitos estudados para o dimensionamento e a determinação da capacidade resistente de uma viga de seção retangular com CRF e com concreto convencional submetida à flexão.
- d) Analisar a influência do teor de fibras incorporado, classe do concreto e modelo de cálculo no dimensionamento de uma viga de seção retangular com CRF submetida à flexão.
- e) Comparar custos e eficiência das soluções de vigas retangulares utilizando CRF e utilizando concreto convencional.

## 1.2 Justificativa

Com o avanço dos estudos que culminou na publicação de normas técnicas sobre o assunto, em especial na ABNT NBR 16935:2021, a qual trata do procedimento para elaboração de projetos de estruturas utilizando o CRF, e levando em consideração os benefícios advindos das fibras que fazem dessa solução uma alternativa interessante para diversas aplicações, tais como a indústria de pré-moldados, permitindo a utilização de vigas mais esbeltas com menos fissuração e maior durabilidade para uso em edificações e pontes, o presente trabalho busca responder questões como a influência de alguns fatores no dimensionamento de vigas de CRF submetidas à flexão ou ainda se há vantagem econômica na incorporação de fibras neste mesmo caso. Salienta-se a importância dessas análises no avanço tecnológico das estruturas de concreto no Brasil.

## 1.3 Organização do texto

O primeiro capítulo do presente trabalho apresenta a introdução, com seus objetivos geral e específicos, bem como a justificativa da realização deste trabalho e as questões a serem respondidas por ele.

No capítulo 2 é apresentada a caracterização do Concreto Reforçado com Fibras, discutindo sobre temas como a justificativa do emprego do CRF, suas aplicações típicas, como se deu o avanço dos estudos relacionados a este tema no Brasil, o comportamento e a maneira que a fibra atua no controle das fissuras e a forma como as fibras alteram o estado fresco do concreto no que diz respeito à trabalhabilidade.

Já no capítulo 3, tem-se a formulação do dimensionamento de vigas de CRF submetidas à flexão no Estado Limite Último, conforme apresentado pela ABNT NBR 16935:2021. Apresenta-se ainda neste capítulo o ensaio utilizado para determinação da resistência à tração do CRF, o qual é normatizado pela ABNT NBR 16940:2021.

O capítulo 4 traz o roteiro para o cálculo dos custos relativos às fibras e às armaduras, expondo os valores unitários atuais com base em banco de dados e em catálogos de fabricantes para a comparação de soluções utilizando diferentes teores e, ainda, utilizando o concreto convencional.

No capítulo 5, é exposta a forma como a incorporação de fibras deve ser especificada em projetos estruturais e como, a partir dessa especificação, deve ser adquirida pela construtora, com base no que a ABNT NBR 15530:2019 normatiza para as fibras de aço.

O sexto capítulo expõe os exemplos numéricos utilizados no presente trabalho para a realização das análises pretendidas, quais sejam a avaliação do teor incorporado, da influência do modelo de dimensionamento e da classe do concreto, bem como a viabilidade econômica do uso desse concreto. Para tal, foram utilizados resultados experimentais presentes da literatura.

Por fim, o capítulo 7 traz as conclusões dos objetivos propostos no presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

Além disso, o trabalho apresenta cinco apêndices, conforme descrito a seguir, que ilustram a utilização da planilha para cada caso.

- a) Apêndice A – Aplicação da planilha para exemplo de dimensionamento utilizando dados experimentais de Lee (2017) – Caso 2 – com o Modelo Rígido-plástico;
- b) Apêndice B – Aplicação da planilha para exemplo de dimensionamento utilizando dados experimentais de Lee (2017) – Caso 2 – com o Modelo linear;
- c) Apêndice C – Aplicação da planilha para exemplo de verificação utilizando dados experimentais de Lee (2017) – Caso 2 – com o Modelo Rígido-plástico;
- d) Apêndice D – Aplicação da planilha para exemplo de verificação utilizando dados experimentais de Lee (2017) – Caso 2 – com o Modelo Linear;
- e) Apêndice E – Aplicação da planilha para cálculo dos custos de exemplo utilizando dados de Real *et al.* (2017).

## 2 CARACTERIZAÇÃO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

Os compósitos são materiais compostos por duas ou mais fases, nos quais se obtém um comportamento mais adequado e eficiente a determinadas aplicações, uma vez que combina as distintas características de cada material que o forma. Dentro da construção civil, o concreto, material estrutural mais utilizado no mundo, é um exemplo de compósito, uma vez que une materiais como agregados graúdos e miúdos à pasta cimentícia. No entanto, o concreto simples apresenta algumas limitações, das quais cabe citar um comportamento marcadamente frágil, a baixa capacidade de deformação quando submetido à tração e a reduzida capacidade de resistência à tração, especialmente após a fissuração. A fim de mitigar essas adversidades, surgiram novos compósitos que unem o concreto a algum tipo de reforço, sendo o mais comum deles o concreto armado, constituído de concreto e barras de aço, chamadas de armaduras (FIGUEIREDO, 2011, p. 1).

Outra alternativa de reforço, empregada desde 1960, é a utilização de fibras introduzidas ao concreto, formando o compósito denominado Concreto Reforçado com Fibras (CRF), caracterizado, segundo Thomaz (s.d. p. 1), pela mistura de cimento Portland, agregados e fibras descontínuas, podendo ou não ser reforçado também com armaduras.

### 2.1 Justificativa do uso do CRF

Algumas motivações são mencionadas na literatura para justificar o emprego das fibras no concreto. De acordo com Buttignol *et al.* (2018, p. 1012), “a crescente utilização do concreto reforçado com fibras para fins estruturais se justifica pelo seu melhor desempenho estrutural, maior durabilidade e pela simplificação dos processos executivos (redução ou eliminação da armadura de flexão e cisalhamento)”.

A respeito do ganho de resistência proporcionado pela adição de fibras ao concreto, segundo Thomaz (s.d., p. 3), elas têm pouca influência na resistência à compressão, à tração axial, à torção, ao cisalhamento e à abrasão. Por outro lado, apresentam grande efeito na resistência à tração na flexão, com aumento de até mais que 100% para elevados volumes de fibras. Além disso, as fibras aumentam a resistência à fadiga do concreto e são eficientes na melhoria das suas propriedades dinâmicas.

Entretanto, Thomaz (s.d., p. 3) ressalta que existem outras formas, provavelmente mais baratas, de aumentar a resistência do concreto. Sendo assim, é importante destacar que a

real contribuição das fibras é aumentar a ductilidade do concreto, a qual é definida em função da área sob a curva “carga x flecha” para qualquer carregamento.

“O aumento da ductilidade do concreto ocorre principalmente nas solicitações à tração devido à “costura” das fissuras pelas fibras que criam o efeito de arrancamento (progressiva perda de aderência e escorregamento das fibras), responsável por manter a coesão entre as seções de concreto fissuradas.” (BUTTIGNOL *et al.*, 2018, p. 1012).

Segundo Buttignol *et al.* (2018, p. 1012), a maior ductilidade do material garante ao concreto maior capacidade de absorção de energia, permitindo um melhor desempenho às solicitações estáticas e dinâmicas. Além disso, o controle da fissuração garante maior resistência ao concreto, bem como a diminuição da permeabilidade, reduzindo o ingresso de umidade e de agentes agressivos, como sulfatos e cloretos, na estrutura, os quais são responsáveis por manifestações patológicas como a corrosão de armaduras e a degradação do concreto, especialmente em regiões de alta agressividade. Tal característica pode, então, aumentar a durabilidade da estrutura. Contudo, Thomaz (s.d., p. 4) afirma que, embora haja relatos de diminuição da permeabilidade de até 80% advinda do controle da fissuração do concreto, para que esta fosse considerada significativa, deveria ser de ao menos 90%.

Thomaz (s.d., p. 4) destaca, ainda, que as fibras não são capazes de eliminar a presença da fissuração no concreto, especialmente aquelas causadas pela retração, uma vez que se trata de uma característica inerente à matriz cimentícia. Dessa forma, as fibras irão atuar reduzindo a abertura das fissuras existentes, numa espécie de “costura”, e não a quantidade destas.

De acordo com Figueiredo (2011, p. 31), as fibras podem apresentar uma opção mais interessante, em detrimento da armadura convencional, quando os esforços de tração não forem bem localizados, como ocorre, por exemplo, nos pavimentos. Isso porque, diferente das barras de aço, as fibras se distribuem aleatoriamente no material, reforçando toda a peça e não uma determinada região. No entanto, se a peça estrutural possui esforços bem localizados, onde as tensões de tração de concentram na parte inferior ou superior, as fibras não podem substituir a armadura convencional de forma econômica, uma vez que as barras são posicionadas de forma a otimizar o reforço da estrutura.

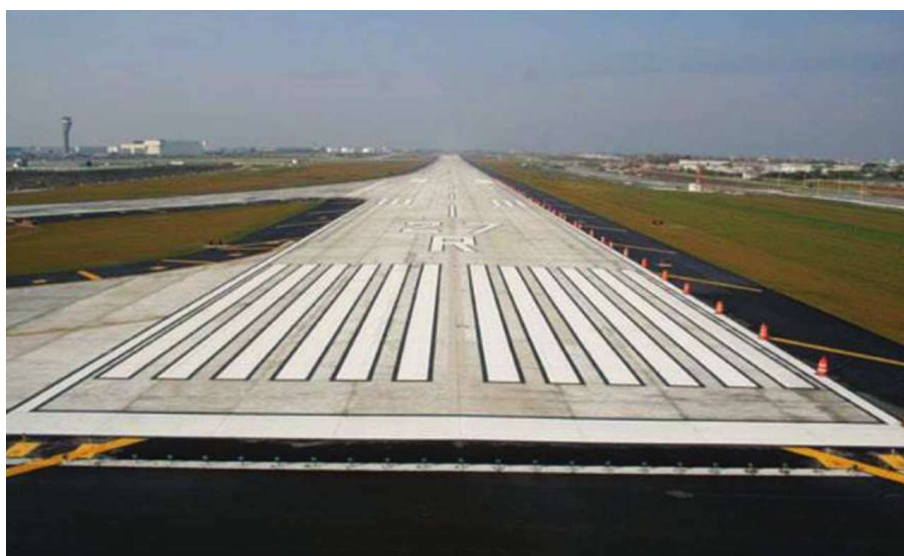
Todavia, é importante destacar que mesmo em peças com esforço de tração localizado, a utilização das fibras pode ser vantajosa devido ao maior controle da fissuração, garantindo ao concreto as características mencionadas acima, e à facilidade de execução, oriunda da substituição parcial das barras de aço, o que reduz o tempo necessário para a montagem da armadura, bem como o espaço necessário para a estocagem desta. A esse respeito,

o *American Concrete Institute* (ACI) (2018, p. 27, tradução nossa) afirma que existem muitas pesquisas e experiências práticas que mostram a redução significativa da abertura de fissuras em estruturas que utilizam o reforço híbrido (barras mais fibras). Entretanto, os custos associados ainda devem ser maiores que o concreto armado convencional, de modo que é imprescindível levar em conta características como o ganho em durabilidade, menor custo de manutenção e menor tempo de execução (JACOMINI, 2021, p. 20).

## 2.2 Aplicações típicas do CRF

As lajes sobre o solo são uma das principais aplicações das fibras no concreto. Conforme afirma o ACI (2018, p. 21, tradução nossa), diversos tipos de lajes no solo, como pisos residenciais e comerciais, bem como pavimentos de estradas podem sofrer fissuras antes que as cargas finais sejam aplicadas. Tais fissuras podem ser causadas pela retração por secagem, variações térmicas, concentração de tensões nos cantos reentrantes e fadiga. O reforço advindo das fibras de aço ou sintéticas melhora a resistência à fissuração do concreto, especificamente próximo a superfície, resultando em uma vida útil mais longa. A dosagem para as fibras pode ser determinada com base no momento resultante das cargas aplicadas e nas propriedades do subleito. A Figura 1 ilustra um dos usos do CRF em lajes sobre o solo.

Figura 1 – Pista do *O'Hare Airport* reforçada com fibras de aço



Fonte: ACI (2018, p. 22).

Outro uso comum do CRF são os elementos de concreto pré-moldado. Uma das principais vantagens dessa aplicação, segundo o ACI (2018, p. 25, tradução nossa) é a

possibilidade da construção de peças mais esbeltas, nas quais o concreto convencional encontra barreiras construtivas, além da necessidade de cobrimentos mínimos para evitar a corrosão das barras de aço. Com a incorporação das fibras, tem-se uma melhor automatização do processo produtivo, bem como um melhor controle de qualidade, inclusive em peças que utilizam a combinação das fibras com os vergalhões de aço. Algumas aplicações típicas do CRF em peças pré-moldadas podem ser observadas na Figura 2, Figura 3 e Figura 4.

Figura 2 – Revestimento de túneis segmentados reforçados com fibras de aço



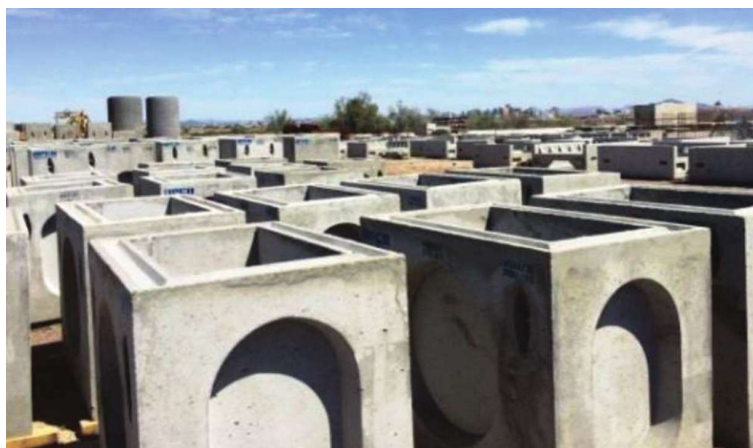
Fonte: ACI (2018, p. 25).

Figura 3 – Pontes com seção PI utilizando UHPC com fibras de aço



Fonte: ACI (2018, p. 26).

Figura 4 – Fossas sépticas reforçadas com macrofibras sintéticas



Fonte: ACI (2018, p. 26).



O concreto projetado representa outra aplicação típica do CRF, que, de acordo com o ACI (2018, p. 26, tradução nossa), se sobressai ao concreto projetado reforçado com tela de arame ou barras de aço pela economia em tempo e mão de obra, redução de materiais e maior segurança. Algumas das aplicações usuais do concreto projetado reforçado com fibras são o revestimento de estruturas subterrâneas, como túneis, e estruturas curvas em contato com o solo, como piscinas e pistas de skate. Isso porque o concreto é projetado diretamente sobre o solo escavado, eliminando custos de formas e instalação de aço, permitindo maior flexibilidade no formato dessas estruturas e reduzindo o tempo necessário à construção. No caso dos túneis subterrâneos, as fibras fornecem reforço no regime de pós-fissuração, reduzindo a abertura de fissuras que podem levar ao vazamento da água transportada. Na Figura 5, é possível observar o uso do CRF no concreto projetado.

Figura 5 – Concreto projetado reforçado com fibras



Fonte: ACI (2018, p. 27).

### 2.3 Avanço dos estudos no Brasil

Visando aprofundar os estudos acerca da aplicação estrutural do CRF, bem como estabelecer diretrizes para o projeto de estruturas e para o controle tecnológico desse concreto, foi criado, em 2011, pela Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural (ABECE), o Comitê Técnico “Concreto reforçado com fibras”, no qual foi utilizado como referência o *Model Code 2010* da Federação Internacional do Concreto (*fib*). Mais tarde, a partir

de uma integração da ABECE com o Instituto Brasileiro de Concreto (IBRACON), foi criado, em 2015, o CT303, Comitê Técnico de uso de materiais não convencionais para estruturas de concreto, fibras e concreto reforçado com fibras, objetivando ampliar as discussões envolvendo o CRF, além de desenvolver trabalhos técnicos para auxiliar a normatização brasileira e elaborar práticas recomendadas para o uso desse concreto (IBRACON, 2017, p. 7).

Com o avanço dos estudos, em 2019, foi publicada, pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), uma nova versão da norma ABNT NBR 15530:2019 – Fibras de aço para concreto – Requisitos e métodos de ensaio, que havia sido publicada pela primeira vez em 2007. Além disso, foram publicadas, em 2021, novas normas acerca do projeto estrutural, controle de qualidade e métodos de ensaio do CRF, quais sejam: ABNT NBR 16935:2021 – Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento, ABNT NBR 16938:2021 – Concreto reforçado com fibras – Controle de qualidade, ABNT NBR 16939:2021 – Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à fissuração e residuais à tração por duplo puncionamento – Método de ensaio, ABNT NBR 16940:2021 – Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) – Método de ensaio, ABNT NBR 16941:2021 – Fibras de vibro álcali-resistentes (AR) para concreto e argamassa – Requisitos e métodos de ensaio e ABNT NBR 16942:2021 – Fibras poliméricas para concreto – Requisitos e métodos de ensaio.

A recente publicação das referidas normas técnicas representa um importante avanço na utilização do CRF com fins estruturais, uma vez que padroniza as diretrizes necessárias para o uso desse material. Aliado a isso, faz-se necessário difundir o seu uso para a capacitação dos profissionais na utilização desse concreto.

## **2.4 Comportamento das fibras**

As fibras introduzidas na matriz cimentícia podem ser produzidas a partir de diferentes materiais, como aço, polipropileno, carbono, vidro, nylon etc., sendo, segundo Thomaz (s.d., p.1), as fibras de aço e de polipropileno as mais utilizadas.

De acordo com Figueiredo (2011, p. 9), as fibras de aço geralmente possuem extremidades na forma de gancho para aumentar sua ancoragem e têm comprimento variando de 25 a 60 mm. Elas podem ser fornecidas soltas ou coladas em pentes, como mostra a Figura 6. Já as fibras de polipropileno, ilustradas na Figura 7, são divididas em dois grupos: as microfibras e as macrofibras. As microfibras, por sua vez, podem ser fornecidas em duas

formas: monofilamento e fibriladas. As fibras de monofilamento consistem em fios cortados em comprimento padrão, enquanto as fibriladas apresentam-se como uma malha de finos filamentos de seção retangular, que promove um aumento na adesão entre a fibra e a matriz, devido a um efeito de intertravamento.

Figura 6 – Fibras de aço



Fonte: Belgo Bekaert Arames. Disponível em: <https://blog.belgobekaert.com.br/>. Acesso em 20/12/2021.

Figura 7 – Fibras de polipropileno

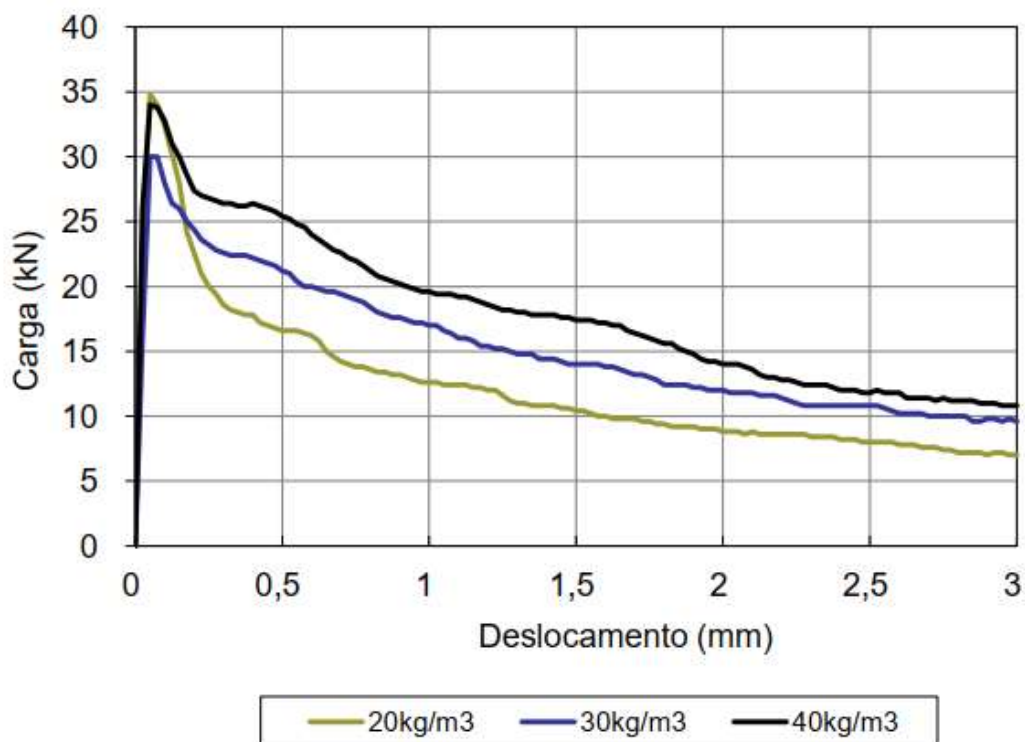


Fonte: Tec Machine. Disponível em: <https://www.tecmachinefm.com.br/>. Acesso em 18/12/2021.

