



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

JONATHAN MÁRCIO AMÂNCIO SALES

**DINÂMICA DE BOLHAS NO ESCOAMENTO BIFÁSICO ESTACIONÁRIO EM
MEIOS POROSOS DESORDENADOS**

**FORTALEZA
2023**

JONATHAN MÁRCIO AMÂNCIO SALES

DINÂMICA DE BOLHAS NO ESCOAMENTO BIFÁSICO ESTACIONÁRIO EM MEIOS
POROSOS DESORDENADOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Lucas Nunes de Oliveira.

FORTALEZA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S155d Sales, Jonathan Márcio Amâncio.
Dinâmica de bolhas no escoamento bifásico estacionário em meios porosos desordenados / Jonathan Márcio Amâncio Sales. – 2023.
113 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Claudio Lucas Nunes de Oliveira.
1. Escoamento bifásico. 2. Meios porosos. 3. Correlações temporais. 4. Relações de Onsager. I. Título.
CDD 530
-

JONATHAN MÁRCIO AMÂNCIO SALES

DINÂMICA DE BOLHAS NO ESCOAMENTO BIFÁSICO ESTACIONÁRIO EM MEIOS
POROSOS DESORDENADOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 23/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Lucas Nunes de Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade
Universidade Federal da Bahia (UFBA)

Dr. Hansjoerg Seybold
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH)

Prof. Dr. Felipe de Freitas Munarin
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha esposa Juliana e ao meu filho Noah.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, acima de tudo, a Cristo, meu Senhor, a quem devo toda a minha vida.

Agradeço a minha esposa e melhor amiga Juliana Monteiro da Costa Sales por todo seu amor e carinho, sua dedicação e apoio, sua compreensão e por sempre estar ao meu lado.

Agradeço aos meus pais Márcio e Vânia Sales por todo apoio que me deram, pelos incentivos e por todos os seus conselhos; e também às minhas irmãs Mylena e Amanda Sales.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Claudio Lucas Nunes de Oliveira, por todo apoio e pela excelente orientação neste trabalho.

Agradeço ao Dr. Hansjoerg Seybold, do ETH Zürich, por todo apoio e pelas contribuições feitas a este trabalho.

Agradeço aos professores Dr. José Soares de Andrade Júnior, Dr. André Auto Moreira e Dr. Saulo Davi Soares e Reis pelas contribuições que deram a este trabalho.

Agradeço também aos meus amigos e colegas do Grupo de Sistemas Complexos, a saber, Wagner Sena, Israel Nascimento, Marciel Carvalho, Aurélio Wildson, João Paulo Nogueira, Emanuel Fontelles, Aureliano Sancho e William Mesquita.

Agradeço também aos professores, servidores, amigos e colegas do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

Agradeço à FUNCAP, Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo financiamento deste trabalho.

“Mudar significa estar inserido na temporalidade.” (LEWIS, 2017, p. 51).

RESUMO

O escoamento bifásico em meios porosos leva à formação de bolhas que eventualmente se quebram e se fundem ou podem ficar presas na matriz porosa. Esse comportamento dinâmico altamente complexo cria flutuações características nos campos de velocidade das duas fases e influencia fortemente as propriedades macroscópicas, como a permeabilidade efetiva. A fim de entender melhor como o comportamento microscópico afeta as propriedades macroscópicas do escoamento, nós simulamos os campos de velocidade de dois fluidos imiscíveis escoando em um meio poroso bidimensional. Nós encontramos que os tamanhos das bolhas, m , seguem uma distribuição em lei de potência, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$, onde o expoente ξ depende do número capilar, Ca , que descreve a razão entre as forças viscosas e interfaciais. Abaixo de um número capilar característico, dado por $Ca^* \approx 0,046$, as bolhas são grandes e coesas com um expoente constante $\xi \approx 1,23 \pm 0,03$. Acima desse valor, o escoamento é dominado por muitas gotículas e alguns aglomerados longo e finos. Neste regime o expoente ξ aumenta, aproximando-se de $2,05 \pm 0,03$ no limite quando $Ca \rightarrow \infty$. Além disso, analisando as flutuações nos campos de velocidade das duas fases, nós descobrimos que o sistema é ergódico para grandes frações de volume da fase menos viscosa e altos valores de Ca . As flutuações nas séries temporais da velocidade apresentam avalanches cujos tamanhos seguem uma distribuição em lei de potência, $\mathcal{P}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-\eta}$, enquanto os saltos de velocidade seguem uma distribuição gaussiana. Análises pelo método DFA mostram correlações de longo alcance nas séries temporais. A velocidade característica do escoamento total, calculada como o valor médio da série temporal da mistura das duas fases, segue uma generalização da lei de Darcy na forma $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla p)^\beta$, onde ∇p é o gradiente de pressão global aplicado e o expoente β depende da tensão superficial entre as duas fases. Para altos valores de número capilar, a constante de proporcionalidade nesta relação, chamado mobilidade, aumenta exponencialmente com a saturação da fase menos viscosa. Este resultado está de acordo com observações anteriores para permeabilidades efetivas em reservatórios movidos a gás dissolvido.

Palavras-chave: escoamento bifásico; meios porosos; correlações temporais; relações de Onsager.

ABSTRACT

Two-phase flow through porous media leads to the formation of bubbles that eventually break and merge or can become trapped in the porous matrix. This highly complex dynamic behavior creates characteristic fluctuations in the velocity fields of the two phases and strongly influences macroscopic properties such as effective permeability. In order to better understand how the microscopic behavior affects the macroscopic properties of the flow, we simulate the velocity fields of two immiscible fluids flowing through a two-dimensional porous medium. We found that the bubble size, m , follows a power law distribution, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$, where the exponent ξ depends on the capillary number, Ca , which describes the ratio between the viscous and interfacial forces. Below a characteristic capillary number, given by $Ca^* \approx 0.046$, the bubbles are large and cohesive with a constant exponent $\xi \approx 1.23 \pm 0.03$. Above this value, the flow is dominated by many droplets and finger-like spanning clusters. In this regime the exponent ξ increases approaching 2.05 ± 0.03 in the limit when $Ca \rightarrow \infty$. Moreover, by analyzing the fluctuations in the velocity fields of the two phases, we find that the system is ergodic for large volume fractions of the less viscous phase and high values of Ca . The fluctuations in the velocity time series present avalanches whose sizes follow a power law distribution, $\mathcal{P}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-\eta}$, while the velocity jumps follow a Gaussian distribution. Analyzes by the DFA method show long-range correlations in the time series. The characteristic velocity of the flow, calculated as the mean value of the time series of the mixture of the two phases, follows a generalization of Darcy's law in the form $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla p)^\beta$, where ∇p is the applied global pressure gradient and the exponent β depends on the surface tension between the two phases. For high values of capillary number, the constant of proportionality in this relation, called mobility, increases exponentially with the saturation of the less viscous phase. This result is in agreement with previous observations for effective permeabilities in dissolved gas powered reservoirs.

Keywords: two-phase flow; porous media; time correlations; Onsager's relations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Experiência clássica das duas placas para a demonstração da deformação angular.	20
Figura 2 – Molhabilidade e ângulo de contato.	28
Figura 3 – O meio poroso bidimensional utilizado nas simulações e a malha de discretização.	44
Figura 4 – Configuração inicial do sistema para o escoamento de duas fases newtonianas.	45
Figura 5 – Configuração do escoamento para diferentes valores de tensão superficial.	48
Figura 6 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade para o caso $(10^{-2}, 100)$	49
Figura 7 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 0 \text{ N/m}$	86
Figura 7 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 0 \text{ N/m}$	87
Figura 7 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 0 \text{ N/m}$	88
Figura 8 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$	89
Figura 8 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$	90
Figura 8 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$	91
Figura 9 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-2} \text{ N/m}$	92
Figura 9 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-2} \text{ N/m}$	93
Figura 9 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-2} \text{ N/m}$	94
Figura 10 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-1} \text{ N/m}$	95
Figura 10 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-1} \text{ N/m}$	96
Figura 10 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-1} \text{ N/m}$	97
Figura 11 – Configuração do escoamento em função da saturação da fase menos viscosa.	98

Figura 11 – (Continuação) Configuração do escoamento em função da saturação da fase
menos viscosa. 99

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação.	24
Gráfico 2 – Fração do tamanho da interface entre os fluidos em função do tempo.	50
Gráfico 3 – Distribuição dos tamanhos das gotas e aglomerados e o valor dos expoentes obtidos.	52
Gráfico 4 – Fração do tamanho do agregado percolante em função do tempo; casos $M = 1$ e $\gamma = 0 \text{ N/m}$	54
Gráfico 5 – Fração do tamanho do agregado percolante em função do tempo; casos $M = 10$	55
Gráfico 6 – Séries temporais da velocidade para ambas as fases e para todo o fluido.	57
Gráfico 7 – Velocidade de todo o fluido (mistura) em função do tempo, para vários valores de gradiente de pressão.	57
Gráfico 8 – Média temporal da velocidade da mistura em função do gradiente de pressão.	58
Gráfico 9 – Média temporal da velocidade da mistura em função da fração volumétrica da fase menos viscosa.	59
Gráfico 10 – Distribuição de saltos de velocidade das séries da velocidade da mistura.	61
Gráfico 11 – Avalanches progressivas em uma série temporal.	63
Gráfico 12 – Distribuição dos tamanhos das avalanches nas séries temporais da velocidade.	64
Gráfico 13 – Análise das séries temporais da velocidade através do método DFA.	66
Gráfico 14 – Funções de correlação temporal das séries temporais de velocidade das duas fases e da mistura.	67
Gráfico 15 – Velocidade média em função do tempo para $M = 10$ e $\gamma = 10^{-1} \text{ N/m}$	83
Gráfico 16 – Velocidade média em função do tempo para $M = 10$ e $\gamma = 10^{-2} \text{ N/m}$	84
Gráfico 17 – Velocidade média em função do tempo para $M = 10$ e $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$	84
Gráfico 18 – Velocidade média em função do tempo para $M = 1$ e $\gamma = 0 \text{ N/m}$	85
Gráfico 19 – Série temporal original usada para ilustrar a aplicação do método DFA.	100
Gráfico 20 – Ilustração da aplicação do primeiro passo do método DFA.	101
Gráfico 21 – Ilustração da aplicação do segundo passo do método DFA.	101
Gráfico 22 – Função de flutuação em função do tamanho dos blocos de tempo.	102

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre o número capilar obtido e os valores de tensão superficial e gradiente de pressão utilizados nas simulações.	53
Tabela 2 – Comparação dos parâmetros ($\sigma, \Delta v_0$) obtidos das distribuições dos saltos de velocidade.	60
Tabela 3 – Comparação dos expoentes (η) das distribuições dos tamanhos das avalanches.	63
Tabela 4 – Comparação dos expoentes (α) obtidos a partir do método DFA.	65

LISTA DE SÍMBOLOS

\vec{a}	Aceleração
\vec{g}	Aceleração local da gravidade
θ	Ângulo de contato
k	Coefficiente de permeabilidade absoluta
k_{ef}	Coefficiente de permeabilidade efetiva
η	Coefficiente de viscosidade aparente ou efetiva
μ	Coefficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta
λ	Coefficiente de viscosidade volumétrica
L	Comprimento linear do sistema
κ	Curvatura local da interface
α	Deformação angular
ξ	Expoente da distribuição dos tamanhos das gotas
β	Expoente da lei de Darcy generalizada
\vec{F}	Força
\vec{f}	Força por unidade de volume
$s(x)$	Função da fração do volume
\mathcal{P}	Função de probabilidade normalizada
m	Massa
ρ	Massa específica ou densidade
\mathbf{I}	Matriz identidade
\vec{P}	Momento linear
Ca	Número de capilaridade ou número capilar
Ca^*	Número capilar característico
ϕ	Porosidade
p	Pressão
p_{cap}	Pressão capilar
M	Razão da viscosidade
S	Saturação
S_1	Saturação da fase 1
T	Temperatura absoluta
t	Tempo
τ	Tensão de cisalhamento
σ	Tensão normal
γ	Tensão superficial
\mathbf{T}	Tensor de tensões

Q	Vazão
\vec{V} ou \vec{u}	Velocidade
$v^{(j)}$	Velocidade média volumétrica da fase j , ou da mistura das fases
$\bar{v}^{(j)}$	Velocidade média da fase j , em relação ao tempo
V_T	Velocidade terminal ou limite
\vec{n}	Vetor normal à interface

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM MEIOS POROSOS	18
2.1	Fluidos	18
2.1.1	<i>Viscosidade</i>	20
2.2	Meios Porosos	25
2.2.1	<i>Porosidade e Permeabilidade</i>	25
2.3	Escoamento multifásico	26
2.3.1	<i>Tensão superficial e Molhabilidade</i>	26
2.3.2	<i>Pressão Capilar</i>	28
2.3.3	<i>Escoamento em um Tubo Capilar</i>	29
2.3.4	<i>Lei de Darcy</i>	30
2.4	Equações básicas da dinâmica de fluidos	30
2.4.1	<i>Equação geral de conservação</i>	30
2.4.2	<i>Conservação da massa</i>	31
2.4.3	<i>Conservação do momento linear</i>	32
2.4.4	<i>Formas simplificadas da equação de Navier-Stokes</i>	35
2.4.4.1	<i>Escoamento multifásico</i>	37
3	CORRELAÇÕES E SIMETRIA DE REVERSÃO TEMPORAIS	39
3.1	Ergodicidade	39
3.2	Funções de correlação temporal	40
3.3	Simetria de reversão temporal	42
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	44
4.1	Modelo matemático	44
4.2	Resultados e Discussões	47
4.2.1	<i>Análise da interface</i>	49
4.2.2	<i>Distribuição dos tamanhos das bolhas</i>	51
4.2.3	<i>Análise das séries temporais da velocidade</i>	56
4.2.3.1	<i>Análise da distribuição de saltos de velocidade</i>	60
4.2.3.2	<i>Análise da distribuição de avalanches</i>	62
4.2.3.3	<i>Análise das flutuações sem tendências</i>	65
4.2.3.4	<i>Análise das correlações temporais</i>	65
5	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	70
	APÊNDICE A – SÉRIES TEMPORAIS DAS VELOCIDADES NO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UM MEIO POROSO	83

APÊNDICE B – CONTORNOS DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UM MEIO POROSO BIDIMENSIONAL	86
APÊNDICE C – ESCOAMENTO BIFÁSICO EM FUNÇÃO DA SATURAÇÃO DA FASE MENOS VISCOSA	98
APÊNDICE D – MÉTODO DFA	100
APÊNDICE E – EQUAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL	103
ANEXO A – ARTIGO PUBLICADO: BUBBLE DYNAMICS IN STATIO-NARY TWO-PHASE FLOW THROUGH DISORDERED POROUS MEDIA	105

1 INTRODUÇÃO

O escoamento de fluidos em meios porosos pode tanto ocorrer espontaneamente na natureza quanto ser induzido por ações humanas. Um dos exemplos mais comuns deste último caso é a recuperação de óleo através da injeção de água ou gás em um reservatório de petróleo. Devido à sua grande aplicação tecnológica, o escoamento em meios porosos tem sido, por décadas, objeto de pesquisa de diversos campos nas Ciências e Engenharias. Quando os fluidos são imiscíveis, a competição entre as fases pelo escoamento leva à formação de bolhas que, eventualmente, se quebram e se fundem ou podem ficar presas na matriz porosa. Este comportamento dinâmico e extremamente complexo cria flutuações características nos campos de velocidade das duas fases influenciando fortemente as propriedades macroscópicas como a permeabilidade efetiva e as curvas de permeabilidade relativa.

O escoamento de fluidos pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares como as equações da continuidade e de Navier-Stokes que são derivadas das leis de conservação da massa e do momento linear, respectivamente. A solução dessas equações mostra como os diferentes campos vetoriais e escalares descrevem o escoamento, ou seja, elas mostram como a velocidade e a pressão das fases mudam com a posição e o tempo. Em alguns casos, outras leis de conservação, como do momento angular, da energia, e da entropia, também podem ser necessárias para descrever o transporte de quantidades físicas. Na prática, porém, a alta complexidade devido à não-linearidade presente nas equações dificulta soluções de situações físicas mais realistas e apenas casos mais simples podem ser resolvidos analiticamente [1]. Além disso, as condições iniciais e as condições de contorno, frequentemente, elevam essa complexidade. Por outro lado, essas equações podem ser resolvidas através de métodos numéricos. Além disso, elas também podem ser simplificadas de modo significativo considerando propriedades mais simples para os fluidos em escoamentos não turbulentos. Neste trabalho nós utilizamos um software comercial de Fluidodinâmica Computacional, a saber, o ANSYS FluentTM [2], que resolve numericamente as equações de Navier-Stokes e da continuidade usando o método de volumes finitos. Para resolver o escoamento bifásico nós usamos o formalismo de volume de fluidos (VoF) para escoamentos com múltiplas fases.

Para entender melhor como o comportamento microscópico afeta as propriedades macroscópicas do escoamento, nós investigamos o escoamento em meios porosos de dois fluidos newtonianos imiscíveis e incompressíveis em condições isotérmicas. Para evitar custos computacionais impeditivos, nós consideramos um meio poroso bidimensional. A fim de diminuir efeitos de tamanho finito, consideramos condições periódicas de contorno em ambas as direções do meio poroso, de modo que nosso modelo físico pode ser compreendido como um escoamento na superfície de um toro poroso. Inicialmente, o escoamento é altamente dependente da configuração inicial, mas com o tempo o sistema deixa esse regime transiente e atinge um estado estacionário onde os parâmetros físicos como velocidade e pressão flutuam em torno

de seus valores médios. Nós então variamos os valores da tensão superficial, do gradiente de pressão global e da fração volumétrica das fases a fim de estudar o papel das forças viscosas e interfaciais no escoamento, quantificado pelo número capilar. Nossos resultados mostram que a distribuição dos tamanhos das bolhas segue uma lei de potência cujo expoente depende do número capilar. Abaixo de um número capilar característico, quando as forças viscosas são muito menores do que as forças interfaciais, as bolhas são grandes e coesas. Por outro lado, escoamentos com altos valores de número capilar são dominados por muitas gotículas e alguns aglomerados alongados e finos. Nós também investigamos as flutuações nos campos de velocidade das duas fases e encontramos que o sistema é ergódico para números capilares altos e grandes frações de volume da fase menos viscosa. Nossa análise também mostra que a velocidade média temporal de toda a mistura pode ser descrita por uma generalização da lei de Darcy que depende da tensão superficial entre as duas fases.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No Cap. 2, nós apresentamos uma introdução a alguns conceitos fundamentais da Mecânica dos fluidos como, por exemplo, a caracterização de fluidos newtonianos e não-newtonianos, viscosidade, tensão superficial e as equações da continuidade e de Navier-Stokes. Sobre escoamentos em meios porosos, apresentamos os conceitos de porosidade e permeabilidade, que caracterizam o meio poroso, e efeitos interfaciais como molhabilidade e pressão capilar. Em seguida, mostramos como descrever escoamentos multifásicos neste meio através da lei de Darcy. O Cap. 3 é um resumo geral sobre alguns conceitos relacionados às correlações em séries temporais e às relações de Onsager. No Cap. 4, apresentamos o modelo do meio poroso proposto e os parâmetros e configurações utilizados nas simulações do escoamento bifásico. Também descrevemos o modelo matemático e o método numérico utilizado para calcular os campos de velocidade das duas fases, e por fim, analisamos os dados obtidos e discutimos os resultados. As conclusões deste trabalho são apresentadas no Cap. 5.

2 ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM MEIOS POROSOS

Neste capítulo, nós discutiremos alguns conceitos fundamentais do escoamento de fluidos em meios porosos. Primeiramente, abordaremos as propriedades básicas de fluidos e de meios porosos, depois discutiremos as equações que descrevem o escoamento dos fluidos através dos canais porosos, tanto em escala do poro quanto em escala macroscópica.

2.1 Fluidos

Fluidos são substâncias que se deformam continuamente quando um esforço de cisalhamento é aplicado [3, 4]. Em termos mais simples, um fluido é uma substância que não consegue resistir a uma força de cisalhamento, por menor que seja a intensidade desta força. Apesar de o termo “fluido” incluir as fases líquida e gasosa, no cotidiano, entretanto, fluido é frequentemente usado como sinônimo de líquido. Por exemplo, o “fluido de freio” em um motor de carro é um óleo incompressível que não irá funcionar corretamente se houver gás nele. Podemos diferenciar líquidos e gases com base na resistência que o material apresenta quando submetido à compressão: enquanto os líquidos resistem às forças de compressão, os gases apresentam pouca resistência. Essa diferença está relacionada às forças de coesão entre as moléculas dessas substâncias. Outra diferença marcante entre os líquidos e os gases é que os líquidos podem formar uma superfície livre independente do recipiente que o contem. Entretanto, essa definição não é útil quando os fluidos ocupam todo o volume do recipiente. Nesta situação outras propriedades são usadas para distingui-los, como por exemplo a relação da viscosidade com a temperatura. Enquanto os líquidos se tornam menos viscosos com o aumento da temperatura, os gases aumentam sua viscosidade.

A distinção entre sólidos e fluidos, por outro lado, tende a ser mais clara. Entretanto, em alguns casos especiais, como os sólidos plásticos, essa distinção é bem mais confusa. Como já foi dito, os fluidos são incapazes de resistir a um esforço de cisalhamento, isto é, quando são submetidos a uma força tangencial, e, além disso, quando estão em equilíbrio estático, eles não conseguem resistir à deformação permanente, ou seja, não mantêm uma forma específica após a força aplicada ser removida. Eles só podem resistir à taxas relativas de deformação de maneira dissipadora. No entanto, os fluidos ainda podem responder a forças restauradoras quando são submetidos a tensões normais, ou seja, quando as forças atuam perpendicularmente à superfície do fluido. Em contraste, os sólidos respondem às ações externas, sejam elas cisalhantes ou normais, com uma força de restauração semelhante a de uma mola, o que significa que pequenas deformações são reversíveis. Em um sólido, o esforço de cisalhamento é uma função da tensão, mas em um fluido, o esforço de cisalhamento é uma função da taxa de deformação. Uma consequência desse comportamento é a lei de Pascal [5], que descreve o papel da pressão na caracterização do estado de um fluido. Vale destacar que essas classificações clássicas da

matéria entre gases, líquidos e sólidos são, por vezes, simplistas. Materiais mais complexos, como os materiais viscoelásticos, que incluem fluidos biológicos e outros materiais macios, possuem propriedades simultâneas tanto de líquidos quanto de sólidos. Estes materiais complexos, portanto, não são classificados nas definições acima.

Tanto os sólidos quanto os líquidos possuem superfícies livres, que custam uma certa quantidade de energia livre para formar. No caso dos sólidos, a quantidade de energia livre para formar uma determinada unidade de área superficial é chamada energia de superfície, enquanto que para líquidos essa quantidade é chamada de tensão superficial. Em equilíbrio, porém, ambos tendem a minimizar sua energia superficial: os líquidos tendem a formar gotas arredondadas, enquanto que os sólidos puros tendem a formar cristais. Os gases, por outro lado, não possuem superfícies livres e, por isso, eles se difundem livremente. Como veremos nos próximos capítulos, a tensão superficial desempenha uma importante função no escoamento dos fluidos.

A estrutura molecular de um fluido é importante para caracterizá-lo, porém não é possível descrever seu comportamento, seja em equilíbrio ou em movimento, a partir da dinâmica individual das moléculas que o constituem [3]. Em outras palavras, é praticamente impossível, seja analítica ou numericamente, estudar os fluidos pela abordagem Lagrangiana. Ao invés disso, o comportamento dos fluidos é descrito com base na hipótese do contínuo, isto é, considerando o fluido como um meio contínuo. Tal abordagem é chamada de Euleriana, onde as propriedades, como massa específica, temperatura e velocidade dos fluidos são tratadas como campos, ou seja, são consideradas como funções contínuas da posição e do tempo [4].

Na hipótese do contínuo um dado volume de uma substância pode ser dividido em elementos menores, pequenos do ponto de vista macroscópico mas que contenham um número suficiente de moléculas para que os efeitos médios de suas propriedades não flutuem [6, 7]. Embora a distribuição das velocidades das moléculas em um fluido seja extremamente não-uniforme [8], a distribuição das velocidades médias dos elementos de fluido muda pouco quando comparada aos elementos vizinhos. Entretanto, essa hipótese falha sempre que a trajetória média livre das moléculas torna-se da mesma ordem de grandeza que a menor dimensão característica significativa do sistema [4, 6]. Esses elementos de volume mínimo, para os quais a hipótese do contínuo é válida, são chamados de partículas fluidas. O conceito de um meio contínuo constitui a base da mecânica dos fluidos clássica [4].

Os tipos de forças que agem sobre as partículas fluidas são as *forças de superfície*, também chamadas de *forças de contato*, e as *forças de campo*, como forças gravitacional e eletromagnética [4]. As do primeiro tipo são geradas pelo contato com outras partículas ou com superfícies sólidas, como por exemplo forças de atrito e normal, e geram o que chamamos de tensões [4], que serão descritas a seguir. O módulo da força gravitacional, por exemplo, atuando sobre um elemento de fluido de volume dV é dado por $\rho g dV$, onde ρ é a densidade (massa específica) do fluido e g é o módulo da aceleração local da gravidade.

Considere uma força de contato, $\delta\vec{F}$, agindo em alguma porção da superfície, $\delta\vec{A}$,

de uma partícula fluida. A força $\delta\vec{F}$, agindo sobre $\delta\vec{A}$, pode ser decomposta em duas componentes, uma componente normal, δF_n , e uma componente tangente à área, δF_t . A razão entre o módulo de uma força e a área da superfície sobre a qual ela atua é chamada de tensão. Assim, uma tensão normal e uma tensão de cisalhamento são, respectivamente, definidas como [4]

$$\sigma = \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A_n} = \frac{dF_n}{dA_n}, \quad (2.1)$$

e

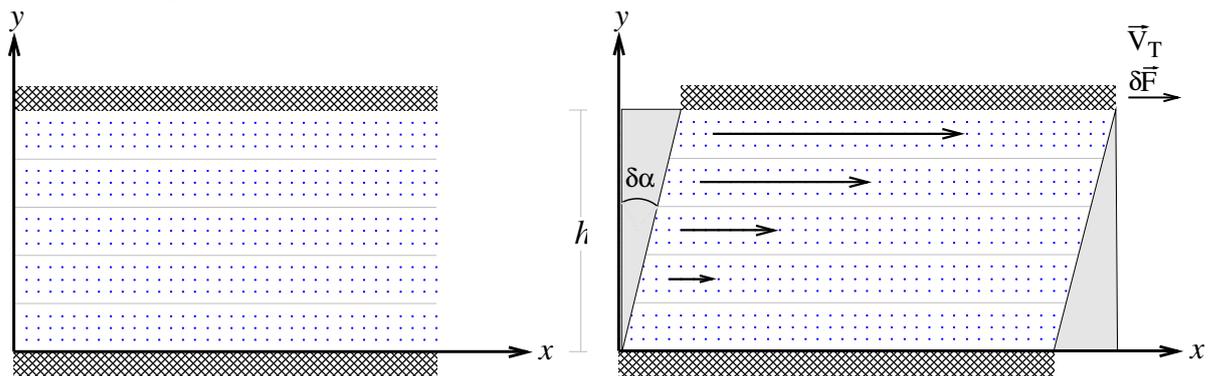
$$\tau = \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A_n} = \frac{dF_t}{dA_n}. \quad (2.2)$$

Como veremos mais adiante, a relação entre a tensão de cisalhamento e a respectiva taxa de deformação caracteriza o tipo de fluido. Em *fluidos newtonianos*, a tensão de cisalhamento cresce linearmente com a taxa de deformação. Em casos onde as relações constitutivas são mais complexas, os fluidos são *não-newtonianos*.

2.1.1 Viscosidade

A viscosidade pode ser facilmente entendida pela seguinte experiência clássica, que consiste em duas placas sólidas paralelas separadas por uma distância h com uma porção de fluido incompressível entre elas, como mostra a Fig. 1a. Suponha que o sistema está inicialmente em repouso. Fixando o referencial, em coordenadas cartesianas, na placa inferior e aplicando uma força constante para a direita, $\delta\vec{F} = \delta F_x \hat{x}$, na placa superior, a experiência mostra que esta última se move com uma aceleração não nula durante um certo intervalo de tempo, até que a força de atrito no fluido se iguale à força aplicada, e então segue com velocidade constante $\vec{u} = V_T \hat{x}$, chamada velocidade limite ou velocidade terminal [9].

Figura 1 – Experiência clássica das duas placas para a demonstração da deformação angular.



(a) Duas placas sólidas paralelas separadas por uma distância h com uma porção de fluido entre elas, inicialmente em repouso.

(b) Uma força constante, $\delta\vec{F}$, atuando na placa superior faz com que esta se mova a uma velocidade constante \vec{V}_T .

A experiência das duas placas é utilizada para calcular a deformação angular $\delta\alpha$ aplicada a um fluido e demonstrar o conceito de viscosidade. Fonte: Elaborado pelo autor.

Suponha agora que após um intervalo de tempo infinitesimal, δt , com a placa se movendo com velocidade constante, o fluido sofre uma deformação angular infinitesimal dada

por $\delta\alpha$ (também chamada de deformação por cisalhamento), como mostra a Fig. 1b. A taxa de variação da deformação $\delta\alpha$ com o tempo, chamada de *taxa de deformação* ou *taxa de cisalhamento*, é dada por [4]

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.3)$$

Vemos pela Fig. 1b que o ângulo $\delta\alpha$ é tal que

$$\tan \delta\alpha = \frac{\delta x}{h}. \quad (2.4)$$

Mas, para ângulos pequenos, $\tan \delta\alpha \approx \delta\alpha$. Assim, a Equação (2.4) pode ser escrita como

$$\delta\alpha = \frac{\delta x}{h}. \quad (2.5)$$

Como a velocidade é constante podemos escrever

$$V_T = \frac{\delta x}{\delta t} \Rightarrow \delta x = V_T \delta t. \quad (2.6)$$

Combinando as Equações (2.5) e (2.6), no limite em que δt vai a zero, obtemos que a taxa de deformação é dada por

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{V_T}{h}. \quad (2.7)$$

Devido a esta ação cisalhante, lâminas ou camadas de fluido, paralelas entre si e também paralelas às placas, movem-se com velocidades de módulos diferentes [9]. Esse tipo de escoamento em que as partículas fluidas se movem em camadas é chamado de *escoamento laminar* [4]. No entanto, a camada do fluido em contato com uma superfície sólida não desliza pois o fluido adere à superfície e adquire a mesma velocidade, não havendo movimento relativo. Esta condição de aderência para fluidos viscosos, chamada de condição de não deslizamento (ou não escorregamento) é encontrada experimentalmente [3, 10–13]. Entretanto, muitos estudos recentes relatam aparentes violações da condição de não deslizamento [14]. Essas violações foram observadas em estudos tanto teóricos [15–17] quanto experimentais [18–24]. Para uma discussão histórica e filosófica da condição de não deslizamento na dinâmica dos fluidos consulte a referência [25].

Considerando a condição de não deslizamento, a lâmina de fluido adjacente à placa móvel possui a mesma velocidade da placa, V_T , e a lâmina de fluido adjacente à placa imóvel permanece com velocidade nula. Os módulos das velocidades das demais lâminas variam linearmente entre os dois extremos, zero e V_T [9]. Esse perfil de velocidade pode ser expresso através da seguinte equação,

$$u(y) = y \frac{V_T}{h}, \quad (2.8)$$

em que y é a distância em relação à placa inferior. Observe que no escoamento entre as placas

existe um gradiente de velocidade constante dado por [3]

$$\frac{du}{dy} = \frac{V_T}{h}. \quad (2.9)$$

Das Equações (2.7) e (2.9), vemos que a taxa de deformação é dada por

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}. \quad (2.10)$$

A ação de cisalhamento, devido à força exercida pela placa, produz uma tensão de cisalhamento, τ , aplicada ao fluido que é dada pela Equação (2.2). Por sua vez, isso acaba gerando uma taxa de deformação como dada pela Equação (2.10). Assim, podemos escrever a tensão de cisalhamento como uma função da taxa de deformação,

$$\tau = \tau \left(\frac{du}{dy} \right). \quad (2.11)$$

Relações constitutivas mostram como um sistema se comporta quando é submetido a estímulos externos, sejam eles mecânicos, elétricos, térmico, etc. Neste caso em especial, a relação constitutiva mostra como o fluido escoar (quantificada pela taxa de deformação) quando submetido à tensão de cisalhamento. Fluidos que apresentam relações constitutivas lineares são chamados de *fluidos newtonianos*. Por outro lado, os fluidos em que a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação são denominados *fluidos não-newtonianos*.

