UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

MARIANA INGRID ALVES

SISTEMA DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES

FORTALEZA

2023

MARIANA INGRID ALVES

SISTEMA DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A48s Alves, Mariana Ingrid.
Sistema de equações diofantinas não lineares / Mariana Ingrid Alves. – 2023.
67 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. método de Mordell. 2. equações diofantinas. 3. equações diofantinas quadráticas. 4. equações diofantinas cúbicas. I. Título.

CDD 510

MARIANA INGRID ALVES

SISTEMA DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 22/09/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Ao mais puro e genuíno amor, dedicado à minha querida mãe, Maria Irene.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por Sua generosidade, que vai além do que mereço.

Agradeço profundamente aos meus pais, Francisco Izaias e Maria Irene, aos meus irmãos, Izaias Filho, Flávio, Flaviano, Fábio, Márcia e Mércia, e ao meu esposo, Alencar, por acreditarem em mim e por cuidarem do meu filho enquanto estudo. Sou grata a Deus por ter uma família tão incrível ao meu lado.

Davi, meu amado filho, agradeço por me tornar uma mulher mais forte.

Minha gratidão ao meu orientador, o Professor Dr. Alberto Maia, pela orientação excepcional e contribuições valiosas. Agradeço por exercer sua profissão com maestria e por ser uma verdadeira inspiração em minha carreira profissional.

Aos professores, Jonatan Floriano, Marcos Melo, Marcelo Melo e Othon Lopes, que muito bem acolheram e orientaram nossa turma ao longo das disciplinas.

Agradecimentos também aos professores que compuseram a banca examinadora, Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo e Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva pelas excelentes contribuições.

Aos meus amigos Ábia, Diego e Glaucia, que contribuíram de maneiras únicas para a minha jornada de formação.

Aos colegas da melhor turma de mestrado da UFC. André, Annelise, Anthony, Antônio Zacarias, Alfredo, Alex Arley, Edson, Erineu, Elias, Fábio, Jéssyka, Marcelo, Inácio, Marcus, Narcélio, Paulo, Pádua, Nílbio, Neto e Tyara. Vocês são especiais!

"Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém" (Bíblia, 1969, Rom. 11, 36, p. 986).

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo apresentar um método de resolução de equações diofantinas não lineares que tem suas origens no trabalho de (Mordell, 1952) cujo título é: “The Congruence $ax^3 + by^3 + c \equiv 0(modxy)$, and integer solutions of cubic equations in three variables” . O referido método foi aplicado por diversos autores para resolver equações quadráticas e cúbicas. Especificamente apresentaremos a aplicação do método em sistemas de equações diofantinas não lineares tendo como base os artigos “A system of quadratic diophantine equation” (Mills, 1953) e “A system of cubic diophantine equation”(Mohanty, 1977). Heuristicamente, o método consiste em produzir uma sequência de soluções a partir de uma solução inicial. As sequências assim produzidas são chamadas de cadeias e satisfazem certas condições de rigidez as quais permitem inferir sobre a finitude de sua quantidade. Essa informação por sua vez nos permite tirar conclusões sobre a natureza das soluções das equações em estudo.

Palavras-chave: método de Mordell; equações diofantinas; equações diofantinas quadráticas; equações diofantinas cúbicas.

ABSTRACT

This dissertation aims to present a method for solving equations nonlinear diophantine lines that has its origins in the work of (Mordell, 1952) whose title é: “The Congruence $ax^3 + by^3 + c \equiv 0(modxy)$, and integer solutions of cubic equations in three variables”. This method was applied by several authors to solve equations quadratic and cubic. Specifically, we will present the application of the method in systems of non-linear diophantine equations based on the articles “A system of quadratic diophantine equation” (Mills, 1953) and “A system of cubic diophantine equation” (Mohanty, 1977). Heuristically, the method consists of producing a sequence of solutions from a initial solution. The sequences thus produced are called chains and satisfy certain requirements. rigidity conditions which allow inferences about the finiteness of its quantity. This information in turn allows us to draw conclusions about the nature of the solutions of the equations under study.

Keywords: Mordell’s method; diophantine equations; quadratic diophantine equations; cubic diophantine equations

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\equiv$	Congruência
$\Rightarrow$	Implica
$\forall$	Para todo
$\mid$	Divide
$\nmid$	Não divide
$\neq$	Diferente
$\leq$	Menor ou Igual do que
$\in$	Pertence
$\sum$	Somatório
$\prod$	Produtório
$\exists$	Existe
$\nexists$	Não existe

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diofantinas são equações com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para as quais devemos encontrar soluções inteiras. Receberam esse nome em homenagem ao Matemático Grego Diofanto de Alexandria, considerado o pai da Algébra, cuja obra mais importante “Aritmética” foi escrita por volta de 250 d.c.

Considerando as equações diofantinas lineares, existem métodos gerais de resolução e o conjunto solução é completamente determinado. Por outro lado, para equações diofantinas não lineares tais métodos ainda são muito escassos.

Neste trabalho resolveremos problemas envolvendo equações diofantinas não lineares, tais como, fixado $\alpha \in \mathbb{Z}$ vamos determinar todos os pares (x,y) tais que $x|y^2+\alpha y+1$ e $y|x^2+\alpha x+1$. Esse problema equivale a considerar um sistema com duas equações diofantinas quadráticas cada uma delas com três váriáveis. Para resolvê-lo aplicaremos um método de resolução de equações diofantinas não lineares que tem suas origens no trabalho de (Mordell, 1952). O referido método consiste em produzir uma sequência de soluções a partir de uma solução inicial. O estudo dessas sequências nos permitirá obter todas as soluções para o problema em questão.

Para faciltar a leitura e o entendimento, está dividido conforme descrito abaixo.

Apresentaremos no capítulo 2, conceitos e as principais propriedades de divisibilidade, que serão necessários para a compreensão de algumas demonstrações constantes nos capítulos posteriores. Para tanto nos apoioremos em (Caminha, 2013).

No capítulo 3 veremos a definição de sequências recorrentes e apresentaremos exemplos de recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

No capítulo 4 encontraremos os pares (x,y) que satisfazem o par de condições quadráticas $x|y^2+\alpha y+1$ e $y|x^2+\alpha x+1$. Em particular, para $\alpha=0$, o problema possui soluções inteiras positivas $(x,y)=(x_n,x_{n+1})$ onde a sequência $x_n=(\ldots,13,5,2,1,1,2,5,13,\ldots)$ consiste em termos alternados da sequência de Fibonacci.

No capítulo 5 estudaremos um par de equações diofantinas cúbicas simultâneas $x|\ y^3\ +1$ e $y|\ x^3\ +1$, onde x e y são inteiros positivos e resolveremos completamente a equação $x^3+y+1-xyz=0$.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos propriedades de divisibilidade e alguns teoremas que serão úteis ao longo dos próximos capítulos. Assumiremos que o leitor possui uma certa familiaridade com os tópicos e deixaremos os detalhes para serem verificados nas referências bibliográficas indicadas. Usaremos como referência: (Lima *et al.*, 2006) e o material disponível no Portal da Matemática que está dividido em três partes, a saber, Recorrências: parte 1 (Benevides, 2019), Recorrências: Parte 2 (Benevides, 2020a) e Recorrências: Parte 3 (Benevides, 2020b).

2.1 Divisibilidade

Definição 2.1.1 *Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, diremos que b divide a quando existir $c \in \mathbb{Z}$, tal que $a = c.b$ e denotaremos por $b|a$. Caso contrário, b não divide a e denotaremos por $b \nmid a$.*

Exemplo 1 $7|21$*, pois* $21 = 3.7$ *e* $4 \nmid 19$*, pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ que satisfaz a equação* $19 = 4c$.

Note que para $n \in Z$, temos:

a) $n|0 \; \forall \, n \in \mathbb{Z}$, pois $0 = n.0 \; \forall \, n$.
b) $1|n \; \forall \, n \in \mathbb{Z}$, pois $n = n.1 \; \forall \, n$.
c) $n|n \; \forall \, n \in \mathbb{Z}$, pois $n = 1.n \; \forall \, n$.
d) *Se* $c|b$ então $c|ab$, pois *se* $c|b$ então $b = ck$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Como $ak \in Z$ temos $ab = ack$, logo $ab = c.(a.k)$ portanto $c|ab$.
e) *Se* $b|a$ então $bc|ac$ pois *se* $b|a$ então $a = bk$ onde $k \in Z$. Logo, $ac = bck$, portanto $bc|ac$.
f) Se $c|b$ e $b|a$ então cla (transitiva), pois se $c|b$ então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ck$. De modo análogo se $b|a$ então existe $t \in Z$ tal que $a = bt$, daí

$$\begin{cases} b = ck \\ a = bt \end{cases}$$

então $a = (ck)t$ daí $a = c.(kt)$. Como $k \in Z$, temos que $c|a$.
g) Se $b|a$ e $a|b$ então $a = \pm b$, com a, b inteiros não nulos, pois se $b|a$ então existe $k \in Z$ tal que: $a = bk(i)$ de modo análogo se $a|b$ então existe $t \in Z$ tal que: $b = at(ii)$. Logo, substituindo (ii) em (i), temos que $a = (a.t).k$ então $a = a.(t.k)$. Portanto, $tk = 1$.

Assim,

$$\begin{cases} t = k = 1 \\ ou \\ t = k = -1 \end{cases}$$

Substituindo em (i), temos:

$$\begin{cases} a = b.1 \Rightarrow a = b \\ a = b.(-1) \Rightarrow a = -b \end{cases}$$

Portanto, podemos concluir que $a = \pm b$.

h) Se $c|a$ e $c|b$ então $c|(ax+by)$ com x, y inteiros quaisquer, pois, se $c|a$ então $a = ck$, onde $k \in Z$. Se $c|b$ então $b = ct$, com $k \in Z$. Daí,

$$\begin{cases} a = ck \\ b = ct \end{cases}$$

Logo $a+b = ck+ct$, então $a+b = c(k+t)$

então,

$$\begin{cases} ax = ckx \\ by = cty \end{cases}$$

Daí, $ax+by = c(kx+ty)$, ou seja, $c|(ax+by)$, pois $kx+ty \in Z$.

2.2 Máximo Divisor Comum

Definição 2.2.1 *O máximo divisor comum de dois inteiros a e b (a ou b diferente de zero), denotado por $mdc(a,b) = (a,b)$ é o maior inteiro que divide a e divide b. Dizemos que a e b são relativamente primos se $mdc(a,b) = 1$.*

Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então $mdc(a,b)$ sempre existe, pois 1 é divisor de qualquer inteiro e, além disso, $|x|$ é o maior divisor de $x, \forall\, x \in \mathbb{Z}^*$. Logo $1 \leq mdc(a,b) \leq min\{|a|,|b|\}$.

Note que pela definição, pelo menos um dos inteiros deve ser diferente de zero, pois caso contrário, qualquer inteiro seria divisor comum, o que tornaria impossível determinar o maior deles.

Segue ainda da definição que $mdc(a,b) = mdc(b,a)$.

Agora, se $a \in \mathbb{Z}$, então a, $-a$ possuem os mesmos divisores. Logo, $mdc(a,b) = mdc(-a,b) =$

$mdc(a,-b) = mdc(-a,-b)$, para quaisquer $a,b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos. Portanto, $mdc(a,b) = mdc(|a|,|b|)$.
Por fim, $mdc(a,0) = |a|$ para todo inteiro $a \neq 0$.

Teorema 2.2.1 (Princípio da Boa Ordem:) *Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Se $1 \in A$, então este é o menor elemento de A pois 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$. Suponhamos então que $1 \notin A$ e consideremos o conjunto $X = \{n \ \in \mathbb{N} |\ n < a, \forall\ a \in A\}$. Note que $1 \in X$. Como $A \neq \emptyset$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in X$ e $n+1 \notin X$, pois do contrário teríamos $X = \mathbb{N}$. Afirmamos que $n+1$ é o menor elemento de A. De fato, já que $n \in X$, temos que $n+1 \leq a, \forall\ a \in A$ e como $n+1 \notin X$ segue que $n+1 = a$ para algum A. Daí, $n+1$ é o menor elemento de A.

Teorema 2.2.2 (Bézout) *Se a e b são inteiros e $d = mdc(a,b)$, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$.*

Prova: Considere o conjunto $S = \{au + bv;\ u,v \in Z \ \text{ e } au + bv > 0\}$
Podemos supor sem perda de generalidade que $a \neq 0$, logo a ou $-a$ pertence a S, pois

$$a = a.1 + b.0 \ \text{ ou } \ -a = a.(-1) + b.0$$

é positivo.
Pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um menor elemento c e assim, existem inteiros x e y tais que $c = ax + by$. Nessas condições, vamos mostrar que $c = mdc(a,b)$.

i) $c|a$ e $c|b$: Pelo algoritmo da divisão, existem inteiros q e r tais que $a = qc + r$com $0 \ \leq \ r \ < \ c$. Daí $r = a - qc = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-yq)$ e se $r \ > 0$, teríamos que $r \in S$, contradizendo a minimalidade de c. Logo $r = 0$ e $c|a$. De modo análogo, concluímos que $c|b$.

ii) $c = mdc(a,b)$: Considere $d = mdc(a,b)$. Como $c|a$ e $c|b$, tem-se $c \ \leq \ d$. Além disso $d|(ax + by)$ então $d|c$ e como $c,d > 0$ tem-se $d = |d| \leq |c| = |c| = c$. Logo $d \leq c$. Portanto $c = d$.

Caracterização do máximo divisor comum por Euclides.

Teorema 2.2.3 *Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Um inteiro positivo d é o máximo divisor comum de a e b se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

i) $d|a$ *e* $d|b$

ii) Se $c \in \mathbb{Z}$ *é tal que* $c|a$ *e* $c|b$*, então* $c|d$*.*

Prova:

$\Rightarrow$ Seja $d = mdc(a,b)$. Logo, $i)$ ocorre, pois, d é divisor comum, e além disso, pelo teorema de Bézout existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$. Se $c \in Z$ é tal que $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.
$\Leftarrow$ Considere um inteiro satisfazendo $i)$ e $ii)$. Assim $d|a$ e $d|b$. Por outro lado, dado $c \in Z$ um divisor comum de a e b. Por $ii)c|d$ e como $d > 0$ tem-se $c \leq |c| \leq |d| = d$. Portanto d é o máximo divisor comum.

Proposição 2.2.4 *Para* a, b *e* c *inteiros não nulos, temos que:*

i) Se $a|bc$ e $mdc(a,b) = 1$, então $a|c$.

Prova: Por hipótese, existem constantes inteiras x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = 1$ daí multiplicando por c obtemos, $a(cx_0) + (bc)y_0 = c$. Como $a|a$ e $a|bc$ tem-se $a|c$.

ii) $mdc(a + bc, b) = mdc(a,b)$.

Prova: Sejam $d = mdc(a + bc, b)$ e $d' = mdc(a,b)$. Como $d'|a,b$, temos que $d'|a, a + bc$. Portanto, $d'|d$. Agora, como $d|(a + bc)$ e $d|b$, tem-se $d|(a + bc) - bc = a$. portanto temos que $d'|d$ e, assim, $d = d'$.

iii) Se $mdc(a,c) = 1$, então $mdc(a,bc) = mdc(a,b)$.

Prova: Sejam $d = mdc(a,b)$ e $d' = mdc(a,bc)$. De $d|b$, segue que $d|bc$. Assim, $d|a$ e $d|bc$, tal que $d|mdc(a,bc) = d'$. Agora, mostraremos que $d'|d$, como mdc $(a,c) = 1$, segue, segue do teorema de Bézout a existência de u, $v \in Z$ tais que $au + cv = 1$ e, daí $a(bu) + (bc)v = b$. Mas, como $d'|a$ e $d'|bc$, temos que $d'|b$. Então, $d'|a$ e $d'|b$, de modo que $d'|mdc(a,b) = d$.

iv) Se $c|b$ e $mdc(a,b) = 1$, então $mdc(a,c) = 1$.

