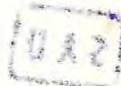


DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO MATEMÁTICO SIMPLIFICADO
DA IRRIGAÇÃO POR SULCOS ABERTOS EM DECLIVE

SÉRGIO LUIZ AGUILAR LEVIEN



DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO CURSO
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM AGRONOMIA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
EM IRRIGAÇÃO E DRENAGEM, COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

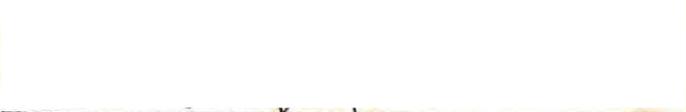
FORTALEZA - 1985

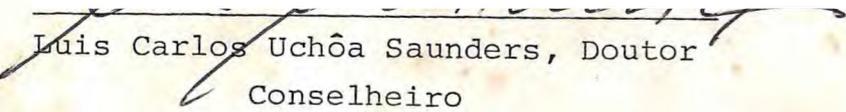
Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários a obtenção do Grau de Mestre em Agronomia, Área de Concentração em Irrigação e Drenagem, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na Biblioteca Central da referida Universidade.

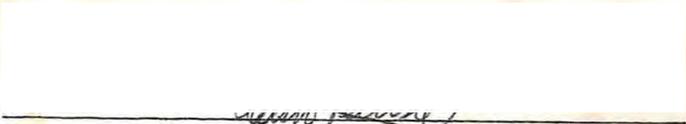
A citação de qualquer trecho desta Dissertação é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.


Sérgio Luiz Aguilar Levien

DISSERTAÇÃO APROVADA EM: 20/12/85


Francisco de Souza, Ph.D.
Orientador da Dissertação


Luís Carlos Uchôa Saunders, Doutor
Conselheiro


Edilson de Castro Feitosa, Ph.D.
Conselheiro

A meus pais, OLÍDIO e EVA,
e irmãs, TÂNIA, VÂNIA e
MARIZE,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer ao Professor FRANCISCO DE SOUZA, como orientador deste trabalho, por sua valiosa colaboração e amizade, as quais tornaram possível a realização do mesmo. Gostaria também de agradecer aos Professores LUIS CARLOS UCHÔA SAUNDERS e EDILSON DE CASTRO FEITOSA por suas valiosas sugestões durante a preparação deste manuscrito.

O desenvolvimento deste trabalho não teria sido possível sem o suporte financeiro das seguintes instituições: Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Programa Demanda Social; Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq); Programa de Pesquisa "Manejo D'Água em Áreas Irrigadas - Determinação da Eficiência e Uniformidade de Distribuição da Água na Irrigação por Sulcos", PDCT/CE-03, Convênio BID/CNPq/UFC; às quais sou profundamente agradecido.

Finalmente, gostaria de agradecer aos colegas do Curso de Mestrado, e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para o êxito deste trabalho.

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

LOBACHEVSKY

SUMÁRIO

	Página
<u>LISTA DE TABELAS</u>	viii
<u>LISTA DE FIGURAS</u>	x
<u>RESUMO</u>	xii
<u>ABSTRACT</u>	xiv
1 - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
2 - <u>REVISÃO DE LITERATURA</u>	3
2.1 - <u>Modelos matemáticos da irrigação superficial</u> .	7
2.2 - <u>Fase de recessão</u>	13
3 - <u>MATERIAL E MÉTODOS</u>	20
3.1 - <u>Fase de avanço</u>	20
3.2 - <u>Fase de recessão</u>	27
3.2.1 - Cálculo de t_n , tempo do início da recessão ..	27
3.2.2 - Cálculo da curva de recessão	32
3.3 - <u>Cálculo do escoamento superficial</u>	40
3.3.1 - Cálculo do escoamento superficial ocorrido	

antes da recessão	41
3.3.2 - Cálculo do escoamento superficial durante a recessão	43
4- <u>RESULTADOS E DISCUSSÃO</u>	47
4.1 - <u>Exemplo nº 01 - Dados de Ramsey</u>	49
4.2 - <u>Exemplo nº 02 - Dados do Colorado</u>	55
4.3 - <u>Exemplo nº 03 - Dados de "Stieben Farm"</u>	60
4.4 - <u>Exemplo nº 04 - Dados do BID</u>	62
5 - <u>CONCLUSÕES</u>	70
6 - <u>RECOMENDAÇÕES</u>	72
7 - <u>LITERATURA CITADA</u>	74
ANEXO "A" - NOTAÇÕES	79
ANEXO "B" - CÁLCULO DA INTEGRAL $\int \frac{1}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta$	83
ANEXO "C" - CÁLCULO DA INTEGRAL $\int \frac{\zeta^{5/3}}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta$	88

LISTA DE TABELAS

TABELA		Página
01	Avanço e recessão calculados pelo modelo algébrico da irrigação por sulcos (dados de Ramsey)	52
02	Dados de avanço e recessão de Ramsey	53
03	Avanço e recessão calculados pelo modelo hidrodinâmico não linear da irrigação por sulcos (dados de Ramsey)	54
04	Avanço e recessão calculados pelo modelo algébrico da irrigação por sulcos (dados do Colorado)	57
05	Dados de avanço e recessão do Colorado	58
06	Avanço e recessão calculados pelo modelo hidrodinâmico não linear da irrigação por Sulcos (dados do Colorado)	59
07	Avanço e recessão calculados pelo modelo algébrico da irrigação por sulcos (dados de "Stiebem Farm")	64
08	Dados de avanço e recessão de "Stieben Farm"	65

TABELA

Página

09	Dados das constantes $k(m/s^a)$ e a da equação de infiltração de Kostiakov, obtidos por AMIM (1985), para cinco diferentes técnicas de de terminação das características de infiltração	66
10	Valores de $\psi_0(m^3)$, $\psi_z(m^3)$, $\psi_{h_0}(m^3)$, $E_a(\%)$ e $E_s(\%)$ calculados para dois diferentes valores do coeficiente de rugosidade de Manning (n) e para os valores das constantes k e a obtidos por AMIM (1985), para cinco diferentes técnicas de determinação das características de infiltração	68

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	Página
01 Diagrama esquemático mostrando as fases da irrigação superficial (após BASSET <u>et alii</u> , 1983)	5
02 Esquema mostrando a lâmina infiltrada e a lâmina superficial durante a fase de avanço na irrigação por sulcos (após SOUZA, 1983)	22
03 Elementos geométricos da seção transversal parabólica de um sulco de irrigação (após SOUZA, 1983).....	23
04 Volume superficial esquemático: fase de depleção	28
05 Volume superficial esquemático: fase de recessão	35
06 Curvas de avanço e recessão calculadas pelos modelos hidrodinâmico e algébrico comparadas com dados observados (dados de Ramsey)..	50
07 Curvas de avanço e recessão calculadas pelos modelos hidrodinâmico e algébrico comparadas com dados observados (dados do Colora-	

FIGURA		Página
	do)	56
08	Curvas de avanço e recessão calculadas pelo modelo algébrico comparadas com dados observados (dados de "Stiebem Farm")	63

RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo algébrico que simula o processo completo da irrigação por sulcos. Este modelo pode ser usado para analisar e predizer o desempenho de um sistema de irrigação por sulcos em declive com drenagem livre. O modelo utiliza a equação da conservação da massa com a hipótese básica de que a lâmina de irrigação é a lâmina de fluxo uniforme (lâmina normal).

Os dados de entrada para o modelo consistem das características do sulco: comprimento (L), declividade (S_0), rugosidade (coeficiente n de Manning), parâmetros de infiltração do solo (constantes k e a na equação de Kostiaikov) e forma do sulco (constantes C e M na equação da largura da superfície livre da água, $B = C y^M$); além das características operacionais: vazão de entrada (Q_0) e tempo de aplicação da água (t_{c0}). As informações dadas pelo modelo consistem em: tempo de avanço (t_{av}) e recessão (t_r), distribuição da água infiltrada ao longo do sulco, volume de escoamento superficial (ψ_{s0}) bem como as eficiências de aplicação da água (E_a) e de armazenamento (E_s). O volume infiltrado no solo (ψ_z) é relacionado ao tempo de infiltração através da equação de infiltração de Kostiaikov e da largura da superfície livre da água (B_0). O volume superficial (ψ_y) é aproximado considerando uma forma simples e razoável para o perfil da lâmina superficial

em qualquer tempo, e assumindo a lâmina em determinados pontos do perfil superficial como sendo a lâmina normal para descarga particular nesses pontos.

O desempenho do modelo foi avaliado pela comparação dos resultados com aqueles obtidos pela aplicação de um modelo matemático mais complexo (modelo hidrodinâmico não linear de SOUZA, 1981) e com dados de campo; tais resultados demonstraram a viabilidade da aplicação do modelo, bem como a validade das hipóteses utilizadas para o desenvolvimento do mesmo.

ABSTRACT

An algebraic model of furrow irrigation was herein developed. This model can be used to predict the performance of a sloping, free draining, furrow irrigation system, based on the solution of continuity equation under the hypothesis of normal depth.

Input data consist of length (L), bottom slope (S_0), Manning n , Kostiakov k and a and furrow shape (C and M in equation $B = Cy^M$), as well as operational parameters such as inflow (Q_0) and cutoff time (t_{c0}). Output information are: advance and recession time (t_{av} and t_r), water infiltrated along the furrow, runoff volume (V_{r0}), and water application and storage efficiencies (E_a and E_s). Infiltrated volume (V_z) is related to infiltration time through Kostiakov equation and top width. Surface volume (V_y) is computed by assuming a simple form for the surface profile and normal depth.

Model performance is demonstrated by comparing the results with a hydrodynamic model (SOUZA, 1981) and field data.

1 - INTRODUÇÃO

Na irrigação por sulcos, uma vazão, geralmente constante, é aplicada na entrada da parcela em pequenos canais espaçados - os sulcos, propriamente ditos - cujo tamanho e forma variam de acordo com a cultura. O processo de uma irrigação por sulcos compõe-se de quatro fases: avanço, armazenamento, depleção e recessão.

Durante todas estas fases a água infiltra tanto lateral como verticalmente. A observação destas fases gera as curvas de avanço e recessão, as quais em conjunto com as características de infiltração do solo permitem analisar a performance de um sistema de irrigação. A experiência tem demonstrado que a determinação do avanço e da recessão no campo é uma tarefa onerosa e complexa, portanto, qualquer tentativa de substituí-la é válida, já que tempo e custos serão economizados.

A aplicação de modelos matemáticos na predição do processo de irrigação superficial tem sido muito estudada nos últimos anos. Tais modelos podem ser classificados, conforme a complexidade de cálculo, desde simples modelos algébricos, baseados na conservação da massa, até modelos hidrodinâmicos, baseados na solução das chamadas equações de Saint-Venant para fluxo espacialmente variado, não permanente, e modelos zero-inércia, baseados nas mesmas hipóteses do hidro

dinâmico, mas considerando a aceleração da água desprezível.

Dentro da aplicação de modelos matemáticos pouco tem sido estudado de irrigação por sulcos, sendo maior a sua aplicação ao fenômeno da irrigação por faixas, pois o mesmo apresenta menor complexidade em sua hidráulica. Desse modo, realizou-se o presente trabalho cujos objetivos são os seguintes:

(1) Desenvolver um modelo algébrico completo para irrigação por sulcos em declive com drenagem livre pela solução da equação da conservação da massa, assumindo que a lâmina de irrigação é a lâmina de fluxo uniforme (lâmina normal);

(2) O modelo deverá ter capacidade de predizer as curvas de avanço e recessão, a distribuição da água no solo, e a eficiência de irrigação.

2 - REVISÃO DE LITERATURA

Segundo ISRAELSEN et alii (1980), num mundo onde a água é recurso precioso, ninguém tem o direito de desperdiçá-la. O uso eficiente da água na irrigação é uma obrigação de cada irrigante.

De acordo com SOUZA (1983), de um modo geral, na prática da irrigação objetiva-se obter uma elevada eficiência de aplicação da água, o que significa dizer que se quer colocar no solo a quantidade de água que é requerida pela cultura, e nenhuma gota a mais, se possível.

A irrigação por sulcos é um método de aplicação de água ao solo, para suprir as necessidades das culturas, pela introdução de uma vazão específica em canais rasos e igualmente espaçados (sulcos ou corrugações). Estes pequenos canais conduzem a água no sentido do declive ou transversalmente ao campo, até as proximidades das plantas que se desenvolvem nos sulcos, ou nos camalhões. Este método difere da irrigação por faixas pois, somente uma porção da superfície do terreno é coberta com água. A água entra no solo pela infiltração no sentido vertical e horizontal. A vazão é aplicada até que a lâmina de aplicação desejada e a penetração lateral adequada sejam obtidas. O tempo que a água deve ser aplicada nos sulcos é dependente do volume de água requerido para ocupar o perfil do solo até a profundidade desejada, da

taxa de infiltração do solo, do espaçamento entre sulcos, da vazão no sulco e do comprimento do mesmo. A sistematização do terreno para prover declives uniformes é essencial para permitir a aplicação uniforme da água e uma irrigação eficiente (SCS-USDA, 1980).

Conforme BASSET (1973), STRELKOFF (1977), SOUZA (1981, 1983, 1984) e BASSET et alii (1983), na irrigação superficial, decorre um intervalo finito para que a água percorra do início até o final da parcela. Na realidade uma irrigação superficial completa (considerando-se o evento desde o instante da adução até o desaparecimento total da água de um sulco ou faixa) é composta de várias fases (FIGURA 01). A primeira delas tem início quando a água é aduzida, ao sulco ou faixa, e termina quando a frente de avanço atinge o final do sulco ou cobre toda a parcela. É a chamada "fase de avanço". A segunda fase, conhecida como "fase de armazenamento superficial" (para sulco e faixa) e "fase de inundação" (para a irrigação por inundação), começa ao final do avanço e termina quando a vazão de entrada é suprimida. Nesse momento tem início a "fase de depleção" que se encerra no exato momento em que a água desaparece de uma pequena porção qualquer do terreno, que em geral é na cabeceira. Aí então, inicia-se a fase final, conhecida como "fase de recessão", a qual termina quando toda a água desaparece da superfície do solo.