Para o escoamento unidimensional de fluidos newtonianos, a relação constitutiva é dada por [3, 4, 26],

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (2.12)$$

onde a constante de proporcionalidade, μ , é o coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta, também chamada simplesmente de *viscosidade*. A Equação (2.12) é conhecida como lei de Newton da viscosidade pelo fato de expressar matematicamente as ideias básicas apontadas na Seção IX “*The circular motion of fluids*” da obra seminal *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Isaac Newton [26–28].

Portanto, a viscosidade é definida como a propriedade física que mede a resistência de um fluido ao escoamento e tem origens no atrito interno do fluido [9, 27, 29]. Quanto maior for a viscosidade de um fluido, maior será sua resistência ao escoamento. Nos líquidos, esse atrito interno está associado às forças de coesão entre as moléculas; já nos gases, está relacionado à transferência de momento [3, 9]. Da definição de viscosidade como resistência ao escoamento, percebe-se que a taxa de deformação de um fluido depende de sua viscosidade. Em comparação com um sólido, a deformação sofrida devido a uma tensão de cisalhamento depende do seu módulo de rigidez. Assim, os sólidos apresentam características elásticas enquanto os fluidos, características viscosas [4].

É interessante destacar que a viscosidade dos fluidos newtonianos é função da temperatura e da pressão [27, 30]. Em geral, a viscosidade dos líquidos diminui com o aumento da

temperatura, enquanto nos gases a viscosidade aumenta com o aumento da temperatura [3,9,27]. Essa dependência da viscosidade em relação à temperatura pode ser percebida a partir de duas equações empíricas [3]. A primeira equação é a equação de Andrade [31, 32], que mostra que a viscosidade dos líquidos decai exponencialmente com a temperatura,

$$\mu(T) = Ae^{B/T}, \quad (2.13)$$

onde A e B são constantes empíricas positivas e T é a temperatura absoluta [3, 27, 33]. A Equação (2.13) foi originalmente proposta por Guzman [33], mas ficou popularmente conhecida como equação de Andrade, sendo também referida por alguns autores como equação de Guzman-Andrade. A segunda equação empírica é a equação de Sutherland [34], que mostra que a viscosidade dos gases cresce com a temperatura,

$$\mu(T) = \frac{C T^{3/2}}{T + S}, \quad (2.14)$$

onde C e S são constantes e T é a temperatura absoluta [3]. Com relação à dependência da pressão, a viscosidade de um fluido, em muitos casos, aumenta com a pressão [35]. Segundo Partal [27], a expressão mais usada para avaliar os efeitos da pressão na viscosidade de um líquido é a equação de Barus [36, 37]

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha \Delta p}, \quad (2.15)$$

onde μ_0 é a viscosidade nas condições atmosféricas, α é o coeficiente de piezoviscosidade e Δp é a diferença de pressão em relação à pressão atmosférica.

Como já foi dito, os fluidos não-newtonianos são aqueles em que a tensão de cisalhamento não segue uma relação linear com a taxa de deformação. Um modelo bastante utilizado para modelar a relação entre a tensão e a taxa de cisalhamento de muitos fluidos não-newtonianos, com comportamento independente do tempo, é o modelo de lei de potência, também conhecido como relação de Ostwald-Waele [38], que, para o escoamento unidimensional, é dado por [4]

$$\tau = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n, \quad (2.16)$$

onde n é o índice de comportamento do escoamento e k é o índice de consistência. Note que, para $n = 1$, a Equação (2.16) reduz-se à lei de Newton da viscosidade, Equação (2.12), com a viscosidade dada por k . A Equação (2.16) é comumente reescrita na forma

$$\tau = k \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = \eta \frac{du}{dy}, \quad (2.17)$$

de formato idêntico ao da equação de Newton, onde $\eta = k |du/dy|^{n-1}$ é chamado de *viscosidade aparente* ou *efetiva*. Os fluidos não-newtonianos para os quais $n < 1$ são chamados de *pseudoplásticos*, cuja viscosidade aparente diminui com o aumento da taxa de deformação. Por

outro lado, os fluidos não-newtonianos com $n > 1$, são chamados de fluidos *dilatantes*, cuja viscosidade aparente aumenta com o aumento da taxa de deformação [3,4]. O Gráfico 1 mostra a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação para fluidos newtonianos e os não-newtonianos que podem ser descritos pelo modelo de lei de potência.

Gráfico 1 – Tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação.

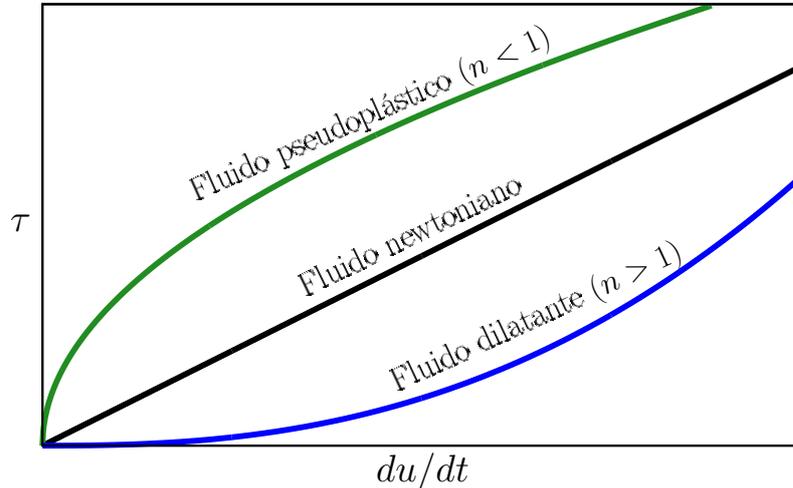


Gráfico da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação para fluidos newtonianos, Equação (2.12), e não-newtonianos, Equação (2.16). Fonte: Elaborado pelo autor.

Em alguns fluidos não-newtonianos, a viscosidade aparente é também dependente do tempo. Esse é o caso dos fluidos *tixotrópicos*, cuja viscosidade aparente diminui com o passar do tempo, e dos fluidos *reopéticos*, cuja viscosidade aparente aumenta com o tempo. Há ainda substâncias que, dependendo da tensão de cisalhamento aplicada, comportam-se como fluidos ou como sólidos. Esse é o caso dos *plásticos de Bingham*, que para tensões de cisalhamento abaixo de um determinado valor, τ_0 , comportam-se como sólidos, resistindo à tensão aplicada. Entretanto, para tensões maiores que esse valor limite, essas substâncias comportam-se como fluidos. Se a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação for linear para $\tau > \tau_0$, então a relação constitutiva do fluido de Bingham pode ser dada por [3]

$$\tau = \tau_0 + \eta \frac{du}{dy}. \quad (2.18)$$

Mais informações quanto as propriedades de fluidos não-newtonianos podem ser encontradas nas referências [3, 4, 39].

2.2 Meios Porosos

Um meio poroso é uma matriz ou estrutura sólida que contém espaços vazios, interconectados ou não, chamados de poros, onde fluidos estão alojados [40]. Poros conectados formam canais por onde os fluidos podem escoar. Os meios porosos podem ser classificados de diversas maneiras de acordo com diferentes critérios. Três desses critérios são a conectividade do poros, a estabilidade da estrutura porosa e a distribuição espacial dos poros. Quanto à conectividade dos poros, o meio pode ser classificado como permeável, quando permite o escoamento de um fluido, ou impermeável, no caso contrário. Com relação à estabilidade da estrutura porosa, o meio poroso é consolidado quando a estrutura é rígida o suficiente para manter a configuração dos poros (como em ossos e pedra-pomes, por exemplo) ou não-consolidado, quando a estrutura dos poros pode sofrer alterações devido à pressão (como em esponjas e areia, por exemplo) [6]. Finalmente, quanto à distribuição espacial dos poros, o meio poroso pode ser classificado como ordenado ou desordenado, dependendo da forma como os poros estão distribuídos ao longo do meio poroso.

A simulação de escoamentos em meios porosos é, em geral, bastante complexa devido a geometria do meio poroso e também devido a heterogeneidade presente na composição química de suas paredes internas [6]. Duas propriedades fundamentais com respeito aos meios porosos são a porosidade e a permeabilidade absoluta. Em meios porosos consolidados, essas características dos meios porosos são constantes e dependem do tamanho dos poros e de sua conectividade e distribuição espacial.

2.2.1 Porosidade e Permeabilidade

A porosidade é o parâmetro físico que mede a fração volumétrica dos poros na matriz porosa, e é definida como a razão entre o volume dos poros (espaços vazios) e o volume total do meio poroso,

$$\phi = \frac{\text{volume dos poros}}{\text{volume total do meio poroso}}. \quad (2.19)$$

Fica claro, portanto, que a porosidade varia entre 0 e 1, onde $\phi = 0$ significa que não há espaços vazios, isto é, o material é totalmente maciço, e $\phi = 1$ significa que o material é oco.

Usando a Equação (2.19), nós podemos definir dois tipos de porosidade dependendo da conectividade dos poros, a saber, a porosidade absoluta (ou total) e a porosidade efetiva [41]. No primeiro caso, o volume dos poros usado na equação acima considera todos os poros no meio poroso, mesmo àqueles poros isolados na matriz porosa. No segundo caso, o volume dos poros diz respeito apenas ao conjunto interconectado de poros que efetivamente contribuem para o escoamento dos fluidos.

Por outro lado, a permeabilidade, k , é o parâmetro físico que mostra como os poros estão conectados. Essa quantidade descreve a habilidade de uma determinada espécie fluida escoar pelos canais entre os poros e depende somente da geometria do meio poroso, sendo, por isso, chamada frequentemente de permeabilidade absoluta [40, 42]. Usualmente, a per-

meabilidade é obtida empiricamente através de análises de amostras de rochas. A obtenção analítica da permeabilidade somente é possível em casos especiais, como em poros com geometria cilíndrica.

2.3 Escoamento multifásico

O escoamento multifásico é o escoamento simultâneo de várias fases fluidas. Fase, neste caso, representa uma espécie homogênea que é claramente identificável [7], com propriedades físico-químicas distintas. A fração volumétrica que cada fase ocupa no meio poroso, conhecida como saturação [43], é um parâmetro importante que regula o escoamento da fase. Outras propriedades físicas como as viscosidades das fases e as tensões superficiais entre elas também influenciam no escoamento multifásico. Além disso, a interface entre as fases podem apresentar diferentes morfologias de acordo com as propriedades físicas citadas acima [40,44]. O escoamento de duas fases, escoamento bifásico, é um caso multifásico particular.

2.3.1 Tensão superficial e Molhabilidade

Na interface entre dois fluidos imiscíveis é possível observar a existência de forças superficiais que fazem com que a superfície do líquido se comporte como uma espécie de membrana [3]. Essas forças superficiais atuam tangencialmente na superfície fazendo com que a interface entre os fluidos esteja em um estado de tensão [45]. Essa tensão surge nos líquidos como resultado do desequilíbrio entre as forças coesivas que atuam nas moléculas próximas à superfície do fluido [3,46]. Tal desequilíbrio se deve ao fato de que as moléculas, que estão no interior do fluido, interagem com as moléculas vizinhas atraindo-se igualmente, de modo que a força resultante que age sobre elas é nula, enquanto que as moléculas situadas próximas à superfície estão sujeitas a atrações moleculares que apontam para o interior do fluido [3]. A intensidade dessa força de atração por unidade de comprimento ao longo de qualquer linha na superfície do fluido é chamada de *tensão superficial* ou *tensão interfacial* [3,45], sendo frequentemente representada por γ . Quando a tensão interfacial entre dois fluidos é desprezível, os fluidos são miscíveis [47,48]. Entretanto, alguns estudos mostram a existência de uma tensão superficial transiente entre fluidos miscíveis [49–53]. Mais discussões sobre as origens moleculares da tensão superficial podem ser encontradas nas referências [54,55].

A tensão superficial é a responsável por minimizar as áreas das interfaces entre os fluidos [45,56], razão pela qual é possível observar pequenas quantidades de líquido formarem gotas esféricas e, também, a formação de bolhas de gás em um líquido. Por esta razão, uma interpretação física alternativa de tensão superficial está relacionada ao trabalho (energia) necessário para alterar a área superficial de um fluido [45,46,56]. Assim, podemos escrever que o trabalho, dW , necessário para aumentar a superfície de um fluido por uma área infinitesimal, dA , é

$$dW = \gamma dA. \quad (2.20)$$

Por esse motivo, a tensão superficial é também chamada de *energia de superfície*.

Vale destacar que a tensão superficial é uma propriedade do líquido mas também depende da temperatura[57] e do outro fluido que está em contato com o líquido [3]. Quanto à dependência da temperatura, em geral, o valor da tensão superficial decresce com o aumento da temperatura [3, 56].

Uma interface apresenta uma curvatura sempre que existe uma diferença de pressão positiva entre as partes interna e externa da superfície [4, 45]. Como um exemplo, vamos calcular a diferença de pressão na interface de uma gota esférica de um fluido incompressível. Para isso, vamos considerar uma gota, de raio R , formada na extremidade de uma seringa devido ao deslocamento do êmbolo. O êmbolo, ao deslocar-se, realiza um trabalho sobre o líquido dado por $dW = p dV$, onde p é a pressão exercida pelo êmbolo sobre o líquido e V é o volume da gota. Entretanto, a gota, ao aumentar seu volume, também realiza trabalho, $dW = p_{ext}dV$, ao deslocar o ar a sua volta. Portanto, o trabalho total realizado sobre o fluido é dado por

$$dW = (p - p_{ext}) dV, \quad (2.21)$$

onde p_{ext} é a pressão externa à gota. Por outro lado, o trabalho necessário para formar a superfície de uma gota é dado pela Equação (2.20). Combinando essas duas equações, (2.20) e (2.21), obtemos

$$dW = \gamma dA = (p - p_{ext}) dV. \quad (2.22)$$

Sabendo que a área e o volume de uma esfera são, respectivamente, $A = 4\pi R^2$ e $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, podemos escrever a Equação (2.22) como

$$\gamma d(4\pi R^2) = (p - p_{ext})d(4\pi R^3/3) \quad (2.23)$$

$$\gamma 8\pi R dr = (p - p_{ext})4\pi R^2 dr \quad (2.24)$$

$$2\gamma = (p - p_{ext})R. \quad (2.25)$$

Portanto, a diferença de pressão, $\Delta p = p - p_{ext}$, na interface de uma gota esférica é dada pela lei de Laplace, também chamada de lei Young-Laplace,

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}. \quad (2.26)$$

Outro efeito decorrente da tensão superficial é a ascensão ou depressão capilar [4], que ocorre em tubos de pequeno diâmetro. Esse efeito ocorre devido a uma propriedade chamada de molhabilidade, que é uma característica de aderência relativa de dois fluidos a uma superfície sólida [7, 40], o que significa que a molhabilidade depende tanto dos fluidos envolvidos quanto da natureza do material sólido. Portanto, quando dois fluidos estão em contato entre si e com uma superfície sólida, um dos fluidos será mais aderente do que o outro e, assim, molhará mais o sólido [40]. O fluido mais aderente é chamado de *molhante* enquanto o outro, de *não-molhante*. Havendo mais de dois fluidos em contato com um mesmo sólido, a

molhabilidade será definida para cada par de fluidos [40].

A molhabilidade pode ser quantificada através do chamado *ângulo de contato*, θ , como mostrado na Fig. 2. $\theta = 0^\circ$ indica a completa molhabilidade da fase mais densa [58], o que significa que essa fase se espalha completamente sobre a superfície. Para $\theta = 90^\circ$, a molhabilidade é neutra, significando que ambas as fases molham igualmente a superfície sólida, enquanto $\theta = 180^\circ$ indica a completa molhabilidade da fase menos densa. Dessa forma, quando $\theta < 90^\circ$, o fluido mais denso é a fase molhante, e $\theta > 90^\circ$, a fase não-molhante.

A molhabilidade pode ser explicada levando em consideração os conceitos de forças de coesão e adesão. No caso de uma fase molhante, a força de adesão (atração entre moléculas diferentes) é maior do que a força de coesão (atração entre moléculas do mesmo tipo), fazendo com que a fase molhe a superfície. Já na fase não-molhante ocorre justamente o contrário, isto é, a força de coesão é superior a força de adesão, fazendo com que a fase não se espalhe sobre a superfície.

Figura 2 – Molhabilidade e ângulo de contato.

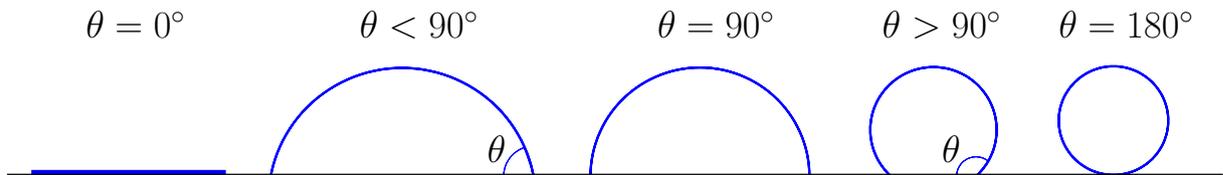


Ilustração do fenômeno da molhabilidade por meio do ângulo de contato, θ . Para $\theta = 0^\circ$, vemos a completa molhabilidade da fase mais densa, enquanto $\theta = 90^\circ$ representa uma molhabilidade neutra para ambas as fases e $\theta = 180^\circ$ indica que a fase mais densa é completamente não-molhante. Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma importante grandeza adimensional que expressa os efeitos da tensão superficial [7, 59] é o número capilar, definido como a razão entre as forças viscosas e as forças capilares [60, 61],

$$Ca = \frac{\mu v}{\gamma}, \quad (2.27)$$

onde μ é a viscosidade do fluido, v é a velocidade do fluido. O número capilar indica, portanto, a relação entre a magnitude das forças viscosas e as forças devidas à tensão superficial ou interfacial [62].

2.3.2 Pressão Capilar

Considere uma interface curva em equilíbrio entre dois fluidos imiscíveis, um fluido molhante e outro não-molhante, nos canais que ligam os poros do meio poroso [40]. A diferença de pressão na interface entre esses dois fluidos é chamada de pressão capilar, p_{cap} , e pode ser escrita como

$$p_{cap} = p_{nm} - p_m, \quad (2.28)$$

onde p_{nm} é a pressão na interface do lado do fluido não-molhante e p_m , é a pressão no lado do fluido molhante.

Considerando que os canais do meio poroso sejam tubos cilíndricos de raio r , podemos escrever a pressão capilar na interface entre os fluidos em termos da tensão interfacial, γ , do ângulo de contato, θ , e do raio do tubo capilar através da equação que também é conhecida como lei de Young-Laplace [7, 40], dada por

$$p_{cap} = \frac{2\gamma \cos\theta}{r}. \quad (2.29)$$

2.3.3 Escoamento em um Tubo Capilar

Em um escoamento laminar e estacionário, através de um tubo cilíndrico, o fluido se divide em camadas cilíndricas coaxiais, que se movem com velocidades de diferentes magnitudes, dadas pela equação [9]

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2), \quad (2.30)$$

onde Δp é a diferença de pressão entre as extremidades do tubo, R é o raio do tubo, r é a coordenada radial cilíndrica e L é o comprimento do tubo. A camada mais externa ($r = R$), chamada de camada limite, adere à parede do tubo devido à condição de não-deslizamento e, por isso, tem velocidade nula, enquanto a camada central ($r = 0$) tem magnitude máxima, dada por $v(0) = \Delta p R^2 / (4\mu L)$ [9]. A Equação (2.30) mostra, então, que a magnitude da velocidade de uma dada camada cilíndrica do fluido, em um referencial fixo no tubo, é diretamente proporcional a diferença de pressão e ao quadrado do raio do tubo e, também, inversamente proporcional a viscosidade do fluido e ao comprimento do tubo.

De posse da Equação (2.30), podemos então calcular a vazão, Q , desse escoamento, isto é, o volume de fluido que atravessa uma seção reta do tubo por unidade de tempo,

$$dQ(r) = v(r) \cdot 2\pi r dr. \quad (2.31)$$

Utilizando a Equação (2.30), obtemos

$$dQ(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr. \quad (2.32)$$

Integrando a Equação (2.32), obtemos

$$Q = \int_0^R dQ(r) = \frac{\pi \Delta p}{2\mu L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr. \quad (2.33)$$

Finalmente, obtemos que o fluxo laminar através de um tubo cilíndrico é dado pela equação de Hagen-Poiseuille [63, 64],

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta p. \quad (2.34)$$

A Equação 2.34 é o resultado de experimentos feitos, independentemente por Poiseuille e Hagen, entre 1938 e 1941 [64] e mostra que a vazão de um fluido em um tubo cilíndrico é diretamente proporcional a diferença de pressão e inversamente proporcional a viscosidade do

fluido.

2.3.4 Lei de Darcy

Em seus estudos sobre o escoamento de fluidos em meios porosos, o engenheiro francês Henry Darcy observou, em 1856 [65], que a velocidade da água, ao passar por um meio poroso, seguia uma relação linear com gradiente de pressão, ao qual estava submetida a amostra [40,42]. Depois de vários experimentos, Darcy concluiu que a velocidade de um fluido escoando em um meio poroso dependia, não apenas do gradiente de pressão, mas também da permeabilidade do meio e do inverso do coeficiente de viscosidade do fluido, deduzindo a lei que carrega seu nome, dada por

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho \vec{g}), \quad (2.35)$$

onde $\rho \vec{g}$ é a densidade de força gravitacional, o primeiro sinal negativo significa que o escoamento segue para regiões de menor pressão. A lei de Darcy é válida para meios porosos macroscópicos, onde a velocidade é definida em uma região muito maior do que o tamanho dos poros.

No escoamento simultâneo de duas ou mais fases fluidas em meios porosos, há uma espécie de competição no escoamento dessas fases. Surge então, uma nova definição de permeabilidade, a permeabilidade efetiva, k_{ef} , que não depende apenas das propriedades do meio poroso, mas também das propriedades dos fluidos e de suas respectivas saturações [66]. A lei de Darcy para um escoamento multifásico, desprezando o efeito gravitacional, é dada por [40,43]

$$\vec{v}_j = -\frac{k_{ef}^j}{\mu_j} \nabla p, \quad (2.36)$$

onde o índice j indica a fase considerada nas medições. Vale destacar que a soma das permeabilidades efetivas é sempre menor que a permeabilidade absoluta [66].

2.4 Equações básicas da dinâmica de fluidos

A derivação das equações que governam a dinâmica de fluidos é baseada em princípios básicos. Os mais usados são a conservação da massa e a conservação do momento. O princípio da conservação é discutido a seguir em uma formulação geral, e logo depois introduzimos as equações de Navier-Stokes e de continuidade.

2.4.1 Equação geral de conservação

Para a dedução de uma equação geral de conservação, vamos considerar Ω uma região fixa do espaço, de um dado *sistema*, através da qual o fluido escoar. A esta região chamaremos de *volume de controle*. Vamos também considerar $\partial\Omega$, a *superfície de controle*, isto é, a superfície que contorna o volume de controle. Um *sistema* é definido aqui como uma quantidade fixa e identificável de massa ou matéria [3,4].

Seja N uma propriedade extensiva arbitrária do sistema com quantidades associadas com o volume de controle [4]. A conservação da propriedade N implica que sua taxa de variação temporal no sistema é nula, isto é,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{sistema}} \eta(\vec{r}, t) d\tau = 0, \quad (2.37)$$

onde $\eta(\vec{r}, t)$ é uma propriedade intensiva, em função da posição \vec{r} e do tempo t , que corresponde a N por unidade de volume e $d\tau$ é um elemento infinitesimal de volume. Entretanto, utilizando o teorema de transporte de Reynolds, Equação (E.10), a taxa de variação da propriedade N do sistema pode ser escrita em termos do volume de controle [3], na forma

$$\frac{dN}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \eta(\vec{r}, t) d\tau + \int_{\partial\Omega} \eta(\vec{r}, t) (\vec{u} \cdot d\vec{A}) + \int_{\Omega} s(\vec{r}, t) d\tau, \quad (2.38)$$

onde \vec{u} é velocidade de escoamento do fluido medida com relação ao volume de controle, $d\vec{A}$ é o elemento infinitesimal de área direcionado para fora da superfície e $s(\vec{r}, t)$ é a taxa de criação ou consumo de N por unidade de volume dentro do volume de controle. Combinando as Equações (2.37) e (2.38) obtemos então uma lei de conservação geral na forma integral, dada por

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} d\tau + \int_{\partial\Omega} \eta (\vec{u} \cdot d\vec{A}) + \int_{\Omega} s d\tau = 0, \quad (2.39)$$

ou,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} d\tau = - \int_{\partial\Omega} \eta (\vec{u} \cdot d\vec{A}) - \int_{\Omega} s d\tau, \quad (2.40)$$

o que significa que a taxa de variação temporal de N dentro do volume de controle é igual ao fluxo de N que atravessa a superfície de controle mais a quantidade criada ou consumida por fontes ou sumidouros dentro do volume de controle.

Utilizando o teorema da divergência no segundo termo do lado esquerdo da Equação (2.39) e escrevendo os três termos sob o mesmo sinal de integral, obtemos

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \vec{u}) + s \right] d\tau = 0, \quad (2.41)$$

de onde obtemos então uma lei de conservação geral na forma diferencial,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \vec{u}) + s = 0. \quad (2.42)$$

2.4.2 Conservação da massa

De acordo com o princípio da conservação da massa, quando a massa, m , de um sistema permanece constante a taxa de variação temporal de massa do sistema é nula, e, portanto, podemos escrever

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{sistema}} \rho(\vec{r}, t) d\tau = 0, \quad (2.43)$$

onde $\rho(\vec{r}, t)$ é a massa específica em função da posição \vec{r} e do tempo t .

Seguindo o mesmo procedimento utilizado na Subseção 2.4.1 com a Equação (2.43), ou simplesmente aplicando a Equação (2.42), com $\eta = \rho$ e $s = 0$ (sem fontes ou sumidouros do massa), obtemos a lei de conservação de massa na forma diferencial, também conhecida como *equação da continuidade*, dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.44)$$

Para o caso em que densidade do sistema é constante no tempo, isto é, $\partial \rho / \partial t = 0$, a equação da continuidade se reduz então para

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.45)$$

2.4.3 Conservação do momento linear

A segunda lei Newton para sistemas movendo-se em relação a um referencial inercial, estabelece que

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (2.46)$$

isto é, que a força resultante \vec{F} , que é dada pela soma das forças externas \vec{F}_{ext} que atuam no sistema, é igual a taxa de variação da quantidade de movimento ou momento \vec{P} do sistema [3,4]. Por sua vez, o momento linear de um sistema contínuo pode ser escrito como

$$\vec{P} = \int_{sistema} \vec{u} \rho(\vec{r}, t) d\tau. \quad (2.47)$$

Utilizando o teorema de transporte de Reynolds, Equação (E.10), e a equação acima podemos reescrever a segunda lei de Newton para um sistema, Equação (2.46), na seguinte forma

$$\vec{F} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \rho d\tau + \int_{\partial\Omega} \vec{u} \rho (\vec{u} \cdot d\vec{A}). \quad (2.48)$$

Portanto, a força resultante sobre um sistema, ou a taxa de variação do momento linear, corresponde à taxa de variação do momento linear dentro do volume de controle mais o fluxo líquido de momento através da superfície de controle [3].

Queremos então calcular a força que atua sobre uma partícula fluida, ou seja, um elemento de volume infinitesimal. Para isso, vamos primeiramente calcular a aceleração de uma partícula. Uma vez que $\vec{u}(\vec{r}(t), t)$ é um campo vetorial que descreve a velocidade do escoamento inteiro e não apenas o movimento individual de uma partícula [4], a aceleração de uma partícula será dada, de acordo com a regra da cadeia, Equação (E.3), por

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad (2.49)$$

onde $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$ é a posição no tempo t , em coordenadas cartesianas, dentro

do volume de controle e \dot{x} representa a derivada temporal da variável indicada. De forma mais compacta, podemos escrever a aceleração de uma partícula fluida como

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \quad (2.50)$$

onde o operador

$$\frac{D}{Dt} = (\vec{u} \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.51)$$

é chamado de *derivada material*, uma vez que essa derivada é calculada para uma partícula de matéria fluida [4]. O primeiro termo do lado direito da Equação (2.51) é chamado de *derivada convectiva* e o segundo termo é chamado de *derivada local*.

Utilizando o conceito de derivada material e a segunda lei de Newton, Equação (2.46), obtemos que a força resultante que atua sobre uma partícula fluida é dada por

$$\vec{F} = \frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{P}. \quad (2.52)$$

Uma vez que a quantidade de movimento, \vec{P} , é dada pela Equação (2.47), obtemos que

$$\vec{F} = m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] d\tau, \quad (2.53)$$

onde $m = \int_{\Omega} \rho d\tau$ é a massa do sistema.

A força resultante sobre o fluido pode ser escrita em termos das forças de superfície \vec{F}_S e de campo \vec{F}_B , como

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} d\tau + \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\tau, \quad (2.54)$$

onde \vec{f} é a força de campo por unidade de massa e \mathbf{T} é um tensor de tensões dado por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

onde σ_{ij} representa as tensões normais e τ_{ij} , as tensões de cisalhamento. Combinando as Equações (2.53) e (2.54), temos que

$$\vec{F} = \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] d\tau = \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{f} \right] d\tau, \quad (2.56)$$

de onde obtemos uma equação geral de movimento, dada por

$$\rho \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{f}. \quad (2.57)$$

Utilizando a definição de derivada material, Equação (2.51), podemos reescrever a Equação (2.57)

como

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} + \vec{f}, \quad (2.58)$$

que é conhecida como equação do momento de Cauchy [67].

Um outro caminho para se obter a equação geral do momento, dada por (2.57), é a partir do uso da equação geral de conservação, Equação (2.42), aplicada ao momento. Fazendo $\eta = \rho\vec{u}$, que é o fluxo de massa ou densidade de momento, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \nabla \cdot (\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) + s = 0, \quad (2.59)$$

onde o termo $\vec{u} \otimes \vec{u}$ é um produto tensorial (veja a definição na Equação (E.1)). Usando a fórmula da divergência para um produto tensorial, Equação (E.7), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + (\nabla \cdot \rho\vec{u})\vec{u} + \rho\vec{u} \cdot (\nabla\vec{u}) = -s. \quad (2.60)$$

Utilizando a regra do produto, Equação (E.2) no primeiro termo do lado esquerdo da equação anterior, obtemos

$$\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho\vec{u})\vec{u} + \rho\vec{u} \cdot (\nabla\vec{u}) = -s. \quad (2.61)$$

que podemos reescrever como

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\vec{u} \right) \vec{u} + \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right) = -s. \quad (2.62)$$

Utilizando a equação de continuidade, Equação (2.44), obtemos

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -s, \quad (2.63)$$

e usando a definição de derivada material, Equação (2.51), temos que

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -s = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}, \quad (2.64)$$

Considerando as Equações (2.54) e (2.56), recuperamos a equação do momento, dada por

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\vec{f}. \quad (2.65)$$

Essa equação de momento, derivada da conservação do momento linear, é conhecida como equação de Navier-Stokes. Observe que podemos também obter, diretamente a partir da Equação (2.59), uma forma equivalente da equação do momento, dada por

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\vec{f}. \quad (2.66)$$

A partir da definição de derivada material e tendo em vista a segunda lei de Newton, Equação (2.46), vemos que o lado esquerdo da Equação (2.65) representa a força resultante por

unidade de volume que atua sobre o fluido e o lado direito da equação representa a soma de todas forças (forças de superfície e de campo) por unidade de volume que atuam sobre o fluido.