Prova: Sejam $d \in z$ tal que $b = cd$ e $u, v \in z$ tais que $au + bv = 1$. Então, $au + c(dv) = 1$ e segue que $mdc(a,c) = 1$.

v) Se $mdc(b,c) = 1$, então $mdc(a,bc) = mdc(a,b).mdc(a,c)$. Em particular, se b e c são primos entre si e dividem a, então bc divide a.

Prova: Sejam $d = mdc(a,b)$ e $a = du$, $b = dv$, com u e v inteiros primos entre si. Aplicando o teorema de Bézout, obtemos: $mdc(a,bc) = mdc(du,dvc) = dmdc(u,vc) = dmdc(u,c)$.

Mas, $d|b$ e $mdc(b,c) = 1$ implicam $mdc(d,c) = 1$. Portanto, aplicando novamente o item iii), teremos $mdc(a,c) = mdc(du,c) = mdc(u,c)$. Juntando as duas relações acima, obtemos: $mdc(a,bc) = d.mdc(u,c) = mdc(a,b).mdc(a,c)$.

Proposição 2.2.5 *Para todo inteiro t não nulo, tem-se mdc(ta,tb) = t.mdc(a,b).*

Prova: Pelo Teorema de Bézout, $mdc(ta,tb)$ é o menor valor possível de $mta + ntb$, onde m e n são inteiros, que é igual a t vezes o valor positivo de $ma + nb = t.mdc(a,b)$.

3 RECORRÊNCIAS

Neste tópico revisaremos como classificar e resolver recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

3.1 Sequências recorrentes

Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica. Diremos que essa sequência é uma sequência recorrente de ordem n, se existir uma "lei" que permite determinar um termo em função de seus "n" antecedentes imediatos, ou seja, existe uma função F, tal que $x_m = F(x_{m-1}, x_{m-2}, \ldots, x_{m-n})$. A recorrência é classifcada conforme as características da função F. Por exemplo, se a função F for linear, diremos que a recorrência é linear, do contrário será dita não linear.

Exemplo 2 *A sequência (x_n) dos números naturais ímpares $1,3,5,7,...$ pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2, (n \geq 1)$, com $x_1 = 1$.*

Note que nessa sequência cada termo x_{n+1} pode ser obtido a partir do termo anterior x_n adicionando-se 2 unidades. Temos assim uma recorrência linear de ordem "1", dita também de primeira ordem. Veja ainda que somente a relação de recorrência não é capaz de identificar a sequência, pois neste caso, ela representa qualquer progressão aritmética de razão 2. Para que a sequência esteja bem determinada é necessário usar um ponto de partida, neste caso, o primeiro termo $x_1 = 1$. Note ainda que o valor de x_1 não precisa ser inteiro, no caso em que $x_1 = \sqrt{3}$ obtemos a seguinte sequência $(\sqrt{3}, \sqrt{3}+2, \sqrt{3}+4, \sqrt{3}+6, \sqrt{3}+8, ...)$. De forma mais geral, pode-se mostrar que uma recorrência linear de ordem "n" define uma sequência de modo único somente quando conhecemos os valores do termos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

No caso das recorrências lineares com coeficientes constantes, fixados o(s) primeiro (s) termo(s), podemos encontrar a lei de formação da sequência.
Considere a sequência $(x_n)_{n\geq\mathbf{1}}$ que satisfaz a recorrência linear de primeira ordem

$$x_{n+1} = ax_n + b, \forall n$$

com a e b constantes reais. Essa recorrência é classificada como linear, pois está relacionada com a Função linear $F(x) = ax + b$. Além disso, dizemos que ela é homogênea, quando não possuir termo independente de x_n, isto é, quando $b = 0$. As recorrências mais simples são aquelas em que o valor de $a = 1$. A seguir veremos exemplos diversos de problemas de recorrência e observaremos os diferentes métodos de resolução.

Exemplo 3 *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = x_n + 4$ *e* $x_1 = 6$.

Escrevendo a relação de recorrência para diferentes valores de n, obtemos:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 4 \\ x_3 = x_2 + 4 \\ x_4 = x_3 + 4 \\ \vdots \\ x_n = x_{n-1} + 4 \end{cases}$$

Somando membro a membro as $(n - 1)$ igualdades, temos:

$$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + 4(n-1),$$

como o índice está variando de 1 até $n-1$, temos $(n - 1)$ parcelas iguais a 4, daí
$x_n = x_1 + 4(n-1)$, como $x_1 = 6$, concluímos que $x_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$.
O mesmo método também se aplica a qualquer recorrência linear de primeira ordem do tipo $x_{n+1} = x_n + b$, onde $b \in \mathbb{R}$, que nada mais é do que uma progressão aritmética de razão b. Nesse caso, obtemos a lei de formação $x_n = x_1 + (n-1)b$.
De forma mais geral, podemos considerar a recorrência $x_{n+1} = x_n + g(n)$, onde g é uma função qualquer. A lei de formação será dada por $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$.

Exemplo 4 *Resolva a recorrência em que* $x_1 = 0$ *e* $x_{n+1} = x_n + 2^n + n$.

Neste exemplo, temos que $g(n) = 2^n + n$.
Assim,

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + g(1) \\ x_3 = x_2 + g(2) \\ \vdots \\ x_n = x_{n-1} + g(n-1) \end{cases}$$

Portanto, somando as equações teremos:

$$x_n = x_1 + g(1) + g(2) + \cdots + g(n-1)$$

e como $x_1 = 0$, temos:

$$x_n = 0 + (2^1 + 1) + (2^2 + 2) + \cdots + (2^{n-1} + (n-1)).$$

$$x_n = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + \cdots + (n-1)).$$

Aplicando as fórmulas das progressões geométricas e aritméticas acima temos:

$$x_n = 2^n - 2 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exemplo 5 *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = 4x_n$.

Note que se $x_1 = 0$, então a sequência é identicamente nula. Por outro lado, se $x_1 \neq 0$ então $x_n \neq 0, \forall n$ e podemos proceder como segue

$$\begin{cases} x_2 = 4x_1 \\ x_3 = 4x_2 \\ x_4 = 4x_3 \\ \quad\vdots \\ x_n = 4x_{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando as equações,

$$x_2.x_3.x_4 \cdots .x_n = x_1.x_2.\ x_3 \cdots x_{n-1}.\underbrace{4.4.4.4...4}_{n \text{ vezes}}.$$

Logo, após os devidos cancelamentos, temos que $x_n = 4^{n-1}x_1$, como não foi atribuído um valor para x_1 há um número infinito de soluções para a recorrência, assim, $x_n = k.4^{n-1}$, onde k é uma constante arbitrária.

O mesmo método também se aplica a qualquer recorrência linear de primeira ordem e homogênea do tipo $x_{n+1} = ax_n$, onde $a \in \mathbb{R}$. Nesse caso, obtemos a lei de formação $x_n = a^{n-1}x_1$. De modo mais geral, podemos considerar a recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$, onde $f(n) \neq 0, \forall n$. Nesse caso, a lei de formação é

$$x_n = (\prod_{k=1}^{n-1} f(k))x_1. \qquad (1)$$

Assim, fixado x_1 a sequência fica completamente determinada, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 6 *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = nx_n$ *e* $x_1 = 2$.

Seguindo um raciocínio semelhante ao item anterior, temos:

$$\begin{cases} x_2 = 1x_1 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 3x_3 \\ \vdots \\ x_n = (n-1)x_{n-1} \end{cases}$$

Agora, multiplicando as equações, $x_2.x_3.x_4...x_n = x_1.x_2.\ x_3 \cdots x_{n-1}.1.2.3...(n\ -1)$ e cancelando os termos, temos:

$$x_n = (n-1)!x_1$$

e como $x_1 = 2$, temos

$$x_n = 2(n-1)!.$$

Exemplo 7 *Seja* $(x_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência tal que* $x_0 = 1$ *e* $x_n = 2nx_{n-1}$ *para todo* $n \geq 1$. *Mostre que* $x_n = n!2^n$, *para todo* $n \geq 0$.

$$\begin{cases} x_1 = 2.1.x_0 \\ x_2 = 2.2.x_1 \\ \vdots \\ x_n = 2.n.x_{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando as relações acima membro a membro, e reordenando os termos, ficamos com:

$$x_1.x_2.\cdots x_n = 2.1.x_0.2.2.x_1 \cdots 2.n.x_{n-1}$$

$$x_n = (1.2.3\cdots n).\underbrace{2.2.2.2...2}_{n \text{ vezes}}$$

temos,

$$x_n = n!2^n.$$

Exemplo 8 *Encontre a lei de formação da sequência* $(x_n)_{n\geq 1}$ *que satisfaz* $x_{n+1} = 4x_n + 9$ *e* $x_1 = 3$.

$$\begin{cases} x_2 = 4x_1 + 9 \\ x_3 = 4x_2 + 9 \\ x_4 = 4x_3 + 9 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 4x_{n-2} + 9 \\ x_n = 4x_{n-1} + 9 \end{cases}$$

Veja que não é suficiente apenas somar ou multiplicar as equações de forma direta para obtermos x_n dependendo somente de n e de x_1. Nesse caso para cada i de 2 a n vamos multiplicar a equação $x_i = 4x_{i-1} + 9$ por 4^{n-i}, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} 4^{n-2}x_2 = 4^{n-1}x_1 + 9.\ 4^{n-2} \\ 4^{n-3}x_3 = 4^{n-2}x_2 + 9.\ 4^{n-3} \\ 4^{n-4}x_4 = 4^{n-3}x_3 + 9.\ 4^{n-4} \\ \vdots \\ 4^2x_{n-2} = 4^3x_{n-3} + 9.\ 4^2 \\ 4x_{n-1} = 4^2x_{n-2} + 9.\ 4 \\ x_n = 4x_{n-1} + 9 \end{cases}$$

Depois de somarmos as equações, membro a membro, ficaremos com:

$$x_n = 4^{n-1}x_1 + (9 + 9.4 + 9.4^2 + \cdots + 9.4^{n-4} + 9.4^{n-3} + 9.4^{n-2})$$

As parcelas entre parênteses formam uma progressão geométrica razão 4 e primeiro termo igual a 9. Desta forma:

$$x_n = 4^{n-1}x_1 + \frac{9(4^{n-1} - 1)}{4 - 1}$$

Substituindo o valor de $x_1 = 3$, temos:

$$x_n = 3.4^{n-1} + \frac{9(4^{n-1} - 1)}{4 - 1}$$

$$x_n = 3.4^{n-1} + 3.4^{n-1} - 3.$$

Portanto,

$$x_n = 6.4^{n-1} - 3.$$

Que representa a lei de formação procurada.

Solução Alternativa: Inicialmente dividiremos a equação $x_{n-1} = 4x_n + 9$ por 4^{n+1}.

Assim,

$$\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{x_n}{4^n} + \frac{9}{4^{n+1}}.$$

Agora definiremos uma sequência mais simples $S_n = \frac{x_n}{4^n}$ para todo n.

$$S_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{4x_n + 9}{4^{n+1}} = \frac{x_n}{4^n} + \frac{9}{4^{n+1}}.$$

Logo,

$$S_{n+1} = \frac{x_n}{4^n} + \frac{9}{4^{n+1}}.$$

E, portanto,

$$S_{n+1} = S_n + \frac{9}{4^{n+1}}.$$

Encontraremos a lei de formação substituindo os valores de n.

$$\begin{cases} s_2 = S_1 + \frac{9}{4^2} \\ s_3 = S_2 + \frac{9}{4^3} \\ \vdots \\ s_n = S_{n-1} + \frac{9}{4^n} \end{cases}$$

Somando as equações teremos:

$$S_n = S_1 + (\frac{9}{4^2} + \frac{9}{4^3} + \frac{9}{4^2} + \cdots + \frac{9}{4^n})$$

Como

$$S_1 = \frac{x_1}{4^1} = \frac{3}{4},$$

temos:

$$S_n = \frac{3}{4} + (\frac{9}{4^2} + \frac{9}{4^3} + \frac{9}{4^2} + \cdots + \frac{9}{4^n})$$

agora basta multiplicar a equação por 4^n (lembrando que $S_n = \frac{x_n}{4^n}$, obtemos:

$$x_n = 3.4^{n-1} + (9.4^{n-2} + 9.4^{n-3} + \cdots + 9)$$

o resultado entre parênteses é uma progressão geométrica de razão 4 e primeiro termo igual a 9, resultando daí:

$$x_n = 3.4^{n-1} + \frac{9(4^{n-1} - 1)}{4 - 1}$$

que é o mesmo que:

$$x_n = 6.4^{n-1} - 3.$$

conforme a solução anterior.

Ambos os métodos acima podem ser utilizados para resolver recorrências do tipo $x_{n+1} = ax_n + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. De fato, pelo primeiro método, para cada i de 2 a n vamos multiplicar a equação $x_i = ax_{i-1} + b$ por 4^{n-i}, obtendo:

$$\begin{cases} a^{n-2}x_2 = a^{n-1}x_1 + b.\ a^{n-2} \\ a^{n-3}x_3 = a^{n-2}x_2 + b.\ a^{n-3} \\ a^{n-4}x_4 = a^{n-3}x_3 + b.\ a^{n-4} \\ \vdots \\ a^2x_{n-2} = a^3x_{n-3} + b.\ a^2 \\ ax_{n-1} = a^2x_{n-2} + b.\ a \\ x_n = ax_{n-1} + b \end{cases}$$

Portanto,

$$x_n = x_1a^{n-1} + b\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1}.$$

3.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Gerais

Agora estudaremos as recorrências lineares de primeira ordem trocando os coeficientes a e b por funções não constantes de n. As recorrências serão do tipo

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n).$$

A seguir apresentaremos um teorema que mostra que qualquer recorrência linear não-homogenêa, de primeira ordem, pode ser transformada em uma recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 3.3.1 *Se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = f(n)x_n$, então, a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n) \text{ em } y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{f(n)a_n}.$$

Prova: A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ em $a_{n+1}y_{n+1} = f(n)a_n y_n + g(n)$. Mas $a_{n+1} = f(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = f(n)x_n$.
Portanto, a equação se transforma em

$$f(n)a_n y_{n+1} = f(n)a_n y_n + g(n),$$

ou seja, $y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{f(n)a_n}$.

Exemplo 9 *Sabendo que $f(n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, indique como resolver uma recorrência do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$.*

Faremos por meio de uma substituição de variáveis. Considere uma sequência em que $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = f(n)a_n$ para todo $n \geq 0$ onde a lei de formação de a_n é $a_n = f(1).f(2).\cdots.f(n-1)$. (veja a equação (1) no exemplo 5).
Dividindo a equação $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ por a_{n+1}, temos:

$$\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{f(n)x_n}{a_{n+1}} + \frac{g(n)}{a_{n+1}} = \frac{x_n}{a_n} + \frac{g(n)}{a_{n+1}}.$$

Assim, definiremos outra sequência $(y_n)_{n\geq 1}$, fazendo $x_n = a_n y_n$, ou seja, $y_n = \frac{x_n}{a_n}$, para todo n.
Essa nova sequência satisfaz $y_{n+1} = y_n + \frac{g(n)}{a_{n+1}}$.
Considerando a função $h(n) = \frac{g(n)}{a_{n+1}}$ temos que $y_{n+1} = y(n) + h(n)$. Logo, podemos obter a lei de formação para y_n conforme visto anteriormente. Assim,

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k) \\ &= y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{a_{k+1}}. \end{aligned}$$

Após encontrarmos as leis de formação de a_n e de y_n, usaremos que $x_n = a_n y_n$ e obtemos a lei de formação de x_n.