Segundo Buttignol *et al.* (2018, p. 1012), “o tipo de fibra (metálica ou sintética, micro ou macrofibra, com ou sem ganchos), além da sua quantidade e distribuição na matriz do concreto, são fatores determinantes para o tipo de resposta do material no regime de pós-fissuração”.

O teor de fibras, dado pela quantidade ou volume de fibras incorporadas no concreto, é um dos principais parâmetros definidores do comportamento dos compósitos segundo Figueiredo (2011, p. 32). A Figura 8 mostra que quanto maior a quantidade de fibras incorporadas, maior a resistência residual do compósito.

Figura 8 – Influência do teor de fibras na resistência residual

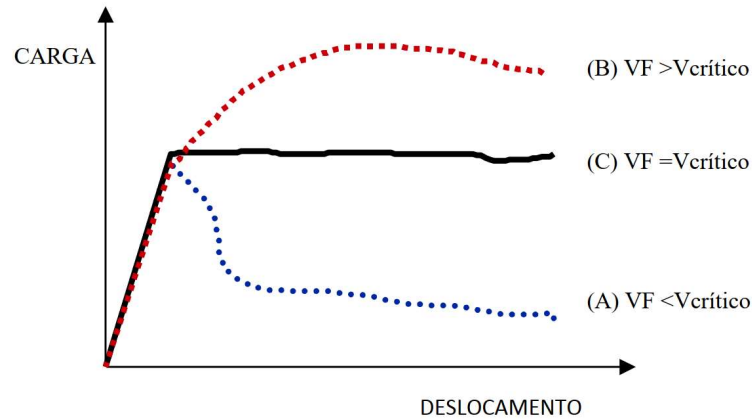


Fonte: Figueiredo (2011, p. 33).

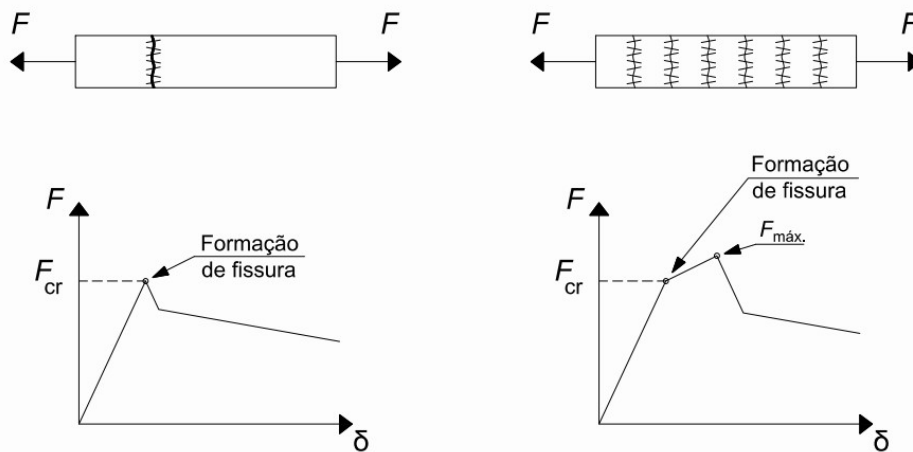
Conforme Figueiredo (2011, p. 33), o volume crítico é aquele que “[...] correspondente ao teor de fibras que mantém a mesma capacidade resistente para o compósito a partir da ruptura da matriz”. Abaixo do volume crítico, ocorre o comportamento de *strain-softening*, caracterizado pela perda progressiva da capacidade resistente após a fissuração da matriz. Por outro lado, acima do volume crítico, o compósito aceita carregamentos mesmo após a ruptura da matriz, apresentando comportamento de *strain-hardening*, caracterizado pelo ganho de capacidade resistente após a fissuração. A Figura 9 e a Figura 10 ilustram tais comportamentos.

Conforme pontua o ACI (2018, p. 10, tradução nossa) e pode-se observar na Figura 10, no comportamento de *strain softening*, a força residual decai gradativamente à medida em que a deformação da viga e a abertura da fissura aumentam. Já no *strain hardening*, a força residual aumenta gradualmente com o aumento da deformação e da abertura de fissura até um ponto de falha. Além disso, no *strain softening*, as fibras fornecem resistência para fazer a ponte de uma fissura principal, enquanto no *strain hardening*, as fibras podem fornecer resistência para a ponte de várias fissuras, redistribuindo as tensões.

Figura 9 – Volume crítico de fibras



Fonte: Figueiredo (2011, p. 34).

Figura 10 – Comportamento de *softening* e *hardening*

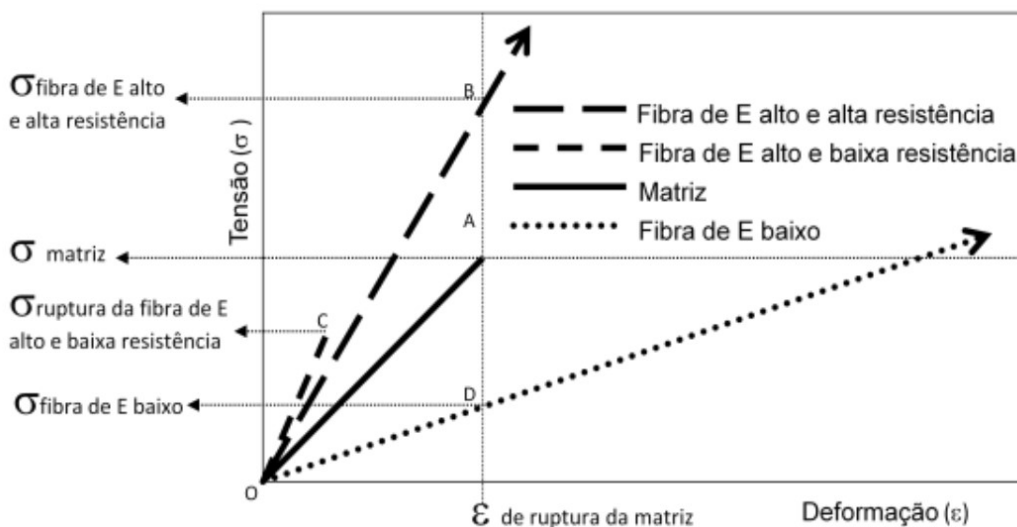
a) Comportamento de *softening*

b) Comportamento de *hardening*

Fonte: ABNT NBR 16935 (2021, p. 5).

Ainda de acordo com estudos realizados por Figueiredo (2011, p. 16), outra informação importante a ser considerada é o módulo de elasticidade e a resistência da fibra. Conforme observa-se na Figura 11, fibras com alto módulo de elasticidade e baixa resistência não apresentarão resistência pós-fissuração, de modo que não devem ser utilizadas como reforço do concreto. As fibras com baixo módulo de elasticidade, por sua vez, precisam conter altos teores para um bom comportamento de reforço. Já as fibras com alto módulo de elasticidade e alta resistência podem ser utilizadas com teores mais baixos.

Figura 11 – Influência do Módulo de Elasticidade e Resistência das fibras



Fonte: Figueiredo (2011, p. 18).

Ademais, a Tabela 1 a seguir apresenta as propriedades pertinentes para cada tipo de fibra.

Tabela 1 – Propriedades de cada tipo de fibra

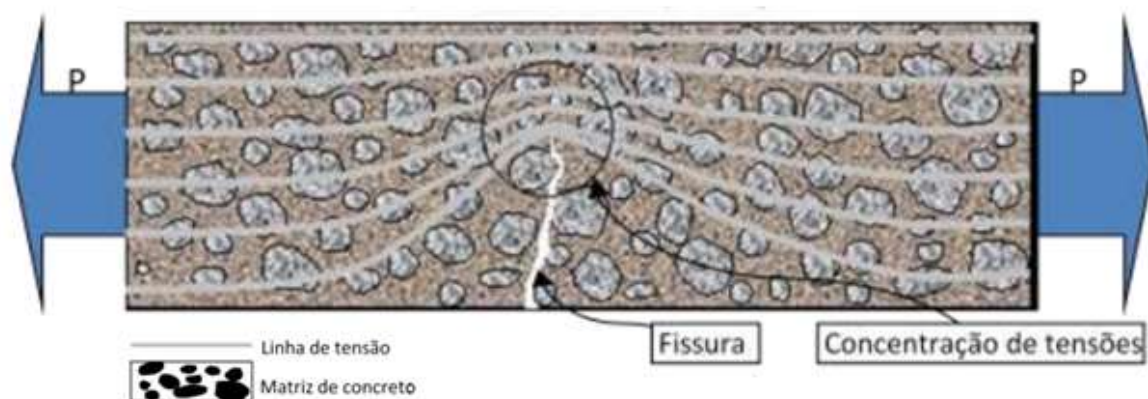
Material	Diâmetro (um)	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Módulo de Elasticidade (GPa)	Resistência à tração (GPa)	Deformação na ruptura (%)
Aço	5-500	7,84	190-210	0,5-2	0,5-3,5
Vidro	9-15	2,60	70-80	2-4	2-3,5
Amianto	0,02-0,4	2,6	160-200	3-3,5	2-3
Polipropileno fibrilado	20-20010	0,9	1-7,7	0,5-0,75	8,0
Kevlar	10	1,45	65-133	3,6	2,1-4,0
Carbono	9	1,9	230	2,6	1,0
Nylon	–	1,1	4,0	0,9	13-15
Celulose	–	1,2	10	0,3-0,5	–
Acrílico	18	1,18	14-19,5	0,4-1,0	3
Polietileno	–	0,95	0,3	0,7.10 <sup>-3</sup>	10
Fibra de madeira	–	1,5	71	0,9	–
Sisal	10-50	1-50	–	0,8	3,0
Matriz de cimento (Comparação)	–	2,50	10-45	3,7.10 <sup>-3</sup>	0,02

Fonte: Betur; Mindess, 1990 *apud* Figueiredo, 2011 – Adaptada.

## 2.5 Atuação da fibra no controle da fissuração

Conforme Figueiredo (2011, p. 29), no concreto convencional (sem fibras), a fissura proporciona uma barreira à propagação de tensões de tração, gerando um desvio das linhas de tensão que, por sua vez, causa uma concentração de tensões na extremidade da fissura, conforme ilustrado na Figura 12. Caso essa tensão supere o valor da tensão crítica que o material é capaz de suportar, ocorre a ruptura abrupta do material. Por outro lado, caso se tenha um esforço cíclico, pode-se ter ruptura por fadiga, uma vez que, a cada ciclo, há uma pequena propagação das microfissuras, aumentando progressivamente a concentração de tensões até a ruptura completa. Essa ruptura abrupta caracteriza o que se denomina de comportamento frágil do material.

Figura 12 – Propagação de tensões do Concreto Simples fissurado

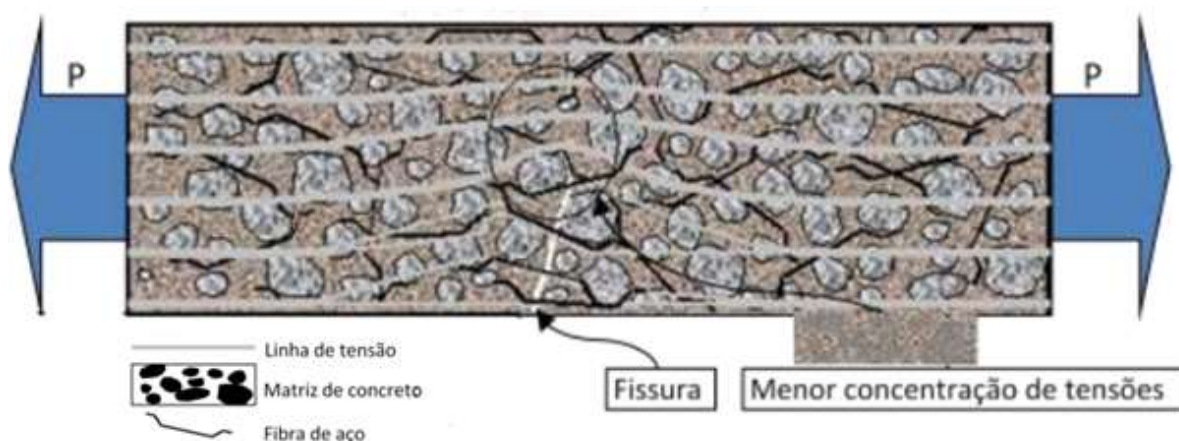


Fonte: Figueiredo (2011, p. 30) – Adaptada.

Com a adição de fibras na matriz de concreto, com adequado teor e módulo de elasticidade, o concreto deixa de ter o comportamento marcadamente frágil. Isso ocorre, segundo Figueiredo (2011, p. 29), “[...] pelo fato de a fibra servir como ponte de transferência de tensões pelas fissuras, cuja concentração de tensões na extremidade será então minimizada”, como se pode observar na Figura 13. A diminuição da concentração de tensões acarreta a redução da velocidade de propagação das fissuras, conferindo o comportamento dúctil, com isso, o concreto passa a apresentar capacidade resistente à tração após a fissuração.



Figura 13 – Propagação de tensões do CRF fissurado



Fonte: Figueiredo (2011, p. 30) – Adaptada.

## 2.6 Trabalhabilidade

Uma das principais dificuldades no uso do Concreto Reforçado com Fibras é a trabalhabilidade desse concreto no estado fresco, uma vez que a adição de fibras altera as condições de consistência e mobilidade da matriz, conforme afirma Figueiredo (2011, p. 88). Tais alterações dependem do material, teor e geometria da fibra incorporada.

Ocorre que, muitas vezes na etapa de mistura do concreto, há a formação de emaranhados de fibras, popularmente conhecidos como ouriços, como mostra a Figura 14 (FIGUEIREDO; ALFERES FILHO; CECCATO, 2017, p. 86). A formação desses ouriços prejudica a moldagem dos elementos e pode acarretar um concreto não homogêneo. Diante disso, segundo Figueiredo, Alferes Filho e Ceccato (2017, p. 87), para evitar esse problema, a mistura deve ser feita de forma cuidadosa e as fibras devem ser adicionadas de forma contínua, distribuídas progressivamente. Além disso, alguns fabricantes fornecem as fibras de aço coladas em pentes ou tabletes, evitando o emaranhado que pode se formar já na embalagem das fibras.



Figura 14 – Formação de ouriços no CRF



Fonte: Belgo Bekaert Arames. Disponível em <https://belgobekaert.com.br/>. Acesso em 20/12/2021.

Buttignol *et al.* (2018, p. 1012) ressaltam que a redução da trabalhabilidade está diretamente relacionada com a quantidade de fibras incorporadas na mistura. No entanto, grande parte do problema da trabalhabilidade do CRF com elevadas adições de fibras foi resolvida com o desenvolvimento do concreto auto-adensável (CAA). “Além disso, novas técnicas de lançamento permitiram um maior controle da orientação das fibras no concreto, reduzindo a variabilidade e aumentando a previsibilidade dos resultados experimentais” (BUTTIGNOL *et al.*, 2018, p. 1012).

Segundo o ACI (2018, p. 28, tradução nossa), em grande parte dos casos, não são necessárias mudanças na mistura do concreto quando se troca o concreto convencional pelo CRF, especialmente em baixas e moderadas dosagens. No entanto, em dosagens altas e dependendo do tipo de fibra, alguns ajustes na mistura podem ser necessários, tais como a vibração mecânica e o incremento de aditivos plastificantes para manter a trabalhabilidade sem alterar a relação água/cimento utilizada.

### 3 ESTADO LIMITE ÚLTIMO DO CRF À FLEXÃO

O Estado Limite Último (ELU) é o estado que caracteriza as situações de tensões e deformações que levam à ruína do elemento estrutural de forma parcial ou total.

Segundo a ABNT NBR 6118 (2014, p. 54), a segurança das estruturas de concreto deve sempre ser verificada em relação a diferentes estados limites últimos, como a perda de equilíbrio da estrutura admitida como corpo rígido, o esgotamento da capacidade resistente da estrutura em diferentes condições, o colapso progressivo, dentre outros.

Para a realização da referida verificação, faz-se necessário estimar os valores das resistências do elemento estrutural e das ações que atuam sobre este elemento.

Tal estimativa é feita através da adoção de valores característicos definidos de forma probabilística conforme a orientação de normas técnicas da ABNT. Segundo a ABNT NBR 8681 (2003, p. 4), “os valores característicos das ações são definidos em função da variabilidade de suas intensidades”. Os valores a serem adotados para cada tipo de ação são dados na ABNT NBR 6120:2019 – Ações para o cálculo de estruturas de edificações. Quanto aos valores característicos das resistências, a ABNT NBR 8681 (2003, p. 16) afirma que “os valores característicos das resistências são os que, num lote de material, têm uma determinada probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável para a segurança”. O valor de resistência característica usualmente adotado para o concreto é aquele em que, dado um lote de material, se tem apenas 5% de probabilidade desse valor não ser atingido pelos elementos que compõem esse lote, valor esse definido como resistência característica inferior (ABNT NBR 8681, 2003, p. 16).

Após a definição dos valores característicos, é necessária a utilização de coeficientes de minoração ou majoração, sempre a favor da segurança. Assim, minora-se os componentes de resistência e majora-se os componentes solicitantes (ações atuantes), caso estes atuem de forma desfavorável à segurança. Com a aplicação desses coeficientes, obtêm-se os valores de cálculo, que serão utilizados no dimensionamento. As Equações (1) e (2) explicitam a majoração das ações e a minoração das resistências, respectivamente, conforme orienta a ABNT NBR 8681 (2003, p. 5 e 17). Salienta-se que os valores característicos são identificados com o subscrito  $k$ , enquanto os valores de cálculo apresentam o subscrito  $d$ .

$$F_d = \gamma_M F_k \quad (1)$$

Onde:

- $F_d$  é a ação de cálculo;
- $F_k$  é a ação característica;

- $\gamma_M$  é o coeficiente de majoração das ações no ELU.

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \quad (2)$$

Onde:

- $f_d$  é a resistência de cálculo;
- $f_k$  é a resistência característica;
- $\gamma_m$  é o coeficiente de minoração da resistência no ELU.

O coeficiente  $\gamma_M$  leva em conta a variabilidade das ações, a baixa probabilidade de ocorrência simultânea das ações variáveis e os possíveis erros de avaliação dos efeitos das ações, decorrentes de problemas construtivos ou da deficiência do método de cálculo empregado. Já o coeficiente  $\gamma_m$  é dado pela variabilidade da resistência efetiva, pela diferença entre a resistência efetiva do material da estrutura e a resistência medida convencionalmente em corpos de prova ensaiados e pelas incertezas existentes na determinação das solicitações resistentes, em razão dos métodos construtivos e do método de cálculo empregado.

O valor do coeficiente  $\gamma_M$  a ser utilizado é dado na Tabela 11.1 da ABNT NBR 6118:2014, cuja adaptação consta na Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 – Coeficiente de majoração das ações –  $\gamma_M$

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
<b>Normais</b>	1,4 <sup>a</sup>	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
<b>Especiais ou de construção</b>	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
<b>Excepcionais</b>	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

Onde:

D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis e T é a temperatura.

<sup>a</sup> Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Os valores de minoração das resistências no ELU ( $\gamma_m$ ) variam em função do material e da combinação a ser utilizada, conforme a Tabela 12.1 da ABNT NBR 6118:2014, adaptada na Tabela 3:

Tabela 3 – Coeficiente de minoração das resistências –  $\gamma_m$

<b>Combinações</b>	<b>Concreto – <math>\gamma_c</math></b>	<b>Aço – <math>\gamma_s</math></b>
<b>Normais</b>	1,4	1,15
<b>Especiais ou de construção</b>	1,2	1,15
<b>Excepcionais</b>	1,2	1,0

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014, p. 71) – Adaptada.

Salienta-se que o valor de minoração para o concreto apresentado pela ABNT NBR 6118:2014 corresponde à atuação do concreto para esforços de compressão, uma vez que, de acordo com essa norma, a resistência à tração pelo concreto é desprezada no ELU. Entretanto, quando se trata do CRF, o concreto é considerado na resistência à compressão e à tração, devido a incorporação das fibras. Nesse caso, para combinações normais, o coeficiente de ponderação para o concreto no ELU será de 1,4 à compressão e 1,5 à tração, conforme orienta a ABNT NBR 16935 (2021, p. 12).

