UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

ANTÔNIO NEUTONÁRIO RIBEIRO RODRIGUES

ÁLGEBRA DE LIE NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

FORTALEZA
2023

ANTÔNIO NEUTONÁRIO RIBEIRO RODRIGUES

ÁLGEBRA DE LIE NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.
Coorientador: Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes .

FORTALEZA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R611a Rodrigues, Antônio Neutonário Ribeiro.
Álgebra de Lie no átomo de hidrogênio / Antônio Neutonário Ribeiro Rodrigues. – 2023.
67 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.
Coorientação: Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes.

1. Álgebra de Lie. 2. Átomo de hidrogênio. 3. Operador de Casimir. 4. Autoenergias. I. Título.
CDD 530

ANTÔNIO NEUTONÁRIO RIBEIRO RODRIGUES

ÁLGEBRA DE LIE NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em: 15/09/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes (Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC)

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade federal do ceará (UFC)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as bênçãos e orientação em minha vida.

Gostaria de expressar minha gratidão aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando emocionalmente e financeiramente ao longo dessa jornada.

Um agradecimento especial à instituição CNpQ, por fornecer o apoio financeiro necessário através da bolsa de auxílio, que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da minha pesquisa.

Não posso deixar de mencionar o Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto, meu orientador, cuja orientação, encorajamento e conhecimento foram fundamentais para o sucesso deste marco em minha vida acadêmica.

Também gostaria de agradecer aos professores que compuseram a banca examinadora, o Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim e o Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho, por dedicarem seu tempo e por suas valiosas colaborações e sugestões durante a defesa da minha pesquisa.

Por fim, um agradecimento especial aos meus colegas de turma de mestrado, Mariana Oliveira e Jonas Alves, pelo constante compartilhamento de reflexões, críticas e sugestões que enriqueceram minha pesquisa e meu crescimento acadêmico.

RESUMO

Neste estudo, investigamos a álgebra de Lie para analisar o átomo de hidrogênio. Começamos com uma explicação dos grupos de Lie e suas definições essenciais. Em seguida, abordamos os grupos ortogonais, unitários e simpléticos, com foco no grupo $SO(4)$. Durante o estudo, identificamos características cruciais, incluindo o operador de Casimir e o isomorfismo da álgebra $SO(4)$. Por fim, determinamos as autoenergias do átomo de hidrogênio usando quaterniões e o grupo $SO(4)$.

Palavras-chave: álgebra de Lie; átomo de hidrogênio; operador de Casimir ; autoenergias.

ABSTRACT

In this study, we investigate Lie algebra to analyze the hydrogen atom. We begin with an explanation of Lie groups and their essential definitions. Next, we address orthogonal, unitary, and symplectic groups, with a focus on the $SO(4)$ group. Throughout the study, we identify crucial features, including the Casimir operator and the isomorphism of the $SO(4)$ algebra. Finally, we determine the autoenergies of the hydrogen atom using quaternions and the $SO(4)$ group.

Keywords: Lie algebra; hydrogen atom; Casimir operator; eigenenergies.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$GL(n)$	Grupo geral linear de matrizes $n \times n$
$O(n)$	Grupo ortogonal de matrizes $n \times n$
$SO(n)$	Grupo especial e ortogonal de matrizes $n \times n$
$SU(n)$	Grupo unitário especial
$U(n)$	Grupo unitário
$\mathrm{SO}(3)$	Grupo especial ortogonal tridimensional
$\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$	Grupo simplético real
$\mathrm{su}(2)$	Álgebra Lie de $SU(2)$

LISTA DE SÍMBOLOS

$\dagger$	Adjunto ou conjugado Hermitiano
$\mathscr{L}$	Álgebra de Lie
$\star$	Conjugado
n	Dimensão da representação
E	Energia
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano real n-dimensional
B_{ij}	Forma de Killing
G	Grupo
$\boldsymbol{D}(x)$	Grupo de matrizes $d \times d$ não singular
H	Hamiltoniano
$\cong$	Isomorfismo natural
$\mathbf{ad}(a)$	Matriz adjunta
Ω	Matriz de Poisson
$I_{n\times n}$	Matriz identidade $n \times n$
$\mathbb{C}$	Números complexos
C	Operadores de Casimir
$\circ$	Operação do grupo
ϕ	Operador linear
N	Ordem do grupo
$\in$	Pertence
$\langle , \rangle$	Produto interno
$\otimes$	Produto direto de matrizes
$\oplus$	Soma direta de matrizes
$\sum$	Somatório
S	Subálgebra álgebra de Lie
$\mathscr{S}$	Subgrupos do grupo

t	Transposta
M	Vetor de Laplace

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de abordar os desafios da humanidade nos leva constantemente a buscar técnicas mais rápidas e precisas, resultando em equações tão elegantes quanto obras de arte. Nas disciplinas da matemática, física e química, esse princípio não é exceção. Entre os diversos conceitos, destacam-se os grupos, que podem ser aplicados no estudo das simetrias em teorias de campos, na relatividade, na mecânica clássica e na mecânica quântica, bem como nas estruturas atômicas e moleculares, no próprio estudo da álgebra abstrata e em uma miríade de outros contextos.

Os primórdios da teoria dos grupos são atribuídos ao matemático francês Évariste Galois (1811-1832), que, em 1832, por meio de uma correspondência dirigida ao seu amigo Auguste Chevalier, introduziu o conceito de grupo solúvel para descrever as raízes de equações polinomiais. Dado que a teoria encontrava-se em sua fase embrionária, ocorreram refinamentos com as contribuições de alguns matemáticos notáveis, entre os quais se destacam o suíço Leonhard Euler (1707-1783), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) e o italiano Paolo Ruffini (1765-1822), entre outros.

O conceito moderno de grupo é atribuído a Arthur Cayley (1821-1895), que propôs que *um grupo é definido por leis que combinam seus elementos*. Entretanto, sua definição não obteve sucesso e só foi reconhecida após ser introduzida por Walther Franz Anton Von Dyck (1856-1934). Com um forte interesse em geometria e topologia, Felix Klein (1840-1925), Marius Sophus Lie (1842-1899) e Henri Poincaré (1854-1912) adaptaram a teoria de grupos para dimensões infinitas. Suas contribuições foram fundamentais para o sucesso da teoria de grupos e sua disseminação global.

Atualmente, a teoria de grupos apresenta diversas ramificações e aplicações. Entre elas, temos a Física de Partículas, que permite a descoberta de novas partículas e auxilia na classificação e no estudo de suas interações. Na engenharia e na ciência da computação, com aplicações na robótica. Na biologia, com investigações baseadas na simetria de proteínas e DNA. Além disso, há aplicações na economia, música, arte e até mesmo em videogames, para animar um personagem ou objeto em movimento.

O propósito deste trabalho consiste em abordar a resolução do problema do átomo de hidrogênio utilizando a teoria de grupos. O início do estudo envolve uma introdução detalhada à teoria de grupos, começando com as primeiras definições e expandindo para os tipos de representações, operadores de Casimir e assim por diante. Nesse processo, identificamos a álgebra $so(4)$ como um elemento essencial para a compreensão do átomo de hidrogênio em seu estado ligado, conforme será minuciosamente demonstrado.

A presente dissertação segue a seguinte estrutura: no Capítulo 2, abordaremos a teoria de grupos, onde serão discutidos os tipos de mapeamentos e representações. No Capítulo 3, introduziremos a Álgebra de Lie, começando com uma introdução às matrizes exponenciais, isomorfismos de álgebra e, por fim, os operadores de Casimir. O Capítulo 4 dará início à aplicação dos conceitos abordados nos capítulos anteriores, discutindo os grupos ortogonais, unitários e simpléticos. O resultado fundamental deste trabalho será apresentado no Capítulo 5, no qual utilizaremos os conhecimentos anteriores para solucionar o problema do átomo de hidrogênio. Por fim, concluiremos este trabalho com um resumo dos resultados obtidos no Capítulo 6.

2 GRUPOS E SUBGRUPOS

O objetivo deste capítulo é introduzir a ideia básica de grupo para os físicos. Um grupo é um conjunto de elementos que deve obedecer a quatro axiomas. O desenvolvimento da teoria não depende da natureza dos próprios elementos, podendo ser qualquer conjunto de objetos ou entidades.

Nesta seção, apresentaremos os conceitos fundamentais da teoria de grupos necessários para o estudo do átomo de hidrogênio. Um conjunto G de elementos $x, y, z, \ldots$ é denominado *grupo* em relação a uma operação ($\circ$) se cumprir os quatro *axiomas de grupo* a seguir:

1. Multiplicação

$$x, y \in G,\ x \circ y = z \in G, \tag{2.1}$$

2. Associatividade

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y \circ z), \tag{2.2}$$

3. Existe um elemento de identidade e tal que

$$\forall x \in G, x \circ e = e \circ x = x, \tag{2.3}$$

4. Existência de elemento inverso x^{-1}

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e. \tag{2.4}$$

Se todos os elementos de um grupo comutam, ou seja, se $x \circ y = y \circ x$ para quaisquer elementos x e y do grupo, então esse grupo é chamado de grupo abeliano. No entanto, em geral, os elementos de um grupo não comutam.

A ordem de um grupo, o número de elementos nele contidos, pode ser finita ou infinita, infinita contável ou incontável.

Um subconjunto $\mathscr{S}$ de um grupo G, com a mesma operação de multiplicação de G, é chamado de subgrupo de G. Existem dois tipos de subgrupos (COSTA, 2012):

1. Triviais: Formado apenas por um único elemento, a identidade e;
2. Não triviais: Um subgrupo não trivial deve conter pelo menos dois elementos e satisfazer as propriedades do grupo, sendo comumente chamado de subgrupo adequado ou próprio.

Sejam s e g elementos do subgrupo $\mathscr{S}$ e do grupo G, respectivamente. O subgrupo $\mathscr{S}$ é dito ser *invariante* se o elemento gsg^{-1} pertence a $\mathscr{S}$. Outras terminologias para subgrupos invariantes são *subgrupos normais* ou *divisores normais*. Um grupo pode ser classificado como simples ou semissimples. Um grupo G é simples se seus únicos subgrupos invariantes são o subgrupo trivial, enquanto é semissimples se não contém nenhum subgrupo abeliano invariante (COSTA, 2012; SAVAGE, 2015).

2.1 Mapeamentos homomórficos e isomórficos

Sejam G e G' dois grupos quaisquer. Um *mapeamento* é uma regra na qual cada elemento de G é atribuído a algum elemento de G'. Esses mapeamentos podem ser de dois tipos: homomórficos e isomórficos. Vamos verificar a definição abaixo.

Definição 2.1.1 *Mapeamento homomórfico de um grupo G em G'*
Se ϕ é um operador de um grupo G em G', tal que

$$\phi(x_1) \circ \phi(x_2) = \phi(x_1 \circ x_2)$$

para todo x_1 e x_2 em G, então ϕ é denominado um mapeamento homomórfico.

Essa propriedade afirma que o mapeamento preserva a operação de grupo, ou seja, o produto dos elementos em G é preservado pelo mapeamento em G'. No entanto, o mapeamento homomórfico não necessariamente é biunívoco (bijetivo), ou seja, diferentes elementos de G podem ser mapeados para o mesmo elemento em G'.

Definição 2.1.2 *Um mapeamento ϕ de um grupo G em um grupo G' é considerado isomórfico se satisfaz duas propriedades:*

1. *$\phi(x_1) \circ \phi(x_2) = \phi(x_1 \circ x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in G$, ou seja, é um mapeamento homomórfico;*
2. *ϕ é um-para-um (injetivo), o que significa que cada elemento de G é associado a um único elemento em G'.*

Em outras palavras, um mapeamento isomórfico também é um mapeamento homomórfico.

2.2 Produtos diretos e produtos semi-diretos de grupos

O produto direto e o produto semi-direto são duas operações utilizadas para combinar subgrupos e formar um grupo maior. Vejamos as definições abaixo.

Definição 2.2.1 *Sejam G_1 e G_2 dois grupos quaisquer, com (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) conjunto de pares onde $x_1, x'_1 \in G_1$, $x_2, x'_2 \in G_2$. Definimos*

$$(x_1, x_2) \circ (x'_1, x'_2) = (x_1 \circ x'_1, x_2 \circ x'_2)$$

para todos $x_1, x'_1 \in G_1$ e $x_2, x'_2 \in G_2$.

Definição 2.2.2 *Sejam $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ dois subgrupos do grupo G. Dizemos que o produto direto de $\mathscr{S}_1$ com $\mathscr{S}_2$ é o grupo $G = \mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *Os dois subgrupos $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ têm apenas o elemento unitário em comum;*
2. *Os elementos de $\mathscr{S}_1$ comutam com os elementos de $\mathscr{S}_2$;*
3. *Cada elemento de G pode ser escrito como um produto de um elemento $\mathscr{S}_1$ e um elemento de $\mathscr{S}_2$ (CORNWELL, 1997).*

Definição 2.2.3 *Dizemos que o produto semi-direto de $\mathscr{S}_1$ com $\mathscr{S}_2$ é o grupo $G = \mathscr{S}_1 \rtimes \mathscr{S}_2$, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *$\mathscr{S}_1$ é um subgrupo invariante de G;*
2. *os dois subgrupos $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ têm apenas o elemento unitário em comum;*
3. *cada elemento de G pode ser escrito como um produto de um elemento $\mathscr{S}_1$ e um elemento de $\mathscr{S}_2$.*

2.3 Representação de um grupo

Uma representação de um grupo é um mapeamento de cada elemento do grupo para um operador linear no espaço vetorial, obedecendo à propriedade de homomorfismo entre as operações do grupo e as operações dos operadores lineares.

Se para cada elemento g de G existe um operador linear correspondente $\phi(x)$ no espaço vetorial L_n, tal que

$$\phi(x_1 \circ x_2) = \phi(x_1) \circ \phi(x_2)$$

onde x_1 e x_2 são elementos de G e $\circ$ denota a operação do grupo, então dizemos que o conjunto de operadores $\phi(x)$ forma uma representação linear n-dimensional do grupo G.

2.3.1 Representação matricial

A representação matricial está relacionada ao estudo de grupos e suas propriedades.

Definição 2.3.1 *(Representação matricial) Quando os elementos do grupo formam um grupo de matrizes $d \times d$ não singulares, denotado por $\mathbf{D}(x)$, com a multiplicação do grupo definida como multiplicação de matrizes, ou seja,*

$$\mathbf{D}(x_1 \circ x_2) = \mathbf{D}(x_1) \circ \mathbf{D}(x_2), \tag{2.5}$$

onde x_1 e $x_2 \in G$, diz-se que este conjunto de matrizes forma uma representação d-dimensional $\mathbf{D}$ *de G (CORNWELL, 1997).*

Essa representação matricial permite estudar as propriedades do grupo através de manipulações e cálculos com as matrizes correspondentes.

Se todas as matrizes atribuídas aos diferentes elementos do grupo forem diferentes, então o grupo de matrizes é isomorfo ao grupo que representa, e a representação é considerada fiel.