O acompanhamento das diversas fases da irrigação superficial permite a determinação de duas curvas - a curva

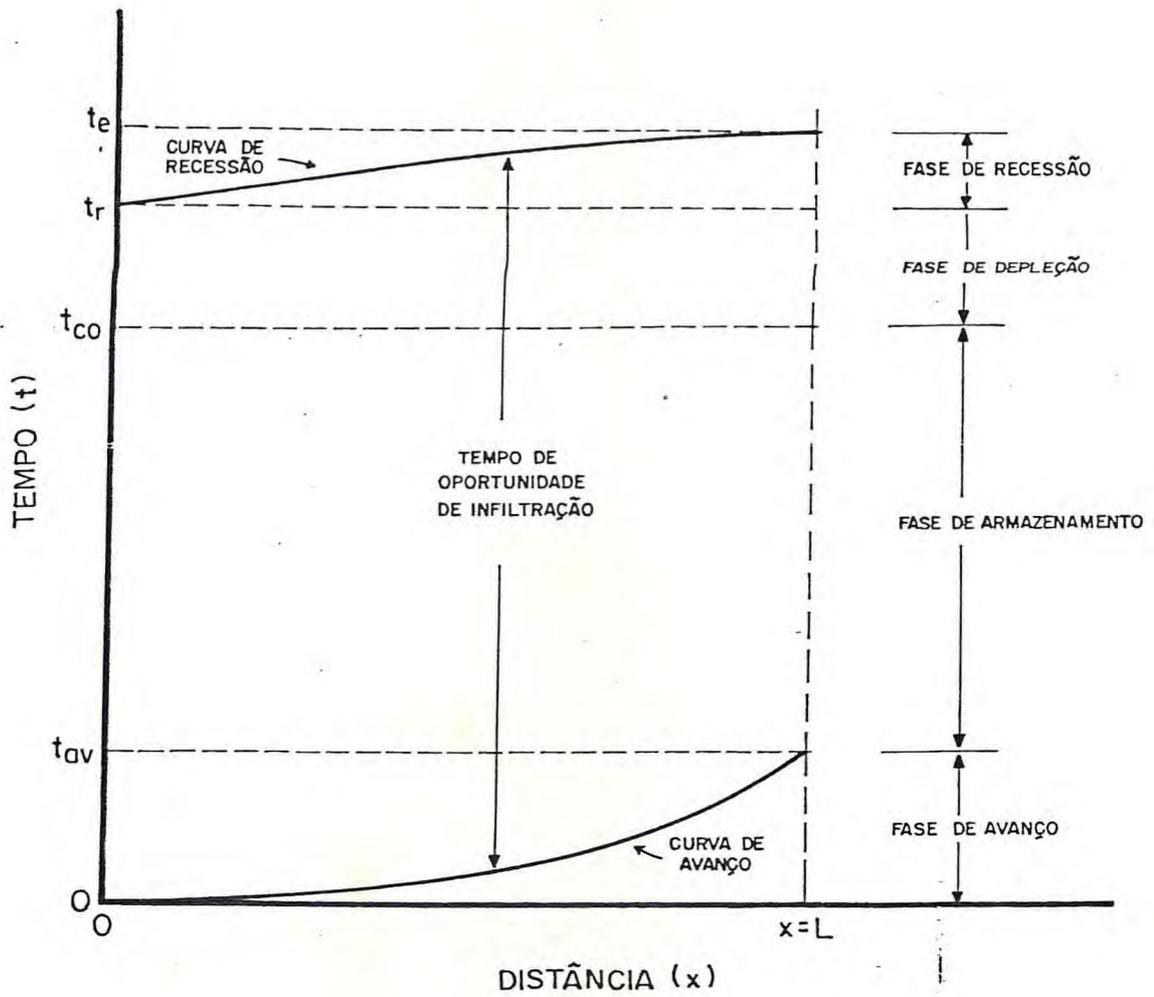


FIGURA 01 -- Diagrama esquemático mostrando as fases da irrigação superficial (após BASSET et alii, 1983)

de avanço e a curva de recessão (FIGURA 01). O conhecimento das curvas de avanço e recessão, e da equação característica de infiltração do solo, é essencial para avaliar a performance de um sistema de irrigação superficial no que tange a determinação de parâmetros que expressam a qualidade da irrigação. A experiência tem demonstrado que a determinação do avanço e da recessão no campo é uma tarefa que demanda bastante tempo. Para realizar testes de avanço e recessão em uma nova área, na qual um novo projeto de irrigação será implantado (na realidade, estes testes são requeridos antes da elaboração do projeto) é um trabalho muito mais complexo. Portanto, qualquer tentativa de substituir os testes de campo, para projeto e manejo de sistemas de irrigação superficial, é válida, já que tempo e custos serão economizados. O desenvolvimento de modelos matemáticos baseados na hidráulica da irrigação superficial permitirá uma análise relativamente rápida e econômica dos parâmetros necessários a elaboração de projetos e o manejo eficiente de sistemas de irrigação por sulcos e faixas (SOUZA, 1983).

O propósito do desenvolvimento de modelos da irrigação superficial é permitir a predição das curvas de avanço e recessão, e em última análise, a distribuição espacial da água infiltrada no solo, para diferentes alternativas de projeto e manejo. Este objetivo é atingido mediante a solução das equações que descrevem a física (ou a hidráulica) do fluxo d'água em canais, no caso, sulcos e faixas de irrigação. O fenômeno completo da irrigação superficial não é nada menos, que um caso especial de fluxo espacialmente varia

do e não permanente sobre um meio poroso. Espacialmente variado, significa dizer que as variáveis dependentes variam com (ou seja, são funções de) espaço (no caso mais simples o problema é unidimensional, na direção x ao longo da parcela); não permanente, significa que tais variáveis são funções do tempo (SOUZA, 1983; BASSET et alii, 1983).

O estado do fluxo é, mais provavelmente, turbulento ou transitório (devido a massas geradas pelos elementos de rugosidade superficial e vegetativa) apesar de serem comumente encontrados números de Reynolds muito abaixo de 1000. Uma vez que os números de Froude são geralmente bem menores que a unidade, o fluxo é tipicamente subcrítico. Outros regimes de fluxo diferentes dos anteriores apresentados são mais prováveis de ocorrer imediatamente próximo à frente de avanço, nas proximidades da frente de recessão, e junto a certas fronteiras do fluxo. As pesquisas até o presente momento sugerem que qualquer erro resultante do uso dos regimes acima mencionados é, provavelmente, muito menor do que aqueles introduzidos com algumas das informações de entrada (variáveis) do modelo (BASSET et alii, 1983).

2.1 - Modelos matemáticos da irrigação superficial

A importância da hidráulica do fluxo nos sistemas de irrigação superficial há muito tem sido reconhecida. Como JENSEN (1960), citado por SOUZA (1981), declarou, devido a

falta de informação na hidráulica superficial, os engenheiros de irrigação têm sido forçados a desenvolver e usar relações empíricas para projetar estes sistemas. De acordo com PHELAN (1960), o relatório de 1959 do Serviço de Conservação de Solo do Departamento de Agricultura dos Estados Unidos cita o estudo das características hidráulicas dos métodos de irrigação por superfície como uma das mais importantes necessidades de pesquisa no projeto da irrigação por sulcos (SOUZA, 1981).

Todos os modelos matemáticos do processo da irrigação superficial utilizam o balanço de volume ou a equação da continuidade, e diferem um do outro, primariamente, na escolha da equação de movimento (BASSET et alii, 1983).

Segundo KARMELI et alii (1978), SOUZA (1981), BASSET et alii (1983) e AUGUSTO (1984), todos os enfoques para se obter uma solução para a taxa de avanço na irrigação superficial situam-se em três categorias principais: a) enfoque hidrodinâmico, o qual é baseado na solução das equações de conservação da massa e da energia (ou da quantidade de movimento); cujas equações diferenciais parciais são conhecidas como equações de Saint-Venant, as quais descrevem as relações entre a lâmina de fluxo e a velocidade num canal; b) enfoque zero-inércia, o qual fundamenta-se nos mesmos princípios que o hidrodinâmico, porém, sob a hipótese de que a aceleração é desprezível; e c) enfoque da lâmina normal, o qual é baseado no princípio da conservação da massa junto com certas hipóteses relativas à lâmina média do fluxo superficial da

água.

LEWIS & MILNE (1938), aplicaram o princípio da conservação da massa para determinar o avanço da água na irrigação por faixas, assumindo que a vazão e a lâmina d'água eram constantes e apresentaram soluções para duas formas diferentes de equações de infiltração. Segundo SOUZA (1981), é importante observar que LEWIS & MILNE (1938) foram os primeiros a propor uma equação para a taxa de avanço da lâmina de irrigação quando a taxa de infiltração não é uma constante, enquanto pesquisadores antigos consideravam uma taxa de infiltração constante durante o período de irrigação (PARKER, 1913 e ISRAELSEN, 1932; citados em LEWIS & MILNE, 1938). PHILIP & MCINTYRE (1953) mostraram que um dos exemplos de LEWIS & MILNE (1938) não estava correto.

Usando transformadas de Laplace, PHILIP & FARRELL (1964) obtiveram soluções analíticas gerais para a equação de LEWIS & MILNE (1938). Eles, também, reconheceram que as aplicações da equação de LEWIS & MILNE (1938) para problemas de irrigação superficial requerem que o avanço seja uma função crescente do tempo (SOUZA, 1981).

HALL (1956) propôs um método iterativo para resolver a equação da conservação da massa. Em vez de assumir a lâmina constante, HALL (1956) sugeriu que a lâmina na cabeceira da faixa é normal para dada vazão de entrada, e a forma do perfil é aquela de uma parábola de grau entre 0,5 e 1 com um eixo coincidente com a superfície do solo. Sugeriu, também, que a ponta do perfil subsuperficial fosse aproximada por

uma parábola similarmente orientada (HART et alii, 1968; SOUZA, 1981).

FOK & BISHOP (1965) e WILKE & SMERDON (1965), apresentaram outras aplicações do princípio de conservação da massa à irrigação por faixas. Uma comparação dos resultados de diversos pesquisadores (FOK & BISHOP, 1965; OSTROMECKI, 1960; WILKE & SMERDON, 1965) foi apresentada por HART et alii (1968), que questionaram a validade da lei da potência, sugerida por FOK & BISHOP (1965), aplicada ao avanço.

Os métodos apresentados anteriormente são aplicados somente para a fase de avanço em irrigação por faixas. Uma aplicação do princípio de conservação da massa, assumindo-se uma lâmina normal para uma irrigação por faixas completa foi introduzido por STRELKOFF (1977). Com o modelo simplificado é estendido a outras fases da irrigação, o número de hipóteses requeridas é substancialmente aumentado.

Diversos pesquisadores usaram o enfoque hidrodinâmico para modelos de irrigação por faixas (BASSET, 1972, 1973; BASSET & FITZSIMMONS, 1976; KINCAID et alii, 1972; SAKKAS & STRELKOFF, 1974; KATOPODES & STRELKOFF, 1977). A aplicação dos princípios de conservação da massa e do momento conduzem a duas equações diferenciais parciais (equações de Saint-Venant), as quais não podem ser resolvidas analiticamente; portanto, devem ser aplicados métodos numéricos para chegar a soluções aproximadas. Todos os modelos hidrodinâmicos para irrigação por faixas dos autores acima citados mostraram boa concordância entre os dados observados e simulados. De qualquer modo, eles são complexos e caros. Por outro lado, a im-

portância de um modelo hidrodinâmico é que ele estabelece um padrão com o qual os modelos simples podem ser comparados (SOUZA, 1981). Outros usos dos modelos hidrodinâmicos são descritos por BASSET (1973) e BASSET & FITZSIMMONS (1976).

O enfoque do modelo zero-inércia para irrigação por faixas foi proposto, primeiramente, por STRELKOFF & KATOPODES (1977). Como a velocidade da água na irrigação por faixas é, geralmente, muito pequena, eles propuseram descartar o termo aceleração na equação de conservação do momento. A comparação com modelos mais complexos e caros, e com dados de campo, foi satisfatória. Segundo SOUZA (1981), o modelo zero-inércia tem sido submetido a uma grande quantidade de testes (CLEMMENS, 1979; FANGMEIER & STRELKOFF, 1979; SHATANAWI, 1980).

Conforme SOUZA (1981, 1983, 1984), a análise da irrigação por sulcos é mais difícil do que a irrigação por faixas devido à complexidade introduzida pela forma do sulco e suas relações com a taxa de infiltração. Como resultado, o desenvolvimento da hidráulica da irrigação por sulcos foi sobrepujada pela irrigação por faixas. Poucas tentativas foram feitas para desenvolver um modelo da irrigação por sulcos. DAVIS (1960) e WILKE & SMERDON (1965), usaram o enfoque da conservação da massa (balanço de volume), com o enfoque de lâmina normal, na cabeceira do sulco, para determinar o avanço da água em sulcos; WILKE (1968) estudou a hidrodinâmica do fluxo na irrigação por sulcos; SOUZA (1981) estabeleceu modelos hidrodinâmicos e zero-inércia para irrigação por sulcos.

DAVIS (1960) propôs um modelo simples para estimar o avanço em sulcos. Ele modificou o modelo de HALL (1956) para a irrigação por faixas, assumindo uma forma para o perfil da água superficial e lâmina normal para a vazão de entrada na cabeceira do sulco. Assumiu também que a infiltração seguia uma função de potência monomial dada pela equação de Kostiakov. Não foram feitas tentativas no seu modelo para prever a curva de recessão.

Outra aplicação do enfoque da lâmina normal para prever o avanço da água em sulcos foi apresentado por WILKE & SMERDON (1965). Eles usaram a solução geral de PHILIP & FARRELL (1964) da equação integral de LEWIS & MILNE (1938). A infiltração foi descrita pela equação de Kostiakov. WILKE & SMERDON (1965), propuseram uma série de equações de regressão linear relacionando avanço e tempo para valores diferentes da constante a da equação de Kostiakov. CHEN (1966) demonstrou que o enfoque de WILKE & SMERDON (1965) para a solução de PHILIP & FARRELL (1964) estava incorreto.

WILKE (1968) reconheceu a necessidade de um modelo que pudesse determinar o avanço e recessão da água em sulcos, e conseqüentemente, o resultado da distribuição da água infiltrada ao longo do sulco. Ele estudou a hidrodinâmica do fluxo na irrigação por sulcos pela solução da forma característica das equações que governam o processo. Os perfis de fluxo estimados por seu método não são precisos devido às dificuldades de cálculo na tentativa de determinar a lâmina de fluxo e velocidade nos pontos próximos à frente de molha-

mento.

KARMELI et alii (1978), em seu modelo estimaram a curva de avanço utilizando a técnica de WILKE & SMERDON (1965). Eles escolheram esta técnica, entre as demais encontradas na literatura, por ser de simples aplicação e por ter sido comprovada por várias pesquisas de campo.

SOUZA (1981, 1984), desenvolveu um modelo hidrodinâmico, não linear, para sulcos com drenagem livre, através da solução das equações de conservação da massa e quantidade de movimento, as quais relacionam a altura da lâmina e a velocidade da água em condutos livres ou canais. Seu modelo tem a capacidade de prever as curvas de avanço e recessão, bem como a eficiência e uniformidade de distribuição da água infiltrada no solo. Testou também a validade da hipótese de zero-inércia na irrigação por sulcos.

2.2 - Fase de recessão

A condição de fluxo durante a fase de recessão é a mesma do fluxo de avanço durante uma irrigação, a qual é instável, não uniforme e espacialmente variado. Ela pode ser expressa por uma série de equações diferenciais, dentre elas, a equação da continuidade e a equação do movimento (WU, 1972).

A recessão é definida como a fase da irrigação marcada pelo desaparecimento da água da superfície do solo. O tem

po no qual a água desaparece da superfície do solo no fim da irrigação é difícil de predizer exatamente. Em irrigação por sulcos, a taxa de armazenamento superficial em relação a água total infiltrada é, em muitos casos, pequena, e o tempo de recessão é assumido negligenciável em sua contribuição para a água infiltrada (KARMELI et alii, 1978).

Em casos de elaboração de projetos de sulcos em declive o SCS-USDA (1980) considera que o tempo no qual a água começa a desaparecer da superfície do sulco após o corte da vazão aduzida é o tempo de recessão (t_r), e este tempo é grandemente afetado pela vazão, comprimento do sulco, forma e declividade do mesmo. Outros autores (FOK, 1964, citado por KARMELI et alii, 1978; STRELKOFF, 1977; SOUZA, 1981) consideram que o tempo de recessão (t_r) é o intervalo de tempo desde o tempo zero (início da irrigação) até o momento em que a água começa a desaparecer da superfície do solo.