3.4 Recorrências Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Nesta seção mostraremos como resolver as recorrências lineares onde cada termo a partir do terceiro depende dos dois termos imediatamente anteriores. As recorrências lineares de segunda ordem são do tipo

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + \ c$$

para todo $n \geq 0$, a, b, e c constantes. Iniciaremos com o caso em que c = 0, quando isso ocorre, dizemos que a recorrência linear é homogênea, conforme a seguir.

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$$

para todo $n \geq 0$. Veja que existe uma única sequência que satisfaz a relação acima, desde que os valores de x_1 e x_2 estejam definidos.
Recorreremos a ideia utilizada na resolução de recorrência linear de primeira ordem homogênea com coeficientes constantes que são do tipo $x_{n+1} = ax_n$, onde a solução é do tipo $x_{n+1} = x_0.a^n$. Testaremos se a solução da recorrência de segunda ordem pode ser também deste formato, ou seja, $x_n = c.r^n$, com c e r constantes.

Exemplo 10 *Seja* $(x_n)_{n\geq \mathbf{0}}$ *a sequência que satisfaz* $x_{n+2} = -3x_{n+1} + 4x_n$, $x_0 = 1$ *e* $x_1 \ = -8$, *para todo n, com* $n \geq 0$. *Encontremos uma fórmula para o termo geral.*

Suponhamos que a solução é da forma $x_n = c.r^n$, substituindo essa expressão na recorrência

$$c.r^{n+2} = -3c.r^{n+1} + 4c.r^n.$$

Note que $c.r \neq 0$, pois do contrário a sequência seria identicamente nula e não poderia satisfazer a condição $x_0 = 1$, por exemplo. Daí, dividindo a equação por cr^n, encontramos:

$$r^2 = -3r + 4,$$

que chamaremos de equação característica da relação de recorrência.
As raízes dessa equação são $r_1 = 1$ e $r_2 = -4$.
Desta forma, as possíveis soluções são $x_n = c.1^n$ ou $x_n = c.(-4)^n$ para o que falta devemos considerar os valores iniciais $x_0 = 2$ e $x_1 = -8$ e verificar o que acontece em cada caso

$$x_n = c.(1)^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Para $n = 0$, temos:$x_0 = c.(1)^0 \Rightarrow c = 2$ e portanto $x_n = 2.1^n$

para $n = 1$, temos:$x_1 = 2.(1)^1$ e portanto $x_1 = 2$ que não satisfaz o enunciado.

Veremos o segundo caso:

$$x_n = c.(-4)^n, \text{ para todo} n \geq 0.$$

Para $n = 0$, temos: $x_0 = c.(-4)^0 \Rightarrow c = 2$ e portanto $x_n = 2.(-4)^n$

Para $n = 1$, temos:$x_1 = 2.(-4)^1$ e portanto $x_1 = -8$ e satisfaz a recorrência $x_{n+2} = -3x_{n+1} + 4x_n$.

Veja que se os valores iniciais fossem $x_0 = 2$ e $x_1 = 8$ não existiria sequência do tipo $x_n = c.(r)^n$ que satisfizesse o enunciado. Mas é possível combinar soluções para formar novas soluções, da seguinte maneira:

$$x_n = c_1.(1)^n + c_2.(-4)^n.$$

Pois as sequências do tipo $(1)^n$ e $(-4)^n$, satisfazem a recorrência $x_{n+2} = -3x_{n+1} + 4x_n$, além disso a relação é válida para qualquer constante c_1, c_2. Assim,

$$x_{n+2} = c_1(1)^{n+2} + c_2(-4)^{n+2}$$

$$x_{n+2} = c_1(-3.1^{n+1} + 4.1^n) + c_2(-3(-4)^{n+1} + 4(-4)^n)$$

$$x_{n+2} = -3(c_1 1^{n+1} + c_2(-4)^{n+1}) + 4(c_1(1)^n + c_2(-4)^n)$$

$$x_{n+2} = -3x_{n+1} + 4x_n.$$

Agora queremos encontrar c_1 e c_2. para que $x_0 = 2$ e $x_1 = 8$.

Da equação

$$x_n = c_1.(1)^n + c_2.(-4)^n$$

temos que,

$$x_0 = c_1.(1)^0 + c_2.(-4)^0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2$$

$$x_1 = c_1.(1)^1 + c_2.(-4)^1 \Rightarrow c_1 - 4c_2 = 8.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - 4c_2 = 8 \end{cases}$$

Concluímos que $c_1 = \frac{16}{5}$ e $c_2 = -\frac{6}{5}$

Assim,

$$x_n = \frac{16}{5}(1)^n - \frac{6}{5}(-4)^n.$$

É a sequência procurada.

Exemplificamos o caso em que as raízes da equação característica eram distintas, agora veremos como proceder quando o discriminante da equação for igual a zero.

Exemplo 11 *Resolva a recorrência* $x_{n+2} = 14x_{n+1} - 49x_n$ *sabendo que* $x_0 = 3$ *e* $x_1 = 28$.

Verificaremos a solução $x_n = r^n$, conforme o exemplo anterior.

Assim, $r^{n+2} = 14r^{n+1} - 49r^n \Rightarrow r^2 = 14r - 49$.

Logo, $r_1 = r_2 = 7$.

Neste caso, $x_n = c.7^n$, para algum c. Verifiquemos que:

$$x_0 = 3 \Rightarrow c.7^0 = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$x_1 = 28 \Rightarrow c.7^1 = 28 \Rightarrow c = 4$$

Observe que o valor de c encontrado não satisfaz x_0 e x_1.

Além da solução $x_n = 7^n$ verificaremos que a solução $x_n = n.7^n$ também satisfaz a relação de recorrência pelo fato de 7 ser uma raiz dupla da equação característica.

Assim, $x_n = n.7^n$ e $x_{n+1} = (n+1).7^{n+1}$

$$x_{n+2} = 14x_{n+1} - 49x_n \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = 14(n+1).7^{n+1} - 49n.7^n \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = 14.n.7^{n+1} + 14.7^{n+1} - 7^2.n.7^n \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = 2.n.7^{n+2} + 2.7^{n+2} - n.7^{n+2} \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = n.7^{n+2} + 2.7^{n+2} \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = (n+2).7^{n+2}.$$

Agora combinaremos as duas possíveis soluções de modo que:

$$x_n = c_1.7^n + c_2.n.7^n$$

$$x_0 = c_1.7^0 + c_2.0.7^0 \Rightarrow c_1 = 3$$

$$x_1 = c_1.7^1 + c_2.1.7^1 \Rightarrow 7c_1 + 7c_2 = 28.$$

Portanto, $c_2 = 1$. Daí,

$$x_n = 3.7^n + n.7^n.$$

Exemplo 12 *Resolva a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ sabendo que $x_0 = 2$ e $x_1 = 10$.*

A recorrência tem equação característica $r^2 - 2r + 1 = 0$. As raízes são $r_1 = r_2 = 1$. E a solução da recorrência é $x_n = c_1.(1)^n + c_2.n.(1)^n$

$$x_0 = c_1.1^0 + c_2.0.1^0 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$x_1 = c_1.1^1 + c_2.1^1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 10 \Rightarrow c_2 = 8.$$

Portanto, $x_n = 2.1^n + 8.n.1^n$

E concluímos que

$$x_n = 2 + 8n.$$

3.5 Recorrências não homogêneas

As recorrências do tipo $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + \ c$ para todo $n \geq 0$ e a, b, e c constantes e $c \neq 0$ podem ser reduzidas ao caso anterior escrevendo do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + c \\ x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + c \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira para eliminar o c, obtemos

$$x_{n+2} - x_{n+1} = a(x_{n+1} - x_n) + b(x_n - x_{n-1})$$

É necessário definir uma nova sequência $(y_n)_{n \geq \mathbf{1}}$, com $y_n = x_n - x_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.
Note que y_n satisfaz a equação homogênea $y_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$.
Assim podemos aplicar os métodos usados anteriormente e descobrir o valor de y_n.
Daí concluímos que $x_n = x_{n-1} + y_n$ que é uma equação linear de primeira ordem.
Portanto, $x_n = x_o + y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

Exemplo 13 *Resolva a recorrência $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n + 3$ sabendo que $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.*

Seja $y_n = x_n - x_{n-1}$ então $y_{n+2} = 7y_{n+1} - 10y_n + 3$ para todo $n \geq 1$.
A equação característica $r^2 = 7r - 10$ possui raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 5$. Portanto sua solução geral é da forma

$$y_n = c_1.2^n + c_2.5^n$$

substituindo os valores de x_0 e x_1 para encontrar as constantes c_1 e c_2,temos:

$$y_1 = c_1.2^1 + c_2.5^1 \Rightarrow 2c_1 + 5c_2 = 1$$

$$y_2 = c_1.2^2 + c_2.5^2 \Rightarrow 4c_1 + 25c_2 = 15$$

resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2c_1 + 5c_2 = 1 \\ 4c_1 + 25c_2 = 15 \end{cases}$$

Encontramos que $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{5}$.

Portanto,

$$y_n = 0.2^n + \frac{1}{5}5^n = 5^{n-1}$$

Para $n \geq 1$, vale que

$$x_n = x_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

$$x_n = 1 + (5^1 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}).$$

$$x_n = 1 + \frac{5^n - 1}{4} \text{ ou } \frac{5^n}{4} + \frac{3}{4}.$$

Solução Alternativa: Veja que a parte não homogênea da recorrência $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n - 3 = 0$ é uma constante igual a 3, desse modo, tentaremos a seguinte solução.

Assim a solução da recorrência será $y_n = x_n + c$, onde y_n é solução da parte homogênea e c é uma constante arbitrária.

Substituindo $x_n = y_n - c$ na recorrência teremos:

$$(y_{n+2} - c) - 7(y_{n+1} - c) + 10(y_n - c) - 3 = 0$$

$$y_{n+2} - c - 7y_{n+1} + 7c + 10y_n - 10c = 0$$

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n - 4c - 3 = 0$$

Logo,

$$-4c - 3 = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{4}$$

Daí,

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$$

onde a equação característica será:

$r^2 - 7r + 10 = 0$ cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 5$.

Portanto sua solução geral é da forma:

$$x_n = c_1.2^n + c_2.5^n - (-\frac{3}{4}).$$

Logo,

$$x_0 = c_1.2^0 + c_2.5^0 + (\frac{3}{4}) \Rightarrow c_1 + \ c_2 + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \ c_1 + \ c_2 = \frac{1}{4}.$$

$$x_1 = c_1.2^1 + c_2.5^1 + (\frac{3}{4}) \Rightarrow 2c_1 + 5c_2 + \frac{3}{4} = 2 \Rightarrow 2c_1 + 5c_2 = \frac{5}{4}.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{4} \\ 2c_1 + 5c_2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Encontramos que $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{4}$.

Portanto a solução da recorrência será:

$$x_n = 0.2^n + \frac{1}{4}.5^n + (\frac{3}{4}).$$

Exemplo 14 *Resolva a recorrência* $x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + a = 0.$

Seja $y_n = x_n + c$ a solução da recorrência $x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + a = 0$, como y_n a solução da parte não homogênea.

Assim, $x_n = y_n - c$, daí

$$(y_{n+1} - c) - k(y_n - c) + (y_{n-1} - c) + a = 0$$

$$y_{n+1} - c - ky_n + kc + y_{n-1} - c + a = 0$$

$$y_{n+1} - ky_n + y_{n-1} + (k-2)c + a = 0$$

$$c = -\frac{a}{(k-2)}.$$

A equação característica de $x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + a = 0$ é $r^2 - kr + 1 = 0$.

Se $k = \pm 2$, temos que:

$r_1 = r_2 = \frac{k}{2}$, daí

$$x_n = c_1.(\frac{k}{2})^n + c_2.n.(\frac{k}{2})^n - \frac{a}{(k-2)}.$$

Se $k \neq \pm 2$, temos que:

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2}.$$

Então:

$$x_n = c_1.(\frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2}) + c_2.(\frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2}).$$

4 UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS QUADRÁTICAS

4.0.1 O Problema

Apesar dos esforços de matemáticos dos últimos 350 anos, poucos métodos gerais de resolução de equações diofantinas não lineares estão disponíveis. De fato, grande parte da literatura sobre o assunto consiste em resultados isolados. Quando se trata de sistemas de equações diofantinas não lineares simultâneas, os resultados são ainda mais fragmentados e uma solução completa de um tal sistema é uma raridade.

Nesta dissertação estudaremos um par de equações diofantinas quadráticas simultâneas que foge do panorama descrito acima e podem ser resolvidas completamente por métodos de resolução de recorrência.

Dado um inteiro α consideraremos o sistema

$$x|y^2+\alpha y+1 \text{ e } y|x^2+\alpha x+1 \tag{4.1}$$

o qual é essencialmente um par de equações quadráticas simultâneas com quatro incógnitas, pois α é um inteiro fixo. Veremos que este sistema é equivalente a uma recorrência de segunda ordem não linear. Além disso, também veremos que toda solução dessa recorrência não linear é uma solução de uma recorrência linear com coeficientes constantes. Podemos assim obter a solução completa de (4.1) em inteiros. Com algum esforço adicional podemos obter todas as soluções inteiras positivas.

O resultado principal é que se $\alpha \notin \{-2,2\}$, então existe um número finito de sequências tais que x e y satisfazem (4.1) se e somente se eles são termos consecutivos de uma dessas sequências. Essas sequências são semelhantes à sequência de Fibonacci, pois há uma relação linear conectando quaisquer três termos consecutivos.

Por exemplo, para o caso especial $\alpha = 0$, dois inteiros satisfazem $x|y^2+1$ e $y|x^2+1$ somente se x e y são elementos consecutivos da sequência $\ldots 1,1,2,5,13,34\ldots$ obtida da sequência de Fibonacci, eliminando termos alternados.

Para $\alpha \in \{-2,2\}$, a principal diferença é que existe um número infinito de sequências e que 0 (zero) pode ser termo de alguma delas.

4.0.2 *Discussões preliminares*

Seja (x,y) um par de inteiros satisfazendo o sistema (4.1). Vamos construir uma sequência de números inteiros $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $x_0 = x$ e $x_1 = y$, de modo que quaisquer dois de seus termos consecutivos satisfazem o sistema (4.1) e quaisquer três de seus termos consecutivos satisfazem a seguinte recorrência não linear:

$$x_{n+1}x_{n-1} = x_n^2 + \alpha x_n + 1 \tag{4.2}$$

Inicialmente observamos que $\operatorname{mdc}(x,y) = 1$. De fato, sendo $d \in \mathbb{N}$ tal que $d|x$, segue por tansitividade que $d|y^2 + \alpha y + 1$. Daí, se também tivermos que $d|y$, então podemos concluir que $d|1$. Isso prova que $\operatorname{mdc}(x,y) = 1$.
Agora como $x|y^2 + \alpha y + 1$, existe um inteiro $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$xz = y^2 + \alpha y + 1.$$

Tomando congruência obtemos $xz \equiv 1 (\operatorname{mod} y)$ e consequentemente

$$x^2(z^2 + \alpha z + 1) \equiv 1 + \alpha x + x^2 \equiv 0 (\operatorname{mod} y).$$

Assim, como x e y são relativamente primos, temos que $y|z^2 + \alpha z + 1$. Além disso é claro que $z|y^2 + \alpha y + 1$.
Desse modo produzimos um nova solução (y,z) para o sistema (4.1). Então definimos $x_2 := z$.
De modo análogo, como $y|x^2 + \alpha x + 1$, existe $w \in \mathbb{Z}$ tal que $yw = x^2 + \alpha x + 1$. Daí, tomando congruência módulo x, concluímos que $yw \equiv 1 (\operatorname{mod} x)$ e com isso,

$$y^2(w^2 + \alpha w + 1) \equiv 1 + \alpha y + y^2 \equiv 0 (\operatorname{mod} x).$$

Logo, $x|w^2 + \alpha w + 1$. Portanto, (w,x) também é solução de (4.1) e então definimos $x_{-1} := w$.
Continuando desta maneira, obtemos a sequência:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^{\infty}$$

a qual, por construção, satisfaz as condições desejadas, ou seja, quaisquer dois termos consecutivos satisfazem (4.1) e quaisquer três termos consecutivos satisfazem (4.2).
Portanto, toda solução inteira do sistema (4.1) produz uma sequência de inteiros que satisfaz a

recorrência (4.2) e cujos pares de termos consecutivos satisfazem (4.1).