2.3.2 Representações equivalentes

Teorema 2.3.1 *Sejam* $\mathbf{D}$ *e* $\mathbf{S}$ *matrizes, com* $\mathbf{D}$ *sendo uma matriz de representação e* $\mathbf{S}$ *sendo uma matriz não singular qualquer. Definimos, para cada $x \in G$, uma matriz $n \times n$ da seguinte forma:*

$$\mathbf{D}'(x) = \mathbf{S}^{-1}(x)\mathbf{D}(x)\mathbf{S}(x). \tag{2.6}$$

As representações $\mathbf{D}(x)$ e $\mathbf{D}'(x)$ são rotuladas como equivalentes por meio de uma transformação de similaridade (CORNWELL, 1997).

A existência de representações equivalentes é uma propriedade importante dos grupos, pois permite encontrar formas diferentes e mais convenientes para representar os elementos do grupo. A demonstração do Teorema 2.3.1 encontra-se no apêndice B.

2.3.3 Representações redutíveis e irredutíveis

Se for possível escolher uma base em L_n de forma que todas as matrizes correspondentes a $\mathbf{D}$ possam ser escritas na forma de uma matriz triangular superior, podemos expressar a matriz $\mathbf{D}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{D}(x) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_{11}(x) & \mathbf{D}_{12}(x) \\ \hline 0 & \mathbf{D}_{22}(x) \end{array}\right) \tag{2.7}$$

Esta representação é válida para cada $x \in G$, onde as matrizes $\mathbf{D}_{11}(x)$, $\mathbf{D}_{12}(x)$ e $\mathbf{D}_2(x)$, bem como a matriz nula $\mathbf{0}$, têm dimensões $s_1 \times s_1$, $s_1 \times s_2$, $s_2 \times s_2$ e $s_2 \times s_1$, respectivamente. Essa forma de matriz triangular superior pode facilitar a análise e os cálculos relacionados às propriedades das matrizes $\mathbf{D}(x)$ no contexto do grupo G (COSTA, 2012).

Definição 2.3.2 *(Representação redutível) Uma representação de um grupo G é considerada "redutível" se puder ser expressa na forma da Equação 2.7.*

Definição 2.3.3 *(Representação irredutível de um grupo G) Uma representação de um grupo G é dita "irredutível" se não for redutível.*

Se $D_{ij}(x)$ for redutível, podemos transformá-lo em uma forma da Equação 2.7 por meio de uma transformação de similaridade. Esse processo é repetido até que todas as representações envolvidas se tornem irredutíveis, transformando a representação redutível $\mathbf{D}$ em uma forma de matriz triangular superior,

$$\mathbf{D}'(x) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}(x)\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}'_{11}(x) & \mathbf{D}'_{12}(x) & \mathbf{D}'_{13}(x) & \dots & \mathbf{D}'_{1r}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{22}(x) & \mathbf{D}'_{23}(x) & \dots & \mathbf{D}'_{2r}(x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}'_{33}(x) & \dots & \mathbf{D}'_{3r}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}'_{rr}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

É evidente que as representações irredutíveis são a base para a construção de todas as representações redutíveis.

Se, por meio de uma transformação de similaridade, for possível transformar a representação em uma matriz na qual as submatrizes D'_{ij}, com $i \neq j$, sejam nulas, então temos:

$$\boldsymbol{D}''(x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}''_{11}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}''_{22}(D) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{D}''_{33}(x) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{D}''_{rr}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Nesse caso, a representação é completamente redutível e pode ser decomposta na soma direta de representações irredutíveis:

$$\mathbf{D}'' = \mathbf{D}''_{11} \oplus \boldsymbol{D}''_{22} \oplus \ldots \oplus \mathbf{D}''_{rr} \tag{2.10}$$

O símbolo $\oplus$ aqui indica que a operação envolvida não se trata da adição de matrizes. A razão para essa diferença reside na discrepância das dimensões das matrizes envolvidas.

2.3.4 Representação unitária de um grupo

Definição 2.3.4 *(Representação "unitária" de um grupo) Uma representação "unitária" de um grupo G é uma forma de representação D em que as matrizes* $\mathbf{D}(x)$ *são unitárias, ou seja, obedecem às seguintes condições:*

$$\mathbf{D}(g) \circ \mathbf{D}(g)^{\dagger} = \mathbf{D}(g)^{\dagger} \circ \boldsymbol{D(g)} = \boldsymbol{I}, \tag{2.11}$$

para cada elemento g pertencente a G. Nesse contexto, $\mathbf{D}(g)^{\dagger}$ *representa o adjunto ou conjugado hermitiano de* $\mathbf{D}(g)$.

Toda representação unitária de um grupo finito é irredutível ou completamente redutível. O número de representações irredutíveis não equivalentes é limitado pela fórmula:

$$N = \sum_i n_i^2. \tag{2.12}$$

Aqui, onde N representa a ordem do grupo e n_i a dimensão da i-ésima representação irreduzível (COSTA, 2012).

2.4 Grupos de Lie

O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos de grupos de Lie. Cada grupo de Lie desempenha um papel fundamental na resolução de problemas físicos. Apesar de existirem várias definições para grupos de Lie, todas são equivalentes.

Definição 2.4.1 *(Grupo de Lie) Um grupo de Lie é um tipo de grupo que possui uma estrutura de variedade diferenciável em seu conjunto subjacente. Essa estrutura é tal que a operação de multiplicação é definida como*

$$p : (g,h) \in G \times G \to gh \in G$$

é uma função diferenciável.

Aqui estão listados os principais grupos de Lie:

1. Grupo Unitário Especial ($SU(n)$): É o grupo das matrizes $n \times n$ unitárias com determinante igual a 1;
2. Grupo Ortogonal Especial ($SO(n)$): É o grupo das matrizes $n \times n$ ortogonais com determinante igual a 1.
3. Grupo Ortogonal Especial Euclidiano ($SE(n)$): É o grupo das matrizes $n \times n$ ortogonais com determinante igual a 1 e que preservam uma orientação no espaço euclidiano.
4. O grupo simplético ($Sp(n)$) é o grupo das matrizes $n \times n$ unitárias U que satisfazem a condição $U^t JU = J$, onde J é uma matriz fixa de estrutura simplética.

Vamos nos concentrar nos grupos ortogonais e simpléticos, com ênfase em $SO(4)$. Para mais detalhes sobre os outros grupos, recomendamos livros como Cornwell (1984) e Hall (2003).

3 ÁLGEBRA DE LIE REAL

Iniciaremos o capítulo com algumas definições e teoremas antes de prosseguirmos para as álgebras de Lie reais.

Em todos os argumentos a seguir envolvendo matrizes, o *comutador* $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ de quaisquer duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, ambas de tamanho $m \times m$, é definido por

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}. \tag{3.1}$$

Este produto possui as seguintes propriedades:

1. $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A}]$.
2. $[\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{B}] + [\mathbf{A},\mathbf{C}]; \quad [\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{C}] + [\mathbf{B},\mathbf{C}]$.
3. Para $r \in \mathbb{R}, r[\mathbf{A},\mathbf{B}] = [r\mathbf{A},\mathbf{B}] = [\mathbf{A},r\mathbf{B}]$.
4. $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0$.

3.1 Função exponencial de matriz

Vamos abordar agora um tema importante para compreender a relação entre um grupo e sua correspondente álgebra de Lie real. Para isso, será necessário apresentar algumas definições e teoremas.

Definição 3.1.1 *A função exponencial de uma matriz é definida como:*

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbf{A}^j, \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{A}$ *é uma matriz* $m \times m$*,* $\mathbf{I}$ *é a matriz identidade* $m \times m$*, e* $\mathbf{A}^j$ *representa a potência* j*-ésima de* $\mathbf{A}$.

Teorema 3.1.1 *A série para* $e^{\mathbf{A}}$ *na equação 3.2 converge para qualquer matriz* $\mathbf{A}$ *de tamanho* $m \times m$*.*

A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice B.

Teorema 3.1.2 *Se as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são quaisquer matrizes* $m \times m$ *que comutam, então a seguinte igualdade é válida:*

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}. \tag{3.3}$$

No caso em que $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *não comutam e suas entradas são suficientemente pequenas, temos a seguinte relação:*

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{C}}, \tag{3.4}$$

onde $\mathbf{C}$ *é calculado por meio de uma série infinita conhecida como a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}] + \frac{1}{12}[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + \frac{1}{12}[\mathbf{B},[\mathbf{B},\mathbf{A}]] + \cdots. \tag{3.5}$$

Essa fórmula é fundamental na teoria das álgebras de Lie e é usada para manipular produtos exponenciais de elementos dessa álgebra.

A demonstração do Teorema 3.1.2 encontra-se no apêndice B.

Teorema 3.1.3 *A função exponencial da matriz formada a partir de uma matriz* $n \times n$ *possui as seguintes propriedades:*

1. $(e^{A})^{*} = e^{(A^{*})}$;
2. $(e^{A})^{t} = e^{A^{t}}$;
3. $(e^{A})^{\dagger} = e^{A^{\dagger}}$;
4. *Para qualquer matriz* $m \times m$ *não singular* $\mathbf{S}$

$$e^{\mathbf{SAS}^{-1}} = \mathbf{S}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}; \tag{3.6}$$

5. *Se* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ *são autovalores de* $\mathbf{A}$*, então* $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_m}$ *são autovalores de* $e^{\mathbf{A}}$;
6. $\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\mathrm{Tr}(\mathbf{A})}$;
7. $e^{\mathbf{A}}$ *é sempre não singular e* $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{\mathbf{A}^{-1}}$.

3.1.1 Subgrupos de um parâmetro

Seja G um grupo de Lie. Um subgrupo de um parâmetro, denotado por $\mathscr{T}$, é um subgrupo de Lie de G que consiste em elementos $T(t)$ dependentes de um parâmetro real t, que varia de $-\infty$ a $+\infty$, de forma que a seguinte equação seja satisfeita para todos os valores de t e t' dentro do intervalo $-\infty < t, t' < +\infty$ (CORNWELL, 1997):

$$T(t)T(t') = T(t+t'). \tag{3.7}$$

.

Em particular, quando G é um grupo de matrizes $n \times n$, $\mathscr{T}$ é um subgrupo de matrizes $\mathbf{A}(t)$, tal que

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(t') = \mathbf{A}(t+t'), \tag{3.8}$$

para todo t e t' com $-\infty < t, t' < +\infty$.

A partir da Equação 3.8, concluímos que o subgrupo de um parâmetro é abeliano para todos os valores de t' e t. Além disso, $\mathscr{T}(0)$ é a identidade do grupo G quando $t = 0$

Teorema 3.1.4 *Todo subgrupo de um parâmetro de um grupo de Lie G de matrizes $m \times m$ é formado pela exponenciação de matrizes $m \times m$. Se $\mathbf{A}(t)$ forma um subgrupo de um parâmetro de G, então*

$$\mathbf{A}(t) = e^{t\mathbf{a}}, \tag{3.9}$$

onde $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\Big|_{t=0}$.

A demonstração do Teorema 3.1.4 encontra-se no apêndice B.

3.2 Grupos compacto e não compacto

Um grupo de Lie é considerado compacto quando sua parametrização consiste em um número finito de domínios de parâmetros limitados. Por outro lado, se a parametrização do grupo requer um número infinito de parâmetros ou se esses parâmetros não possuem limites, o grupo é então considerado não compacto. A álgebra de Lie associada a um grupo de Lie compacto (ou não compacto) também é classificada como compacta (ou não compacta). Podemos citar como exemplo de grupo compacto o $SO(3)$ e como exemplo de grupo não compacto o $SO(2,1)$ (WYBOURNE, 1974).

3.3 Álgebra de Lie Real

Uma álgebra de Lie é denominada *real* quando o corpo é $\mathbb{R}$, e é chamada de *complexa* quando o corpo é $\mathbb{C}$.

Definição 3.3.1 *(Álgebra de Lie Real) Uma álgebra de Lie real $\mathscr{L}$, com dimensão $n \geq 1$, é um espaço vetorial real sobre algum corpo, equipado com um produto chamado colchete de Lie* *ou comutador, denotado por $[x, y]$, definido para todos x e y em $\mathscr{L}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Fechamento da álgebra:*

$$[x, y] \in \mathscr{L}, \quad \forall x, y \in \mathscr{L}; \tag{3.10}$$

2. *Bilinearidade:*

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], \tag{3.11}$$

$$[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y], \tag{3.12}$$

   onde a, b são reais e $x, y, z \in \mathscr{L}$.;

3. *Anticomutatividade:*

$$[x, y] = -[y, x], \tag{3.13}$$

   $\forall x,\ y \in \mathscr{L}$;

4. *Identidade de Jacobi:*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \tag{3.14}$$

   $\forall x,\ y,\ z \in \mathscr{L}$.

Por definição, o comutador de quaisquer operadores lineares x e y na álgebra de Lie será:

$$[x, y]\phi = x(y\phi) - y(x\phi). \tag{3.15}$$

Aqui, ϕ é um elemento qualquer do espaço vetorial.

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma base real do espaço vetorial $\mathscr{L}$ de dimensão finita. Tomando os elementos x_p e x_q, o colchete de Lie $[x_p, x_q] \in \mathscr{L}$ para todos p, $q = 1, 2, \ldots, n$, pode ser escrito como um conjunto de n^3 números reais C^r_{pq} conhecidos como *constantes de estrutura*, definido como (CORNWELL, 1997):

$$\left[x_p, x_q\right] = \sum_{r=1}^{n} c^r_{pq} x_r, p, q = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Observa-se claramente que a álgebra de Lie isomórfica pode ser determinada a partir das constantes de estrutura.

Das equações 3.13 e 3.14, deduz-se que as constantes de estrutura satisfazem as seguintes propriedades:

$$c_{pq}^{r} = -c_{qp}^{r}, \tag{3.17}$$

$$\sum_{j} \left(c_{pq}^{l} c_{lk}^{m} + c_{qr}^{l} c_{lp}^{m} + c_{rp}^{l} c_{pp}^{m} \right) = 0. \tag{3.18}$$

Além disso, existe a álgebra abeliana, na qual $[x,y] = 0$ para todos os elementos x e y em $\mathscr{L}$.

3.3.1 A existência de uma álgebra de Lie real $\mathscr{L}$ para cada Grupo de Lie G

Por suposição, os elementos de $\mathbf{A}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ são funções analíticas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A expansão em série de Taylor fornece informações sobre a variação da função quando perturbamos a matriz identidade por uma pequena quantidade. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x_i) \quad &= \mathbf{A}(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k} \right) \Bigg|_{x_k=0} + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k x_l \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_l} \right) \Bigg|_{\substack{x_k=0 \\ x_l=0}} \\ &+ O\left(x_i^3\right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

ao considerar o termo de primeira ordem e definir:

$$(\mathbf{G}r)ij = \frac{\partial \mathbf{A}ij}{\partial x_r} \Bigg| x_1 = x_2 = \cdots = 0, \tag{3.20}$$

onde i e j variam de 1 a m, e r varia de 1 a n. Em física, as quantidades $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, ..., $\mathbf{G}_n$ são rotuladas como geradores da álgebra de Lie $\mathscr{L}$ (CORNWELL, 1997; COSTA, 2012).