Segundo o SCS-USDA (1980), devido o tempo de recessão ser relativamente pequeno em comparação com o tempo de infiltração necessário, ele tem pequena influência no projeto de sulcos em declive abertos ao final. O tempo de recessão é tomado em consideração na determinação do tempo de oportunidade para uma estação selecionada. Ele é tomado como zero em equações de projeto para sulcos em declive. De qualquer modo, um certo período de tempo é requerido para que a água atinja o valor da lâmina de projeto, após a frente de avanço alcançar a estação de projeto, e este tempo requerido e o tempo de recessão, para todos os efeitos práticos anu

lam-se mutuamente.

Conforme MERRIAM & KELLER (1978), na irrigação por sulcos, a curva de recessão, que relaciona o tempo e a locação da estação onde a água desaparece da superfície do solo, é usualmente uma linha reta horizontal, a não ser que os dados de campo indiquem um significativo afastamento, o que, em última análise, está de acordo com a hipótese do SCS-USDA (1980).

KARMELI et alii (1978), afirmam que poucos modelos altamente empíricos têm sido sugeridos para estimar a recessão. FOK (1964), citado por KARMELI et alii (1978), propôs uma função de recessão na seguinte forma:

$$x_h = g(t - t_h)^h \quad (01)$$

onde: x_h = distância da recessão da água, medida a partir da cabeceira da faixa em declive;
 t = tempo no qual a recessão atinge x_h ;
 t_h = tempo no qual a recessão começa;
 g e h = constantes empíricas; são específicas para uma série de condições e podem ser obtidas através de estudos de campo.

WU (1972) usou um modelo linear para desenvolver uma relação matemática expressando o fluxo de recessão em sulcos ou faixas. Isso foi feito para que a eficiência de irrigação pudesse ser avaliada mais adequada e precisamente. O autor relacionou a recessão com uma análise de escoamento superfi-

cial de uma bacia hidrográfica.

STRELKOFF (1977) desenvolveu um modelo matemático baseado na aplicação do princípio da conservação da massa, assumindo uma lâmina normal para irrigação em casos de faixas com drenagem livre, e fechadas ao final. Para desenvolver seu modelo ele assumiu as seguintes hipóteses de cálculo durante a fase de depleção:

(a) a lâmina y_1 , no final da faixa, é constante e normal, para a vazão unitária de escoamento superficial q_1 relativa ao tempo t_h , marcando o fim da fase de depleção e o início da recessão;

(b) a taxa de escoamento superficial somada à taxa de infiltração é igual a vazão unitária de entrada q_0 , isto é,

$$q_1 + q_{inf} = q_0 \quad (02)$$

(c) os perfis superficiais em t_h , bem como em t_{c0} , são linhas retas.

Estas hipóteses estabelecem os meios necessários para estimar o tempo t_h , no qual a lâmina da cabeceira é reduzida a zero, e a recessão é iniciada.

O tempo t_h é calculado pela seguinte equação:

$$t_n = t_{co} + \frac{y_n(q_0) L}{2 q_0} \quad (03)$$

onde: t_n = tempo em que a recessão começa;
 t_{co} = tempo de corte da água;
 $y_n(q_0)$ = lâmina normal, função da vazão unitária de entrada, que pode ser calculada pela equação de Manning;
 L = comprimento da faixa;
 q_0 = vazão unitária de entrada.

No início da fase de recessão, o autor assume que a variação da lâmina com a distância é uniforme, bem como assume uma taxa de infiltração média da faixa, igual a média aritmética das taxas de infiltração no início e no final da faixa.

Para o cálculo da curva de recessão é obtida a seguinte equação:

$$t = t_n + \frac{S_y}{\bar{I} G^{3/2}} \left[R_{rec}(G^{3/2}L) - R_{rec}(G^{3/2}l) \right] \quad (04)$$

onde: t = tempo no qual a água desaparece no ponto x_n ;
 S_y = declividade da superfície da água;

$$S_y = \frac{y_1(t_n)}{L} = \frac{1}{L} y_n(q_1) \quad (05)$$

\bar{I} = taxa de infiltração média da faixa;

$$\bar{I} = \frac{I(t_h) + I(t_h - t_{av})}{2} \quad (06)$$

l = porção inundada da faixa;

G = constante;

$$G = \frac{C_u S_o^{1/2} S_y^{5/3}}{n \bar{I}} \quad (07)$$

onde: C_u = coeficiente dependente do sistema de unidades usado;

S_o = declividade do fundo da faixa;

n = coeficiente de Manning.

A integral da recessão, R_{rec} , é dada como uma função do seu limite superior, e o referido autor apresenta um gráfico, que pode ser usado para resolvê-la.

Para calcular o volume total escoado superficialmente, o mesmo autor o divide em duas partes: primeiramente calcula o volume d'água que escoou entre o tempo de avanço (t_{av}) e t_h , e então o escoamento superficial após t_h .

O escoamento superficial ocorrido antes da recessão é dado pela seguinte equação:

$$V_{ho}(t_h) = V_0 - V_y(t_h) - V_z(t_h) \quad (08)$$

onde: $V_{ho}(t_h)$ = volume escoado por unidade de largura em t_h ;

V_0 = volume aplicado por unidade de largura à faixa;

$V_y(t_h)$ = volume superficial por unidade de largura no tempo t_h ;

$V_z(t_h)$ = volume infiltrado por unidade de largura no tempo t_h .

O volume escoado superficialmente durante a recessão é calculado pela equação:

$$V_{ho}(t) - V_{ho}(t_h) = \frac{S_y}{G^3} \left[R_{ho}(G^{3/2}L) - R_{ho}(G^{3/2}l) \right] \quad (09)$$

onde: $V_{ho}(t)$ = volume escoado por unidade de largura no tempo t .

A integral do escoamento superficial, R_{ho} , é dada como uma função do seu limite superior, e o referido autor apresenta um gráfico, que pode ser usado para resolvê-la.

O volume total de escoamento superficial no tempo t_e , no qual a irrigação termina, é dado por:

$$V_{ho}(t_e) = V_{ho}(t_h) + \frac{S_y}{G^3} \cdot R_{ho}(G^{3/2}L) \quad (10)$$

3 - MATERIAL E MÉTODOS

O modelo para irrigação por sulcos com drenagem livre aqui apresentado, que procura analisar todas as fases da irrigação, baseia-se na solução da equação do balanço de volume tendo por hipótese que a lâmina de irrigação é a lâmina de fluxo uniforme (lâmina normal). Na fase de avanço, é utilizada a equação do balanço de volume para sulcos, apresentada por SOUZA (1981, 1983). Para as fases de depleção e recessão, o modelo de STRELKOFF (1977) para irrigação por faixas foi adaptado para sulcos. As notações das principais simbologias apresentadas neste trabalho são citadas no anexo "A".

3.1 - Fase de avanço

A equação do balanço de volume para um sulco pode ser expressa, para a fase de avanço, do seguinte modo (SOUZA, 1981, 1983):

$$Q.t = V_y + V_z \quad (11)$$

onde: Q = vazão de entrada no sulco, durante o tempo t ;

$Q.t$ = volume aplicado, durante o tempo t ;

V_y = volume armazenado na superfície do solo, no tempo t ;

V_z = volume infiltrado no solo, no tempo t .

Com relação a V_y (FIGURA 02), qualquer que seja a forma do perfil superficial da água, faz-se a hipótese de que a área média da seção transversal, \bar{A}_y , permanece constante. Desse modo, \bar{A}_y , pode ser definido como:

$$\bar{A}_y = \frac{1}{x_a} \int_0^{x_a} A_y dx \quad (12)$$

e o volume superficial será:

$$V_y = \int_0^{x_a} A_y dx = \bar{A}_y \cdot x_a \quad (13)$$

onde: x_a = distância para a qual a água avançou durante o intervalo de tempo t .

Como \bar{A}_y é constante, pode-se fazer outra hipótese de que a lâmina d'água na entrada do sulco, y_0 , corresponde à lâmina normal de fluxo uniforme, y_n , para a vazão aplicada, Q , isto é,

$$y_0 = y_n(Q) \quad (14)$$

Conseqüentemente, a área da seção transversal de fluxo na entrada do sulco, A_0 (FIGURA 03), é uma constante e

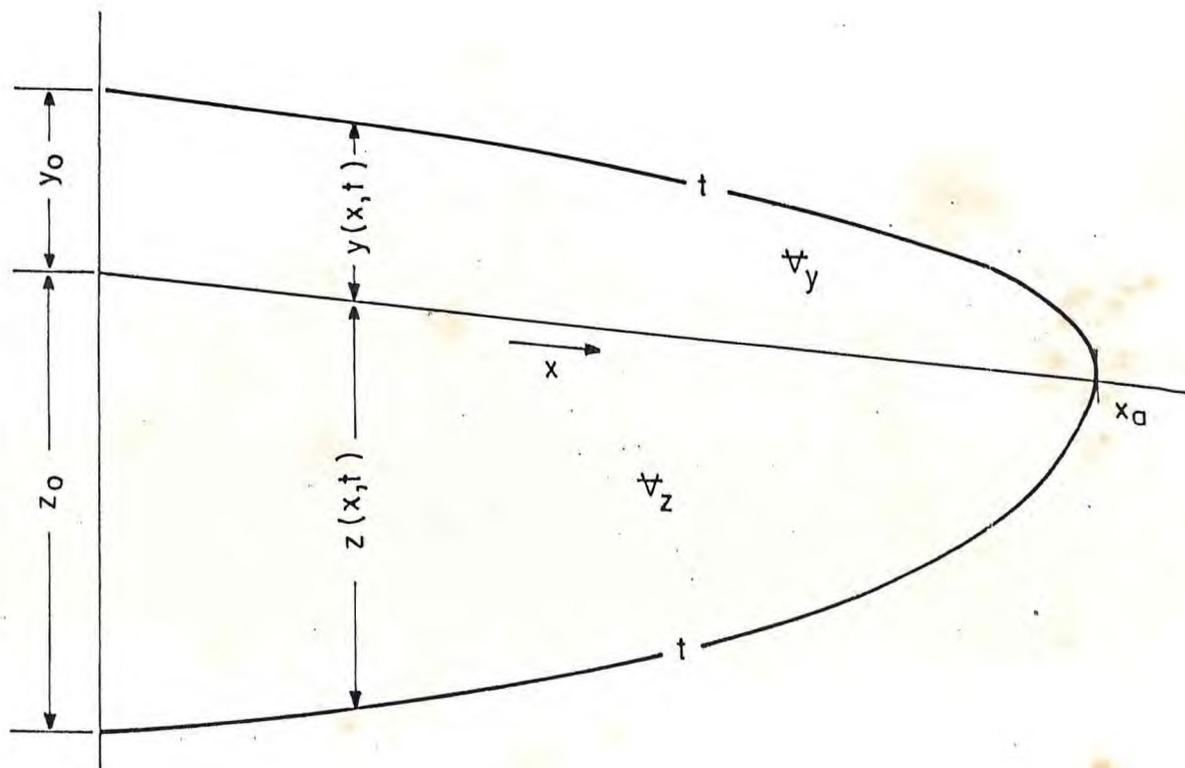


FIGURA 02 - Esquema mostrando a lâmina infiltrada e a lâmina superficial durante a fase de avanço na irrigação por sulcos (após SOUZA, 1983)

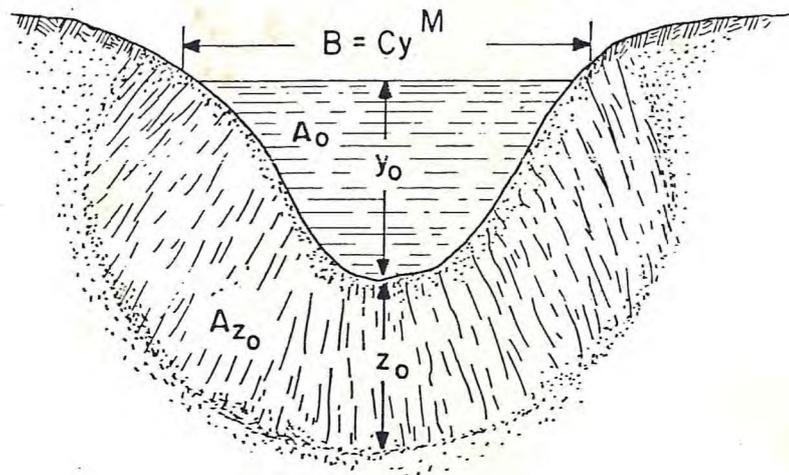


FIGURA 03 - Elementos geométricos da seção transversal para bôlica de um sulco de irrigação (após SOUZA, 1983)

função de y_n , ou seja,

$$A_0 = A[y_n] \quad (15)$$

Portanto, \bar{A}_y , pode ser representada pelo seguinte produto:

$$\bar{A}_y = A_0 \cdot h_y \quad (16)$$

Das equações (13) e (16) tem-se uma nova expressão para ψ_y :

$$\psi_y = A_0 \cdot h_y \cdot x_a \quad (17)$$

onde: h_y = fator que expressa a forma do perfil superficial, isto é, a relação entre o volume superficial ψ_y e o volume $A_0 \cdot x_a$.

O volume infiltrado, ψ_z (FIGURA 02), pode ser descrito como sendo a integral da área infiltrada, A_z , ao longo do sulco:

$$\psi_z = \int_0^{x_a} A_z(y, t) dx \quad (18)$$

onde: A_z = volume infiltrado por unidade de comprimento do sulco.

A exemplo do que foi feito para o perfil superficial, pode-se expressar o volume infiltrado em termos da área média infiltrada (\bar{A}_z), isto é,

$$V_z = \bar{A}_z \cdot x_a = A_{z_0} \cdot n_z \cdot x_a \quad (19)$$

onde: A_{z_0} = volume infiltrado na cabeceira do sulco por unidade de comprimento (FIGURA 03)

n_z = fator que expressa a forma do perfil subsuperficial.

Substituindo as equações (17) e (19) na equação (11), tem-se uma nova expressão para o balanço de volume em um sulco:

$$Q \cdot t = A_0 \cdot n_y \cdot x_a + A_{z_0} \cdot n_z \cdot x_a \quad (20)$$

A equação (20) pode ser reescrita para expressar o avanço, x_a , em função dos demais parâmetros:

$$x_a = \frac{Q \cdot t}{A_0 \cdot n_y + A_{z_0} \cdot n_z} \quad (21)$$

Para um sulco de forma parabólica (FIGURA 03), a área da seção transversal, A_0 , é dada pela expressão:

$$A_0 = \frac{B \cdot y}{M + 1} \quad (22)$$

em que:

$$B = C \cdot y^M \quad (23)$$

onde: B = largura da superfície livre da água ;

C e M = constantes

A área infiltrada acumulada pode ser calculada como sendo:

$$A_{z_0} = P_m \cdot z[t] \quad (24)$$

onde: P_m = perímetro molhado ;

$z[t]$ = lâmina infiltrada acumulada expressa pela equação de Kostiakov ;

$$z = k \cdot \tau^a$$

onde: k e a = são constantes para um dado solo e um determinado nível de umidade ;

τ = tempo de infiltração (o tempo que a água esteve em contato com o solo).

Na equação (24) quando a lâmina d'água, y , for muito pequena em relação a B , o perímetro molhado pode ser aproximado por B , isto é,

$$P_m \cong B = C \cdot y^M \quad (26)$$

o que facilita os cálculos.