2.4.4 Formas simplificadas da equação de Navier-Stokes

Como vimos acima, o comportamento dos fluidos pode ser descrito pelas equações de Navier-Stokes, que consistem em um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares que se baseiam na lei de conservação do momento linear. A partir dessas equações, podemos determinar os campos de velocidade e de pressão em um escoamento. Na prática, porém, devido a alta complexidade matemática presente nessas equações, apenas casos mais simples podem ser resolvidos analiticamente [1]. Além disso, as condições iniciais e as condições de contorno fazem com que as soluções, para a maioria das situações reais, sejam difíceis ou até mesmo impossíveis de se obter. No entanto, as equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas de modo significativo dependendo das propriedades dos fluidos envolvidos e do tipo de escoamento, possibilitando assim uma solução numérica [6]. Vale ressaltar que as equações de Navier-Stokes são largamente utilizadas em diversas áreas para resolver os mais variados problemas, inclusive, são usadas, no estudo do clima e para modelar as correntes oceânicas, o fluxo de ar em torno de aerofólios de automóveis e de aviões, a propagação de fumaça em incêndios e em chaminés industriais, além disso, são utilizadas nos estudos do fluxo sanguíneo, no projeto de usinas hidrelétricas, na análise dos efeitos das poluições hídrica e atmosférica, entre outros [1].

Faremos agora uma breve dedução das equações de Navier-Stokes, aplicando a equação geral do movimento, Equação (2.65), a um fluido newtoniano. Para fluidos newtonianos, as tensões de cisalhamento, em notação indicial, são dadas por [3, 4]

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.67)$$

e as tensões normais são dadas por [4]

$$\sigma_{ii} = -p + \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (2.68)$$

onde x_i representam as coordenadas x , y e z , p é a pressão termodinâmica local, e o coeficiente λ é a *viscosidade volumétrica* que está relacionado à variação de volume devido ao efeito viscoso [68] e que, de acordo com a *hipótese de Stokes*, é dado por [4, 68]

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (2.69)$$

Note que a Equação (2.67) é uma generalização da Equação (2.12). Utilizando as Equações (2.67) e (2.68), podemos escrever os elementos do tensor \mathbf{T} , Equação (2.55), como

$$T_{ij} = [-p + \lambda (\nabla \cdot \vec{u})] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.70)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (2.71)$$

Ou ainda, de forma mais compacta,

$$\mathbf{T} = [-p + \lambda(\nabla \cdot \vec{u})]\mathbf{I} + \mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t), \quad (2.72)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e sobrescrito t indica a transposta da matriz. Aplicando a divergência ao tensor \mathbf{T} , dado pela Equação (2.72), obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \nabla[\lambda(\nabla \cdot \vec{u})] + \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t)]. \quad (2.73)$$

Finalmente, substituindo a expressão (2.73) na equação geral de movimento, Equação (2.65), obtemos a equação de Navier-Stokes para fluidos newtonianos,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \nabla[\lambda(\nabla \cdot \vec{u})] + \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t)] + \rho \vec{f}. \quad (2.74)$$

Utilizando algumas identidades do cálculo vetorial, Equações (E.8) e (E.9), podemos reescrever os dois últimos termos da Equação (2.73) como

$$\nabla[\lambda(\nabla \cdot \vec{u})] = \lambda \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + (\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \lambda, \quad (2.75)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t)] &= \mu \nabla \cdot (\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t) + (\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t) \cdot \nabla \mu \\ &= \mu \nabla^2 \vec{u} + \mu \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + (\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t) \cdot \nabla \mu. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Substituindo as expressões (2.75) e (2.76) na Equação (2.74) obtemos uma outra forma das equações de Navier-Stokes, dada por

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + (\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \lambda + (\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t) \cdot \nabla \mu + \rho \vec{f}. \quad (2.77)$$

As equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas para casos particulares. Vamos considerar, inicialmente, o caso de um fluido newtoniano com viscosidade (μ e λ) constante. Neste caso, a Equação (2.77) se torna

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \rho \vec{f}. \quad (2.78)$$

Em particular, o segundo e o terceiro termos do lado direito da Equação (2.78) expressam a contribuição das forças viscosas para o escoamento, onde o segundo termo, $\mu \nabla^2 \vec{u}$, é conhecido como termo difusivo.

Para um fluido incompressível, isto é, um fluido com densidade constante, as equações

de Navier-Stokes, dadas pela Equação (2.78), são simplificadas para

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}, \quad (2.79)$$

por causa da equação da continuidade ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$), Equação (2.44). Para o caso de escoamento sem atrito, isto é, com viscosidade nula ($\mu = 0$), e fazendo $\vec{f} = \vec{g}$, a Equação (2.79) se reduz a

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p, \quad (2.80)$$

que é conhecida como *equação de Euler* [4].

2.4.4.1 Escoamento multifásico

A extensão do modelo monofásico das equações de Navier-Stokes (visto acima) para contemplar o escoamento de duas fases pode ser feita através da adição de um termo fonte chamado de *força de superfície singular* para representar os efeitos da tensão superficial entre os fluidos [69]. Portanto, para fluidos incompressíveis, levando em consideração a tensão superficial, as equações de Navier-Stokes, Equação (2.74), se tornam

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)] + \rho \vec{f} + \vec{F}_s, \quad (2.81)$$

onde \vec{F}_s é a força de superfície singular, dada por [69, 70]

$$\vec{F}_s(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma} \vec{f}_s(\vec{S}, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\Gamma}(\vec{S})) d\vec{S}, \quad (2.82)$$

onde a função \vec{f}_s é a densidade de força de superfície, $\delta(x)$ é a função delta de Dirac, usada aqui por conta da sua propriedade de filtragem, Equações (E.12) e (E.13), Γ corresponde à interface entre as fases, $\vec{x}_{\Gamma}(\vec{s})$ é uma parametrização da interface e $d\vec{S}$ é o elemento de área da interface. A densidade de força de superfície pode ser escrita como [69, 71]

$$\vec{f}_s = \gamma \kappa \vec{n} + \nabla_s \gamma, \quad (2.83)$$

onde γ é o coeficiente de tensão superficial, κ é a curvatura local da interface, \vec{n} é o vetor normal à interface, e ∇_s é o operador gradiente de superfície, dado por

$$\nabla_s = (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \cdot \nabla. \quad (2.84)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (2.83) é a força capilar e o segundo termo corresponde às forças de Marangoni, que são forças tangenciais que atuam na interface, produzindo fluxo em um fluido estático [72].

Ao considerar um modelo multifásico das equações de Navier-Stokes, é possível utilizar apenas um conjunto dessas equações para representar o escoamento de toda a mistura. Nesse caso, é necessário utilizar modelos para representar as propriedades efetivas da mistura,

como a densidade e a viscosidade. Esses modelos utilizam desde uma média ponderada das propriedades das fases até relações mais complexas, baseadas em resultados experimentais. Para mais detalhes sobre modelos usados para representar as propriedades efetivas no escoamento multifásico, consulte as referências [73–78].

3 CORRELAÇÕES E SIMETRIA DE REVERSÃO TEMPORAIS

A descrição dos comportamentos macroscópicos de um sistema em termos de suas propriedades microscópicas é, por vezes, uma tarefa não trivial. As teorias e modelos da mecânica estatística, por exemplo, procuram atingir esse objetivo com base nas interações microscópicas entre as infinidades de partículas que o compõem. As propriedades macroscópicas caracterizam o que chamamos de macroestado do sistema. Cada macroestado está associado a um enorme conjunto de microestados possíveis, que são as diferentes configurações microscópicas que o sistema pode assumir. Para facilitar a descrição do estado completo de um sistema dinâmico, através do conjunto de suas variáveis, é interessante introduzir o conceito de espaço de fase. O espaço de fase é um espaço multidimensional que consiste em todas as combinações possíveis dessas variáveis. Cada ponto no espaço de fase representa um único estado microscópico do sistema. Assim, podemos representar no espaço de fase todos os estados microscópicos compatíveis com as condições macroscópicas de um sistema (como energia, volume, pressão, número de partículas, etc.) [79].

Neste capítulo, vamos introduzir alguns conceitos úteis, assim como apresentar formas de estudar séries temporais, para verificar se existe correlação entre as flutuações de diferentes parâmetros físicos.

3.1 Ergodicidade

Um *conjunto estatístico* ou *ensemble*, conceito introduzido por Gibbs em 1902 [80], é um conjunto de múltiplas cópias idênticas de um sistema físico, em que cada cópia, embora esteja no mesmo macroestado, representa um diferente estado microscópico possível do sistema. Cada microestado representa uma configuração única do sistema no espaço de fase. A ideia por trás do ensemble é que, ao observar várias cópias do sistema em estados diferentes, podemos obter informações estatísticas sobre o comportamento médio do sistema.

Considere uma grandeza física observável A que depende do tempo e das variáveis que configuram o estado do sistema. A média de A sobre o ensemble, isto é, sobre todas as realizações possíveis do sistema, pode ser obtida por meio de uma média sobre o espaço de fase do sistema, dada por [79]

$$\langle A \rangle = \frac{\int A(q, p, t) \rho(q, p, t) dq dp}{\int \rho(q, p, t) dq dp}, \quad (3.1)$$

onde q e p representam as coordenadas generalizadas de posição e de momento do sistema, respectivamente, e $\rho(q, p)$ é a densidade de probabilidade no espaço de fase do sistema. A *densidade do espaço de fase* é uma função que associa um peso probabilístico para cada ponto do espaço de fase, e representa a densidade de probabilidade do macroestado chegar àquele ponto do espaço de fase [81]. O termo $\rho(q, p, t) dq dp$ corresponde ao número de pontos representativos que estão contidos no elemento de volume $dq dp$, centrado no ponto (p, q) , em um dado

instante de tempo t [79].

No equilíbrio, isto é, em uma situação *estacionária*, o teorema de Liouville garante que ρ é uma constante em relação ao tempo. Nesse caso, a função densidade depende apenas das coordenadas generalizadas, isto é, $\rho = \rho(q, p)$, e, portanto, não depende explicitamente do tempo [79]. Além disso, se a densidade de probabilidade for normalizada, isto é, se

$$\int \rho(q, p) dq dp = 1, \quad (3.2)$$

então a média de A sobre o ensemble, dada pela Equação (3.1), pode ser escrita como [82]

$$\langle A \rangle = \int A(q, p) \rho(q, p) dq dp. \quad (3.3)$$

Por outro lado, a média temporal do observável A pode ser calculada como

$$\bar{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t, q(t), p(t)) dt, \quad (3.4)$$

onde T é o tempo total de integração e $q(t)$ e $p(t)$ representam, respectivamente, as coordenadas generalizadas de posição e de momento do sistema no tempo t .

Um sistema é considerado ergódico se, ao longo do tempo, as médias temporais de suas variáveis se igualam às médias calculadas sobre o conjunto estatístico, ou seja,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \equiv \int A(q, p) \rho(q, p) dq dp, \quad (3.5)$$

ou,

$$\bar{A} \equiv \langle A \rangle. \quad (3.6)$$

Assim, de acordo com a hipótese ergódica, uma média sobre um conjunto com apenas algumas partículas, mas em longos intervalos de tempo, pode então substituir uma média sobre muitas partículas [79, 83]. Além disso, o fato de um sistema ser ergódico significa que qualquer configuração possível do sistema pode ser alcançada a partir de qualquer outra configuração possível [83]. Ou seja, um sistema ergódico pode alcançar, ao longo do tempo, todas as regiões do espaço de fase consistentes com suas restrições de energia e outras grandezas conservadas. A ergodicidade, portanto, é uma propriedade que permite que os resultados de médias temporais sejam generalizados para médias instantâneas no ensemble e vice-versa, simplificando significativamente a análise estatística de sistemas complexos. Para mais informações sobre a hipótese ergódica, sua validade e sua prova matemática, consulte as referências [84–86].

3.2 Funções de correlação temporal

As correlações medem o grau em que dois atributos de um sistema variam juntos [87]. Considere A e B como duas variáveis observáveis de um sistema físico dinâmico. A

flutuação de A em torno de seu valor médio \bar{A} é dada por

$$\Delta A(t) = A(t) - \bar{A}, \quad (3.7)$$

e a flutuação de B é definida de modo análogo. A média do conjunto do par de flutuações $\langle \Delta A \Delta B \rangle$ indica como ΔA e ΔB estão correlacionados dentro do conjunto e indica o quanto se espera que o valor de ΔA corresponda ao de ΔB , para um estado de flutuação selecionado aleatoriamente [87].

De forma mais geral, a correlação observada entre essas duas variáveis, em instantes de tempo diferentes, é dada por

$$C_{AB}(\tau) = \langle \Delta A(\tau_0) \Delta B(\tau_0 + \tau) \rangle, \quad (3.8)$$

onde τ representa o atraso ou deslocamento em relação às observações das flutuações. A função $C_{AB}(\tau)$, chamada de *função de Kubo* ou função de relaxação [82], é a correlação temporal entre as flutuações de A no instante τ_0 e as flutuações de B no instante $\tau_0 + \tau$. A correlação inicial entre essas variáveis no instante de tempo τ_0 é definida pela média

$$C_{AB}(0) = \langle \Delta A(\tau_0) \Delta B(\tau_0) \rangle, \quad (3.9)$$

e quantifica o grau em que essas flutuações são correlacionadas para observações *instantâneas* do sistema. A correlação temporal, dada pela Equação (3.8), pode ser reescrita como

$$C_{AB}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} \frac{[\Delta A(t)] [\Delta B(t + \tau)]}{\sigma_A \sigma_B} dt, \quad (3.10)$$

onde os valores médios, e as variâncias σ_A e σ_B , são todos calculados sobre a janela de tempo $[0, T - \tau]$, compartilhada por ambas as flutuações.

A função definida na Equação (3.8) é comumente chamada de função de correlação cruzada e mede quão próximos dois observáveis distintos estão relacionados entre si no mesmo instante de tempo ou em momentos diferentes. Além disso, a correlação cruzada mede o quanto um processo pode ser previsto com base nas observações do outro, mas, uma vez que não se conhece qual flutuação seria a causa e qual seria o efeito, essa previsibilidade pode se referir a tempos anteriores ou posteriores [88].

Quando se deseja calcular a correlação temporal de uma variável consigo mesma, a função de correlação cruzada é substituída pela função de autocorrelação, dada por $C_{AA}(\tau) = \langle \Delta A(\tau_0) \Delta A(\tau_0 + \tau) \rangle$. De modo análogo, a função de autocorrelação é uma medida de quanto um observável, em um determinado instante de tempo, está relacionado consigo mesmo em outro instante de tempo. A autocorrelação mede o grau de semelhança da série de flutuações consigo mesma com o passar do tempo e pode ser visto como uma medida da previsibilidade de um processo com base em dados passados [88]. A previsão de um processo em um tempo no futuro será boa, se o valor da função de correlação no atraso τ for grande, pois uma vez

que a função de correlação se torna pequena, a semelhança da série temporal com sua história anterior desaparece e as flutuações tornam-se imprevisíveis [88].

3.3 Simetria de reversão temporal

Em 1931, Onsager estabeleceu suas famosas relações recíprocas [89, 90] que estabelecem conexões entre os coeficientes presentes nas leis fenomenológicas lineares e que descrevem os processos irreversíveis [91]. Essas relações conectam a termodinâmica, a teoria de transporte e a mecânica estatística, e além de mostrar a importância das correlações das flutuações na análise de sistemas próximos ao equilíbrio, também apresentam várias propriedades elementares das correlações no equilíbrio [87].

Em um sistema em equilíbrio, as correlações temporais têm propriedades de simetria que conduzem a relações recíprocas. Essas propriedades surgem do princípio da reversibilidade microscópica, que, de acordo com Onsager, significa que os processos moleculares ocorrem com igual probabilidade nas direções direta e reversa em relação ao tempo [87]. Esse princípio pode ser expresso, em termos de correlações temporais, como

$$\langle \Delta A(\tau_0) \Delta B(\tau_0 + \tau) \rangle = \langle \Delta A(\tau_0) \Delta B(\tau_0 - \tau) \rangle, \quad (3.11)$$

o que significa que a expectativa de que um evento na quantidade ΔA , observado no tempo τ_0 , seja seguido por um evento na quantidade ΔB , em $\tau_0 + \tau$, é a mesma expectativa de que o evento em ΔB ocorra no tempo $\tau_0 - \tau$, isto é, antes do evento em ΔA . A propriedade descrita pela Equação (3.11), também é chamada de *simetria de reversão temporal* [87].

Como o equilíbrio é uma condição estacionária, as correlações temporais são insensíveis a mudanças de τ_0 na Equação (3.8). Assim, substituindo de τ_0 por $\tau_0 - \tau$, obtemos

$$C_{AB}(\tau) = \langle \Delta A(\tau_0) \Delta B(\tau_0 + \tau) \rangle = \langle \Delta A(\tau_0 - \tau) \Delta B(\tau_0) \rangle, \quad (3.12)$$

que é conhecido como o princípio da invariância translacional no tempo [87]. Aplicando o princípio da simetria de reversão de tempo na Equação (3.12), obtemos

$$\langle \Delta A(\tau_0) \Delta B(\tau_0 + \tau) \rangle = \langle \Delta A(\tau_0 + \tau) \Delta B(\tau_0) \rangle, \quad (3.13)$$

ou seja,

$$C_{AB}(\tau) = C_{BA}(\tau). \quad (3.14)$$

As Equações (3.13) e (3.14) expressam, portanto, o princípio da reversibilidade microscópica, que implica que a probabilidade de observar, em média, que uma flutuação ΔA , no tempo τ_0 , seja seguido por outra flutuação ΔB após um intervalo de tempo $\tau_0 + \tau$, é igual à probabilidade de observar a situação inversa [83]. Portanto, um processo dinâmico é considerado reversível no tempo se as funções de correlação cruzada forem simétricas.

É interessante destacar que a propriedade de invariância de reversão temporal ex-

pressa o fato de que as equações mecânicas do movimento de partículas são simétricas em relação ao tempo, o que implica que se todas as velocidades fossem invertidas, as partículas iriam refazer suas trajetórias passadas [91]. Outro fato interessante é que, de acordo com a *hipótese de regressão* de Onsager, as flutuações, que descrevem os estados microscópicos, evoluem de acordo com as leis que regem as variações macroscópicas [87]. Além disso, essa hipótese afirma que para pequenos desvios do equilíbrio, o relaxamento em direção ao equilíbrio é governado pelas mesmas leis que regulam as flutuações no equilíbrio [82]. Portanto, a hipótese de regressão de Onsager é uma importante contribuição para a teoria de transporte em sistemas próximos ao equilíbrio termodinâmico.

As correlações temporais ou funções de Kubo são consideradas objetos básicos da mecânica estatística fora do equilíbrio, pois permitem calcular primeiro as *suscetibilidades dinâmicas* que estão relacionadas às derivadas temporais das funções de Kubo e descrevem a resposta do sistema a uma perturbação externa dependente do tempo, e segundo, os *coeficientes de transporte*, que podem ser expressos em termos de integrais no tempo das funções de Kubo [82]. As equações que expressam os coeficientes de transporte em termos de integrais das correlações temporais são conhecidas como *relações de Green-Kubo* [92–96].

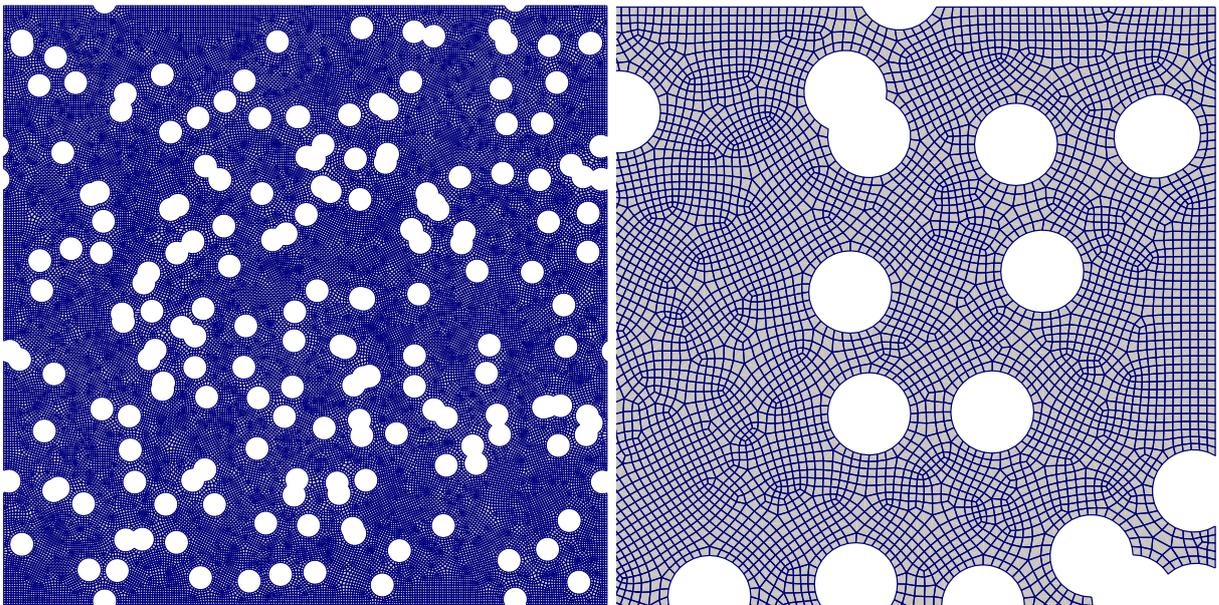
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de entender melhor como o comportamento microscópico do fluxo de duas fases afeta as propriedades macroscópicas do escoamento, simulamos os campos de velocidade de dois fluidos imiscíveis escoando em um meio poroso bidimensional.

4.1 Modelo matemático

A geometria dos poros do nosso sistema consiste em um meio poroso bidimensional do tipo “Queijo Suíço” [97–99], conforme está apresentado na Fig. 3, feito de obstáculos circulares que podem se sobrepor uns aos outros. Mais especificamente, o domínio poroso é composto por uma caixa quadrada de $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ e preenchido aleatoriamente com discos de 1 mm de diâmetro até que uma porosidade desejada ϕ seja alcançada. Para todas as simulações realizadas aqui, nós utilizamos $\phi = 0,8$. Condições de contorno periódicas são aplicadas em ambas as direções a fim de evitar efeitos de tamanho finito. O espaço poroso é preenchido com dois fluidos newtonianos imiscíveis e incompressíveis com uma tensão superficial atuando na interface entre eles, dado por γ . A Fig. 4 mostra a condição inicial do sistema, onde a fração do volume preenchido pela fase de baixa viscosidade (representada na cor azul) é definida como $S_1 = 0,2$. A fase de alta viscosidade (representada na cor vermelha) preenche o restante do volume, $S_2 = 1 - S_1 = 0,8$. Um gradiente de pressão global e constante, ∇p , é então

Figura 3 – O meio poroso bidimensional utilizado nas simulações e a malha de discretização.

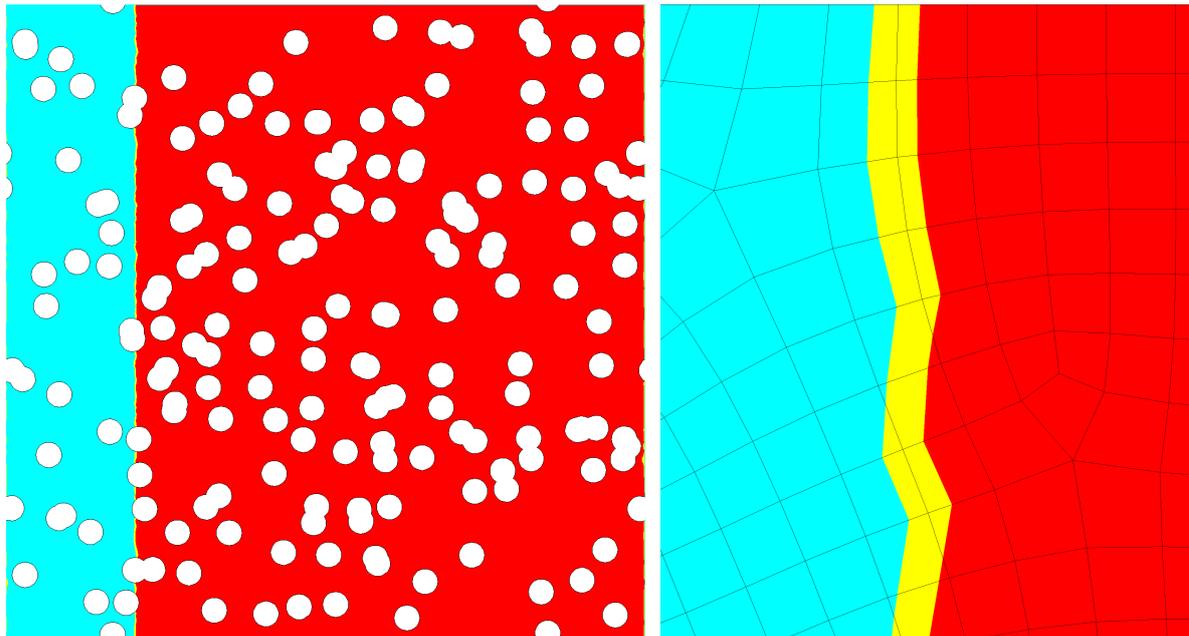


(a) Visão completa do meio poroso utilizado nas simulações.

(b) Visão ampliada do meio poroso, exibindo detalhes da malha de discretização.

O meio poroso utilizado nas simulações consiste em uma caixa quadrada de $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ preenchida aleatoriamente com discos de 1 mm de diâmetro, e possui uma porosidade $\phi = 0,8$. A malha de discretização é composta por uma rede de quadriláteros. Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4 – Configuração inicial do sistema para o escoamento de duas fases newtonianas.



(a) Configuração inicial do sistema.

(b) Visão ampliada da região próxima à interface.

A fração do volume ocupado pela fase 1 é $S_1 = 0,20$. A fase 1, com baixa viscosidade ($\mu_1 = 0,1 Pa \cdot s$), está representada na cor azul claro, a fase 2, com alta viscosidade ($\mu_2 = 1,0 Pa \cdot s$), está representada na cor vermelha e a interface entre os fluidos, na cor amarela. A barra de cores indica a fração de volume ocupada pela fase 1. Devido à conservação da massa, a relação $S_1 + S_2 = 1$ é verdade em todos os grids numéricos. Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

aplicado na direção horizontal (direção \hat{x}) ocasionando o fluxo.

A solução numérica das equações de Navier-Stokes requer a discretização do espaço poroso onde o escoamento acontece [6]. Os três métodos clássicos de discretização para a solução numérica de problemas que são descritos por equações diferenciais parciais [100] são: o método das diferenças finitas [101]; o método de elementos finitos [102]; e o método dos volumes finitos [103]. A geometria do nosso sistema foi discretizada utilizando uma rede de quadriláteros, uma vez que o cálculo dos efeitos da tensão superficial são mais precisos em malhas quadrilaterais e hexaédricas [2]. As Figs. 3b e 4b mostram uma porção da malha de discretização utilizada. O método de volumes finitos respeita os princípios físicos de conservação e aproveitam ao máximo as malhas arbitrárias para aproximar geometrias complexas [104]. O escoamento das duas fases através do espaço poroso é resolvido numericamente por um formalismo de volume de fluido (VoF) [105–107], que é uma adaptação das equações de Navier-Stokes para fluxo multifásico. O método VoF é utilizado na maioria dos softwares de Fluidodinâmica Computacional e é um dos métodos mais populares [108] de captura ou rastreamento da interface entre os fluidos, sendo amplamente empregado em diversos estudos de fluidodinâmica. Este formalismo resolve um único conjunto de equações de momento, rastreando a fração de volume de cada fluido em todo o domínio [2]. Essa técnica numérica de volume de fluido foi validada em vários estudos através de inúmeras aplicações distintas [109–117].

Em particular, a tensão superficial e o ângulo de contato no modelo do esquema VoF do Fluent foram aplicados com sucesso para descrever quantitativamente a dinâmica de pinçamento de gotículas em um dispositivo de emulsificação de etapa microfluídica [118]. Todas as simulações do escoamento bifásico foram realizadas utilizando-se o software ANSYS FluentTM [2] que implementa em sua solução numérica tanto o método de volumes finitos quanto modelo VoF para escoamentos multifásicos. É interessante destacar que os estudos numéricos permitem explorar o espaço de fase dos parâmetros sem restrições físicas, o que fornece uma visão geral melhor do espaço de fase em comparação com as restrições de experimentos com fluidos reais.

No formalismo de volume de fluido, as equações de Navier-Stokes e de continuidade, que descrevem as conservações do momento linear e da massa do fluido total, respectivamente, são dadas por [2, 119]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)] + \gamma \kappa \nabla s, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde ρ , μ , p e \vec{u} são a densidade, a viscosidade, a pressão e a velocidade do fluido, respectivamente. O termo $\vec{u} \otimes \vec{u}$ é um produto tensorial, e $s(\vec{x})$ é a função da fração do volume ocupado pela fase 1 em um dado volume de controle. Devido à conservação de massa, a função da fração do volume da fase 2 é dada por $1 - s(\vec{x})$. Uma vez que o conjunto de equações descrito na Equação (4.1) descreve o movimento de ambas as fases, ρ e μ não são constantes, mas campos escalares que dependem da função $s(\vec{x})$. Mais especificamente, uma regra de mistura linear dada por [2, 74]

$$\mu(\vec{x}) = \mu_1 s(\vec{x}) + \mu_2 [1 - s(\vec{x})], \quad (4.2)$$

é usado para definir uma viscosidade efetiva local da mistura, onde as constantes μ_1 e μ_2 representam as viscosidades das fases 1 e 2, respectivamente. A mesma regra de mistura pode ser aplicada para a densidade, no caso de fases com densidades diferentes, ρ_1 e ρ_2 ,

$$\rho(\vec{x}) = \rho_1 s(\vec{x}) + \rho_2 [1 - s(\vec{x})], \quad (4.3)$$

O termo $\gamma \kappa \nabla s$ na Equação (4.1) descreve a força de tensão interfacial e é proporcional ao gradiente de $s(\vec{x})$ normal à interface. Este termo surge como um termo fonte na equação do momento em virtude da adição da tensão superficial ao cálculo do VoF, sendo este modelo de tensão superficial conhecido como *modelo de força superficial contínua* [2, 120]. Aqui, a variável $\kappa = \nabla \cdot \vec{n}$ é a curvatura local da interface. As forças de tensão interfacial desaparecem em regiões longes da interface, onde $s(\vec{x})$ é constante, porque ∇s se anula. Como condições de contorno nas paredes sólidas, limitamos nosso estudo utilizando uma molhabilidade neutra (ângulo de contato $\theta = 90^\circ$) e uma condição de não deslizamento. A função de fração $s(\vec{x})$ tem uma interface nítida na fronteira entre as duas fases e é transportada pelo fluxo via

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla s = 0. \quad (4.4)$$

No nosso trabalho, nós mantemos as densidades dos dois fluidos iguais, $\rho_1 = \rho_2 = 1,0 \text{ kg/m}^3$, para evitar perturbações por efeitos inerciais. Além disso, definimos a viscosidade mais alta como $\mu_2 = 1,0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, mas estudamos escoamentos com duas razões viscosidade $M = \mu_2/\mu_1$, a saber $M = 1$ e $M = 10$. Durante as simulações, o passo de tempo de integração, é mantido fixo e pequeno o suficiente para evitar altos números de Courant [121, 122], geralmente $dt \approx 10^{-4} \text{ s}$. Salvo indicação em contrário, nossa mistura de fluidos consiste em 20% da fase 1 (azul, fase de baixa viscosidade) e 80% da fase 2 (vermelha, fase de alta viscosidade). Inicialmente, os dois fluidos são colocados no domínio do fluido com a interface vertical, conforme mostrado na Fig. 4, perpendicular ao gradiente de pressão. Entretanto, diferentes configurações iniciais foram testadas em outras simulações para garantir que o regime estacionário não dependa dessa condição inicial.