Vamos agora considerar o valor de δx_i. Dessa forma, na equação 3.19, o produto $\delta x_k \delta x_l$ é aproximadamente zero. Logo, o termo de primeira ordem pode ser aproximado como:

$$\mathbf{A}\left(\delta x_k\right) \approx \mathbf{I}_{n \times n} + \sum_{k=1}^{n} \delta x_k \mathbf{G}_k.$$

Aqui, utilizamos a substituição de i por k apenas por conveniência, e substituímos $\mathbf{A}(0)$ por $\mathbf{I}_{n \times n}$ (matriz identidade).

Considerando a condição de ortogonalidade para dois elementos infinitesimais $\mathbf{A}(\delta x_k)$ e $\mathbf{A}(\delta x_l)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\delta x_k)^T \mathbf{A}(\delta x_l) \quad &= (\mathbf{I}_n^T + \sum_{k=1}^{m} \delta x_k \mathbf{G}_k^T)(\mathbf{I}_n + \sum_{l=1}^{m} \delta x_l \mathbf{G}_l) \\ &= \mathbf{I}_n + \sum_{k=1}^{m} \delta x_k G_k^T + \sum_{l=1}^{m} \delta x_l \mathbf{G}_l + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \delta x_k \delta x_l \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_l \\ &= \mathbf{I}_n. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para que haja igualdade na Equação 3.21, é necessário impor a seguinte condição:

$$\sum_{n=1}^{m} \delta x_k \mathbf{G}_k^T + \sum_{l=1}^{m} \delta x_l \mathbf{G}_l = 0 \tag{3.22}$$

Considerando que cada uma das somas anteriores é uma matriz, podemos definir, por questões de simplicidade, $\sum_{l=1}^{m} \delta x_l \mathbf{G}_l = \mathbf{x}$. Portanto, podemos reescrever a Equação 3.22 como:

$$x = -x^T \tag{3.23}$$

Claramente, as matrizes x são anti-simétricas. É possível demonstrar facilmente que os geradores $\mathbf{G}_k$ também obedecem à mesma relação, ou seja, $\mathbf{G}_K = -\mathbf{G}_k^T$.

3.4 Parametrização exponencial de uma álgebra de Lie

Ao tomar $\delta x_k = x_k/N$ e realizar a multiplicação N vezes dos elementos do grupo em função dos parâmetros infinitesimais, chegamos à seguinte expressão para o elemento $\mathbf{A}$:

$$\underbrace{\mathbf{A}(\delta x_k)\mathbf{A}(\delta x_k)\ldots\mathbf{A}(\delta x_k)}_{N \text{ vezes}} = \left(I_n + \sum_{k=1}^{6} \frac{x_k}{N} G_k \right)^N, \tag{3.24}$$

Ao tomar o limite do lado direito da equação 3.24 quando N tende ao infinito, obtemos:

$$\lim_{N\to\infty} \left(I_n + \sum_{k=1}^{6} \frac{x_k}{N} \mathbf{G}_k \right)^N = e^{\left(\sum_{k=1}^{6} x_k \mathbf{G}_k\right)} = e^x,$$

Isso define uma parametrização particular das representações, frequentemente denominada parametrização exponencial, e, portanto, da própria lei de multiplicação de grupos. No limite, isso deve tender à representação de um elemento do grupo, pois $1_n + \left(\sum_{k=1}^{6} x_k \mathbf{G}_k\right)$ se torna a representação de um elemento de grupo, à medida que N se torna grande. Em resumo, temos:

$$\mathbf{A} = e^x.$$

Assim, se G é um grupo compacto de Lie, todo elemento de um subgrupo conexo de G pode ser expresso na forma e^x, onde x é um elemento da álgebra de Lie se real (COSTA, 2012).

3.5 Subálgebra de Lie

As definições a seguir são válidas para álgebras com corpos reais e complexos.

Definição 3.5.1 *(Subálgebra de uma álgebra de Lie) Uma subálgebra S de uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$ é um subconjunto de elementos de $\mathscr{L}$ que, por si só, forma uma álgebra de Lie com o mesmo comutador e corpo de $\mathscr{L}$.*

Definição 3.5.2 *(Álgebra de Lie invariante) Seja $\mathscr{L}$ uma álgebra e S uma subálgebra, respectivamente. Uma subálgebra é considerada invariante se e somente se*

$$[X,Y] \in S, \quad \forall X \in S \; e \; Y \in \mathscr{L}. \tag{3.25}$$

Em Álgebra, chamamos de *ideal* uma subálgebra invariante. Se uma álgebra contém elementos que não estão na subálgebra, chamamos de *ideal próprio*. Quando o conjunto de elementos da álgebra satisfaz

$$[X_i, X_j] = 0, \quad \forall i \in S \text{ e } j \in \mathscr{L}, \tag{3.26}$$

nós o chamamos de *ideal máximo* ou *centro da álgebra*. O centro da álgebra forma uma subálgebra abeliana.

3.6 Mapeamentos homomórficos e isomórficos de álgebras de Lie

Definição 3.6.1 *(Mapeamento Homomórfico de uma Álgebra de Lie $\mathscr{L}$ sobre uma Álgebra de Lie $\mathscr{L}'$) Seja ψ um mapeamento de uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$ sobre uma álgebra de Lie $\mathscr{L}'$, ambos possuindo o mesmo corpo, de tal forma que:*

1. *Para qualquer $a,b \in \mathscr{L}$ e quaisquer α, β pertencentes ao campo correspondente,*

$$\psi(\alpha a + \beta b) = \alpha \psi(a) + \beta \psi(b);$$

2. *Para qualquer $a,b \in \mathscr{L}$,*

$$\psi([a,b]) = [\psi(a), \psi(b)].$$

Nesse contexto, ψ é denominado um mapeamento homomórfico de $\mathscr{L}$ em $\mathscr{L}'$.

Definição 3.6.2 *(Mapeamento isomorfo de uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$ em uma álgebra de Lie $\mathscr{L}'$) Um mapeamento ψ de uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$ em uma Lie a álgebra $\mathscr{L}'$ com o mesmo corpo é dita "isomórfica" se for homomórfica e bijetiva.*

3.7 Álgebras de Lie semissimples e suas Representações

O conceito de uma álgebra de Lie semissimples adquire significância através dos seguintes teoremas e definições (WYBOURNE, 1974).

Definição 3.7.1 *(Álgebra de Lie Simples) Uma álgebra de Lie é considerada simples quando não possui ideais próprios.*

Uma das vantagens de uma álgebra semissimples é que podemos escrevê-la em termos de seus ideais, da seguinte forma:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}_n. \tag{3.27}$$

Aqui, $\oplus$ representa a soma direta e $\mathscr{L}_i$ é um ideal de $\mathscr{L}$.

Definição 3.7.2 *(Álgebra de Lie semissimples) Uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$ é dita ser "semissimples" se não possuir uma subálgebra abeliana invariante, exceto $\{O\}$.*

Uma álgebra simples é sempre semissimples, embora o contrário não seja necessariamente verdadeiro. Observamos que grupos simples e semissimples têm, por definição, mais de uma dimensão.

3.7.1 Representação adjunta de uma álgebra de Lie

Teorema 3.7.1 *Considere uma álgebra de Lie real $\mathscr{L}$ com dimensão n e uma base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ para $\mathscr{L}$. Para qualquer $a \in \mathscr{L}$, definimos a matriz $n \times n$ $\mathbf{ad}(\mathrm{a})$ da seguinte maneira:*

$$[a, a_j] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{ad}(a)_{kj} a_k \tag{3.28}$$

onde j varia de 1 a n. O conjunto de matrizes $\mathbf{ad}(\mathrm{a})$ forma uma representação n-dimensional, conhecida como a representação adjunta de $\mathscr{L}$.

Podemos encontrar a demonstração do Teorema 3.7.1 no apêndice B.

Igualando a Equação 3.28 com 3.16, temos:

$$\{\mathbf{ad}(\mathrm{a})\}_{kj} = c^k_{pj}, \tag{3.29}$$

para j, k e p variando de 1 a n. Isso implica que os elementos de $\mathbf{ad}(\mathrm{a})$ dependem do corpo da álgebra. No caso de um corpo real, $\mathbf{ad}(\mathrm{a})$ será uma matriz real, enquanto no caso de um corpo complexo, $\mathbf{ad}(\mathrm{a})$ será uma matriz complexa.

3.7.2 Forma de Killing

A forma de Killing é uma ferramenta importante em diversas áreas da matemática e da física, tais como a teoria da relatividade e a geometria riemanniana. Essa medida recebe o nome do matemático alemão Wilhelm Killing (1847-1923). Nesta seção, abordaremos a definição e uma aplicação na álgebra de Lie semissimples..

Definição 3.7.3 *(Forma de Killing) A "Forma de Killing", também conhecida como "tensor métrico" $B(a_i, a_j)$ correspondente a quaisquer dois elementos a e b de uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$, é definida por:*

$$\mathbf{g}_{ij} \equiv B(a_i, a_j) = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{ad}(a_i)\,\mathbf{ad}(a_j)\right\}, \tag{3.30}$$

onde $\mathbf{ad}(a)$ *denota a matriz que representa* $a \in \mathscr{L}$ *na representação adjunta.*

Utilizando a Equação 3.28, podemos reescrever a Equação 3.30 como:

$$\mathbf{g}ij = \mathbf{g}ji = c^{k}_{i\rho}c^{\rho}_{jk}. \tag{3.31}$$

Isso facilitará a demonstração do teorema a seguir.

Teorema 3.7.2 *(Teste de Cartan) Uma álgebra de Lie A é dita semissimples se, e somente se,*

$$\det\left|\mathbf{g}_{ij}\right| \neq 0.$$

Exemplos de álgebras semissimples incluem $so(3)$ e $so(2,1)$, entre outros. A demonstração do Teorema 3.7.2 pode ser encontrada no Apêndice B.

Além de sua aplicação no Teste de Cartan, a forma de Killing também pode ser utilizada para determinar se uma álgebra é compacta ou não compacta. Isso pode ser determinado da seguinte maneira:

1. A álgebra é considerada compacta quando todos os elementos da forma diagonal do tensor métrico são negativos.
2. Por outro lado, a álgebra é classificada como não compacta quando alguns elementos da forma diagonal do tensor métrico são positivos.

3.7.3 *Operadores de Casimir*

Os operadores de Casimir são uma ferramenta fundamental na física teórica, especialmente na teoria de grupos. Eles recebem esse nome em homenagem ao renomado matemático alemão Hendrik Casimir (1909-2000). Os operadores de Casimir podem ser lineares, quadráticos, cúbicos, entre outros, em relação aos elementos X_k. O operador de Casimir de ordem p para uma álgebra de Lie é definido como a soma das p-ésimas potências de todos os geradores da álgebra, multiplicadas pelas constantes de estrutura da álgebra. Em outras palavras, temos:

$$C_p = \sum_{a_1 a_2 \ldots a_p} f^{a_1 a_2 \ldots a_p} X_{a_1} X_{a_2} \ldots X_{a_p}, \tag{3.32}$$

onde $f^{a_1 a_2 \ldots a_p}$ representa as constantes de estrutura da álgebra. Onde $f^{a_1 a_2 \ldots a_p}$ representa as constantes de estrutura da álgebra.

É possível construir o operador de Casimir quadrático ($p = 2$) de uma álgebra semissimples de forma simples usando o tensor métrico:

$$C = g^{ij} X_i X_j, \tag{3.33}$$

onde X_τ representa os elementos de uma álgebra de Lie $\mathscr{L}$.

Podemos calcular o comutador do operador de Casimir e um elemento da álgebra:

$$\begin{aligned}
[C, X_k] &= g^{ij} \left[X_i X_j, X_k\right] \\
&= g^{ij} X_i \left[X_j, X_k\right] + g^{ij} c^l_{ik} X_l X_j \\
&= g^{ij} c^l_{jk} X_i X_l + g^{ij} c^l_{ik} X_l X_j \\
&= g^{ij} c^l_{jk} X_i X_l + g^{ji} c^l_{jk} X_l X_i \\
&= g^{ij} c^l_{jk} \left(X_i X_l + X_l X_i\right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Nesse cálculo, utilizamos a definição do comutador $[X_j, X_k] = c^l_{jk} X_l$ e a propriedade distributiva, além de realizar alterações nas variáveis j e k. Utilizando a definição de tensor antissimétrico, podemos definir:

$$c^l_{jk} = g^{l\nu} c_{\nu jk}. \tag{3.35}$$

Em seguida, substituímos o resultado em 3.34:

$$[C, X_k] = g^{ij} g^{l\nu} c_{\nu jk} \left(X_i X_l + X_l X_i\right). \tag{3.36}$$

No entanto, como $c_{\nu jk}$ é antissimétrico e a quantidade entre parênteses é simétrica em i e l, logo a Equação 3.36 torna-se:

$$[C, X_k] = 0 \quad \text{para todo} \quad (X_k \in A)\,.$$

Isso implica que os operadores de Casimir são operadores que comutam com todos os geradores de um grupo de simetria. Eles são utilizados para classificar os estados de um sistema com base em suas propriedades de simetria (WYBOURNE, 1974).

3.7.3.1 Operadores Casimir de $so(n)$, $su(n)$ e $sp(n)$

Considerando uma álgebra simples com dimensão $v(v+1)$, onde $v = \frac{n-1}{2}$, e utilizando a Equação 3.32 de Casimir, podemos identificar os operadores Casimir independentes de $so(n)$ da seguinte maneira (IACHELLO, 2006):

1. Para n ímpar:

$$C_2, C_4, C_6, \ldots, C_{2v-2}, C_{2v}; \quad v = \frac{n-1}{2}; \tag{3.37}$$

2. Para n par:

$$C_2, C_4, C_6, \ldots, C_{2v-2}, C'_v; \quad v = \frac{n}{2} \tag{3.38}$$

Nesse caso, os operadores C possuem ordem par, enquanto C' possui ordem par ou ímpar, dependendo se v é par ou ímpar.

De maneira análoga, podemos encontrar os operadores Casimir independentes para as álgebras $su(n)$ e $sp(n)$ da seguinte forma:

1. Para a álgebra $su(n)$, os operadores Casimir independentes são dados por:

$$C_2, C_2, \ldots, C_n; \tag{3.39}$$

2. Para a álgebra $Sp(n)$, os operadores Casimir independentes são dados por:

$$C_2, C_4, C_6, \ldots, C_{2v-2}, C_{2v}; \quad v = \frac{n}{2}, \tag{3.40}$$

no caso em que n é par.

Aqui, estamos apenas vendo o básico. Para obter mais detalhes sobre os operadores de Casimir, consulte o livro Iachello (2006).

4 OS GRUPOS ORTOGONAIS, UNITÁRIOS E SIMPLÉTICOS

Os grupos ortogonais, unitários e simpléticos desempenham papéis fundamentais em diversas áreas da matemática e da física. Eles compartilham muitas propriedades em comum, incluindo a preservação de certas estruturas em um espaço vetorial, mas também possuem características distintas que os tornam importantes em contextos específicos. Neste capítulo, vamos desenvolver o arcabouço teórico para o estudo de grupos lineares de Lie.