3.2 - Fase de recessão

3.2.1 - Cálculo de t_{μ} , tempo do início da recessão

A exemplo do que estabeleceu STRELKOFF (1977) para irrigação por faixas, faz-se a hipótese de que no tempo de corte da água (t_{c0}), o perfil da superfície da água é aproximado pelo plano ABCD, mostrado na FIGURA 04. A lâmina d'água na cabeceira do sulco, y_0 , é a lâmina normal, no tempo t_{c0} , para a vazão Q_0 . A vazão no final do sulco (escoamento superficial), Q_1 , é igual a Q_0 menos o valor de Q_{inf} , a vazão infiltrada no sulco. Isto permite o estabelecimento de algumas hipóteses para facilidade dos cálculos na fase de depleção:

1 - A lâmina y_1 , no final do sulco, é constante e normal para a vazão de escoamento superficial, Q_1 , no tempo t_{μ} , marcando o fim da fase de depleção e o início da recessão;

2 - A taxa de escoamento superficial somada à taxa de infiltração é igual a Q_0 , ou seja,

$$Q_1 + Q_{inf} = Q_0 \quad (27)$$

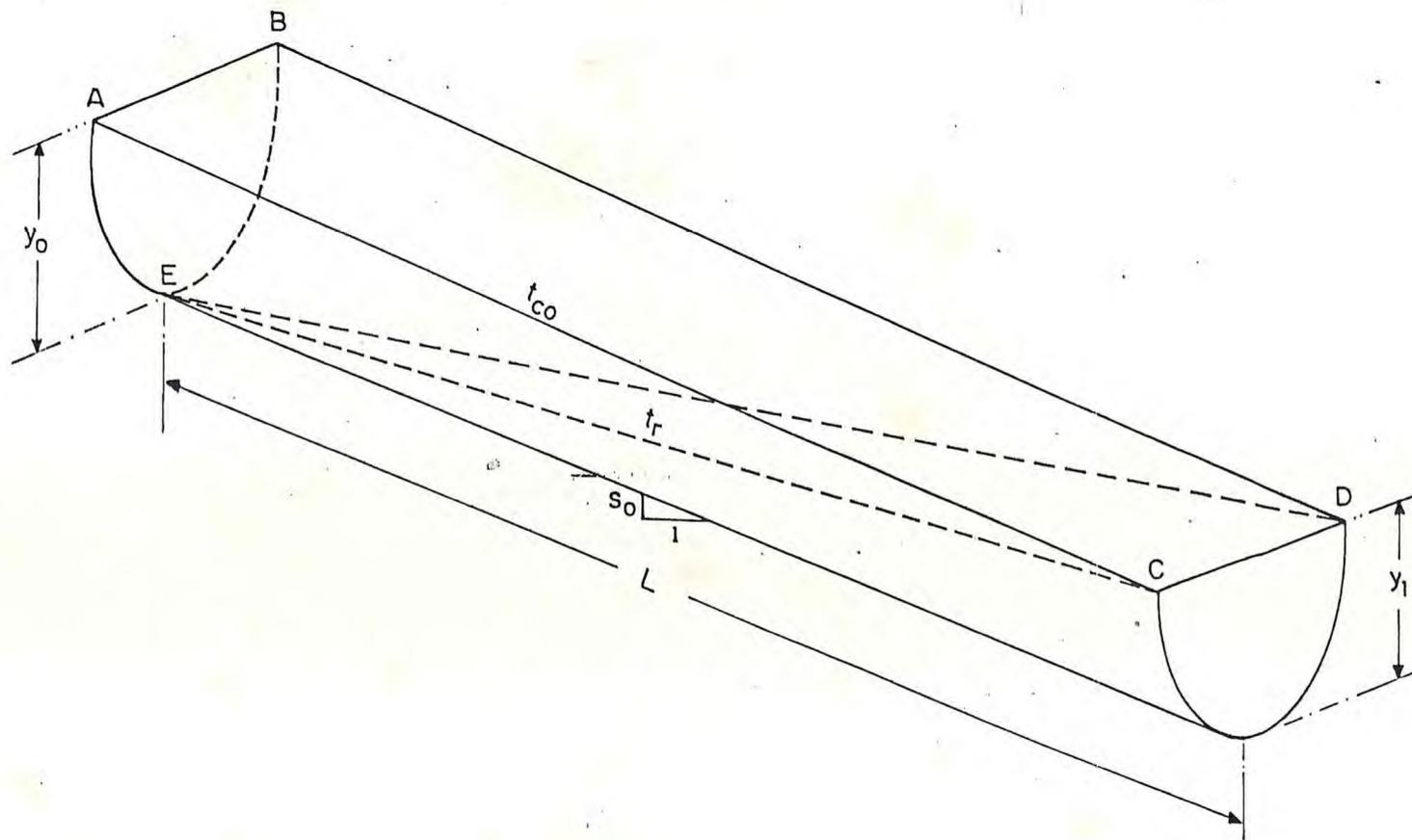


FIGURA 04 - Volume superficial esquemático: fase de depleção .

3- Os perfis superficiais em t_h e em t_{c0} , são planos (CDE e ABCD), como representado na FIGURA 04.

Na cabeceira do sulco, a lâmina y_0 decresce à medida que o volume de água superficial diminui para suprir a infiltração e escoamento superficial continuados.

Essas hipóteses estabelecem os meios necessários para estimar o tempo, t_h , no qual a lâmina da cabeceira do sulco reduz-se a zero, e começa a recessão. A duração entre o tempo de corte da água, t_{c0} , e o tempo de recessão, t_h , é o tempo requerido para remover o volume ABCDE da FIGURA 04 (V). Calcula-se este volume V , como segue:

$$V = \int_0^L A_y(y) dx \quad (28)$$

onde: $A_y(y)$ = área da seção transversal, função da lâmina y ;

$$A_y = \frac{C}{M + 1} \cdot y^{M+1} \quad (29)$$

e

$$y = y(x) \quad (30)$$

Assume-se que y varia linear e inversamente com x , de acordo com a seguinte expressão:

$$y = S_y (L - x) \quad (31)$$

onde:

$$S_y = \frac{y_0}{L} = \text{constante}; \quad (32)$$

portanto:

$$dy = -S_y dx \quad \therefore \quad dx = -\frac{1}{S_y} dy; \quad (33)$$

e para $x = 0$, $y = S_y \cdot L = y_0$; para $x = L$, $y = 0$;

então utilizando as equações (29) e (33) em (28), tem-se:

$$v = -\frac{C}{(M+1)} \cdot \frac{1}{S_y} \int_{y_0}^0 y^{M+1} dy \quad (34)$$

trocando o sinal:

$$v = \frac{C}{(M+1)} \cdot \frac{1}{S_y} \int_0^{y_0} y^{M+1} dy \quad (35)$$

e integrando a equação (35) e usando a equação (32) resulta:

$$v = \frac{C}{(M+1)} \cdot \frac{L}{y_0} \cdot \frac{y_0^{M+2}}{(M+2)} = \frac{C}{(M+1)(M+2)} \cdot y_0^{M+1} L \quad (36)$$

Como foi citado anteriormente, considerou-se que o volume superficial, V , calculado pela equação (36), (volume ABCDE da FIGURA 04), é igual ao volume a ser drenado e infiltrado entre o tempo de corte, t_{co} , e t_n . Como o volume drenado e infiltrado durante $(t_n - t_{co})$ é:

$$V = Q_0 (t_n - t_{co}) \quad (37)$$

temos, substituindo a equação (37) na equação (36):

$$t_n - t_{co} = \frac{C}{(M+1)(M+2)} \cdot y_0^{M+1} \cdot \frac{L}{Q_0} \quad (38)$$

Usando-se as equações (22) e (23), a equação (38) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$t_n = t_{co} + \frac{A_0}{(M+2)} \cdot \frac{L}{Q_0} \quad (39)$$

que é a equação que determina o início da recessão em sulcos.

A lâmina normal, y_n , que para um dado sulco é função da vazão, Q , ou seja, $y_0 = y_n(Q_0)$, é dada pela seguinte expressão baseada na equação de Manning:

$$y_n(Q) = \left[\frac{Q \cdot n}{C_u S_o^{1/2}} \cdot \frac{(M+1)^{5/3}}{C} \right]^{3/(3M+5)} \quad (40)$$

na qual:

Q = vazão;

n = coeficiente de Manning;

S_o = declividade do fundo do sulco;

C_u = coeficiente dependente do sistema de unidades usado: $C_u = 1,0 \text{ m}^{1/2}/s$, no sistema métrico e $C_u = 1,486 \text{ ft}^{1/2}/sec$, no sistema inglês;

M e C = constantes da equação da seção transversal do sulco, $B = C \cdot y^M$.

Qualquer outra equação de rugosidade da superfície hidráulica ou vegetativa pode ser usada com a devida modificação da equação (40).

3.2.2 - Cálculo da curva de recessão

No início da fase de recessão, assume-se que a variação da lâmina com a distância é uniforme, ou seja:

$$S_y = \frac{y_1(t_n)}{L} = \frac{1}{L} y_n(Q_1) \quad (41)$$

e que, de acordo com a equação (27),

$$Q_1(t_n) = Q_0 - \bar{T}(t_n) \cdot B(y_0) \cdot L \quad (42)$$

Nas equações (41) e (42), o argumento t_h indica que as funções variam com o tempo, e este é o valor de tempo t_h que é o requerido. Na equação (42): \bar{I} é a taxa de infiltração média do sulco, e $B(y_0)$ é tomado como sendo a largura média do sulco, a qual é função da lâmina normal na cabeceira do mesmo. Para efeito de cálculo, \bar{I} é computado como sendo a média aritmética das taxas de infiltração no início e no final do sulco, isto é,

$$\bar{I}(t_h) = \frac{I(t_h) + I(t_h - t_{av})}{2} \quad (43)$$

onde a taxa de infiltração no final do sulco no tempo t_h é igual a $I(t_h - t_{av})$ porque a infiltração somente começou em $t = t_{av}$, o tempo no qual a frente de avanço alcançou o final do sulco.

A expressão usada para a função de infiltração, z , dependente do tempo de infiltração τ , é dada pela equação de Kostiakov (Equação 25).

A equação correspondente para a taxa de infiltração, I , volume por unidade de área por unidade de tempo, é:

$$I(\tau) = a.k.\tau^{a-1} \quad (44)$$

Para condições particulares de solo, qualquer outra equação pode ser usada no lugar da equação (25) e então diferenciada para resultar em outra equação equivalente a equa-

ção (44).

A hipótese que S_y permanece constante durante a fase de recessão (FIGURA 05), provoca um decréscimo gradual na lâmina d'água, y_1 , e na vazão de escoamento (Q_1), com o tempo, no final do sulco. Provavelmente, a condição física requerida mais importante para a validade das hipóteses feitas relativas à superfície da água, conforme estabeleceu STRELKOFF (1977), é uma declividade do fundo do sulco suficientemente grande de modo que a superfície da água assumida nunca se aproxime da horizontal, isto é,

$$S_0 - S_y > 0 \quad (45)$$

O volume superficial, V_s (volume ABCD da FIGURA 05), que permanece sobre o solo, é calculado do seguinte modo:

$$V_s = \int_{L-\ell}^{L} A_y(y) dx \quad (46)$$

Assume-se que y varia linear e diretamente com x , de acordo com a seguinte expressão:

$$y = S_y \left\{ x - (L - \ell) \right\} \quad (47)$$

onde: S_y = definido pela equação (41);
 ℓ = a porção inundada do sulco;

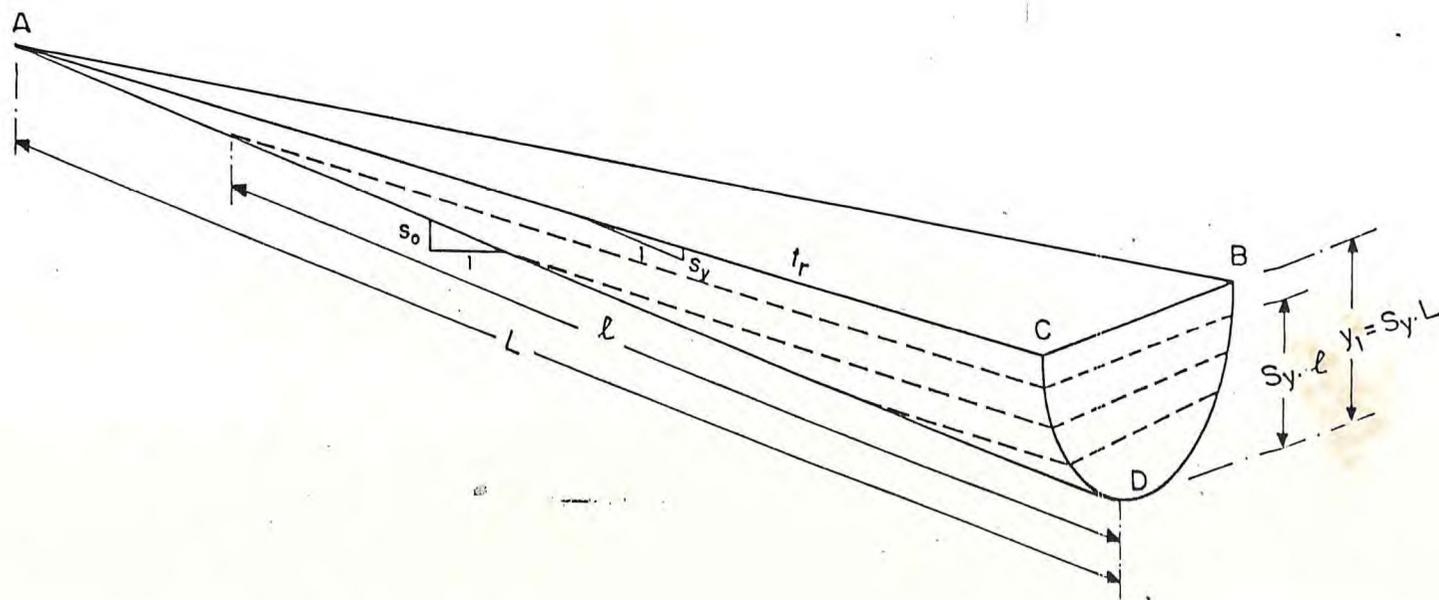


FIGURA 05 - Volume superficial esquemático: fase de recessão

portanto:

$$dy = S_y dx \quad \therefore \quad dx = \frac{1}{S_y} dy \quad (48)$$

e para $x = L - \ell$, $y = 0$; para $x = L$, $y = S_y \cdot \ell$;
então, utilizando as equações (29), (46) e (48), temos:

$$V_s = \frac{C}{M+1} \cdot \frac{1}{S_y} \int_0^{S_y \cdot \ell} y^{M+1} dy \quad (49)$$

Integrando:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{C}{(M+1)(M+2)} \cdot \frac{S_y^{M+2}}{S_y} \cdot \ell^{M+2} = \\ &= \frac{C}{(M+1)(M+2)} \cdot S_y^{M+1} \cdot \ell^{M+2} \end{aligned} \quad (50)$$

Em termos da taxa de infiltração média, \bar{I} , sobre a porção inundada do sulco, a taxa de variação do volume superficial, V_s , com o tempo, é dada pela equação diferencial em ℓ (o comprimento da porção inundada do sulco), de acordo com a equação (42):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{C}{(M+1)(M+2)} \cdot S_y^{M+1} \cdot \ell^{M+2} \right] =$$

$$= - \left[c \cdot \bar{i} \cdot S_y^M \cdot \ell^{M+1} + \frac{c}{(M+1)^{5/3}} \cdot \frac{C_u}{n} \cdot S_o^{1/2} (S_y \cdot \ell)^{M+5/3} \right] \quad (51)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (51) é a taxa de infiltração onde a largura média de infiltração é assumida como sendo $B(y_1) = C \cdot y_1^M$. O segundo termo do lado direito é a taxa de escoamento no final do sulco, sob a hipótese de que a lâmina no final, $y_1(t) = S_y \cdot \ell(t)$, agora variável com o tempo, é a lâmina normal. Foi usada a equação de Manning, mas qualquer outra poderia ser utilizada, com a comitante troca na solução da equação diferencial.