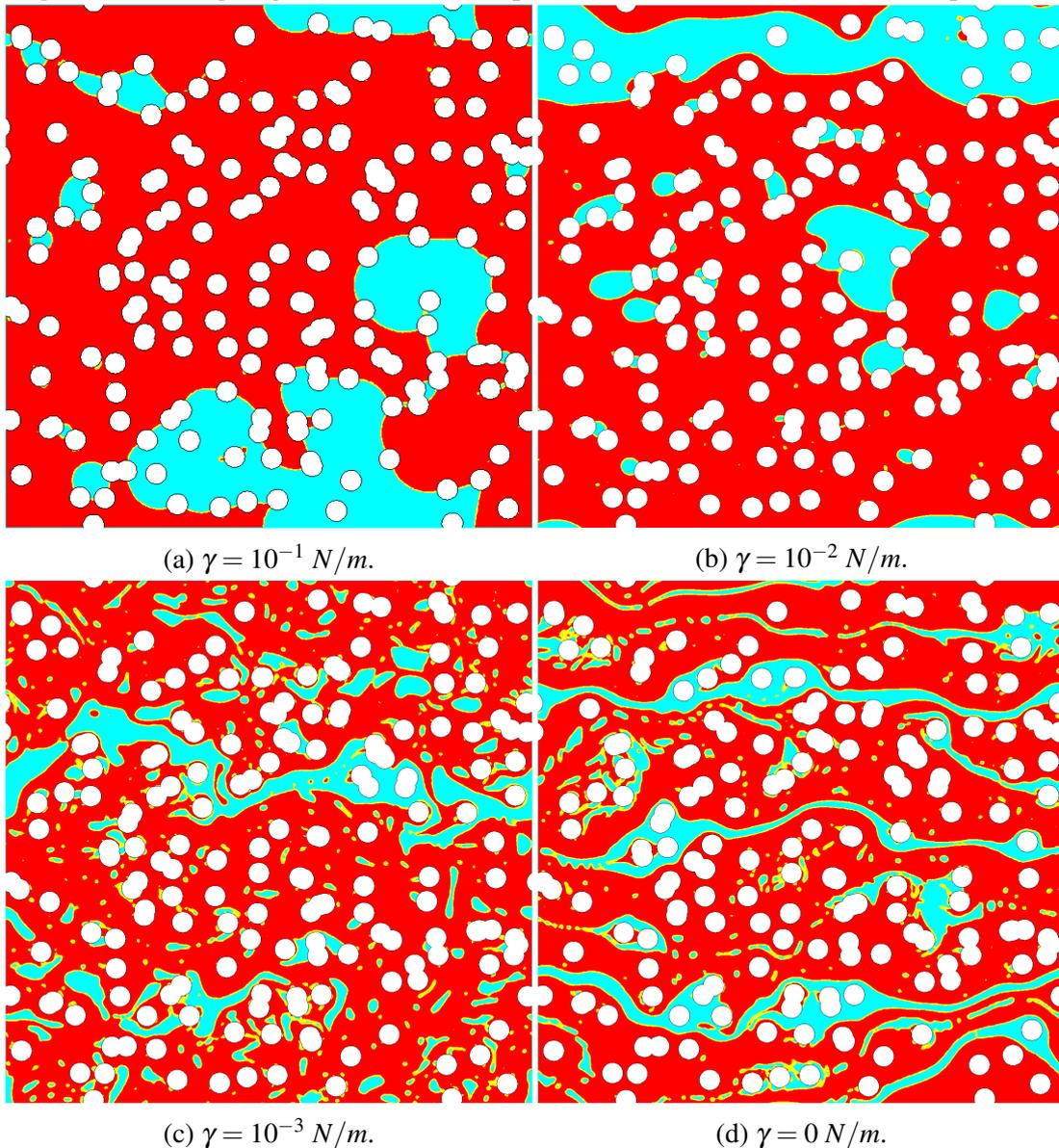
Nós então estudamos o escoamento dos dois fluidos se misturando, quando alteramos as duas principais interações entre as fases, a saber, as forças viscosas, que são controladas aqui pelo gradiente de pressão global, ∇p , e as forças interfaciais, que dependem da tensão interfacial, γ . Também fizemos simulações com tensão interfacial nula e viscosidades iguais para testar se nosso modelo bifásico recupera as propriedades de um fluxo monofásico. Os dados das simulações são analisados apenas após o estado estacionário ser atingido, a fim de produzir séries temporais estatisticamente significativas. Isso faz com que os custos computacionais sejam elevados, uma vez que a parte transitória inicial do cálculo deve ser descartada. Dizemos que um sistema está em equilíbrio estatístico quando as médias das propriedades do fluxo e as funções de distribuição são invariantes no tempo. Embora o escoamento seja um processo dissipativo, um sistema pode atingir um estado de equilíbrio estatístico, se uma entrada de energia externa contrabalançar a perda de energia interna a fim de manter o equilíbrio [123]. No nosso sistema, a entrada de energia externa é fornecida pelo gradiente de pressão global que é mantido constante durante as simulações.

4.2 Resultados e Discussões

A ação de cisalhamento e a tensão superficial exercem forças nos fluidos enquanto eles fluem através do meio poroso. Essas forças eventualmente levam à quebra de componentes conectados de uma fase, resultando na formação de gotas. Essas gotas podem fluir separadamente através dos canais porosos ou podem ficar presas por algum tempo pela matriz porosa. Além disso, gotas em colisão também podem se fundir formando aglomerados maiores. Essa dinâmica complexa de fusão e quebra de gotas domina o comportamento microscópico do escoamento no estado estacionário. Como resultado, os campos de velocidade das duas fases exibem flutuações transitórias características.

As imagens apresentadas na Fig. 5 mostram o fluxo bifásico através do meio poroso, em um instante de tempo específico, depois que o estado estacionário é atingido, para diferentes valores de tensão superficial, mantendo-se o gradiente de pressão fixo. A figura mostra a distribuição e interação das duas fases dentro do meio poroso, onde é possível observar dife-

Figura 5 – Configuração do escoamento para diferentes valores de tensão superficial.

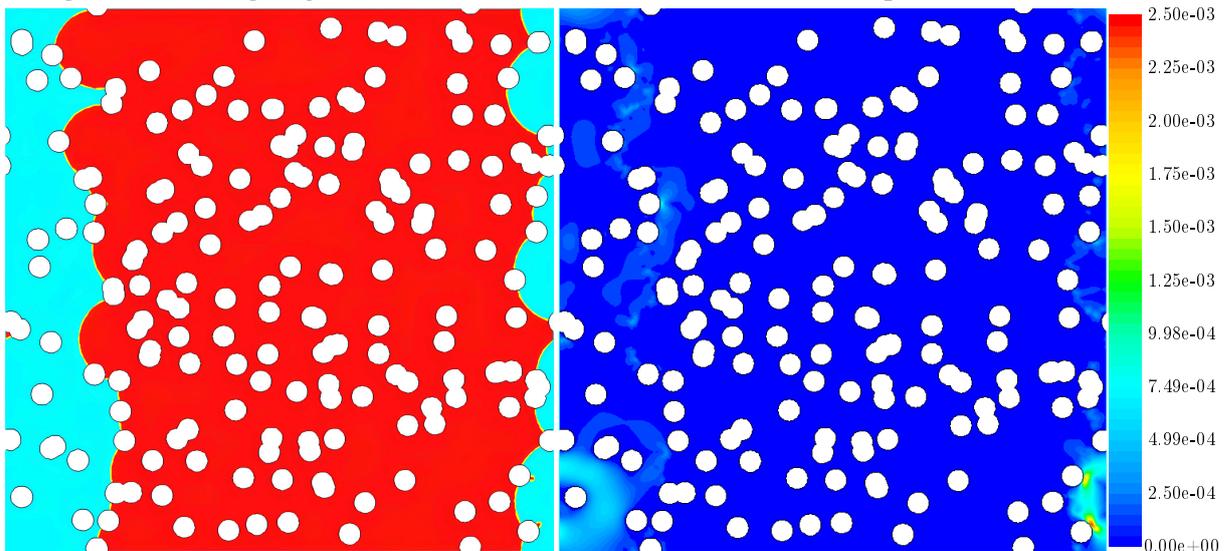


Escoamento bifásico através do meio poroso, em um instante de tempo específico, após o estado estacionário ser atingido, para diferentes valores de tensão superficial e para um gradiente de pressão de $\nabla p = 2000 Pa/m$. Observe os diferentes padrões de fluxo, como a formação de gotas e aglomerados de diferentes tamanhos. Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

rentes padrões de fluxo, como a formação de gotas e aglomerados de diferentes tamanhos. As Figs. 8–10 do Apêndice B, apresentam as configurações do escoamento, em um dado instante de tempo, para todos os casos estudados. Além disso, nessas figuras também são mostrados os respectivos campos de velocidade, para todo o domínio do meio poroso, para cada um dos casos estudados.

Em cinco dos casos estudados, observamos que pouco tempo depois do início das simulações, dada a configuração inicial do nosso sistema, a fase de maior viscosidade ficou completamente presa no meio poroso, fazendo com que todo o fluido ficasse estagnado. Isso pode ser explicado pelo fato de que, para esses casos, a força gerada pelo gradiente de pressão

Figura 6 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade para o caso $(10^{-2}, 100)$.



Configuração do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para $\gamma = 10^{-2} N/m$ e $\nabla p = 100 Pa/m$ e seu respectivo campo de velocidade (direita). Este é um dos casos em que o fluido ficou completamente preso no meio poroso. Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

não foi suficiente para vencer as forças de coesão entre as moléculas do fluido, resultando na sua retenção dentro do meio poroso, em vez de promover o escoamento. Esses cinco casos, designados pela tupla $(\gamma, \nabla p)$, foram $(10^{-2}, 100)$, $(10^{-1}, 100)$, $(10^{-1}, 250)$, $(10^{-1}, 500)$ e $(10^{-1}, 1000)$. A configuração do escoamento para esses casos é apresentada nas Figs. 9a, 10a, 10b, 10c e 10d (Apêndice B), respectivamente. A Fig. 6 mostra um desses casos, onde é possível observar a estagnação do fluido a partir da imagem do campo de velocidade, em que a magnitude da velocidade é nula em praticamente todo o domínio, exceto para as regiões próximas à interface entre as fases, o que pode representar um ruído numérico.

4.2.1 Análise da interface

A partir das imagens das configurações do escoamento apresentadas na Fig. 5 é possível observar que há uma maior dispersão da fase 1 na fase 2 para baixos valores de tensão superficial (Figs. 5c e 5d), gerando muitas bolhas pequenas e eventuais aglomerados finos e alongados (comumente chamados de “dedos” ou *fingers*, em inglês), enquanto que, para altos valores de tensão superficial (Figs. 5a e 5b), a fase 1, por estar mais coesa, se dispersa menos na fase 2, gerando poucas bolhas porém visivelmente maiores. A mesma análise pode ser feita variando os valores de gradiente de pressão, e mantendo fixo o valor da tensão superficial, como pode ser visto nas Figs. 8–10 do Apêndice B. Ou seja, para baixos valores de tensão superficial ou para altos valores de gradiente de pressão, a fase 1 se dispersa mais na fase 2, aumentando o tamanho da interface entre as fases.

A fim de quantificar essa análise, calculamos o tamanho da interface para os casos estudados, a partir de todas as imagens geradas nas nossas simulações. A cada passo de tempo,

Gráfico 2 – Fração do tamanho da interface entre os fluidos em função do tempo.

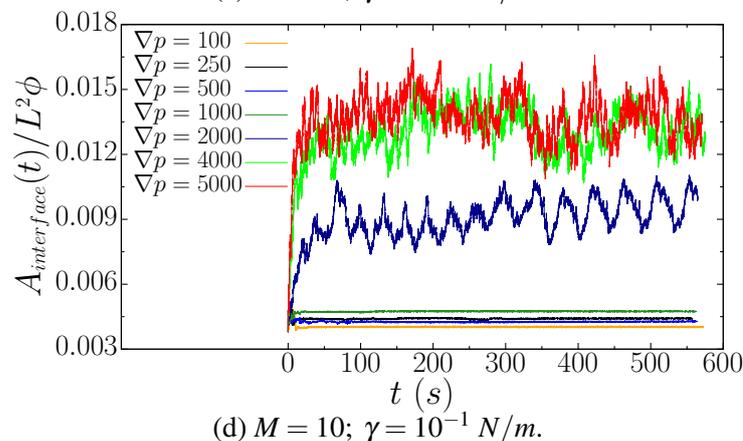
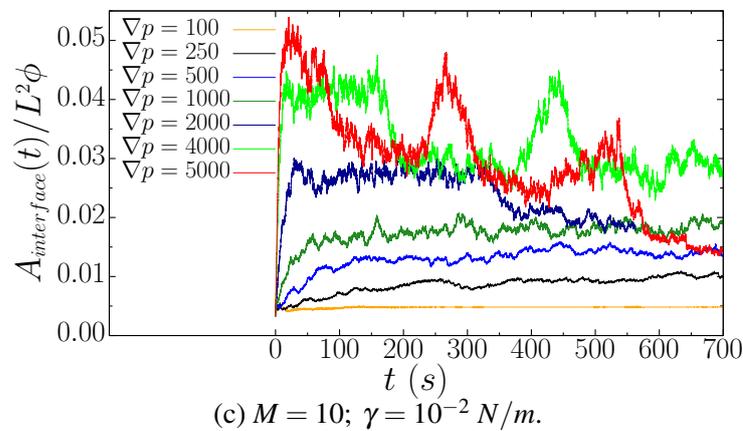
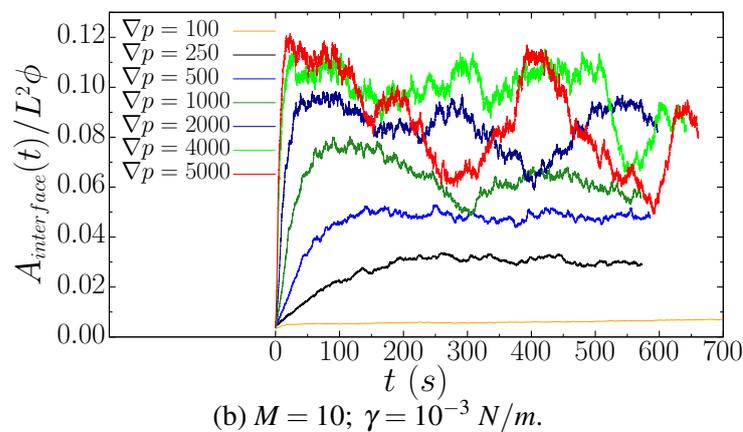
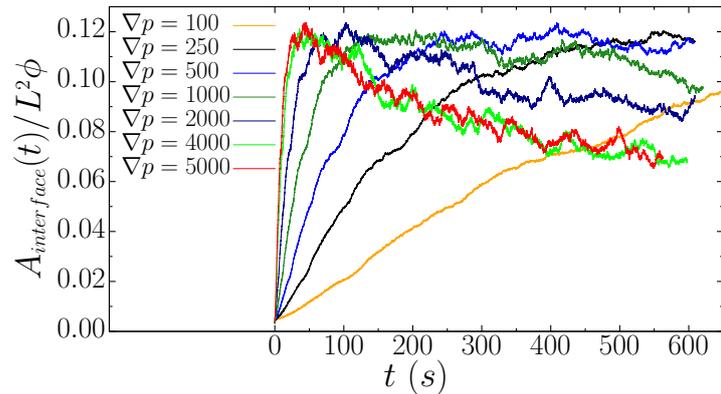


Gráfico da fração do tamanho da interface entre os fluidos ($A_{interface}$), em relação à quantidade de fluido ($L^2\phi$), em função do tempo para vários valores de gradiente de pressão. Fonte: Elaborado pelo autor.

uma imagem do escoamento é gerada, e, a partir dela, calculamos a área total da interface, $A_{interface}$, como sendo a somatória de todos os *pixels* que pertencem à interface entre os fluidos. Nas imagens do Gráfico 2, nós mostramos a fração da área da interface entre as fases fluidas, dada por $A_{interface}/L^2\phi$, em função do tempo, onde o termo $L^2\phi$ é a quantidade total de fluido, L é o comprimento linear do sistema (em pixels) e ϕ é a porosidade do meio poroso. No Gráfico 2 são apresentados os resultados para vários valores de gradiente de pressão e tensão superficial, onde é possível observar que, após um tempo transitório inicial, a área total da interface entre os fluidos se torna maior para os casos com baixos valores de tensão superficial e também para os casos com altos valores de gradiente de pressão.

Todos os casos analisados nesta seção utilizam a mesma configuração inicial (Fig. 4), cuja área total da interface é mínima. Com o passar do tempo, a interface aumenta até se estabilizar. As flutuações observadas no Gráfico 2 ocorrem devido à dinâmica do escoamento, onde as gotas e aglomerados se fundem e se quebram constantemente, alterando a área total da interface. Também é possível observar que, em alguns dos casos onde o gradiente de pressão é alto, a área da interface, após atingir um valor máximo, diminui com o passar do tempo até finalmente estabilizar-se. Nesses casos, ocorre uma sequência contínua de fusões de bolhas formando grandes e permanentes aglomerados, o que faz com que a área total da interface diminua. Esses casos serão analisados com mais detalhes na subseção a seguir. Para os casos em que o fluido fica completamente preso no meio poroso, a área da interface é evidentemente constante nesse estágio. Embora o cálculo da área da interface por meio da análise das imagens do escoamento tenha uma precisão limitada, devido à resolução das imagens, ainda assim é possível obter resultados interessantes, que mostram, por exemplo, o quão misturado dois fluidos podem estar em um escoamento, dependendo da tensão superficial e do gradiente de pressão.

4.2.2 Distribuição dos tamanhos das bolhas

Neste trabalho, a fim de estudar como a mistura das fases pode influenciar o comportamento mesoscópico do escoamento bifásico, nós analisamos a distribuição dos tamanhos das bolhas da fase 1, a fase com a menor fração de volume ocupado. A partir de cada uma das imagens que mostram a configuração do escoamento, geradas pelas nossas simulações a cada passo de tempo, nós calculamos o tamanho de cada bolha, em *pixels*, e, em seguida, calculamos a distribuição dos tamanhos, representada pela função de probabilidade normalizada $\mathcal{P}(m)$, onde m é o tamanho da bolha normalizado pelo volume total do fluido $L^2\phi$. Ressaltamos que esta análise foi realizada durante o intervalo de tempo em que o sistema se encontra no regime estacionário, quando as propriedades do escoamento não variam significativamente ao longo do tempo. Além disso, vale destacar que esse tipo de análise não foi realizado para os casos em que o fluido fica completamente preso no meio poroso, já que nesses casos há apenas um único aglomerado.

Os Gráficos 3a e 3b mostram a distribuição dos tamanhos das bolhas em função do número capilar, que descreve a razão entre as forças viscosas e a tensão superficial, definido

como

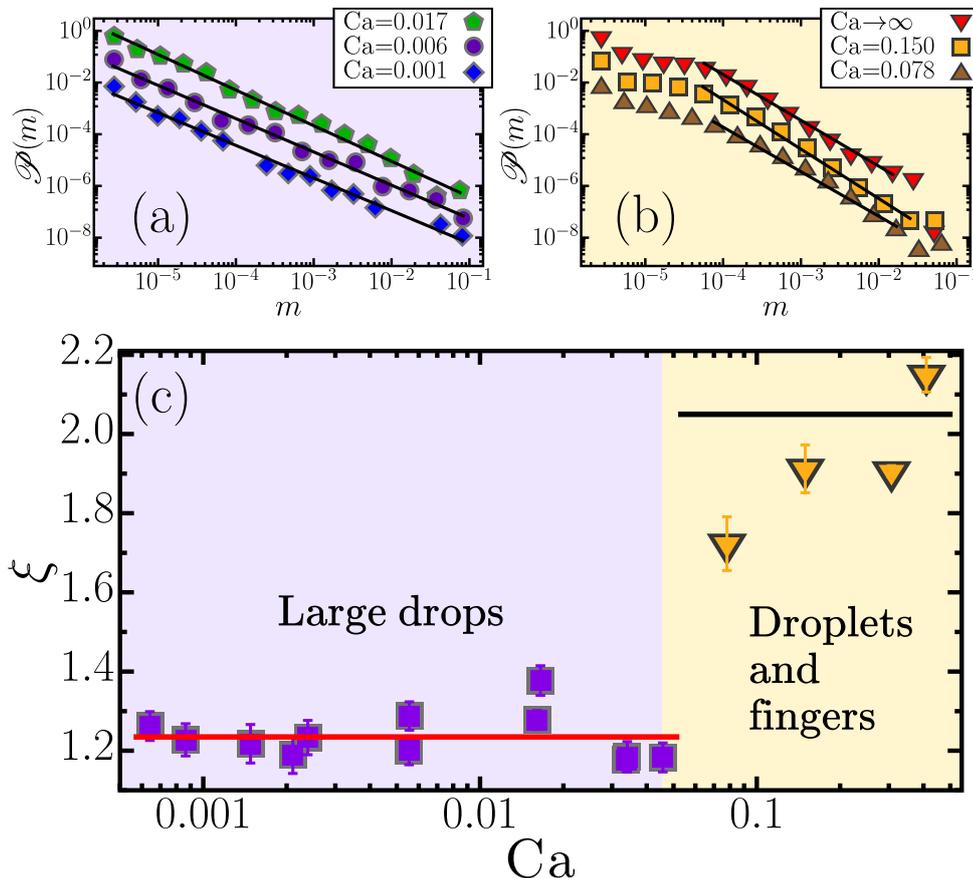
$$Ca = \frac{\mu_2 \bar{v}^{(m)}}{\gamma}, \quad (4.5)$$

onde $\bar{v}^{(m)}$ é uma velocidade característica do escoamento calculada como a média da série temporal da velocidade de todo o fluido (veja a subseção 4.2.3). As distribuições obtidas seguem uma lei de potência,

$$\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}, \quad (4.6)$$

onde o expoente ξ depende do número capilar. No Gráfico 3c, nós mostramos como o expoente ξ depende de Ca . Para $Ca \lesssim 0,046$, o expoente ξ é aproximadamente constante com um valor de $\xi \approx 1,23 \pm 0,03$. Nesta faixa capilar, as bolhas são em sua maioria grandes e os eventos de fusão e divisão, bem como os canais alongados, são raramente observados. Para $Ca > 0,046$,

Gráfico 3 – Distribuição dos tamanhos das gotas e aglomerados e o valor dos expoentes obtidos.



Os gráficos mostrados nos itens (a) e (b) mostram as distribuições dos tamanhos das bolhas, normalizadas pela quantidade total de fluido, no regime estacionário para diferentes valores de Ca . As linhas sólidas correspondem ao melhor ajuste de uma lei de potência aos dados, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$, cujo expoente ξ depende do número capilar. Para melhor visibilidade, as diferentes leis de potência são deslocadas em uma ordem de grandeza uma em relação à outra, verticalmente. O item (a) mostra casos para pequenos valores de Ca , enquanto (b) para altos valores de Ca . No item (c), ξ é exibido em termos de Ca . O expoente permanece aproximadamente constante para $Ca \lesssim 0,046$, com média dada por $1,23 \pm 0,03$, conforme indicado pela linha vermelha. Acima desse valor, ξ aumenta rapidamente. No caso limite de $Ca \rightarrow \infty$, o expoente é dado por $\xi \approx 2,05 \pm 0,03$, conforme indicado pela linha preta. Fonte: Elaborado pelo autor.

no entanto, as bolhas são quebradas em muitas gotículas e alguns “dedos” (aglomerados finos e alongados) ao longo de canais de maior velocidade. Nesse regime, ξ aumenta de $1,73 \pm 0,06$ para $1,92 \pm 0,06$ quando Ca aumenta de 0,078 para 0,150, e então converge para $2,05 \pm 0,03$ quando Ca se aproxima do infinito. O número capilar característico, $Ca^* \approx 0,046$, separa os dois regimes, marcados por fundo lilás e amarelo no Gráfico 3. Vale destacar que o comportamento dos tamanhos das bolhas no regime de alto número capilar pode estar associada ao surgimento de correlações de longo alcance, semelhantes às encontradas em difusões anômalas [124]. Na Tabela 1, nós mostramos os valores calculados de Ca , utilizados no Gráfico 3c, e os valores associados de γ e ∇p utilizados nas simulações, para $M = 10$.

Tabela 1 – Relação entre o número capilar obtido e os valores de tensão superficial e gradiente de pressão utilizados nas simulações.

Ca	$\gamma (N/m)$	$\nabla p (Pa/m)$
0,0006	10^{-1}	2000
0,0009	10^{-2}	250
0,0015	10^{-1}	4000
0,0021	10^{-2}	500
0,0024	10^{-1}	5000
0,0056	10^{-3}	100
0,0060	10^{-2}	1000
0,0161	10^{-3}	250
0,0165	10^{-2}	2000
0,0337	10^{-2}	4000
0,0340	10^{-3}	500
0,0458	10^{-2}	5000
0,0780	10^{-3}	1000
0,1500	10^{-3}	2000
0,3069	10^{-3}	4000
0,4098	10^{-3}	5000

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em alguns dos casos estudados, nós observamos a formação de um ou mais aglomerados alongados e grandes o suficiente, de modo que se estenderam, como canais, da esquerda para a direita ao longo de um caminho contínuo conectando uma extremidade à outra do sistema. Esses canais são mostrados nas Figs. 5b e 5d. Fazendo uma analogia à teoria de percolação [125], podemos dizer que, nesses casos, o sistema percolou e podemos chamar esses canais que atravessam todo o sistema de agregados percolantes. Por outro lado, esses canais que cruzam o sistema são dinâmicos, pois podem ser desconectados durante intervalos de tempo. A fim de estudar esses agregados percolantes (ou a soma dos tamanhos dos agregados percolantes), nós calculamos o tamanho deles, o que representamos por m_p .

Nos Gráficos 4 e 5, nós apresentamos o valor de m_p , normalizado em relação ao tamanho total do sistema, em função do tempo para os casos em que ocorreu a percolação. O Gráfico 4 retrata os casos com tensão superficial nula e $M = 1$, enquanto o Gráfico 5 exibe os casos com tensão superficial não nula e $M = 10$. O valor de m_p igual a zero, em determinados

Gráfico 4 – Fração do tamanho do agregado percolante em função do tempo; casos $M = 1$ e $\gamma = 0 N/m$.

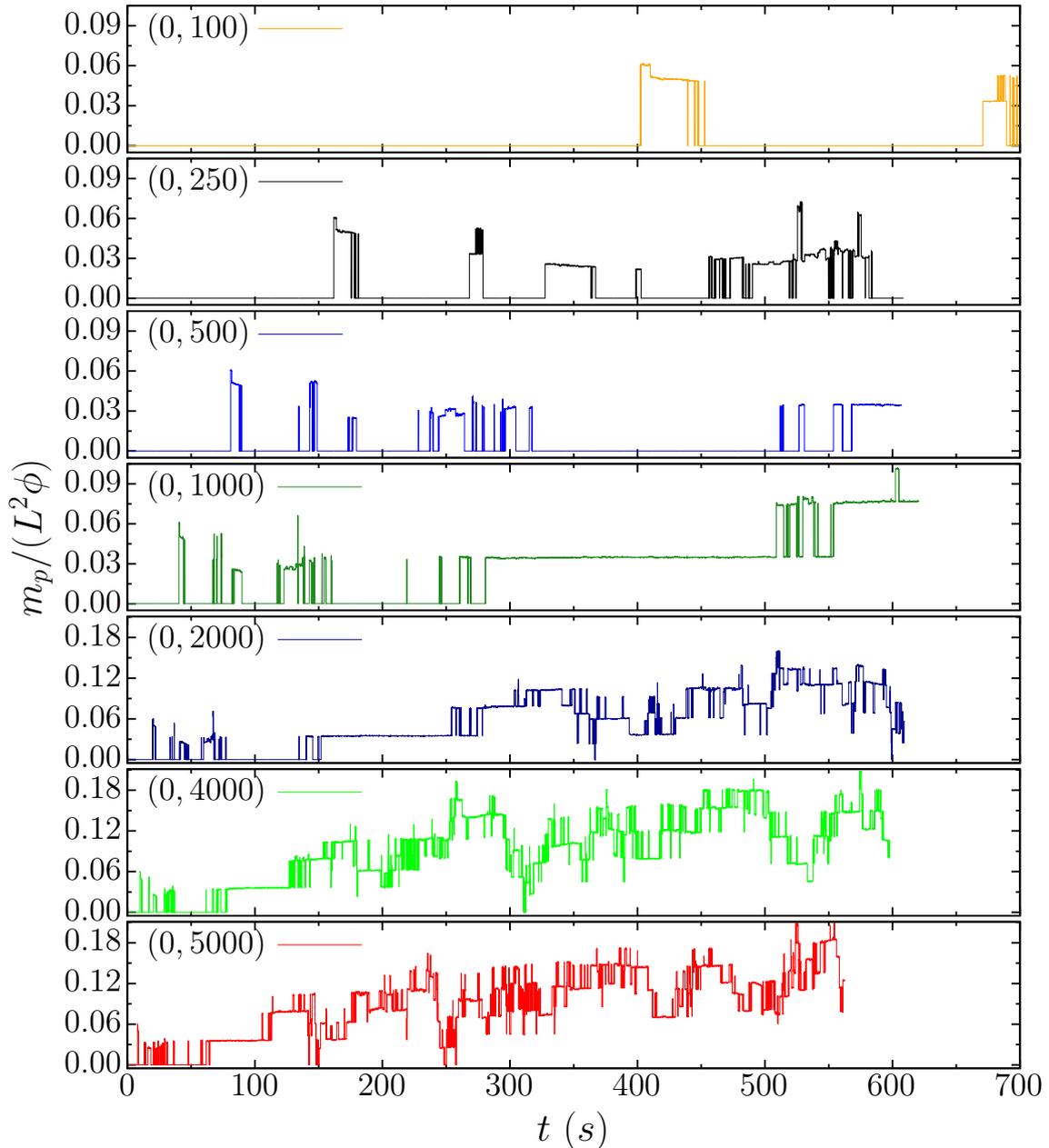


Gráfico da fração do tamanho do agregado percolante, m_p , em relação ao tamanho do sistema, $L^2\phi$, em função do tempo, para vários valores de gradiente de pressão, e para $M = 1$ e tensão interfacial nula ($Ca \rightarrow \infty$). Fonte: Elaborado pelo autor.

intervalos de tempo, indica a inexistência de um agregado percolante, o que significa que, nesses instantes de tempo, não há um canal, isto é, um caminho contínuo, formado pela fase 1 que atravessa todo o sistema. Em outros instantes de tempo, em que o valor de m_p é diferente de zero, é possível observar variações abruptas, como saltos, no tamanho do agregado percolante. Esses saltos ocorrem devido a dois eventos principais: a formação de novos canais, quando m_p aumenta, e o rompimento de canais pré-existentes, quando m_p diminui. Além disso, também são observadas variações mais suaves no valor de m_p . Essas variações podem ser causadas pela

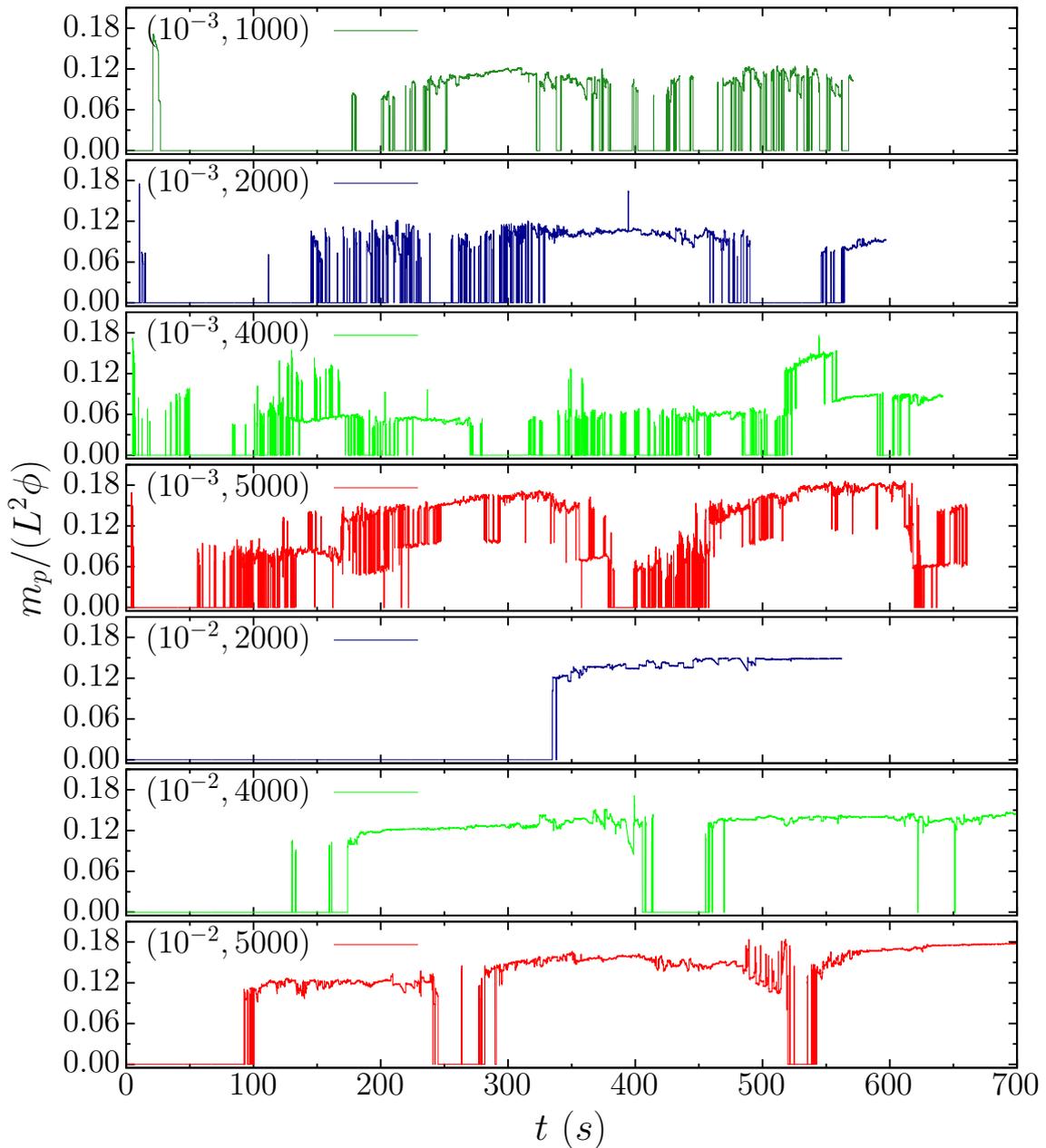
Gráfico 5 – Fração do tamanho do agregado percolante em função do tempo; casos $M = 10$.