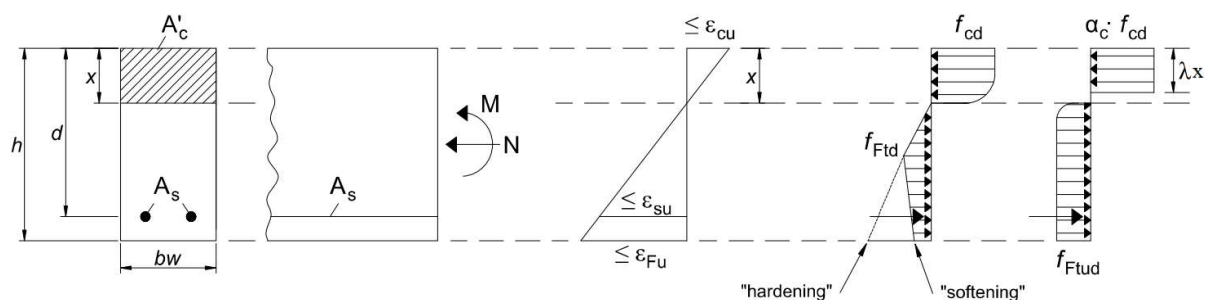
### 3.1 Diagrama ELU para vigas de CRF submetidas à flexão

Para o dimensionamento de elementos estruturais de CRF, independentemente do tipo de fibra utilizado, os procedimentos a serem adotados encontram-se presentes na recém-publicada ABNT NBR 16935:2021, a qual utiliza, para as vigas, as mesmas hipóteses adotadas na ABNT NBR 6118:2014, quais sejam:

- a) Manutenção da seção plana após a deformação;
- b) Pequenos deslocamentos;
- c) Aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Desse modo, a principal diferença, conforme destacam Buttignol *et al.* (2018, p. 1017), é que, no dimensionamento de vigas de concreto armado utilizando concreto convencional, as tensões de tração do concreto são desprezadas, enquanto no CRF, devido à contribuição das fibras para a resistência na pós-fissuração, essas tensões são consideradas na capacidade resistente do elemento estrutural, como se pode observar no diagrama de ELU para solicitações normais de flexão, ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Diagrama ELU para vigas de CRF submetidas à flexão



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021, p. 16) – Adaptada.

Dada a atuação de um momento positivo, a viga terá a parte superior de sua seção transversal comprimida e a parte inferior tracionada. A linha horizontal na seção onde se passa da região comprimida para a tracionada é chamada linha neutra. Acima da linha neutra, haverá resistência à compressão oferecida pelo concreto ( $f_{cd}$ ) desenvolvida através de um diagrama parábola-retângulo. Abaixo da linha neutra, tem-se a resistência à tração do CRF, dada por um diagrama retangular, e da armadura longitudinal, caso exista, dada por uma força concentrada localizada no centro de gravidade da área de aço na seção.

Para o dimensionamento, utiliza-se um diagrama simplificado, no qual a resistência do CRF à compressão é simplificada à forma retangular com altura reduzida a  $\lambda \cdot x$  e resistência multiplicada por um coeficiente  $\alpha_c$ .

O valor da resistência do CRF à tração é dado pela resistência à tração direta última de cálculo ( $f_{Ftud}$ ) com altura desde a linha neutra até a face mais tracionada da viga. Salienta-se que o valor a ser adotado para  $f_{Ftud}$  será detalhado no Item 3.2.3 do presente trabalho.

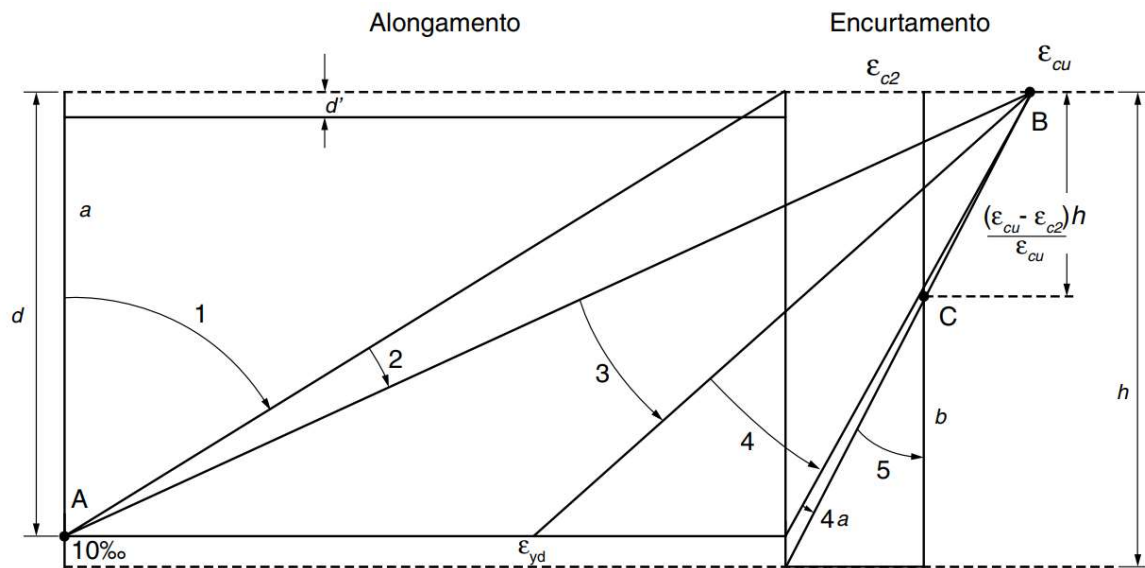
Por fim, a força concentrada correspondente à resistência da armadura é calculada pela multiplicação da área de aço na seção pela sua tensão de escoamento, também com seu valor de cálculo.

Segundo a ABNT NBR 16935 (2021, p. 16), o ELU à flexão para as vigas de CRF é atingido quando uma das seguintes condições é alcançada:

- Máxima deformação de compressão no CRF –  $\epsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ ;
- Máxima deformação de tração no aço, se existir –  $\epsilon_{su} = 10 \text{ ‰}$ ;
- Deformação última do CRF –  $\epsilon_{Fu} = 20 \text{ ‰}$  para distribuições de tensões de tração variáveis ao longo da seção transversal e  $\epsilon_{Fu} = 10 \text{ ‰}$  para distribuições de tensões de tração constantes ao longo da seção transversal.

Salienta-se que a forma de ruína descrita em *a* caracteriza o Domínio 3 e a descrita em *b* caracteriza o Domínio 2, conforme a Figura 16.

Figura 16 – Domínios de ELU de uma seção transversal



Fonte: ABNT NBR 6118 (2014, p. 122).

### 3.2 Resistência à tração do Concreto Reforçado com Fibras

Para a obtenção da resistência à tração direta última de cálculo ( $f_{Ftud}$ ), utilizada no Estado Limite Último à flexão do CRF, faz-se necessária a caracterização do concreto utilizado. Para tal, é preciso a realização de um ensaio de determinação das resistências à tração na flexão, as quais serão utilizadas para o cálculo do  $f_{Ftud}$ .

#### 3.2.1 Determinação da resistência à tração na flexão do CRF

A caracterização do CRF é feita através da norma técnica ABNT NBR 16940:2021, a qual “estabelece o método de ensaio para a avaliação do comportamento mecânico do CRF na flexão, com a determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais)” (ABNT NBR 16940, 2021, p. 1).

A aparelhagem do ensaio consiste em:

- Moldes para a produção de corpos de prova de CRF prismáticos;
- Máquina de ensaio à tração na flexão, com controle de velocidade por meio de uma taxa constante de abertura de entalhe (CMOD – *Crack Mouth Opening Displacement*) ou de deslocamento vertical do corpo de prova ( $\delta$ );
- Roletes de suporte e de aplicação de carga para aplicação da força perpendicularmente às faces superior e inferior do corpo de prova;

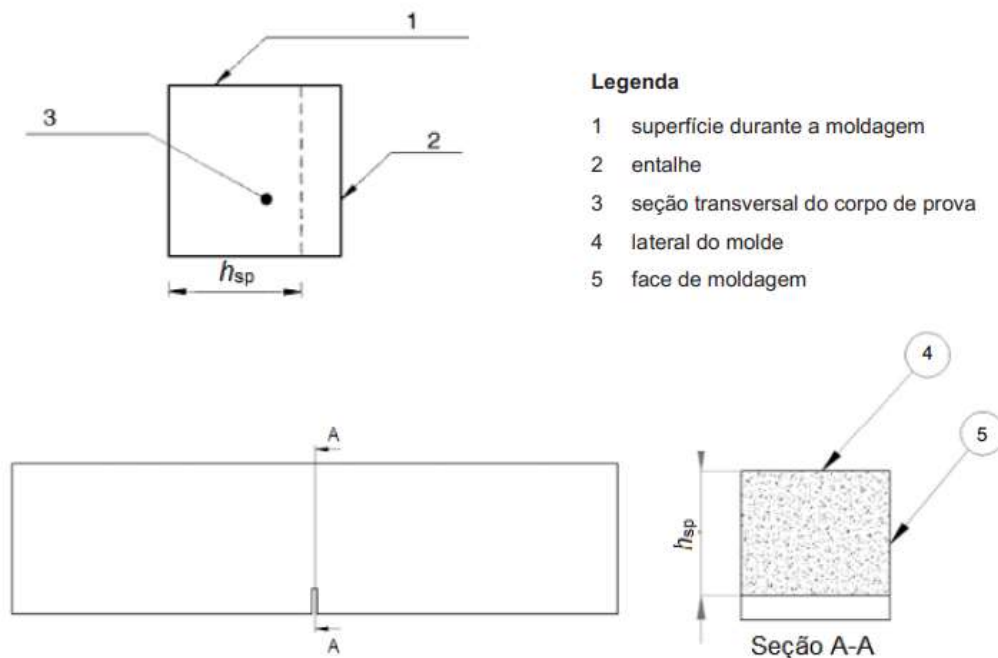
- d) Dispositivos de medida de carga e de abertura de entalhe (CMOD) ou de deslocamento vertical ( $\delta$ ), além de paquímetros para aferição das medidas dos corpos de prova.

As especificações detalhadas de cada um dos aparelhos mencionados acima, bem como as dimensões, distâncias e precisões a serem adotadas estão dispostas na ABNT NBR 16940:2021.

Para a execução do ensaio, a primeira etapa é a preparação dos corpos de prova, o que envolve a moldagem, a cura e a execução do entalhe. Salienta-se que podem ser adotadas duas configurações de controle no ensaio: a medida de abertura de entalhe (CMOD) ou a medida do deslocamento vertical ( $\delta$ ). Em ambos os casos, utiliza-se um transdutor de deslocamento com arranjo típico a depender da configuração de controle utilizada. Durante a aplicação da carga, o ensaio deve obedecer às taxas de aumento de CMOD ou de deslocamento vertical especificadas na ABNT NBR 16940:2021.

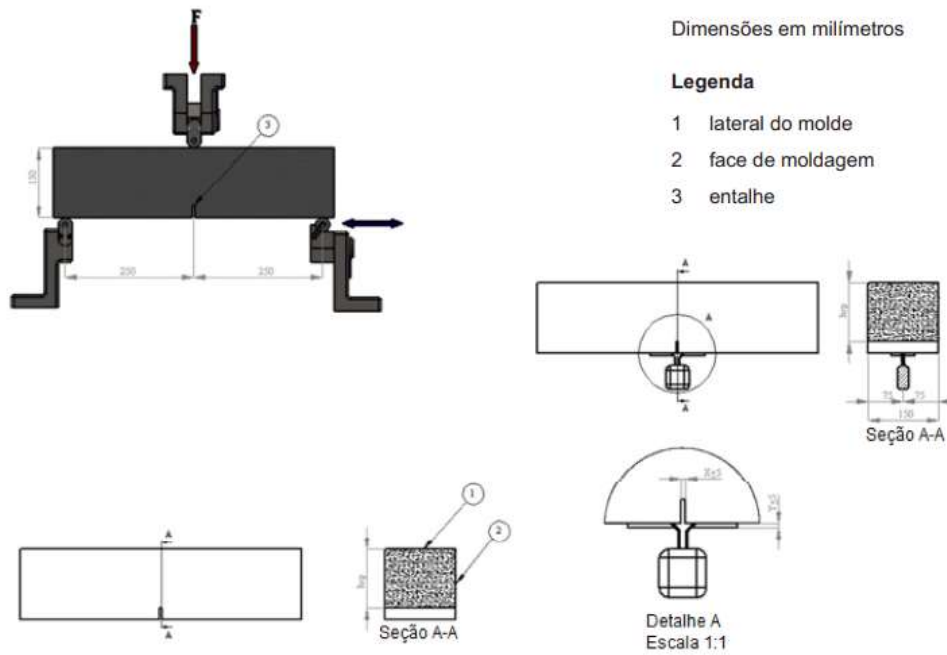
A Figura 17, Figura 18 e Figura 19, expostas a seguir, apresentam a posição do entalhe e os arranjos típicos para a realização do ensaio.

Figura 17 – Posição do entalhe na seção do corpo de prova



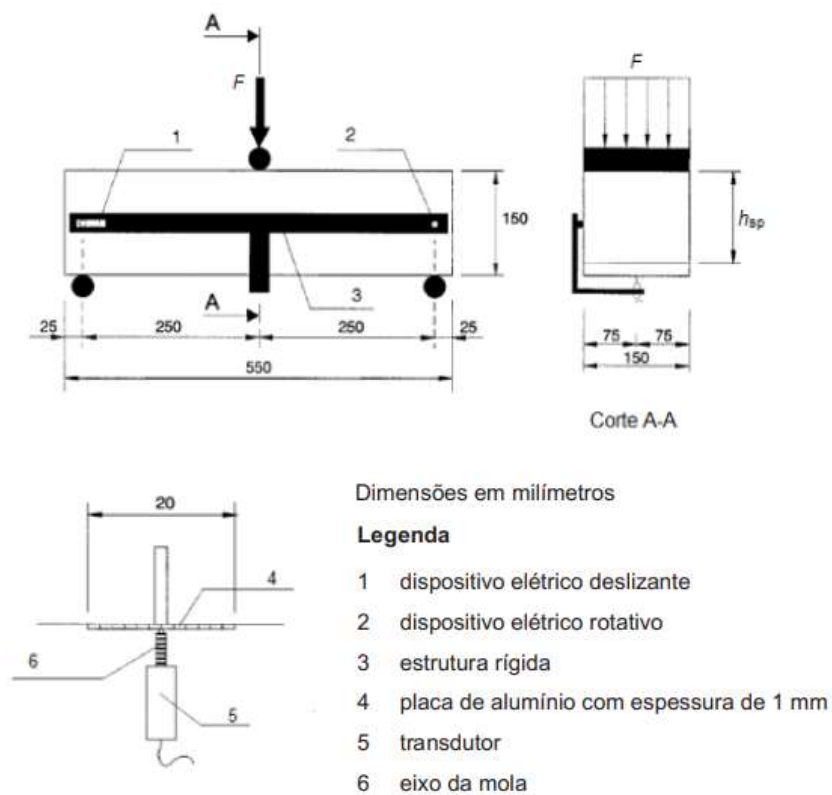
Fonte: ABNT NBR 16940 (2021, p. 5) – Adaptada.

Figura 18 – Arranjo típico para determinação de CMOD



Fonte: ABNT NBR 16940 (2021, p. 6) – Adaptada.

Figura 19 – Arranjo típico para determinação do deslocamento vertical



Fonte: ABNT NBR 16940 (2021, p. 7) – Adaptada.



A expressão dos resultados é dada em termos do limite de proporcionalidade (LOP) e das resistências residuais. Além disso, a ABNT NBR 16940 (2021, p. 8) estabelece uma equivalência entre o CMOD e o deslocamento vertical.

O limite de proporcionalidade é calculado pela seguinte equação:

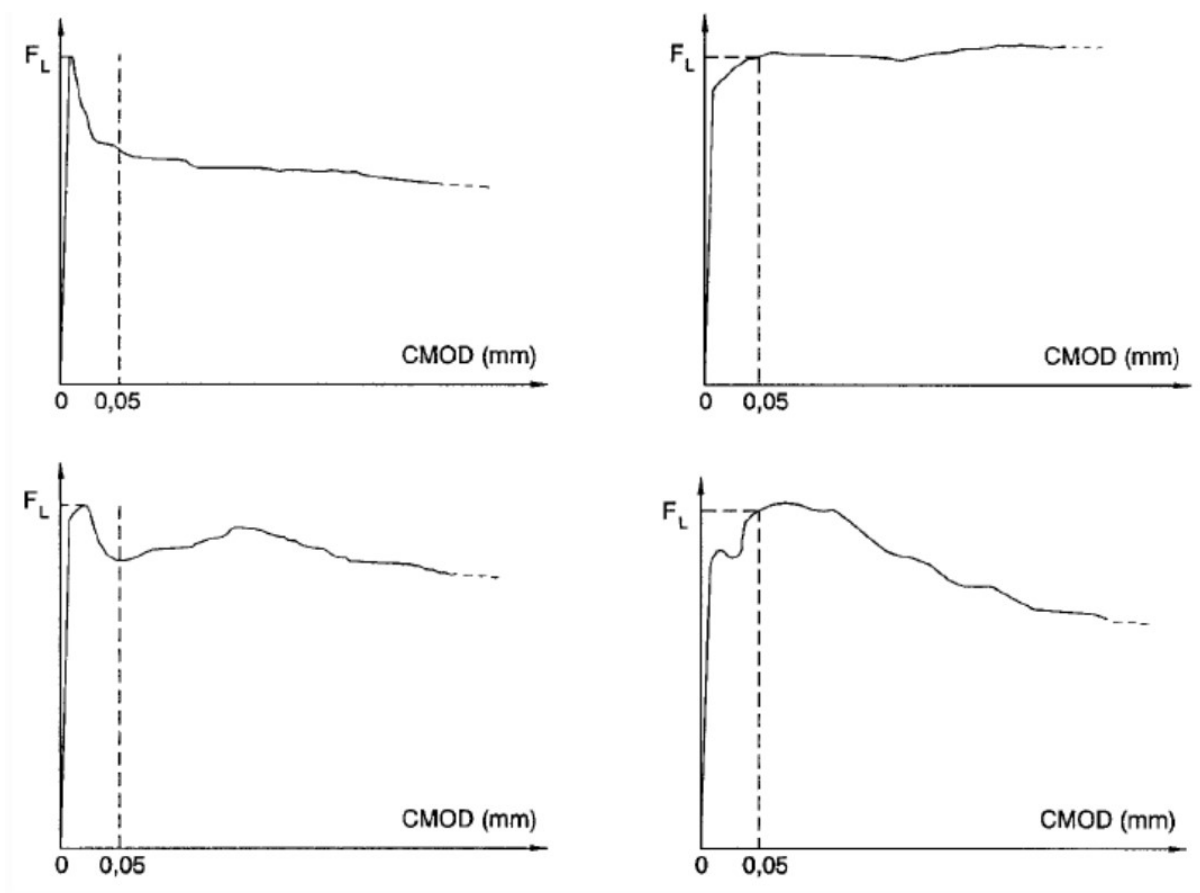
$$f_L = \frac{3F_L l}{2bh_{sp}^2} \quad (3)$$

Onde:

- $f_L$  é o LOP (N/mm<sup>2</sup>);
- $F_L$  é a carga correspondente ao LOP (N);
- $l$  é o comprimento do vão (mm);
- $b$  é a largura do corpo de prova (mm);
- $h_{sp}$  é a distância entre o topo do entalhe e o topo do corpo de prova (mm).

O valor de  $F_L$  é dado pelo valor da carga máxima no intervalo de 0 a 0,05 mm do diagrama de carregamento *versus* CMOD, conforme observa-se nos exemplos da Figura 20.

Figura 20 – Obtenção de  $F_L$



Fonte: ABNT NBR 16940 (2021, p. 9).

Por sua vez, as resistências residuais à tração na flexão são calculadas pela equação a seguir:

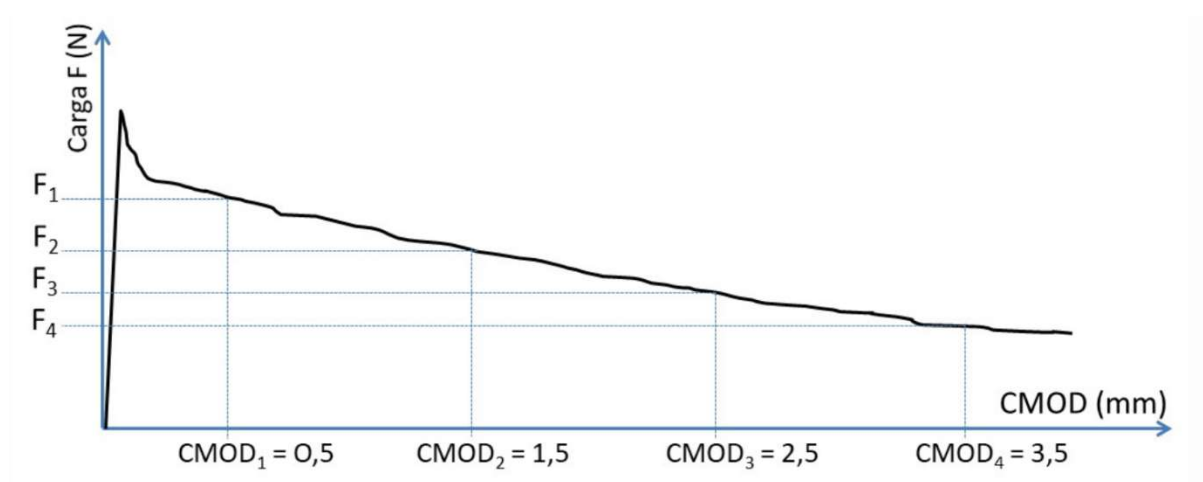
$$f_{R,i} = \frac{3F_i l}{2bh_{sp}^2} \quad (4)$$

Onde:

- $f_{R,i}$  é a resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD<sub>i</sub> (i = 1, 2, 3, 4) (N/mm<sup>2</sup>);
- $F_i$  é a carga correspondente ao CMOD<sub>i</sub> (i = 1, 2, 3, 4) (N);
- $l$  é o comprimento do vão (mm);
- $b$  é a largura do corpo de prova (mm);
- $h_{sp}$  é a distância entre o topo do entalhe e o topo do corpo de prova (mm).