Simplificando a equação (51) temos:

$$\left[\frac{c}{(M+1)} \cdot S_y^{M+1} \cdot \ell^{M+1} \right] \frac{d\ell}{dt} = -c \cdot \bar{i} \cdot S_y^M \cdot \ell^{M+1} - \frac{c}{(M+1)^{5/3}} \cdot \frac{C_u}{n} \cdot S_o^{1/2} (S_y \cdot \ell)^{M+5/3} \quad (52)$$

Dividindo a equação (52) por $\left[\frac{c}{(M+1)} \cdot S_y^{M+1} \cdot \ell^{M+1} \right]$ resulta na seguinte equação diferencial ordinária, não linear:

$$\frac{d\ell}{dt} = - \frac{(M + 1) \cdot \bar{I}}{S_y} - \frac{C_u \cdot S_o^{1/2} \cdot S_y^{2/3}}{n(M + 1)^{2/3}} \cdot \ell^{2/3} \quad (53)$$

Fazendo:

$$G = \frac{C_u \cdot S_o^{1/2} \cdot S_y^{5/3}}{(M + 1)^{5/3} \cdot n \cdot \bar{I}} \quad (54)$$

e substituindo em (53), temos:

$$\frac{d\ell}{dt} = - \frac{(M + 1) \cdot \bar{I}}{S_y} (1 + G \cdot \ell^{2/3}) \quad (55)$$

Se \bar{I} é considerado uma função do tempo, a equação (55) somente pode ser resolvida numericamente. Para as hipóteses apresentadas, assume-se que \bar{I} é constante. Para muitos solos, I tende a uma constante para um longo tempo de infiltração; então, em muitos casos, esta hipótese é razoável. Logo, a equação (55) é colocada na forma de variáveis separadas:

$$- \frac{S_y}{(M + 1) \bar{I}} \cdot \frac{d\ell}{(1 + G \cdot \ell^{2/3})} = dt \quad (56)$$

Fazendo a integração, a equação (56) transforma-se

em:

$$-\frac{S_y}{(M+1)\bar{I}} \int_L^l \frac{dl}{1+G \cdot l^{2/3}} = \int_{t_n}^t dt \quad (57)$$

Introduzindo uma nova variável, ζ , para facilidade da resolução da integral:

$$\zeta = G^{3/2} \cdot l \quad (58)$$

e, portanto:

$$d\zeta = G^{3/2} \cdot dl \quad \therefore \quad dl = \frac{1}{G^{3/2}} d\zeta \quad (59)$$

e para $l = l$, $\zeta = G^{3/2} \cdot l$; e, $l = L$, $\zeta = G^{3/2} \cdot L$;

então utilizando as equações (57), (58) e (59), temos:

$$-\frac{S_y}{(M+1)\bar{I} \cdot G^{3/2}} \int_{G^{3/2}L}^{G^{3/2}l} \frac{d\zeta}{1+\zeta^{2/3}} = \int_{t_n}^t dt ; \quad (60)$$

trocando o sinal:

$$\frac{S_y}{(M+1)\bar{I}.G^{3/2}} \int_{G^{3/2}l}^{G^{3/2}L} \frac{d\zeta}{1+\zeta^{2/3}} = \int_{t_n}^t dt \quad (61)$$

Resolvendo a integral acima, resulta em:

$$t = t_n + \frac{S_y}{(M+1)\bar{I}.G^{3/2}} \left\{ \left[3(G^{3/2}.L)^{1/3} - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(G^{3/2}.L)^{1/3} \right] - \left[3(G^{3/2}.l)^{1/3} - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(G^{3/2}.l)^{1/3} \right] \right\} \quad (62)$$

que é a equação que origina a curva de recessão.

Os detalhes da integração da equação (61) são apresentados no ANEXO "B".

3.3 - Cálculo do escoamento superficial

De acordo com o que foi estabelecido por STRELKOFF (1977), no cálculo da eficiência de aplicação da água, é de interesse conhecer o volume total de escoamento superficial. Este valor poderia, certamente, ser obtido pela determinação,

através das curvas de avanço e recessão e da equação de infiltração, do volume total infiltrado no solo e, então, subtraí-lo do volume total aplicado ao sulco. Mas, existem meios alternativos para a determinação do escoamento superficial e eles podem ser usados como uma comparação parcial na precisão das hipóteses físicas assumidas. Além disso, tais técnicas, que incluem a integração da vazão de escoamento superficial com o tempo, produzem também o valor de Q_1 , que indica a razão na qual o escoamento superficial é acumulado.

No método aqui apresentado, o cálculo do escoamento superficial é dividido em duas partes. Primeiro o volume de água que escoar entre os tempos t_{av} e t_h , e, em seguida, é calculado o escoamento superficial que ocorre após t_h .

3.3.1 - Cálculo do escoamento superficial ocorrido antes da recessão

No tempo t_h , a superfície da água assume a forma de uma cunha de lâmina igual a zero na cabeceira e uma lâmina $y_1 = S_y \cdot L$ no final do sulco (FIGURA 05). Isto nos dá um volume superficial, V_y (volume ABCD da FIGURA 05), no tempo t_h igual a:

$$V_y(t_h) = \frac{C}{(M + 1)(M + 2)} \cdot S_y^{M+1} \cdot L^{M+2} \quad (63)$$

que é semelhante a equação (50).

Estabelecido que t_h é substancialmente maior que t_{av} , o volume subsuperficial (V_z) pode ser aproximado pela seguinte expressão, no tempo t_h :

$$V_z(t_h) = \frac{z(t_h) + z(t_h - t_{av})}{2} \cdot B(y_0) \cdot L \quad (64)$$

que é semelhante ao segundo termo do lado direito da equação (42).

Desse modo, o volume de escoamento superficial no tempo t_h , pode ser obtido pela equação:

$$V_{h0}(t_h) = V_0 - V_y(t_h) - V_z(t_h) \quad (65)$$

onde o primeiro termo do lado direito é o volume total aplicado ao sulco, durante a irrigação:

$$V_0 = Q_0 \cdot t_{c0} \quad (66)$$

Conforme STRELKOFF (1977), a equação (64) é mais precisa para grandes valores de t_h (se comparado com t_{av}); e a equação (65) requer que $t_h > t_{av}$.

Usando as equações (63), (64) e (66), e substituindo, a equação (65) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V_{ho}(t_n) = Q_0 \cdot t_{co} - \frac{C}{(M+1)(M+2)} \cdot S_y^{M+1} \cdot L^{M+2} - \frac{z(t_n) + z(t_n - t_{av})}{2} \cdot B(y_0) \cdot L \quad (67)$$

a qual permite calcular o volume perdido por escoamento superficial antes da recessão.

3.3.2 - Cálculo do escoamento superficial durante a recessão

Como foi observado, conforme a equação (51), a taxa de aumento do volume de escoamento superficial, V_{ho} , durante a recessão é:

$$\frac{dV_{ho}}{dt} = Q_1 = \frac{C}{(M+1)^{5/3}} \cdot \frac{C_u}{n} \cdot S_o^{1/2} \cdot (S_y \cdot l)^{M+5/3} \quad (68)$$

Devido a dificuldade de resolução da equação (68) em face ao aparecimento do expoente $(M + 5/3)$ no termo $(S_y \cdot l)$, e como $(S_y \cdot l)^{M + 5/3} = (S_y \cdot l)^{5/3} \cdot (S_y \cdot l)^M$, faz-se a hipótese de que $(S_y \cdot l)^M \cong (S_y \cdot L)^M$, que é constante e igual a y_1^M .

Desse modo a equação (68) é reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{dV_{ho}}{dt} = Q_1 = \frac{C \cdot y_1^M}{(M+1)^{5/3}} \cdot \frac{C_u}{n} \cdot S_o^{1/2} \cdot (S_y \cdot l)^{5/3} =$$

$$= \frac{B(y_1)}{(M+1)^{5/3}} \cdot \frac{C_u}{n} \cdot S_0^{1/2} \cdot S_y^{5/3} \cdot l^{5/3} \quad (69)$$

Em função da variável adimensional, $\zeta = G^{3/2} \cdot l$, anteriormente definida (equação 58), e da constante G (equação 54), podemos reescrever a equação (69) como segue:

$$\frac{dV_{ho}}{dt} = \frac{B(y_1)\bar{I}}{G^{3/2}} \cdot \zeta^{5/3} \quad (70)$$

A melhor maneira de resolver a equação (70), para o volume de escoamento superficial, é substituir a variável t pela variável ζ . A equação resultante estará na forma de variáveis separadas que pode ser facilmente integrável. A substituição de t é obtida inicialmente expressando a equação diferencial para a taxa de recessão, equação (55), em termos de ζ , como segue:

$$\frac{d\zeta}{dt} = - G^{3/2} \cdot \frac{(M+1)\bar{I}}{S_y} \cdot (1 + \zeta^{2/3}) \quad (71)$$

Então, pode-se usar o seguinte artifício, a partir das equações (70) e (71):

$$\frac{dV_{ho}}{d\zeta} = \frac{\frac{dV_{ho}}{dt}}{\frac{d\zeta}{dt}} = - \frac{B(y_1) \cdot S_y}{(M+1)G^3} \cdot \frac{\zeta^{5/3}}{(1 + \zeta^{2/3})} \quad (72)$$

Integrando durante um período de tempo de recessão, resulta:

$$\int_{\psi_{ho}(t_h)}^{\psi_{ho}(t)} d\psi_{ho} = - \frac{B(y_1)S_y}{(M+1)G^3} \int_{G^{3/2}L}^{G^{3/2}l} \frac{\zeta^{5/3}}{1+\zeta^{2/3}} d\zeta =$$

$$= \frac{B(y_1)S_y}{(M+1)G^3} \int_{G^{3/2}l}^{G^{3/2}L} \frac{\zeta^{5/3}}{1+\zeta^{2/3}} d\zeta \quad (73)$$

Integrando a equação (73), obtêm-se:

$$\psi_{ho}(t) - \psi_{ho}(t_h) = \frac{B(y_1)S_y}{(M+1)G^3} \left\{ \left[\frac{1}{2} (G^{3/2}L)^2 - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} (G^{3/2}L)^{4/3} + \frac{3}{2} (G^{3/2}L)^{2/3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \ln \left[1 + (G^{3/2}L)^{2/3} \right] \right\} - \left[\frac{1}{2} (G^{3/2}l)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} (G^{3/2}l)^{4/3} + \frac{3}{2} (G^{3/2}l)^{2/3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \ln \left[1 + (G^{3/2}l)^{2/3} \right] \right\} \quad (74)$$

Os detalhes da integração da equação (73) são apresentados no ANEXO "C".

O volume total de escoamento superficial no tempo t_e , ou seja, ao final da irrigação, é:

$$\begin{aligned}
 V_{ro}(t_e) = V_{ro}(t_r) + \frac{B(y_1)S_y}{(M+1)G^3} & \left\{ \frac{1}{2} (G^{3/2} \cdot L)^2 - \right. \\
 - \frac{3}{4} (G^{3/2} \cdot L)^{4/3} + \frac{3}{2} (G^{3/2} \cdot L)^{2/3} & - \\
 \left. - \frac{3}{2} \ln \left[1 + (G^{3/2} \cdot L)^{2/3} \right] \right\} & \quad (75)
 \end{aligned}$$

onde o volume de escoamento superficial durante a fase de armazenamento ou a fase de depleção é dado pela equação (65).

A percentagem de erro do volume total, PV_e , devido ao uso das equações acima desenvolvidas, pode ser calculado pela seguinte equação, à semelhança de STRELKOFF (1977):

$$PV_e = \frac{V_0 - V_z - V_{ro}}{V_0} \quad (76)$$

4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

No presente capítulo, o modelo algébrico para sulcos, desenvolvido no capítulo anterior, é analisado e testado com quatro diferentes resultados obtidos no campo, e também, é comparado ao modelo hidrodinâmico de SOUZA (1981).

Os dados utilizados no primeiro exemplo foram obtidos em sulcos construídos em um campo de precisão localizado no Laboratório de Irrigação e Drenagem da Universidade do Arizona (EUA). O segundo e terceiro exemplos utilizam informações geradas, em avaliações de campo, pela equipe de pesquisadores da Universidade do Estado do Colorado (EUA). No quarto exemplo são utilizados dados obtidos por pesquisadores do programa de pesquisa "Manejo D'água em Áreas Irrigadas - Determinação da Eficiência e Uniformidade de Distribuição da Água na Irrigação por Sulcos" - PDCT/03, Convênio BID/CNPq/UFC.

Muitos aspectos de uma irrigação por sulcos são considerados na avaliação da performance do modelo. Dentre eles o avanço e a recessão são os mais importantes. Outros parâmetros são necessários para o projeto e avaliação de sistemas de irrigação por sulcos, como o volume de escoamento superficial, o volume infiltrado e as eficiências de aplicação da água e de armazenamento, que serão aqui analisados.

Dois parâmetros são usados para avaliar o desempenho de uma irrigação: a eficiência de aplicação da água (E_a) e a eficiência de armazenamento (E_s). Segundo STRELKOFF (1972), citado por SOUZA (1981), a eficiência de aplicação da água é definida como sendo a relação entre o volume de água útil e o volume total de água aplicado, ou seja:

$$E_a = \frac{V_u}{V_o} \quad (77)$$

Se a área da seção transversal infiltrada requerida, A_{z_h} , é definida como:

$$A_{z_h} = z_h \cdot E \quad (78)$$

onde, z_h é a lâmina infiltrada requerida e E é o espaçamento entre sulcos; então o volume útil, V_u , será a integral sobre o campo destas áreas infiltradas, A_z , as quais são menores ou iguais a área infiltrada requerida. Se a área infiltrada mínima no perfil é maior ou igual a A_{z_h} , então V_u é simplesmente calculado como:

$$V_u = A_{z_h} \cdot L \quad (79)$$

onde, L é o comprimento do sulco.

A eficiência de armazenamento é a relação entre o volume útil e o volume requerido, ou seja:

$$E_s = \frac{V_u}{A_{z_n} \cdot L} \quad (80)$$

4.1 - Exemplo nº 01: - Dados de Ramsey

O primeiro exemplo usa dados obtidos por RAMSEY (1976), em um campo de precisão. O mesmo foi utilizado por SOUZA (1981) para testar seu modelo hidrodinâmico. A forma do sulco é uma equação descrita por $B = 2,095 y^{0,4539}$, onde B é a largura da superfície livre da água e y é a lâmina de fluxo em pés (ft). Os parâmetros de entrada para o modelo são:

$$Q_0 = 0,047 \text{ ft}^3/\text{sec} \quad (1,33 \text{ l/s})$$

$$S_0 = 0,001032$$

$$L = 330 \text{ ft}$$

$$n = 0,022$$

$$k = 4,0972 \cdot 10^{-3} \text{ ft/sec}^a \quad (2,95 \text{ in/hr}^a)$$

$$a = 0,5$$

$$t_{co} = 12480 \text{ sec} \quad (208 \text{ min})$$

$$n_y = 0,75$$

$$n_z = 0,80$$

Os valores de n , k e a foram determinados pelo processo descrito por SOUZA (1981) e por STRELKOFF & SOUZA (1984). Os valores de n_y e n_z foram estabelecidos pelo autor.