4.1 Rotações no espaço Euclidiano

Rotações no espaço quadridimensional podem ser representadas por matrizes ortogonais de $n \times n$, as quais possuem determinante $+1$ e preservam o produto interno entre vetores.

Seja $\mathbf{X}$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. Podemos escrevê-lo como um vetor coluna:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

e definir o produto interno, também chamado de produto escalar, entre dois vetores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ da seguinte forma:

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}^t g \mathbf{Y} = \mathbf{X}^t \mathbf{Y}, \tag{4.1}$$

onde $g = \mathbf{I}_n$ é a matriz métrica do espaço euclidiano de n dimensões. Além disso, é definida como positiva, pois $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \geq 0$ para todo elemento x em $SO(n)$.

Existe uma matriz ortogonal real $n \times n$ R que depende da rotação, mas que é independente da posição. Dessa forma, a ação desses elementos pode ser escrita como:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X}. \tag{4.2}$$

A matriz ortogonal $\mathbf{R}$ preserva a distância entre os vetores, portanto, também preserva o produto interno entre eles. Assim,

$$\left\langle \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \right\rangle = \langle \mathbf{R}\mathbf{X}, \mathbf{R}\mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle. \tag{4.3}$$

Ao desenvolver o produto interno $\langle \mathbf{RX}, \mathbf{RY} \rangle$ e utilizando a condição de simetria 4.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{RX}, \mathbf{RY} \rangle &= (\mathbf{RX})^t \mathbf{RY} \\
&= \mathbf{X}^t \mathbf{R}^t \mathbf{RY} \\
&= \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \\
&= \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle
\end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos a condição de ortogonalidade para $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}^t \mathbf{R} = I_n, \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}. \tag{4.4}$$

Podemos obter o determinante dos elementos de $O(n)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{R}^t \mathbf{R}\right) &= \det I_4, \\
\det \mathbf{R}^t \det \mathbf{R} &= 1, \\
(\det \mathbf{R})^2 &= 1, \\
\det \mathbf{R} &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Ou seja, o determinante de uma matriz ortogonal é sempre $+1$ ou -1. De maneira mais geral, o determinante +1 de uma matriz ortogonal indica uma simetria especial, enquanto um determinante -1 indica que a matriz inverte a orientação dos vetores, ou seja, ela reflete os vetores (JESUS, 2023).

Aqui faremos uma escolha, o Grupo ortogonal de matrizes $n \times n$ ($O(n)$), definido como:

$$\mathrm{O}(n) = \left\{ \mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n) \mid \mathbf{A}^t \mathbf{A} = I \right\}, \tag{4.5}$$

e, em particular, o Grupo especial e ortogonal de matrizes $n \times n$ ($SO(n)$) é definido como:

$$\mathrm{SO}(n) = \{ \mathbf{A} \in \mathrm{O}(n) \mid \det \mathbf{A} = 1 \}. \tag{4.6}$$

O Grupo geral linear de matrizes $n \times n$ ($GL(n)$) refere-se ao grupo de matrizes invertíveis com entradas em um campo especificado. Formalmente, é definido como:

$$GL(n) = \{ \mathbf{A} \in M(n) | det(\mathbf{A}) \neq 0 \}, \tag{4.7}$$

onde $M(n)$ é o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ e $\det(\mathbf{A})$ representa o determinante da matriz $\mathbf{A}$.

Os grupos ortogonais têm grande importância em muitas áreas da matemática e da física, especialmente na geometria, na álgebra linear e na teoria de grupos, permitindo a descrição matemática das simetrias dos sistemas físicos.

Além dos grupos ortogonais, existem os grupos unitários. Os grupos unitários são um tipo de grupo matemático definido em termos de matrizes unitárias. Uma matriz complexa A de tamanho $n \times n$ é considerada unitária se, e somente se, satisfaz a seguintes condições:

$$\sum_{l=1}^{n} A_{lj}^{t} A_{lk} = \delta_{jk}. \tag{4.8}$$

A equação 4.8 implica que $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = I$, o que nos leva à conclusão de que uma matriz $\mathbf{A}$ é unitária se, e somente se, $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}$.

A coleção de matrizes unitárias forma um subgrupo de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$, que chamamos de Grupo unitário ($U(n)$). Podemos também definir um subgrupo de $\mathrm{U}(n)$ consistindo de matrizes unitárias com determinante igual a 1, chamado de Grupo unitário especial ($SU(n)$). Um grupo unitário preserva o comprimento dos vetores complexos (HALL, 2003).

Podemos representar um grupo unitário como:

$$\mathrm{U}(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \mathbf{A}^t\mathbf{A} = I\right\}, \tag{4.9}$$

e grupo unitário especial na forma:

$$\mathrm{SU}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \mid \det \mathbf{A} = 1\}. \tag{4.10}$$

Na verdade, existem muitos tipos diferentes de grupos na matemática, cada um com suas próprias propriedades e aplicações. Considere agora a forma bilinear assimétrica B em $\mathbb{R}^{2n}$ definida como:

$$\omega(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j\right).$$

O conjunto de todas as matrizes $\mathbf{A}$ de tamanho $2n \times 2n$ que preservam ω é o grupo simplético real, representado por Grupo simplético real ($\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$). O grupo simplético real é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$, definido por:

$$\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R}) = \left\{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R}) \mid B(Ax,Ay) = B(x,y), \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n}\right\}. \tag{4.11}$$

O grupo simplético real é um espaço topológico que possui propriedades de grupo de Lie, o que significa que ele é diferenciável e possui uma estrutura de grupo compatível com sua topologia (HALL, 2003).

O grupo simplético real pode ser definido de forma alternativa em termos da matriz de Poisson, denotada por Ω. Essa matriz é uma matriz antissimétrica de tamanho $2n \times 2n$, onde n representa a dimensão do espaço. Suas entradas são definidas da seguinte maneira:

$$\Omega_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = n + j \\ -1, & i = j + n \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases} \tag{4.12}$$

Em outras palavras, a matriz de Poisson Ω tem a seguinte forma:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

onde I é a matriz identidade de tamanho $n \times n$. A função $\Omega(x,y)$ é definida como o produto interno entre os vetores x e Ωy, ou seja:

$$\Omega(x,y) = \langle x, \Omega y \rangle.$$

Uma matriz real $\mathbf{A}$ de tamanho $2n \times 2n$ pertence ao grupo simplético $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$ se e somente se ela satisfizer a seguinte condição:

$$\mathbf{A}^T \Omega \mathbf{A} = \Omega. \tag{4.13}$$

Analogamente ao que foi observado nos grupos ortogonais, para uma matriz simplética (seja ela real ou complexa), temos a seguinte propriedade:

$$\det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}, \tag{4.14}$$

ou seja, $(\det(\mathbf{A}))^2 = 1$. Isso implica que $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ para todas as matrizes $\mathbf{A} \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$.

O conjunto de matrizes complexas de tamanho $2n \times 2n$ que preservam essa forma é conhecido como grupo simplético complexo ($\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$). Uma matriz complexa A pertence a esse grupo se e somente se a condição 4.13 for satisfeita. Mais uma vez, para cada matriz $A \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})$, temos que o determinante de A é igual a ± 1. O grupo simplético $\mathrm{Sp}(n)$ é definido como a interseção entre o grupo simplético complexo $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{C})$ e o grupo unitário $U(2n)$. Ou seja:

$$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n;\mathbb{C}) \cap U(2n). \tag{4.15}$$

O grupo simplético $\mathrm{Sp}(n)$ consiste em matrizes de tamanho $2n \times 2n$ que preservam tanto o produto interno quanto a forma bilinear Ω. Explicitamente, os elementos de $Sp(n;\mathbb{C})$ são matrizes da forma:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ arbitraria e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são matrizes simétrica arbitraria (HALL, 2003).

Há muitos exemplos de grupos, aqui estão alguns dos mais importantes:

1. Grupo de Lorentz: Este é o grupo que descreve as transformações de Lorentz, que são as transformações que preservam a forma do intervalo espaço-tempo na relatividade especial.
2. grupo de Lie excepcional: O grupo E é importante em matemática, especialmente na teoria dos grupos de Lie, e também tem aplicações em física teórica, particularmente na teoria das cordas.
3. Grupos de Lie solúveis: Estes são grupos de Lie cuja álgebra de Lie é solúvel, ou seja, pode ser construída a partir de comutadores sucessivos.

4.2 Grupo SO(2)

O grupo $SO(2)$ é o grupo especial ortogonal de matrizes 2×2 com determinante igual a 1, representando as rotações no plano. Trata-se de um grupo de Lie compacto, o que implica que é finito e fechado, sendo amplamente utilizado na física e geometria para descrever simetrias rotacionais.

A equação 4.6 define $SO(2)$ como:

$$\mathrm{SO}(2) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{O}(2) \mid \det A = 1\}. \tag{4.17}$$

Suponha que a matriz $\mathbf{A}$ seja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Nesse caso, o vetor (a,b) pertence ao círculo unitário, o que implica que $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$, para algum ângulo θ no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. O vetor (c,d), que forma um ângulo reto com (a,b) e também está no círculo unitário, pode ser representado por $c = \cos\varphi$ e $d = \sin\varphi$, onde

$\varphi = \theta + \pi/2$ ou $\varphi = \theta - \pi/2$. Para o determinante +1, obtemos a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Essa matriz pertence ao grupo $SO(2)$ e representa uma rotação anti-horária de um ângulo θ (ARMSTRONG, 1988).

Por outro lado, se desejarmos obter um determinante igual a -1 e um grupo $O(2)$, temos a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

Essa matriz representa uma reflexão em relação a uma reta que passa pela origem (ARMSTRONG, 1988).

Podemos determinar um gerador de $SO(2)$ utilizando a Equação 3.20:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Considerando que há somente uma matriz anti-simétrica 2×2, podemos concluir que o grupo $SO(2)$ possui apenas um gerador.

4.3 Grupo $SU(2)$ e $SO(3)$

Os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ estão intimamente relacionados, uma vez que as rotações tridimensionais podem ser representadas por matrizes de rotação que pertencem ao grupo $SU(2)$. Isso faz com que os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ sejam ferramentas poderosas para a descrição de simetrias na física teórica.

4.3.1 Grupo SU(2)

O Grupo $SU(2)$ é um conceito matemático e físico que se refere a um grupo de transformações lineares especiais unitárias de duas dimensões. Este grupo é composto por matrizes $2x2$ com determinante igual a 1 e elementos complexos. O grupo unitário em duas dimensões complexas, denotado por $SU(2)$, é definido como:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \mathbf{M} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M} = I, \det \mathbf{M} = 1 \right\}, \tag{4.20}$$

onde $\mathbf{M}^\dagger$ representa a matriz adjunta de $\mathbf{M}$, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade e $\det(\mathbf{M})$ é o determinante de $\mathbf{M}$. A restrição $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} = \mathbf{I}$ impõe quatro condições reais, e a restrição do determinante adiciona mais uma. Portanto, podemos esperar que existam três rotações independentes em $SU(2)$ (DRAY, 2015).

A Álgebra Lie de $SU(2)$ (su(2)) é um conjunto de matrizes anti-Hermitianas de ordem 2, com traço nulo e cujo comutador é definido pelo produto cruzado usual de matrizes. Essa álgebra pode ser formalmente definida da seguinte maneira:

$$su(2) = \left\{ X \in gl(2,\mathbb{C}) | X^\dagger + X = 0, \mathrm{Tr}X = 0 \right\}, \tag{4.21}$$

onde $X^\dagger$ representa a matriz adjunta de X, e $\mathrm{Tr}(X)$ é o traço de X. Nesta notação, optamos por utilizar letras minúsculas, seguindo a convenção encontrada na literatura.

Encontramos as três matrizes linearmente independentes que satisfazem as relações de comutação necessárias para a álgebra $su(2)$:

$$\boldsymbol{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Essas matrizes obedecem às seguintes relações de comutação:

$$\left[\boldsymbol{\sigma_i}, \boldsymbol{\sigma_j}\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma_k},$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. Às vezes, também se utilizam as matrizes:

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3,$$

que satisfazem as relações de comutação:

$$\left[\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\widetilde{\sigma}_k.$$

Além disso, podemos introduzimos as matrizes:

$$\mathbf{J}_1 = -\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad \mathbf{J}_3 = -\frac{1}{2}\sigma_3, \tag{4.23}$$

que satisfazem as relações de comutação,

$$[\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_l] = i\varepsilon_{klm}\mathbf{J}_m. \tag{4.24}$$

4.3.1.1 *Operador de Casimir de $su(2)$*

Conforme mencionado na seção anterior sobre o operador de Casimir de $su(2)$, é válido afirmar que a álgebra de $su(2)$ é caracterizada por possuir um único operador de Casimir, denominado C_2.

Na representação $|j,m\rangle$ do $su(2)$, os operadores de quadrático de Casimir são definidos como:

$$C_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \tag{4.25}$$

onde J_1, J_2 e J_3 são os três geradores da álgebra $su(2)$. O autovalor do operador de Casimir quadrático na representação $|j,m\rangle$ é dado por:

$$C_2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle, \tag{4.26}$$

onde $j = 0, 1/2, 1, ...$ é o valor do momento angular total do sistema, e $\hbar$ é a constante *reduzida de Planck* (SAKURAI, 1994).

4.4 Grupo $SO(3)$

O Grupo especial ortogonal tridimensional (SO(3)) é um conjunto de rotações tridimensionais no espaço euclidiano tridimensional. Ele é composto por matrizes de rotação 3×3 que possuem determinante igual a 1. O nome *especial* refere-se à restrição de ter um determinante unitário. Mais precisamente, o grupo $SO(3)$ pode ser definido como:

$$\mathrm{SO}(3) = \{\mathbf{R} \in \mathrm{O}(3) \mid \det \mathbf{R} = 1\}, \tag{4.27}$$

onde $\mathrm{O}(3)$ é o conjunto das matrizes ortogonais 3×3.

As matrizes de rotação do grupo $SO(3)$ podem ser obtidas ao generalizar a matriz de rotação tridimensional para a terceira dimensão. As matrizes $R_x(\alpha)$, $R_y(\alpha)$ e $R_z(\alpha)$ representam as rotações nos planos yz, zx e xy, respectivamente. Elas podem ser escritas como:

$$R_x = R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_y = R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_z = R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde α representa o ângulo de rotação (DRAY, 2015).

O grupo $SO(3)$ pode ser gerado pelos geradores infinitesimais G_1, G_2 e G_3. Esses geradores correspondem aos momentos angulares nos eixos x, y e z, respectivamente. Eles são obtidos utilizando a Equação 3.20 e são representados pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esses geradores satisfazem as relações de comutação:

$$[\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{G}_K, \tag{4.28}$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

É interessante notar que as álgebras de Lie $su(2)$ e $so(3)$ são isomórficas, o que significa que elas têm a mesma estrutura algébrica. Em outras palavras, existe uma correspondência entre os geradores do grupo de rotação tridimensional $SO(3)$ e os geradores do grupo unitário especial $SU(2)$. Essa correspondência pode ser estabelecida utilizando a relação:

$$\mathbf{J}_k = i\mathbf{G}_k, \tag{4.29}$$

onde J_k são os geradores do grupo $SU(2)$. Dessa forma, temos o seguinte isomorfismo:

$$\tilde{\sigma}_i \leftrightarrow -\mathbf{J}_i, \tag{4.30}$$

onde $\tilde{\sigma}_i$ é uma matriz de Pauli, com i variando de 1 a 3 (KOSMANN-SCHWARZBACH *et al.*, 2010).