Na Figura 21, é possível observar o diagrama das cargas  $F_i$  correspondentes a cada CMOD para obtenção das resistências residuais à tração na flexão.

Figura 21 – Diagrama de cargas x CMOD



Fonte: ABNT NBR 16940 (2021, p. 10).

Por fim, o relatório de ensaio, deve apresentar as seguintes informações, conforme indica a ABNT NBR 16940 (2021, p. 10).

- a) Identificação do ensaio;
- b) Composição do concreto;
- c) Tipo e teor de fibra;
- d) Data da concretagem;
- e) Data do entalhe;
- f) Local e data do ensaio;
- g) Instituição e técnico responsável pelo ensaio;
- h) Quantidade de corpos de prova ensaiados;

- i) Histórico da cura e condições de umidade de cada corpo de prova até o momento do ensaio;
- j) Largura média do corpo de prova;
- k) Distância média entre o topo do entalhe e o topo do corpo de prova;
- l) Dimensões x e y (mm);
- m) Comprimento do vão;
- n) Taxa de aumento do CMOD ou deslocamento;
- o) Curva de carga versus CMOD;
- p) LOP, determinado com exatidão de 0,1 N/mm<sup>2</sup>;
- q) Valores das resistências à tração na flexão residuais, correspondentes ao CMOD<sub>i</sub> (i = 1, 2, 3, 4), com exatidão de 0,1 N/mm<sup>2</sup>;
- r) Referência à ABNT NBR 16940:2021.

Salienta-se que o ensaio normatizado pela referida NBR, apresentado acima, é baseado na norma europeia EN14651:2007 e é o mais adotado internacionalmente, sendo o ensaio de referência para o *fib* Model Code 2010. No entanto, busca-se desenvolver ensaios mais simples que ainda se mostrem confiáveis para o controle tecnológico do CRF, o que é aceito pela *fib*, desde que apresentem fatores de correlação com os parâmetros do ensaio de referência (FIB, 2010, p. 224, tradução nossa). Como resultado dessa busca, foi desenvolvido o ensaio Barcelona, o qual “foi normatizado na Espanha por meio da AENOR UNE 83515 (2010) e consiste no duplo puncionamento aplicado a discos de carga posicionados na região central de corpos de prova moldados ou testemunhos extraídos” (MONTE; BARBOZA, 2017, p. 33). O referido ensaio é padronizado no Brasil pela ABNT NBR 16939:2021.

O presente trabalho não se aterá a detalhar o ensaio por duplo puncionamento, uma vez que se trata de um ensaio alternativo e, ainda, devido ao fato de o foco do trabalho não ser o controle tecnológico do CRF.

### **3.2.2 Relações mínimas entre as resistências**

Após a obtenção do limite de proporcionalidade e das resistências residuais, faz-se necessário, de acordo com a ABNT NBR 16935 (2021, p. 6), a verificação das seguintes relações mínimas para que as fibras possam substituir de forma total ou parcial a armadura convencional nos elementos dimensionados com CRF no Estado Limite Último (ELU), ou seja, para que as fibras sejam aproveitadas de maneira estrutural.

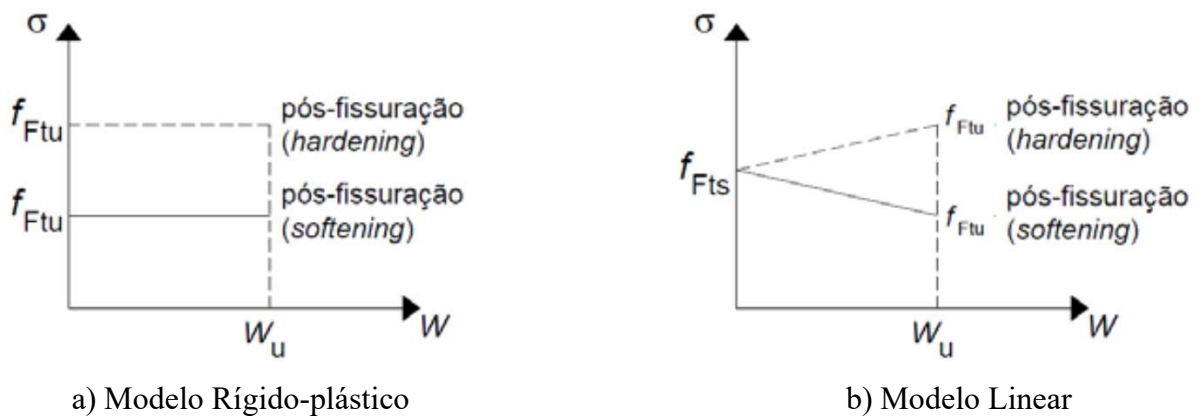
$$\frac{f_{R1}}{f_L} \geq 0,40 \quad (5)$$

$$\frac{f_{R3}}{f_{R1}} \geq 0,50 \quad (6)$$

### 3.2.3 Determinação da resistência à tração direta última do CRF

Após a obtenção das resistências à tração na flexão, é possível determinar a resistência à tração direta do CRF. Conforme a ABNT NBR 16935 (2021, p. 5), para a resistência à compressão, são consideradas as mesmas relações do concreto sem fibras. Já a resistência à tração, não considerada no concreto convencional, pode ser calculada a partir de duas diferentes hipóteses de leis constitutivas: o Modelo Rígido-plástico e o Modelo Linear. Ambos os modelos apresentam comportamento pós-fissuração de *hardening* e *softening*, conforme mostra a Figura 22. Além disso, o  $f_{Fts}$  representa a resistência à tração direta de serviço, enquanto o  $f_{Ftu}$  representa a resistência à tração direta última para o CRF.

Figura 22 – Hipóteses de leis constitutivas de pós-fissuração



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021, p. 6).

O Modelo Rígido-plástico utiliza apenas a resistência última ( $f_{Ftu}$ ) como referência, conforme a equação a seguir:

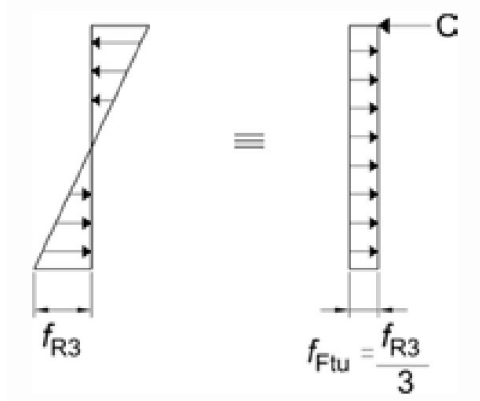
$$f_{Ftuk} = \frac{f_{R3}}{3} \quad (7)$$

Onde:

- $f_{R3}$  é a resistência residual à tração na flexão correspondente ao  $CMOD_3$ ;
- $f_{Ftuk}$  é a resistência característica à tração direta última do CRF;
- Salienta-se que podem ser utilizadas quaisquer unidades de tensão, desde que sejam utilizadas as mesmas unidades em  $f_{R3}$  e  $f_{Ftuk}$ .

Conforme esclarece a ABNT NBR 16935 (2021, p. 6), “o modelo considera a equivalência estática [...]. O valor de  $f_{Ftu}$  resulta do pressuposto de que toda resistência de compressão é concentrada na parte superior da seção”, o que pode ser observado na Figura 23.

Figura 23 – Modelo Rígido-plástico



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021, p. 7).

Dessa forma, tem-se o momento resistente, dado pela seguinte equação:

$$M_{Uk} = \frac{f_{R3} b h^2}{6} = \frac{f_{Ftu} b h^2}{2} \quad (8)$$

Onde:

- $M_{Uk}$  é o momento resistente característico do CRF devido à contribuição das fibras (kNm);
- $b$  é a largura da seção transversal da viga (m);
- $h$  é a altura da seção transversal da viga (m);
- $f_{R3}$  é a resistência residual à tração na flexão correspondente ao  $CMOD_3$  (kPa);
- $f_{Ftu}$  é a resistência característica à tração direta última do CRF (kPa).

Com isso, a capacidade resistente da viga é inicialmente calculada conforme a ABNT 6118:2014, como se a viga não possuísse fibras. Ou seja, a resistência à compressão fica a cargo do concreto e a resistência à tração a cargo somente das armaduras. Em seguida, some-se ao momento resistente determinado como se a viga não possuísse fibras, o valor de  $M_{Ud}$ , dado por:

$$M_{Ud} = \frac{M_{Uk}}{\gamma_f} = \frac{M_{Uk}}{1,5} \quad (9)$$

- $M_{Ud}$  é o momento resistente de cálculo do CRF devido à contribuição das fibras;
- $M_{Uk}$  é o momento resistente característico do CRF devido à contribuição das fibras;
- $\gamma_f$  é o coeficiente de minoração da resistência do CRF no ELU;

- Salienta-se que podem ser utilizadas quaisquer unidades de momento, desde que sejam utilizadas as mesmas unidades em  $M_{Uk}$  e  $M_{Ud}$ .

O Modelo Linear, por sua vez, utiliza as resistências em serviço ( $f_{Fts}$ ) e última ( $f_{Ftu}$ ) como referência, as quais são obtidas pelas equações a seguir:

$$f_{Fts} = 0,45 f_{R3} \quad (10)$$

$$f_{Ftuk} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3} (f_{Fts} - 0,5f_{R3} + 0,2f_{R1}) \geq 0 \quad (11)$$

Onde:

- $f_{R1}$  é a resistência residual à tração na flexão correspondente ao  $CMOD_1$  (kPa);
- $f_{R3}$  é a resistência residual à tração na flexão correspondente ao  $CMOD_3$  (kPa);
- $f_{Fts}$  é a resistência característica à tração direta de serviço do CRF (kPa);
- $f_{Ftuk}$  é a resistência característica à tração direta última do CRF (kPa);
- $w_u$  é a abertura de fissura última para o valor de  $CMOD$  considerado no projeto (mm);
- $CMOD_3 = 2,5$  mm.

Neste modelo, os valores limites de  $CMOD$ , para  $f_{Fts}$  e  $f_{Ftu}$  são 1,5 mm e 2,5 mm, respectivamente (ABNT NBR 16935, 2021, p. 8).

Finalmente,  $f_{Ftud}$  pode ser calculado conforme a seguinte equação:

$$f_{Ftud} = \frac{f_{Ftuk}}{\gamma_f} = \frac{f_{Ftuk}}{1,5} \quad (12)$$

Onde:

- $f_{Ftud}$  é a resistência de cálculo à tração direta última do CRF;
- $f_{Ftuk}$  é a resistência característica à tração direta última do CRF;
- $\gamma_f$  é o coeficiente de minoração da resistência do CRF no ELU;
- Salienta-se que podem ser utilizadas quaisquer unidades de tensão, desde que sejam utilizadas as mesmas unidades em  $f_{Ftuk}$  e  $f_{Ftud}$ .

### 3.3 Equações de equilíbrio do ELU e determinação do momento resistente

De posse dos parâmetros necessários ao diagrama do Estado Limite Último para vigas submetidas à flexão, é possível determinar a equação de equilíbrio que fornece a posição da linha neutra e, posteriormente, o valor das forças resistentes mencionadas no Item 3.1. Além

disso, pode-se determinar o momento resistente da viga através do modelo Rígido-plástico ou Linear.

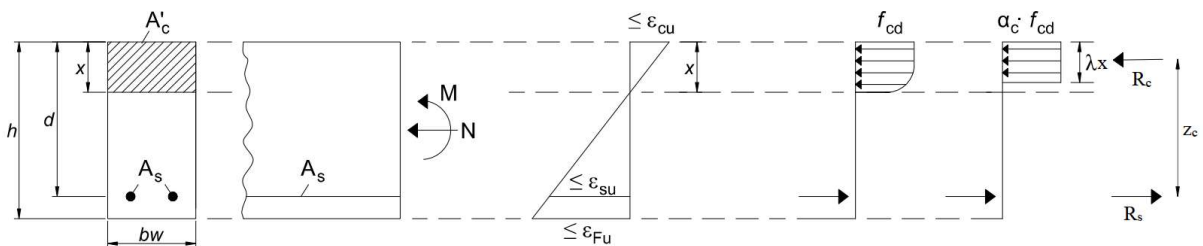
Salienta-se que, de acordo com a ABNT NBR 16935 (2021, p. 14), a análise plástica é utilizada “[...] quando as não linearidades puderem ser consideradas, admitindo-se materiais de comportamento rígido-plástico perfeito ou elastoplástico perfeito”. Tal análise deve ser empregada apenas em verificações de ELU. Ainda, a análise plástica não pode ser adotada quando se considerar efeitos de segunda ordem global ou não houver ductilidade suficiente para que as configurações adotadas sejam atingidas e deve ser evitada quando houver carregamento cíclico com possibilidade de fadiga.

Já na análise linear, admite-se o comportamento elástico-linear do CRF, com módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson adotados de acordo com o concreto convencional (sem adição de fibras). A análise linear pode ser utilizada tanto no ELU quanto no ELS.

### 3.3.1 Modelo Rígido-plástico

Conforme explicitado no Item 3.2.3, quando se utiliza o Modelo Rígido-plástico, o momento resistente é calculado em duas etapas, sendo a primeira idêntica ao dimensionamento de vigas de concreto armado com concreto convencional, regido pela ABNT NBR 6118:2014, dado pelo equilíbrio das forças resistentes do concreto à compressão e das armaduras à tração, conforme ilustrado na Figura 24 e descrito a seguir.

Figura 24 – Diagrama ELU – Concreto sem fibras



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021, p. 16) – Adaptada.

a) Força resistente do CRF à compressão ( $R_c$ )

$$R_c = \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot b \quad (13)$$

Onde, segundo Carvalho (2014, p. 117):

$$\alpha_c = 0,85 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (14)$$

$$\alpha_c = 0,85 \cdot [1 - (f_{ck} - 50)/200] \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

$$\lambda = 0,8 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 \text{ para } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$
(15)

b) Força resistente do aço à tração ( $R_s$ )

$$R_s = f_{yd} \cdot A_s$$
(16)

Para a verificação do equilíbrio, a resultante das duas forças deve ser igual a zero, considerando o sentido em que elas atuam. Desse modo, tem-se:

$$R_s - R_c = 0$$

$$f_{yd} \cdot A_s - \alpha_c \cdot \lambda \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b = 0$$
(17)

A primeira parcela do momento resistente é, então, determinada a partir da seguinte equação, tomando como ponto de referência o centro de gravidade da armadura utilizada.

$$M_{d1} = R_c \cdot z_c$$

$$M_{d1} = R_c \cdot \left(d - \frac{\lambda}{2} x\right)$$

$$M_{d1} = \alpha_c \cdot \lambda \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b \cdot \left(d - \frac{\lambda}{2} x\right)$$
(18)

Onde, para as Equações (13) a (18):

- $M_{d1}$  é a primeira parcela do momento resistente, sem a consideração das fibras (kNm);
- $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do CRF (kPa), dada por:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{f_{ck}}{1,4}$$
(19)

- $f_{yd}$  é a tensão de cálculo de escoamento do aço (kPa), dada por:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_c} = \frac{f_{yk}}{1,15}$$
(20)

- $A_s$  é a área de armadura utilizada na seção transversal da viga (m<sup>2</sup>);
- $b$  é a largura da seção transversal da viga (m);
- $x$  é a posição da linha neutra, medida a partir da face mais comprimida da viga (m);
- $z_c$  é o braço de alavanca da resultante da resistência à compressão do CRF (m);
- $d$  é a altura útil da viga, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras e a face mais comprimida da viga (m).



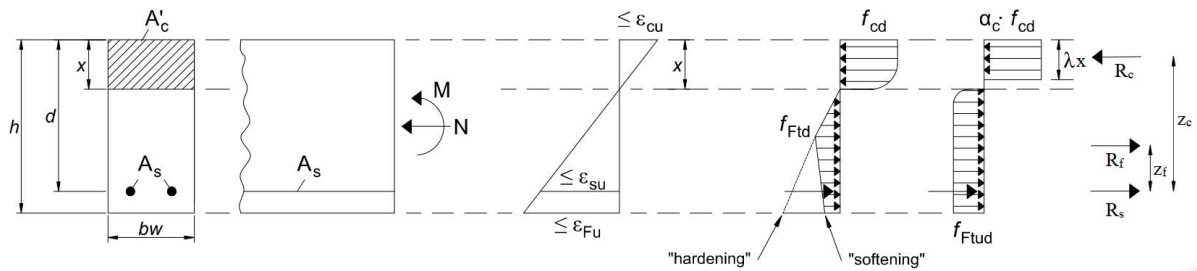
Por fim, o momento resistente, em kNm, é dado pela soma da primeira parcela, calculada pela Equação (18), referente ao concreto sem fibras, e a segunda parcela, dada pela Equação (9), referente à contribuição das fibras.

$$M_{Rd} = M_{d1} + M_{Ud} \quad (21)$$

### 3.3.2 Modelo Linear

Para o Modelo Linear, conforme exposto na Figura 25, o digrama de ELU já leva em consideração as fibras, de modo que as equações de equilíbrio possuem agora três parcelas resistentes, quais sejam  $R_c$ , dado pela Equação (13),  $R_s$ , dado pela Equação (16), e  $R_f$ , dado pela equação a seguir.

Figura 25 – Diagrama ELU – Concreto com fibras



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021, p. 16) – Adaptada.

a) Força resistente do CRF à tração ( $R_f$ )

$$R_f = f_{Ftud} \cdot (h - x) \cdot b \quad (22)$$

Para a verificação do equilíbrio, tem-se agora a resultante das três forças, que, considerando o sentido em que atuam, deve resultar em zero para garantia do equilíbrio.

$$\begin{aligned} R_f + R_s - R_c &= 0 \\ f_{Ftud} \cdot (h - x) \cdot b + f_{yd} \cdot A_s - \alpha_c \cdot \lambda \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

O momento resistente é determinado pela equação a seguir, na qual o ponto de referência é o centro de gravidade da armadura utilizada.

$$\begin{aligned} M_{rd} &= R_s \cdot z_f - R_c \cdot z_c \\ M_{rd} &= R_s \cdot \left( \left( \frac{h - x}{2} \right) - a \right) - R_c \cdot \left( d - \frac{\lambda}{2} \cdot x \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$M_{rd} = f_{Ftud} \cdot (h - x) \cdot b \cdot \left( \frac{h - x}{2} - a \right) - \alpha_c \cdot \lambda \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b \cdot \left( d - \frac{\lambda}{2} \cdot x \right)$$

Onde, para as Equações (22) a (24):

- $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do CRF (kPa), dada pela Equação (19);
- $f_{Ftud}$  é a resistência de cálculo à tração direta última do CRF (kPa);
- $f_{yd}$  é a tensão de cálculo de escoamento do aço (kPa), dada pela Equação (20);
- $A_s$  é a área de armadura utilizada na seção transversal da viga (m<sup>2</sup>);
- $h$  é a altura da seção transversal da viga (m);
- $b$  é a largura da seção transversal da viga (m);
- $x$  é a posição da linha neutra, medida a partir da face mais comprimida da viga (m);
- $z_f$  é o braço de alavanca da resultante da resistência à tração do CRF (m);
- $z_c$  é o braço de alavanca da resultante da resistência à compressão do CRF (m);
- $d$  é a altura útil da viga, dada pela distância entre o centro de gravidade das armaduras e a face mais comprimida da viga (m);
- $a$  é a distância entre o centro de gravidade das armaduras e a face mais tracionada da viga (m).

Utilizando as Equações (17), (18) e (21) para o Modelo Rígido-plástico e as Equações (23) e (24) para o Modelo Linear, é possível determinar o momento resistente caso se tenha a área de aço utilizada ou determinar a área de aço a ser utilizada caso se tenha o momento que se pretende resistir, ou seja o momento solicitante, uma vez que segundo a ABNT NBR 8681 (2003, p. 8), a resistência de cálculo deve ser maior ou igual à solicitação de cálculo. Para ambos os casos, é necessário que se tenha as resistências de cálculo à compressão ( $f_{cd}$ ) e à tração direta última ( $f_{Ftud}$ ), as dimensões da viga e o posicionamento, ainda que estimado, do centro de gravidade das armaduras em relação à face mais tracionada ( $a$ ) ou à mais comprimida ( $d$ ) da viga. Quando tal posicionamento não apresentar uma estimativa precisa, convém superestimar  $a$  e subestimar  $d$ .