Nesse contexto, destacamos que o sistema (4.1) possuirá solução (x,y) com $xy=0$ somente quando $\alpha \in \{-2,2\}$. De fato, se por exemplo tivermos $x=0$, o sistema (4.1) se resume a

$$0|y^2+\alpha y+1 \text{ e } y|1.$$

Logo, $y \in \{-1,1\}$ e $y^2+\alpha y+1=0$, de onde segue que $\alpha \in \{-2,2\}$.

Desse modo, para $\alpha \notin \{-2,2\}$, todos os termos da $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ serão não nulos e além disso, cada par de termos consecutivos determina o termo subsequente (ou antecedente) de forma unívoca, por meio da equação (4.2). Consequentemente, a sequência é completamente determinada pelo par de termos inicial $(x_0,x_1)=(x,y)$.

A discussão acima motiva o conceito a seguir. Antes, lembramos que um subconjunto $\mathscr{I} \subset \mathbb{Z}$ é dito um intervalo se seus elementos são inteiros consecutivos.

Definição 4.0.1 *Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\mathscr{I} \subset \mathbb{Z}$ um intervalo com pelo menos três elementos. Dizemos que uma sequência de inteiros $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ é uma $\alpha-$cadeia se satisfaz:*

1. $x_{j+1}x_{j-1}=x_j^2+\alpha x_j+1$, *sempre que* $\{j-1,j,j+1\} \subset \mathscr{I}$.
2. $x_n=0 \Leftrightarrow n-1 \notin \mathscr{I}$ *ou* $n+1 \notin \mathscr{I}$.

Destacamos que duas $\alpha-$cadeias $(x_j)_{j\in\mathscr{I}_1}$ e $(y_j)_{j\in\mathscr{I}_2}$ serão consideradas iguais se uma for obtida a partir da outra por uma translação ou uma reflexão de índices, isto é, se existir $n\in\mathbb{Z}$ tal que $x_i=y_{i+n}$ para todo $i\in\mathscr{I}_1$ e $y_j=x_{j-n}$ para todo $j\in\mathscr{I}_2$ ou $x_i=y_{n-i}$ para todo $i\in\mathscr{I}_1$ e $y_j=x_{n-j}$ para todo $j\in\mathscr{I}_2$.

Observe que se uma $\alpha-$cadeia possui termo nulo, digamos $x_n=0$, então $\alpha\in\{-2,2\}$. De fato, nesse caso teremos $x_j^2+\alpha x_j+1=x_{j-1}x_{j+1}=0$, onde tomamos $j=n+1$ ou $j=n-1$ conforme x_n seja o primeiro ou o último termo da sequência. Em qualquer caso, x_j é uma raíz (inteira) da equação $X^2+\alpha X+1=0$. Como α é inteiro, a outra raiz dessa equação também é inteira e como o produto das raízes é 1, concluímos que $x_j=1$ ou $x_j=-1$. Portanto, $\alpha=-2$ ou $\alpha=2$, respectivamente.

Exemplo 15 *Note que, para $\alpha=-2$ temos $x_{n+1}x_{n-1}=x_n^2-2x_n+1=(x_n-1)^2$. Com isso, as $\{-2\}-$cadeias com primeiro termo nulo são da forma*

$$(0,1,x,(x-1)^2,x(x-2)^2\ldots), \text{ onde } x\in\mathbb{Z}.$$

Do mesmo modo, para $\alpha = 2$ temos $x_{n+1}x_{n-1} = x_n^2 + 2x_n + 1 = (x_n+1)^2$. Logo, as $\{2\}-$cadeias com primeiro termo nulo são da forma

$$(0, -1, x, -(x+1)^2, x(x+2)^2 \ldots), \text{ onde } x \in \mathbb{Z}.$$

Observação 4.0.1 Segue da discussão acima, que um par (x,y) é solução do sistema (4.1) se e somente se x e y são termos consecutivos de uma α-cadeia. Portanto, para determinarmos todas as soluções daquele sistema é suficiente determinarmos todas as α-cadeias. Além disso, é claro que uma $\alpha-$cadeia fica completemente determinada por dois de seus termos consecutivos e não nulos.

Nesse sentido, o seguinte resultado é fundamental.

Proposição 4.0.1 *Se $\alpha \notin \{-2,2\}$ então existe apenas um número finito de α-cadeias.*

Prova: Seja $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ uma $\alpha-$cadeia, como $\alpha \notin \{-2,2\}$, temos $x_j \neq 0$, para todo $j \in \mathscr{I}$. Em particular, segue da definição que $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ não possui nem primeiro nem último termo, ou seja, $\mathscr{I} = \mathbb{Z}$.

Daí, temos $|x_j| \geq 1, \forall j \in \mathbb{Z}$ e a menos de uma translação de índices, podemos supor que $|x_j| \geq |x_1|, \forall j \in \mathbb{Z}$. Com isso, segue que

$$|x_1|^2 + |\alpha||x_1| + 1 \geq |x_1^2 + \alpha x_1 + 1| = |x_2 x_0| \geq |x_1 x_0| \geq |x_1|^2$$

$$\Rightarrow |x_1| + |\alpha| + 1 \geq |x_1| + |\alpha| + \frac{1}{|x_1|} \geq |x_0| \geq |x_1|.$$

$$\Rightarrow |\alpha| + 1 \geq |x_0| - |x_1| \geq 0.$$

Portanto, $|x_0| = |x_1| + b$, onde $0 \leq b \leq |\alpha| + 1$, ou ainda $x_0 = \varepsilon x_1 + b$ com $\varepsilon \in \{-1,1\}$ e $0 \leq |b| \leq |\alpha| + 1$.

De modo análogo, temos $x_2 = \varepsilon' x_1 + c$ com $\varepsilon' \in \{-1,1\}$ e $0 \leq |c| \leq |\alpha| + 1$. Por fim, temos

$$(\varepsilon' x_1 + c)(\varepsilon x_1 + b) = x_1^2 + \alpha x_1 + 1$$

$$\Rightarrow (\varepsilon\varepsilon' - 1)x_1^2 + (b\varepsilon' + c\varepsilon - \alpha)x_1 + bc - 1 = 0.$$

Isso nos diz que para cada escolha de $\varepsilon, \varepsilon', b$ e c temos no máximo duas escolhas possíveis para x_1, exceto quando $\varepsilon\varepsilon' = 1$, $b\varepsilon' + c\varepsilon = \alpha$ e $bc = 1$, mas nesse caso teríamos $\alpha \in \{-2,2\}$.

Desse modo, para $\alpha \notin \{-2,2\}$, o número de escolhas para x_1 é no máximo $8(2|\alpha|+3)^2$. Como

a escolha de x_0, x_1 determina completamente a sequência, temos $8(2|\alpha|+3)^2$ como cota superior para o número de $\alpha-$cadeias. Isso conclui a prova do teorema.
Agora vamos mostrar que quaisquer três termos consecutivos de uma $\alpha-$cadeia satisfazem uma relação de recorrência linear de segunda ordem.

Proposição 4.0.2 *Para toda $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que se $\{n-1, n, n+1\} \subset \mathscr{I}$, então:*

$$x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + \alpha = 0. \tag{4.3}$$

Prova: Para cada $q \in \mathscr{I}$, com $x_q \neq 0$, certamente existe $k_q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x_{q+1} - k_q x_q + x_{q-1} + \alpha = 0.$$

Inicialmente, provaremos que $k_n = k_q$ para todo $n \geq q$. De fato, se x_{q+1} não for o último termo da sequência, então $x_{q+1} \neq 0$ e

$$x_{q+2}x_q = x_{q+1}(x_{q+1}+\alpha)+1 = x_{q+1}(k_q x_q - x_{q-1})+1 = k_q x_{q+1}x_q - x_q^2 - \alpha x_q$$

$$\Rightarrow x_{q+2} = k_q x_{q+1} - x_q - \alpha \Rightarrow x_{q+2} - k_q x_{q+1} + x_q + \alpha = 0.$$

Isso prova que $k_{q+1} = k_q$ e argumentando indutivamente segue que $k_n = k_q$ para todo $n \geq q$, enquanto ocorrer $x_n \neq 0$. Por fim, dados $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, com $x_{q_1}x_{q_2} \neq 0$, temos $q_1 \leq q_2$ ou $q_1 \geq q_2$. Em qualquer dos casos, pelo que provamos acima, segue que $k_{q_1} = k_{q_2}$. Desse modo, concluímos que existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + \alpha = 0.$$

sempre que $\{n-1, n, n+1\} \subset \mathscr{I}$.
Além disso, como $k = k_q = k_{q+1}$ temos que $kx_q, kx_{q+1} \in \mathbb{Z}$ e por (4.2) $\mathrm{mdc}(x_q, x_{q+1}) = 1$. Portanto, usando o lema de Bézout vemos que $k \in \mathbb{Z}$.

Corolário 4.0.1 *Se $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ é uma $\alpha-$cadeia então para $\{j-1, j, j+1\} \subset \mathscr{I}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$x_j^2 + x_{j-1}^2 - kx_jx_{j-1} + \alpha(x_j + x_{j-1}) + 1 = 0.$$

Prova: Por definição temos $x_{j-1}x_{j+1} = x_j^2 + \alpha x_j + 1$ e pela proposição anterior

$$x_{j+1}x_{j-1} = kx_jx_{j-1} - x_{j-1}^2 - \alpha x_{j-1}.$$

Portanto, $x_j^2 + x_{j-1}^2 - kx_jx_{j-1} + \alpha(x_j + x_{j-1}) + 1 = 0$.

Corolário 4.0.2 *Dados $x, y \in \mathbb{Z}$ temos que x e y satisfazem o sistema (4.1) se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$x^2 - kxy + y^2 + \alpha x + \alpha y + 1 = 0.$$

Prova: Se x e y satisfazem o sistema (4.1), então x e y não são ambos nulos e são termos consecutivos de uma $\alpha-$cadeia. Portanto o resultado segue da proposição acima. Reciprocamente, se existe uma tal constante $k \in \mathbb{Z}$, então claramente x e y satisfazem o sistema (4.1).

Na verdade, a existência do inteiro $k \in \mathbb{Z}$ referido no corolário acima, é consequência do fato que x e y dividem $x^2 + y^2 + \alpha x + \alpha y + 1$ e $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$. Dai, quando $xy \neq 0$, temos $k = \frac{x^2 + y^2 + \alpha x + \alpha y + 1}{xy}$. O que temos de novidade aqui é que esse quociente é o mesmo para qualquer par de termos consecutivos da $\alpha-$cadeia determinada por x e y.
A finitude do número de $\alpha-$cadeias tem ainda como consequência o seguinte resultado.

Corolário 4.0.3 *Para um inteiro $\alpha \notin \{-2, 2\}$ fixado, a equação diofantinha $x^2 - kxy + y^2 + \alpha x + \alpha y + 1 = 0$ possui solução apenas para um número finito de valores inteiros de k.*

Prova: Temos que (x, y) é solução se, e somente se, x e y satisfazem o sistema (4.1), o que é equivalente a dizer que x e y são termos consecutivos de uma $\alpha-$cadeia. Nesse caso $xy \neq 0$, pois $\alpha \notin \{-2, 2\}$. Como existe apenas um número finito de $\alpha-$cadeias e o inteiro k fica determinado pelo par (x, y), segue que temos apenas um número finito de possibilidades para k.

4.0.3 Limitação: $|k| \leq 2|\alpha| + 3$ para todo $\alpha \notin \{-2, 2\}$.

Como vimos na proposição 4.0.2, para uma $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j \in \mathscr{I}}$ existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ que satisfaz a recorrência

$$x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + \alpha = 0.$$

Isso nos dá, por exemplo

$$|k||x_1| \leq |x_0| + |x_2| + |\alpha|.$$

Assim, supondo $|\alpha| > 2$ e argumentando como na proposição 4.0.1, com x_1 sendo o termo de menor módulo, podemos assumir

$$1 \leq |x_1| \leq |x_0| \leq |x_2| \leq |x_1| + |\alpha| + 1.$$

Portanto,

$$|k||x_1| \leq |x_0| + |x_1| + 2|\alpha| + 1.$$

Caso ocorra $|x_0| = |x_1|$, então teremos

$$|k| - 2 \leq (|k| - 2)|x_1| \leq 2|\alpha| + 1 \Rightarrow |k| \leq 2|\alpha| + 3.$$

Se tivermos $|x_0| > |x_1|$, então a desigualdade $|x_2| \leq |x_1| + |\alpha| + 1$ é estrita e portanto $|x_2| \leq |x_1| + |\alpha|$.
Assim, para $|x_1| < |x_0| < 2|x_1|$, obtemos $|k| < 2|\alpha| + 3$.
Por outro lado, para $|x_0| \geq 2|x_1|$, vamos refinar as desiguladades obtitadas na proposição 4.0.1.
Com efeito,

$$(|x_1| + \frac{|\alpha|}{2})^2 > |x_1|^2 + |\alpha||x_1| + 1 \geq |x_1^2 + \alpha x_1 + 1| = |x_2 x_0| \geq |x_0|^2 \geq |x_1|^2.$$

Dessa forma,

$$|x_0| < |x_1| + \frac{|\alpha|}{2} \text{ e } |x_2| \leq \frac{|x_1|}{|x_0|}(|x_1| + |\alpha| + \frac{1}{|x_1|}) \leq \frac{1}{2}(|x_1| + |\alpha| + 1).$$

Com isso,

$$(|k| - \frac{3}{2})|x_1| < 2|\alpha| + \frac{1}{2} \Rightarrow |k| < 2|\alpha| + 2.$$

Para $|\alpha| = 1$, verificamos diretamente (veja a seção 4.0.5) que a mesma cota $|k| < 2|\alpha| + 3$ também é satisfeita. Resumidamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.0.3 *Para uma $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$, com $|\alpha| \neq 2$, o inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + \alpha = 0$, satisfaz a desigualdade $|k| \leq 2|\alpha| + 3$. Ocorre a igualdade apenas quando $|x_0| = |x_1|$.*

4.0.4 Todas as $\alpha-$cadeias com $|\alpha| \leq 4$.

Dada uma $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$, a menos de uma translação podemos supor $\{0,1,2\} \subset \mathscr{I}$ e a menos de uma reflexão podemos admitir $|x_2| \geq |x_0|$. Daí, supondo $|\alpha| \leq 4$ e argumentando como na demonstração da proposição 4.0.1, concluimos que

$$(|x_1|+2)^2 > |x_1|^2 + |\alpha||x_1| + 1 \geq |x_1^2 + \alpha x_1 + 1| = |x_2 x_0| \geq |x_0|^2 \geq |x_1|^2$$

$$\Rightarrow |x_1| + 2 > |x_0| \geq |x_1|.$$

Portanto, segue que

$$|x_0| = |x_1| \text{ ou } |x_0| = |x_1| + 1.$$

Essa segunda possibilidade só tem chance de ocorrer quando $|\alpha| \geq 2$. De fato, se $|x_0| = |x_1| + 1$ então

$$|x_1|^2 + |\alpha||x_1| + 1 \geq |x_1^2 + \alpha x_1 + 1| \geq |x_0|^2 = |x_1|^2 + 2|x_1| + 1.$$

Portanto, $|\alpha| \geq 2$.