4.4.1 Operador de Casimir do álgebra de Lie $so(3)$

De acordo com a Equação 3.37, a ordem dos operadores de Casimir de $so(3)$ é C_2. O operador de Casimir é definido como o quadrado do momento angular total em uma determinada representação da álgebra de Lie $so(3)$. Matematicamente, ele pode ser expresso da seguinte forma:

$$\hat{C} = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2, \tag{4.31}$$

onde $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ e $\hat{J}_3$ são os geradores da álgebra de Lie $so(3)$.

Dentro de uma base ortonormal de estados $|j,m\rangle$, o operador de Casimir atua sobre esses estados da seguinte maneira:

$$\hat{C}|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle, \tag{4.32}$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π e j é um número inteiro ou semi-inteiro que representa o valor do momento angular total.

Portanto, os autovalores do operador de Casimir na representação $|j,m\rangle$ da álgebra $so(3)$ são dados por $\hbar^2 j(j+1)$. Essa relação revela uma propriedade importante, que é o isomorfismo entre as álgebras $su(2)$ e $so(3)$.

4.5 Grupo $SO(4)$

O grupo de Lie $SO(4)$ é o conjunto das rotações rígidas em quatro dimensões. Este grupo pode ser descrito matematicamente como o conjunto de todas as matrizes 4×4 ortogonais com determinante igual a 1. Essas matrizes representam transformações lineares que preservam a norma Euclidiana em um espaço vetorial de quatro dimensões.

4.5.1 Geradores do grupo $SO(4)$

Os geradores de um grupo de Lie, em particular do grupo $SO(4)$, são as derivadas dos elementos do grupo em torno da identidade. Eles são as infinitésimas transformações que geram o grupo e são representados por matrizes anti-Hermitianas. Vamos determinar essas matrizes em termos de componentes arbitrárias de uma matriz genérica do grupo $SO(4)$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Utilizando a referência 3.23 e igualando as componentes, podemos verificar que a relação entre elas é a seguinte:

$$\begin{aligned} & x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 0, & & \\ & x_{21} = -x_{12}, & & x_{31} = -x_{13}, \\ & x_{41} = -x_{14}, & & x_{32} = -x_{23}, \\ & x_{42} = -x_{24}, & & x_{43} = -x_{34}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Por questões de simplicidade, vamos renomear as componentes não nulas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_1, \quad x_{23} = x_4, \\ x_{13} &= x_2, \quad x_{24} = x_5, \\ x_{14} &= x_3, \quad x_{34} = x_6. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Utilizando esta notação simplificada e as relações 4.34, podemos reescrever a matriz 4.33 como,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Assim, o conjunto $x_P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ é o conjunto dos chamados parâmetros livres do grupo $SO(4)$.

Para obtermos os geradores do grupo, basta decompormos a matriz 4.36 da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G_3}$$

$$+ x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G_4} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G_5} + x_6 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{G_6}, \tag{4.37}$$

onde as matrizes $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4, \mathbf{G}_5$ e $\mathbf{G}_6$ formam o conjunto dos geradores do grupo $SO(4)$. A matriz x pode ser então representada como uma combinação linear desses geradores:

$$x = \sum_{k=1}^{6} x_k \mathbf{G}_k. \tag{4.38}$$

Os geradores são linearmente independentes e funcionam como vetores de base, da mesma forma que os vetores usuais de base em espaços vetoriais. Eles constituem uma base para o espaço tangente à identidade. Formalmente, o espaço tangente à identidade de uma variedade diferenciável é denotado por $T_{I_4}M$, onde M é a variedade e I_4 é a identidade. No caso do grupo $SO(4)$, o espaço tangente à identidade é simbolizado por $T_{I_4}SO(4)$.

Em geral, a dimensão de um grupo de Lie é igual ao número de geradores independentes do grupo. Como temos aqui um total de 6 “vetores de base”, podemos concluir que essa é a dimensão m do grupo $SO(4)$, visto como um espaço topológico. De modo geral, para o grupo de Lie $SO(n)$, a dimensão é sempre dada pela seguinte expressão:

$$\dim[SO(n)] = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Isso ocorre porque uma matriz simétrica $n \times n$ é completamente determinada por seus elementos diagonais e pelos elementos acima da diagonal, que formam um triângulo superior. Portanto, existem n elementos diagonais e $(n^2 - n)/2$ elementos acima da diagonal, o que totaliza $n(n-1)/2$ elementos independentes.

4.6 Álgebra de Lie do grupo SO(4)

A estrutura do grupo SO(4) é descrita pelas relações de comutação entre seus geradores e segue a definição 3.3.1. Neste contexto, a álgebra de Lie de $SO(4)$ é simbolicamente definida como:

$$so(4) = \left\{x \in T_{I_4} so(4) / x = -x^T, \mathrm{Tr}(x) = 0\right\},$$

onde utilizamos letras minúsculas de acordo com a notação encontrada na literatura. O teorema de Lie estabelece que a dimensão da álgebra de Lie é igual à dimensão do grupo de Lie. Portanto, a relação entre a dimensão do grupo de Lie e a dimensão da álgebra de Lie pode ser expressa como:

$$\dim(\mathrm{SO}(4)) = \dim(\mathrm{so}(4)). \tag{4.39}$$

Os seis geradores independentes em $SO(4)$ podem ser renomeados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{M}_3, \quad \mathbf{G}_4 = \mathbf{M}_1, \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{G}_5 = \mathbf{K}_2, \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{G}_6 = \mathbf{K}_3, \end{aligned} \tag{4.40}$$

formando a álgebra de $SO(4)$ com um total de 15 comutadores, podendo ser expressa resumidamente por:

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{M}_k, \quad [\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{M}_k, \quad [\mathbf{M}_i, \mathbf{K}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{K}_k. \tag{4.41}$$

Esses comutadores podem ser expressos de forma mais sucinta através das seguintes combinações lineares entre M_i e K_j:

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_i + \mathbf{K}_i), \quad \mathbf{F}'_i = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_i - \mathbf{K}_i) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.42}$$

formando uma nova relação de comutação:

$$[\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{F}_k, \quad [\mathbf{F}'_i, \mathbf{F}'_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{F}'_k, \quad [\mathbf{F}_i, \mathbf{F}'_j] = 0. \tag{4.43}$$

Os operadores $\mathbf{F_i}$ e $\mathbf{F_j}'$ formam os elementos da álgebra de Lie de $so(4)$. É evidente que os operadores (F_1, F_2, F_3) e (F'_1, F'_2, F'_3) são fechados separadamente sob comutação, cada um descrevendo uma subálgebra de $so(4)$, denominada $so(3)$. Assim, a álgebra de Lie $so(4)$ é a soma direta de duas álgebras de Lie $so(3)$. Portanto, a álgebra de Lie $so(4)$ é localmente isomorfa ao produto direto de $so(3) \otimes so(3)$. Logo,

$$so(4) \cong su(2) \otimes su(2) \cong so(3) \otimes so(3). \tag{4.44}$$

Para mais detalhes, consultar Wybourne (1974) e Jesus (2023).

No tocante ao operador de Casimir de $so(4)$, ele é um operador invariante sob as transformações geradas pelos geradores de $so(4)$. De acordo com a Equação 3.38, os operadores de Casimir de $so(4)$ têm a seguinte ordem:

$$C_2, C_2'. \tag{4.45}$$

Também podemos calcular os operadores de Casimir de $so(4)$ a partir de uma combinação linear dos operadores de Casimir das álgebras isomórficas a ela. Ou seja,

$$\hat{C}_2 = \hat{J}^2 + \hat{J}'^2, \tag{4.46}$$

$$\hat{C}_2' = \hat{J}^2 - \hat{J}'^2, \tag{4.47}$$

com autovalores:

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots \tag{4.48}$$

e

$$J'^2 = j'(j'+1)\hbar^2, \quad j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots, \tag{4.49}$$

devido o isomorfismo do $su(2)$. Essas relações são importantes porque permitem calcular propriedades invariantes sob transformações de $so(4)$ usando propriedades bem conhecidas de $su(2)$, facilitando assim o estudo e a análise das simetrias e representações de $so(4)$.

Observe que os operadores (F_1, F_2, F_3) e (F_1', F_2', F_3') formam ideais próprios não abelianos em $so(4)$. Portanto, podemos afirmar que a álgebra $so(4)$ é semissimples e se decompõe em duas componentes simples isomorfas a $so(3)$. Essas informações também poderiam ser encontradas analisando a métrica de $so(4)$, mais especificamente, a diagonal da mesma, como já foi discutido anteriormente.

5 O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

O átomo de hidrogênio é considerado o átomo mais simples e mais comum do universo. Ele é composto por um próton carregado positivamente em seu núcleo e um elétron carregado negativamente orbitando ao redor do núcleo. No estudo do átomo de hidrogênio, podemos utilizar o hamiltoniano da seguinte forma:

$$H = \boldsymbol{p}^2/2\mu - \kappa/r, \tag{5.1}$$

Onde μ representa a massa reduzida do sistema e κ é uma quantidade positiva. No caso do átomo de hidrogênio, $\kappa = Z \cdot e^2$, em que Z é a carga nuclear do próton e e é a carga elementar.

Quando uma partícula se move sob a influência de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância em relação à origem, podemos definir um vetor constante conhecido como *vetor de Laplace* ou vetor de *Runge-Lenz*, representado por $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}/\mu - \kappa \boldsymbol{r}/r, \tag{5.2}$$

onde $\boldsymbol{L}$ é o momento angular e $\boldsymbol{r}$ é o vetor posição. Esse vetor de *Runge-Lenz* é conhecido há muito tempo e desempenha um papel importante no estudo do átomo de hidrogênio. A demonstração de que ele é uma constante de movimento pode ser encontrada no Apêndice **??**.

Na mecânica quântica, o vetor de *Runge-Lenz* é definido de forma um pouco diferente, onde acrescentamos o termo $\hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ para garantir um valor hermitiano,

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{2\mu}(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}}) - \kappa \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{5.3}$$

Onde $\hat{\boldsymbol{M}}$ representa o operador de *Runge-Lenz*, $\hat{\boldsymbol{p}}$ é o operador do momento linear, $\hat{\boldsymbol{L}}$ é o operador do momento angular, μ é a massa reduzida e κ é uma constante.

O vetor de *Runge-Lenz* também pode ser expresso em termos de suas componentes ou na forma vetorial:

$$M_i = \frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_{ijk} p_j L_k - i\delta_{il} p_l\right) - \frac{r_i}{r}, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - i\hbar \mathbf{p}\right) - \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{5.5}$$

respectivamente. A demonstração destas expressões pode ser encontrada no apêndice B.

Sendo $\hat{\boldsymbol{M}}$ uma constante de movimento, podemos verificar que, além de comutar com a hamiltoniana,

$$[\hat{\boldsymbol{M}}, \hat{H}] = 0, \tag{5.6}$$

quando multiplicado à esquerda ou à direita por $\hat{\boldsymbol{L}}$, ele se anula:

$$\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{M}} = \hat{\boldsymbol{M}} \cdot \hat{\boldsymbol{L}} = 0. \tag{5.7}$$

Além disso, podemos expressar $\hat{\boldsymbol{M}}^2$ na forma:

$$\hat{\boldsymbol{M}}^2 = \frac{2\hat{H}}{\mu(\hat{L}^2 + \hbar^2)} + \kappa^2. \tag{5.8}$$

As demonstrações dessas relações podem ser encontradas no Apêndice B.

Os comutadores entre as componentes $\hat{\boldsymbol{L}}$ e $\hat{\boldsymbol{M}}$ são dados por:

$$[\hat{L}i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{M}_k, \tag{5.9}$$

e

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = -2i\frac{\hbar}{\mu}\hat{H}\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k = N^{-2}\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k, \tag{5.10}$$

onde $N^{-2} = -2i\frac{\hbar}{\mu}\hat{H}$. A demonstração da equação 5.10 pode ser encontrada no Apêndice B.

Definindo $\hat{\boldsymbol{B}}$ como um operador de normalização que transforma $\hat{\boldsymbol{M}}$ em uma matriz diagonal com autovalores iguais, temos:

$$\hat{B} = (N^2)^{\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{M}}. \tag{5.11}$$

Substituindo nos comutadores 5.9 e 5.10, obtemos as seguintes relações para os comutadores entre os operadores $\hat{\boldsymbol{L}}$ e $\hat{\boldsymbol{B}}$:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k, \quad [\hat{B}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{B}_k, \quad \text{e} \quad [\hat{B}_i, \hat{B}_j] = \varepsilon_{ijk}\hat{L}_k. \tag{5.12}$$

Aqui, substituímos $\hat{H}$ pelo seu autovalor E na equação 5.10, devido à independência do tempo e à comutação com $\hat{\boldsymbol{L}}$ e $\hat{\boldsymbol{M}}$ (JESUS, 2023; HIRSHFELD, 2012).

Para o caso discreto, os operadores $\hat{\boldsymbol{L}}$ e $\hat{\boldsymbol{B}}$ formam um conjunto de geradores para a álgebra de Lie $so(4)$, proporcionando uma realização dos geradores de $so(4)$. Consequentemente, as relações de comutação dadas pela equação 5.12 são isomorfas à álgebra de Lie do grupo $SO(4)$ (JESUS, 2023; HIRSHFELD, 2012). Para o caso discreto, a equação 5.12 forma um conjunto de geradores para a álgebra de Lie $so(4)$. No entanto, no caso contínuo, obtemos a álgebra de Lie $so(3,1)$, o que requer uma análise mais profunda, incluindo a introdução de operadores tensoriais e a consideração do espaço-tempo de *Minkowski*.

A álgebra de Lie $so(4)$, representada pela Equação 5.12, pode ser simplificada por meio de combinações lineares dos operadores $\hat{L}$ e $\hat{B}$. Essas combinações resultam nos operadores $\hat{J}$ e $\hat{J}'$:

$$\hat{J} = \frac{1}{2}(\hat{L} + \hat{B}), \tag{5.13}$$

$$\hat{J}' = \frac{1}{2}(\hat{L} - \hat{B}). \tag{5.14}$$

Os quais satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\left[J_i, J_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad \left[J'_i, J'_j\right] = i\hbar\varepsilon ijkJ'_k, \quad \text{e} \quad \left[J_i, J'_j\right] = 0. \tag{5.15}$$

Isso evidencia o isomorfismo com a álgebra de Lie $su(2)$. Podemos ver as demonstração da equação 5.15 no Apêndice B.

No grupo $SO(4)$, existem dois operadores de Casimir independentes que podem ser construídos a partir de combinações de $\hat{J}$ e $\hat{J}'$. O que vamos fazer agora é recalcular, utilizando $\hat{J}$ e $\hat{J}'$, em termos de $\hat{L}$ e $\hat{B}$.