#### 4 CUSTO DA IMPLEMENTAÇÃO DAS FIBRAS DE AÇO

O custo da implementação das fibras pode ser verificado a partir da comparação com uma mesma viga utilizando concreto convencional. Analisa-se a redução de armadura advinda da incorporação e a quantidade de fibras necessárias para conferir tal redução.

Feito o dimensionamento conforme orienta o Item 3 do presente trabalho, tem-se a área de armadura necessária para cada teor de fibras, inclusive para o caso em que não há a incorporação destas. Com isto, adota-se armaduras comerciais que supram a necessidade imposta buscando a quantidade de barras mais econômica, ou seja, que mais se aproxime da área necessária. Escolhida a configuração de barras a serem adotadas, tem-se o peso unitário por metro e por barra a depender do diâmetro utilizado. Ao multiplicar o peso unitário pelo comprimento e pela quantidade de barras da viga, tem-se o peso total de armadura, que, por sua vez, deve ser multiplicado pelo preço unitário de armadura por quilograma.

$$A_{adot} = N_{barras \phi} \cdot \frac{\pi \phi^2}{4} \geq A_{nec} \quad (25)$$

$$M_{arm} = N_{barras \phi} \cdot L \cdot M_{unit \phi} \quad (26)$$

$$C_{arm} = C_{unit \ arm} \cdot M_{arm} \quad (27)$$

Onde:

- $N_{barras \phi}$  é o número de barras adotadas;
- $\phi$  é o diâmetro das barras adotadas (cm);
- $A_{adot}$  é a área de aço adotada na seção transversal (cm<sup>2</sup>);
- $A_{nec}$  é a área de aço necessária na seção transversal (cm<sup>2</sup>);
- $L$  é o comprimento do vão da viga (m);
- $M_{unit \phi}$  é a massa unitária da armadura adotada (kg/m/barra);
- $M_{arm}$  é a massa de armadura à tração total na viga (kg);
- $C_{arm}$  é o custo unitário de armadura à tração na viga (R\$/kg);
- $C_{arm}$  é o custo total de armadura à tração na viga (R\$).

Ademais, o cálculo dos custos referentes à incorporação das fibras é calculado com base no teor escolhido no momento do dimensionamento, dado em quilogramas de fibras por metro cúbico de concreto. Calcula-se o volume de concreto da viga, dado pela multiplicação da largura, altura e comprimento desta. De posse do volume e do teor, tem-se a quantidade de fibras necessárias em quilogramas. Por fim, basta multiplicar esta massa pelo preço unitário das fibras, o qual é fornecido pelos fabricantes.

$$V = b \cdot h \cdot L \quad (28)$$

$$M_{fibras} = T_{fibras} \cdot V \quad (29)$$

$$C_{fibras} = C_{unit\ fibras} \cdot M_{fibras} \quad (30)$$

Onde:

- $b$  é a largura da seção transversal da viga (m);
- $h$  é a altura da seção transversal da viga (m);
- $L$  é o comprimento do vão da viga (m);
- $V$  é o volume da viga (m<sup>3</sup>);
- $T_{fibras}$  é o teor de fibras incorporado (kg/m<sup>3</sup>);
- $M_{fibras}$  é a massa de fibras na viga (kg);
- $C_{unit\ fibras}$  é o custo unitário de fibras na viga (R\$/kg);
- $C_{fibras}$  é o custo total de fibras na viga (R\$).

O custo total a ser comparado é, enfim, dado pela soma da parcela associada à armadura e a parcela associadas às fibras.

$$C_{total} = C_{arm} + C_{fibras} \quad (31)$$

Visando a obtenção de valores atualizados, os custos unitários foram obtidos a partir de catálogos de fabricantes e de bancos de dados presentes na Internet. Os valores encontram-se expostos na Tabela 4, a seguir. Salienta-se que as fibras cotadas foram fibras de aço uma vez que os exemplos numéricos discutidos na seção seguinte utilizam fibras desse material.

Tabela 4 – Custo unitário dos materiais de reforço

<b>Material</b>	<b>Armadura – Vergalhão CA50</b>	<b>Fibras de aço</b>
<b>Custo unitário (R\$/kg)</b>	R\$ 8,52 <sup>1</sup>	R\$ 7,00 <sup>2</sup>

Onde:

<sup>1</sup> Custo unitário obtido do Banco de Dados da Câmara Brasileira da Indústria da Construção (CBIC).

<sup>2</sup> Custo unitário obtido do catálogo da Belgo Bekaert Arames para Fibras de Aço coladas Dramix.

## 5 ESPECIFICAÇÕES EM PROJETOS

Para a elaboração das especificações de um projeto utilizando CRF, além das dimensões e espaçamentos determinados conforme detalhamento e da resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), o projetista deverá informar ainda os valores mínimos para o limite de proporcionalidade ( $f_L$ ) e para as resistências à tração na flexão correspondentes ao CMOD 1 e 3 ( $f_{R1}$  e  $f_{R3}$ ), todas em seus valores característicos e em MPa, os quais devem ser verificados no processo de controle, conforme a ABNT NBR 16935 (2021, p. 25).

Diante disso, no caso das fibras de aço, foco do presente trabalho, a ABNT NBR 15530 (2019, p. 13) normatiza a identificação, na embalagem das fibras, do teor mínimo necessário para atingir um desempenho mínimo requerido para  $f_L$ ,  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$ .

Assim, a Figura 26 exemplifica o rótulo de fibras de aço, no qual, para determinado teor incorporado, o limite de proporcionalidade é de 4,0 MPa, com variação de  $\pm 0,3$  MPa, e as relações mínimas entre  $f_{R1}$  e o LOP e  $f_{R3}$  e o LOP são de 0,4 e 0,2, respectivamente. A partir das relações mínimas apresentadas, é possível obter os valores mínimos de  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$ , quais sejam 1,48 e 0,74, respectivamente. Com isso, se os valores mínimos especificados em projeto forem menores ou iguais a:  $f_L = 3,70$  MPa,  $f_{R1} = 1,48$  MPa e  $f_{R3} = 0,74$  MPa, as fibras correspondentes a este rótulo podem ser usadas desde que se utilize o teor especificado neste mesmo rótulo. O controle tecnológico dessa resistência é feito por meio do ensaio normatizado na ABNT NBR 16940:2021, já detalhado anteriormente.

Figura 26 – Exemplo de rótulo de fibras de aço

Razão Social, CNPJ e endereço registrado do fabricante ou fornecedor	Nome ou marca de identificação do produto
ABNT NBR 15530:2019 (ISO 13270:2013, MOD) Fibras de aço para uso estrutural em concreto  País de fabricação: Brasil  Efeito na resistência do concreto de referência (LOP = 4,0 $\pm$ 0,3 MPa): XX kg/m <sup>3</sup> para obter no mínimo $f_{R1}/f_{LOP} = 0,4$  $f_{R3}/f_{LOP} = 0,2$  Efeito sobre a consistência:  <b>Indústria Brasileira</b>	Descrição do produto Grupo I, Classe B, Revestimento Comprimento: XX mm Diâmetro: X,XX mm Forma: deformada Tipo de agrupamento: Solta Resistência à tração: XXXX N/mm <sup>2</sup>  NOTA XX se refere ao valor correspondente ao parâmetro a ser informado.

Além disso, conforme observado na Figura 26 e padronizado pela ABNT NBR 15530 (2019, p 13), outras informações acerca das fibras de aço são identificadas em seu rótulo, quais sejam:

- a) Referência a ABNT NBR 15530 (2019);
- b) Razão Social, CNPJ e endereço do fabricante ou fornecedor;
- c) Legenda com o país de origem (fabricação);
- d) Nome ou marca de identificação comercial do produto e, importador e/ou revendedor;
- e) Descrição do produto: grupo, classe, comprimento, diâmetro, forma, classificação do aço, revestimento, tipo de agrupamento e resistência à tração;
- f) Efeito sobre a consistência do concreto.

## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Diante dos critérios de dimensionamento apresentados anteriormente, foi implementada uma planilha de cálculo utilizando o software Microsoft Excel.

Inicialmente, é necessário que o usuário forneça, como dados de entrada, as dimensões da seção transversal da viga, o  $f_{ck}$  do concreto utilizado e os resultados do ensaio detalhado no Item 3.2.1 do presente trabalho, quais sejam o  $f_L, f_{R1}, f_{R2}, f_{R3}$  e  $f_{R4}$ .

Pode-se, ainda, fornecer, em vez dos resultados do ensaio, os valores de carga do ensaio e as dimensões requeridas no mesmo: largura do corpo de prova, comprimento do vão e a distância entre o topo do entalhe e o topo do corpo de prova. A partir desses parâmetros, o LOP e as resistências residuais ( $f_L, f_{R1}, f_{R2}, f_{R3}$  e  $f_{R4}$ ) são calculados conforme as equações apresentadas no Item 3.2.1.

A seguir, utilizando  $f_L, f_{R1}, f_{R2}, f_{R3}$  e  $f_{R4}$ , são calculadas inicialmente as relações mínimas que precisam ser atendidas, conforme o Item 3.2.2. Respeitadas tais relações, pode-se prosseguir com o cálculo da resistência à tração direta última do CRF ( $f_{Ftu}$ ).

O  $f_{Ftu}$  é calculado utilizando os dois modelos apresentados neste trabalho: Rígido-plástico e Linear, cabendo ao usuário escolher qual das duas análises é mais adequada e será utilizada.

Em seguida, pode-se trabalhar com dois diferentes problemas, sendo o primeiro deles desenvolvido para a obtenção do momento resistente a partir de uma viga já dimensionada, na qual se tem a área de armadura utilizada na seção transversal, caracterizando um problema de verificação, e o segundo desenvolvido para a obtenção da armadura necessária dadas as solicitações da viga.

Para o primeiro tipo de problema, tem-se todos os parâmetros da Equação (17) – para o Modelo Rígido-plástico – ou Equação (23) – para o Modelo Linear –, com exceção da posição da linha neutra ( $x$ ), de modo que estas equações podem ser resolvidas com a ferramenta “atingir meta” do Microsoft Excel, sendo o valor da resultante de forças igual a zero e tomando  $x$  como variável. Resolvida a equação e de posse do valor de  $x$ , este pode ser utilizado na Equação (21) – para o Modelo Rígido-plástico – ou na Equação (24) – para o Modelo Linear – para a obtenção do momento resistente de cálculo ( $M_{rd}$ ) da viga em questão.

Já para o segundo tipo de problema, as solicitações da viga são dadas em termos da carga e do vão, onde se considera uma viga biapoiada e toma-se o momento máximo dado pela equação abaixo ou, ainda, já em termos do momento solicitante, calculado previamente.

$$M_k = \frac{qL^2}{8} \quad (32)$$

$$M_d = \gamma_M \cdot M_k \quad (33)$$

Onde:

- $M_k$  é o momento solicitante característico (kNm);
- $M_d$  é o momento solicitante de cálculo (kNm);
- $q$  é carga característica total atuante na viga (kN/m);
- $L$  é o vão da viga (m);
- $\gamma_M$  é o coeficiente de majoração das ações no ELU.

Uma vez que se tem o momento que se pretende resistir, qual seja o momento solicitante de cálculo, pode-se obter a posição da linha neutra ( $x$ ) a partir da Equação (21) – para o Modelo Rígido-plástico – ou da Equação (24) – para o Modelo Linear. Nesse caso, utiliza-se também a ferramenta “atingir meta” para que o momento resistente, nas referidas equações, resulte no momento solicitante, tendo  $x$  como variável. Determinado o valor de  $x$ , utiliza-se a Equação (17) – para o Modelo Rígido-plástico – ou a Equação (23) – para o Modelo Linear – para a obtenção da área de aço necessária na seção transversal.

A planilha calcula, ainda, as deformações e em qual domínio se encontra a estrutura analisada.

A seguir, serão apresentados os resultados da aplicação da planilha desenvolvida utilizando resultados experimentais expostos na literatura.

## 6.1 Validação do Modelo Linear – Problema de verificação

Para a exemplificação do problema de verificação, foram utilizados os dados apresentados por Buttignol *et al.* (2018, p. 1015), conforme a Tabela 5 e a Tabela 6. Salienta-se que os valores adotados para o  $f_{ck}$ , as dimensões e a área de aço foram obtidos por meio de resultados parciais e do detalhamento apresentado.

Tabela 5 – Dados gerais da viga

$f_{ck}$ (MPa)	$b$ (cm)	$h$ (cm)	$a$ (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )
62,5	12,5	25	3	4,02

Fonte: Buttignol *et al.* (2018, p. 1016) – Adaptada.



Tabela 6 – Resultados experimentais

Teor de fibra	20 kg/m <sup>3</sup>	60 kg/m <sup>3</sup>
$f_L$ (MPa)	4,26	4,95
$f_{R1}$ (MPa)	1,32	5,93
$f_{R3}$ (MPa)	0,84	2,75
$w_u$ (mm)	1,87	1,07

Fonte: Buttignol *et al.* (2018, p. 1015) – Adaptada.

Diante dos resultados dos ensaios, foram calculadas inicialmente as relações mínimas que precisam ser atendidas, conforme observa-se na Tabela 7.

Tabela 7 – Relações mínimas

Teor de fibra	20 kg/m <sup>3</sup>	60 kg/m <sup>3</sup>
$f_{R1}/f_L$	0,310	1,198
$f_{R3}/f_{R1}$	0,636	0,464

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

É importante destacar que a primeira relação do teor de 20 kg/m<sup>3</sup> e a segunda relação do teor de 60 kg/m<sup>3</sup> não foram atendidas, uma vez que precisam ser de, no mínimo, 0,4 e 0,5, respectivamente. Com isso, as fibras não poderiam ser consideradas de forma estrutural no projeto. No entanto, para comparação dos resultados com os expostos por Buttignol *et al.* (2018), prosseguiu-se com o exemplo.

Assim, utilizando as equações apresentadas no Item 3.3, o momento resistente foi calculado utilizando o Modelo Linear, uma vez que os resultados apresentados por Buttignol *et al.* (2018, p. 1020) foram desenvolvidos para este modelo.

Foi calculado, ainda, o momento resistente para a viga considerando a inexistência das fibras, ou seja, uma viga de concreto armado convencional, a fim de avaliar o ganho obtido pela incorporação das fibras. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 8 a seguir. As pequenas variações apresentadas validam o modelo implementado.

Tabela 8 – Momento resistente para cada teor de fibras

Teor de fibra	M <sub>Rd</sub> (kNm)		
	0 kg/m <sup>3</sup>	20 kg/m <sup>3</sup>	60 kg/m <sup>3</sup>
<b>Buttignol <i>et al.</i> (2018)</b>	34,85	35,38	38,14
<b>Autor</b>	34,88	35,36	37,71
<b>Diferença</b>	0,086%	-0,057%	-1,127%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

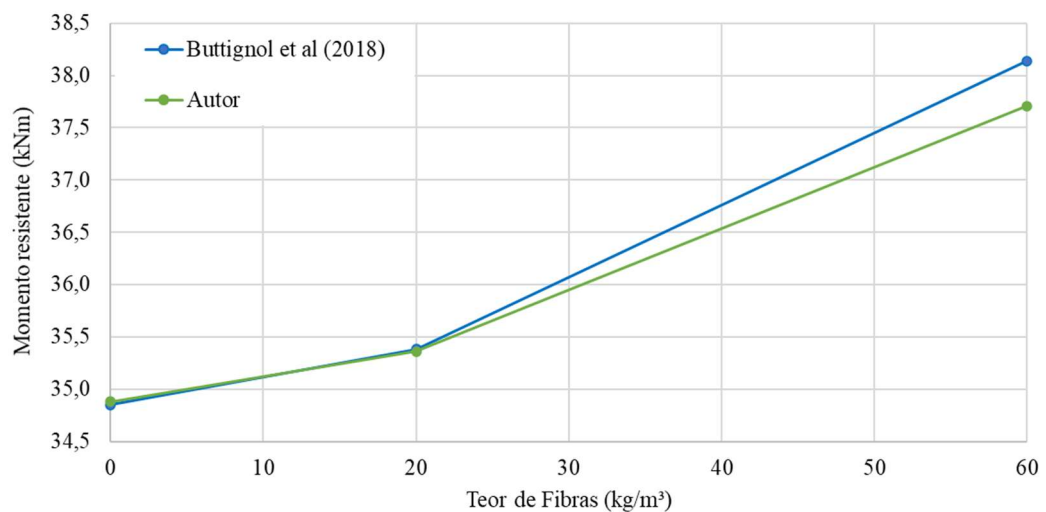
Com isso, pode-se avaliar o aumento do momento resistente advindo do incremento das fibras na matriz de concreto, conforme mostram a Tabela 9 e a Figura 27. Pode-se observar, ainda, que a taxa de aumento para a incorporação de 60 kg/m<sup>3</sup> é maior que a aquela referente à incorporação de 20 kg/m<sup>3</sup>.

Tabela 9 – Aumento do Momento Resistente decorrente da incorporação de fibras

Teor de fibra	20 kg/m <sup>3</sup>	60 kg/m <sup>3</sup>
<b>Buttignol <i>et al.</i> (2018)</b>	1,521%	9,440%
<b>Autor</b>	1,376%	8,114%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 27 – Aumento do momento resistente



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

## 6.2 Validação do Modelo Rígido-plástico – Problema de Dimensionamento

Para o problema de dimensionamento, foram utilizados os dados apresentados por Real *et al.* (2017, p. 80), onde, na Tabela 10, tem-se os dados gerais da viga e, na Tabela 11, os resultados do ensaio padronizado pela ABNT NBR 16940:2021, bem como a resistência à tração direta última para cada teor de fibras.

Tabela 10 – Dados gerais da viga

$f_{ck}$ (MPa)	$M_{sd}$ (kNm)	$b$ (cm)	$h$ (cm)	$a$ (cm)	$L$ (cm)
45	197,34	20	45	3	600

Fonte: Real *et al.* (2017, p. 80) – Adaptada.

Tabela 11 – Dados de resistência à tração para cada teor de fibras

Teor de fibras	20 kg/m <sup>3</sup>	30 kg/m <sup>3</sup>	45 kg/m <sup>3</sup>
$f_{R3,d}$ (MPa)	3,1	5,1	6,0
$f_{Ftud}$ (MPa)	1,03	1,70	2,00

Fonte: Real *et al.* (2017, p. 84) – Adaptada.

Utilizando as equações expostas para o dimensionamento utilizando o Modelo Rígido-plástico, qual seja o modelo utilizado por Real *et al.* (2017), chega-se aos valores de área de aço necessária para vencer o momento solicitante exposto na Tabela 10.

Além disso, tem-se na Tabela 12 as diferenças entre os valores obtidos por Real *et al.* (2017, p. 84) e os valores encontrados com o uso da planilha desenvolvida no presente trabalho. Salienta-se que as pequenas variações validam o modelo utilizado.

Tabela 12 – Área de aço necessária

Teor de fibra	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )			
	0 kg/m <sup>3</sup>	20 kg/m <sup>3</sup>	30 kg/m <sup>3</sup>	45 kg/m <sup>3</sup>
Real <i>et al.</i> (2017)	12,1	10,8	10,0	9,6
Autor	12,22	10,76	9,84	9,43
Diferença	0,99%	-0,37%	-1,60%	-1,77%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

A Tabela 13 mostra as reduções na área de aço relativas ao concreto convencional decorrentes da incorporação das fibras. Como esperado, quanto maior o teor de fibras

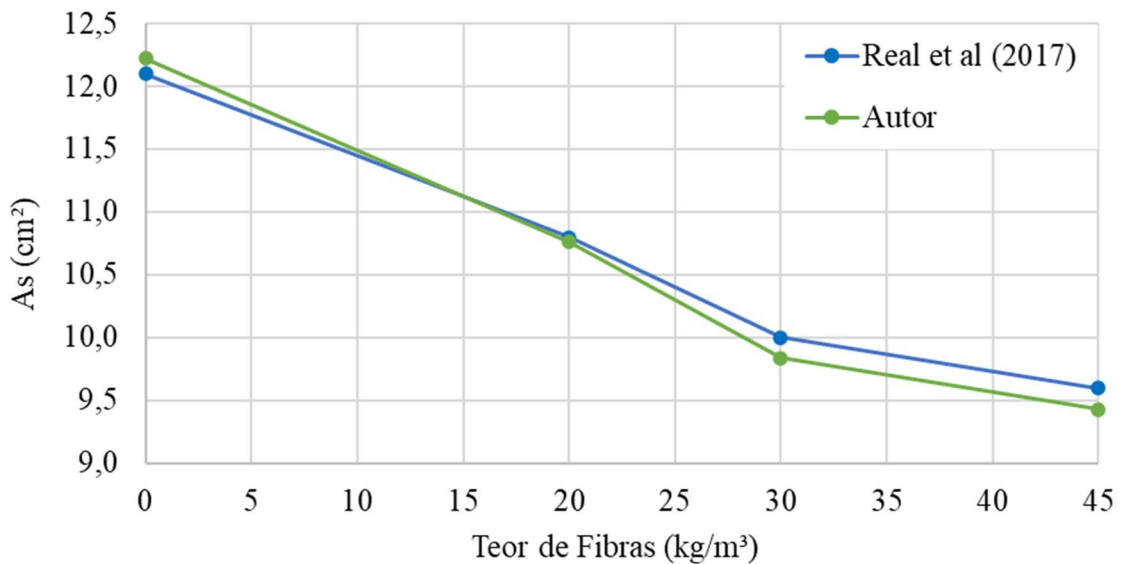
incorporado, menor a área de armadura necessária para resistir às tensões de tração oriundas do momento solicitante. Ainda, na Figura 28, tem-se taxas de declínio muito parecidas para os teores de 20 e 30 kg/m<sup>3</sup>, enquanto o teor de 45 kg/m<sup>3</sup> apresenta uma menor taxa.