Por outro lado, para $|\alpha| \in \{2,3\}$ e $|x_0| = |x_1| + 1$, devemos ter $|x_2| = |x_0|$. De fato, se ocorrer $|x_2| > |x_0| = |x_1| + 1$, então

$$|x_1|^2 + |\alpha||x_1| + 1 \geq |x_2 x_0| \geq (|x_1|+2)(|x_1|+1) = |x_1|^2 + 3|x_1| + 2$$

$$\Rightarrow (|\alpha| - 3)|x_1| \geq 1 \Rightarrow |\alpha| > 3.$$

Para $|\alpha| = 4$ e $|x_0| = |x_1| + 1$, temos $|x_2| \in \{|x_0|, |x_0| + 1\}$. Com efeito, se $|x_2| > |x_0| + 1 \Rightarrow |x_2| \geq |x_0| + 2$ então

$$|x_1|^2 + |\alpha||x_1| + 1 \geq |x_2 x_0| \geq (|x_1|+3)(|x_1|+1) = |x_1|^2 + 4|x_1| + 3$$

$$\Rightarrow (|\alpha| - 4)|x_1| \geq 2 \Rightarrow |\alpha| > 4.$$

Resumimos essa discussão no seguinte resultado.

Proposição 4.0.4 *Para uma $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ podemos supor $|x_2| \geq |x_0|$ e que x_1 é o termo de menor valor absoluto. Nessa condições vale que:*

1. $|\alpha| \leq 4 \Rightarrow |x_0| \in \{|x_1|, |x_1|+1\}$
2. $|\alpha| \leq 1 \Rightarrow |x_0| = |x_1|$.
3. $|\alpha| \leq 4$ e $|x_0| = |x_1|+1 \Rightarrow |x_2| \in \{|x_0|, |x_0|+1\}$.
4. $|\alpha| < 4$ e $|x_0| = |x_1|+1 \Rightarrow |x_2| = |x_0|$

4.0.5 O caso $|x_0| = |x_1|$

Caso tenhamos $|x_0| = |x_1|$, o que é sempre verdade quando $|\alpha| < 2$, como $\mathrm{mdc}(x_0, x_1) = 1$, segue que $|x_0| = |x_1| = 1$. Logo, $x_0 = \pm 1$ e $x_1 = \pm 1$.
Assim, se $|x_0| = |x_1|$, a menos de reflexões, temos apenas três $\alpha-$cadeias correspondendo, respectivamente, aos pares $(x_0, x_1) \in \{(1,1); (-1,1); (-1,-1)\}$.

$$(\mathrm{I}) \ldots, (\alpha+2)^2 + (\alpha+1)^2, \alpha+2, 1, 1, \alpha+2, (\alpha+2)^2 + (\alpha+1)^2, \ldots$$

$$(\mathrm{II}) \ldots, -(\alpha-2)^2 + (\alpha-1)^2 - 2, -\alpha+2, -1, 1, -\alpha-2, (\alpha+2)^2 - (\alpha+1)^2 + 2, \ldots$$

$$(\mathrm{III}) \ldots, -(\alpha-2)^2 - (\alpha-1)^2, \alpha-2, -1, -1, \alpha-2, -(\alpha-2)^2 - (\alpha-1)^2, \ldots$$

Para cada uma das sequências acima, podemos determinar a constante k estabelecida pela proposição 4.0.2.
A saber, para a sequência (I), temos $k = 2\alpha+3$. Além disso, a sequência é determinada pela recorrência

$$x_{n+1} = (2\alpha+3)x_n - x_{n-1} - \alpha, x_0 = 1, x_1 = 1.$$

Para as sequências do tipo (II), temos $k = -3$, de onde segue a recorrência

$$x_{n+1} = -3x_n - x_{n-1} - \alpha, x_0 = -1, x_1 = 1.$$

Para as sequências do tipo (III), temos $k = -2\alpha+3$ e portanto,

$$x_{n+1} = (-2\alpha+3)x_n - x_{n-1} - \alpha, x_0 = -1, x_1 = -1.$$

Observe que para $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ temos

$$x_j^2 + \alpha x_j + 1 > x_j^2 - |x_j| + 1 \geq x_j^2 - 2|x_j| + 1 = (|x_j| - 1)^2 \geq 0.$$

Assim, para $|x_j| > 1$, temos $x_{j-1}x_{j+1} = x_j^2 + \alpha x_j + 1 > 0$. Isso também é verdade quando $|x_j| = 1$.
Portanto, x_{j-1} e x_{j+1} são não nulos e têm o mesmo sinal. Logo, os termos de ordem par têm o

mesmo sinal e os termos de ordem impar também têm o mesmo sinal.
Em particular, para $(x_0,x_1)=(1,1)$ a sequência tem todos os termos positivos. Para $(x_0,x_1)=(-1,1)$ tem termos de sinais alternados e para $(x_0,x_1)=(-1,-1)$, todos os termos são negativos.
Enfim, podemos listar todas as $\{-1\}-$cadeias, substituindo $\alpha=-1$ nas sequências (I), (II) e (III).

$$(...,1,1,1,1,1,1,...),\ k=1$$

$$(...,-7,3,-1,1,-1,3,-7,...),\ k=-3$$

$$(...,-13,-3,-1,-1,-3,-13,...),\ k=5.$$

A primeira das sequências acima é dada pela recorrência $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}+1$, com $x_0=x_1=1$. É claro que a sequência constante igual a 1 satisfaz essa recorrência e também as condições iniciais. Daí, a unicidade de soluções mostra que $x_j=1$ efetivamente para todo $j\in\mathbb{Z}$.
As demais sequências são dadas pelas respectivas recorrências referentes aos tipos (II) e (III), especializadas ao caso $\alpha=-1$.
Fazendo $\alpha=0$, obtemos todas as $0-$cadeias:

$$(...,5,2,1,1,2,5,...),\ k=3$$

$$(...,-5,2,-1,1,-2,5,...),\ k=-3$$

$$(...,-5,-2,-1,-1,-2,-5,...),\ k=3.$$

A primeira das sequências acima é dada por $x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}$, com $x_0=x_1=1$. Daí, sendo $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a sequência de Fibonacci, temos que

$$x_1=1=f_0;\ \ x_2=2=f_2;\ \ x_3=5=f_4;\ \ x_4=13=f_6.$$

Portanto, podemos conjecturar que $x_n=f_{2n-2}$ para todo $n\geq 1$.
Supondo que $x_j=f_{2j-2}$ para todo $j<n$, temos

$$x_n=3x_{n-1}-x_{n-2}=3f_{2n-4}-f_{2n-6}=2f_{2n-4}+f_{2n-5}=f_{2n-4}+f_{2n-3}=f_{2n-2}.$$

Isso prova a conjectura.
Por fim, fazendo $\alpha=1$, seguem todas as $1-$cadeias:

$$(...,13,3,1,1,3,13,...),\ k=5$$

$$(...7,-3,1,-1,1,-3,7,...),\ k=-3$$

$$(...,-1,-1,-1,-1,-1,-1,...),\ k=1.$$

Observação 4.0.2 Note que as $1-$cadeias são obtidas das $\{-1\}-$cadeias multiplicando-as por -1. Isso já era esperado, pois

$$x_{j+1}x_{j-1}=x_j^2+\alpha x_j+1 \Leftrightarrow (-x_{j+1})(-x_{j-1})=(-x_j)^2+(-\alpha)(-x_j)+1,$$

ou seja, $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ é uma $\alpha-$cadeia se e somente se $(-x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ é uma $\{-\alpha\}-$cadeia. Claramente, essas sequências correspondem a uma mesma constante k.

Como consequência dos resultados acima, temos

Proposição 4.0.5 *Dada a equação diofantina $x^2-kxy+y^2+\alpha x+\alpha y+1=0$, vale que:*

1. Para $\alpha=-1$, existe solução se, e somente se, $k\in\{-3,1,5\}$. Além disso, tal equação possui solução em inteiros positivos somente para $k=1$ e $(x,y)=(1,1)$ é a única solução da referida natureza.
2. Para $\alpha=0$, a equação posui solução se e somente se $k\in\{-3,3\}$. Teremos solução em inteiros positivos somente para $k=3$ e nesse caso, $(x,y)=(f_{2n},f_{2n+2})$ (termos de ordem par da sequência de Fibonacci).
3. Para $\alpha=1$, a equação posui solução se e somente se $k\in\{-3,1,5\}$. Haverá solução em inteiros positivos somente para $k=5$ e as soluções são dadas por $(x,y)=(x_n,x_{n+1})$, onde $x_{n+1}=5x_n-x_{n-1}-1$, com $x_o=x_1=1$.

4.0.6 O caso $|x_0|=|x_1|+1$ e $|x_2|=|x_0|$

Quando $|\alpha|\geq 2$, além das sequências (I),(II) e (III), também temos aquelas para as quais $|x_0|=|x_1|+1$ e nesse caso, $|x_2|\in\{|x_0|,|x_0|+1\}$. Consideremos inicialmente o caso $|x_2|=|x_0|$. Assim,

$$(|x_1|+1)^2=|x_0x_2|=|x_1^2+\alpha x_1+1|$$

$$\Rightarrow x_1^2+\alpha x_1+1=(|x_1|+1)^2 \text{ ou } x_1^2+\alpha x_1+1=-(|x_1|+1)^2.$$

Da primeira igualdade, obtemos $\alpha x_1 = 2|x_1|$. Daí $\alpha x_1 \geq 0$ e $|\alpha| = 2$. Desse modo, $x_0x_2 = x_1^2 + \alpha x_1 + 1 > 0$. De onde segue

$$x_2 = x_0 = |x_1| + 1 \text{ ou } x_2 = x_0 = -|x_1| - 1.$$

Caso tenhamos $x_0 = |x_1| + 1$, para $\alpha = 2$, temos

$$x_1x_{-1} = x_0^2 + 2x_0 + 1 = (x_0 + 1)^2 = (|x_1| + 2)^2,$$

segue que $x_1|4$. Logo, para $\alpha = 2$ temos $x_1 > 0$ e então $x_1 \in \{1, 2, 4\}$. Isso nos dá três sequências

$$(..., 9, 2, 1, 2, 9, ...)$$

$$(..., 8, 3, 2, 3, 8, ...)$$

$$(..., 9, 5, 4, 5, 9, ...).$$

Se tivermos $\alpha = 2$ e $x_2 = x_0 = -|x_1| - 1 = -x_1 - 1$, então segue que $x_3 = x_{-1} = x_1$. De um modo geral $x_{2k+1} = x_1$ e $x_{2k} = x_0$. De fato, temos $k = -2$ e então a sequência é dada pela recorrência

$$x_{j+1} = -2x_j - x_{j-1} - 2 \Rightarrow x_{j+1} + x_j = -(x_j + x_{j-1}) - 2.$$

Portanto, definindo $y_j = x_{j+1} + x_j$, segue que $y_j = -y_{j-1} - 2$, com $y_0 = -1$. Resolvendo essa recorrência obtemos

$$(-1)^j y_j = y_0 + 2\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1} = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ é impar} \\ -1, \text{ se } j \text{ é par} \end{cases}$$

Logo, $y_j = -1, \forall j$. Assim, $x_j = -x_{j-1} - 1$. Por fim, Resolvendo essa recorrência, chegamos a

$$(-1)^j x_j = x_0 + \sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1} = \begin{cases} x_0 + 1, \text{ se } j \text{ é impar} \\ x_0, \text{ se } j \text{ é par} \end{cases}$$

o que nos dá a sequência

$$(..., -x_1 - 1, x_1, -x_1 - 1, x_1, -x_1 - 1, ...).$$

Observe que para $\alpha = 2$ as sequências (II) e (III) são casos especiais da sequência obtida no exemplo 15. Além disso, a sequência (I) se reduz a $(..., 25, 4, 1, 1, 4, 25, ...)$. Essa $2-$cadeia é determinada pela recorrência

$$x_{j+1} = 7x_j - x_{j-1} - 2, \text{ com } x_0 = x_1 = 1.$$

Observação 4.0.3 Destacamos que os termos dessa $2-$cadeia são os quadrados dos termos da $0-$cadeia $(...,5,2,1,1,2,5,...), k=3$, estudada na seção 4.0.5. De fato, essa $0-$cadeia é dada pela recorrência $y_{j+1}=3y_j-y_{j-1}$, com $y_0=y_1=1$. Assim, supondo que $x_i=y_i^2$ para todo $i<j$, segue que

$$x_j=7x_{j-1}-x_{j-2}-2=7y_{j-1}^2-y_{j-2}^2-2.$$

Por outro lado,

$$y_j^2=9y_{j-1}^2-6y_{j-1}y_{j-2}+y_{j-2}^2=7y_{j-1}^2-y_{j-2}^2+2(y_{j-1}^2-3y_{j-1}y_{j-2}+y_{j-2}^2).$$

Por fim, como $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma $0-$cadeia com $k=3$, o corolário 4.0.1 nos diz que $y_{j-1}^2-3y_{j-1}y_{j-2}+y_{j-2}^2=-1$. Com isso, concluímos que $x_j=y_j^2$ para todo j.

A seguir, listamos todas as $2-$cadeias.

$$(...,25,4,1,1,4,25,...),\ k=7.$$

$$(...,9,2,1,2,9,...),\ k=6.$$

$$(...,8,3,2,3,8,...),\ k=4.$$

$$(...,9,5,4,5,9,...),\ k=3.$$

$$(0,-1,x,-(x+1)^2,x(x+2)^2\ldots),k=-x-2.$$

$$(...,-x-1,x,-x-1,x,-x-1,...),k=-2.$$

Pela Observação 4.0.2, as $\{-2\}-$cadeias são:

$$(...,-25,-4,-1,-1,-4,-25,...),k=7$$

$$(...,-9,-2,-1,-2,-9,...),\ k=6$$

$$(...,-8,-3,-2,-3,-8,...),\ k=4$$

$$(...,-9,-5,-4,-5,-9,...),\ k=3$$

$$(0,1,-x,(x+1)^2,-x(x+2)^2\dots),\ k=-x-2$$

$$(...,x+1,-x,x+1,-x,x+1,...),\ k=-2$$

com $x \in \mathbb{Z}$.

Consideremos agora a segunda igualdade $x_1^2+\alpha x_1+1=-(|x_1|+1)^2$. Nesse caso, $x_0x_2<0$ e como $|x_2|=|x_0|$, segue que $x_0+x_2=0$. Ademais,

$$2x_1^2+\alpha x_1+2|x_1|+2=0.$$

Portanto, $\alpha x_1<0$ e $x_1|2$. Daí, temos as seguintes situações

$$x_1=-1 \text{ e } \alpha=6; x_1=-2 \text{ e } \alpha=7; x_1=1 \text{ e } \alpha=-6; x_1=2 \text{ e } \alpha=-7.$$

Porém, destacamos que no presente caso, $\alpha x_1<0$, não existe cadeias tais que $x_1=-2,\alpha=7$ ou $x_1=2,\alpha=-7$. Nessas situações, teríamos $x_0x_2=-9$, com $|x_0|=|x_2|$ e $x_0x_2<0$. Daí, $k=\frac{x_0+x_2+\alpha}{x_1}=\frac{\alpha}{x_1}\notin\mathbb{Z}$.

Desse modo, as únicas $\alpha-$cadeias que satisfazem $\alpha x_1<0$, $|x_0|=|x_1|+1$ e $|x_2|=|x_0|$ são a $6-$cadeia

$$(...,-17,2,-1,-2,7,-46,...),k=-6.$$

e a $\{-6\}-$cadeia

$$(...,17,-2,1,2,-7,46,...),k=-6.$$

A análise acima nos permite concluir que a situação $|x_0|=|x_1|+1$ e $|x_2|=|x_0|$ ocorre somente para $|\alpha|\in\{2,6\}$.