Gráfico da fração do tamanho do agregado percolante, m_p , em relação ao tamanho do sistema, $L^2\phi$, em função do tempo, para vários valores de gradiente de pressão e tensão interfacial, e para $M = 10$. Fonte: Elaborado pelo autor.

fusão de bolhas aos canais existentes, quando m_p aumenta, ou pela quebra de parte da estrutura dos canais, formando novas bolhas, quando m_p diminui. Também é possível observar a relação entre a formação de agregados percolantes e a diminuição da área da interface entre as fases, a partir da comparação entre os gráficos do tamanho do agregado percolante em função do tempo (Gráficos 4 e 5) e do gráfico do tamanho da interface em função do tempo (Gráfico 2). Isso ocorre porque é necessário a fusão de muitas bolhas para a formação de um agregado percolante, o que, por sua vez, implica na diminuição da área da interface.

Esses gráficos, portanto, são úteis para observar a formação e a evolução dos agre-

gados percolantes ao longo do tempo. Quando esses canais estão presentes, eles possibilitam um escoamento contínuo da fase percolante através do meio poroso, o que pode ser bastante relevante no estudo de escoamentos em meios porosos. Esse estudo foi direcionado para a fase com a menor fração de volume ocupado, já que a fase com a maior fração volumétrica é sempre percolante. Dessa forma, quando a fase com a menor fração volumétrica percola, significa que ambas as fases escoam continuamente através do meio poroso. Como mencionado anteriormente, a formação desses canais percolantes está relacionada ao aumento do número capilar, que é proporcional ao gradiente de pressão, via lei de Darcy, e inversamente proporcional à tensão interfacial.

4.2.3 Análise das séries temporais da velocidade

No método VoF, a velocidade média volumétrica de uma fase, no instante t , pode ser escrita em termos da velocidade do fluido, \vec{u} , e da função da fração do volume ocupado $s(\vec{x}, t)$. Para a componente x da velocidade da fase 1, temos

$$v^{(1)}(t) = \frac{1}{\Omega_1} \int_{\Omega} u_x(\vec{x}, t) s(\vec{x}, t) d\Omega, \quad (4.7)$$

onde

$$\Omega_1 = \int_{\Omega} s(\vec{x}) d\Omega \quad (4.8)$$

é o domínio ocupado pela fase 1, Ω é o espaço poroso total ocupado pela mistura de fluidos e $u_x(\vec{x}, t)$ é a componente x da velocidade \vec{u} , aquela resolvida através das Equações (4.1) e (4.4). De modo equivalente, a velocidade média da fase 2 é dada por

$$v^{(2)}(t) = \frac{1}{\Omega_2} \int_{\Omega} u_x(\vec{x}, t) [1 - s(\vec{x}, t)] d\Omega, \quad (4.9)$$

onde

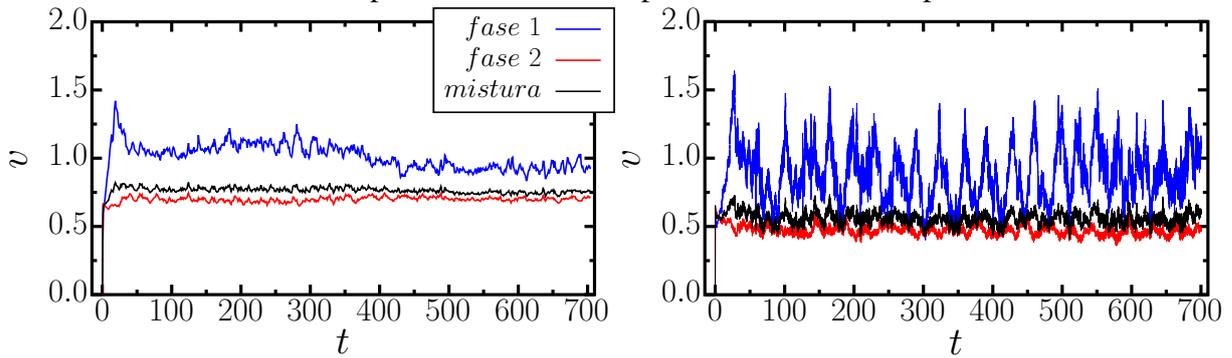
$$\Omega_2 = \int_{\Omega} [1 - s(\vec{x})] d\Omega, \quad (4.10)$$

é o domínio ocupado pela fase 2. Uma vez que as duas fases são incompressíveis e a massa é conservada, então Ω_1 e Ω_2 são constantes. Finalmente, a componente x da velocidade média da mistura é dada por

$$v^{(m)}(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_x(\vec{x}, t) d\Omega. \quad (4.11)$$

As séries temporais da velocidade, para dois casos específicos, calculadas através das Equações (4.7), (4.9) e (4.11) são apresentadas no Gráfico 6, onde a fase 1, a fase 2 e a mistura são marcadas por linhas azuis, vermelhas e pretas, respectivamente. As séries temporais da velocidade para os demais casos são apresentadas nos Gráficos 15 a 18, no Apêndice A. Observe que, embora o gradiente de pressão seja constante, a vazão pode variar devido às flutuações na resistência hidráulica. Embora essas flutuações sejam de natureza mecânica agindo no nível mesoscópico, elas apresentam analogias com as flutuações térmicas no nível molecular [126]. Essas flutuações são inerentes à série temporal da velocidade e refletem a complexa dinâmica

Gráfico 6 – Séries temporais da velocidade para ambas as fases e para todo o fluido.

(a) Caso com $\gamma = 0 \text{ N/m}$, ou $Ca \rightarrow \infty$.(b) Caso com $\gamma = 10^{-2} \text{ N/m}$, ou $Ca = 0,006$.

Gráficos das séries temporais da velocidade, calculadas através das Equações (4.7), (4.9) e (4.11), para ambas as fases e para a mistura. A fase 1, a fase 2 e a mistura das fases estão representadas por linhas azuis, vermelhas e pretas, respectivamente. Ambos os gráficos apresentam casos com $M = 10$, $\nabla p = 1000 \text{ Pa/m}$ e $S_1 = 0,2$. Fonte: Elaborado pelo autor.

das bolhas e suas interações com a geometria dos poros. Por exemplo, quando as bolhas ficam presas em uma região do meio poroso, a velocidade média diminui. Quando as bolhas são eventualmente liberadas, o fluxo acelera, resultando em um ou vários picos mostrados na série temporal. Para efeito de comparação, as séries temporais da velocidade da mistura, $v^{(m)}$, para diferentes valores de gradiente de pressão são apresentadas no Gráfico 7.

Neste trabalho, nós também analisamos o estado estacionário a partir de uma perspectiva de fluxo de Darcy de uma única fase, ou seja, nós observamos como a velocidade média do fluido varia com o gradiente de pressão. Enquanto as velocidades definidas acima são calculadas sobre toda a região espacial para cada instante de tempo e, portanto, apresentam séries

Gráfico 7 – Velocidade de todo o fluido (mistura) em função do tempo, para vários valores de gradiente de pressão.

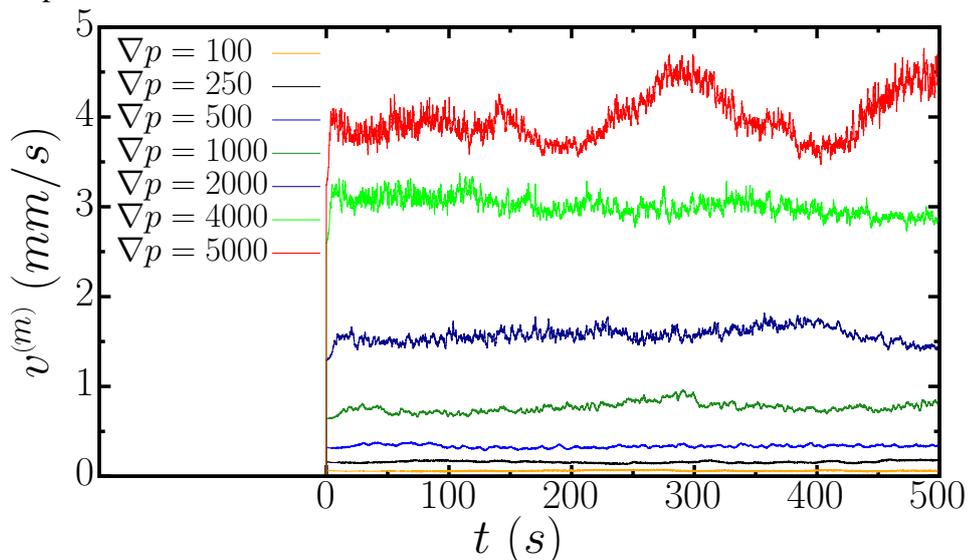


Gráfico do valor médio, calculado sobre todo o volume, da componente x da velocidade da mistura dos fluido em função do tempo, para $M = 10$, $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$, $S_1 = 0,2$ e vários valores de gradiente de pressão. Fonte: Elaborado pelo autor.

temporais, a velocidade média dessas séries temporais é calculada da seguinte forma

$$\bar{v}^{(j)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^{(j)}(t) dt, \quad (4.12)$$

onde $j = 1, 2, m$ representa as duas fases (1,2) ou a mistura (m). A variável T corresponde à janela de tempo que abrange o regime estacionário.

O Gráfico 8 mostra a média da componente x da velocidade da mistura, $\bar{v}^{(m)}$, em função do gradiente de pressão aplicado, ∇p . Como mostrado, a média temporal da velocidade segue uma lei de potência com o gradiente de pressão,

$$\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla p)^\beta, \quad (4.13)$$

para diferentes valores de tensão superficial. Essa equação pode ser interpretada como uma forma não-linear da lei de Darcy para escoamentos bifásicos. Uma generalização semelhante entre o fluxo e o gradiente de pressão foi aplicada com sucesso a fluxos não-newtonianos em tubos e em redes de poros [127, 128]. O expoente β varia em função da tensão superficial. Conforme esperado, o caso $\gamma = 0$ e $M = 1$ recupera a relação linear tradicional prevista por Darcy para uma única fase, com $\beta = 1,00 \pm 0,00$.

Também analisamos como a fração do volume ocupado pela fase menos viscosa

Gráfico 8 – Média temporal da velocidade da mistura em função do gradiente de pressão.

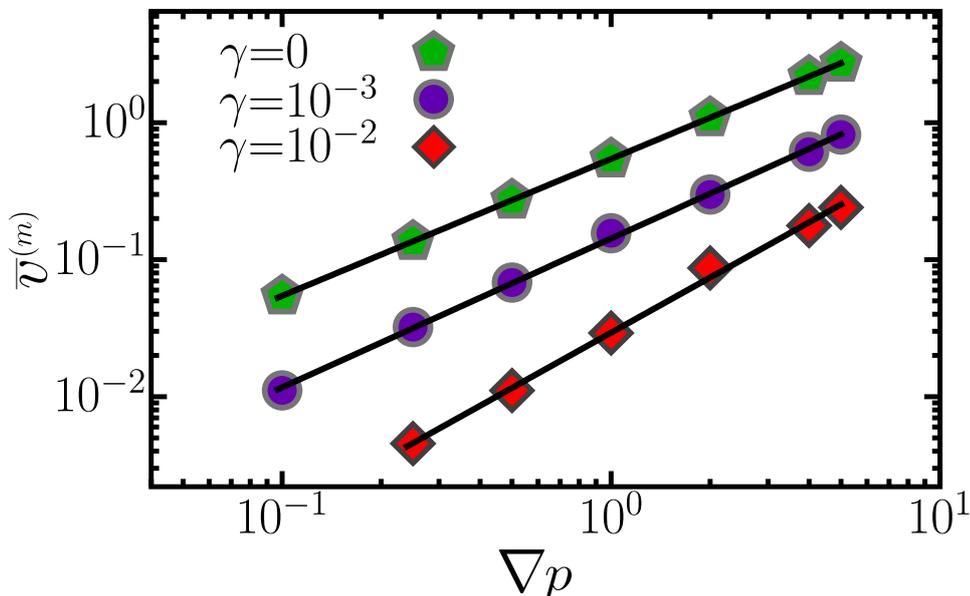


Gráfico em escala logarítmica da média temporal da velocidade da mistura, no regime estacionário, em função do gradiente de pressão. Para melhor visibilidade, as curvas para diferentes valores de γ foram deslocadas verticalmente em uma ordem de grandeza uma em relação à outra. A velocidade pode ser descrita como uma lei de Darcy generalizada, $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla p)^\beta$, onde o expoente aumenta com a tensão superficial. Os marcadores verdes apresentam a lei de Darcy tradicional com $\beta = 1,00 \pm 0,00$, obtido para $\gamma = 0$ N/m e $M = 1$, enquanto $\beta = 1,09 \pm 0,02$, para $\gamma = 10^{-3}$ N/m, e $\beta = 1,34 \pm 0,03$, para $\gamma = 10^{-2}$ N/m. Os casos em que as gotas ficam permanentemente presas na matriz dos poros não são mostrados no gráfico. Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 9 – Média temporal da velocidade da mistura em função da fração volumétrica da fase menos viscosa.

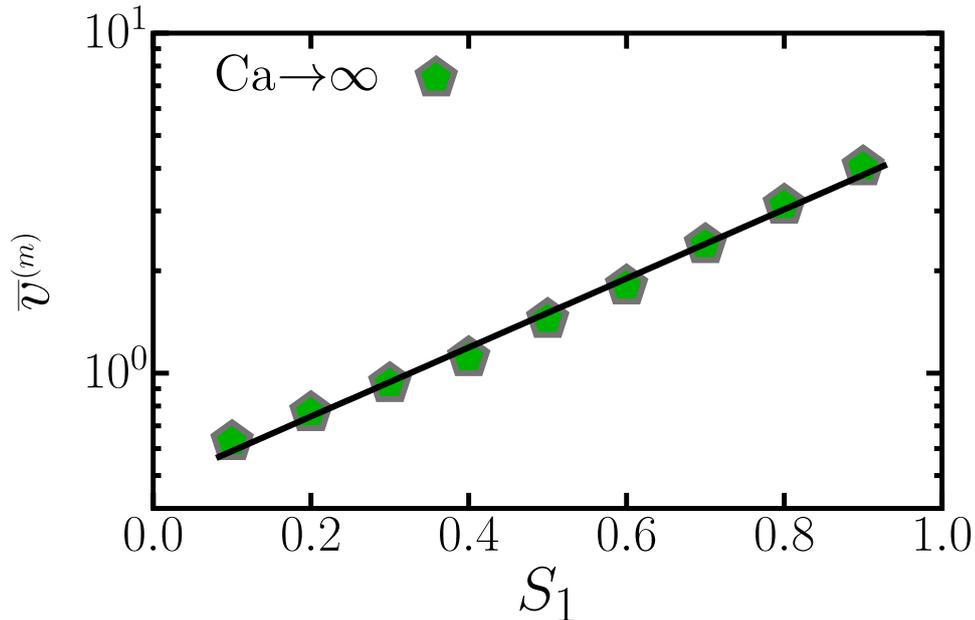


Gráfico da média temporal da velocidade da mistura, no regime estacionário, em função da fração de volume ocupado pela fase menos viscosa. Foi observado que a velocidade média aumenta exponencialmente com a fração volumétrica da fase 1 de acordo com a relação $\bar{v}^{(m)} \propto e^{(\delta S_1)}$, onde o expoente obtido foi $\delta = 2,34 \pm 0,07$. Fonte: Elaborado pelo autor.

(fase 1) influencia a velocidade média do fluido para $\nabla p = 1000 \text{ Pa/m}$, $\gamma = 0 \text{ N/m}$ e $M = 10$. O Gráfico 9 mostra que $\bar{v}^{(m)}$ aumenta exponencialmente com a fração volumétrica da fase 1,

$$\bar{v}^{(m)} \propto e^{(\delta S_1)}, \quad (4.14)$$

com um expoente $\delta = 2,34 \pm 0,07$, onde o termo $e^{(\delta S_1)}$ é um coeficiente de mobilidade para a mistura [129]. A Fig. 11, no Apêndice C, mostra a configuração do fluxo bifásico através do meio poroso, em um instante de tempo específico, depois que o estado estacionário é atingido, para diferentes valores de S_1 . Em um fluxo de fase única, o termo de mobilidade é a razão entre a permeabilidade e a viscosidade. Em um sistema de fluxo de duas fases, o termo de mobilidade está relacionado às curvas de permeabilidade relativa [130]. A permeabilidade efetiva na forma de um aumento exponencial com a saturação se ajusta particularmente bem às medições de percolação de gás em reservatórios acionados por gás dissolvido [131], onde a permeabilidade do óleo é saturada com pequenas bolhas dispersas, o chamado “óleo espumante” [132, 133], a fim de aumentar as taxas de recuperação. Apesar da complexidade envolvida na dinâmica do fluxo bifásico, nossos resultados sugerem que a velocidade média da mistura pode ser descrita por uma função simples da saturação e do gradiente de pressão.

Nas subseções a seguir, vamos analisar as flutuações das séries temporais da velocidade de todo o fluido, $v^{(m)}(t)$, utilizando quatro métodos. O primeiro método utilizado é uma análise da *distribuição dos saltos* de velocidade. O segundo é uma análise da *distribuição dos tamanhos das avalanches* presentes na série temporal das velocidades. O terceiro é o *método*

de análise de flutuações sem tendências. E o quarto, uma análise das *correlações temporais*.

4.2.3.1 Análise da distribuição de saltos de velocidade

Os *saltos* de velocidade, Δv , são definidos como a variação ou diferença de velocidade entre dois instantes de tempo consecutivos, isto é,

$$\Delta v(t) = v(t) - v(t - \delta t), \quad (4.15)$$

onde δt é o tamanho do passo de tempo. O processo para se obter uma série composta pelas diferenças entre os valores consecutivos ao longo do tempo é conhecido como *diferenciação*. E a série temporal resultante desse processo é chamada de série *diferenciada*. Além disso, é possível obter a série original a partir da série diferenciada através do processo de *integração*. O processo de diferenciação é aplicado para eliminar (ou reduzir) tendências e padrões sazonais que possam estar presentes na série temporal. A diferenciação é comumente utilizada para tornar estacionária uma série temporal não estacionária, a fim de facilitar a análise estatística.

No processo de diferenciação, é comum definir o *operador de diferenciação*, ∇_D , como [134]

$$\nabla_D^d = (1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k, \quad (4.16)$$

onde B é o operador de deslocamento para trás (*backward shift operator*), também chamado de operador de defasagem ou atraso, e é tal que $Bv_i = v_{i-1}$ e, de forma mais geral, $B^d v_i = v_{i-d}$, onde v_i é o valor da série temporal no instante discretizado i . Em outras palavras, B é um operador que recupera o valor da série temporal em uma posição para trás. O expoente d , na Equação (4.16), é a ordem da diferenciação e corresponde ao número de vezes que o operador de defasagem é aplicado. Utilizando o operador de diferenciação, com $d = 1$, podemos reescrever a Equação (4.15) como

$$\Delta v(t) = \nabla_D v(t) = (1 - B)v(t), \quad (4.17)$$

de forma que $\Delta v(t)$ é série temporal diferenciada de $v(t)$.

Utilizando a Equação (4.17), calculamos as variações de velocidade entre interva-

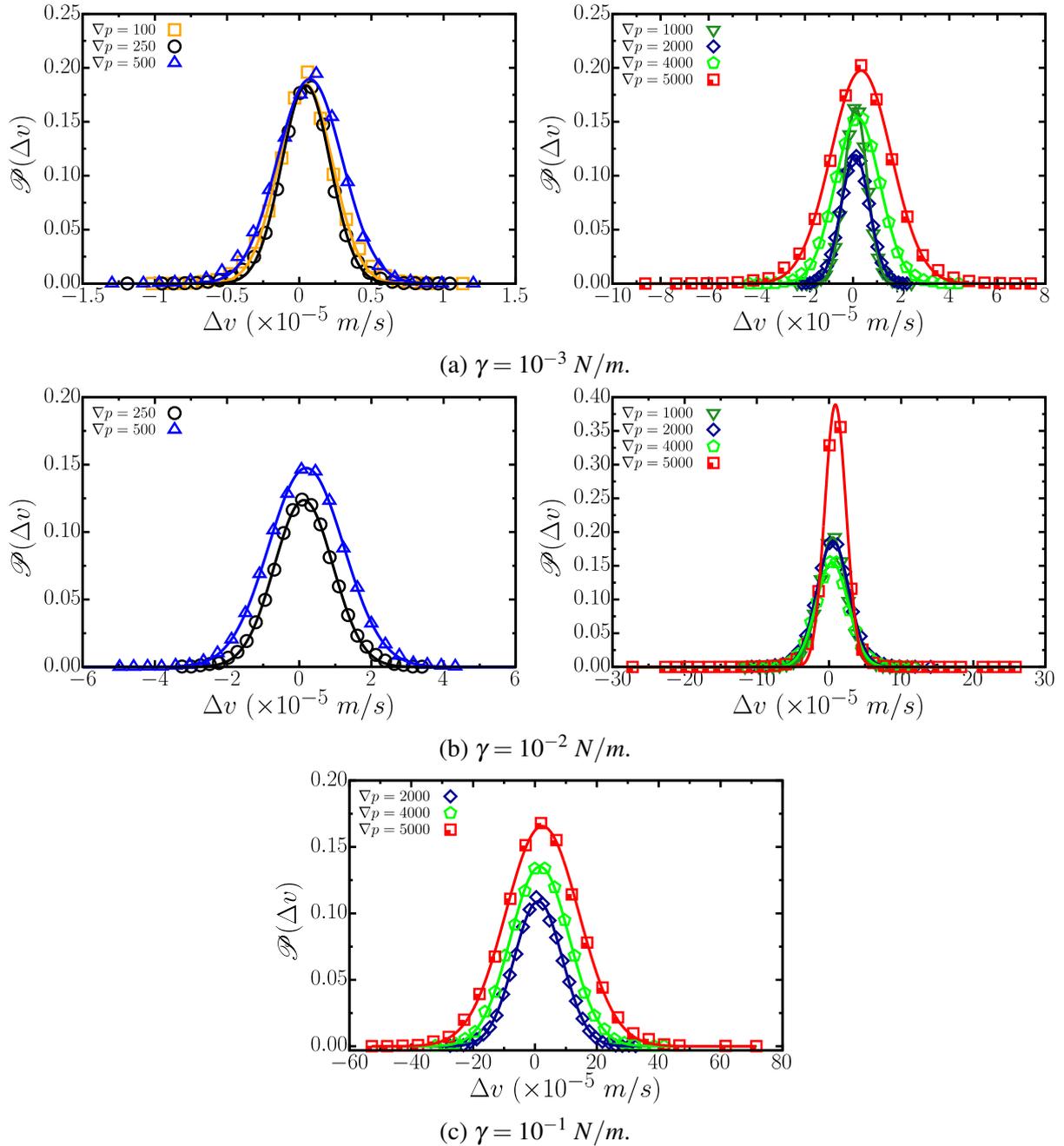
Tabela 2 – Comparação dos parâmetros $(\sigma, \Delta v_0)$ obtidos das distribuições dos saltos de velocidade.

∇p	$\gamma = 10^{-3} N/m$	$\gamma = 10^{-2} N/m$	$\gamma = 10^{-1} N/m$
100	0,1867; 0,0445		
250	0,1687; 0,0468	0,8136; 0,1167	
500	0,2253; 0,0733	1,0421; 1,2421	
1000	0,4762; 0,1088	1,9458; 0,1932	
2000	0,5872; 0,0910	2,2487; 0,5450	7,8010; 1,0593
4000	0,9313; 0,1881	2,2267; 0,4376	9,4766; 1,5976
5000	1,2615; 0,3326	1,4795; 0,8888	11,8266; 2,3715

Fonte: Elaborado pelo autor.

los de tempo consecutivos para toda a série temporal da velocidade da mistura entre as fases, $v^{(m)}(t)$, após o estado estacionário ter sido atingido, a fim de analisar a distribuição da série diferenciada. Como resultado, foi encontrado que os saltos de velocidade seguem uma distribuição

Gráfico 10 – Distribuição de saltos de velocidade das séries da velocidade da mistura.



Distribuição normalizada dos saltos de velocidade das séries temporais de $v^{(m)}(t)$, para os casos com $M = 10$ e $S_1 = 0,2$. Cada conjunto de subgráficos apresenta os resultados para um determinado valor de tensão superficial e cada curva representa um valor diferente de gradiente de pressão. Nossos resultados mostram que os saltos de velocidade seguem uma distribuição gaussiana, onde os parâmetros característicos da distribuição ($\sigma, \Delta v_0$) dependem do gradiente de pressão aplicado e da tensão superficial entre as fases. O ajuste de cada curva foi obtido através do melhor ajuste utilizando-se o método de mínimos quadrados. Fonte: Elaborado pelo autor.

gaussiana, que é dada pela equação

$$\mathcal{P}(\Delta v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v - \Delta v_0}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (4.18)$$

em que Δv_0 é o valor médio ou centro da gaussiana e σ é o desvio padrão dos saltos de velocidade, e que controla a largura da gaussiana.

O Gráfico 10 apresenta, para os casos com $\gamma \neq 0$, $M = 10$ e $S_1 = 0,2$, os histogramas normalizados dos saltos de velocidade, e a Tabela 2 apresenta os respectivos parâmetros $(\sigma, \Delta v_0)$ das distribuições obtidas, que definem a função gaussiana dada pela Equação (4.18). Observamos que os tamanhos dos saltos de velocidade, em geral, aumentam com o gradiente de pressão, como pode ser verificado a partir da comparação dos valores dos desvios padrões apresentados na Tabela 2 e da comparação das larguras das gaussianas no Gráfico 10. Também observamos que as médias dos saltos de velocidade são próximas de zero, o que indica que, em média, as séries podem não apresentar um crescimento ou decrescimento significativo em relação à velocidade, o que é esperado em um regime estatisticamente estacionário.

4.2.3.2 Análise da distribuição de avalanches

Neste trabalho, nós definimos uma *avalanche* como um evento na série temporal da velocidade que é caracterizado por uma diminuição na velocidade, seguida de um subsequente aumento e, finalmente, o retorno ao seu valor inicial. Em outras palavras, uma avalanche inicia-se com uma diminuição na velocidade e dura enquanto a velocidade permanece abaixo do valor prévio à queda. O tamanho de uma avalanche, Δt , é definido como o intervalo de tempo necessário para que o evento ocorra completamente, ou seja, para que a velocidade volte ao seu valor inicial após a diminuição. O termo *avalanche* é “emprestado” da percolação invasiva [135, 136], onde ele é definido como o evento em que o fluido invasor invade sequencialmente sítios com raios menores que o raio do sítio que iniciou a avalanche.

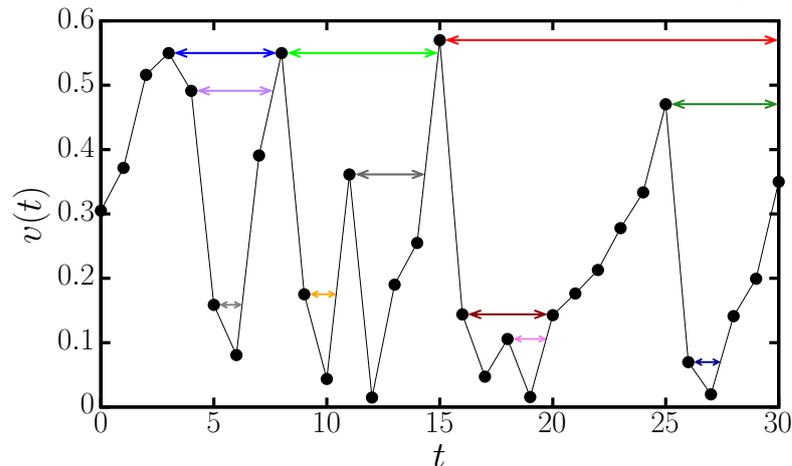
Os tamanhos das avalanches podem ser calculados, da seguinte forma. Considerando uma série temporal $v(t)$, podemos definir o tamanho de uma avalanche como o intervalo de tempo (ou número de passos de tempo) que vai de um instante de tempo inicial, t_a , de valor (ou altura) $v(t_a) = h$, até um instante posterior, t_b , de altura igual ou superior à h , isto é, $v(t_b) \geq h$, tal que os instantes de tempo intermediários, t_i , entre t_a e t_b apresentam valores menores que h , isto é, $v(t_i) < h, \forall t_i \in (t_a, t_b)$. Assim, o tamanho da avalanche pode ser escrito como

$$\Delta t(t_a) = \frac{t_b - t_a}{\delta t}, \quad \text{se } v(t_i) < v(t_a) \leq v(t_b), \quad \forall t_i \in (t_a, t_b), \quad (4.19)$$

onde δt é o tamanho do passo de tempo.

O Gráfico 11 exibe um exemplo de uma série temporal, $v(t)$, e ilustra, para uma melhor compreensão, onde ocorrem as avalanches e indica, por meio de setas, os seus respectivos tamanhos. O tamanho da avalanche pode ser entendido como a largura dos vales presentes

Gráfico 11 – Avalanches progressivas em uma série temporal.



Uma avalanche inicia-se com uma diminuição na velocidade e dura enquanto a velocidade permanece abaixo do valor prévio à queda. O tamanho de uma avalanche, Δt , é definido como o intervalo de tempo necessário para que o evento ocorra completamente, ou seja, para que a velocidade volte ao seu valor inicial após a diminuição. No gráfico, as setas mostram onde ocorrem as avalanches na série temporal $v(t)$ e indicam seus respectivos tamanhos. Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Comparação dos expoentes (η) das distribuições dos tamanhos das avalanches.

∇p (Pa/m)	$\gamma = 10^{-3}$ N/m	$\gamma = 10^{-2}$ N/m	$\gamma = 10^{-1}$ N/m
100	$1,81928 \pm 0,02859$		
250	$1,63170 \pm 0,03193$	$1,70737 \pm 0,01611$	
500	$1,55716 \pm 0,03879$	$1,71984 \pm 0,01398$	
1000	$1,54669 \pm 0,02337$	$1,60038 \pm 0,01937$	
2000	$1,31897 \pm 0,03234$	$1,57586 \pm 0,03126$	$1,75039 \pm 0,02006$
4000	$1,65290 \pm 0,04184$	$1,46894 \pm 0,04275$	$1,61788 \pm 0,03193$
5000	$1,75593 \pm 0,03416$	$1,60865 \pm 0,02224$	$1,57934 \pm 0,02043$

Fonte: Elaborado pelo autor.

na série temporal, como ilustrado no Gráfico 11. Note que as avalanches podem ocorrer em diferentes escalas de tempo e que, além disso, várias avalanches podem ocorrer dentro de outra. A avalanche, do modo como foi definida acima, é chamada de avalanche ‘progressiva’, uma vez que é calculada, em um dado instante t , levando em conta os instantes de tempo posteriores.