Tabela 13 – Diminuição da área de aço decorrente da incorporação de fibras

Teor de fibra	20 kg/m <sup>3</sup>	30 kg/m <sup>3</sup>	45 kg/m <sup>3</sup>
<b>Real et al. (2017)</b>	-10,744%	-17,355%	-20,661%
<b>Autor</b>	-11,948%	-19,476%	-22,831%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 28 – Comparação das áreas para cada teor de fibras



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

### 6.3 Avaliação da incorporação de fibras para diferentes $f_{cks}$

Validados os modelos desenvolvidos na planilha, outra viga foi dimensionada a fim de se comparar diferentes  $f_{cks}$  de concretos reforçados com diferentes teores fibras.

Os dados iniciais da viga a ser dimensionada encontram-se na Tabela 14.

Tabela 14 – Dados gerais da viga

<b>b (cm)</b>	<b>h (cm)</b>	<b>a (cm)</b>	<b>L (cm)</b>
15	40	3	500

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Para o cálculo do momento solicitante, supôs-se que a viga intercepta duas lajes residenciais quadradas de 5x5 m<sup>2</sup>, as quais foram consideradas com 10 cm de altura.

Desse modo, as cargas de cada laje, segundo a ABNT NBR 6120:2019 estão descritas a seguir.

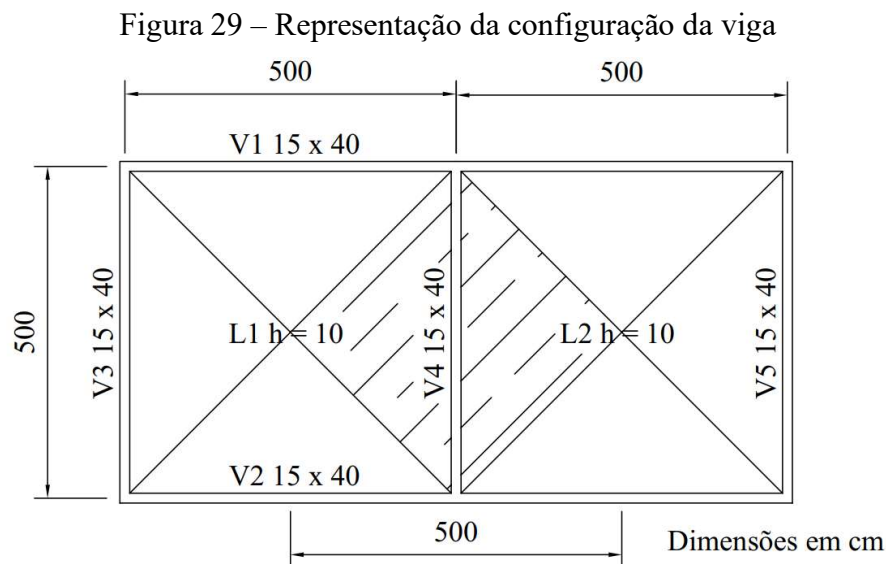
- Peso próprio:  $PP_{laje} = L \cdot L \cdot h \cdot \gamma_{concreto} = 5 \cdot 5 \cdot 0,1 \cdot 25 = 62,5 \text{ kN}$  (34)

- Revestimento:  $Rev_{laje} = L \cdot L \cdot p_{rev} = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25 \text{ kN}$  (35)

- Utilização:  $Util_{laje} = L \cdot L \cdot p_{util} = 5 \cdot 5 \cdot 1,5 = 37,5 \text{ kN}$  (36)

- Carga laje:  $C_{laje} = 62,5 + 25 + 37,5 = 125 \text{ kN}$  (37)

A carga de cada laje é dividida para as quatro vigas que a suportam, de modo que a viga analisada recebe 31,25 kN de cada laje. Considerando as duas lajes na viga, tem-se 62,5 kN oriundos das lajes, que divididos nos 5 m de viga resultam em 12,5 kN/m. A Figura 29 ilustra tal configuração, sendo V4 a viga analisada.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Além da carga proveniente da laje, considerou-se ainda o peso próprio da viga e uma carga de alvenaria sobre esta.

- Peso próprio:  $PP_{viga} = b \cdot h \cdot \gamma_{concreto} = 0,15 \cdot 0,4 \cdot 25 = 1,5 \text{ kN/m}$  (38)

- Alvenaria:  $Alv = h \cdot p_{alv} = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ kN/m}$  (39)

Salienta-se que o peso específico do concreto (25 kN/m<sup>3</sup>), bem como os pesos por unidade de área de revestimento de piso (1,0 kN/m<sup>2</sup>), de utilização (1,5 kN/m<sup>2</sup>) e de alvenaria (1,5 kN/m<sup>2</sup>) foram obtidos na ABNT NBR 6120:2019. Além disso, foi considerado 3 m de pé direito para a alvenaria acima da viga.

Com isso, tem-se a seguinte carga atuando na viga em questão:

- Carga total:  $CT_{viga} = 12,5 + 1,5 + 4,5 = 18,5 \text{ kN/m}$  (40)

A seguir, o momento solicitante máximo de cálculo é calculado utilizando as Equações (32) e (33).

- Momento solicitante característico:  $M_{sk} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{18,5 \cdot 5^2}{8} = 57,8125 \text{ kNm}$  (41)

- Momento solicitante de cálculo:  $M_{sd} = \gamma_M \cdot M_{sk} = 1,4 \cdot 57,8125 = 80,9375 \text{ kNm}$  (42)

O valor do coeficiente  $\gamma_M$  de 1,4 foi adotado conforme a Tabela 2 para combinações de ações normais.

Os resultados do ensaio da ABNT NBR 16940:2021 foram obtidos de Lee (2017, p. 23) para três valores de  $f_{ck}$  e três diferentes teores de fibra, de modo que se tem nove combinações como observa-se na Tabela 15.

Tabela 15 – Resistências à tração na flexão

$f_{ck}$ (MPa)	Teor de fibras (kg/m <sup>3</sup> )	$f_L$ (MPa)	$f_{R1}$ (MPa)	$f_{R2}$ (MPa)	$f_{R3}$ (MPa)	$f_{R4}$ (MPa)
25	20	4,492	2,666	2,659	2,602	2,409
	35	4,340	3,139	3,273	3,191	2,861
	40	4,567	4,337	4,562	4,330	3,844
35	20	4,163	2,464	2,309	2,235	1,966
	35	5,078	3,710	3,729	3,463	2,971
	40	5,024	3,825	4,155	4,041	3,564
45	20	5,345	4,330	3,003	2,232	1,608
	35	5,646	4,647	3,517	2,686	2,385
	40	5,705	6,178	4,996	3,398	2,719

Fonte: Lee (2017, p. 23) – Adaptada.

Com os valores das resistências à tração na flexão, pode-se calcular as relações que precisam ser verificadas. Conforme observa-se na Tabela 16, para todos os casos, as relações mínimas foram atendidas, uma vez que  $f_{R1}/f_L$  deve ser, no mínimo, 0,4 e  $f_{R3}/f_{R1}$ , no mínimo, 0,5.

Tabela 16 – Relações mínimas

$f_{ck}$ (MPa)	Teor de fibras (kg/m <sup>3</sup> )	$f_{R1}/f_L$	$f_{R3}/f_{R1}$
25	20	0,593	0,976
	35	0,723	1,017
	40	0,950	0,998
35	20	0,592	0,907
	35	0,731	0,933
	40	0,761	1,056
45	20	0,810	0,515
	35	0,823	0,578
	40	1,083	0,550

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Em seguida, tem-se a área de aço necessária em cada combinação utilizando os modelos Rígido-plástico e Linear. Além disso, tem-se  $A_s$  para o caso sem fibras de cada  $f_{ck}$  analisado, conforme exposto na Tabela 17.

Tabela 17 – Área de aço necessária em cada caso

Caso	$f_{ck}$ (MPa)	Teor de fibras (kg/m <sup>3</sup> )	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	
			Modelo Rígido-plástico	Modelo Linear
1	25	0	5,943	5,943
2		20	5,334	5,665
3		35	5,200	5,593
4		40	4,944	5,475
5	35	0	5,612	5,612
6		20	5,150	5,358
7		35	4,900	5,120
8		40	4,783	5,103
9	45	0	5,458	5,458
10		20	5,023	5,351
11		35	4,935	5,281
12		40	4,798	5,259

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Na Tabela 18, foram expostas as reduções na área de aço em relação ao concreto sem fibras de mesmo  $f_{ck}$ .

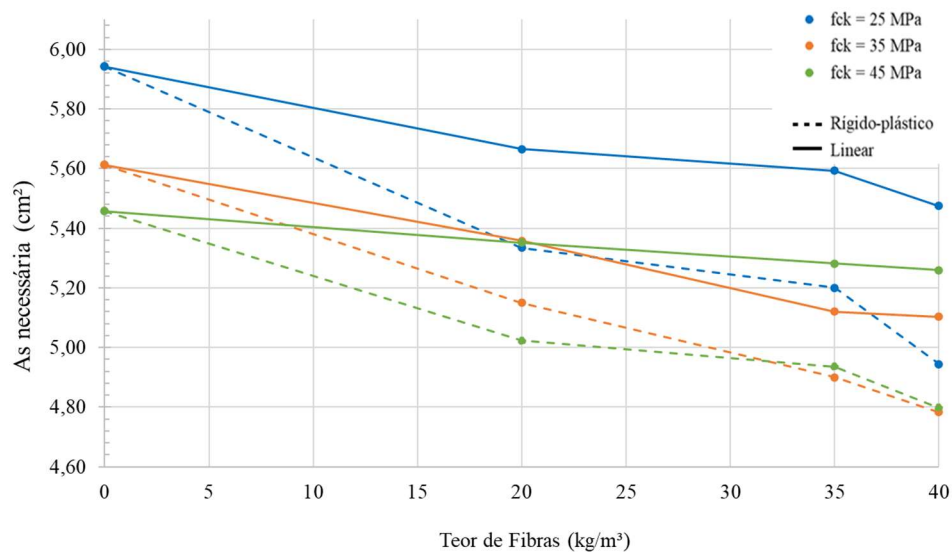
Tabela 18 – Redução da área de aço com a incorporação das fibras

Caso	$f_{ck}$ (MPa)	Teor de fibras (kg/m <sup>3</sup> )	Modelo Rígido-plástico	Modelo Linear
1		0	-	-
2	25	20	-10,247%	-4,678%
3		35	-12,502%	-5,889%
4		40	-16,810%	-7,875%
5		0	-	-
6	35	20	-8,232%	-4,526%
7		35	-12,687%	-8,767%
8		40	-14,772%	-9,070%
9		0	-	-
10	45	20	-7,970%	-1,960%
11		35	-9,582%	-3,243%
12		40	-12,092%	-3,646%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

A seguir, a Figura 30 mostra de forma comparativa os valores obtidos para a área de armadura necessária em cada um dos doze casos estudados.

Figura 30 – Comparação das áreas de aço necessárias em cada caso



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).



De acordo com a Tabela 18 e a Figura 30, observa-se que:

- a) Quanto maior o teor de fibras incorporado, menor a área de aço necessária;
- b) O Modelo Rígido-plástico apresenta um dimensionamento menos conservador que o Modelo Linear, uma vez que fornece áreas de aço necessárias menores para todos os teores e  $f_{cks}$  estudados.
- c) A incorporação de fibras é mais eficiente em concretos com reduzido  $f_{ck}$ .

A seguir, no intuito de aferir a planilha de verificação para os modelos Rígido-plástico e Linear, utilizou-se as áreas obtidas para o Caso 2, expostas na Tabela 17, para a determinação do momento resistente, o qual deveria resultar em 80,9375 kNm, uma vez que foi este o momento solicitante de cálculo utilizado no dimensionamento. Assim, a Tabela 19, apresentada a seguir, valida a utilização da planilha para a verificação em ambos os modelos estudados, com variações apenas na terceira casa decimal decorrentes da aproximação da área de aço obtida, a qual foi inserida como dado com aproximação de três casas decimais.

Tabela 19 – Verificação do momento resistente

<b>Modelo</b>	<b>Rígido-plástico</b>	<b>Linear</b>
<b>Momento resistente (kNm)</b>	80,9352	80,9409
<b>Erro percentual</b>	-0,003%	0,004%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

#### 6.4 Avaliação dos custos da incorporação de fibras de aço

Para a avaliação dos custos atrelados à incorporação das fibras, foi utilizado o exemplo com os dados de Real *et al.* (2017), cujo resultado encontra-se no Item 6.2 do presente trabalho.

De posse da área de aço necessária para cada teor, pode-se realizar a análise da viabilidade econômica atrelada à redução de aço com a incorporação das fibras.

Para isso, calculou-se inicialmente o volume da viga a fim de determinar a quantidade de fibras necessária para cada teor.

$$V = b \cdot h \cdot L = 0,2 \cdot 0,45 \cdot 6 = 0,54 \text{ m}^3 \quad (43)$$

Considerando o custo unitário de R\$ 7,00/kg exposto no Item 4, tem-se, na Tabela 20, o custo de fibras relativo à toda a viga para cada teor.

Tabela 20 – Custo associado às fibras

<b>Teor de fibras</b>	<b>0 kg/m<sup>3</sup></b>	<b>20 kg/m<sup>3</sup></b>	<b>30 kg/m<sup>3</sup></b>	<b>45 kg/m<sup>3</sup></b>
<b>Quantidade de fibras necessárias (kg)</b>	-	10,8	16,2	24,3
<b>Custo das fibras (R\$)</b>	-	R\$ 75,60	R\$ 113,40	R\$ 170,10

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

A seguir, o custo referente à armadura foi calculado a partir da escolha do diâmetro do vergalhão de aço CA-50 e da quantidade de barras correspondente. Salienta-se que tal escolha, explicitada na Tabela 21, foi feita buscando o menor custo utilizando barras de mesmo diâmetro de modo a atender à armadura necessária em cada caso, a qual consta na Tabela 12.

Ademais, o peso por metro para cada barra a depender de seu diâmetro foi multiplicado pela quantidade de barras e pelo comprimento da viga, qual seja 6 m, resultando no peso de armadura necessário. De posse do peso e do preço unitário de R\$ 8,52/kg, é possível obter o custo das armaduras em cada caso.

Tabela 21 – Custo associado às armaduras

<b>Teor de fibras</b>	<b>0 kg/m<sup>3</sup></b>	<b>20 kg/m<sup>3</sup></b>	<b>30 kg/m<sup>3</sup></b>	<b>45 kg/m<sup>3</sup></b>
<b>A<sub>s</sub> necessária (cm<sup>2</sup>)</b>	12,22	10,76	9,84	9,43
<b>Quantidade de barras adotadas</b>	4	6	5	5
<b>Diâmetro da barra adotada</b>	20	16	16	16
<b>A<sub>s</sub> adotada (cm<sup>2</sup>)</b>	12,57	12,06	10,05	10,05
<b>Peso unitário por diâmetro (kg/m/barra)</b>	2,5	1,6	1,6	1,6
<b>Peso total (kg)</b>	58,81	56,46	47,05	47,05
<b>Custo das armaduras (R\$)</b>	R\$ 501,07	R\$ 481,02	R\$ 400,85	R\$ 400,85

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Por fim, o custo final, considerando fibras e armaduras, é dado na Tabela 22 a seguir. Salienta-se que os demais custos referentes à viga, como formas, mão de obra e insumos para o concreto não foram considerados uma vez que foi assumido que permanecem iguais para todos os casos analisados.

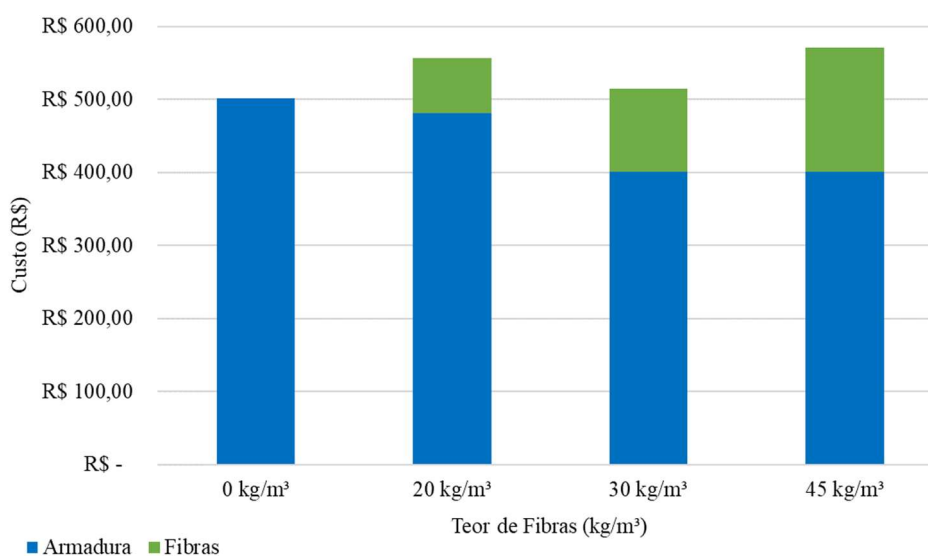
Tabela 22 – Custo total

Teor de fibras	0 kg/m <sup>3</sup>	20 kg/m <sup>3</sup>	30 kg/m <sup>3</sup>	45 kg/m <sup>3</sup>
<b>Custo total final (R\$)</b>	R\$ 501,07	R\$ 556,62	R\$ 514,25	R\$ 570,95
<b>Aumento em relação ao concreto sem fibras</b>	-	11,09%	2,63%	13,95%

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Os resultados obtidos mostram que, para o exemplo estudado, dada sua configuração de solicitações, dimensões, teores de fibras e resultados de ensaio obtidos, a incorporação de fibras acarreta um custo mais elevado no dimensionamento de vigas submetidas à flexão quando comparada à solução de concreto convencional sem fibras, como pode-se observar na Figura 31.

Figura 31 – Custo total para cada teor de fibras



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Além disso, dentre as alternativas estudadas, tem-se o teor de 30 kg/m<sup>3</sup> como o mais viável, uma vez que representa o menor custo dentre os três teores analisados. É importante destacar que a incorporação desse teor, embora apresente um aumento de 2,63% no custo, trará uma redução de tempo necessário à montagem da armadura e de espaço necessário à estocagem desta, representando um impacto considerável quando se levar em consideração todas as vigas de uma obra. Ademais, considerando os aspectos qualitativos, o uso do CRF acarretará uma estrutura com menor fissuração, reduzindo as manifestações patológicas nos elementos estruturais, de modo que se tem maior durabilidade e menores custos com manutenção.

É importante destacar que o alto preço do aço CA-50 apresentado no último ano (2021) contribuiu para que o CRF se mostrasse uma alternativa um pouco mais viável e competitiva, com pequena diferença de custo para o teor de 30 kg/m<sup>3</sup>.

## 7 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou as principais características e aplicações do CRF, bem como o método de dimensionamento para vigas submetidas à flexão adotado no Brasil, o qual foi implementado e aplicado a diferentes exemplos para realização das análises pretendidas.

Ao final do trabalho, como resultado da revisão da literatura, pode-se pontuar que o Concreto Reforçado com Fibras apresenta vantagens técnicas como a redução da abertura de fissuras, com conseqüente redução na permeabilidade, que, por sua vez, acarreta uma maior durabilidade. Além disso, outra vantagem advinda das fibras é a ductilidade conferida ao elemento estrutural.

A utilização do CRF é vantajosa também do ponto de vista construtivo, necessitando de menos tempo, mão de obra e espaço relativos à montagem da armadura.

No entanto, a trabalhabilidade no estado fresco é tida como uma das grandes desvantagens do CRF, necessitando de um maior cuidado durante o processo de concretagem para garantir a homogeneidade da matriz.

Os resultados do presente trabalho mostraram que, como esperado, a incorporação de fibras leva ao aumento do momento resistente e à redução da área de armadura necessária.