A FIGURA 06 mostra as curvas de avanço e recessão cal

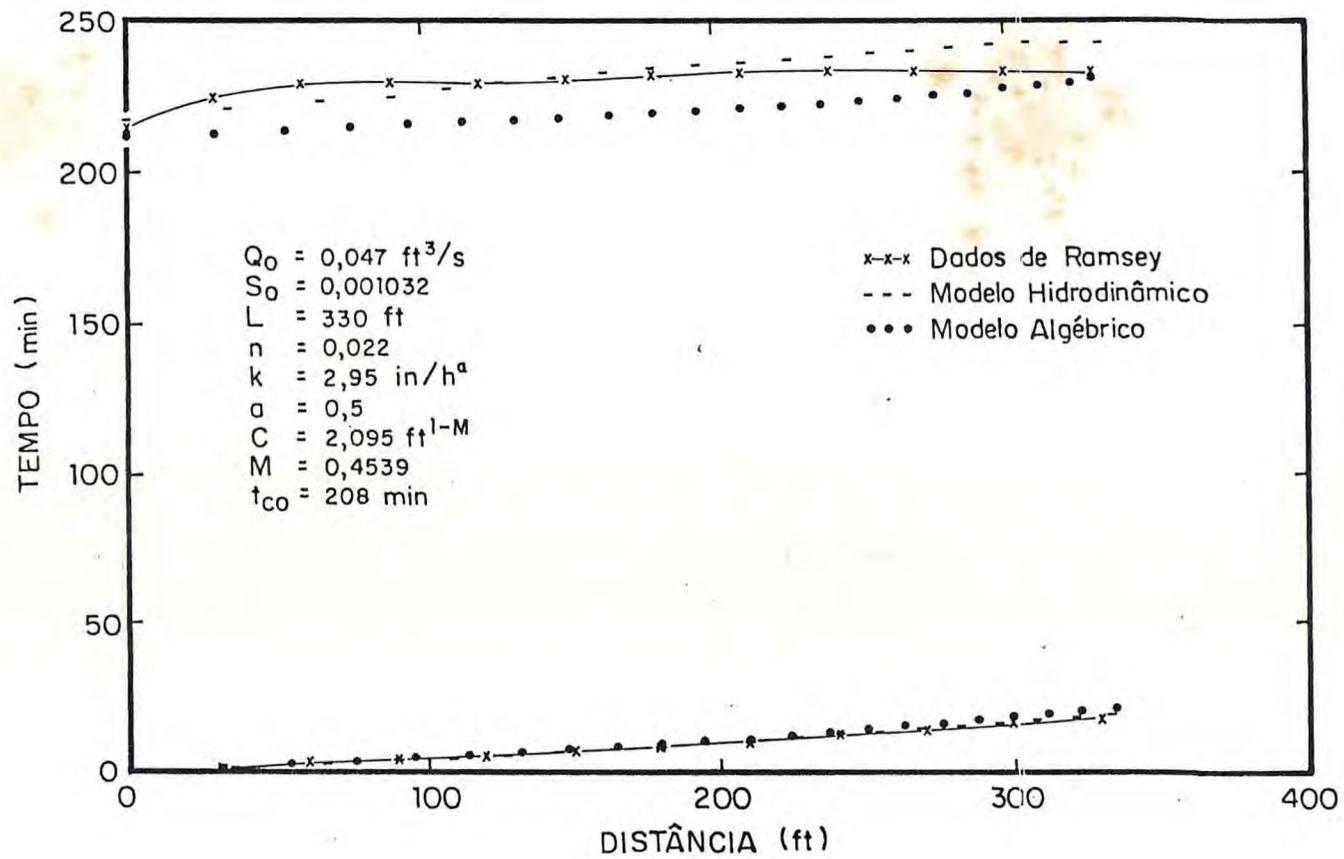


FIGURA 06 - Curvas de avanço e recessão calculadas pelos modelos hidrodinâmico e algébrico comparadas com dados observados (dados de Ramsey)

culadas pelo modelo algébrico e pelo modelo hidrodinâmico de SOUZA (1981), bem como os dados observados no campo (ver TABELAS 01, 02 e 03). Pode-se verificar que as curvas de avanço e recessão obtidas pela aplicação do modelo algébrico apresentam boa aproximação quando comparadas com os dados de campo e com o modelo hidrodinâmico, apesar das hipóteses aqui assumidas. Os valores calculados pelo modelo hidrodinâmico diferem daqueles observados no campo em aproximadamente 4% ao final do avanço, enquanto que essa diferença é de 12% para o modelo algébrico. O modelo hidrodinâmico superestima o início da recessão em aproximadamente 1% e o final em 4%. Já, o modelo algébrico, subestima o início e o final da curva de recessão em cerca de 1%.

O modelo algébrico estima o volume total escoado superficialmente, V_{h0} , e o volume infiltrado, V_z , com bastante precisão. Os valores de Ramsey de V_{h0} e V_z são 434 ft^3 e 152 ft^3 , respectivamente; o modelo hidrodinâmico calcula $V_{h0} = 437 \text{ ft}^3$ e $V_z = 149 \text{ ft}^3$, enquanto que o modelo algébrico estima $V_{h0} = 453 \text{ ft}^3$ e $V_z = 134 \text{ ft}^3$. Em outras palavras, o V_{h0} é superestimado em cerca de 4% e V_z é subestimado em aproximadamente 12%, para o modelo algébrico, enquanto no modelo hidrodinâmico, o V_{h0} é superestimado em cerca de 0,7% e V_z é subestimado em aproximadamente 1,7%, somente.

O erro relativo devido ao uso das equações, bem como às hipóteses assumidas, mostra-se pequeno, sendo 0,03% para o modelo hidrodinâmico e -0,015% no caso do modelo algébrico.

TABELA 01 - Avanço e recessão calculados pelo modelo algébrico da irrigação por sulcos (dados de Ramsey).

Distância (ft)	Avanço (min)	Recessão (min)
0,00	0,0	212,6
29,69	1,0	213,5
54,00	2,0	214,4
75,74	3,0	215,1
95,73	4,0	215,9
114,43	5,0	216,6
132,09	6,0	217,4
148,89	7,0	218,1
164,97	8,0	218,8
180,42	9,0	219,6
195,32	10,0	220,3
209,73	11,0	221,1
223,70	12,0	221,9
237,27	13,0	222,7
250,48	14,0	223,6
263,36	15,0	224,5
275,93	16,0	225,5
288,22	17,0	226,6
300,24	18,0	227,8
312,02	19,0	229,2
323,57	20,0	230,2
334,90	21,0	232,2*

* $x = 330$ ft

TABELA 02 - Dados de avanço e recessão de Ramsey

Distância (ft)	Avanço (min)	Recessão (min)
0,0	0,00	215,0
30,0	1,05	225,0
60,0	2,35	230,0
90,0	3,60	230,0
120,0	5,00	230,0
150,0	6,50	231,0
180,0	8,05	232,0
210,0	9,65	233,0
240,0	11,55	234,0
270,0	13,60	233,0
300,0	15,65	233,0
330,0	17,95	234,0

TABELA 03 - Avanço e recessão calculados pelo modelo hidrodinâmico não linear da irrigação por sulcos (dados de Ramsey).

Distância (ft)	Avanço (min)	Recessão (min)
0,00	0,0	218,0
34,96	1,0	221,0
66,27	2,0	224,0
89,27	3,0	225,0
108,50	4,0	228,0
127,20	5,0	230,0
145,10	6,0	232,0
162,50	7,0	233,5
179,00	8,0	235,0
195,00	9,0	236,0
210,50	10,0	237,0
225,50	11,0	238,0
240,20	12,0	239,0
254,30	13,0	240,0
268,20	14,0	241,0
281,70	15,0	242,0
295,00	16,0	243,0
308,00	17,0	244,0
320,70	18,0	244,0
333,20	19,0	244,0

4.2 - Exemplo nº 02 - Dados do Colorado

Alguns dos parâmetros de entrada para o modelo foram estimados por SOUZA (1981) a partir das informações de campo. Os parâmetros estimados são as constantes C e M da equação da largura da superfície livre d'água, $B = C.y^M$, o coeficiente n de Manning, e as constantes a e k da equação de infiltração de Kostiaikov.

Os parâmetros de entrada para o exemplo nº 02 são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 B &= 0,61 y^{0,22}; \quad y \text{ e } B \text{ em metros} \\
 Q_0 &= 8,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \quad (0,81 \text{ l/s}) \quad (\text{sulco 01}) \\
 S_0 &= 0,0036 \\
 t_{co} &= 12120 \text{ s} \quad (202 \text{ min}) \\
 L &= 175 \text{ m} \\
 E &= 1,118 \text{ m} \\
 n &= 0,020 \\
 k &= 8,0790 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^a \quad (7,3 \text{ cm/h}^a) \\
 a &= 0,55 \\
 \kappa_y &= 0,75 \\
 \kappa_z &= 0,80
 \end{aligned}$$

Os resultados medidos e calculados são apresentados na FIGURA 07, bem como nas TABELAS 04, 05 e 06. Pode-se verificar que as curvas de avanço e recessão, computadas pelo modelo algébrico, comparadas com o modelo hidrodinâmico e com

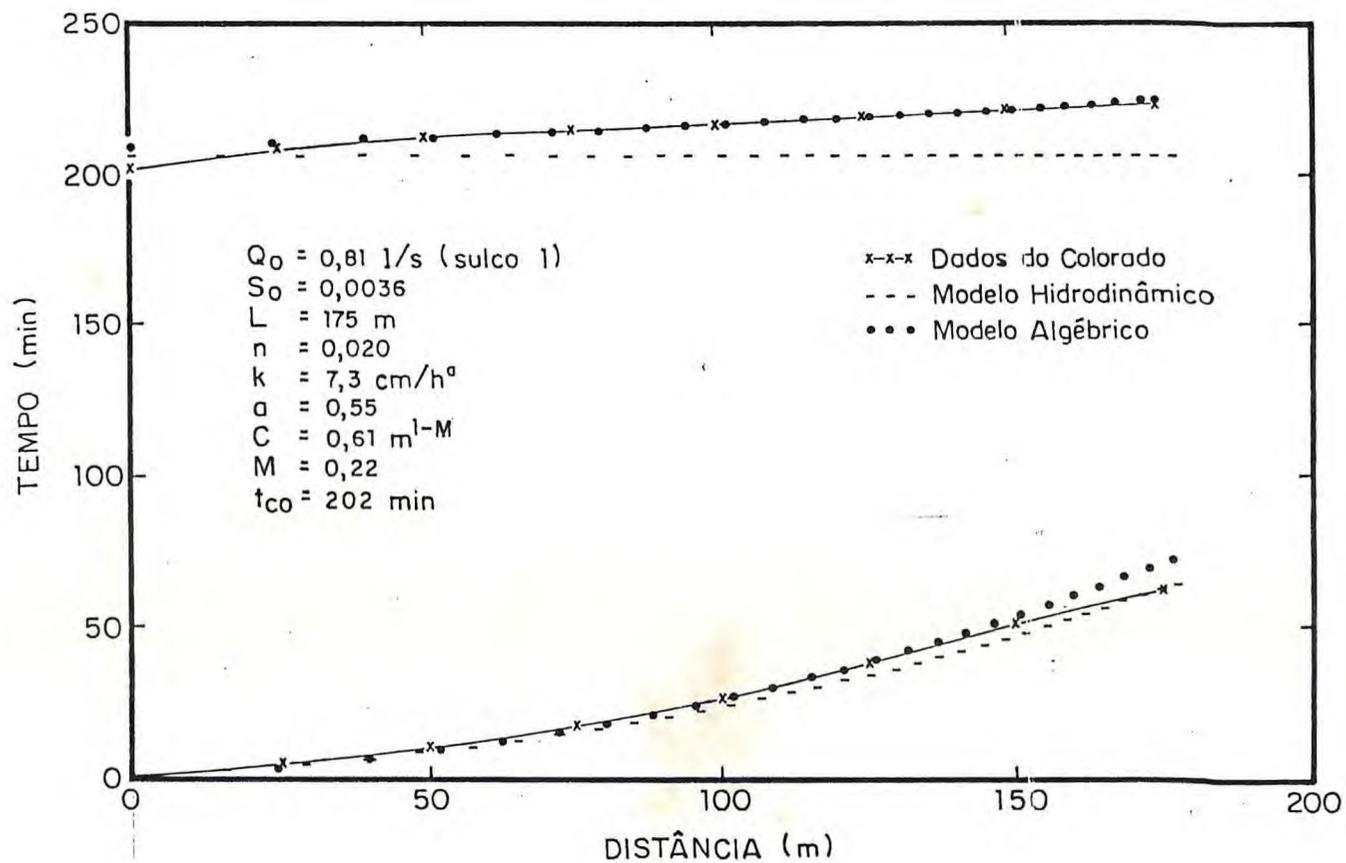


FIGURA 7 - Curvas de avanço e recessão calculadas pelos modelos hidrodinâmico e algébrico comparadas com dados observados (dados do Colorado)

TABELA 04 - Avanço e recessão calculados pelo modelo algébrico da irrigação por sulcos (dados do Colorado).

Distância (m)	Avanço (mín)	Recessão (mín)
0,00	0,0	208,8
24,11	3,0	210,4
39,46	6,0	211,5
51,76	9,0	212,4
62,32	12,0	213,2
71,69	15,0	213,9
80,19	18,0	214,6
88,01	21,0	215,2
95,30	24,0	215,8
102,13	27,0	216,4
108,59	30,0	217,0
114,72	33,0	217,6
120,57	36,0	218,1
126,17	39,0	218,7
131,56	42,0	219,2
136,74	45,0	219,8
141,74	48,0	220,3
146,58	51,0	220,8
151,27	54,0	221,4
155,83	57,0	221,9
160,25	60,0	222,5
164,57	63,0	223,1
168,77	66,0	223,7
172,87	69,0	224,3
176,88	72,0	224,6*

* $x = 175$ m

TABELA 05 - Dados de avanço e recessão do Colorado.

Distância (m)	Avanço (mín)	Recessão (mín)
0,0	0,0	202,0
25,0	4,7	209,0
50,0	10,2	212,3
75,0	17,3	215,0
100,0	26,2	216,5
125,0	38,0	219,0
150,0	50,4	221,0
175,0	61,5	222,0

TABELA 06 - Avanço e recessão calculados pelo modelo hidrodinâmico não linear da irrigação por sulcos (dados do Colorado).

Distância (m)	Avanço (min)	Recessão (min)
0,00	0,0	206,0
15,46	2,0	206,0
28,76	4,0	206,0
39,33	6,0	206,0
48,27	8,0	206,0
57,05	10,0	206,0
64,98	12,0	206,0
72,10	14,0	206,0
78,68	16,0	206,0
84,94	18,0	206,0
90,81	20,0	206,0
96,35	22,0	206,0
101,60	24,0	206,0
106,70	26,0	206,0
111,50	28,0	206,0
116,20	30,0	206,0
120,70	32,0	206,0
125,00	34,0	206,0
129,20	36,0	206,0
133,20	38,0	206,0
137,20	40,0	206,0
141,00	42,0	206,0
144,80	44,0	206,0
148,40	46,0	206,0
152,00	48,0	206,0
155,50	50,0	206,0
158,90	52,0	206,0
162,20	54,0	206,0
165,40	56,0	206,0
168,60	58,0	206,0
171,80	60,0	206,0
174,80	62,0	206,0
177,90	64,0	206,0

os dados de campo são satisfatórias. Para o modelo hidrodinâmico, os valores calculados e observados diferem em cerca de 4% ao final do avanço, enquanto que no caso do modelo algébrico, os valores calculados e observados diferem em aproximadamente 14%. Para o modelo hidrodinâmico a recessão foi calculada como sendo instantânea, resultando numa reta paralela ao eixo das abcissas. O início da recessão medido e calculado difere em aproximadamente 2%, no modelo hidrodinâmico e 3% no algébrico; este modelo superestima o final da recessão em cerca de 1%.