Vamos começar calculando $\hat{J}^2$ e $\hat{J'}^2$ em termos de $\hat{L}$ e $\hat{B}$, conforme as equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 &= \hat{J} \cdot \hat{J} \\
&= \frac{1}{4}(\hat{L} + \hat{B}) \cdot (\hat{L} + \hat{B}) \\
&= \frac{1}{4}\{\hat{L} \cdot \hat{L} + \hat{B} \cdot \hat{L} + \hat{L} \cdot \hat{B} + \hat{B} \cdot \hat{B}\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\hat{L}^2 + \hat{B}^2 + \hat{B} \cdot \hat{L} + \hat{L} \cdot \hat{B}\right\},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J'}^2 &= \hat{J}' \cdot \hat{J}' \\
&= \frac{1}{4}(\hat{L} - \hat{B}) \cdot (\hat{L} - \hat{B}) \\
&= \frac{1}{4}\{\hat{L} \cdot \hat{L} - \hat{B} \cdot \hat{L} - \hat{L} \cdot \hat{B} + \hat{B} \cdot \hat{B}\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\hat{L}^2 + \hat{B}^2 - \hat{B} \cdot \hat{L} - \hat{L} \cdot \hat{B}\right\}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Substituindo os resultados correspondentes nos operadores de Casimir das equações 4.46 e 4.47, obtemos:

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}^2 + \hat{B}^2\right), \tag{5.18}$$

$$\hat{C}'_2 = \frac{1}{2}(\hat{B}\cdot\hat{L} + \hat{L}\cdot\hat{B}). \tag{5.19}$$

Utilizando a Equação 5.7 na equação acima, obtém-se $\hat{C}'_2 = 0$. Essa condição implica em uma degenerescência $j = j'$, uma vez que, ao substituirmos $\hat{C}'_2 = 0$ na Equação 4.47, encontramos $J^2 = J'^2$.

Diante das informações apresentadas anteriormente, estamos agora aptos a calcular a energia do átomo de hidrogênio. Seja $|j,m\rangle$ um autoestado simultâneo de L^2 e H. A atuação do operador de Casimir $\hat{C}_2$ nas equações 5.18 e 4.47 é, respectivamente:

$$\hat{C}_1|j,m\rangle = \left(\hat{J}^2 + \hat{J}'^2\right)|j,m\rangle = 2j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle, \tag{5.20}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1|j,m\rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{L}^2 + \hat{B}^2\right)|j,m\rangle &= \frac{1}{2}\left(\hat{L}^2 - \frac{\hat{M}^2}{2E}\mu\right)|j,m\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{L}^2 - \frac{\mu}{2E}\left\{\frac{2H}{\mu}\left(\hat{L}^2 + \hbar^2\right) + k^2\right\}\right)|j,m\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{L}^2 - \frac{1}{2E}2E\left(\hat{L}^2 + \hbar^2\right) - \frac{\mu k^2}{2E}\right)|j,m\rangle \\
&= \left(-\frac{\mu k^2}{4E} - \frac{\hbar^2}{2}\right)|j,m\rangle.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Na última equação, utilizamos a equação 5.11 para substituir $\hat{M}^2$ na equação 5.18.

Igualando os resultados das equações 5.20 e 5.21, temos:

$$2j(j+1)\hbar^2 = -\frac{\hbar^2}{2} - \frac{\mu k^2}{4E},$$

isolando E, obtemos:

$$E = -\mu k^2/\left[2\hbar^2(2j+1)^2\right] \quad \text{com} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots, \tag{5.22}$$

definindo $(2j+1) = n$ e isolando E, obtemos finalmente:

$$E_n = -\frac{\mu k^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1,2,3,4,\ldots. \tag{5.23}$$

Onde os símbolos têm os seguintes significados:

1. E_n representa a energia do n-ésimo nível eletrônico (estado estacionário) em um átomo de hidrogênio.
2. μ é a massa reduzida do sistema, que corresponde à razão entre a massa do elétron e a massa do próton.

3. k é a constante de Coulomb, cujo valor depende das cargas do elétron e do núcleo.
4. $\hbar$ é a constante reduzida de *Planc*k.
5. n é o número quântico principal, que indica o nível eletrônico em que o elétron se encontra.

Para facilitar a compreensão, utilizaremos as unidades atômicas de *Hartree*, e a fórmula assume a seguinte forma:

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

A presente fórmula representa a expressão desenvolvida por Bohr em 1913, a qual descreve os níveis de energia do átomo de hidrogênio não relativístico. Essa formulação é amplamente encontrada na literatura acadêmica.

É interessante observar que utilizamos a estrutura da álgebra de Lie $su(2) \otimes su(2)$, a qual é isomórfica a $so(4)$. No entanto, o ponto fundamental reside no operador de Casimir, que desempenha um papel crucial na determinação da energia do sistema.

O operador de Casimir é um conceito proveniente da teoria de álgebras de Lie. Portanto, ao utilizarmos o operador de Casimir em uma álgebra isomórfica a $so(4)$, estamos essencialmente explorando uma estrutura matemática que possibilita uma análise eficiente da energia do sistema, independentemente da escolha da álgebra específica, contanto que esta seja isomórfica à álgebra de Lie $so(4)$.

6 CONCLUSÕES

A presente dissertação teve como objetivo investigar o comportamento do Átomo de Hidrogênio por meio da aplicação da álgebra de Lie. A álgebra de Lie foi introduzida nos primeiros capítulos, proporcionando uma análise mais aprofundada da presença dos grupos $SO(4)$ e $SO(3,1)$ no contexto do átomo de hidrogênio. Foi comum a utilização do comutador da álgebra, sendo relevante notar que, em algumas fontes literárias, emprega-se um sinal de subtração sob o operador, indicando sua natureza como uma parte distinta da equação. Adicionalmente, foi observado que a segunda parte, relacionada ao $SO(3,1)$, representa um grupo de natureza relativística, o qual possui potencial para investigações futuras.

Foi constatado que a álgebra $so(4)$ pode ser decomposta em subgrupos isomórficos. Especificamente:

$$so(4) \cong su(2) \otimes su(2) \cong so(3) \otimes so(3). \tag{6.1}$$

Uma alternativa viável reside na representação desses grupos por meio de quatérnions ou octónions, conjuntos numéricos com quatro e oito elementos, respectivamente, os quais possuem suas próprias estruturas algébricas intrínsecas.

Adicionalmente, percebeu-se que, na resolução do problema relacionado ao átomo de hidrogênio, mais precisamente na determinação da energia (E), utilizou-se o operador de Casimir associado à álgebra de $SO(4)$. Tal abordagem revela a possibilidade de explorar novas álgebras, uma vez que álgebras com o mesmo comutador de Casimir são, essencialmente, equivalentes.

Em resumo, constatou-se que a combinação apropriada da Álgebra de Lie e do Grupo de Lie demonstra ser eficaz na resolução de desafios no campo da física.

REFERÊNCIAS

ARMSTRONG, M. **Groups and Symmetry**. New York: Springer-Verlag, 1988.

CORNWELL, J. F. **Group theory in physics**. London: Academic press, 1984. v. 2.

CORNWELL, J. F. **Group theory in physics**: an introduction. USA: Academic press, 1997.

COSTA, G. F. G. **Symmetries and group theory in particle physics**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012. v. 823.

DRAY, C. A. M. T. **The geometry of the octonions**. USA: World Scientific Co. Pte. Ltd, 2015.

HALL, B. C. **Lie Groups, Lie Algebras and Representations**: an elementary introduction. EUA: Springer, 2003.

HIRSHFELD, A. **The Supersymmetric Dirac Equation**: the application to hydrogenic atoms. London: Imperial College Press, 2012.

IACHELLO, F. **Lie algebras and applications**. USA: Springer, 2006.

JESUS, A. L. d. Introdução ao grupo so (4) com aplicações à física: transformação de galilei e átomo de hidrogênio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 45, p. e20230012, 2023. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/rzPX4Q9NNrzqGwWg9pVZXWM/?lang=pt.

KOSMANN-SCHWARZBACH, Y. *et al.* **Groups and symmetries**. New York: Springer, 2010.

SAKURAI, J. N. J. **Modern quantum mechanics**. 2. ed. San Francisco: Jim Smith, 1994.

SAVAGE, A. **Introduction to Lie groups**. Canada: Department of Mathematics and Statistics, 2015.

WYBOURNE, B. G. **Classical groups for physicists**. Canada: John Wiley and Sons, Inc, 1974.

APÊNDICE A – DEMOSTRAÇÕES DE TEOREMAS

Demostração do Teorema 2.3.1

Antes de partir para a demonstração, é importante saber que:

1. A matriz original $\mathbf{D}(x)$ é uma matriz de representação, portanto, é uma matriz quadrada de ordem n.
2. A matriz $\mathbf{S}(x)$ é uma matriz não singular, ou seja, uma matriz invertível. Portanto, ela também é uma matriz quadrada de ordem n.

Para todos x_1 e $x_2 \in G$, consideremos as equações 2.5 e 2.6. Vamos demonstrar o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}'(x_1x_2) &= \mathbf{S}^{-1}(x_1x_2)\mathbf{D}(x_1x_2)\mathbf{S}(x_1x_2)\\
\mathbf{D}'(x_1)\mathbf{D}'(x_2) &= \mathbf{S}^{-1}(x_1x_2)\mathbf{D}(x_1)\mathbf{S}(x_1x_2)\mathbf{S}^{-1}(x_1x_2)\mathbf{D}(x_2)\mathbf{S}(x_1x_2) \quad \text{(pela equação 2.6)}\\
&= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}(x_1)\mathbf{D}(x_2)\mathbf{S} \quad \text{(pela propriedade de similaridade de } \mathbf{D}\text{)}\\
&= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}(x_1x_2)\mathbf{S} \quad \text{(pela propriedade de homomorfismo de } \mathbf{D}\text{)}\\
&= \mathbf{D}'(x_1x_2) \quad \text{(pela equação 2.6).}
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade das matrizes de representação 2.5 em S e D:

$$\mathbf{D}'(x_1)\mathbf{D}'(x_2) = \mathbf{S}^{-1}(x_1)\mathbf{S}^{-1}(x_2)\mathbf{D}(x_2)\mathbf{S}(x_1x_2).$$

Demostração do Teorema 3.1.1

Vamos considerar um elemento específico da matriz $e^{\mathbf{A}}$, representado por A_{rs}. Para verificar a convergência da série de $e^{\mathbf{A}}$, precisamos verificar a convergência da série dos elementos A_{rs}.

Ao usar a série de Taylor na expressão para $e^{\mathbf{A}}$ e ao considerar um elemento específico da matriz $e^{\mathbf{A}}$, que é denotado por A_{rs}, obtemos:

$$A_{rs} = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots)_{rs}$$

Agora, vamos expandir o produto matricial acima e isolar o termo A_{rs}:

$$A_{rs} = \delta_{rs} + A_{rs}^{(1)} + A_{rs}^{(2)} + A_{rs}^{(3)} + \ldots.$$

Agora, vamos considerar o termo $A_{rs}^{(n)}$. Esse termo envolve o produto de n matrizes $\mathbf{A}$, ou seja, $\mathbf{A}^n$. O número de termos envolvendo o elemento A_{rs} em $\mathbf{A}^n$ é limitado por n^2. Portanto, podemos escrever:

$$|A_{rs}^{(n)}| \leq C^n,$$

onde C é uma constante que depende de $\mathbf{A}$ e r, s. Agora, vamos usar o teste da razão para verificar a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} A_{rs}^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{rs}^{(n+1)}}{A_{rs}^{(n)}} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{C^{n+1}}{C^n} \leq \lim_{n\to\infty} C \leq C.$$

Se $C < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_{rs}^{(n)}$ converge absolutamente. Portanto, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{rs}^{(n)}$$

converge para A_{rs}.

Dado que essa convergência é verdadeira para todos os elementos A_{rs}, concluímos que a série para $e^{\mathbf{A}}$ converge para qualquer matriz $\mathbf{A}$ de tamanho $m \times m$.

Demostração do Teorema 3.1.2

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]+\frac{1}{12}[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]+\frac{1}{12}[\mathbf{B},[\mathbf{B},\mathbf{A}]]+\cdots}. \tag{A.1}$$

Portanto, quando os comutadores $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ comutam, temos:

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}. \tag{A.2}$$

Demostração do Teorema 3.1.4

Calculando $\dot{\mathbf{A}}(t) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}$ para $t = 0$, encontramos $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{A}}(0)$.

Faça

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t) \exp\{-t\dot{\mathbf{A}}(0)\}$$

de forma que $\dot{\mathbf{B}}(t) = \{\dot{\mathbf{A}}(t) - \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(0)\} \exp\{-t\dot{\mathbf{A}}(0)\}$.

No entanto, da Equação 3.8, para qualquer t,

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \lim_{s\to 0}[\mathbf{A}(t+s) - \mathbf{A}(t)]/s = \lim_{s\to 0}\mathbf{A}(t)[\mathbf{A}(s) - \mathbf{A}(0)]/s,$$

para que

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{A}}(0).$$

Assim, $\dot{\mathbf{B}}(t) = 0$ para todo t e, consequentemente, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(0) = 1$, de onde a Equação 3.9 segue imediatamente.

Demostração do Teorema 3.7.1

Para quaisquer valores de x e y pertencentes a $\mathscr{L}$, bem como para quaisquer valores de α e β do campo de $\mathscr{L}$, de acordo com a Equação 3.28, temos:

$$\left[\alpha x + \beta y, x_j\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{ad}(\alpha x + \beta y)_{kj} x_{hk}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{A.3}$$

A partir da definição fornecida em 3.3.1 e utilizando a Equação 3.28, para $j = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\left[\alpha x + \beta y, x_j\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha \mathbf{ad}(x)_{kj} + \beta \mathbf{ad}(y)_{kj}\right] x_{hk}. \tag{A.4}$$

Assim, igualando os lados direitos das Equações A.3 e A.4, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{ad}(\alpha x + \beta y)_{kj} x_{hk} = \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha \mathbf{ad}(x)kj + \beta \mathbf{ad}(y)kj\right] x_{hk}.$$

Esta igualdade é válida para qualquer escolha de a_j, onde j varia de 1 a n. Portanto, podemos afirmar que:

$$\mathbf{ad}(\alpha x + \beta y)_{kj} = \alpha \mathbf{ad}(x)_{kj} + \beta \mathbf{ad}(y)_{kj}. \tag{A.5}$$

Finalmente, para quaisquer valores de x e y pertencentes a $\mathscr{L}$, de acordo com a Equação 3.28, temos o seguinte:

$$\mathbf{ad}([x,y])_{kj} = \mathbf{ad}(x)_{kj} + \mathbf{ad}(y)_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{A.6}$$

No entanto, utilizando a identidade de Jacobi e a Equação 3.28, temos:

$$\left[[x,y], x_j\right] = -\left[[y, x_j], x\right] - \left[[x_j, x], y\right] = -\mathbf{ad}(y)_{kj}\mathbf{ad}(x)_{kh}x_k + \mathbf{ad}(x)_{kj}\mathbf{ad}(y)_{kj}x_k. \tag{A.7}$$

Essa igualdade vale para qualquer escolha de x_j, ou seja, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Portanto, podemos afirmar o seguinte:

$$\mathbf{ad}([x,y]) = [\mathbf{ad}(x), \mathbf{ad}(y)]. \tag{A.8}$$

Portanto, podemos concluir que, se $\mathscr{L}$ é uma álgebra de Lie real, todos os elementos de $\mathbf{ad}(x)$ são números reais para todo $x \in \mathscr{L}$ (CORNWELL, 1984).