Ademais, de acordo com os resultados, as fibras são mais eficientes em concretos com classes de resistência mais baixas. Por fim, tem-se que o Modelo Linear é um modelo mais conservador, resultando em momentos resistentes menores e áreas de aço necessárias maiores que aqueles encontrados pelo Modelo Rígido-plástico. Tal resultado é coerente com o fato do Modelo Linear poder ser empregado em mais situações, tendo o Modelo Rígido-plástico limitações de utilização.

No que tange à viabilidade econômica, o CRF apresenta custos mais elevados que o concreto convencional quando considerado somente o Estado Limite Último à flexão para vigas. Entretanto, quando escolhido o teor de fibras mais otimizado, as diferenças apresentadas são pequenas, especialmente em razão dos altos preços em que se encontram os vergalhões de aço CA-50 nos últimos meses. É importante ressaltar que a análise de custos foi feita com base nos materiais de armadura e fibras, no entanto, o CRF pode apresentar vantagens econômicas na redução de tempo, mão de obra e espaço, bem como nas futuras manutenções necessárias à estrutura.

Outrossim, sugere-se, para trabalhos futuros, a implementação do dimensionamento ao esforço cortante e/ou ao Estado Limite de Serviço, também presentes na ABNT NBR 16935:2021.

## REFERÊNCIAS

American Concrete Institute. **Guide to Design with Fiber-Reinforced Concrete**: Reported by ACI Committee 544. 1 ed. Farmington Hills: ACI, 2018.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. 3. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 6120**: Ações para o cálculo de estruturas de edificações. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 15530**: Fibras de aço para concreto – Requisitos e métodos de ensaio. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16935**: Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras – Procedimento. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16938**: Concreto reforçado com fibras – Controle de qualidade. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16939**: Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à fissuração e residuais à tração por duplo funcionamento – Método de ensaio. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16940**: Concreto reforçado com fibras – Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) – Método de ensaio. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16941**: Fibras de vibro álcali-resistentes (AR) para concreto e argamassa – Requisitos e métodos de ensaio. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16942**: Fibras poliméricas para concreto - Requisitos e métodos de ensaio. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

BELGO BEKAERT ARAMES. **Fibras de aço para concreto**. Disponível em: <https://blog.belgobekaert.com.br/construcao-civil/fibra-de-aco-para-concreto/>. Acesso em 20 dez. 2021.

BUTTIGNOL, Thomaz Eduardo Teixeira *et al.* Verificação de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço no estado limite último. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**. [s. l.]: v. 11, n. 5, p. 997–1024, 2018.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado segundo a NBR 6118:2014**. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

CBIC. **Evolução do valor médio/mediano do Aço CA 50 de 10 mm (em R\$/kg): UF e Média Brasil.** Brasília, 2021. Disponível em: <http://www.cbicdados.com.br/menu/materiais-de-construcao/aco-10mm-e-produtos-de-aco-longo>. Acesso em 04 jan. 2022.

IBRACON. **Concreto e Construções: Concreto reforçado com fibras – Pesquisas, projetos, tecnologia, controle da qualidade e usos do CRF no Brasil e no mundo.** 87. ed. [s. l.]: IBRACON, 2017.

Fédération Internationale du Béton (fib). **Model Code 2010.** Lausanne, Switzerland: FIB, 2010.

FIGUEIREDO, Antônio Domingues de; ALFERES FILHO, Ricardo dos Santos; CECCATO, Marcos Roberto. Os desafios da trabalhabilidade do concreto com fibras. **Concreto e Construções: Concreto reforçado com fibras – Pesquisas, projetos, tecnologia, controle da qualidade e usos do CRF no Brasil e no mundo.** [s. l.]: v. 87, p. 86-90, IBRACON, 2017.

FIGUEIREDO, Antônio Domingues de. **Concreto reforçado com fibras.** 2011. Tese (Livro-Docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

JACOMINI, Guilherme Martins. **Avaliação da capacidade resistente de vigas de concreto armado reforçado com fibras utilizando os procedimentos normativos da ABNT NBR 16935:2021.** 2021. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

LEE, Jong-Han. Influence of Concrete Strength Combined with Fiber Content in the Residual Flexural Strengths of Fiber Reinforced Concrete. **Composite Structures.** Gyeongsan, Republic of Korea, 2017, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.052>

MONTE, Renata; BARBOZA, Aline da Silva Ramos. Controle tecnológico do comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras. **Concreto e Construções: Concreto reforçado com fibras – Pesquisas, projetos, tecnologia, controle da qualidade e usos do CRF no Brasil e no mundo.** [s. l.]: v. 87, p. 33-38, IBRACON, 2017.

REAL, Lígia Vitória *et al.* Contribuição das fibras de aço para o dimensionamento à flexão de viga armada. **Concreto e Construções: Concreto reforçado com fibras – Pesquisas, projetos, tecnologia, controle da qualidade e usos do CRF no Brasil e no mundo.** [s. l.]: v. 87, p. 80-85, IBRACON, 2017.

THOMAZ, Eduardo C. S. **CRF – Concreto Reforçado com Fibras – Mito e Realidade.** [s. l.: s. n., 20--].

TEC MACHINE – FIBRAS ESTRUTURAIS. **Fibras de polipropileno para concreto e argamassa.** São Paulo. Disponível em: <https://www.tecmachinefm.com.br/fibras-polipropileno-concreto-e-argamassa>. Acesso em 18 dez. 2021.



## APÊNDICE A - APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) - CASO 2 - E O MODELO RÍGIDO-PLÁSTICO

### DADOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha  
As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

#### 1 Dimensões da viga

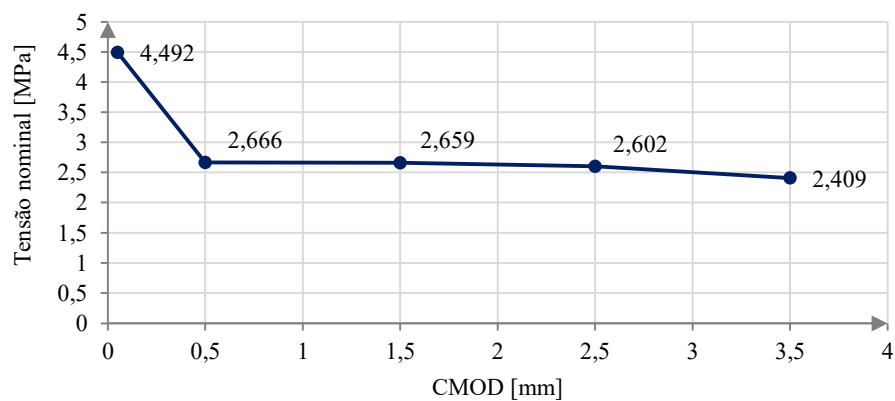
Insere-se os valores das dimensões da viga.

b =	15,00	cm	Largura da viga
h =	40,00	cm	Altura da viga
a =	3,00	cm	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
L =	5,00	m	Vão da viga

#### 2 Resistências à tração na flexão

Insere-se os valores das resistências.

fLk =	4,492	MPa	Límite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm



### 3 Resistências do concreto e do aço

Inserir-se os valores característicos de  $f_{ck}$  e  $f_{yk}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço

### 4 Coeficientes de minoração das resistências

Inserir-se os valores dos coeficiente de minoração das resistências.

$\gamma_f =$	1,5	-	Coeficiente de segurança do CRF à tração
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$\gamma_s =$	1,15	-	Coeficiente de segurança do aço

## 5. Análise

### 5.1. Verificação

Caso se trate de problema de verificação, inserir-se a área de aço adotada na seção.

$A_s =$		cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção
---------	--	-----------------	--

### 5.2. Dimensionamento

Caso se trate de problema de dimensionamento, inserir-se a carga atuante na viga e o coeficiente de majoração desta carga.

$q =$	18,500	kN/m	Carga atuante na viga
$\gamma =$	1,4	-	Coeficiente de segurança de majoração da carga

## DIMENSIONAMENTO - MODELO RÍGIDO PLÁSTICO

### 1 Dimensões da seção transversal

b =	0,150	m	Largura da viga
h =	0,400	m	Altura da viga
a =	0,030	m	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
d =	0,370	m	Altura útil da viga
x =	12,73	cm	Posição da linha neutra
x =	0,127	m	Posição da linha neutra

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados.

Inserir-se um palpite inicial para a posição da linha neutra, obedecendo a:  $0 < x < d$ .

### 2 Resistências à tração na flexão

fLk =	4,492	MPa	Limite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm

Os valores das resistências são transferidos automaticamente da aba de dados.

fR1k/fLk =	0,593
fR3k/fR1k =	0,976

As relações entre as resistências são calculadas e comparadas com os valores mínimos admissíveis.

fR1k/fLk mín =	0,4
fR3k/fR1k mín =	0,5

OK  
OK

### 3 Resistência à tração direta - fFtu

fFtuk =	0,867	MPa	Resistência característica à tração direta última do CRF
Muk =	10,408	kNm	Momento resistente característico devido à contribuição das fibras
$\gamma_f$ =	1,5	-	Coefficiente de segurança do CRF à tração
Mud =	6,939	kNm	Momento resistente de cálculo devido à contribuição das fibras

O fFtuk e Muk são calculados. Com  $\gamma_f$  proveniente da aba de dados, calcula-se o valor de Mud.

#### 4 Momento solicitante e resistente

O valor da carga, do vão da viga e do coeficiente de majoração são transferidos automaticamente da aba de dados. A partir destes, é calculado o  $M_s$ .

$q =$	18,500 kN/m	Carga atuante na viga
$L =$	5 m	Vão da viga
$M_{sk} =$	57,813 kNm	Momento solicitante característico
$\gamma =$	1,4 -	Coeficiente de segurança de majoração da carga
$M_s =$	80,938 kNm	Momento solicitante de cálculo

Subtraindo de  $M_s$  o momento resistido pelas fibras, calculado no item 3, obtém-se o momento de cálculo que precisa ser resistido sem a consideração das fibras.

$M_{ud} =$	6,939 kNm	Momento resistente de cálculo devido à contribuição das fibras
$M_{Rd} =$	73,999 kNm	Momento de cálculo que precisa ser resistido sem a contribuição das fibras

#### 5 Forças resistentes

##### 5.1 Força resistente à compressão do concreto

Os valores de  $f_{cd}$  e dos coeficientes de redução são calculados a partir do  $f_{ck}$  e do coeficiente de segurança, oriundos da aba de dados. Com isso, calcula-se  $R_{cd}$ .

$f_{ck} =$	25 MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$\gamma_c =$	1,4 -	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$f_{cd} =$	17,857 MPa	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$\alpha_c =$	0,850 -	Coeficiente de redução da resistência
$\lambda =$	0,800 -	Coeficiente de redução conversão parábola-retângulo
$R_{cd} =$	231,920 kN	Força resistente à compressão do concreto

A partir de  $R_{cd}$  e de  $z_c$ , calcula-se o momento que a viga é capaz de resistir. Uma vez que se tem o momento que se pretende resistir, utiliza-se o recurso atingir meta do excel alternado a posição da linha neutra (célula destacada na cor laranja) para que estes valores se igualem. Com isso, o valor da linha neutra passa a ter seu valor correto e as forças são recalculadas.

$z_c =$	0,319 m	Braço de alavanca da força resultante de compressão do concreto
$M_{Rd} =$	73,998 kNm	Momento resistente de cálculo sem a contribuição das fibras

#### DIMENSIONAMENTO: Modelo Rígido-plástico

O recurso atingir meta para obtenção da linha neutra pode ser executado através deste botão.

### 5.2 Força resistente à tração do aço

Determinado o correto valor de  $R_{ed}$ , calcula-se o valor de  $R_{sd}$  dado que o somatório de forças [ $R_{ed} - R_{sd}$ ] deve resultar em zero. Os valores de  $f_{yk}$  e  $\gamma_s$  são transferidos automaticamente da aba de dados. A partir destes, são calculados os valores de  $f_{cd}$  e de  $A_s$  necessário.

$R_{sd} =$	231,920	kN	Somatório de forças resistentes
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço
$\gamma_s =$	1,15	-	Coefficiente de segurança do aço
$f_{yd} =$	434,783	MPa	Tensão de escoamento de cálculo do aço
$A_s =$	5,334	cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção

### 7 Deformações

A partir do valor da linha neutra, as deformações do concreto e do aço são calculadas.

$k_x =$	0,344	-	Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil
Domínio =	3	-	-
$\epsilon_c =$	0,0035	-	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	0,0067	-	Deformação do aço
$\epsilon_c =$	3,50	mm/m	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	6,67	mm/m	Deformação do aço

## APÊNDICE B - APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) - CASO 2 - COM O MODELO LINEAR

### DADOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha  
As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

#### 1 Dimensões da viga

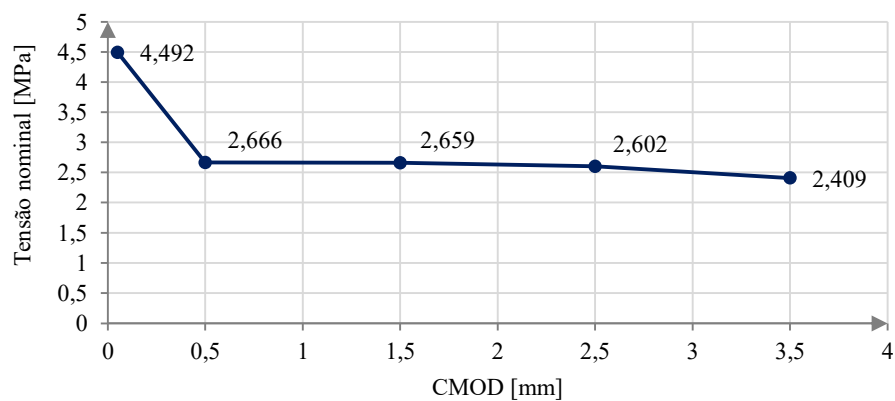
Insere-se os valores das dimensões da viga.

b =	15,00	cm	Largura da viga
h =	40,00	cm	Altura da viga
a =	3,00	cm	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
L =	5,00	m	Vão da viga

#### 2 Resistências à tração na flexão

Insere-se os valores das resistências.

fLk =	4,492	MPa	Límite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm



### 3 Resistências do concreto e do aço

Inserir-se os valores característicos de  $f_{ck}$  e  $f_{yk}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço

### 4 Coeficientes de minoração das resistências

Inserir-se os valores dos coeficiente de minoração das resistências.

$\gamma_f =$	1,5	-	Coeficiente de segurança do CRF à tração
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$\gamma_s =$	1,15	-	Coeficiente de segurança do aço

## 5. Análise

### 5.1. Verificação

Caso se trate de problema de verificação, inserir-se a área de aço adotada na seção.

$A_s =$		cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção
---------	--	-----------------	--

### 5.2. Dimensionamento

Caso se trate de problema de dimensionamento, inserir-se a carga atuante na viga e o coeficiente de majoração desta carga.

$q =$	18,500	kN/m	Carga atuante na viga
$\gamma =$	1,4	-	Coeficiente de segurança de majoração da carga

## DIMENSIONAMENTO - MODELO LINEAR

### 1 Dimensões da seção transversal

b =	0,150	m	Largura da viga
h =	0,400	m	Altura da viga
a =	0,030	m	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
d =	0,370	m	Altura útil da viga
x =	14,59	cm	Posição da linha neutra
x =	0,146	m	Posição da linha neutra

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados.

Inserir-se um palpite inicial para a posição da linha neutra, obedecendo a:  $0 < x < d$ .

### 2 Resistências à tração na flexão

fLk =	4,492	MPa	Limite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm

Os valores das resistências são transferidos automaticamente da aba de dados.

fR1k/fLk =	0,593
fR3k/fR1k =	0,976
fR1k/fLk mín =	0,4
fR3k/fR1k mín =	0,5

OK  
OK

As relações entre as resistências são calculadas e comparadas com os valores mínimos admissíveis.

### 3 Resistência à tração direta - fFtu

wu =	2,5	mm	Abertura de fissura última para o valor de CMOD considerado no projeto
CMOD3 =	2,5	mm	-
fFts =	1,200	MPa	Resistência à tração direta de serviço do CRF
fFtuk =	0,768	MPa	Resistência característica à tração direta última do CRF

Os valores de fFtsk e fFtuk são calculados.



#### 4 Momento solicitante e resistente

O valor da carga, do vão da viga e do coeficiente de majoração são transferidos automaticamente da aba de dados. A partir destes, é calculado  $M_s$ .

$q =$	18,500	kN/m	Carga atuante na viga
$L =$	5	m	Vão da viga
$M_s =$	57,813	kNm	Momento solicitante característico
$\gamma =$	1,4	-	Coeficiente de segurança de majoração da carga
$M_s =$	80,938	kNm	Momento solicitante de cálculo

#### 5 Forças resistentes

##### 5.1 Força resistente à compressão do concreto

Os valores de  $f_{cd}$  e dos coeficientes de redução são calculados a partir do  $f_{ck}$  e do coeficiente de segurança oriundos da aba de dados. Com isso, calcula-se  $R_{cd}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$f_{cd} =$	17,857	MPa	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$\alpha_c =$	0,850	-	Coeficiente de redução da resistência
$\lambda =$	0,800	-	Coeficiente de redução conversão parábola-retângulo
$R_{cd} =$	265,80	kN	Força resistente à compressão do concreto

##### 5.2 Força resistente à tração do CRF

O valor de  $f_{ftud}$  é calculado a partir do  $f_{ftuk}$  e do coeficiente de segurança oriundo da aba de dados. Com isso, calcula-se  $R_{fd}$ .

$f_{ftuk} =$	0,768	MPa	Resistência característica à tração direta última do CRF
$\gamma_f =$	1,5	-	Coeficiente de segurança do CRF à tração
$f_{ftud} =$	0,512	MPa	Resistência de cálculo à tração direta última do CRF
$R_{fd} =$	19,508	kN	Força resistente à tração do concreto devido às fibras

A partir de  $R_{cd}$ ,  $R_{fd}$ ,  $z_c$  e  $z_f$ , calcula-se o momento que a viga é capaz de resistir. Uma vez que se tem o momento que se pretende resistir, utiliza-se o recurso atíngir meta do excel alternado a posição da linha neutra (célula destacada na cor laranja) para que estes valores se igualem. Com isso, o valor da linha neutra passa a ter seu valor correto e as forças são recalculadas.

$z_c =$	0,3116	m	Braço de alavanca da força resultante de compressão do CRF
$z_f =$	0,0970	m	Braço de alavanca da força resultante de tração do CRF
$M_{Rd} =$	80,937	kNm	Momento resistente de cálculo

**DIMENSIONAMENTO: Modelo Linear**

O recurso atíngir meta para obtenção da linha neutra pode ser executado através deste botão.

### 5.3 Força resistente à tração do aço

Determinado o correto valor de  $R_{ed}$ , calcula-se o valor de  $R_{sd}$  dado que o somatório de forças [ $R_{ed} - R_{sd}$ ] deve resultar em zero. Os valores de  $f_{yk}$  e  $\gamma_s$  são transferidos automaticamente da aba de dados. A partir destes, são calculados os valores de  $f_{es}$  e de  $A_s$  necessário.

$R_{sd} =$	246,291	kN	Somatório de forças resistentes
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço
$\gamma_s =$	1,15	-	Coefficiente de segurança do aço
$f_{yd} =$	434,78	MPa	Tensão de escoamento de cálculo do aço
$A_s =$	5,665	cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção

### 7 Deformações

A partir do valor da linha neutra, as deformações do concreto e do aço são calculadas.

$k_x =$	0,3944	-	Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil
Domínio =	3	-	-
$\epsilon_c =$	0,0035	-	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	0,0054	-	Deformação do aço
$\epsilon_c =$	3,50	mm/m	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	5,37	mm/m	Deformação do aço

## APÊNDICE C - APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) - CASO 2 - COM O MODELO RÍGIDO-PLÁSTICO

### DADOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha  
As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

#### 1 Dimensões da viga

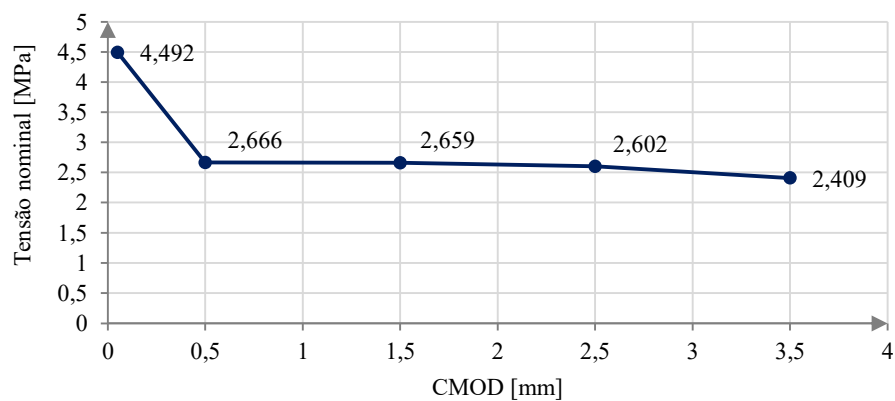
Insere-se os valores das dimensões da viga.

b =	15,00	cm	Largura da viga
h =	40,00	cm	Altura da viga
a =	3,00	cm	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
L =	5,00	m	Vão da viga

#### 2 Resistências à tração na flexão

Insere-se os valores das resistências.

fLk =	4,492	MPa	Límite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm



### 3 Resistências do concreto e do aço

Inserir-se os valores característicos de  $f_{ck}$  e  $f_{yk}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço

### 4 Coeficientes de minoração das resistências

Inserir-se os valores dos coeficiente de minoração das resistências.