Os valores de V_{h0} e V_z , calculados pelo modelo hidrodinâmico foram respectivamente, $3,1 \text{ m}^3$ e $6,2 \text{ m}^3$, enquanto para o modelo algébrico $V_{h0} = 3,9 \text{ m}^3$ e $V_z = 5,9 \text{ m}^3$. Ou seja, o modelo algébrico superestima V_{h0} em aproximadamente 20% e subestima o V_z em cerca de 6%, usando o modelo hidrodinâmico como padrão.

Considerando uma lâmina de aplicação de 10 cm, o modelo hidrodinâmico prediz uma eficiência de aplicação de água igual a 63% e uma eficiência de armazenamento de 31%, enquanto que o modelo algébrico calcula $E_a = 60\%$ e $E_\delta = 30\%$.

4.3 - Exemplo nº 03 - Dados de "Stieben Farm"

Alguns dos parâmetros de entrada para o modelo foram estimados pelo autor com as informações de campo fornecidas.

Os parâmetros estimados são as constantes C e M na equação da largura da superfície livre d'água, $B = C.y^M$, e as constantes a e k na equação de infiltração de Kostiakov.

As constantes C e M foram determinadas por regressão linear a partir dos valores de lâmina de fluxo e da largura da superfície livre d'água obtidos nas várias estações ao longo do sulco.

Para determinar as constantes k e a da equação de infiltração de Kostiakov, foram usados dados do teste de entrada e saída, os quais foram processados pela metodologia estabelecida por CRIDDLE et alii (1956). Os dados foram agrupados e determinada a equação da regressão linear.

O valor do parâmetro de rugosidade superficial, foi assumido de acordo com o que recomenda BERNARDO (1982) e SCS-USDA (1974), citado por HART et alii (1983), pois o teste foi realizado numa plantação de beterraba açucareira.

Os parâmetros de entrada para o exemplo nº 03 foram os seguintes:

$$B = 1,9087 y^{0,5445}; \quad y \text{ e } B \text{ em metros}$$

$$Q_0 = 5,76 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \quad (0,576 \text{ l/s}) \quad (\text{sulco 01})$$

$$S_0 = 0,0098$$

$$L = 350 \text{ m}$$

$$n = 0,15$$

$$k = 2,0192 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^a$$

$$a = 0,8767$$

$$t_{c0} = 41760 \text{ s} \quad (696 \text{ min})$$

$$k_y = 0,75$$

$$k_z = 0,80$$

Os resultados medidos e computados são apresentados na FIGURA 08, bem como nas TABELAS 07 e 08. A curva de avanço obtida pela aplicação do modelo algébrico apresenta boa comparação com os dados de campo. Na recessão, o modelo algébrico superestima o início em aproximadamente 5%, e o final em cerca de 20%.

Os valores de V_{h0} e V_z estimados pelo modelo algébrico foram, respectivamente, $21,46 \text{ m}^3$ e $2,72 \text{ m}^3$.

4.4 - Exemplo nº 04 - Dados do BID

Alguns dos parâmetros de entrada para o modelo foram estimados pelo autor a partir das informações obtidas no campo. Os parâmetros estimados são as constantes C e M na equação da largura da superfície livre d'água $B = C \cdot y^M$.

Os valores de k e a da equação de infiltração de Kostiakov, foram obtidos por AMIM (1985), o qual estudou cinco diferentes técnicas de determinação das características de infiltração da água na irrigação por sulcos. Utilizou-se um conjunto de valores de cada técnica (ver TABELA 09).

Foi feita uma comparação entre os volumes obtidos pelo método algébrico, as eficiências de aplicação da água e

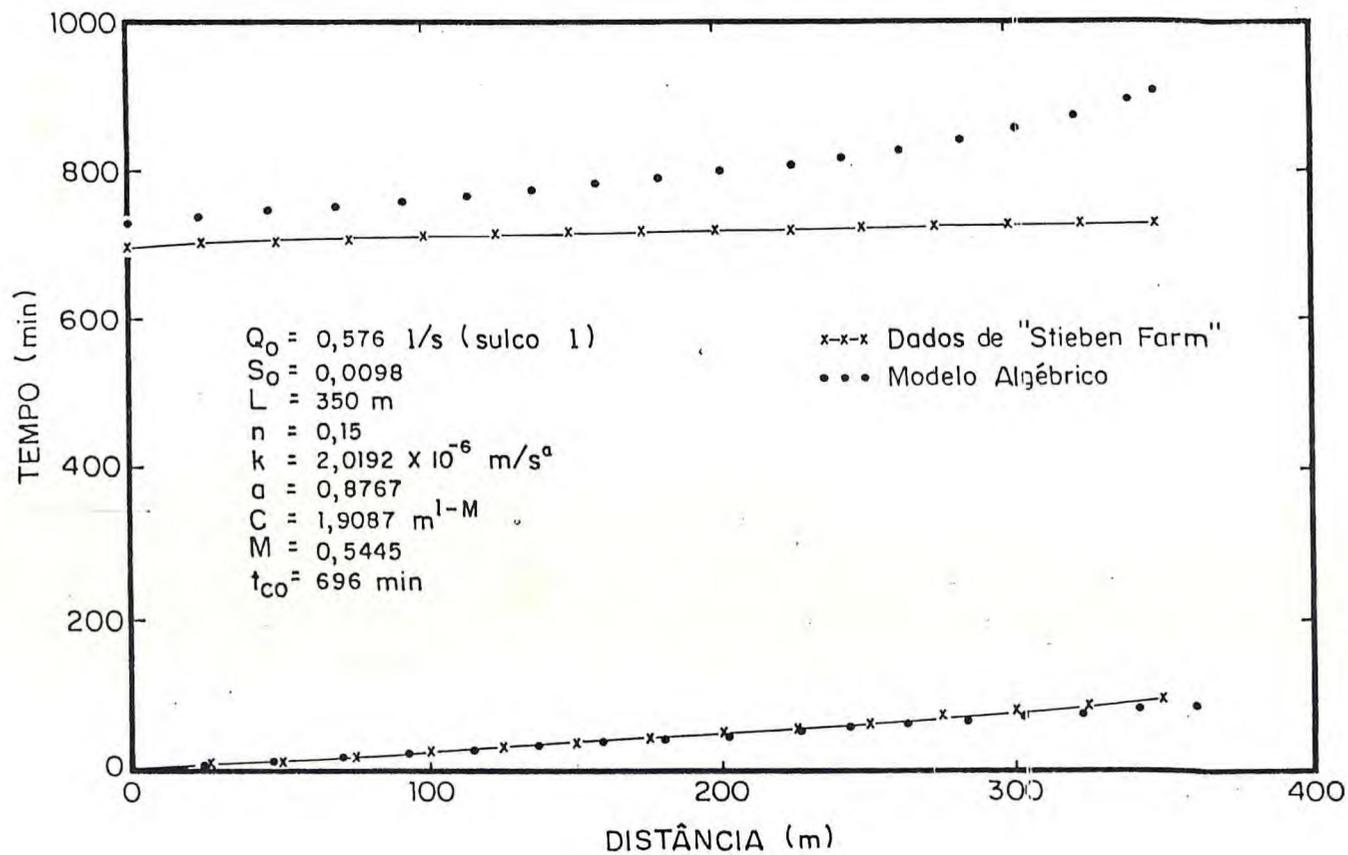


FIGURA 08 - Curvas de avanço e recessão calculadas pelo modelo algébrico comparadas com dados observados (dados de "Stieben Farm")

TABELA 07 - Avanço e recessão calculados pelo modelo algébrico da irrigação por sulcos (dados de "Stieben Farm").

Distância (m)	Avanço (mín)	Recessão (mín)
0,00	0,0	733,9
23,91	5,0	740,2
47,28	10,0	746,6
70,44	15,0	753,2
93,14	20,0	760,1
115,49	25,0	767,1
137,51	30,0	774,5
159,22	35,0	782,2
180,62	40,0	790,4
201,74	45,0	799,0
225,58	50,0	809,6
243,14	55,0	818,1
263,44	60,0	829,0
283,49	65,0	841,1
303,29	70,0	855,1
322,86	75,0	872,0
342,19	80,0	895,1
361,29	85,0	909,7*

* $x = 350 \text{ m}$

TABELA 08 - Dados de avanço e recessão de "Stieben Farm".

Distância (m)	Avanço (mín)	Recessão (mín)
0,0	0,0	698,0
25,0	5,0	703,0
50,0	10,0	705,0
75,0	16,0	708,0
100,0	21,0	712,0
125,0	27,0	716,0
150,0	33,0	718,0
175,0	40,0	720,5
200,0	48,0	722,5
225,0	55,0	723,5
250,0	61,0	724,5
275,0	70,0	725,5
300,0	77,0	727,0
325,0	85,0	729,0
350,0	94,0	731,0

TABELA 09 - Dados das constantes k (m/s^a) e a da equação de infiltração de Kostiaikov, obtidos por AMIM (1985), para cinco diferentes técnicas de determinação das características de infiltração.

Técnica de Determinação da Infiltração	k (m/s^a)	a
Cilindro Infiltrômetro	0,001583	0,38
Sulco Infiltrômetro	0,0001551	0,57
Entrada e Saída - 30 m	0,00008215	0,74
Entrada e Saída - 100 m	0,0001289	0,63
Balanço de Volume	0,0003357	0,50

de armazenamento, para os diferentes valores de k e a , bem como para os diferentes valores de n de Manning.

Os parâmetros de entrada para a análise foram os seguintes:

$$B = 0,9929 y^{0,4417}; \quad y \text{ e } B \text{ em metros}$$

$$Q_0 = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \quad (0,65 \text{ l/s})$$

$$S_0 = 0,00315$$

$$L = 100 \text{ m}$$

$$t_{co} = 13800 \text{ s} \quad (230 \text{ min})$$

$$n_y = 0,75$$

$$n_z = 0,80$$

a e k , ver TABELA 09

$$n = 0,022 \text{ e } 0,04$$

Os valores de ψ_z , ψ_{ho} , E_a e E_s foram calculados para os diferentes valores de k e a , bem como para diferentes valores de n , considerando uma lâmina de aplicação de 4,4 cm, e são mostrados na TABELA 10.

Para um mesmo valor de n , e considerando a técnica do balanço de volume como sendo o método padrão, verifica-se que a variação ocorrida nos valores calculados é bastante acentuada, pois existem técnicas que superestimam a infiltração (cilindro infiltrômetro, entrada e saída - 30 m e entrada e saída - 100 m), e outras que subestimam a infiltração (sulco infiltrômetro). Conseqüentemente, devido à variação de ψ_z , ocorre variação no valor de E_a .

TABELA 10 - Valores de $V_o (m^3)$, $V_z (m^3)$, $V_{h0} (m^3)$, $E_a (\%)$ e $E_s (\%)$ calculados para dois diferentes valores do coeficiente de rugosidade de Manning (n) e para os valores das constantes k e a obtidos por AMIM (1985), para cinco diferentes técnicas de determinação das características de infiltração.

Técnica de Determinação das Características de Infiltração	Parâmetros	$n = 0,022$	$n = 0,040$
Cilindro Infiltrômetro	$V_o (m^3)$	8,97	8,97
	$V_z (m^3)$	1,17	1,33
	$V_{h0} (m^3)$	7,82	7,67
	$E_a (\%)$	13,09	14,81
	$E_s (\%)$	26,68	30,19
Sulco Infiltrômetro	$V_o (m^3)$	8,97	8,97
	$V_z (m^3)$	0,71	0,80
	$V_{h0} (m^3)$	8,28	8,20
	$E_a (\%)$	7,88	8,93
	$E_s (\%)$	15,82	18,20
Entrada e Saída - 30 m	$V_o (m^3)$	8,97	8,97
	$V_z (m^3)$	1,89	2,13
	$V_{h0} (m^3)$	7,08	6,83
	$E_a (\%)$	21,04	23,77
	$E_s (\%)$	42,89	48,45
Entrada e Saída - 100 m	$V_o (m^3)$	8,97	8,97
	$V_z (m^3)$	1,04	1,18
	$V_{h0} (m^3)$	7,94	7,81
	$E_a (\%)$	11,59	13,12
	$E_s (\%)$	23,63	26,75
Balanço de Volume	$V_o (m^3)$	8,97	8,97
	$V_z (m^3)$	0,78	0,89
	$V_{h0} (m^3)$	8,21	8,11
	$E_a (\%)$	8,75	9,90
	$E_s (\%)$	17,84	20,18

Quando o valor de n é incrementado, nota-se que o valor de ψ_z aumenta, com o conseqüente aumento no valor de E_a . Porém, o valor da lâmina normal também aumenta, diferenciando daquele obtido no campo, pois para $n = 0,022$; $y_0 = 0,02645$ m, o qual é comparável aos valores observados no campo; enquanto, que para $n = 0,04$; $y_0 = 0,03153$ m. É necessário ressaltar que os valores de E_a obtidos são muito baixos.

O modelo aqui desenvolvido pode ser utilizado com o objetivo de indicar melhores práticas de manejo visando ao aumento da eficiência do sistema. Por exemplo, utilizando os dados (k e a) do balanço de volume (ver TABELA 09), que é aqui considerado como padrão, pode-se variar o comprimento do sulco, a vazão e o espaçamento entre sulcos para aumentar a eficiência.

Considerando os demais fatores constantes, um aumento do comprimento para 150 m tem o efeito de incrementar a E_a para 13,08%, e E_s para 26,67%. Combinando-se duas práticas de manejo, como por exemplo, um aumento do comprimento ($L = 150$ m) com uma redução da vazão para 0,4 l/s, ocorre uma eficiência de aplicação (E_a) de 19,09% e de armazenamento de 15,96%.

5 - CONCLUSÕES

Os resultados do presente trabalho demonstraram:

- 5.1 - A viabilidade da aplicação do modelo matemático aqui desenvolvido para analisar e predizer o desempenho do método de irrigação por sulcos;
- 5.2 - O bom desempenho do modelo algébrico em comparação com dados de campo, bem como em comparação com o modelo hidrodinâmico de SOUZA (1981);
- 5.3 - A validade das hipóteses utilizadas para o desenvolvimento do modelo algébrico, como mostra o pequeno erro apresentado devido a utilização das equações do modelo;
- 5.4 - O modelo algébrico desenvolvido neste trabalho, serve tanto para irrigação por sulcos em declive com drenagem livre, como para irrigação por faixas em declive com drenagem livre, pois, para o caso de faixas, assume-se que na equação da largura da superfície livre da

água, $B = Cy^M$, o valor de M é zero e C é igual a unidade, fazendo com que as equações aqui apresentadas sejam iguais às apresentadas por STRELKOFF (1977).