<u>Demostração do Teorema 3.7.2</u>

A prova equivale a mostrar que, para que exista uma subálgebra abeliana não trivial, precisamos necessariamente

$$\det \left| g_{ij} \right| = 0.$$

Suponha que uma álgebra de Lie possua um ideal abeliano, cujos índices serão distinguidos pela adição de primos.

Primeiro, consideremos a expressão para $g_{ij'}$:

$$g_{ij'} = c^{k}_{i\rho} c^{\rho}_{j'k}.$$

Agora, utilizando as propriedades das constantes de estrutura da álgebra de Lie, realizamos algumas manipulações:

$$\begin{aligned} g_{ij'} &= c^{k}_{i\rho'} c^{\rho' k}_{j'k} \\ &= -c^{k}_{\rho' i} c^{\rho'}_{j'k} \\ &= -c^{k}_{\rho' i} c^{\rho'}_{j'k'} \end{aligned}$$

Ao chegar a este ponto, não podemos afirmar que $g_{ij'}$ seja sempre igual a zero. A igualdade $g_{ij'} = 0$ só é válida se a álgebra de Lie possuir um ideal abeliano específico. No caso, podemos afirmar que a linha j' do determinante de $g_{ij'}$ é igual a zero. Logo:

$$\det \left| g_{ij'} \right| = 0.$$

APÊNDICE B – DEMOSTRAÇÕES DE EQUAÇÕES

Demostração da Equação 5.2

Seja $\mathbf{L} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}(\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})$ e $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}\times\mathbf{L} = \left(-\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\times\left(\mu r^2\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\\ &= -\mu k\frac{d\theta}{dt}[\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \mu k\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d}{dt}(\mu k\hat{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

Substituindo em $\dot{\boldsymbol{M}} = 0$, $\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{d}{dt}(\mu k\hat{\boldsymbol{r}}) - \frac{d}{dt}(\mu k\hat{\boldsymbol{r}}) = 0$.

Demostração da Equação 5.4

Seja $(\hat{P}\times\hat{L})_i = \varepsilon_{ijk}P_jL_k$ os componentes do produto entre os vetores $\hat{P}$ e $\hat{L}$, e $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$ é uma propriedade do símbolo de Levi-Civita. Portanto,

$$\begin{aligned}M_i &= \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_jL_k - \varepsilon_{ijk}\left\{p_kL_j + i\varepsilon_{jkl}p_l\right\}\right) - \frac{r_i}{r}\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_jL_k - \varepsilon_{ijk}p_kL_j - i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}P_l\right) - \frac{p_i}{r}\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_jL_k - \varepsilon_{ikj}p_jL_k - i\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{kjl}p_l\right) - \frac{r_i}{r}\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_jL_k + \varepsilon_{ijk}p_jL_k - i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}p_l\right) - \frac{r_i}{r}\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(2\varepsilon_{ijk}p_jL_k - i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}p_l\right) - \frac{r_i}{r}\\ &= \frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_jL_k - i\delta_{il}p_l\right) - \frac{r_i}{r}.\end{aligned} \tag{B.1}$$

Demostração da Equação 5.5

Com o propósito de demonstrar a relação apresentada na Equação 5.5, procederemos com algumas observações.

Inicialmente, consideramos a seguinte expressão:

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{2\mu}(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{p}}) - \kappa\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{B.2}$$

Analisando a componente i do produto vetorial $\mathbf{p}\times\mathbf{L}$, temos:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i &= \sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}L_j p_k \\
&= \sum_{k,j}\varepsilon_{ikj}L_j p_k \\
&= \sum_{j,k}\varepsilon_{jik}p_k L_j + 2i\hbar p_i.
\end{aligned} \tag{B.3}
$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e $\hbar$ denota a constante de Planck reduzida. A presença do termo $2i\hbar p_i$ resulta da não comutatividade dos operadores $\hat{\mathbf{L}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$.

Assim, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$
(\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i = -(\mathbf{p}\times\mathbf{L})_i + 2i\hbar p_i. \tag{B.4}
$$

Substituindo a Equação B.4 na Equação anterior, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \frac{1}{2\mu}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}+\mathbf{p}\times\mathbf{L}-2i\hbar p_i) - \frac{\mathbf{r}}{r} \\
&= \frac{1}{\mu}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-i\hbar p_i) - \frac{\mathbf{r}}{r}.
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

<u>**Demostração da Equação 5.7**</u>

Seja $\hat{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-i\hbar.\mathbf{p}) - \hat{\boldsymbol{r}}$ a forma vetorial da Equação 5.4. Então,

$$
\begin{aligned}
\vec{M}\cdot\vec{L} &= \left(\vec{p}\times\vec{L}-i\hbar\vec{p}-\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{L} \\
&= (\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{L} - i\hbar\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) - \frac{\vec{r}}{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) \\
&= \vec{p}\cdot(\vec{L}\times\vec{L}) - i\hbar\vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{p}) - \frac{1}{r}(\vec{r}\times\vec{r})\cdot\vec{p} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.6}
$$

Da mesma forma, $\mathbf{L}\cdot\hat{\boldsymbol{M}} = 0$

<u>**Demostração da Equação 5.8**</u>

Seja $\hat{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-i\hbar\mathbf{p}) - \hat{\boldsymbol{r}}$ a forma vetorial da Equação 5.4. Assim, temos:

$$
\mu^2\left(\boldsymbol{M}^2-k^2\right) = \underbrace{(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-i\hbar\mathbf{p})^2}_{1} - \mu k\underbrace{(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-i\hbar\mathbf{p})\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}_{2} - \mu k\underbrace{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-i\hbar\mathbf{p})}_{3}. \tag{B.7}
$$

Distribuindo a parte 1,

$$
(p\times L - \mathrm{i}\hbar p)^2 = \underbrace{(p\times L)^2}_{a} - \underbrace{\mathrm{i}\hbar(p\times L)\cdot p}_{b} - \underbrace{\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{p}\cdot(p\times L)}_{c} - \hbar^2 p^2 \tag{B.8}
$$

A distribuição do termo a leva a:

$$(p \times L)^2 = \sum_{ijkmn} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{inm} p_j L_k p_n L_m$$

Usando a identidade $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{inm} = \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}$, podemos simplificar a expressão acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{ijkmn} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{inm} p_j L_k p_n L_m &= \sum_{jkmn} \left(\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}\right) p_j L_k p_n L_m \\ &= \sum_{jk} \left(p_j L_k p_j L_k - p_j L_k p_k L_j\right)\end{aligned}$$

O segundo termo desaparece devido a:

$$\begin{aligned}p_j L_k p_k L_j &= (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{L}) p_k L_j - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{L}) p_j L_k \\ &= (\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p}) p_k L_j - (\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p}) p_j L_k \\ &= \boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p})\boldsymbol{L} \\ &= 0,\end{aligned}$$

enquanto no primeiro termo, a comutação de L_k e p_j resulta em:

$$\begin{aligned}\sum_{jk} \left(p_j L_k p_j L_k\right) &= \sum_{jk} p_j^2 L_k^2 + \mathrm{i}\hbar \sum_{jkm} \varepsilon_{kjm} p_j p_m L_k \\ &= p^2 L^2.\end{aligned}$$

Distribuindo o termo b:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{p} &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} p_j L_k p_i \\ &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} p_j p_i L_k + i\hbar \sum_{ijkm} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kim} p_j p_m \\ &= 2\mathrm{i}\hbar \boldsymbol{p}^2.\end{aligned} \tag{B.9}$$

Distribuindo o termo c:

$$p\cdot(p\times L) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} p_i p_j L_k \equiv 0. \tag{B.10}$$

Substituindo B.29, B.9 e B.32 em B.8,

$$\begin{aligned}(p\times L - \mathrm{i}\hbar p)^2 &= p^2 L^2 - 2(\mathrm{i}\hbar)^2 p^2 - \hbar^2 p^2 \\ &= p^2\left(L^2 + \hbar^2\right).\end{aligned} \tag{B.11}$$

Para encontrar as expressões para 2 e 3, utilizaremos as seguintes identidades:

1. $(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot\mathbf{r} = L^2 + 2i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})$,
2. $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = L^2$.

Calculando 2:

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - i\hbar\mathbf{p})\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\frac{\mathbf{r}}{r} - i\hbar\mathbf{p}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{B.12}$$

Usando a identidade 1, obtemos:

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - i\hbar\mathbf{p})\cdot\hat{\boldsymbol{r}} &= \frac{L^2 + 2i\hbar(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r} - i\hbar\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} \\ &= \frac{L^2}{r} + i\hbar\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r}\end{aligned} \tag{B.13}$$

Para a expressão 3:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - i\hbar\mathbf{p}) &= \hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - i\hbar\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{p} \\ &= \frac{L^2}{r} - i\hbar\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{p}\end{aligned} \tag{B.14}$$

Substituindo as expressões B.11, B.13 e B.14 na Equação B.7, chegamos a:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^2 &= \frac{1}{\mu^2}\left(\mathbf{p}^2\left(L^2+\hbar^2\right) - \frac{2k\mu}{r}L^2 - \frac{2k\mu\hbar^2}{r}\right) + k^2 \\ &= \frac{2}{k\mu}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{k}{r}\right)\left(L^2+\hbar^2\right) = \frac{2H}{\mu}\left(L^2+\hbar^2\right) + k^2.\end{aligned} \tag{B.15}$$

Substituindo B.11, B.13, B.14 na Equação B.7,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^2 &= \frac{1}{\mu^2}\left(\mathbf{p}^2\left(L^2+\hbar^2\right) - \frac{2k\mu}{r}L^2 - \frac{2k\mu\hbar^2}{r}\right) + k^2 \\ &= \frac{2}{k\mu}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{k}{r}\right)\left(L^2+\hbar^2\right) = \frac{2H}{\mu}\left(L^2+\hbar^2\right) + k^2.\end{aligned} \tag{B.16}$$

Demostração da Equação 5.9

Seja L_i o conjunto de componentes do momento angular definido como $L_i = \varepsilon_{ijk}x_jp_k$. Então, temos:

$$[L_i, x_m] = \varepsilon_{irs}[x_rp_s, x_m] = \varepsilon_{irs}x_r[p_s, x_m] = -i\varepsilon_{irm}x_r = i\varepsilon_{imr}x_r$$

Analogamente, a partir das definições, podemos derivar:

$$[L_i, p_m] = i\varepsilon_{qim}p_q, \tag{B.17}$$

Agora, usando as definições e a relação canônica do momento angular, podemos calcular o comutador entre L_i e M_j da seguinte forma:

$$\left[L_i, L_j\right] = i\varepsilon_{jmn}\left(x_m\left[L_i, p_n\right] + \left[L_i, x_m\right]p_n\right)$$

$$i\varepsilon_{jnm}\left(\varepsilon_{inq}x_q p_m + \varepsilon_{imq}x_n p_q\right) = i\left(x_i p_j - x_j p_i\right) = i\varepsilon_{ijk}L_k.$$

Vamos calcular o comutador entre L_i e M_j. Utilizando a expressão 5.4, a relação canônica do momento angular e o comutador B.17, temos:

$$\begin{aligned}
\left[L_i, M_j\right] &= \left[L_i, \varepsilon_{jkl}P_k L_l - i\delta_{jn}P_n - \frac{r_j}{r}\right] \\
&= \varepsilon_{jkl}P_k\left[L_i, L_l\right] + \varepsilon_{jkl}\left[L_i, P_k\right]L_l \\
&- i\delta_{jn}\left[L_i, P_n\right] - \frac{1}{r}\left[L_i, r_j\right] - \underbrace{\left[L_i, \frac{1}{r}\right]}_{0} r_j \\
&= i\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{ilp}P_k L_p + i\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{ikq}P_q L_l \\
&- i^2\delta_{jn}\varepsilon_{inm}P_m - \frac{1}{r}i\varepsilon_{ijk}r_k
\end{aligned}$$

Substituindo l por i, n por j e m por k, e em seguida colocando $i\varepsilon_{ijk}$ em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left[L_i, M_j\right] &= \underbrace{i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iip}P_k L_p}_{0} + i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ikq}P_q L_i \\
&- i^2\varepsilon_{ijk}P_k - \frac{1}{r}i\varepsilon_{ijk}r_k \\
&= i\varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{kqi}P_q L_i - iP_k - \frac{r_k}{r}\right) \\
&= i\varepsilon_{ijk}M_k
\end{aligned}$$

Demostração da Equação 5.10

Queremos encontrar $[M_i, M_l]$. Já temos M_i da Equação 5.4, onde, por ser um índice mudo, podemos fazer a troca de l por a para deixar l para o outro ε, ou seja:

$$M_i = \frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_j L_k - i\delta_{ia}p_a\right) - \frac{r_i}{r},$$

$$M_l = \frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_{lmn}p_m L_n - i\delta_{lbl}p_b\right) - \frac{r_l}{r}.$$

Sejam a, b, c, d, e e f operadores. O comutador $[a-b-c, d-e-f]$ fica:

$$[a-b-c, d-e-f] = [a,d] + [a,e] + [a,f] + [b,d] + [b,e] + [b,f] + [c,d] + [c,e] + [c,f] \quad \text{(B.18)}$$

Agora, aplicando M_i e M_l em B.18, temos:

$$
\begin{aligned}
[M_i, M_l] = & \left[\ \tfrac{1}{\mu}\left(\varepsilon_{ijk}p_jL_k - i\delta_{ia}p_a\right) - \tfrac{r_i}{r}, \tfrac{1}{\mu}\left(\varepsilon_{lmn}p_mL_n - l\delta_{ab}p_b\right) - \tfrac{r_l}{r}\ \right] \\
= & \frac{1}{\mu^2}\underbrace{\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k, \varepsilon_{lmn}p_mL_n\right]}_{a} + \frac{1}{\mu}\underbrace{\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k, -i\delta_{lb}p_b\right]}_{b} \\
& + \frac{1}{\mu}\underbrace{\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k, -\frac{r_l}{r}\right]}_{c} + \frac{1}{\mu}\underbrace{\left[-i\delta_{ia}p_a, \varepsilon_{lmn}p_mL_n\right]}_{d} \\
& + \underbrace{\left[-\delta_{ia}p_a, -i\delta_{lb}p_b\right]}_{e} + \underbrace{\left[-\delta_{ia}p_a, -\frac{r_l}{r}\right]}_{f} + \frac{1}{\mu}\underbrace{\left[-\frac{r_i}{r}, \varepsilon_{ijk}p_jL_k\right]}_{g} \\
& + \underbrace{\left[-\frac{r_i}{r}, -i\delta_{lb}p_bL_k\right]}_{h} + \underbrace{\left[-\frac{r_i}{r}, -\frac{r_l}{r}\right]}_{i}
\end{aligned}
$$

Para resolver os comutadores de a a i, utilizaremos os seguintes resultados de comutadores:

$$[r_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{B.19}$$

$$[r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{B.20}$$

$$[L_i, p_j] = i\varepsilon_{ijk}p_k \tag{B.21}$$

$$[L_i, r_j] = i\varepsilon_{ijk}r_k \tag{B.22}$$

$$\left[p_i, \frac{1}{r}\right] = \frac{ir_i}{r^3} \tag{B.23}$$

$$\left[L_i, \frac{1}{r}\right] = 0 \tag{B.24}$$

Vamos começar pelos mais fáceis, e e i, onde ambos os comutadores são nulos, de acordo com o comutador B.20.