$\gamma_f =$	1,5	-	Coeficiente de segurança do CRF à tração
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$\gamma_s =$	1,15	-	Coeficiente de segurança do aço

## 5. Análise

### 5.1. Verificação

Caso se trate de problema de verificação, inserir-se a área de aço adotada na seção.

$A_s =$	5,334	cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção
---------	-------	-----------------	--

### 5.2. Dimensionamento

Caso se trate de problema de dimensionamento, inserir-se a carga atuante na viga e o coeficiente de majoração desta carga.

$q =$		kN/m	Carga atuante na viga
$\gamma =$	1,4	-	Coeficiente de segurança de majoração da carga

## VERIFICAÇÃO - MODELO RÍGIDO PLÁSTICO

### 1 Dimensões da seção transversal

b =	0,150	m	Largura da viga
h =	0,400	m	Altura da viga
a =	0,030	m	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
d =	0,370	m	Altura útil da viga
x =	12,73	cm	Posição da linha neutra
x =	0,127	m	Posição da linha neutra

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados.

Inserir-se um palpite inicial para a posição da linha neutra, obedecendo a:  $0 < x < d$ .

### 2 Resistências à tração na flexão

fLk =	4,492	MPa	Limite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm

Os valores das resistências são transferidos automaticamente da aba de dados.

fR1k/fLk =	0,593
fR3k/fR1k =	0,976

As relações entre as resistências são calculadas e comparadas com os valores mínimos admissíveis.

fR1k/fLk mín =	0,4
fR3k/fR1k mín =	0,5

OK  
OK

### 3 Resistência à tração direta - fFtu

fFtuk =	0,867	MPa	Resistência característica à tração direta última do CRF
Muk =	10,408	kNm	Momento resistente característico devido à contribuição das fibras
$\gamma_f$ =	1,5	-	Coefficiente de segurança do CRF à tração
Mud =	6,939	kNm	Momento resistente de cálculo devido à contribuição das fibras

O fFtuk e Muk são calculados. Com  $\gamma_f$  proveniente da aba de dados, calcula-se o valor de Mud.

## 4 Forças resistentes

### 4.1 Força resistente à compressão do concreto

Os valores de  $f_{cd}$  e dos coeficientes de redução são calculados a partir do  $f_{ck}$  e do coeficiente de segurança oriundos da aba de dados. Com isso, calcula-se  $R_{cd}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$f_{cd} =$	17,857	MPa	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$\alpha_c =$	0,850	-	Coeficiente de redução da resistência
$\lambda =$	0,800	-	Coeficiente de redução conversão parábola-retângulo
$R_{cd} =$	231,913	kN	Força resistente à compressão do concreto

### 4.2 Força resistente à tração do aço

Os valores de  $A_s$ ,  $f_{yk}$  e  $\gamma_s$  são transferidos automaticamente da aba de dados. De posse destes, calcula-se  $f_{yd}$  e  $R_{sd}$ .

$A_s =$	5,334	cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço
$\gamma_s =$	1,15	-	Coeficiente de segurança do aço
$f_{yd} =$	434,783	MPa	Tensão de escoamento de cálculo do aço
$R_{sd} =$	231,913	kN	Força resistente à tração da armadura longitudinal

### 5 Somatório de forças resistentes

O somário de forças [ $R_{cd} - R_{sd}$ ] deve resultar em zero. Para isso utiliza-se o recurso atingir meta do excel alternado a posição da linha neutra (célula destacada na cor laranja). Com isso, o valor da linha neutra passa a ter seu valor correto e as forças são recalculadas.

$\Sigma R_d =$	0,000	kN	Somatório de forças resistentes
----------------	-------	----	---------------------------------

**VERIFICAÇÃO: Modelo Rígido-plástico**

O recurso atingir meta para obtenção da linha neutra pode ser executado através deste botão.

### 6 Momento resistente

A partir do correto valor da posição da linha neutra, o braço de alavanca e o valor de  $M_{d1}$  são calculados.

$z_c =$	0,319	m	Braço de alavanca da força resultante de compressão do concreto
$M_{d1} =$	73,997	kNm	Momento resistente de cálculo sem a consideração das fibras

A seguir, o momento resistente é calculado pela soma de  $M_{d1}$  e  $M_{ud}$  (obtido no item 3).

$M_{ud} =$	6,939	kNm	Momento resistente de cálculo devido à contribuição das fibras
$M_{Rd} =$	80,9352	kNm	Momento resistente de cálculo

### 7 Deformações

A partir do valor da linha neutra, as deformações do concreto e do aço são calculadas.

$k_x =$	0,344	-	Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil
Domínio =	3	-	-
$\epsilon_c =$	0,0035	-	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	0,0067	-	Deformação do aço
$\epsilon_c =$	3,50	mm/m	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	6,67	mm/m	Deformação do aço

## APÊNDICE D - APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO UTILIZANDO DADOS EXPERIMENTAIS DE LEE (2017) - CASO 2 - COM O MODELO LINEAR

### DADOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha  
As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

#### 1 Dimensões da viga

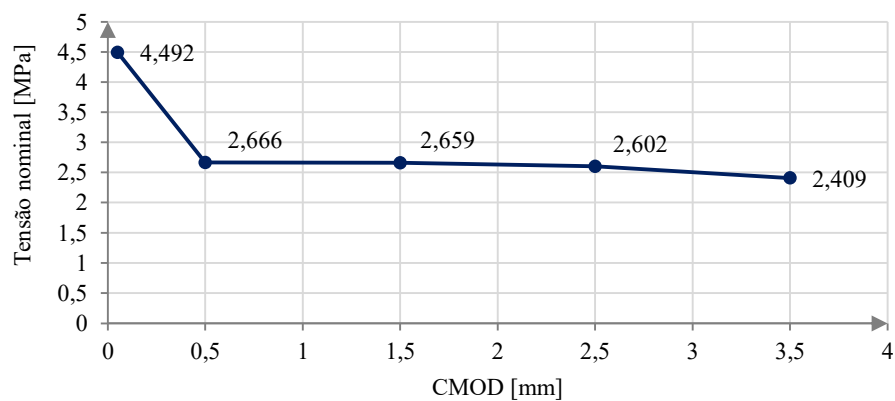
Inserir-se os valores das dimensões da viga.

b =	15,00	cm	Largura da viga
h =	40,00	cm	Altura da viga
a =	3,00	cm	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
L =	5,00	m	Vão da viga

#### 2 Resistências à tração na flexão

Inserir-se os valores das resistências.

fLk =	4,492	MPa	Límite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm





### 3 Resistências do concreto e do aço

Inserir-se os valores característicos de  $f_{ck}$  e  $f_{yk}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço

### 4 Coeficientes de minoração das resistências

Inserir-se os valores dos coeficiente de minoração das resistências.

$\gamma_f =$	1,5	-	Coeficiente de segurança do CRF à tração
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$\gamma_s =$	1,15	-	Coeficiente de segurança do aço

## 5. Análise

### 5.1. Verificação

Caso se trate de problema de verificação, inserir-se a área de aço adotada na seção.

$A_s =$	5,665	cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção
---------	-------	-----------------	--

### 5.2. Dimensionamento

Caso se trate de problema de dimensionamento, inserir-se a carga atuante na viga e o coeficiente de majoração desta carga.

$q =$		kN/m	Carga atuante na viga
$\gamma =$	1,4	-	Coeficiente de segurança de majoração da carga

## VERIFICAÇÃO - MODELO LINEAR

### 1 Dimensões da seção transversal

b =	0,150	m	Largura da viga
h =	0,400	m	Altura da viga
a =	0,030	m	Distância entre o CG da armadura e a face tracionada da viga
d =	0,370	m	Altura útil da viga
x =	14,59	cm	Posição da linha neutra
x =	0,146	m	Posição da linha neutra

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados.

Inserir-se um palpite inicial para a posição da linha neutra, obedecendo a:  $0 < x < d$ .

### 2 Resistências à tração na flexão

fLk =	4,492	MPa	Limite de proporcionalidade - LOP
fR1k =	2,666	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 1 = 0,5 mm
fR2k =	2,659	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 2 = 1,5 mm
fR3k =	2,602	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 3 = 2,5 mm
fR4k =	2,409	MPa	Resistência residual à tração na flexão correspondente ao CMOD 4 = 3,5 mm

Os valores das resistências são transferidos automaticamente da aba de dados.

fR1k/fLk =	0,593
fR3k/fR1k =	0,976

As relações entre as resistências são calculadas e comparadas com os valores mínimos admissíveis.

fR1k/fLk mín =	0,4
fR3k/fR1k mín =	0,5

OK  
OK

### 3 Resistência à tração direta - fFtu

wu =	2,5	mm	Abertura de fissura última para o valor de CMOD considerado no projeto
CMOD3 =	2,5	mm	-
fFts =	1,200	MPa	Resistência à tração direta de serviço do CRF
fFtuk =	0,768	MPa	Resistência característica à tração direta última do CRF

Os valores de fFtsk e fFtuk são calculados.

## 4 Forças resistentes

### 4.1 Força resistente à compressão do concreto

Os valores de  $f_{cd}$  e dos coeficientes de redução são calculados a partir do  $f_{ck}$  e do coeficiente de segurança oriundos da aba de dados. Com isso, calcula-se  $R_{cd}$ .

$f_{ck} =$	25	MPa	Resistência característica à compressão do concreto
$\gamma_c =$	1,4	-	Coeficiente de segurança do CRF à compressão
$f_{cd} =$	17,857	MPa	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$\alpha_c =$	0,850	-	Coeficiente de redução da resistência
$\lambda =$	0,800	-	Coeficiente de redução conversão parábola-retângulo
$R_{cd} =$	265,811	kN	Força resistente à compressão do concreto

### 4.2 Força resistente à tração do aço

Os valores de  $A_s$ ,  $f_{yk}$  e  $\gamma_s$  são transferidos automaticamente da aba de dados. De posse destes, calcula-se  $f_{yd}$  e  $R_{sd}$ .

$A_s =$	5,665	cm <sup>2</sup>	Área da armadura longitudinal na seção
$f_{yk} =$	500	MPa	Tensão de escoamento característica do aço
$\gamma_s =$	1,15	-	Coeficiente de segurança do aço
$f_{yd} =$	434,783	MPa	Tensão de escoamento de cálculo do aço
$R_{sd} =$	246,304	kN	Força resistente à tração da armadura longitudinal

### 4.3 Força resistente à tração do CRF

Com o valor de  $f_{ftuk}$ , calculado no item 3, e de  $\gamma_f$ , proveniente da aba de dados, são calculados os valores de  $f_{ftud}$  e  $R_{fd}$ .

$f_{ftuk} =$	0,768	MPa	Resistência característica à tração direta última do CRF
$\gamma_f =$	1,5	-	Coeficiente de segurança do CRF à tração
$f_{ftud} =$	0,512	MPa	Resistência de cálculo à tração direta última do CRF
$R_{fd} =$	19,507	kN	Força resistente à tração do concreto devido às fibras

## 5 Somatório de força resistente

O somário de forças [ $R_{cd} - R_{sd} - R_{fd}$ ] deve resultar em zero. Para isso utiliza-se o recurso atingir meta do excel alternado a posição da linha neutra (célula destacada na cor laranja). Com isso, o valor da linha neutra passa a ter seu valor correto e as forças são recalculadas.

$\Sigma R_d =$	0,000	kN	Somatório de forças resistentes
----------------	-------	----	---------------------------------

**VERIFICAÇÃO: Modelo Linear**

O recurso atingir meta para obtenção da linha neutra pode ser executado através deste botão.

**6 Momento resistente**

A partir do correto valor da posição da linha neutra, os braços de alavanca e o momento resistente são calculados.

$z_c =$	0,312	m	Braço de alavanca da força resultante de compressão do CRF
$z_f =$	0,097	m	Braço de alavanca da força resultante de tração do CRF
$MR_d =$	80,9409	kNm	Momento resistente de cálculo

**7 Deformações**

A partir do valor da linha neutra, as deformações do concreto e do aço são calculadas.

$k_x =$	0,394	-	Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil
Domínio =	3	-	-
$\epsilon_c =$	0,0035	-	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	0,0054	-	Deformação do aço
$\epsilon_c =$	3,50	mm/m	Deformação do concreto
$\epsilon_s =$	5,37	mm/m	Deformação do aço

## APÊNDICE E - APLICAÇÃO DA PLANILHA PARA CÁLCULO DOS CUSTOS DE EXEMPLO UTILIZANDO DADOS DE REAL *ET AL* (2017)

### CUSTOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha  
As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

#### 1 Custo das fibras

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados. Com estes, é calculado o volume da viga.

b =	20,00	cm	Largura da viga
h =	45,00	cm	Altura da viga
L =	6,00	m	Vão da viga
V =	0,54	m <sup>3</sup>	Volume da viga
Teor =	0	kg/m <sup>3</sup>	Teor de fibras
M fib =	0	kg	Massa de fibras
C unit fib =	R\$ 7,00	/kg	Custo unitário das fibras
C fib =	R\$ -	-	Custo das fibras

Inserir-se o teor de fibras e o custo unitário destas, obtendo assim a massa necessária e o custo correspondente.

#### 2 Custo das armaduras

Inserir-se As necessária, conforme o dimensionamento e adota-se um diâmetro e quantidade de barras que resulte em uma área igual ou maior.

As =	12,22	cm <sup>2</sup>	Área de aço necessária
QB =	4	-	Quantidade de barras adotadas
φ =	20	mm	Diâmetro da barra adotada
As adot =	12,57	cm <sup>2</sup>	Área de aço adotada
ρ =	7800	kg/m <sup>3</sup>	Massa específica do aço CA-50
P unit =	2,450	kg/m/barra	Peso do metro de uma barra da bitola escolhida
P =	58,81	kg	Peso da armadura utilizada na viga
C unit CA50 =	R\$ 8,52	/kg	Custo unitário do aço CA-50
C CA50 =	R\$ 501,07	-	Custo da armadura

Com a massa específica do aço, calcula-se o peso unitário do CA-50 e com As adotado e o vão da viga, tem-se o peso necessário. Inserir-se ainda o custo unitário do aço CA-50, de modo que se pode calcular o custo das armaduras.

#### 3 Custo total

C total =	R\$ 501,07	-	Custo total (armadura + fibras)
-----------	------------	---	---------------------------------

Por fim, o custo total é dado pela soma do custo das fibras e o custo das armaduras, dado que os demais custos permanecem constantes.

## CUSTOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha

As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

### 1 Custo das fibras

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados. Com estes, é calculado o volume da viga.

b =	20,00	cm	Largura da viga
h =	45,00	cm	Altura da viga
L =	6,00	m	Vão da viga
V =	0,54	m <sup>3</sup>	Volume da viga
Teor =	20	kg/m <sup>3</sup>	Teor de fibras
M fib =	10,8	kg	Massa de fibras
C unit fib =	R\$ 7,00	/kg	Custo unitário das fibras
C fib =	R\$ 75,60	-	Custo das fibras

Inserir-se o teor de fibras e o custo unitário destas, obtendo assim a massa necessária e o custo correspondente.

### 2 Custo das armaduras

Inserir-se As necessária, conforme o dimensionamento e adota-se um diâmetro e quantidade de barras que resulte em uma área igual ou maior.

As =	10,76	cm <sup>2</sup>	Área de aço necessária
QB =	6	-	Quantidade de barras adotadas
φ =	16	mm	Diâmetro da barra adotada
As adot =	12,06	cm <sup>2</sup>	Área de aço adotada
ρ =	7800	kg/m <sup>3</sup>	Massa específica do aço CA-50
P unit =	1,568	kg/m/barra	Peso do metro de uma barra da bitola escolhida
P =	56,46	kg	Peso da armadura utilizada na viga
C unit CA50 =	R\$ 8,52	/kg	Custo unitário do aço CA-50
C CA50 =	R\$ 481,02	-	Custo da armadura

Com a massa específica do aço, calcula-se o peso unitário do CA-50 e com As adotado e o vão da viga, tem-se o peso necessário. Inserir-se ainda o custo unitário do aço CA-50, de modo que se pode calcular o custo das armaduras.

### 3 Custo total

C total =	R\$ 556,62	-	Custo total (armadura + fibras)
-----------	------------	---	---------------------------------

Por fim, o custo total é dado pela soma do custo das fibras e o custo das armaduras, dado que os demais custos permanecem constantes.

## CUSTOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha

As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

### 1 Custo das fibras

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados. Com estes, é calculado o volume da viga.

b =	20,00	cm	Largura da viga
h =	45,00	cm	Altura da viga
L =	6,00	m	Vão da viga
V =	0,54	m <sup>3</sup>	Volume da viga
Teor =	30	kg/m <sup>3</sup>	Teor de fibras
M fib =	16,2	kg	Massa de fibras
C unit fib =	R\$ 7,00	/kg	Custo unitário das fibras
C fib =	R\$ 113,40	-	Custo das fibras

Inserir-se o teor de fibras e o custo unitário destas, obtendo assim a massa necessária e o custo correspondente.

### 2 Custo das armaduras

Inserir-se As necessária, conforme o dimensionamento e adota-se um diâmetro e quantidade de barras que resulte em uma área igual ou maior.

As =	9,84	cm <sup>2</sup>	Área de aço necessária
QB =	5	-	Quantidade de barras adotadas
φ =	16	mm	Diâmetro da barra adotada
As adot =	10,05	cm <sup>2</sup>	Área de aço adotada
ρ =	7800	kg/m <sup>3</sup>	Massa específica do aço CA-50
P unit =	1,568	kg/m/barra	Peso do metro de uma barra da bitola escolhida
P =	47,05	kg	Peso da armadura utilizada na viga
C unit CA50 =	R\$ 8,52	/kg	Custo unitário do aço CA-50
C CA50 =	R\$ 400,85	-	Custo da armadura

Com a massa específica do aço, calcula-se o peso unitário do CA-50 e com As adotado e o vão da viga, tem-se o peso necessário. Inserir-se ainda o custo unitário do aço CA-50, de modo que se pode calcular o custo das armaduras.

### 3 Custo total

C total =	R\$ 514,25	-	Custo total (armadura + fibras)
-----------	------------	---	---------------------------------

Por fim, o custo total é dado pela soma do custo das fibras e o custo das armaduras, dado que os demais custos permanecem constantes.

## CUSTOS

As células destacadas em verde devem ser preenchidas com os dados de entrada na unidade explícita na planilha

As células destacadas em azul podem ser alteradas, mas são valores geralmente constantes em todos os problemas

### 1 Custo das fibras

Os valores das dimensões são transferidos automaticamente da aba de dados. Com estes, é calculado o volume da viga.

b =	20,00	cm	Largura da viga
h =	45,00	cm	Altura da viga
L =	6,00	m	Vão da viga
V =	0,54	m <sup>3</sup>	Volume da viga
Teor =	45	kg/m <sup>3</sup>	Teor de fibras
M fib =	24,3	kg	Massa de fibras
C unit fib =	R\$ 7,00	/kg	Custo unitário das fibras
C fib =	R\$ 170,10	-	Custo das fibras

Inser-se o teor de fibras e o custo unitário destas, obtendo assim a massa necessária e o custo correspondente.

### 2 Custo das armaduras

Inser-se As necessária, conforme o dimensionamento e adota-se um diâmetro e quantidade de barras que resulte em uma área igual ou maior.

As =	9,43	cm <sup>2</sup>	Área de aço necessária
QB =	5	-	Quantidade de barras adotadas
φ =	16	mm	Diâmetro da barra adotada
As adot =	10,05	cm <sup>2</sup>	Área de aço adotada
ρ =	7800	kg/m <sup>3</sup>	Massa específica do aço CA-50
P unit =	1,568	kg/m/barra	Peso do metro de uma barra da bitola escolhida
P =	47,05	kg	Peso da armadura utilizada na viga
C unit CA50 =	R\$ 8,52	/kg	Custo unitário do aço CA-50
C CA50 =	R\$ 400,85	-	Custo da armadura

Com a massa específica do aço, calcula-se o peso unitário do CA-50 e com As adotado e o vão da viga, tem-se o peso necessário. Inser-se ainda o custo unitário do aço CA-50, de modo que se pode calcular o custo das armaduras.

### 3 Custo total

C total =	R\$ 570,95	-	Custo total (armadura + fibras)
-----------	------------	---	---------------------------------

Por fim, o custo total é dado pela soma do custo das fibras e o custo das armaduras, dado que os demais custos permanecem constantes.