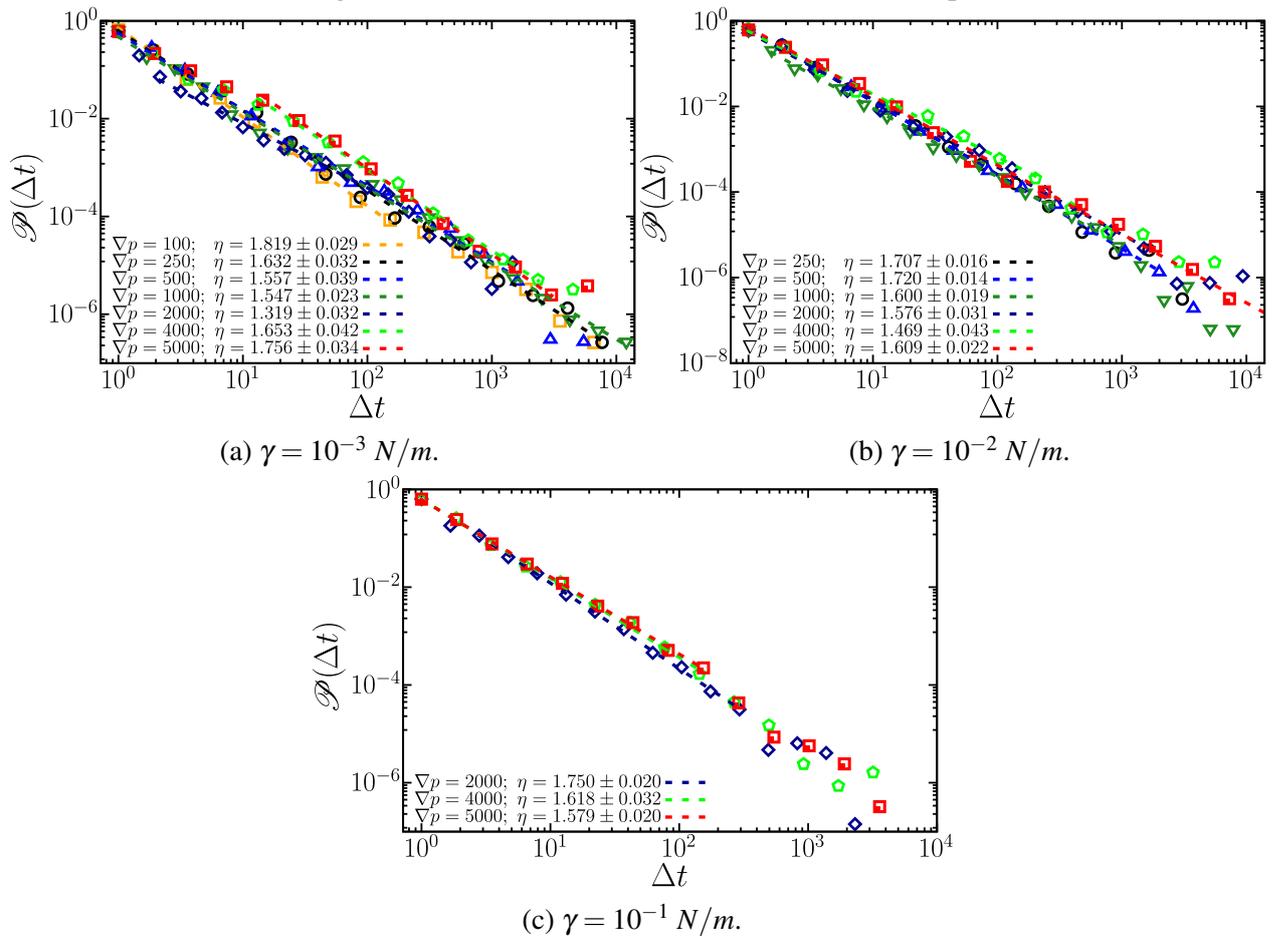
Com o objetivo de analisar as distribuições dos tamanhos das avalanches presentes nas séries temporais da velocidade da mistura, $v^{(m)}(t)$, para os casos estudados, nós calculamos os tamanhos das avalanches, aplicando a Equação (4.19) para cada instante de tempo das séries e, em seguida, calculamos as distribuições dos tamanhos. Os resultados obtidos, apresentados no Gráfico 12, mostram que as distribuições apresentam um comportamento do tipo lei de potência,

$$\mathcal{P}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-\eta}, \quad (4.20)$$

onde o expoente η depende do gradiente de pressão aplicado e da tensão superficial entre as fases. A Tabela 3 apresenta um resumo desses expoentes para os casos estudados.

As flutuações temporais nas velocidades médias de todo o fluido, $v^{(m)}(t)$, apresen-

Gráfico 12 – Distribuição dos tamanhos das avalanches nas séries temporais da velocidade.



Histogramas em escala logarítmica dos tamanhos das avalanches nas séries temporais da velocidade da mistura das fases, $v^{(m)}(t)$, para os casos com $M = 10$ e $S_1 = 0,2$. Cada subgráfico apresenta os resultados para um determinado valor de tensão superficial e cada curva representa um valor diferente de gradiente de pressão. As distribuições obtidas seguem uma lei de potência, $\mathcal{P}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-\eta}$, onde o expoente η depende do gradiente de pressão aplicado e da tensão superficial entre as fases. O ajuste de cada curva foi obtido através do melhor ajuste utilizando-se o método de mínimos quadrados. Fonte: Elaborado pelo autor.

tam avalanches que acreditamos ser o resultado do aprisionamento de bolhas (de uma fase em outra) em regiões mais estreitas do meio poroso. É interessante destacar que uma distribuição em lei de potência mostra um comportamento crítico, típico de eventos que são independentes uns dos outros. Isso significa que, após uma queda de velocidade (diminuição na série temporal), o tempo necessário para retornar a mesma velocidade pode ser extremamente curto, com uma maior probabilidade, ou bastante longo, com uma menor probabilidade. Além disso, uma distribuição em lei de potência pode indicar que a auto-organização interna da interface leva a uma estrutura livre de escala. Portanto, conhecer esse comportamento em lei de potência, assim como a dependência do seu expoente com os outros parâmetros físicos do sistema, é importante para melhor entender como duas fases imiscíveis competem entre si para preencher o espaço poroso, o que por sua vez influencia no comportamento macroscópico do fluxo das fases.

4.2.3.3 Análise das flutuações sem tendências

O método de análise de flutuações sem tendências ou método DFA [137] (do inglês, *Detrended Fluctuations Analysis*), é amplamente utilizado para detectar correlações de longo alcance em séries temporais. Este método é descrito com mais detalhes no Apêndice D. A ideia básica desse método consiste em subtrair possíveis tendências da série original e analisar a flutuação dos dados resultantes. Nessa análise, é definida uma função $F(n)$, Equação (D.3), chamada de função de flutuação, calculada como o desvio quadrático médio da série temporal uma vez removidas as tendências, onde n é o tamanho dos blocos ou janelas de tempo em que a série temporal é dividida para que seja realizada a análise. Em seguida, um gráfico de $F(n)$ contra n é esboçado e o comportamento de $F(n)$ é analisado. A ideia por trás desse processo é analisar como as flutuações de uma série temporal mudam à medida que o intervalo de tempo sobre o qual as flutuações são calculadas aumenta. Se os dados a serem analisados possuem correlações de longo alcance, a função de flutuação apresentará um comportamento do tipo lei de potência [138], $F(n) \propto n^\alpha$, Equação (D.4), onde o expoente α está relacionado aos padrões de correlação da série analisada [139, 140].

O Gráfico 13, a seguir, mostra as funções de flutuação calculadas para as séries temporais da velocidade da mistura, $v^{(m)}(t)$, para os casos com $M = 10$, $\gamma \neq 0$ e $S_1 = 0,2$. Como é possível observar, as funções de flutuação das séries temporais analisadas apresentam um comportamento do tipo lei de potência para as regiões mais centrais dos gráficos, o que significa que as séries $v^{(m)}(t)$ possuem correlações de longo alcance para as janelas de tempo envolvidas. A Tabela 4 apresenta um resumo dos expoentes da lei de potência obtidos a partir do método DFA para os casos estudados.

Tabela 4 – Comparação dos expoentes (α) obtidos a partir do método DFA.

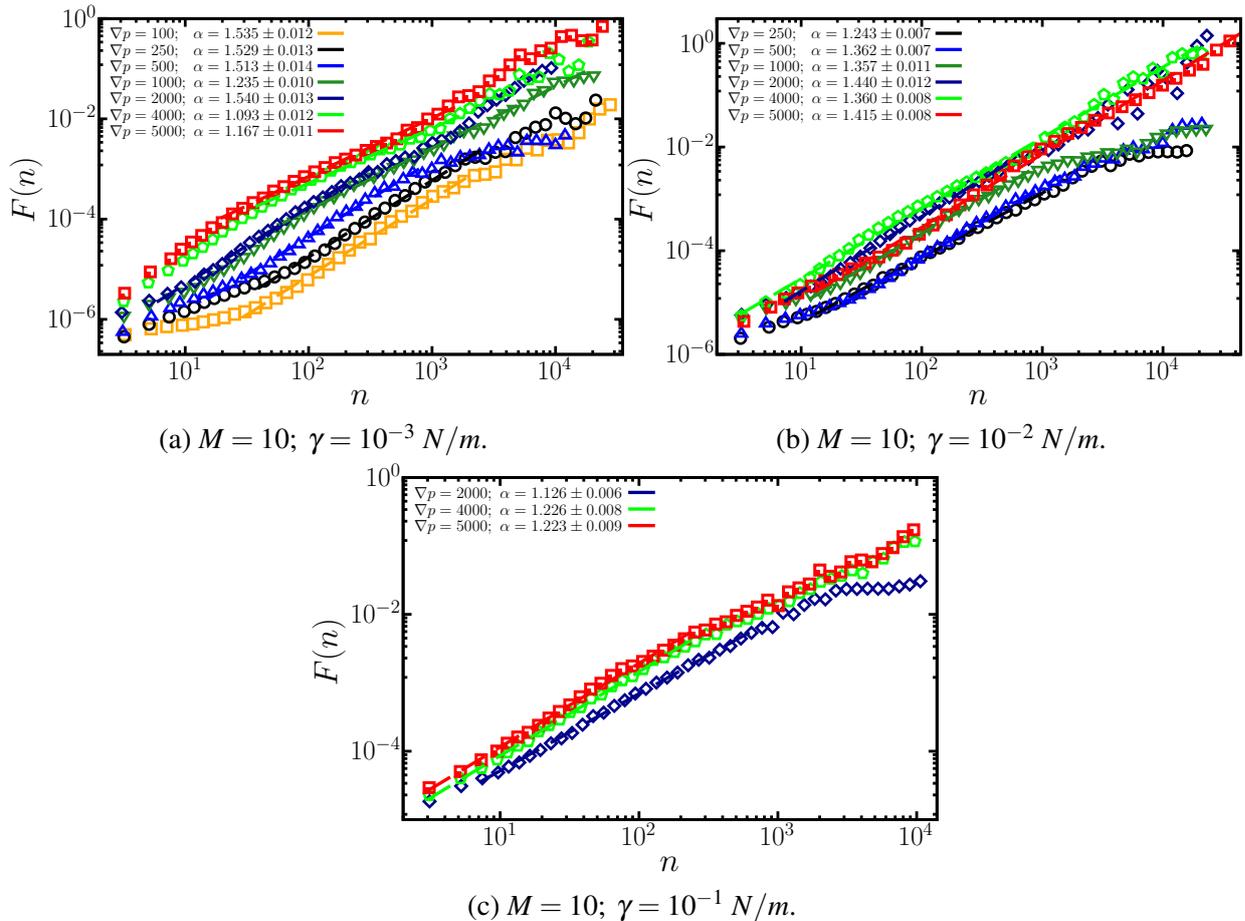
∇p (Pa/m)	$\gamma = 10^{-3}$ N/m	$\gamma = 10^{-2}$ N/m	$\gamma = 10^{-1}$ N/m
100	$1,52920 \pm 0,01784$		
250	$1,52858 \pm 0,01319$	$1,08950 \pm 0,00334$	
500	$1,51283 \pm 0,01431$	$1,27635 \pm 0,00814$	
1000	$1,23473 \pm 0,01044$	$1,34312 \pm 0,01174$	
2000	$1,54036 \pm 0,01282$	$1,43952 \pm 0,01247$	$1,12590 \pm 0,00599$
4000	$1,09326 \pm 0,01228$	$1,36013 \pm 0,00838$	$1,22580 \pm 0,00755$
5000	$1,16681 \pm 0,01132$	$1,28716 \pm 0,00936$	$1,22274 \pm 0,00912$

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.3.4 Análise das correlações temporais

Para desenvolver uma descrição do escoamento como um sistema dinâmico estocástico, é importante saber se o sistema é ergódico ou não. Embora originalmente aplicadas a flutuações térmicas na escala molecular, as simetrias de Onsager [89, 90] foram aplicadas com sucesso para descrever o comportamento de fluxos multifásicos em meios porosos macroscópicos [141] e em modelos de rede de poros [126, 142–145]. Com este propósito em

Gráfico 13 – Análise das séries temporais da velocidade através do método DFA.



Método DFA: Gráfico, em escala logarítmica, da função de flutuação em função do tamanho dos intervalos, para as séries temporais da velocidade da mistura, $v^{(m)}(t)$. Na legenda de cada gráfico, a letra α indica o expoente da lei de potência, $F(n) \propto n^\alpha$, obtido através do método de mínimos quadrados. Fonte: Elaborado pelo autor.

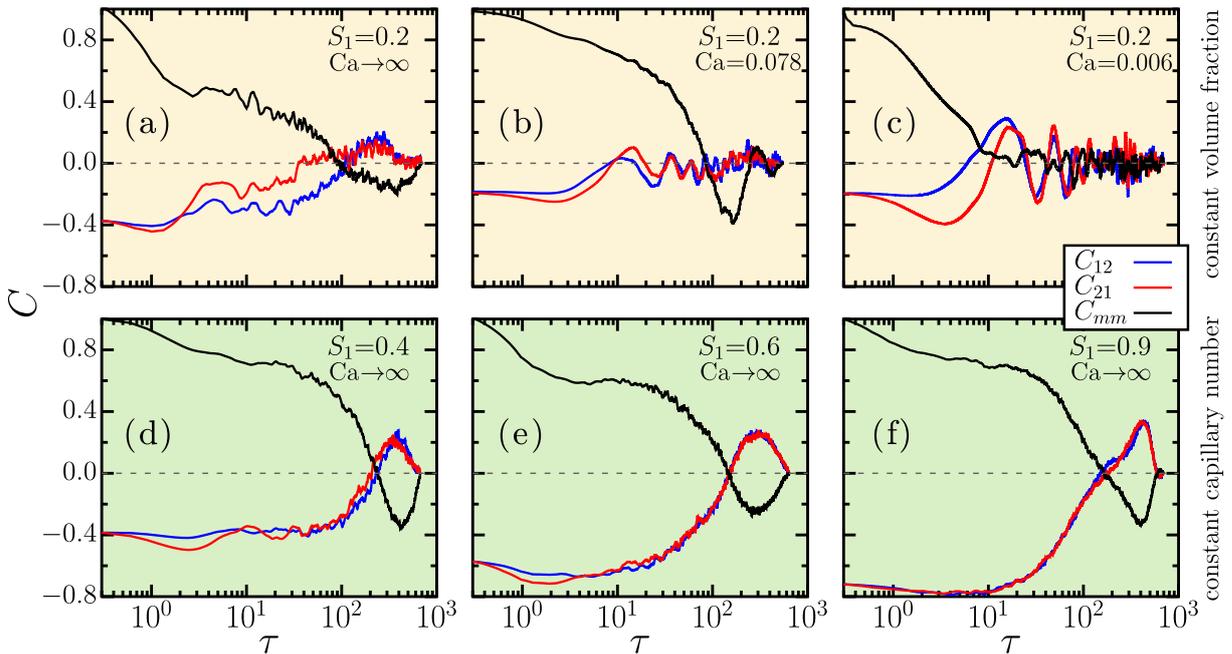
vista, aplicamos as relações recíprocas de Onsager para estudar a ergodicidade. As relações recíprocas de Onsager são baseadas em correlações temporais que podem ser calculadas pela Equação (3.10), como

$$C_{AB}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} \frac{\Delta A(t) \Delta B(t + \tau)}{\sigma_A \sigma_B} dt, \quad (4.21)$$

onde $\Delta A(t) = A(t) - \bar{A}$ são as flutuações da série temporal $A(t)$ e $\Delta B(t + \tau)$ são as flutuações correspondentes de $B(t)$ deslocadas por τ . Os valores médios \bar{A} e \bar{B} , e as variâncias σ_A e σ_B , são todos calculados sobre a janela de tempo $[0, T - \tau]$, compartilhada por ambas as séries temporais.

Um processo dinâmico é considerado reversível no tempo se a função de correlação cruzada for simétrica, e portanto, as integrais de C_{AB} e C_{BA} forem iguais [91, 126]. Essa condição é satisfeita quando $C_{AB}(\tau)$ colapsa em $C_{BA}(\tau)$ para todos os instantes de tempo, exceto para algumas escalas de tempo muito pequenas em que a contribuição para a integral é desprezível [126]. As autocorrelações, por outro lado, medem a aleatoriedade na série temporal e a taxa em que as flutuações mudam em relação à escala de tempo τ . Também pode

Gráfico 14 – Funções de correlação temporal das séries temporais de velocidade das duas fases e da mistura.



Gráficos das funções de correlação temporal calculadas para as séries temporais de velocidade das duas fases e da mistura, para $M = 10$ e $\nabla p = 1000$ Pa/m. C_{12} é a função de correlação cruzada entre as séries temporais de velocidade da fase 1 e da fase 2, onde a série temporal da fase 2 é deslocada no tempo em relação à fase 1 por τ , enquanto C_{21} é o caso oposto. C_{mm} é a autocorrelação da velocidade de todo o fluido. Os subgráficos superiores mostram o efeito da diminuição do número capilar de $Ca \rightarrow \infty$ em (a) para 0,078 em (b) e para 0,006 em (c), enquanto a fração volumétrica da fase 1 é mantida em $S_1 = 0,2$. Nos subgráficos (d), (e) e (f), mantemos $Ca \rightarrow \infty$, como em (a), mas aumentamos sistematicamente a saturação da fase menos viscosa de $S_1 = 0,4$ para 0,6 e para 0,9, respectivamente. Fonte: Elaborado pelo autor.

ser interpretada como a memória de um processo estocástico, determinando se as observações sucessivas são independentes ou não.

A seguir, analisamos as correlações das séries temporais da velocidade média das fases 1 e 2 e da mistura, definidas através das Equações (4.7), (4.9) e (4.11). Aqui, $C_{12}(\tau)$ descreve a correlação cruzada entre a fase 1 e a fase 2, onde a série temporal da fase 2 é deslocada no tempo em relação à fase 1. Enquanto $C_{21}(\tau)$ é oposto. $C_{mm}(\tau)$ é a autocorrelação da mistura, ou seja, a correlação é calculada com a série temporal da mistura em relação à mesma curva. O Gráfico 14 mostra $C_{12}(\tau)$, $C_{21}(\tau)$ e $C_{mm}(\tau)$ para $\nabla p = 1000$ Pa/m e $M = 10$. Em geral, para pequenos atrasos, a fase 1 e a fase 2 tendem a ser anti-correlacionadas e fracamente correlacionadas para valores maiores de τ . Isso significa que se uma fase acelera (comparando em relação à sua velocidade média), a outra fase desacelera. No limite de atrasos muito grandes, as correlações cruzadas de $C_{12}(\tau)$ e $C_{21}(\tau)$ vão a zero. Por outro lado, as funções de autocorrelação mostram o comportamento oposto, com fortes correlações para pequenos atrasos, ligeiras anti-correlações em uma faixa intermediária e correlações que tendem a zero para $\tau \rightarrow \infty$.

O Gráfico 14 mostra como a fração volumétrica da fase menos viscosa (fase 1) e o

número capilar afetam as diferentes correlações no fluxo. Os subgráficos (a), (b) e (c) mostram as funções de correlação cruzada para Ca decrescente, mantendo-se a fração volumétrica constante no valor $S_1 = 0,2$. Para $Ca \rightarrow \infty$ e $S_1 = 0,2$, $C_{12}(\tau)$ e $C_{21}(\tau)$ parecem colapsar apenas para valores grandes de τ . À medida que Ca diminui, as funções de correlação cruzada se aproximam mais rapidamente de zero, mas as flutuações também aumentam e, portanto, o colapso de C_{12} com C_{21} não é completamente claro para pequenos valores de Ca . Para sistemas dominados por forças capilares, $Ca \rightarrow 0$, a reversibilidade no tempo é menos clara, semelhante a um recente experimento com fluxos bifásicos em sistemas tridimensionais heterogêneos [144]. O gráfico também mostra o efeito do aumento da fração volumétrica da fase menos viscosa. Aqui, S_1 varia de 0,2 no subgráfico (a) para 0,4 em (d), para 0,6 em (e) e para 0,9 em (f), enquanto todos os outros parâmetros são mantidos fixos. Para frações volumétricas de 0,4, 0,6 e 0,9, as funções de correlação cruzada quase se colapsam perfeitamente, sugerindo uma dinâmica de reversão no tempo comparada ao caso com apenas 0,2 de fração volumétrica, como mostrado no subgráfico (a). De fato, variando a saturação S_1 de 0,1 até 0,9, um bom colapso das duas funções de correlação cruzada é observado para $S_1 \geq 0,4$ em todas as escalas de tempo. Em relação às funções de autocorrelação (linhas pretas no Gráfico 14), nossos resultados mostram que elas se tornam lentamente anti-correlacionadas, o que é semelhante ao movimento Browniano [146]. No entanto, à medida que a tensão superficial aumenta, $C_{mm}(\tau)$ vai à zero mais cedo, em valores menores de τ .

5 CONCLUSÃO

Nós investigamos o regime de escoamento estacionário de dois fluidos newtonianos imiscíveis e incompressíveis em meios porosos bidimensionais do tipo *Queijo Suíço*. As equações de Navier-Stokes e da continuidade são resolvidas numericamente em duas dimensões usando o modelo volume de fluidos (VoF) para escoamentos multifásicos. O comportamento da série temporal da velocidade do fluido é influenciado por uma dinâmica complexa das bolhas que se formam à medida que as duas fases competem entre si no espaço heterogêneo dos poros. Apesar da aparente desordem, no regime estacionário, a distribuição do tamanho das bolhas segue uma lei de potência bem definida, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$, cujo expoente ξ depende do número capilar. Esse expoente é aproximadamente constante $\xi \approx 1,23$ para $Ca \lesssim 0,046$, onde as bolhas são em sua maioria grandes e coesas. Para $Ca > 0,046$, por outro lado, ξ aumenta sistematicamente, chegando a $2,05 \pm 0,03$ para $Ca \rightarrow \infty$. Este regime é caracterizado pela presença de um grande número de pequenas bolhas e alguns aglomerados longos e finos, onde fusões e quebras de bolhas são frequentes.

As flutuações na série temporal são analisadas por meio de funções de correlação entre as velocidades das duas fases, mostrando que as relações recíprocas de Onsager e a simetria de reversão temporal são satisfeitas para frações de volume acima de 0,4 e altos valores de número capilar. Para valores menores, a reversibilidade temporal do fluxo é menos clara, o que é consistente com observações feitas em experimentos tridimensionais de duas fases. Além disso, as distribuições dos tamanhos das avalanches, presentes nas séries temporais da velocidade da mistura, seguem uma lei de potência, $\mathcal{P}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-\eta}$, e os tamanhos dos saltos de velocidade seguem uma distribuição gaussiana.

Finalmente, nós mostramos que a velocidade média da mistura dos dois fluidos pode ser modelada por uma generalização da lei de Darcy, dada por $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla p)^\beta$, onde o expoente β depende da tensão superficial entre as fases (e, portanto, do número capilar). Quando a tensão superficial é desprezada e a razão de viscosidade é unitária, a relação de Darcy tradicional é recuperada, ou seja, $\beta = 1$. Por outro lado, o sistema é dominado pela presença de muitas gotículas para $Ca \rightarrow \infty$, onde a velocidade média do fluido aumenta exponencialmente com a fração volumétrica da fase menos viscosa, $\bar{v}^{(m)} \propto e^{(\delta S_1)}$, onde δ é uma constante. Esse comportamento é semelhante às permeabilidades efetivas encontradas em reservatórios com gás dissolvido. Nós acreditamos que nossos resultados têm aplicações diretas no comportamento do escoamento mesoscópico (ao nível do poro) em diversas situações reais, podendo auxiliar na descrição da propagação macroscópica da frente de invasão em reservatórios de petróleo.

REFERÊNCIAS

- [1] SOUZA, M. M. de. *Solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis via elementos finitos*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/75769>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [2] FLUENT, A. 12.0 user's guide. *Ansys Inc*, 2009. Disponível em: <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/index.htm>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [3] MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica de Fluidos*. Tradução da 4ª edição norte-americana. São Paulo: Edgard Blucher, 2004.
- [4] FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. *Introdução À Mecânica dos Fluidos*. Tradução da 7ª edição norte-americana. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2010.
- [5] PASCAL, B. *Traitez de l'équilibre des liqvevrs, et de la pesantevr de la masse de l'air*. A Paris: Chez G. Desprez, 1663.
- [6] OLIVEIRA, R. S. de. *Propriedades de escala no escoamento de fluido em meio poroso modelado por empacotamento Apoloniano*. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, 2009. Disponível em: <https://ppgfis.ufba.br/sites/ppgfis.ufba.br/files/d92-if-ufba.pdf>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [7] PAIVA, A. S. S. *Escoamento de fluidos bifásicos em empacotamentos geométricos*. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, 2014. Disponível em: <https://ppgfis.ufba.br/sites/ppgfis.ufba.br/files/d150-if-ufba.pdf>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [8] MORAIS NETO, A. F. de. *Escoamento de fluidos complexos e transporte de partículas em geometrias irregulares*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal do Ceará, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/1095>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [9] PALANDI, J. *et al. Fluidos reais e ideais*. 2010. Disponível em: <https://docplayer.com.br/39992514-Fluidos-reais-e-ideais.html>. Acesso em: 01 fev 2021.
- [10] GOLDSTEIN, S. *Modern developments in fluid dynamics: an account of theory and experiment relating to boundary layers, turbulent motion and wakes*. Clarendon Press, v. 2, 1938.

- [11] RICHARDSON, S. On the no-slip boundary condition. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 59, n. 4, p. 707–719, 1973.
- [12] BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. 1967. Cambridge: At the University Press 1967. XVIII, 615 p. (1967). Disponível em: <https://zbmath.org/0152.44402>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [13] KOPLIK, J.; BANAVAR, J. R. No-slip condition for a mixture of two liquids. *Physical review letters*, APS, v. 80, n. 23, p. 5125, 1998.
- [14] LAUGA, E.; SQUIRES, T. M. Brownian motion near a partial-slip boundary: a local probe of the no-slip condition. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 17, n. 10, 2005.
- [15] THOMPSON, P. A.; ROBBINS, M. O. Shear flow near solids: epitaxial order and flow boundary conditions. *Physical review A*, APS, v. 41, n. 12, p. 6830, 1990.
- [16] THOMPSON, P. A.; TROIAN, S. M. A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 389, n. 6649, p. 360–362, 1997.
- [17] BARRAT, J.-L.; BOCQUET, L. Large slip effect at a nonwetting fluid-solid interface. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 23, p. 4671, 1999.
- [18] BAUDRY, J. *et al.* Experimental evidence for a large slip effect at a nonwetting fluid-solid interface. *Langmuir*, ACS Publications, v. 17, n. 17, p. 5232–5236, 2001.
- [19] CHENG, J.-T.; GIORDANO, N. Fluid flow through nanometer-scale channels. *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 3, p. 031206, 2002.
- [20] CHOI, C.-H.; WESTIN, K. J. A.; BREUER, K. S. Apparent slip flows in hydrophilic and hydrophobic microchannels. *Physics of Fluids*, American Institute of Physics, v. 15, n. 10, p. 2897–2902, 2003.
- [21] BONACCURSO, E.; BUTT, H.-J.; CRAIG, V. S. Surface roughness and hydrodynamic boundary slip of a newtonian fluid in a completely wetting system. *Physical Review Letters*, APS, v. 90, n. 14, p. 144501, 2003.
- [22] HERVET, H.; LÉGER, L. Flow with slip at the wall: from simple to complex fluids. *Comptes Rendus Physique*, Elsevier, v. 4, n. 2, p. 241–249, 2003.
- [23] COTTIN-BIZONNE, C. *et al.* Boundary slip on smooth hydrophobic surfaces: intrinsic effects and possible artifacts. *Physical review letters*, APS, v. 94, n. 5, p. 056102, 2005.
- [24] JOSEPH, P.; TABELING, P. Direct measurement of the apparent slip length. *Physical Review E*, APS, v. 71, n. 3, p. 035303, 2005.

- [25] DAY, M. A. The no-slip condition of fluid dynamics. *Erkenntnis*, Springer, v. 33, n. 3, p. 285–296, 1990.
- [26] NEWTON, I. *The principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press: California, 1999.
- [27] PARTAL, P.; FRANCO, J. M. The Newtonian fluid. Rheology: encycyclopaedia of life support systems, UNESCO. *Eolss, Oxford*, p. 74–95, 2010.
- [28] JACOBSON, B. O. History of rheology and Newton. *In: Rheology and Elastohydrodynamic Lubrication*. Amsterdam: Elsevier, 1991, (Tribology Series, Supplement C). cap. 2, p. 13 – 17.
- [29] BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. *An Introduction to Rheology*. Amsterdam: Elsevier, 1989. v. 3.
- [30] SCHMELZER, J. W. P.; ZANOTTO, E. D.; FOKIN, V. M. Pressure dependence of viscosity. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 122, n. 7, p. 074511, 2005.
- [31] ANDRADE, E. N. d. C. The viscosity of liquids. *Nature*, v. 125, n. 3148, p. 309–310, 1930.
- [32] ANDRADE, E. N. d. C. XLI. A theory of the viscosity of liquids.-Part I. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 17, n. 112, p. 497–511, 1934.
- [33] GHOSH, T. K. *et al. Viscosity of Liquids: Theory, Estimation, Experiment, and Data*. New York: Springer, 2007. ISBN 9781402054815.
- [34] SUTHERLAND, W. LII. The viscosity of gases and molecular force. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 36, n. 223, p. 507–531, 1893.
- [35] MEZGER, T. G. *The rheology handbook: for users of rotational and oscillatory rheometers*. Vincentz Network GmbH & Co KG, 2006.
- [36] BARUS, C. ART. X.–Isothermals, Isopiestic and Isometrics relative to Viscosity. *American Journal of Science (1880-1910)*, American Periodicals Series II, v. 45, n. 266, p. 87, 1893.
- [37] PETRONE, V.; SENATORE, A.; D’AGOSTINO, V. Effect of an Improved Yasutomi Pressure-Viscosity Relationship on the Elastohydrodynamic Line Contact Problem. *ISRN Tribology*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, 2013.