Em particular, para $|\alpha|=3$ as únicas $\alpha-$cadeias são aquelas fornecidas pelas sequências (I), (II) e (III) das seção 4.0.5. Além disso, as sequências dadas (II) e (III) para $\alpha=3$ coincidem, pois as recorrências que definem essas sequências coincidem quando $\alpha=3$ e além disso o "bloco" (...1,-1,-1,1,...) aparece em ambas as sequências. Daí, como a recorrência é a mesma, tomar as condições iniciais como $-1,1$ ou como $-1,-1$ determina a mesma cadeia, já que diferem apenas por uma translação.

Desse modo, todas as $3-$cadeias são:

$$(...,41,5,1,1,5,41,...),k=9.$$

$$(...-5,1,-1,-1,1,-5,...), k=-3.$$

E todas as $\{-3\}-$cadeias são:

$$(...,-41,-5,-1,-1,-5,-41,...), k=9.$$

$$(...5,-1,1,1,-1,5,...), k=-3.$$

4.0.7 O caso $|x_0| = |x_1|+1$ *e* $|x_2| = |x_0|+1$

Como já vimos, nesse caso deve ocorrer $|\alpha| \geq 4$ e temos

$$|x_1^2+\alpha x_1+1| = |x_0x_2| = |x_1|^2+3|x_1|+2.$$

Isso nos dá duas equações, a primeira delas é

$$x_1^2+\alpha x_1+1 = |x_1|^2+3|x_1|+2 \Rightarrow \alpha x_1 - 3|x_1| = 1$$

$$\Rightarrow \alpha x_1 > 0; |x_1| = 1 \text{ e } |\alpha| = 4$$

$$\Rightarrow |x_0| = 2 \text{ e } |x_2| = 3.$$

Dai, se $\alpha = 4$, segue que $x_1 > 0$. Portanto, $x_0x_2 = x_1^2+4x_1+1 > 0$ Logo, teremos $x_0 = 2$ e $x_2 = 3$ ou $x_0 = -2$ e $x_2 = -3$, o que nos dá duas $4-$cadeias

$$(...,13,2,1,3,22,...),\ k=9.$$

$$(...,-3,-2,1,-3,-2,...),\ k=-1.$$

a segunda equação é:

$$x_1^2+\alpha x_1+1 = -|x_1|^2-3|x_1|-2 \Rightarrow 2x_1^2+\alpha x_1+3|x_1|+3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x_1 < 0 \text{ e } |x_1| = 1, |\alpha| = 8 \text{ ou } |x_1| = 3, |\alpha| = 10.$$

Isso nos dá as seguintes cadeias

$$(...,-11,2,1,-3,34,...),\ \alpha=-8 \text{ e } k=-9.$$

$$(...,21,-2,1,3,-14,...),\ \alpha=-8 \text{ e } k=-7.$$

$$(...,11,-2,-1,3,-34,...),\ \alpha=8 \text{ e } k=-9.$$

$$(...,-21,2,-1,-3,14,...),\ \alpha=8 \text{ e } k=-7.$$

$$(...,-19,4,-3,-5,8,...),\ \alpha=10 \text{ e } k=-3.$$

$$(...,19,-4,3,5,-8,...),\ \alpha=-10 \text{ e } k=-3.$$

Da análise feita, podemos listar todas as $4-$cadeias: temos cinco sequências, três delas são fornecidas pelas sequências (I), (II) e (III), obtidas na seção 4.0.5, especializando ao caso $\alpha=4$. As outras duas foram obtidas na presente seção

$$(...,13,2,1,3,22,...),\ k=9.$$

$$(...,-3,-2,1,-3,-2,...),\ k=-1.$$

$$(...,61,6,1,1,6,61...),\ k=11.$$

$$(...3,-2,-1,1,-6,13,...),\ k=-3.$$

$$(...-13,2,-1,-1,2,-13,...),\ k=-5.$$

As $\{-4\}-$cadeias são as opostas dessas, conforme a observação **??**.
Resumimos a discussão acima por meio da seguinte proposição.

Proposição 4.0.6 *Dada a equação diofantina* $x^2-kxy+y^2+\alpha x+\alpha y+1=0$, *vale que:*

1. Para $|\alpha|=4$, existe solução se, e somente se, $k\in\{-5,-3,-1,9,11\}$. Tal equação possui solução em inteiros positivos somente para $(\alpha,k)\in\{(4,9);(4,11),(-4,-5)\}$, sendo que para $(\alpha,k)=(-4,-5)$, tem-se que $(x,y)=(1,1)$ é a única solução da referida natureza.
2. Para $|\alpha|=3$, a equação posui solução se e somente se $k\in\{-3,9\}$. E teremos solução em inteiros positivos somente $(\alpha,k)\in\{(3,9),(-3,-3)\}$. Para $(\alpha,k)=(-3,-3)$, tem-se que $(x,y)=(1,1)$ é a única solução da referida natureza. Para $(\alpha,k)=(3,9)$, tem-se que x e y são termos consecutivos da sequência $x_{n+1}=9x_n-x_{n-1}-3$, com $x_0=x_1=1$.

3. Para $|\alpha| = 2$, a equação possui solução em inteiros positivos somente para $k = 5$ e as soluções são dadas por $(x,y) = (x_n, x_{n+1})$, onde $x_{n+1} = 5x_n - x_{n-1} - 1$, com $x_o = x_1 = 1$.

4.0.8 Estudo Qualitativo

Agora voltemos a considerar a recorrência

$$x_{n+1} - kx_n + x_{n-1} + \alpha = 0.$$

Como essa recorrência não é homogênea, faremos a mudança de variáveis $x_n = y_n + c$. Com isso, obtemos:

$$y_{n+1} + c - k(y_n + c) + y_{n-1} + c + \alpha = 0 \Rightarrow y_{n+1} - ky_n + y_{n-1} + (2-k)c + \alpha = 0.$$

Assim, para $k \neq 2$, tomando $c = \frac{\alpha}{k-2}$, teremos $y_{n+1} - ky_n + y_{n-1} = 0$.
Desse modo, sendo ζ e ζ^{-1} as raízes da equação $x^2 - kx + 1 = 0$, segue que para $k \neq -2$,

$$y_n = c_0\zeta^n + c_1\zeta^{-n} \Rightarrow x_n = c_0\zeta^n + c_1\zeta^{-n} + c \tag{4.4}$$

onde c_0, c_1 são contantes determinadas em função de x_0, x_1, α e k. Por outro lado, substituindo na equação $x_0x_2 = x_1^2 + \alpha x_1 + 1$ obtemos

$$y_1^2 = c_0^2\zeta^2 + c_1^2\zeta^{-2} + 2c_0c_1 = c_0^2k\zeta + c_1^2k\zeta^{-1} - (c_0 - c_1)^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = c_0(c_0k + 2c)\zeta + c_1(c_1k + 2c)\zeta^{-1} - (c_0 - c_1)^2 + c^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + \alpha x_1 + 1 = c_0(c_0k + 2c + \alpha)\zeta + c_1(c_1k + 2c + \alpha)\zeta^{-1} - (c_0 - c_1)^2 + c^2 + c\alpha + 1$$

$$= x_0x_2 = (c_0 + c_1 + c)(c_0\zeta^2 + c_1\zeta^{-2} + c) = (c_0 + c_1 + c)(c_0k\zeta + c_1k\zeta^{-1} + c - c_0 - c_1)$$

$$\Rightarrow c_0\{(c_0k + 2c + \alpha) - k(c_0 + c_1 + c)\}\zeta + c_1\{(c_1k + 2c + \alpha) - k(c_0 + c_1 + c)\}\zeta^{-1}$$

$$= (c + c_0 + c_1)(c - c_0 - c_1) - c^2 + (c_0 - c_1)^2 - c\alpha - 1$$

$$\Rightarrow -kc_0c_1(\zeta + \zeta^{-1}) = (c_0 - c_1)^2 - (c_0 + c_1)^2 - c\alpha - 1$$

$$\Rightarrow -k^2c_0c_1 = -4c_0c_1 - c\alpha - 1.$$

Concluímos que:

$$(k^2-4)c_0c_1 = c\alpha+1 = \tfrac{\alpha^2}{k-2}+1. \tag{4.5}$$

Isso mostra que o produto c_0c_1 depende apenas de α e k. Além disso, como $c_0+c_1 = x_0-c$ concluímos que para $|k| \neq 2$, as constantes c_0 e c_2 dependem apenas de α, k e x_0, pois são as raízes da equação

$$x^2-(x_0-c)x+\frac{c\alpha+1}{k^2-4} = 0.$$

Note que para $k=-2$, temos $\frac{\alpha^2}{-4}+1 = 0$, ou seja, $\alpha^2 = 4$. Logo, $|\alpha| = 2$ e nesse caso já conhecemos explicitamente todas as cadeias.

4.0.9 Estudo do sinal dos termos de uma $\alpha-$cadeia

Para estudar o sinal do termos de uma $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$, vamos começar listando alguns propriedades gerais. Para o que segue vamos supor $\alpha \geq 0$, pois como vimos as $\{-\alpha\}-$cadeias são as opostas das $\alpha-$cadeias. Além disso, como já conhecemos todas as $\alpha-$cadeia com $|\alpha| \leq 4$ vamos considerar $\alpha > 4$.

I. Se $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ possui dois termos consecutivos positivos, então todos os termos são positivos.
De fato, se x_{n-1} e x_n são positivos então x_{n+1} também o é, haja vista que $x_{n+1}x_{n-1} = x_n^2+\alpha x_n+1 > 0$.

II. Se $x_j < 0$, então $x_j < x_{j-1}$ ou $x_j < x_{j+1}$.
De fato, se $x_{j-1} \leq x_j < 0$ e $x_{j+1} \leq x_j < 0$, chegamos a um absurdo

$$x_{j-1}x_{j+1} \geq x_jx_{j+1} \geq x_j^2 > x_j^2+\alpha x_j+1 = x_{j-1}x_{j+1}.$$

III. Se $k \geq -2$ e $x_jx_{j-1} < 0$, então $0 < x_j < |x_{j-1}|$ ou $0 < x_{j-1} < |x_j|$.
De fato, pelo corolário 4.0.1 temos

$$0 = x_j^2+x_{j-1}^2-kx_jx_{j-1}+\alpha(x_j+x_{j-1})+1$$

$$\geq x_j^2+x_{j-1}^2+2x_jx_{j-1}+\alpha(x_j+x_{j-1})+1$$

$$= (x_j+x_{j-1})^2+\alpha(x_j+x_{j-1})+1$$

$$> \alpha(x_j + x_{j-1}) + 1 > x_j + x_{j-1} + 1.$$

$$\Rightarrow x_j < x_j + 1 < -x_{j-1} \text{ e } x_{j-1} < x_{j-1} + 1 < -x_j.$$

IV. Se $k \geq -2$, todo termo de valor absoluto mínimo em $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ é positivo.

De fato, pelo item 3, um termo negativo com um vizinho positivo não pode ter o menor valor absoluto. Do mesmo modo, pelo ítem 2, um termo negativo com os dois vizinhos negativos também não.

V. Para $k \leq -3$, então $c_0c_1 < 0$ e para $k \geq 3$, $c_0c_1 > 0$, onde c_0, c_1 são os coeficientes da solução, veja equação (4.4).

Como vimos em (4.5), $(k^2-4)c_0c_1 = \frac{\alpha^2}{k-2} + 1 = \frac{\alpha^2+k-2}{k-2}$. Para $k \leq -3$, temos $k-2 < 0$ e $k^2 - 4 > 0$. Além disso, para $\alpha \geq 4$, segue que

$$k - 2 + \alpha^2 \geq k - 2 + 4\alpha > k + 2\alpha + 3 \geq 0,$$

pois $|k| \leq 2\alpha + 3$. Ademais, para $k \geq 3$, claramente temos $c_0c_1 > 0$.

VI. Se $|k| \geq 3$, então $\zeta, \zeta^{-1} \in \mathbb{R}$. Para $k \geq 3$ teremos $\zeta > 2$ e para $k \leq -3$, $-1 < \zeta^{-1} < 0$.

Como discriminante da equação $x^2 - kx + 1 = 0$ é $k^2 - 4$, para $|k| \geq 3$ teremos $k^2 - 4 > 0$ e daí as raizes são reais e distintas. Como o produto das raízes é igual a 1, elas têm o mesmo sinal e apenas uma delas tem módulo maior que 1, podemos supor que seja $|\zeta| > 1$ e consequentemente $|\zeta^{-1}| < 1$. Por fim, como a soma das raízes é k, isto é, $\zeta + \zeta^{-1} = k$, segue que para $k \geq 3$ vale $\zeta + \zeta^{-1} \geq 3$. Logo $\zeta > 0$ e de fato temos $\zeta > 2$. Para $k \leq -3$ claramete teremos $-1 < \zeta^{-1} < 0$.

VII. Se $k \geq 3$ e existe termo negativo então $c_0 < 0$ e $c_1 < 0$.

Pela propriedade (V) $c_0c_1 > 0$ e se tivessemos $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$, então pela propriedade (VI) seguiria $x_n > 0$ para todo n, já que $c = \frac{\alpha}{k-2} > 0$.

Com essas propriedades podemos analisar o sinal dos termos das $\alpha-$cadeias, com $|\alpha| \geq 4$. Como já observamos, as $\{-\alpha\}-$cadeias são as opostas das $\alpha-$cadeias, basta considerarmos o caso $\alpha \geq 4$.

Pela propriedade (I), se tivermos dois termos consecutivos positivos, então todos serão positivos. Caso contrário, teremos $x_n < 0$ para valores de n arbitrariamente grandes.

Para $k \geq 3$, a propriedade (IV) assegura que existe termo positivo, que podemos supor que seja x_1. Daí, se existir termo negativo, então x_0 e x_2 devem ser negativos. Assim, como $x_n = c_0\zeta^n + c_1\zeta^{-n} + c$, com $c_0 < 0$ e $c_1 < 0$, segue que $x_n < 0, \forall n \neq 1$.

Para $k \leq -3$, por (V) temos $c_0c_1 < 0$. Assim, a menos de uma translação podemos supor $c_0 > 0$ e $c_1 < 0$. Nesse caso, temos

$$x_{2n+2} - x_{2n} = c_0\zeta^{2n}(\zeta^2 - 1) + c_1\zeta^{-2n}(\zeta^{-2} - 1) > 0$$

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = c_0\zeta^{2n-1}(\zeta^2 - 1) + c_1\zeta^{-2n+1}(\zeta^{-2} - 1) < 0.$$

Além disso, para n suficientemente grande temos x_{2n} e x_{-2n-1} positivos e x_{2n+1} e x_{-2n} negativos. Portanto, não temos termos consecutivos positivos e temos exatamente um par de termos consecutivos negativos.

4.0.10 O caso $k = 2$.

Consideremos agora o caso $k = 2$. Bem, nesse caso, o corolário 4.0.2 nos diz que x, y satisfazem o sistema (4.1) se e somente se

$$(x-y)^2 + \alpha(x-y) + 2\alpha y + 1 = 0$$

ou ainda,

$$[2(x-y) + \alpha]^2 + 8\alpha y = \alpha^2 - 4.$$

Portanto, para que exista solução é necessário que $\alpha^2 - 4$ seja resíduo quadrático módulo 8α. Em particular, $\alpha^2 - 4$ deve ser resíduo quadrático módulo 8. Como os únicos resíduos quadráticos módulo 8 são $0, 1$ e 4 concluímos que $\alpha^2 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 8)$ ou $\alpha^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$, pois a congruência $\alpha^2 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 8)$ não possui solução. Em todo caso, segue que α é par e $(\frac{\alpha}{2})^2 - 1$ deve ser resíduo quadrático módulo 2α. Veremos que tal condição também é suficiente.