Resolvendo os comutadores a:

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{ijk}p_jL_k, \varepsilon_{lmn}p_mL_n] &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}[p_jL_k, p_mL_n] \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(p_j[L_k, p_mL_n] + [p_j, p_mL_n]L_n) \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(p_jp_m[L_k, L_n] + p_j[L_k, p_m]L_n + p_m[p_j, L_n]L_k + [p_j, p_m]L_m).
\end{aligned}
$$

Utilizando os comutadores B.20 e B.21:

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\left(p_j p_m \left(\varepsilon_{knq} L_q\right) + p_j \left(\varepsilon_{kmr} p_r\right) L_n\right) \\
&= \underbrace{i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{knq} p_j p_m L_q}_{1} + \underbrace{i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{kmr} p_j p_r L_n}_{2} \\
&\quad - \underbrace{i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{jns} p_m p_s L_k}_{3},
\end{aligned}
$$

Para resolver 1, utilizaremos a identidade $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$,

$$
\begin{aligned}
i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{knq} p_j p_m L_q &= i\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{qkn}) p_j p_m L_q \\
&= i\varepsilon_{ijk}(\delta_{lq}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mq}) p_j p_m L_q \\
&= i\varepsilon_{ijk}(\delta_{lq}\delta_{mk} p_j p_m L_q - \delta_{lk}\delta_{mq} p_j p_m L_q) \\
&= i\varepsilon_{ijk}(p_j p_k L_l - \delta_{lk} p_j p_m L_m).
\end{aligned} \tag{B.25}
$$

De maneira análoga, podemos resolver 2 e 3,

$$
i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{kmr} p_j p_r L_n = -i\varepsilon_{ijk}(p_j p_l L_k - \delta_{lk} p_j p_n L_n). \tag{B.26}
$$

$$
i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{jns} p_m p_s L_k = -i\varepsilon_{ijk}(p_j p_l L_k - \delta_{lk} p_m p_m L_k). \tag{B.27}
$$

Juntando B.25, B.26 e B.28 em B, ficamos com:

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{ijk} p_j, L_k] = i\varepsilon_{ijk}(& p_j p_k L_l - \delta_{lk} p_j p_m L_m + \delta_{lk} p_j p_n L_n - p_j p_l L_k + \delta_{lj} p_m p_m L_k \\
& - p_j p_l L_k) \\
= i\varepsilon_{ijk}(& p_j p_k L_l - 2 p_j p_l L_k + \delta_{lj} p^2 L_k).
\end{aligned} \tag{B.28}
$$

Aplicando δ em ε:

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{ijk} p_j L_k, \varepsilon_{lmn} p_m L_n] &= i\varepsilon_{ijk}(p_j p_k L_l - 2 p_j p_l L_k + \delta_{lj} p^2 L_k) \\
&= -2i\varepsilon_{ilk} p_j p_l L_k + i\varepsilon_{ijk}\delta_{lj} p^2 L_k \\
&= -i\varepsilon_{ilk} p^2 L_k.
\end{aligned} \tag{B.29}
$$

Resolvendo b:

$$
\begin{aligned}
\left[\varepsilon_{ijk} p_j L_k, -i\delta_{pn} p_p\right] &= -i\delta_{pn}\varepsilon_{ijk}\left[p_j L_k, p_p\right] \\
&= i\delta_{pn}\varepsilon_{ijk}\left(p_j\left[L_k, p_p\right] + \left[p_j, p_p\right] L_k\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando comutadores B.20 e B.21

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k,-i\delta_{pn}p_p\right] &= i\delta_{pn}\varepsilon_{ijk}p_j\left[L_k,p_p\right]\\ &= -i\delta_{pn}\varepsilon_{ijk}p_j i\varepsilon_{kfe}p_e\end{aligned}$$

Usando a propriedade do δ:

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k,-i\delta_{pn}p_p\right] &= -i\delta_{pn}\varepsilon_{ijk}p_j i\varepsilon_{kfe}p_e\\ &= i\delta_{lb}\varepsilon_{ijk}p_j(i\varepsilon_{kbc}p_c)\\ &= \delta_{lb}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kbc}p_jp_c\\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klc}p_jp_c\\ &= (\delta_{il}\delta_{jc}-\delta_{ic}\delta_{jl})p_jp_c\\ &= \delta_{il}\,p_jp_j-p_lp_i\\ &= \delta_{li}p^2-p_lp_i.\end{aligned}$$

Calculando o comutador c.

Usando a propriedade de comutação para remover o sinal negativo:

$$\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k,-\frac{r_l}{r}\right] = -\varepsilon_{ijk}\left[p_jL_k,\frac{r_l}{r}\right].$$

Ao expandir os comutadores, obtemos:

$$\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k,-\frac{r_l}{r}\right] = -\varepsilon_{ijk}\left(p_jr_l\left[L_k,\frac{1}{r}\right]+p_j\left[L_k,r_l\right]\frac{1}{r}+r_l\left[p_j,\frac{1}{r}\right]L_k+\left[p_j,r_l\right]\frac{L_k}{r}\right).$$

Utilizando os comutadores definidos em B.24, B.22, B.23 e B.19, obtemos:

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k,-\frac{r_l}{r}\right] &= -\varepsilon_{ijk}\left(p_j\left(i\varepsilon_{klc}r_c\right)\frac{1}{r}+r_l\left(\frac{ir_j}{r^3}\right)L_k+\left(-i\delta_{lj}\right)\frac{L_k}{r}\right)\\ &= -i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lck}\frac{p_jr_c}{r}-i\varepsilon_{ijk}\frac{r_lr_jL_k}{r^3}+i\varepsilon_{ilk}\frac{L_k}{r}\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade do delta de Kronecker , temos:

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_{ijk}p_jL_k,-\frac{r_l}{r}\right] &= -i\left(\delta_{il}\delta_{jc}-\delta_{ic}\delta_{jl}\right)\frac{p_jr_c}{r}-i\varepsilon_{ijk}\frac{r_lr_jL_k}{r^3}+i\varepsilon_{ilk}\frac{L_k}{r}\\ &= -i\delta_{il}\frac{p_jr_j}{r}+i\frac{p_lr_i}{r}-\underbrace{i\varepsilon_{ijk}\frac{r_lr_jL_k}{r^3}}_{\star}+i\varepsilon_{ilk}\frac{L_k}{r}.\end{aligned} \tag{B.30}$$

Focando no termo ⋆ e utilizando o comutador B.22, podemos manipular a equação ⋆ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
-i\varepsilon_{ijk}\frac{r_j r_l L_k}{r^3} &= i\varepsilon_{ijk}\frac{r_j(L_k r_l - i\varepsilon_{klm}r_m)}{r^3}\\
&= -i\varepsilon_{ijk}\frac{r_j L_k r_l}{r^3} - i\varepsilon_{ijk}\frac{\varepsilon_{klm}r_j r_m}{r^3}\\
&= -i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i\frac{r_l}{r^3} - \frac{i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}r_j r_m}{r^3}\\
&= -i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i\frac{r_l}{r^3} - \frac{\delta_{il}\delta_{jm}r_j r_m}{r^3} + \frac{\delta_{im}\delta_{jl}r_j r_m}{r^3}\\
&= -i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i\frac{r_l}{r^3} - \frac{\delta_{il}}{r} + \frac{r_l r_i}{r^3}
\end{aligned}
\tag{B.31}
$$

Substituindo a expressão B.31 na equação B.30, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left[\varepsilon_{ijk}p_j L_k, -\frac{r_l}{r}\right] =& -i\delta_{il}\frac{p_j r_j}{r} + i\frac{p_l r_i}{r} + \frac{r_l r_i}{r^3}\\
& - i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i\frac{r_l}{r^3} - \frac{\delta_{il}}{r} + i\varepsilon_{ilk}\frac{L_k}{r}.
\end{aligned}
\tag{B.32}
$$

O cálculo de d é análogo ao feito anteriormente em b; a diferença reside apenas em um sinal:

$$[-i\delta_{ia}p_a, \varepsilon_{lmn}p_m L_n] = p_l p_i - \delta_{li}p^2$$

Calculando o comutador f:

$$
\begin{aligned}
\left[-i\delta_{ia}p_a, -\frac{r_l}{r}\right] &= i\delta_{ia}\left[p_a, \frac{r_l}{r}\right]\\
&= i\delta_{ia}\left(r_l\left[p_a, \frac{1}{r}\right] + [p_a, r_l]\frac{1}{r}\right)\\
&= i\delta_{ia}r_l\left(\frac{ip_a}{r^3}\right) + i\delta_{ia}(-i\delta_{la})\frac{1}{r}\\
&= -\delta_{ia}\frac{r_l r_a}{r^3} + \delta_{ia}\delta_{al}\frac{1}{r}\\
&= -\frac{r_l r_a}{r^3} + \delta_{il}\frac{1}{r}.
\end{aligned}
\tag{B.33}
$$

Os comutadores g e h são análogos aos comutadores c e f, respectivamente. Seus valores são:

1. Para g:

$$
\begin{aligned}
\left[-\frac{r_i}{r}, \varepsilon_{lmn}p_m L_n\right] =& i\delta_{il}\frac{p_m r_m}{r} - i\frac{p_l r_i}{r}\\
& - \frac{r_l r_i}{r^3} + \frac{i(\vec{r}\times\vec{L})_l r_i}{r^3}\\
& + \frac{\delta_{il}}{r} - i\varepsilon_{iln}\frac{L_n}{r};
\end{aligned}
\tag{B.34}
$$

2. Para h

$$\left[-\frac{r_i}{r}, -i\delta_{ib}p_b\right] = +\frac{r_l r_i}{r^3} - \delta_{il}\frac{1}{r}. \tag{B.35}$$

Com todos os comutadores devidamente calculados, agora posso proceder à união das partes:

$$\begin{aligned}
[M_i, M_l] = &\frac{1}{\mu^2}\left(-i\varepsilon_{ilk}p^2 L_k\right) + \frac{1}{\mu}\left(\delta_{li}p^2 - p_l p_i\right) \\
&+ \frac{1}{\mu}\left(-i\delta_{il}\frac{p_j r_j}{r} + i\frac{p_l r_i}{r} + \frac{r_l r_i}{r^3} - i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i\frac{r_l}{r^3} - \frac{\delta_{il}}{r} + i\varepsilon_{ilk}\frac{L_k}{r}\right) + \frac{1}{\mu}\left(p_l p_i - \delta_{li}p^2\right) \\
&+ \left(-\frac{r_l r_i}{r^3} + \delta_{il}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{\mu}\left(i\delta_{il}\frac{p_m r_m}{r} - i\frac{p_l r_i}{r} - \frac{r_l r_i}{r^3} + \frac{i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_l r_i}{r^3} + \frac{\delta_{il}}{r} - i\varepsilon_{iln}\frac{L_n}{r}\right) \\
&+ \left(+\frac{r_l r_i}{r^3} - \delta_{il}\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}$$

Cancelando os termos iguais:

$$\begin{aligned}
[M_i, M_l] = &\frac{1}{\mu^2}\left(-i\varepsilon_{ilk}p^2 L_k\right) \\
&+ \frac{1}{\mu}\left(i\frac{p_l r_i}{r} + \frac{r_l r_i}{r^3} - i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i\frac{r_l}{r^3} + i\varepsilon_{ilk}\frac{L_k}{r}\right) \\
&+ \frac{1}{\mu}\left(-i\frac{p_l r_i}{r} - \frac{r_l r_i}{r^3} + \frac{i(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_l r_i}{r^3} - i\varepsilon_{iln}\frac{L_n}{r}\right).
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade $(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_l r_i - (\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i r_i = r^2\left(p_i r_l - p_l r_i\right)$ e realizando algumas trocas de índices, obtemos:

$$\begin{aligned}
[M_i, M_j] &= \frac{1}{\mu^2}\left(-i\varepsilon_{ijk}p^2 L_k\right) + \frac{2}{\mu}i\varepsilon_{ijk}\frac{L_k}{r} \\
&= \frac{-2i}{\mu}\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{1}{r}\right)\varepsilon_{ijk}L_k
\end{aligned}. \tag{B.36}$$

Portanto, a expressão final corrigida é:

$$[M_i, M_j] = -i\frac{2}{\mu}\hat{H}\varepsilon_{ijk}L_k.$$

<u>Demostração da Equação 5.15</u>

Para demonstrar a equação 5.15, basta substituir as equações 5.14 e 5.13 na definição de comutador, ou seja,

$$[A, B] = AB - BA. \tag{B.37}$$

Agora, vamos calcular o comutador dos operadores de momento angular Ji e Jj:

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \frac{1}{4}[(L_i + B_i), (L_j + B_j)] \\
&= \frac{1}{4}\{[L_i, L_j] + [B_i, L_j] + [L_i, B_j] + [B_i, B_j]\} \\
&= \frac{1}{4}\{i\varepsilon_{ijk}L_k + i\varepsilon_{ijk}B_k + i\varepsilon_{ijk}B_k + i\varepsilon_{ijk}L_k\} \\
&= \frac{i\varepsilon_{ijk}}{2}(L_k + B_k) \\
&= i\varepsilon_{ijk}J_k.
\end{aligned}
$$

Agora, para $\left[J'_i, J'_j\right]$, temos:

$$
\begin{aligned}
\left[J'_i, J'_j\right] &= \frac{1}{4}\left[(L_i - B_i), \left(L_j - B_j\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[L_i, L_j\right] - \left[B_i, L_j\right] - \left[L_i, B_j\right] + \left[B_i, B_j\right]\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{i\varepsilon_{ijk}L_k - i\varepsilon_{ijk}B_k - i\varepsilon_{ijk}B_k + i\varepsilon_{ijk}L_k\right\} \\
&= \frac{i\varepsilon_{ijk}}{2}\left(L_k - B_k\right) = i\varepsilon_{ijk}J'_k.
\end{aligned}
\tag{B.38}
$$

Por fim, para o comutador $\left[J_i, J'_j\right]$, o resultado é semelhante aos dois últimos casos:

$$
\begin{aligned}
[J_i, J'_j] &= \frac{1}{4}[(L_i + B_i), (L_j - B_j)] \\
&= \frac{1}{4}\{[L_i, L_j] + [B_i, L_j] - [L_i, B_j] - [B_i, B_j]\} \\
&= \frac{1}{4}\{i\varepsilon_{ijk}L_k - i\varepsilon_{ijk}B_k + i\varepsilon_{ijk}B_k - i\varepsilon_{ijk}L_k\} \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{B.39}
$$