- [38] ZORZETTO, L. F. M. *Estudo experimental do escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos não consolidados*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) — Universidade Estadual de Campinas, 1991. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/34926>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [39] PARTAL, P.; FRANCO, J. M. Non-Newtonian fluids. *Rheology: encycyclopaedia of life support systems*, UNESCO. *Eolss, Oxford*, p. 96–119, 2010.
- [40] OLIVEIRA, C. L. N. de. *Escoamento bifásico em meios porosos: aplicações na recuperação de óleo e infiltração de fluidos adesivos*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal do Ceará, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/1074>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [41] GRATON, L. C.; FRASER, H. Systematic packing of spheres: with particular relation to porosity and permeability. *The Journal of Geology*, University of Chicago Press, v. 43, n. 8, Part 1, p. 785–909, 1935.
- [42] BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: American Elsevier Pub. Co., 1972.
- [43] PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. New York: United States, 1977.
- [44] PAIVA, A. S. S. *Análise de sistemas complexos não lineares por equações diferenciais parciais e séries temporais*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Bahia, 2018. Disponível em: <https://ppgfs.ufba.br/sites/ppgfs.ufba.br/files/aureliano.tese.pdf>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [45] FERREIRA, J. P. M. Tensão superficial - sua natureza e efeitos. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Química*, Sociedade Portuguesa de Química, n. 93, p. 43–48, 2004.
- [46] BEHRING, J. L. *et al.* Adaptação no método do peso da gota para determinação da tensão superficial: um método simplificado para a quantificação da CMC de surfactantes no ensino da química. *Química nova*, v. 27, n. 3, p. 492–495, 2004.
- [47] BUSH, J. W. M. Surface tension module. 2004. Disponível em: <https://web.mit.edu/1.63/www/Lec-notes/Surfacetension/Lecture1.pdf>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [48] BOUDH-HIR, M.-E.; MANSOORI, G. A. Theory for interfacial tension of partially miscible liquids. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, Elsevier, v. 179, n. 2, p. 219–231, 1991.
- [49] LACAZE, L. *et al.* Transient surface tension in miscible liquids. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 82, p. 041606, Oct 2010.

- [50] MUNGALL, J. E. Interfacial tension in miscible two-fluid systems with linear viscoelastic rheology. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 73, p. 288–291, Jul 1994.
- [51] KORTEWEG, D. J. Sur la forme que prennent les équations du mouvements des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais connues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité. *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, Série II*, v. 6, p. 1–24, 1901.
- [52] MORRA, G.; YUEN, D. A. Role of korteweg stresses in geodynamics. *Geophysical Research Letters*, v. 35, n. 7, 2008.
- [53] CHEN, C.-Y. *et al.* Radial viscous fingering in miscible hele-shaw flows: A numerical study. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 78, p. 016306, Jul 2008.
- [54] ISRAELACHVILI, J. N. *Intermolecular and surface forces*. Amsterdam: Academic Press, 2011.
- [55] ROWLINSON, J. S.; WIDOM, B. *Molecular Theory of Capillarity*. Mineola, New York: Dover Publications, 1982.
- [56] SHAW, D. J. *Introduction to colloid and surface chemistry*. 4. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1992.
- [57] CAMPBELL, A. *et al.* Partially miscible liquid systems: the density, change of volume on mixing, vapor pressure, surface tension, and viscosity in the system: aniline–hexane. *Canadian Journal of Chemistry*, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 46, n. 14, p. 2399–2407, 1968.
- [58] COELHO, J. K.; PENA, M. D.; ROMERO, O. J. Pore-scale modeling of oil mobilization trapped in a square cavity. *IEEE Latin America Transactions*, IEEE, v. 14, n. 4, p. 1800–1807, 2016.
- [59] COHEN, I. M.; KUNDU, P. K. *Fluid mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 2004.
- [60] DING, M.; KANTZAS, A. Capillary number correlations for gas-liquid systems. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 46, n. 02, 02 2007. ISSN 0021-9487.
- [61] SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 245, n. 1242, p. 312–329, 1958.
- [62] SATTER, A.; IQBAL, G. M. Reservoir rock properties. *In: Reservoir Engineering*. Boston: Gulf Professional Publishing, 2016. p. 29–79. ISBN 978-0-12-800219-3.

- [63] PFITZNER, J. Poiseuille and his law. *Anaesthesia*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 31, n. 2, p. 273–275, 1976.
- [64] SUTERA, S. P.; SKALAK, R. The history of Poiseuille’s law. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 25, n. 1, p. 1–20, 1993.
- [65] DARCY, H. P. G. *Les Fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau, etc.* Paris: V. Dalmont, 1856.
- [66] DAKE, L. P. *Fundamentals of reservoir engineering*. Amsterdam: Elsevier, 1983. ISBN 9780080568980.
- [67] MONREAL, J. General navier–stokes-like momentum and mass-energy equations. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 354, p. 565–569, 2015. ISSN 0003-4916.
- [68] CARMO, F. P. do. *A Equação de Poisson e a Decomposição de Helmholtz-Hodge com Operadores SPH*. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=12140>. Acesso em: 19 ago. 2023.
- [69] LERVÅG, K. Y. *Simulation of two-phase flow with varying surface tension*. Dissertação (Mestrado em Física e Matemática) — Institutt for matematiske fag, Norwegian University of Science and Technology, 2008. Disponível em: <https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/handle/11250/258442>. Acesso em: 19 ago. 2023.
- [70] XU, J.-J. et al. A level-set immersed interface method for simulating the electrohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 400, p. 108956, 2020.
- [71] XU, J.-J. et al. A level-set method for interfacial flows with surfactant. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 212, n. 2, p. 590–616, 2006.
- [72] KATOPODES, N. D. Air-water interface. *In: Free-Surface Flow: shallow water dynamics*. Cambridge: Butterworth-Heinemann, 2019. cap. 2, p. 44–121. ISBN 978-0-12-815487-8.
- [73] AWAD, M. M.; MUZYCHKA, Y. S. Effective property models for homogeneous two-phase flows. *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 33, n. 1, p. 106–113, 2008. ISSN 0894-1777.
- [74] CICCHITTI, A. et al. Two-phase cooling experiments: pressure drop, heat transfer and burnout measurements. 1959. Disponível em: <https://www.osti.gov/biblio/4181977>. Acesso em: 19 ago. 2023.

- [75] MCADAMS, W.; WOODS, W.; JR, L. H. Vaporization inside horizontal tubes-II benzene-oil mixtures. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, American Society of Mechanical Engineers, v. 64, n. 3, p. 193–199, 1942.
- [76] DAVIDSON, W. et al. Studies of heat transmission through boiler tubing at pressures from 500 to 3300 pounds. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, American Society of Mechanical Engineers, v. 65, n. 6, p. 553–579, 1943.
- [77] HAGEDORN, A. R.; BROWN, K. E. Experimental study of pressure gradients occurring during continuous two-phase flow in small-diameter vertical conduits. *Journal of Petroleum Technology*, SPE, v. 17, n. 04, p. 475–484, 1965.
- [78] SINHA, S. et al. Rheology of high-capillary number two-phase flow in porous media. *Frontiers in Physics*, v. 7, 2019. ISSN 2296-424X.
- [79] SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística*. São Paulo: Edusp, 1997. ISBN 85-314-0386-3.
- [80] GIBBS, J. W. *Elementary principles in statistical mechanics*: developed with especial reference to the rational foundations of thermodynamics. New York: C. Scribner's sons, 1902.
- [81] BRUM, J. A. *F604 - Física Estatística*. 2011. Disponível em: <https://sites.ifi.unicamp.br/brum/ensino/f604/>. Acesso em: 19 ago 2023.
- [82] BELLAC, M. L.; MORTESSAGNE, F.; BATROUNI, G. G. *Equilibrium and non-equilibrium statistical thermodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [83] KJELSTRUP, S.; BEDEAUX, D. *Non-equilibrium thermodynamics of heterogeneous systems*. Singapore: World Scientific, 2008.
- [84] MOORE, C. C. Ergodic theorem, ergodic theory, and statistical mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 112, n. 7, p. 1907–1911, 2015.
- [85] BIRKHOFF, G. D. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 17, n. 12, p. 656–660, 1931.
- [86] NEUMANN, J. v. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 18, n. 1, p. 70–82, 1932.
- [87] MONROE, C. W.; NEWMAN, J. An introduction to the onsager reciprocal relations. *Chemical Engineering Education*, v. 41, n. 4, p. 233–238, 2007.
- [88] SCARGLE, J. D. Studies in astronomical time series analysis. iii - Fourier transforms, autocorrelation functions, and cross-correlation functions of unevenly spaced data. *Astrophysical Journal, Part 1, Aug. 15, 1989*, v. 343, p. 874–887, 1989. ISSN 0004-637X.

- [89] ONSAGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 37, p. 405–426, Feb 1931.
- [90] ONSAGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. ii. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 38, p. 2265–2279, Dec 1931.
- [91] GROOT, S. R. D.; MAZUR, P. *Non-equilibrium thermodynamics*. New York: Dover Publications, 1984.
- [92] GREEN, M. S. Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena. *Journal of Chemical Physics*, American Institute of Physics, v. 20, n. 8, p. 1281–1295, 1952.
- [93] GREEN, M. S. Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena. ii. irreversible processes in fluids. *Journal of Chemical Physics*, v. 22, n. 3, p. 398–413, 1954.
- [94] KUBO, R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the physical society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 12, n. 6, p. 570–586, 1957.
- [95] LUTTINGER, J. M. Theory of thermal transport coefficients. *Physical Review*, APS, v. 135, n. 6A, p. A1505, 1964.
- [96] ZWANZIG, R. Time-correlation functions and transport coefficients in statistical mechanics. *Annual Review of Physical Chemistry*, v. 16, n. 1, p. 67–102, 1965.
- [97] MORAIS, A. F. et al. Non-newtonian fluid flow through three-dimensional disordered porous media. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 19, p. 194502, 2009.
- [98] LORENZ, C. D.; ZIFF, R. M. Precise determination of the critical percolation threshold for the three-dimensional “Swiss cheese” model using a growth algorithm. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 114, n. 8, p. 3659–3661, 2001.
- [99] SEYBOLD, H. J. et al. Localization in flow of non-newtonian fluids through disordered porous media. *Frontiers in Physics*, Frontiers Media SA, v. 9, p. 635051, 2021. ISSN 2296-424X.
- [100] PEIRÓ, J.; SHERWIN, S. Finite difference, finite element and finite volume methods for partial differential equations. In: *Handbook of Materials Modeling: methods*. Berlin: Springer, 2005. p. 2415–2446.
- [101] SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford, UK: Oxford University Press, 1985.

- [102] HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- [103] VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. [S.l.]: Pearson education, 2007.
- [104] KOLDITZ, O. Finite volume method. *Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, p. 173–190, 2002.
- [105] NICHOLS, B. D.; HIRT, C. W. Methods for calculating multidimensional, transient free surface flows past bodies. v. 20, 1975.
- [106] HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 39, n. 1, p. 201–225, 1981. ISSN 0021-9991.
- [107] RAEINI, A. Q.; BLUNT, M. J.; BIJELJIC, B. Modelling two-phase flow in porous media at the pore scale using the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 231, n. 17, p. 5653–5668, 2012.
- [108] GAROOSI, F.; HOOMAN, K. Numerical simulation of multiphase flows using an enhanced volume-of-fluid (vof) method. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 215, p. 106956, 2022. ISSN 0020-7403.
- [109] BAN, S.; PAO, W.; NASIF, M. S. Numerical simulation of two-phase flow regime in horizontal pipeline and its validation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Emerald Publishing Limited, 2018.
- [110] AMBEKAR, A. S.; MATTEY, P.; BUWA, V. V. Pore-resolved two-phase flow in a pseudo-3d porous medium: Measurements and volume-of-fluid simulations. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 230, p. 116128, 2021.
- [111] AMBEKAR, A. S.; MONDAL, S.; BUWA, V. V. Pore-resolved volume-of-fluid simulations of two-phase flow in porous media: Pore-scale flow mechanisms and regime map. *Physics of Fluids*, AIP Publishing LLC, v. 33, n. 10, p. 102119, 2021.
- [112] GOPALA, V. R.; WACHEM, B. G. V. Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows. *Chemical Engineering Journal*, Elsevier, v. 141, n. 1-3, p. 204–221, 2008.
- [113] RENARDY, M.; RENARDY, Y.; LI, J. Numerical simulation of moving contact line problems using a volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 171, n. 1, p. 243–263, 2001.
- [114] PILLER, M. et al. Pore-scale simulation of laminar flow through porous media. *Journal of Physics: conference series*, v. 501, n. 1, p. 012010, apr. 2014.

- [115] CARLSON, A.; KUDINOV, P.; NARAYANAN, C. Prediction of two-phase flow in small tubes: a systematic comparison of state-of-the-art CMFD codes. 5th European Thermal-Sciences Conference, Netherlands, p. 126–130, 2008.
- [116] ANISZEWSKI, W.; MÉNARD, T.; MAREK, M. Volume of fluid (vof) type advection methods in two-phase flow: A comparative study. *Computers & Fluids*, v. 97, p. 52–73, 2014. ISSN 0045-7930.
- [117] KHODAPARAST, S. *et al.* Dynamics of isolated confined air bubbles in liquid flows through circular microchannels: an experimental and numerical study. *Microfluidics and Nanofluidics*, Springer, v. 19, p. 209–234, 2015.
- [118] EGGERSDORFER, M. L. *et al.* Wetting controls of droplet formation in step emulsification. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 115, n. 38, p. 9479–9484, 2018.
- [119] SALES, J. M. A. *et al.* Bubble dynamics in stationary two-phase flow through disordered porous media. *Frontiers in Physics*, v. 10, 2022. ISSN 2296-424X.
- [120] BRACKBILL, J. U.; KOTHE, D. B.; ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 100, n. 2, p. 335–354, 1992.
- [121] COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.
- [122] GODUNOV, S. K.; RYABENKII, V. S. *Difference schemes: an introduction to the underlying theory*. Amsterdam: Elsevier, 1987.
- [123] TALLAKSTAD, K. T. *et al.* Steady-state two-phase flow in porous media: Statistics and transport properties. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 102, p. 074502, Feb 2009.
- [124] COMBE, G. *et al.* Experimental validation of a nonextensive scaling law in confined granular media. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 238301, Dec 2015.
- [125] STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. United States: CRC Press, 1994.
- [126] WINKLER, M. *et al.* Onsager-symmetry obeyed in athermal mesoscopic systems: two-phase flow in porous media. *Frontiers in Physics*, Frontiers Media SA, v. 8, p. 60, 2020. ISSN 2296-424X.
- [127] LENK, R. S. *Polymer Rheology*. London: Springer Science & Business Media, 1978. ISBN 978-0-85334-765-1.

- [128] EBERHARD, U. *et al.* Determination of the effective viscosity of non-newtonian fluids flowing through porous media. *Frontiers in Physics*, Frontiers Media SA, v. 7, p. 71, 2019. ISSN 2296-424X.
- [129] TERRY, R. E.; ROGERS, J. B.; CRAFT, B. C. *Applied petroleum reservoir engineering*. United States: Prentice Hall, 1991.
- [130] CHIERICI, G. L. Novel Relations for Drainage and Imbibition Relative Permeabilities. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 24, n. 03, p. 275–276, 06 1984. ISSN 0197-7520.
- [131] SMITH, G. E. Fluid Flow and Sand Production in Heavy-Oil Reservoirs Under Solution-Gas Drive. *SPE Production Engineering*, v. 3, n. 02, p. 169–180, 05 1988. ISSN 0885-9221.
- [132] SARMA, H.; MAINI, B. Role of Solution Gas In Primary Production of Heavy Oils. All Days, p. SPE–23631–MS, 03 1992.
- [133] LV, W. *et al.* Experimental study on factors affecting the performance of foamy oil recovery. *Energies*, v. 12, n. 4, 2019. ISSN 1996-1073.
- [134] HOSKING, J. R. M. Fractional differencing. *Biometrika*, v. 68, n. 1, p. 165–176, 04 1981. ISSN 0006-3444.
- [135] ROUX, S.; GUYON, E. Temporal development of invasion percolation. *Journal of Physics A: mathematical and general*, IOP Publishing, v. 22, n. 17, p. 3693, 1989.
- [136] ARAÚJO, A. D.; ANDRADE, J. S.; HERRMANN, H. J. Multiple invaded consolidating materials. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 70, p. 066150, Dec 2004.
- [137] PENG, C.-K. *et al.* Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical review e*, APS, v. 49, n. 2, p. 1685, 1994.
- [138] SETTY, V. A.; SHARMA, A. S. Characterizing detrended fluctuation analysis of multifractional Brownian motion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 419, p. 698–706, 2015.
- [139] BULDYREV, S. V. *et al.* Long-range correlation properties of coding and noncoding DNA sequences: GenBank analysis. *Physical Review E*, APS, v. 51, n. 5, p. 5084, 1995.
- [140] KANTELHARDT, J. W. *et al.* Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 316, n. 1, p. 87–114, 2002.
- [141] FLEKKØY, E. G.; PRIDE, S. R. Reciprocity and cross coupling of two-phase flow in porous media from onsager theory. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 60, p. 4130–4137, Oct 1999.

- [142] SAVANI, I. *et al.* Ensemble distribution for immiscible two-phase flow in porous media. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 95, p. 023116, Feb 2017.
- [143] SAVANI, I. *et al.* A monte carlo algorithm for immiscible two-phase flow in porous media. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 116, p. 869–888, 2017.
- [144] MCCLURE, J. E.; BERG, S.; ARMSTRONG, R. T. Thermodynamics of fluctuations based on time-and-space averages. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 104, p. 035106, Sep 2021.
- [145] MCCLURE, J. E.; BERG, S.; ARMSTRONG, R. T. Capillary fluctuations and energy dynamics for flow in porous media. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 33, n. 8, 2021.
- [146] CHAKRABORTY, D. Velocity autocorrelation function of a Brownian particle. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 83, p. 375–380, 2011.
- [147] BATISTA, C. A. *Métodos emergentes de física-estatística aplicados a séries temporais*. Dissertação (Mestrado em Biometria) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2006. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/4531>. Acesso em: 19 ago. 2023.
- [148] KANTELHARDT, J. W. *et al.* Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 295, n. 3, p. 441–454, 2001.
- [149] BULDYREV, S. V. *et al.* Analysis of DNA sequences using methods of statistical physics. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 249, n. 1, p. 430–438, 1998.
- [150] PENG, C.-K. *et al.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*, AIP, v. 5, n. 1, p. 82–87, 1995.
- [151] ASHKENAZY, Y. *et al.* Discrimination between healthy and sick cardiac autonomic nervous system by detrended heart rate variability analysis. *Fractals*, World Scientific, v. 7, n. 01, p. 85–91, 1999.
- [152] BLESIC, S. *et al.* Detrended fluctuation analysis of time series of a firing fusimotor neuron. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 268, n. 3, p. 275–282, 1999.
- [153] PENG, C.-K. *et al.* Multiple-time scales analysis of physiological time series under neural control. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 249, n. 1, p. 491–500, 1998.

- [154] HAUSDORFF, J. M. *et al.* Altered fractal dynamics of gait: reduced stride-interval correlations with aging and Huntington's disease. *Journal of applied physiology*, Am Physiological Soc, v. 82, n. 1, p. 262–269, 1997.
- [155] KOSCIELNY-BUNDE, E. *et al.* Long-range power-law correlations in local daily temperature fluctuations. *Philosophical Magazine B*, Taylor & Francis, v. 77, n. 5, p. 1331–1340, 1998.
- [156] TALKNER, P.; WEBER, R. O. Power spectrum and detrended fluctuation analysis: Application to daily temperatures. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 1, p. 150, 2000.
- [157] IVANOVA, K.; AUSLOOS, M. Application of the detrended fluctuation analysis (DFA) method for describing cloud breaking. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 274, n. 1, p. 349–354, 1999.
- [158] IVANOVA, K. *et al.* Break-up of stratus cloud structure predicted from non-Brownian motion liquid water and brightness temperature fluctuations. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 52, n. 1, p. 40, 2000.
- [159] LIU, Y. *et al.* Correlations in economic time series. *Physica A: statistical statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 245, n. 3-4, p. 437–440, 1997.
- [160] AUSLOOS, M. *et al.* Applications of statistical physics to economic and financial topics. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 274, n. 1, p. 229–240, 1999.
- [161] KANTELHARDT, J. W. *et al.* Are the phases in the Anderson model long-range correlated? *Physica A: statistical mechanics and its applications*, Elsevier, v. 266, n. 1, p. 461–464, 1999.
- [162] VANDEWALLE, N. *et al.* Non-Gaussian behavior and anticorrelations in ultrathin gate oxides after soft breakdown. *Applied Physics Letters*, AIP, v. 74, n. 11, p. 1579–1581, 1999.
- [163] HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, v. 116, n. 1, p. 770–799, 1951.
- [164] HURST, H. E. Long term storage: an experimental study. *Journal of the Royal Statistical Society: series A (General)*, v. 129, n. 4, p. 591–593, 1965.
- [165] KATZ, V. J. The history of Stokes' theorem. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, v. 52, n. 3, p. 146–156, 1979.
- [166] BYRON, F. W.; FULLER, R. W. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. New York: Dover Publications, 1992. ISBN 0-486-67164-X.

APÊNDICE A – SÉRIES TEMPORAIS DAS VELOCIDADES NO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UM MEIO POROSO

Nos gráficos a seguir vemos as séries temporais das velocidades (média volumétrica) da mistura e de ambas as fases no escoamento bifásico em um meio poroso bidimensional para alguns dos casos descritos no capítulo 4. Essas séries temporais são calculadas através das Equações (4.7), (4.9) e (4.11), dadas por

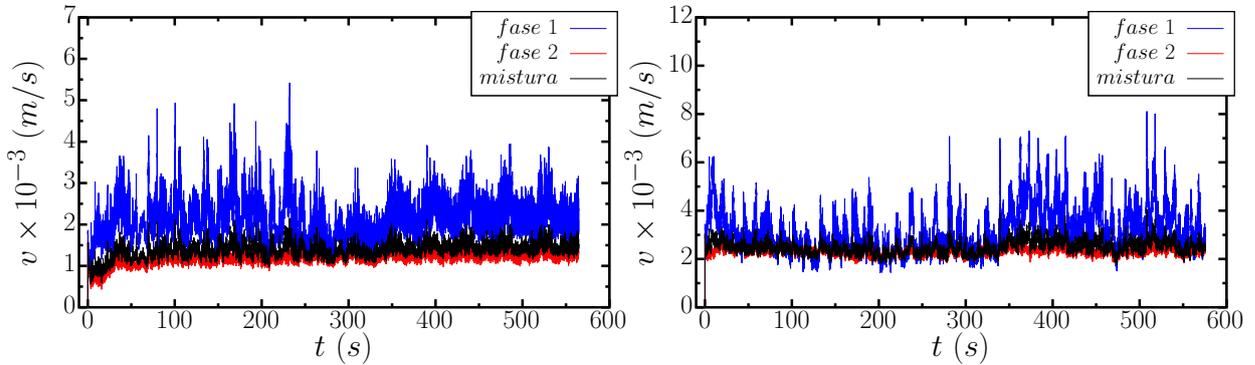
$$v^{(1)}(t) = \frac{1}{\Omega_1} \int_{\Omega} u_x(\vec{x}, t) s(\vec{x}, t) d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

$$v^{(2)}(t) = \frac{1}{\Omega_2} \int_{\Omega} u_x(\vec{x}, t) [1 - s(\vec{x}, t)] d\Omega \quad (\text{A.2})$$

e

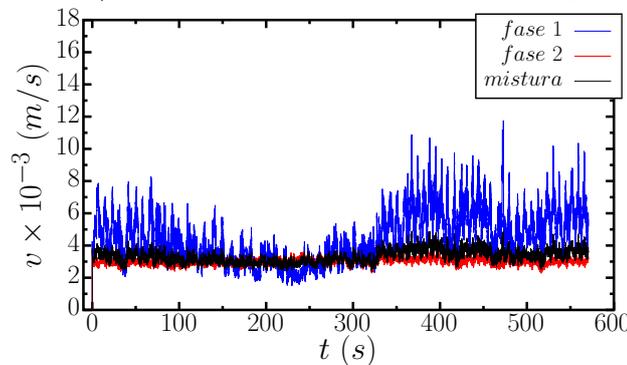
$$v^{(m)}(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_x(\vec{x}, t) d\Omega. \quad (\text{A.3})$$

Gráfico 15 – Velocidade média em função do tempo para $M = 10$ e $\gamma = 10^{-1} N/m$.



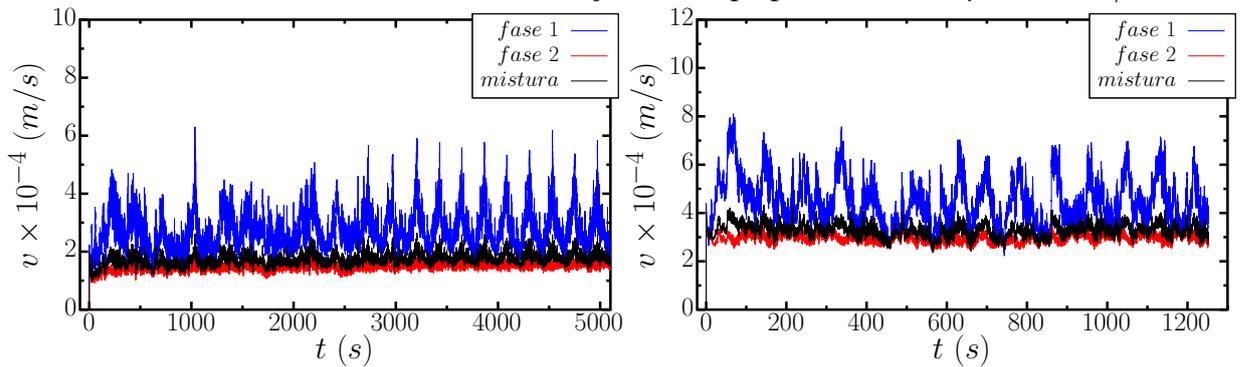
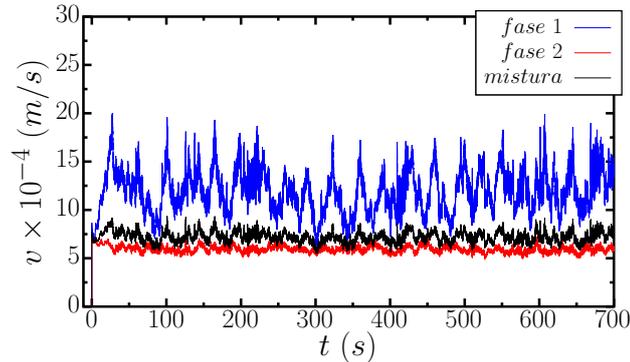
(a) $\nabla p = 2000 Pa/m$.

(b) $\nabla p = 4000 Pa/m$.

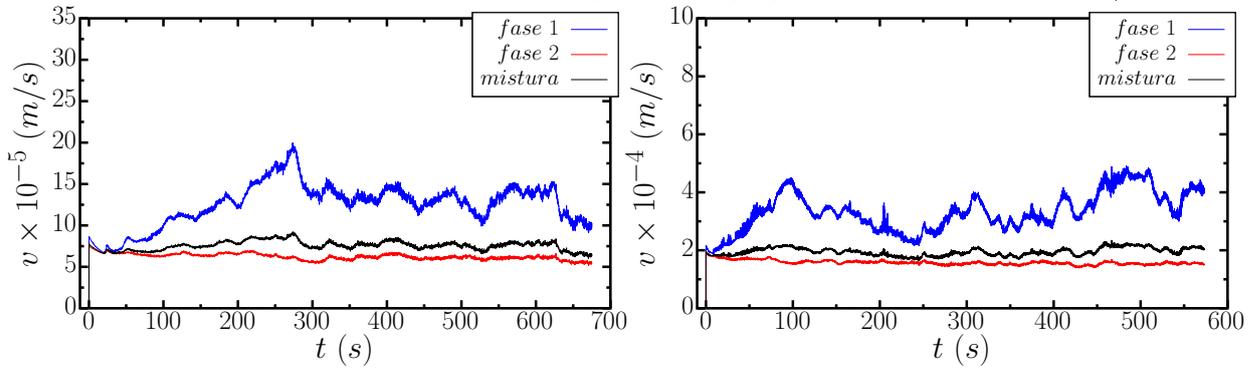
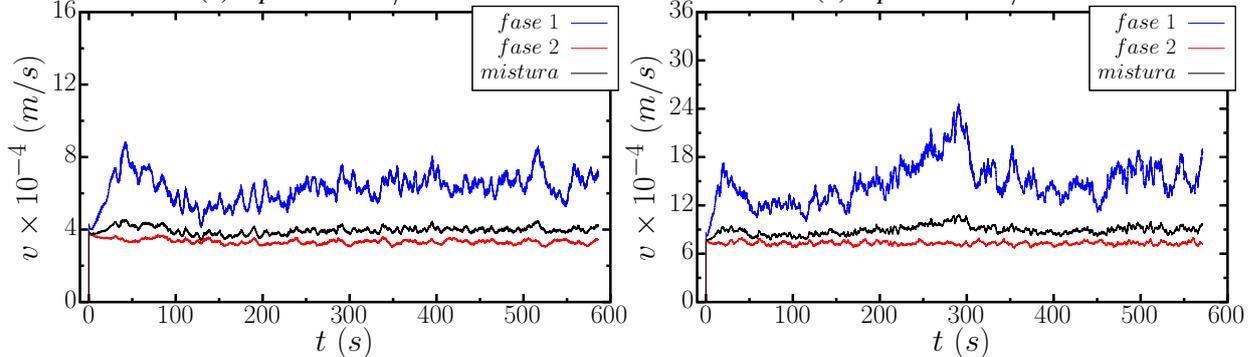


(c) $\nabla p = 5000 Pa/m$.

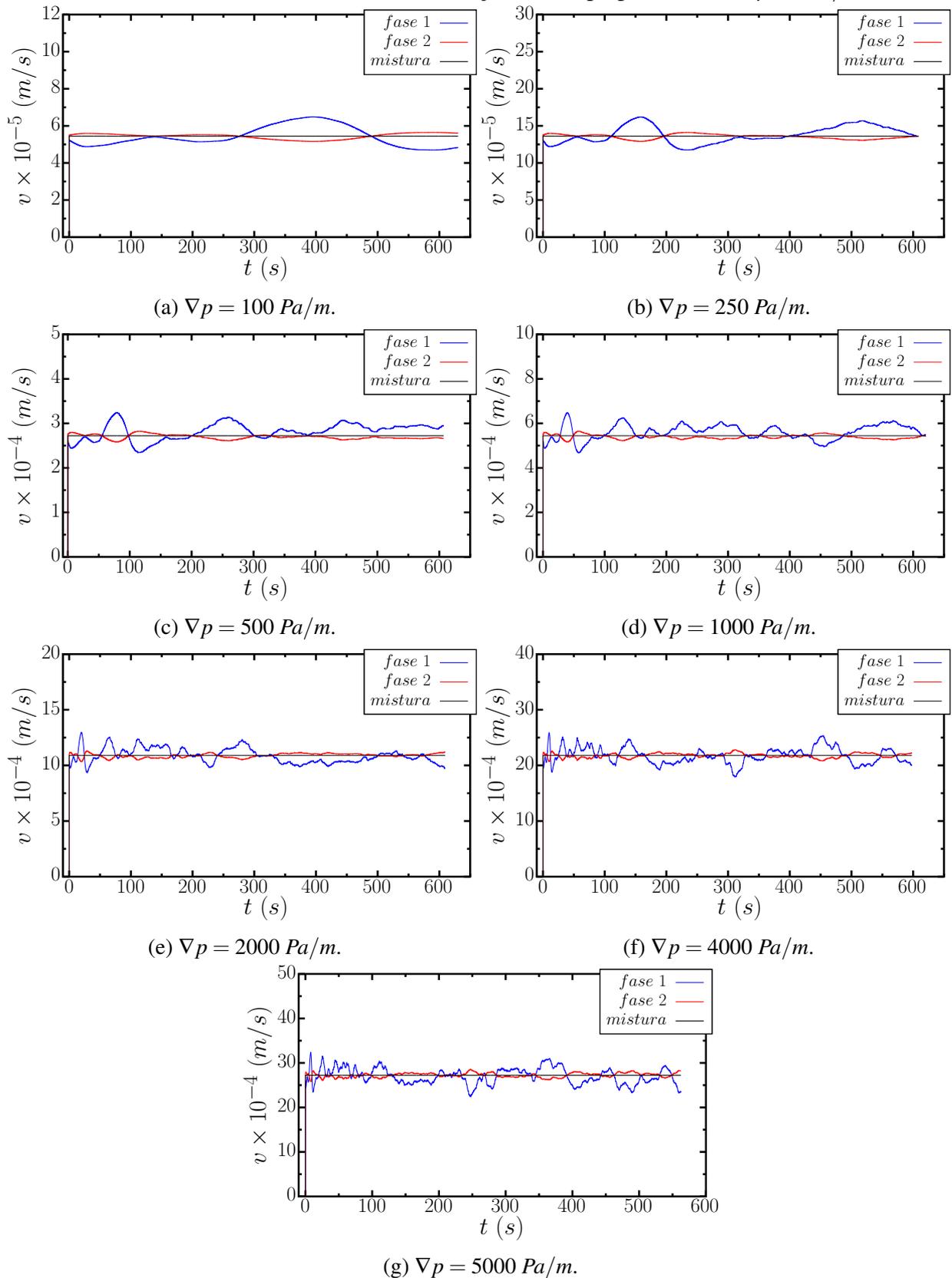
Gráficos das séries temporais das velocidades da mistura e de ambas as fases, para $M = 10$, $\gamma = 10^{-1} N/m$, $S_1 = 0,2$ e alguns valores de gradiente de pressão. Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 16 – Velocidade média em função do tempo para $M = 10$ e $\gamma = 10^{-2} N/m$.(a) $\nabla p = 250 Pa/m$.(b) $\nabla p = 500 Pa/m$.(c) $\nabla p = 1000 Pa/m$.