De fato, deve existir $t \in \mathbb{Z}$ tal que $2\alpha y + 1 = t(x-y)$ e consequentemente teremos $x - y = 0$ ou $x - y = -\alpha - t$. No primeiro caso teríamos $2\alpha y + 1 = 0$, o que é impossível.

No segundo caso, (x, y) é solução do sistema

$$\begin{cases} tx - (t+2\alpha)y &= 1 \\ x - y &= -\alpha - t \end{cases}$$

Isso nos dá $2\alpha y = -(t^2 + \alpha t + 1)$ e completando quadrados chagamos a congruência $(t + \frac{\alpha}{2})^2 \equiv (\frac{\alpha}{2})^2 - 1 (\mathrm{mod}\ 2\alpha)$. Daí, para cada $\delta \in \mathbb{Z}$ tal que $\delta^2 \equiv (\frac{\alpha}{2})^2 - 1 (\mathrm{mod}\ 2\alpha)$, podemos tomar $t \equiv \delta - \frac{\alpha}{2} (\mathrm{mod}\ 2\alpha)$. Logo, para cada escolha de δ e t satisfazendo a condição acima, temos que 2α divide $t^2 + \alpha t + 1$ e portanto temos uma solução inteira $(x, y) = (y - \alpha - t, y)$, onde $y = -\frac{t^2 + \alpha t + 1}{2\alpha}$. Com isso, caracterizamos todas as $\alpha-$cadeias para as quais temos $k = 2$.

Proposição 4.0.7 *Existe $\alpha-$cadeia $(x_j)_{j\in\mathscr{I}}$ tal que $k=2$ se e somente se α é par e $(\frac{\alpha}{2})^2-1$ é resíduo quadrático módulo 2α. Além disso, em caso afirmativo, podemos tomar $t\in\mathbb{Z}$ tal que $(t+\frac{\alpha}{2})^2\equiv(\frac{\alpha}{2})^2-1(mod\,2\alpha)$ e a sequência é dada por*

$$(\ldots,-\frac{t^2+5\alpha t+1}{2\alpha}-3\alpha,-\frac{t^2+3\alpha t+1}{2\alpha}-\alpha,-\frac{t^2+\alpha t+1}{2\alpha},-\frac{t^2-\alpha t+1}{2\alpha},\ldots).$$

Observação 4.4 Em Particular, temos que -1 é residuo quadrático módulo todo fator primo impar de α. Isso nos diz que necessariamente todo fator primo impar p de α devem ser tal que $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$.

5 UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS CÚBICAS

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos no artigo (Mohanty, 1977). Especificamente, resolveremos a equação $x^3+y+1-xyz=0$ e estudaremos um par de equações diofantinas cúbicas simultâneas definidas pelas condições.

$$x|\ y^3\ +1 \quad \text{e} \quad y|\ x^3\ +1$$

onde x e y são inteiros positivos. Como resultado principal veremos que existe um número infinito de sequências tais que x e y satisfazem o sistema acima se, e somente se, forem termos consecutivos de uma dessas sequências. Também encontraremos todas as soluções inteiras para a equação $x^3\ +\ y\ +1-xyz\ =\ 0$ e provaremos que a equação $x^3\ +y^2-\ y+\ 1-\ xyz\ =\ 0$ tem um número infinito de soluções em inteiros positivos. Finalmente mostraremos a existência de um número infinito de sequências tais que x,y satisfaz $x|y^3\ +1$ e $y|x^3\ +1$ se e somente se são termos consecutivos de uma dessas sequências.

Inicialmente destacamos que se x e y satisfazem as condições acima, então $\text{mdc}(x,y)=1$. De fato, se d $=mdc(x,y)$. Então $d|x$ e como $x|y^3+1$ segue que $d|y^3+1$. Daí como $d|y$, é claro que $d\ |y^3$, logo $d\ |(y^3+1)-y^3$ e portanto $d\ |1$. Assim $d=1$. Agora note que, como $x|y^3+1$ e $x|x^3$, segue que $x\ |x^3+y^3+1$. Do mesmo modo, como $y|y^3$ e $y|x^3+1$ deduzimos que $y|x^3+y^3+1$. Daí, sendo x e y relativamente primos, obtemos que $xy|x^3+y^3+1$. Assim, existe $z\in Z$ tal que $x^3+y^3+1=xyz$, ou ainda,

$$x^3+y^3-xyz+1=0.$$

Em outras palavras, se x e y satisfazem $x\ |y^3\ +1$ e $y\ |\ x^3\ +1$ então o par (x,y) é solução da equação Diofantina

$$x^3+y^3-zxy+1=0,$$

para algum $z\in Z$.

Reciprocamente, se (x,y) é solução inteira positiva dessa equação diofantina então claramente temos que $x|y^3\ +1$ e $y|x^3\ +1$

A exemplo do que fizemos no capítulo anterior, começamos destacamos o tipo de sequências que aparecem naturalmente no estudo desses problemas.

Definição 5.0.1 *Uma sequência de inteiros positivos $\{x_i\}$ com pelo menos três termos $x_1,x_2,x_3,\ldots$*

tal que quaisquer três termos consecutivos satisfaz a relação

$$x_{n-1} \cdot x_{n+1} = {x_n}^3 + 1$$

é chamada de cadeia cúbica.

Como antes, vamos considerar duas cadeias $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ iguais se e somente se existe um h tal que $u_n = v_{h+n}$ para todo n ou $u_n = v_{h-n}$ para todo n.
O seguinte teorema relaciona os termos de uma cadeia cúbica com o par (x,y) tais que $x|y^3 + 1$ e $y|x^3 + 1$

Teorema 5.0.1 *Dois inteiros positivos x e y satisfazem as condições* $x\ |y^3 + 1 \quad e \quad y \mid x^3 + 1$ *se e somente se forem termos consecutivos de uma cadeia cúbica. Além disso, quaisquer dois termos consecutivos de uma cadeia cúbica a determinam completamente.*

De fato, sejam x e y dois inteiros positivos satisfazendo

$$x \mid y^3 + 1 \quad \text{e} \quad y \mid x^3 + 1 \tag{5.1}$$

Então existe um inteiro positivo r tal que $xr = y^3 + 1$. Tomando congruência módulo y , temos que $xr \equiv 1(mod y)$, elevando ambos os membros ao cubo e adiconando x^3, temos que $x^3(r^3+1) \equiv x^3+1 \equiv 0(mod y)$. Além disso, mdc$(x,y) = 1$. implica que $r^3+1 \equiv 0(mod y)$. Assim, temos

$$y \mid r^3 + 1 \quad e \quad r \mid y^3 + 1. \tag{5.2}$$

Repetindo o processo temos que $r^3+1 = yw$, para algum w inteiro positivo. Logo $yw \equiv 1(mod r)$, e portanto,

$$y^3(w^3+1) \equiv 1 + y^3(mod r) \equiv 0(mod r).$$

Como $r \mid y^3 + 1$, temos que $r \mid w^3 + 1$, pois $(y,r) = 1$.
Desse modo, temos uma nova solução (w,r)

$$w \mid r^3 + 1 \text{ e } \ r| \ w^3 + 1.$$

Continuando assim, obtemos uma sequência..., $x,\ y,\ r,\ w$ ... , em ambas as direções, tal que quaisquer dois termos consecutivos x_n, x_{n+1} desta sequência satisfaça $x_n \mid x_{n+1}^3\ +1$ e $\ x_{n+1} \mid x_n^3\ +1$ e quaisquer três termos consecutivos x_{n-1}, x_n, x_{n+1} satisfaz $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = {x_n}^3 + 1$. Portanto, x e y são termos consecutivos de uma cadeia cúbica. Reciprocamente, se x e y são termos consecutivos de uma cadeia cúbica $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, então $x = x_n$ e $y = x_{n+1}$, para algum n. Daí, como $x_{i-1} \cdot x_{n+1} = x_i^3 + 1$, fazendo $i = n$ segue que $y|x^3 + 1$. E fazendo, $i = n+1$ vemos que $x|y^3 + 1$. Da discussão acima também fica claro que quaisquer dois termos consecutivos de uma cadeia cúbica a determinam completamente.

A seguir detacamos alguns fatos sobre a cadeia cúbica

a) Se em uma $1-$cadeia ocorrer $x_i = x_{i+1}$ para algum $i \in Z$, então temos

$$(x_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\ldots, 9, 2, 1, 1, 2, 9\ldots).$$

De fato, como $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = {x_n}^3 + 1$ para todo n, fazendo $n = i$, obtemos:
$x_{i-1} \cdot x_{i+1} = {x_i}^3 + 1$, mas como $x_i = x_{i+1}$, segue que

$$x_{i-1} \cdot x_i = {x_i}^3 + 1.$$

Logo, $x_i|\ {x_i}^3 + 1$ e então $\ x_i|1$. Portanto, $x_i = 1 = x_{i+1}$ e $x_{i-1} = 2$. Como uma cadeia cúbica fica completamente determinada por dois de seus termos, vemos que só existe uma cadeia cúbica com dois termos consecutivos iguais entre si. Além disso, a menos de uma translação de índices podemos supor que $i = 0$. Logo, $x_0 = x_1 = 1$. e $x_{-1} = 2$.
Substituindo na equação, com $n = 1$, temos $x_0 \cdot x_2 = {x_1}^3 + 1 = 2$, concluímos que $x_2 = 2$. De modo análogo, fazendo $n = 2$, concluímos que $x_3 = 9$. e para $n = -1$, deduzimos que $x_{-2} = 9$.

b) Se em uma cadeia cúbica ocorrer $x_i = x_{i+2}$ para algum i, então

$$x_i \cdot x_{i+2} = x_{i+1}^3 + 1$$

implica que $x_i^2 = x_{i+1}^3 + 1$. Desde que $y^2 = x^3 + 1$ tem apenas a solução x = 2 e y = 3 em inteiros positivos, temos $x_i = 3$ e $x_{i+1} = 2$. Ademais, a menos de translação, podemos supor $i = 0$ e com isso obtemos a cadeia cúbica $(\cdots, 915, 14, 3, 2, 3, 14, 915, \cdots)$.

c) De a) e b) fica claro que $x^3 + y^3 + 1 - xyz = 0$ tem um número infinito de soluções em inteiros positivos.

De fato, cada par de termos consecutivos de uma cadeia cúbica cadeia cúbica satisfaz as condições $x\ |y^3+1$ e $y\ |x^3+1$ e por sua vez corresponde a uma solução de $x^3+y^3+1-xyz=0$. Como a quantidade de termos consecutivos distintos nas cadeia cúbica dos ítens a) e b) é infinita, temos uma quantidade infinita de soluções (x,y,z) para a equação $x^3+y^3+1-xyz=0$.

d) Se em uma $1-$cadeia $x_i < x_{i+1}$, então de $x_i \cdot x_{i+2} = \ x_{i+1}^3+1$ temos $x_{i+1} < x_{i+2}$. Do mesmo modo, se $x_i > x_{i+1}$ então de $x_{i-1} \cdot x_{i+1} = x_i^3+1$ deduzimos $x_{i-1} > x_i$.
Como todos os termos de uma cadeia cúbica são inteiros positivos, existe elemento mínimo em uma cadeia cúbica e a menos de uma translação de índices, podemos supor que seja x_0.
Se $x_0 \neq 1$ a cadeia cúbica

$$\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

tem a propriedade $\dots, x_{-3} > x_{-2} > x_{-1} > x_0$ e $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \dots$.
De fato, sendo $x_{i+1} \geq x_i$ podemos multiplicar ambos os membros por x_{i+2} e obter

$$x_{i+1} \geq x_i \Rightarrow x_{i+1}.x_{i+2} \geq x_i.x_{i+2} = x_{i+1}^3+1 > x_{i+1}^3$$

$$\Rightarrow x_{i+2} > x_{i+1}^2 \geq x_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} < x_{i+2}.$$

Daí,

$$x_{i-1} \leq x_i \Rightarrow x_i < x_{i+1}.$$

Portanto,

$$x_{i+1} \leq x_i \Rightarrow x_i < x_{i-1}.$$

Em particular, concluímos que

$$x_{i+1} < x_i \Rightarrow x_i < x_{i-1}.$$

Teorema 5.0.2 *As soluções da equação Diofantina $x^3+y+1-xyz=0$ em inteiros positivos são dadas por*

$$(x,y,z) = (3,14,1),(2,9,1),(2,3,2),(5,14,2),(1,2,2),(1,1,3),(5,9,3),(3,2,5)\ e\ (2,1,5).$$

Prova: De $x^3+y+1-xyz=0$, onde x, y e z são inteiros positivos,temos que

$$x|\ y+1 \ \ e \ \ y|\ x^3\ +1.$$

Então $xy|\ (y+1)(x^3+1)$ de onde $xy|\ x^3+y+1$. Portanto, existe um inteiro positivo z tal que $x^3+y+1-xyz=0$. Resolver essa equação é o mesmo que resolver $x|\ y+1$ e $y|\ x^3+1$, pois são equivalentes. Suponha que

$$x|\ y\ +\ 1 \text{ e } y|\ x^3\ +1,$$

então temos dois inteiros positivos r e s tais que

$$\begin{aligned} xr &= y+1 \\ sy &= x^3+1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

De (5.3) segue

$$s(rx-1) = x^3+1. \tag{5.4}$$

Podemos escrever (5.4) na forma $x(sr-x^2) = s+1$, e substituindo $sr-x^2 = n$, temos $s = xn-1$. Então

$$x^2 = sr-n = r(xn-1)-n = rxn-(n+r). \tag{5.5}$$

De (5.5) implica que $rn > x$, pois $rn = x+\frac{(n+r)}{x}$. Daí podemos supor que $rn = x+k$, onde k é um inteiro postivo. Ao colocar $rn = x+k$ em (5.5), temos $xk = r+n$. Somando as equações $rn =\ x+k$ e $xk = r+n$, e adicionando 2 unidades em ambos os membros, segue que

$$(n-1)(r-1)+(x-1)(k-1) = 2, \tag{5.6}$$

onde cada fator é um número inteiro não negativo. Então, temos as três possibilidades

$$(n-1)(r-1) = 0, \quad (x-1)(k-1) = 2 \tag{5.7}$$

$$(n-1)(r-1)=2, \quad (x-1)(k-1)=0 \tag{5.8}$$

$$(n-1)(r-1)=1, \quad (x-1)(k-1)=1 \tag{5.9}$$

De (5.7) podemos ver que $x+k=5$. Então $r=1$, $n=5$ ou $r=5$, $n=1$.
Então $x=2$ *ou* 3. y sendo $rx-1$, obtemos as soluções

$$(x,y)=(2,1),(2,9),(3,2) \text{ e } (3,14).$$

Por um argumento similar, de (5.8) obtemos

$$(x,y)=(1,1),(1,2),(5,9) \text{ e } (5,14).$$

Apenas uma solução $(x,y)=(2,3)$ pode ser obtida por (5.9). Portanto, temos a seguir todas as soluções

$$(x,y)=(3,2),(3,14),(2,1),(2,9),(1,1),(1,2),(5,9),(5,14) \text{e } (2,3).$$

Então $z=\frac{x^3+y+1}{xy}$ produzindo 5,1,5,1,3,2,3,2 e 2, uma sequência de valores de z para os respectivos valores de (x,y) acima. Assim, temos o teorema. Notamos que a equação $x^3 + y + 1 - xyz = 0$, tem um número infinito de soluções inteiras. Seguindo a linha de prova acima, podemos mostrar que

$$(x,y,z)=(0,-1,z),(-1,0,z),(x,-(x^3+1),0),$$

$$(x,-1,-x^2),(-1,y,-1),(x,-(x^2-x+1),-1),(x,\ -(x+1),1-\ x),(-r^2,\ r^3-1,\ r).$$

Os seguintes resultados podem ser facilmente comprovados.

e) Se (x,y,z) é a solução de $x^3 + y + 1 - xyz = 0$ então $(x, \frac{x^3+1}{y}, \frac{y+1}{x})$ também é solução.
De fato, substituindo na equação, obtemos:

$$x^3+\frac{x^3+1}{y}+1-x\cdot\frac{(x^3+1)}{y}\cdot\frac{(y+1)}{x}=x^3y+x^3+1+y-(x^3+1)\cdot(y+1)=0.$$

f) Se em uma cadeia cúbica u,s,t são três termos consecutivos, então

$$s|\ u+1 \text{ se e somente se } s|\ t+1.$$

Por hipótese, $u\cdot t = s^3+1$. Daí sendo q e r o quociente e o resto da divisão de $u+1$ por s, temos $u = sq+r-1$. Portanto,

$$s^3+1 = ut = sqt+rt-t \Rightarrow s(s^2-qt)+t+1 = rt.$$

Assim, como s e t são relativamente primos e $0 \leq r < s$, temos

$$s|t+1 \Leftrightarrow s|rt \Leftrightarrow s|r \Leftrightarrow r=0 \Leftrightarrow s|u+1.$$

No caso afirmativo, ou u ou s ou t é o menor elemento da cadeia cúbica.