6 - RECOMENDAÇÕES

Em face dos resultados obtidos, o autor faz algumas recomendações para futuras pesquisas no seu campo:

- 6.1 - O modelo algébrico aqui descrito poderia ser testado com mais dados representando condições extremas de outras situações reais;
- 6.2 - A capacidade do modelo poderia ser aumentada por sulcos em desnível com redução de vazão, sulcos em nível, corrugações, sulcos fechados ao final, e em casos nos quais a vazão é cortada antes da água atingir o final do campo;
- 6.3 - Um programa para computador deve ser desenvolvido para o modelo algébrico aqui apresentado, para maior rapidez e precisão nos cálculos;
- 6.4 - O modelo algébrico desenvolvido neste trabalho poderia ser comparado com modelos matemáticos para irrigação superficial de outros autores;

6.5 - Pesquisas devem ser desenvolvidas com respeito as relações entre a geometria do sulco e a infiltração (influência da lâmina d'água).

7 - LITERATURA CITADA

- AMIM, S.L. - 1985 - Análise Comparativa das Técnicas de Determinação das Características de Infiltração na Irrigação por Sulcos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 136 p.
- AUGUSTO, S.G. - 1984 - Estudo da Eficiência e da Uniformidade de Distribuição de Água na Irrigação por Sulcos em Declive. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 130 p.
- BASSET, D.L. - 1972 - A Mathematical Model of Water Advance in Border Irrigation. Transactions of the ASAE. 15(5): 992-995.
- BASSET, D.L. - 1973 - A Dynamic Model of Overland Flow in Border Irrigation. Dissertation of Doctor of Philosophy. University of Idaho, Moscow, USA. 147 p.
- BASSET, D.L. & FITZSMONS, D.W. - 1976 - Simulating Overland Flow in Border Irrigation. Transactions of the ASAE. 19(4):674-680.
- BASSET, D.L.; FANGMEIER, D.D. & STRELKOFF, T. - 1983 - Hydraulics of Surface Irrigation. In: Design and Operation of Farm Irrigation Systems. ASAE, Monograph. nº 3. p.447-498.

- BERNARDO, S. - 1982 - Manual de Irrigação. Imprensa Universitária, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 463 p.
- CHEN, C.L. - 1966 - Discussion of a Solution of the Irrigation Advance Problem. Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASAE. 92(IR2):97-101.
- CRIDDLE, W.D.; DAVIS, S.; PAIR, C.H. & SHOCKLEY, D.G. - 1956 - Methods of Evaluating Irrigation Systems. Agricultural Handbook nº 82, SCS-USDA.
- DAVIS, J.R. - 1960 - Estimating Rate of Advance for Irrigation Furrows. Proceedings of the ARS-SCS Workshop in Hydraulics of Surface Irrigation. Denver, Colorado. p. 67-86.
- FOK, Y.S. & BISHOP, A.A. - 1965 - Analysis of Water Advance in Surface Irrigation. Journal of the Irrigation and Drainage Division. ASCE, 91(IR1):99-116.
- GRANVILLE, W.A.; SMITH, P.F. & LONGLEY, W.R. - 1965 - Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. Editora Científica, Rio de Janeiro, 703 p.
- HALL, W.A. - 1956 - Estimating Irrigation Border Flow. Agricultural Engineering, 37(4):263-265.
- HART, W.E.; BASSET, D.L. & STRELKOFF, T. - 1968 - Surface Irrigation Hydraulics-Kinematics. Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE, 94(IR4):419-440.
- HART, W.E.; COLLINS, H.G.; WOODWARD, G. & HUMPHERYS, A.S. - 1983 - Design and Operation of Gravity or Surface Systems.

In: Design and Operation of Farm Irrigation Systems.
ASAE, Monograph n^o 3. p. 501-580.

ISRAELSEN, O.W.; HANSEN, V.E. & STRINGHAM, G.E. - 1980 -
Irrigation Principles and Practices. 4 th. Edition. John
Wiley and Sons, New York. 417 p.

KARMELI, D.; SALAZAR, J.L. & WALKER, W.R. - 1978 - Assessing
the Spatial Variability of Irrigation Water Applications.
Department of Agricultural and Chemical Engineering.
Colorado State University, Fort Collins, USA,
201 p.

KATOPODES, N.D. & STRELKOFF, T. - 1977 - Hydrodynamics of
Border Irrigation - Complete Model. Journal of the
Irrigation and Drainage Division, ASCE, 103(IR3):309-324.

KINCAID, D.C.; HEERMANN, D.F. & KRUSE, E.G. - 1972 -
Hydrodynamics of Border Irrigation Advance. Transactions
of the ASAE. 15(4):674-680.

LEWIS, M.R. & MILNE, W.E. - 1938 - Analysis of Border
Irrigation. Agricultural Engineering. 19:267-272.

MERRIAM, J.L. & KELLER, J. - 1978 - Farm Irrigation System
Evaluation: A Guide for Management. Utah State University,
Logan, USA. 271 p.

PHILIP, J.R. & McINTYRE, G.A. - 1953 - Analysis of Border
Irrigation. Agricultural Engineering. 34:16.

PHILIP, J.R. & FARRELL, D.A. - 1964 - General Solution of

- the Infiltration - Advance Problem in Irrigation Hydraulics. Journal of Geophysical Research. 69(4):621-631.
- RAMSEY, M.K. - 1976 - Intake Characteristics and Flow Resistance in Irrigation Furrows. Dissertation of Master of Science. University of Arizona, Tucson, USA. 141 p.
- SAKKAS, J.G. & STRELKOFF, T. - 1974 - Hydrodynamics of Surface Irrigation. Advance Phase. Journal of the Irrigation and Drainage Division. ASCE, 100(IR1):31-48.
- SCS-USDA - 1980 - Furrow Irrigation. Chapter 5, Section 15. National Engineering Handbook, Unedited Draft. 110 p.
- SOUZA, F. de. - 1981 - Nonlinear Hydrodynamic Model of Furrow Irrigation. Dissertation of Doctor of Philosophy. University of California, Davis, USA. 172 p.
- SOUZA, F. de. - 1983 - Hidráulica da Irrigação por Superfície. Apostila, 54 p.
- SOUZA, F. de. - 1984 - Modelo Matemático da Irrigação por Sulcos. Pesquisa Agropecuária Brasileira, 19(9):1135-1143.
- STRELKOFF, T. - 1977 - Algebraic Computation of Flow in Border Irrigation. Journal of the Irrigation and Drainage Division. ASCE. 103(IR3):357-377.
- STRELKOFF, T. & KATOPODES, N.D. - 1977 - End Depth Under Zero-Inertia Conditions. Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 103(HY1):699-711.

STRELKOFF, T. & SOUZA, F. - 1984 - Modeling Effect of Depth on Furrow Infiltration. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. ASCE. 110(4):375-387.

WILKE, O.C. & SMERDON, E.T. - 1965 - A Solution of the Irrigation Advance Problem. Journal of the Irrigation and Drainage Division. ASCE, 91(IR3):23-34.

WILKE, O.C. - 1968 - A Hydrodynamic Study of Flow in Irrigation Furrows. Technical Report n^o 13. Water Resources Institute. Texas A & M University.

WU, I.P. - 1972 - Recession Flow in Surface Irrigation. Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE, 98(IR1):77-89.

A N E X O "A"

NOTAÇÕES

NOTAÇÕES

- a = expoente da equação de infiltração de Kostiakov;
 A_0 = área da seção transversal de fluxo na entrada do sulco;
 \bar{A}_y = área média da seção transversal do sulco;
 $A(y_n)$ = área da seção transversal de fluxo, função de y_n ;
 A_z = volume infiltrado por unidade de comprimento do sulco;
 \bar{A}_z = área média infiltrada;
 A_{z_0} = área infiltrada acumulada;
 A_{z_n} = área infiltrada requerida;
 B = largura da superfície livre da água no sulco;
 $B(y_0)$ = largura da superfície livre da água, função de y_0 ;
 $B(y_1)$ = largura da superfície livre da água, função de y_1 ;
 C = coeficiente da equação da largura da superfície livre da água no sulco;
 C_u = coeficiente dependente do sistema de unidades usado;
 E = espaçamento entre sulcos;
 E_a = eficiência de aplicação da água;
 E_s = eficiência de armazenamento;
 G = constante;

\bar{I}	= taxa de infiltração média do sulco;
$I(t_h)$	= taxa de infiltração, função de t_h ;
$I(t_h - t_{av})$	= taxa de infiltração, função de $(t_h - t_{av})$;
$I(\tau)$	= taxa de infiltração, função de τ ;
k	= coeficiente da equação de infiltração de Kostiakov;
l	= porção inundada do sulco;
L	= comprimento do sulco;
M	= expoente da equação da superfície livre da água;
n	= coeficiente de Manning;
P_m	= perímetro molhado;
$P\psi_e$	= percentagem de erro do volume total;
Q	= vazão;
Q_0	= vazão de entrada no sulco;
Q_{inf}	= vazão infiltrada no sulco;
Q_1	= vazão no final do sulco;
$Q_1(t_h)$	= vazão no final do sulco, função de t_h ;
n_y	= fator de forma do perfil superficial;
n_z	= fator de forma do perfil subsuperficial;
S_0	= declividade do sulco;
S_y	= declividade da superfície da água;
t_{av}	= tempo de avanço da água no sulco;
t_{co}	= tempo de aplicação de água no sulco;
t_e	= tempo no qual a irrigação termina;
t_h	= tempo no qual a recessão começa;
V	= volume;
V_0	= volume aplicado ao sulco;
V_{h0}	= volume escoado superficialmente;

- V_u = volume útil;
 V_z = volume infiltrado no solo;
 V_y = volume armazenado na superfície do solo;
 $V_{ho}(t)$ = volume de escoamento superficial no tempo t ;
 $V_{ho}(t_h)$ = volume de escoamento superficial em t_h ;
 $V_{ho}(t_e)$ = volume total de escoamento superficial no tempo t_e ;
 $V_y(t_h)$ = volume superficial no tempo t_h ;
 $V_z(t_h)$ = volume infiltrado no tempo t_h ;
 x_a = distância de avanço da água durante o intervalo de tempo t ;
 y_0 = lâmina d'água na cabeceira do sulco;
 y_1 = lâmina d'água no final do sulco;
 $y_1(t_h)$ = lâmina d'água no final do sulco, função de t_h ;
 $y_n(Q)$ = lâmina normal, função de Q ;
 $y_n(Q_1)$ = lâmina normal, função de Q_1 ;
 z_h = lâmina infiltrada requerida;
 $z(t)$ = lâmina infiltrada acumulada, função de t ;
 $z(t_h)$ = lâmina infiltrada acumulada, função de t_h ;
 $z(t_h - t_{av})$ = lâmina infiltrada acumulada, função de $(t_h - t_{av})$;
 ζ = variável adimensional;
 τ = tempo de infiltração.

A N E X O "B"

CÁLCULO DA INTEGRAL $\int \frac{1}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta$

$$\underline{\text{CÁLCULO DA INTEGRAL}} \int \frac{1}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta$$

Segundo GRANVILLE et alii (1965), toda função racional, cujo denominador possa ser expresso como produto de fatores reais do primeiro e segundo graus, pode ser integrada. Só um número pequeno, relativamente falando, de funções algébricas que "não são racionais" podem ser integradas em termos de funções elementares. A integração de algumas dessas funções pode ser conduzida à de funções racionais por uma conveniente substituição da variável ou mesmo à de funções cujas integrais figuram na lista de integrais imediatas. O método de integrar uma função que não é racional por substituição de variável de modo a conduzir a integração à de uma função racional chama-se algumas vezes de "integração por racionalização". No caso de diferenciais contendo apenas potências fracionárias de x , a integração de tais expressões pode ser conduzida à de uma função racional pela substituição:

$$x = z^n \tag{B-01}$$

onde n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes de x . Realmente, assim fazendo, x , dx , e cada radical pode ser expresso racionalmente como função de z .

Então para calcular a integral

$$\int \frac{1}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta, \quad (\text{B-02})$$

fazemos a substituição

$$\zeta = z^n, \quad (\text{B-03})$$

e como

$$n = 3, \quad (\text{B-04})$$

a equação (B-03) fica:

$$\zeta = z^3 \quad \therefore \quad z = \zeta^{1/3}, \quad (\text{B-05})$$

então:

$$\zeta^{2/3} = z^2 \quad (\text{B-06})$$

e:

$$d\zeta = 3 z^2 dz \quad (\text{B-07})$$

Substituindo (B-06) e (B-07) em (B-02), temos:

$$3 \int \frac{z^2}{1 + z^2} dz \quad (\text{B-08})$$

Dividindo o numerador pelo denominador da fração,
(B-08) resulta:

$$3 \int \left(1 - \frac{1}{1+z^2} \right) dz \quad (\text{B-09})$$

que, para facilitar a resolução, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$3 \int dz - 3 \int \frac{1}{1+z^2} dz \quad (\text{B-10})$$

Como:

$$3 \int dz = 3z \quad (\text{B-11})$$

e

$$3 \int \frac{1}{1+z^2} dz = 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z, \quad (\text{B-12})$$

então a expressão (B-10) será igual a:

$$3z - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \quad (\text{B-13})$$

Fazendo a substituição de z , da equação (B-05) na ex

pressão (B-13), obtem-se, finalmente:

$$\int \frac{1}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta = 3\zeta^{1/3} - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\zeta^{1/3}) \quad (\text{B-14})$$

A N E X O "C"

CÁLCULO DA INTEGRAL $\int \frac{\zeta^{5/3}}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta$

CÁLCULO DA INTEGRAL $\int \frac{\zeta^{5/3}}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta$

Para calcular a integral

$$\int \frac{\zeta^{5/3}}{1 + \zeta^{2/3}} d\zeta, \quad (C-01)$$

fazemos a substituição

$$\zeta = z^n, \quad (C-02)$$

e como:

$$n = 3, \quad (C-03)$$

a equação (C-02) fica:

$$\zeta = z^3 \quad \therefore \quad z = \zeta^{1/3}, \quad (C-04)$$

então:

$$\zeta^{2/3} = z^2; \quad (C-05)$$

$$\zeta^{5/3} = z^5 \quad (C-06)$$

e

$$d\zeta = 3z^2 dz \quad (\text{C-07})$$

Substituindo (C-05), (C-06) e (C-97) em (C-01), temos:

$$3 \int \frac{z^7}{1+z^2} dz \quad (\text{C-08})$$

Dividindo o numerador pelo denominador da fração, (C-08) resulta:

$$3 \int \left(z^5 - z^3 + z - \frac{z}{1+z^2} \right) dz \quad (\text{C-09})$$

que, para facilitar a resolução, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$3 \int z^5 dz - 3 \int z^3 dz + 3 \int z dz - 3 \int \frac{z}{1+z^2} dz \quad (\text{C-10})$$

Como:

$$3 \int z^5 dz = \frac{3}{6} z^6 = \frac{1}{2} z^6 ; \quad (\text{C-11})$$

$$3 \int z^3 dz = \frac{3}{4} z^4 ; \quad (\text{C-12})$$

$$3 \int z dz = \frac{3}{2} z^2 \quad (\text{C-13})$$

e

$$3 \int \frac{z}{1+z^2} dz = \frac{3}{2} \ln(1+z^2), \quad (\text{C-14})$$

então a expressão (C-10) será igual a:

$$\frac{1}{2} z^6 - \frac{3}{4} z^4 + \frac{3}{2} z^2 - \frac{3}{2} \ln(1+z^2) \quad (\text{C-15})$$

Fazendo a substituição de z , na equação (C-04) na expressão (C-15), obtem-se, finalmente:

$$\int \frac{\zeta^{5/3}}{1+\zeta^{2/3}} d\zeta = \frac{1}{2} \zeta^2 - \frac{3}{4} \zeta^{4/3} + \frac{3}{2} \zeta^{2/3} - \frac{3}{2} \ln(1+\zeta^{2/3}) \quad (\text{C-16})$$