Com efeito, suponha que s não é o menor termo. Assim, sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a cadeia cúbica em questão, segue que $s = x_i$, com $i \neq 0$, já que podemos supor que x_0 é o menor termo. Se $i < 0$, pelo item "d)" segue que $t = x_{i+1} < s < x_{i-1} = u$. Como $s|t+1$, deduzimos que $s = t+1$, de onde vem, por substituição na equação, que $t|2$ e então chegamos a $t=1, s=2, u=9$ ou $t=2, s=3, u=14$. Em qualquer dos casos, t é o menor termo da $1-$cadeia.

O caso $i > 0$ é análogo, teremos $u < s < t$, com $s = u+1$ e $u|2$ e vemos que u é o menor termo.

g) Se $x|\ y+1$ e $y|\ x^3+1$ então $x|\ y^3+1$ e $y|\ x^3+1$. Daí, toda solução de $x|\ y+1$ e $y|\ x^3+1$ produz uma cadeia cúbica. Agora note-se que os pares $(2,3),(3,2)$ e $(3,14)$ produzem a mesma cadeia cúbica

$$(\cdots, 14, 3, 2, 3, 14, \cdots).$$

Do mesmo modo, os pares $(2,9),(1,1),(1,2)$ e $(2,1)$ produzem a mesma cadeia cúbica dada por

$$(\cdots, 9, 2, 1, 1, 2, 9, \cdots).$$

Essas duas cadeias cúbicas foram obtidas anteriormente, considerando $u_i = u_{i+2}$ e $u_i = u_{i+1}$ respectivamente.

Por outro lado, a partir dos pares $(5,9)$ e $(5,14)$ obtemos uma nova cadeia cúbica

$$(\cdots, 146, 9, 5, 14, 549, \cdots).$$

Teorema 5.0.3 *Sejam u, s, e t três termos consecutivos de uma cadeia cúbica. Então*

1. $s|u^2-u+1$ *se e somente se* $s|t^2-t+1$.

2. $s|u+t-1$ *se e somente se* $s|u^2-u+1$.

Prova: Se u,s e t são três termos consecutivos de uma cadeia cúbica, temos $ut=s^3+1$. Consequentemente $ut \equiv 1(mods)$. Daí,

$$u^2(t^2-t+1) \equiv 1-u+u^2(mods).$$

Portanto, como u e s são relativamente primos,

$$s|u^2-u+1 \Leftrightarrow s|t^2-t+1.$$

Isso prova a primeira parte.
Para a segunta parte, note que se $s|u^2-u+1$ então $s|t(u^2-u+1)$. Por outro lado,

$$t(u^2\ -u\ +1)=ut.(u-1)+t=(s^3+1)(u-1)+t=s^3(u-1)+u+t-1.$$

Assim,

$$t(u^2-u+1) \equiv u+t-1(mod\, s).$$

Consequentemente, como t e s são relativamente primos, segue que

$$s|u+t-1 \Leftrightarrow s|u^2-u+1.$$

Isso prova a segunda parte.

Corolário 5.0.1 (x,y,z) *é a solução de* $x^3+y^2-y+1-xyz=0$ *se e somente se* $(x,\frac{x^3+1}{y},z)$ *é uma solução.*

Prova: Veja que se (x,y,z) é uma solução dessa equação, então $x|y^2-y+1$ e $y|x^3+1$. Daí, $x|y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)$. Portanto, $\frac{x^3+1}{y},x,y$ são temos consecutivos de uma cadeia cúbica. Daí, como $x|y^2-y+1$, segue que $x|(\frac{x^3+1}{y})^2-\frac{x^3+1}{y}+1$ o que garante que $x|x^3+y^2-y$.

Teorema 5.0.4 *Sejam u,s,t três termos consecutivos de uma cadeia cúbica. Então* $s \neq 1$ *é o menor membro da 1-cadeia se e somente* $s<t$ *e* $s^2>t$. *(Como uma cadeia cúbica é reversível, a mesma conclusão vale com u no lugar de t).*

Prova: Suponha que s seja o menor membro de uma cadeia cúbica, então $s < t$ e $s < u$. Daí, se tivermos $s^2 \leq t$ seguirá que

$$st < ut = s^3 + 1 = s.s^2 + 1 \leq st + 1,$$

Assim, como st e $st + 1$ são inteiros consecutivo e ut também é inteiro, devemos ter $ut = st + 1$, isso implicaria $t = s = 1$ e $u = 2$, que contradiz a condição $s \neq 1$

Recíprocamente, suponha $s < t$ e $s^2 > t$. Então

$$ut = s^3 + 1 > st + 1 > st.$$

Logo, $s < u$. Portanto, pelo item "d)"segue que s é o menor termo da cadeia cúbica.

Teorema 5.0.5 *A equação Diofantina* $x^3 + y^2 - y + 1 - xyz = 0; x > 0, y > 0$ *tem um número infinito de soluções inteiras.*

Prova: Inicialmente observe que se (x,y,z) é uma solução dessa equação, então $x|y^2 - y + 1$ e $y|x^3 + 1$. Em particular, segue que mdc$(x,y) = 1$. Reciprocamente, se x e y são inteiros tais que $x|y^2 - y + 1$ e $y|x^3 + 1$, então $xy|x^3 + y^2 - y + 1$. Portanto, existe z, inteiro, tal que (x,y,z) é solução da equação. Também destacamos que $(x,y,z) = (1,1,2)$ é uma solução.
Por outro lado, se (x_1, y_1, z_1) é uma solução então (x_2, y_2, z_2), com

$$x_2 = \frac{y_1^2 - y_1 + 1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{x_2^3 + 1}{y_1} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{x_2^3 + y_2^2 - y_2 + 1}{x_2 y_2},$$

também é uma solução, claramente diferente de (x_1, y_1).
De fato, como $x_1|y_1^2 - y_1 + 1$ temos que $x_2 = \frac{y_1^2 - y_1 + 1}{x_1}$ é um inteiro. Além disso, de $x_2\, x_1 \equiv 1 \,(\text{mod } y_1)$ obtemos

$$x_1^3(x_2^3 + 1) \equiv x_1^3 + 1 \equiv 0 \,(\text{mod } y_1).$$

Portanto, $y_1|x_2^3 + 1$ e daí $y_2 = \frac{x_2^3 + 1}{y_1}$ é um número inteiro tal que $y_2|x_2^3 + 1$.
Analogamente, de $y_1 y_2 \equiv 1 \,(\text{mod } x_2)$ deduzimos que

$$y_1^2(\, y_2^2 - y_2 + 1) \equiv 1 - y_1 + y_1^2 \equiv 0 \,(\text{mod } x_2).$$

Logo, $x_2|y_2^2 - y_2 + 1$. Consequentemente $x_2 y_2|x_2^3 + y_2^2 - y_2 + 1$ e assim, (x_2, y_2, z_2) é a solução inteira da nossa equação.

Agora, a partir de (x_2, y_2, z_2) produzimos uma nova solução (x_3, y_3, z_3). Repetindo esse processo geramos infinitas soluções para a equação.

Corolário 5.0.2 *Se (x_1, y_1, z_1) é uma solução da equação $x^3 + y^2 - y + 1 - xyz = 0$; $x > 0$, $y > 0$, então (x_0, y_0) é também uma solução, onde $x_0 = \frac{y_0^2 - y_0 + 1}{x_1}$ e $y_0 = \frac{x_1^3 + 1}{y_1}$.*

Prova: De fato, argumentando como na demonstração do teorema acima concluímos que (x_0, y_0, z_0), com

$$x_0 = \frac{y_0^2 - y_0 + 1}{x_1}, \quad y_0 = \frac{x_1^3 + 1}{y_1} \text{ e } z_0 = \frac{x_0^3 + y_0^2 - y_0 + 1}{x_0 y_0},$$

é uma solução da equação.

Exemplo: Tomamos $(1,1,2)$ como solução de $x^3 + y^2 - y + 1 - xyz = 0$. Usando o teorema 5.0.5, a partir da solução $(1,1,2)$, obtemos $(1,2,2)$. Por outro lado, pelo corolário 5.2, a partir de $(1,1,2)$ obtemos $(3,2,5)$. Aplicações repetidas do teorema 5.0.5 e seu corolário produz:

$$\cdots \leftarrow (61,14,266) \leftarrow (3,2,5) \leftarrow (1,1,2) \rightarrow (1,2,2) \rightarrow (3,14,5) \rightarrow (61,16213,266) \rightarrow \cdots$$

Teorema 5.0.6 *Se u, s, t são três termos consecutivos de uma 1-cadeia e $s|t^2 - t + 1$ então ou u ou s ou t é o menor elemento da cadeia cúbica.*

Prova: Se $s|t^2 - t + 1$, pelo teorema 5.0.3, temos que $s|u^2 - u + 1$. Daí, segue que $t^2 \geq s$ e $u^2 \geq s$. Por outro lado, se tivermos $t^2 = s$ ou $u^2 = s$ podemos concluir que $t|1$ ou $u|1$, respectivamente. Assim teremos $t = s = 1$ ou $u = s = 1$ e em qualquer dos casos, temos que $s = 1$ é termo mínimo da cadeia cúbica e o teorema é verdadeiro. Daí, se tivermos $s \neq 1$ então $t^2 > s$ e $u^2 > s$. Desse modo, se $t < s$ então, pelo teorema 5.0.4, t é o menor termo. Analogamente se $u < s$ então u é o menor termo. Por fim, se t e u forem maiores que s, então pelo íten "d)", s é o menor termo da cadeia cúbica.

Teorema 5.0.7 *Existe um número infinito de cadeias cúbicas.*

Prova: Pelo teorema 5.0.5 a equação $x^3 + y^2 - y + 1 - zxy = 0$ possui infinitas soluções inteiras (x, y, z). Além disso, o número $z = \frac{x^3 + y^2 - y + 1}{xy}$ é unicamente determinado pelo par (x, y). Desse modo, a existência de infinitas soluções garante a existência de infinitos pares (x, y) tais que $x|y^2 - y + 1$ e $y|x^3 + 1$. Ora, para cada tal par (x, y), claramente vale que $x|y^3 + 1$ e $y|x^3 + 1$. Portanto, pelo teorema 5.0.1, x e y deteminam uma única cadeia cúbica, da qual são termos consecutivos. Por outro lado, fazendo $s = x$, $t = y$ e $u = \frac{x^3 + 1}{y}$, segue que u, s, t são termos consecutivos da cadeia cúbica e pelo teorema 5.0.6, vemos que um desses três números é o termo mínimo da sequência. Isso nos diz que cada terna (u,s,t) tal que $s|t^2 - t + 1$ e $ut = s^3 + 1$ dá origem a uma cadeia cúbica. Além disso, ternas distintas correspondem a cadeias distintas. Visto que, pelo teorema 5.0.5, há um número infinito de tais ternas, temos um número infinito de cadeias cúbicas.

6 CONCLUSÃO

A busca por soluções inteiras para sistemas de equações diofantinas não lineares é um desafio significativo na Teoria dos Números. Devido à sua não linearidade, até o momento, não foram desenvolvidas técnicas abrangentes que permitam resolver esses sistemas de forma completa.

As técnicas utilizadas neste estudo continuam a ser valiosas ferramentas de pesquisa, como demonstrado no artigo intitulado "A family of cubic diophantine equations and $4-$chains"de (Ge, 2017) também inspirado no artigo de (Mohanty, 1977) e (Mills, 1953). Este artigo introduz a ideia de $n-$cadeias, onde n é um inteiro positivo. Se um par (u_{i-1}, u_i) possui uma certa propriedade, então os pares (u_{n+i-1}, u_{n+i}) e (u_{-n+i-1}, u_{-n+i}) também possuem a mesma propriedade. Nesse contexto as sequências, (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}), $(u_{n+i-1}, u_{n+i}, u_{n+i+1})$ e $(u_{-n+i-1}, u_{-n+i}, u_{-n+i+1})$ são referidas como trincas correspondentes.

Neste trabalho, exploramos um método de resolução para sistemas de equações diofantinas não lineares. Em particular, tratamos de um par de equações diofantinas quadráticas e um par de equações diofantinas cúbicas usando o método de resolução por recorrência. Embora os métodos para encontrar tais soluções sejam semelhantes, a principal diferença ocorre no caso das equações diofantinas quadráticas, onde o número de sequências que satisfazem a equação é finito para $\alpha \notin \{-2, 2\}$. No caso das cúbicas, encontramos que esse número é infinito. Além disso, reconhecemos a importância da aplicação dos conceitos de divisibilidade e recorrências, que desempenharam um papel fundamental na consecução de nosso objetivo.

Esperamos que este estudo contribua significativamente para professores de Matemática e estudantes que desejam aprofundar seus conhecimentos em sistemas de equações diofantinas não lineares. Acreditamos que nossa pesquisa possa também promover a divulgação científica na área da Teoria dos Números.

REFERÊNCIAS

BENEVIDES, F. S. **Recorrências**: parte 1. Revisor: Antonio Caminha M. Neto. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. Disponível em: https: //cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/89ypthqd7aosg.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.

BENEVIDES, F. S. **Recorrência**: parte 2. Revisor: Antonio Caminha M. Neto. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. Disponível em: https: //cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/647s36qnyv40k.pdf. Acesso em: 8 fev. 2023.

BENEVIDES, F. S. **Recorrência**: parte 3. Revisor: Antonio Caminha M. Neto. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/dfq4if99zy0ws.pdf. Acesso em: 20 mar. 2023.

BÍBLIA. N. T. Romanos. *In*: BÍBLIA. Português. **A bíblia sagrada**: antigo e novo testamento. Tradução de João Ferreira de Almeida. São Paulo: Sociedade Bíblica do Brasil, 1969. p. 986.

CAMINHA, A. **Tópicos de matemática elementar**: teoria dos números. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 5.

GE, K. A family of cubic diophantine equations and 4-chains. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2017. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1710.01130. Acesso em: 5 mai. 2023

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

MILLS, W. H. A system of quadratic diophantine equations. **Pacific J. Math**., United States, v. 3, p. 209-220, 1953.

MOHANTY, S. A system of cubic diophantine equations. **Journal of Number Theory**, United States, v. 9, n. 2, p. 153–159, 1977.

MORDELL, L. The congruence ax3 +by3 +c≡ 0 (mod xy), and integer solutions of cubic equations in three variables. **Acta Math**., Netherlands, v. 88, 1952, p. 77-83.