Gráficos das séries temporais das velocidades da mistura e de ambas as fases, para $M = 10$, $\gamma = 10^{-2} N/m$, $S_1 = 0,2$ e alguns valores de gradiente de pressão. Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 17 – Velocidade média em função do tempo para $M = 10$ e $\gamma = 10^{-3} N/m$.(a) $\nabla p = 100 Pa/m$.(b) $\nabla p = 250 Pa/m$.(c) $\nabla p = 500 Pa/m$.(d) $\nabla p = 1000 Pa/m$.

Gráficos das séries temporais das velocidades da mistura e de ambas as fases, para $M = 10$, $\gamma = 10^{-3} N/m$, $S_1 = 0,2$ e alguns valores de gradiente de pressão. Fonte: Elaborado pelo autor.

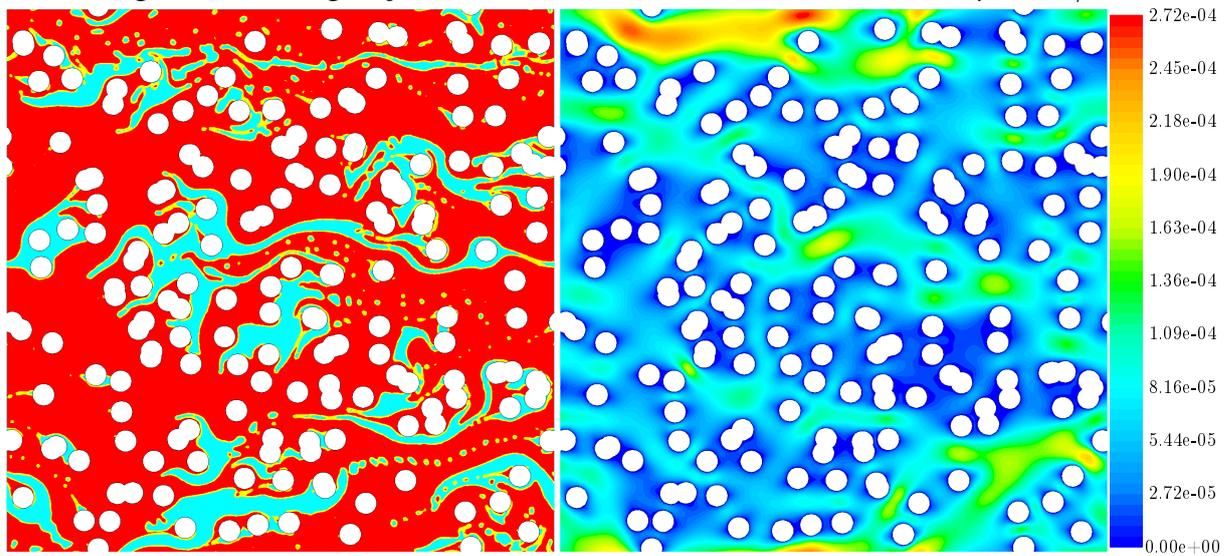
Gráfico 18 – Velocidade média em função do tempo para $M = 1$ e $\gamma = 0$ N/m.

Gráficos das séries temporais das velocidades da mistura e de ambas as fases, para $M = 1$, $\gamma = 0$ N/m, $S_1 = 0,2$ e vários valores de gradiente de pressão. Fonte: Elaborado pelo autor.

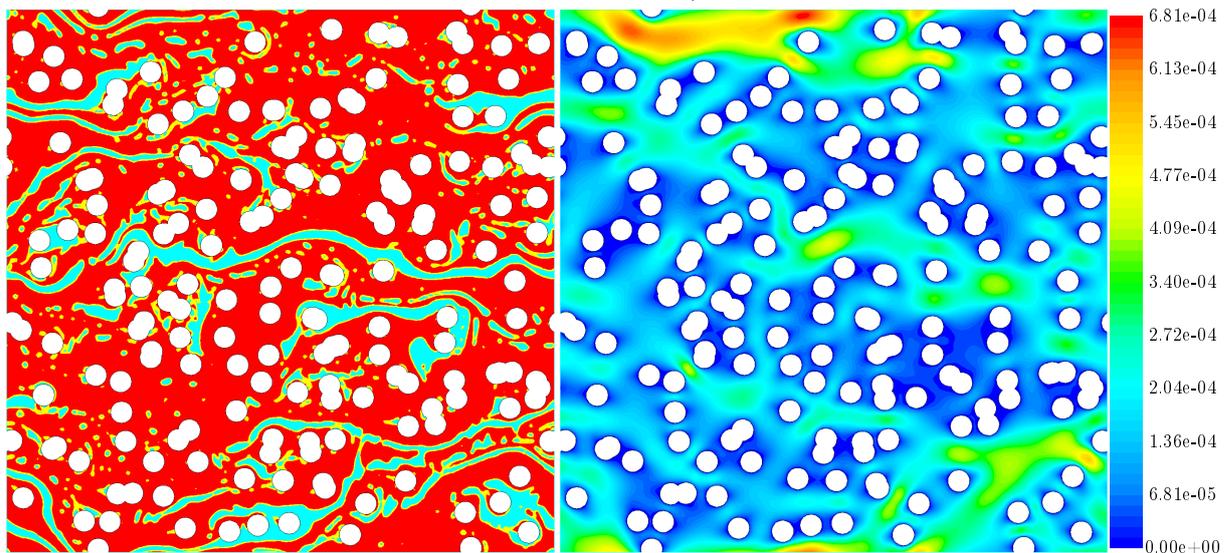
APÊNDICE B – CONTORNOS DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UM MEIO POROSO BIDIMENSIONAL

B.1 Caso $M = 1$; $\gamma = 0 \text{ N/m}$.

Figura 7 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 0 \text{ N/m}$.



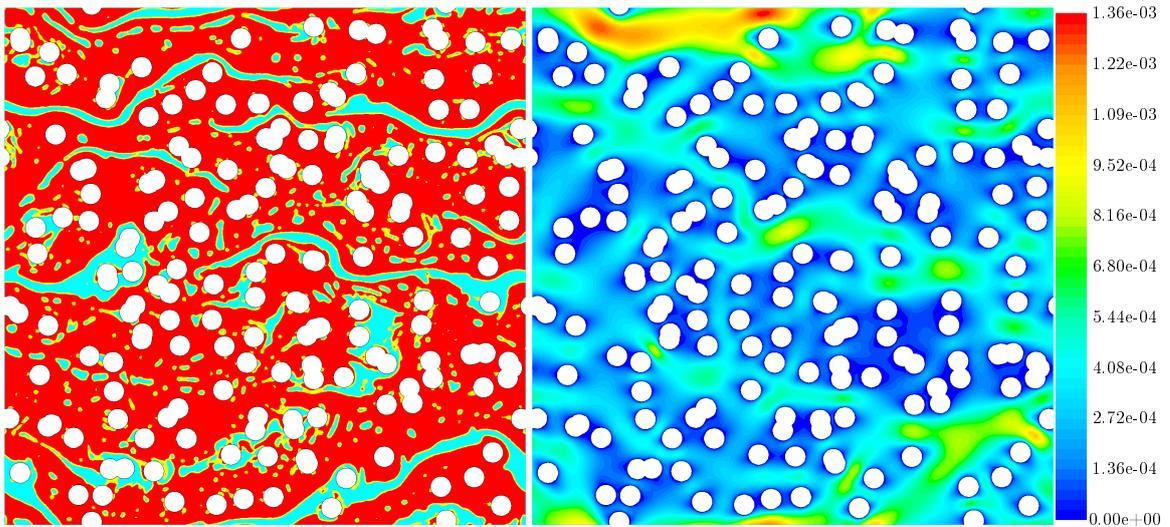
(a) $\nabla p = 100 \text{ Pa/m}$.



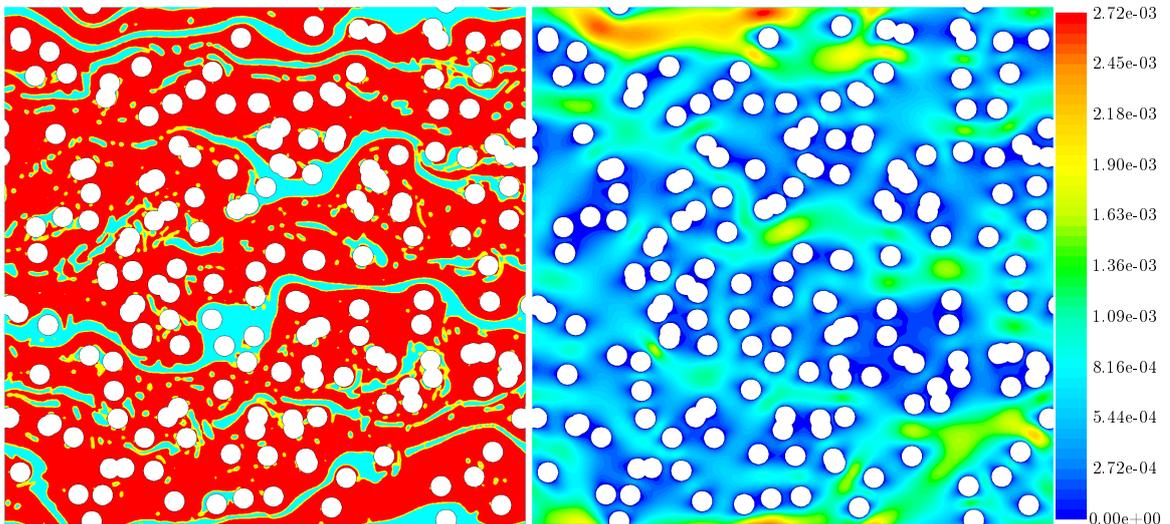
(b) $\nabla p = 250 \text{ Pa/m}$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

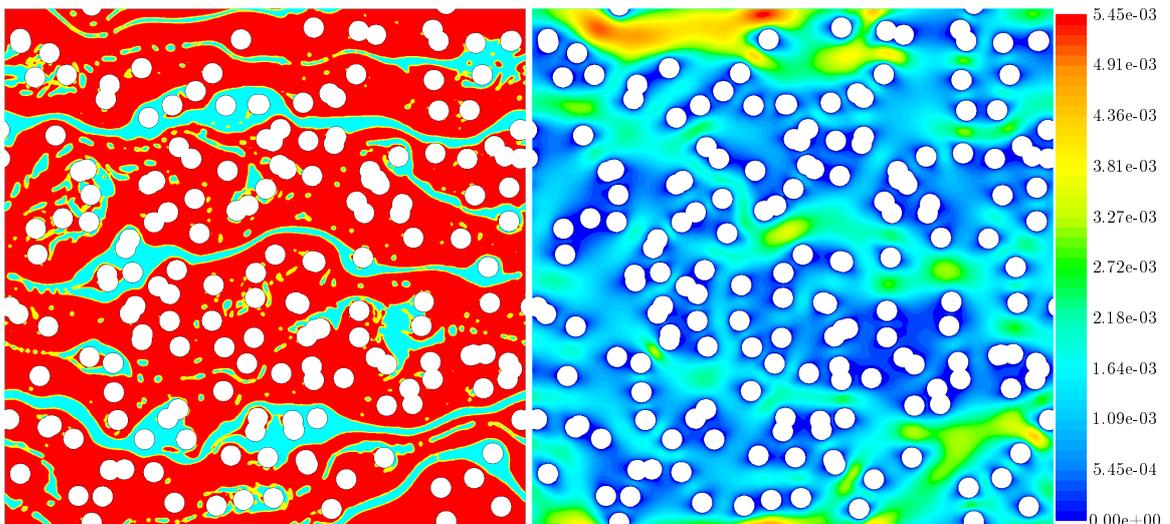
Figura 7 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 0 \text{ N/m}$.



(c) $\nabla p = 500 \text{ Pa/m}$.



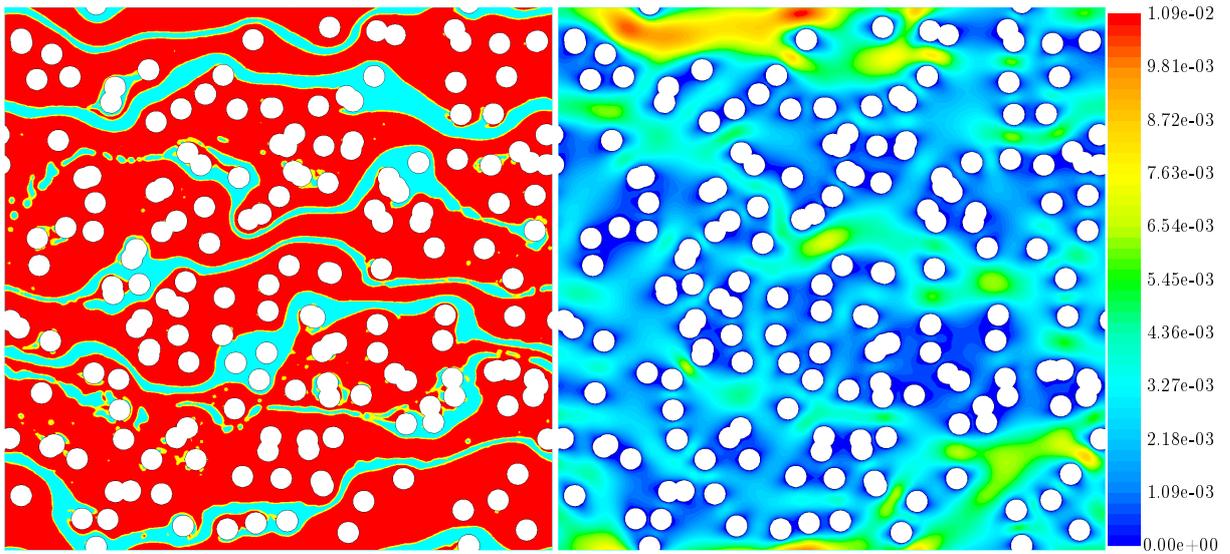
(d) $\nabla p = 1000 \text{ Pa/m}$.



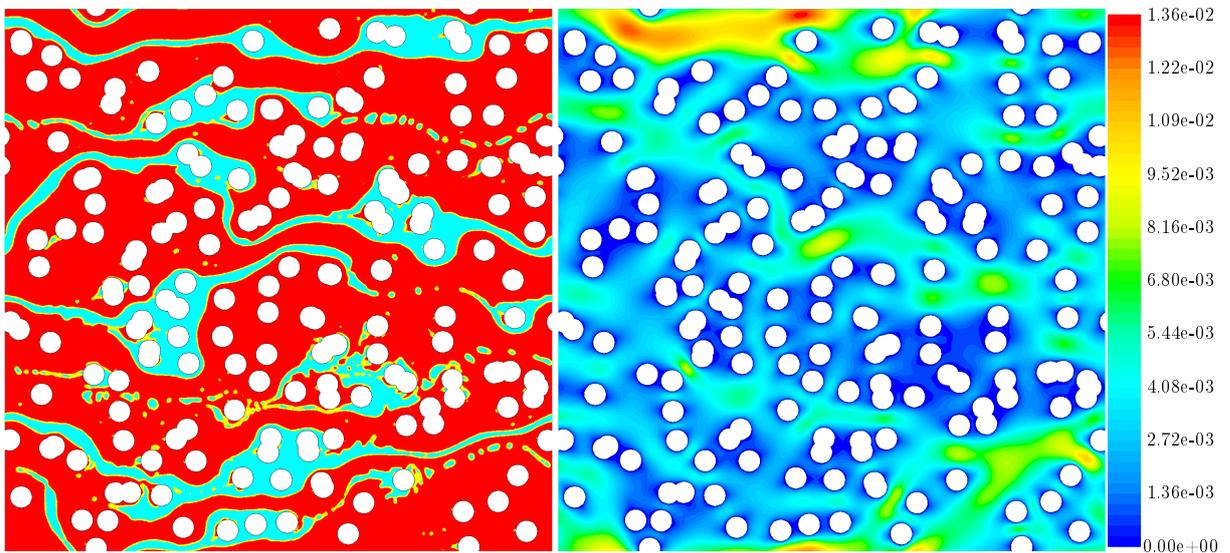
(e) $\nabla p = 2000 \text{ Pa/m}$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

Figura 7 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 0 \text{ N/m}$.



(f) $\nabla p = 4000 \text{ Pa/m}$.

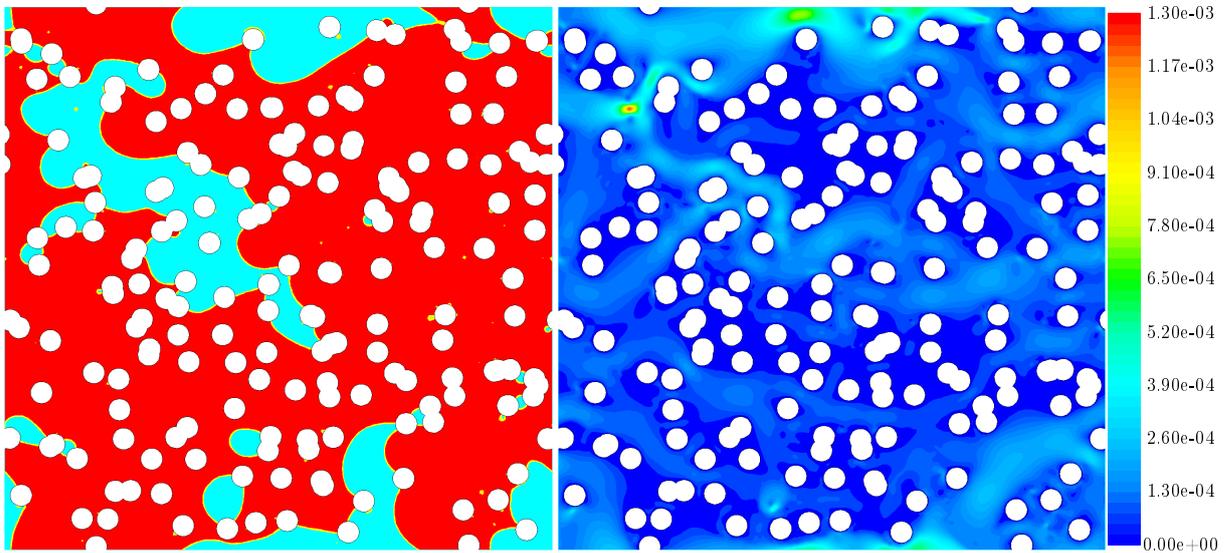


(g) $\nabla p = 5000 \text{ Pa/m}$.

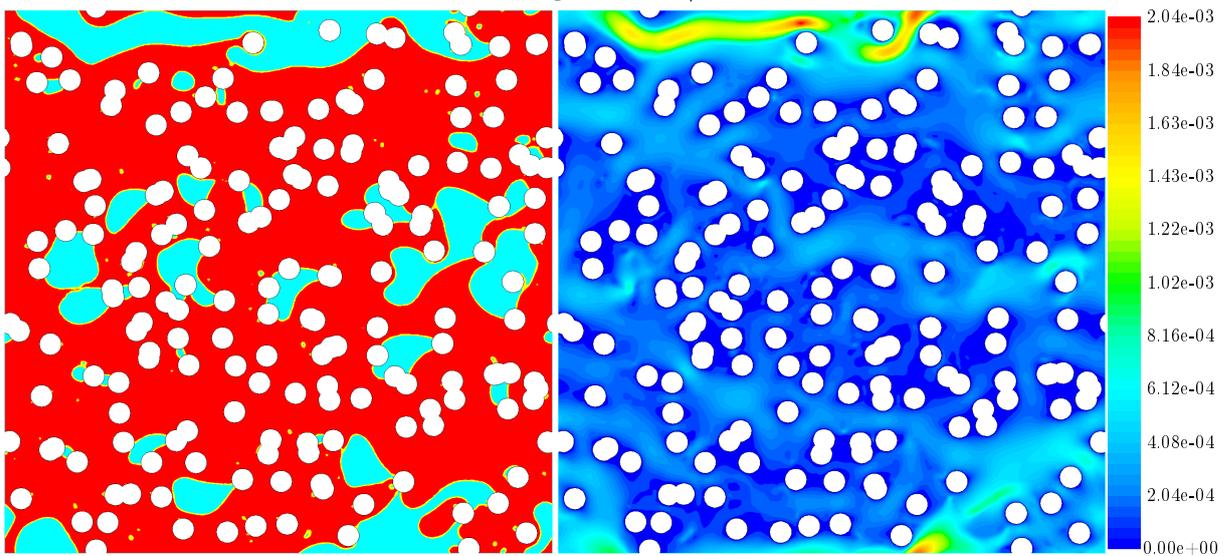
Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

B.2 Caso $M = 10$; $\gamma = 10^{-3} N/m$.

Figura 8 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-3} N/m$.



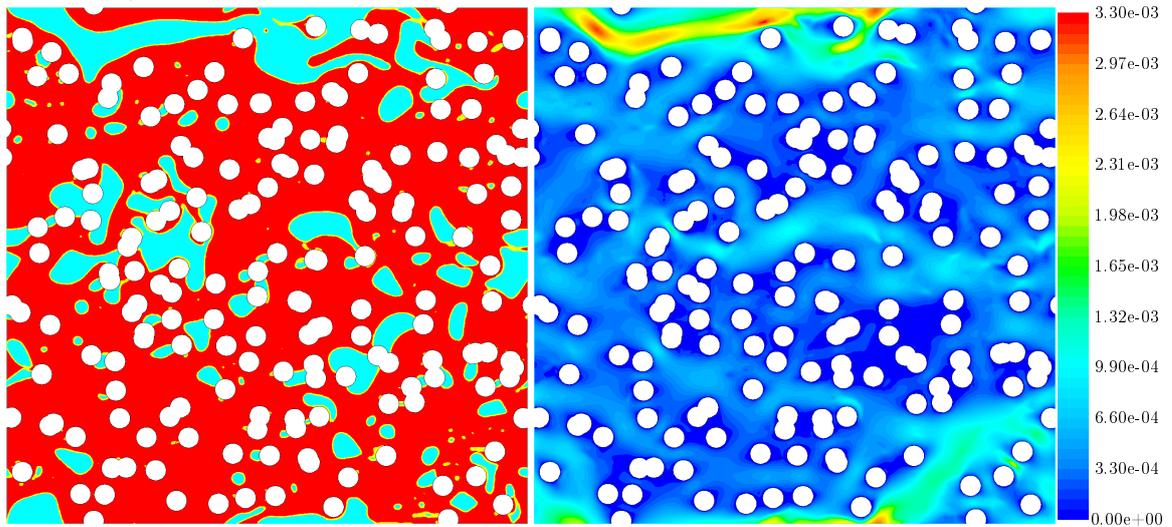
(a) $\nabla p = 100 Pa/m$.



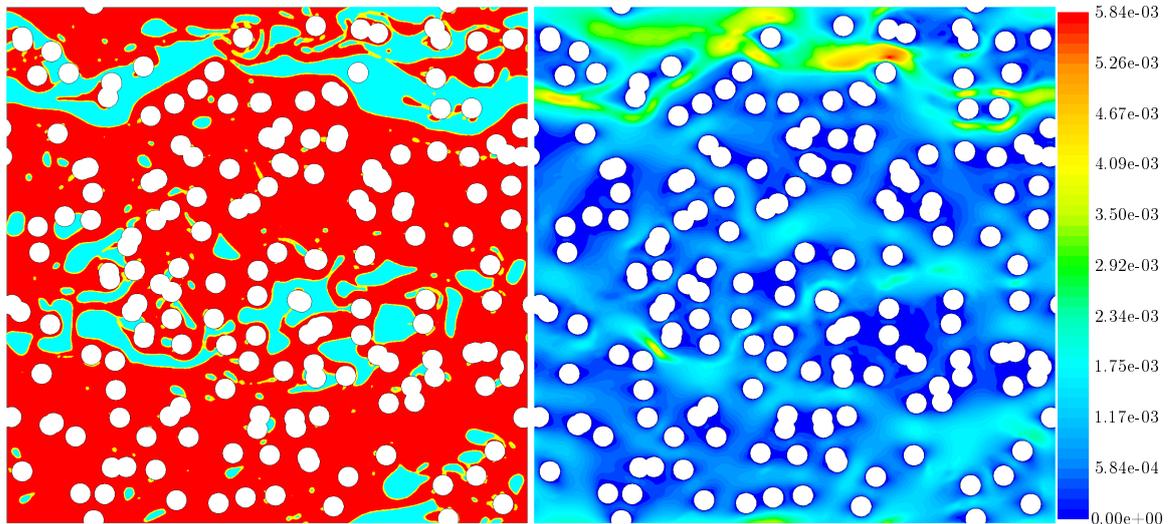
(b) $\nabla p = 250 Pa/m$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-3} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

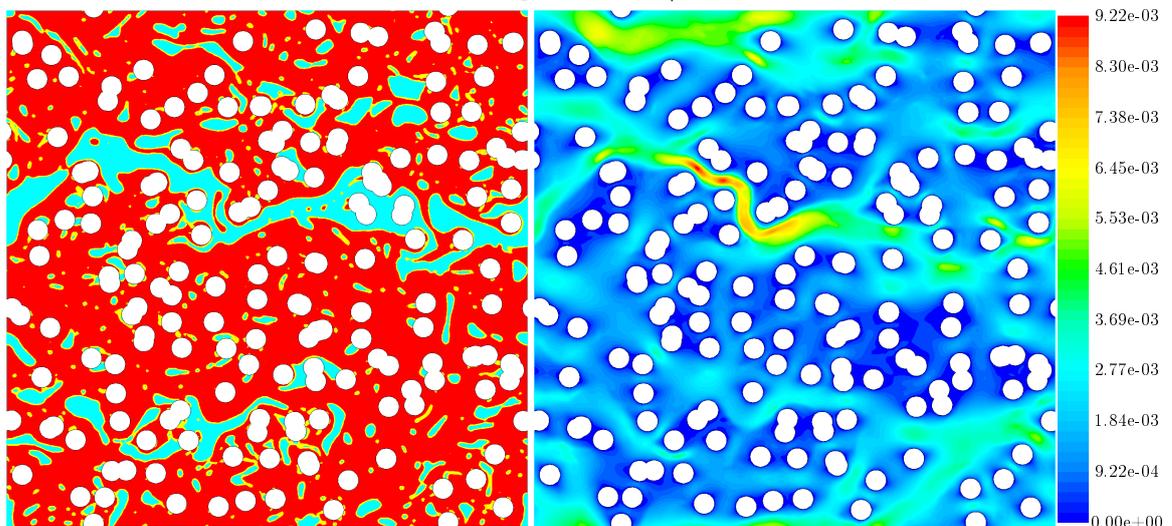
Figura 8 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade;
 $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$.



(c) $\nabla p = 500 \text{ Pa/m}$.



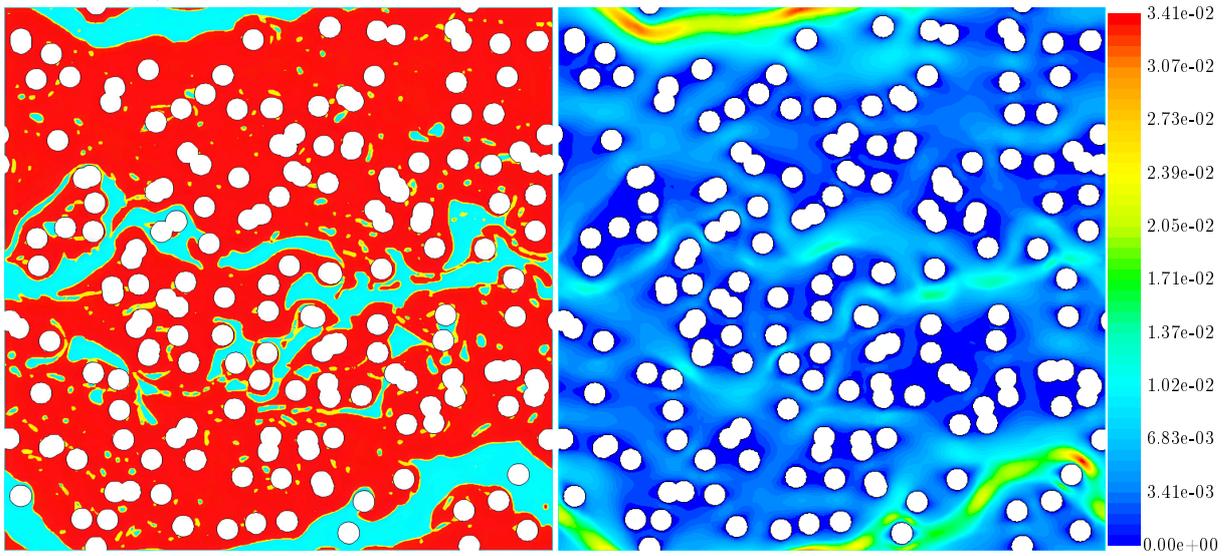
(d) $\nabla p = 1000 \text{ Pa/m}$.



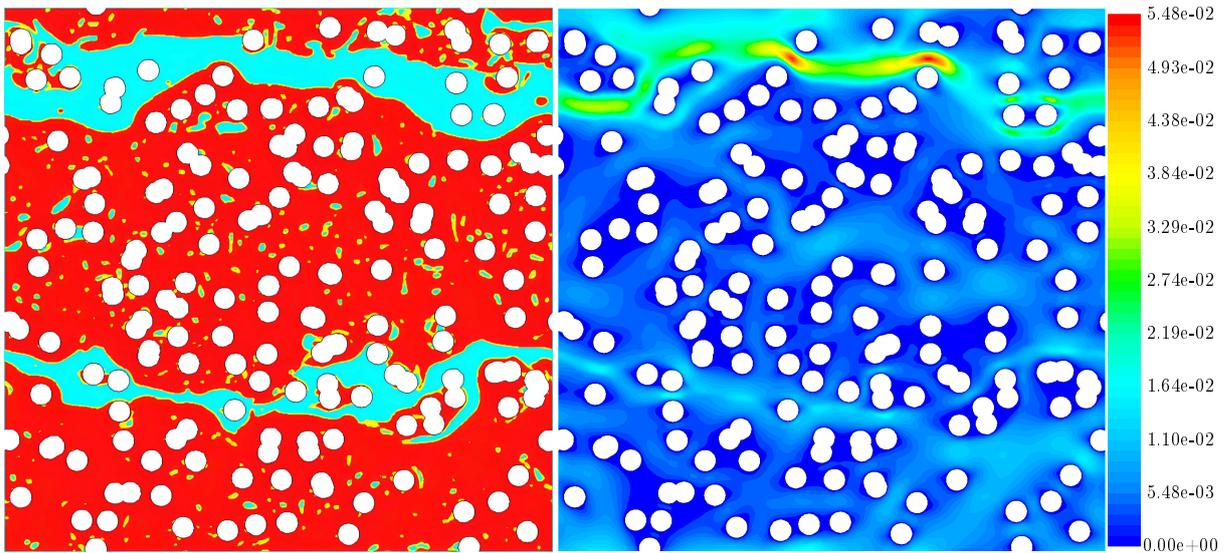
(e) $\nabla p = 2000 \text{ Pa/m}$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

Figura 8 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade;
 $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$.



(f) $\nabla p = 4000 \text{ Pa/m}$.

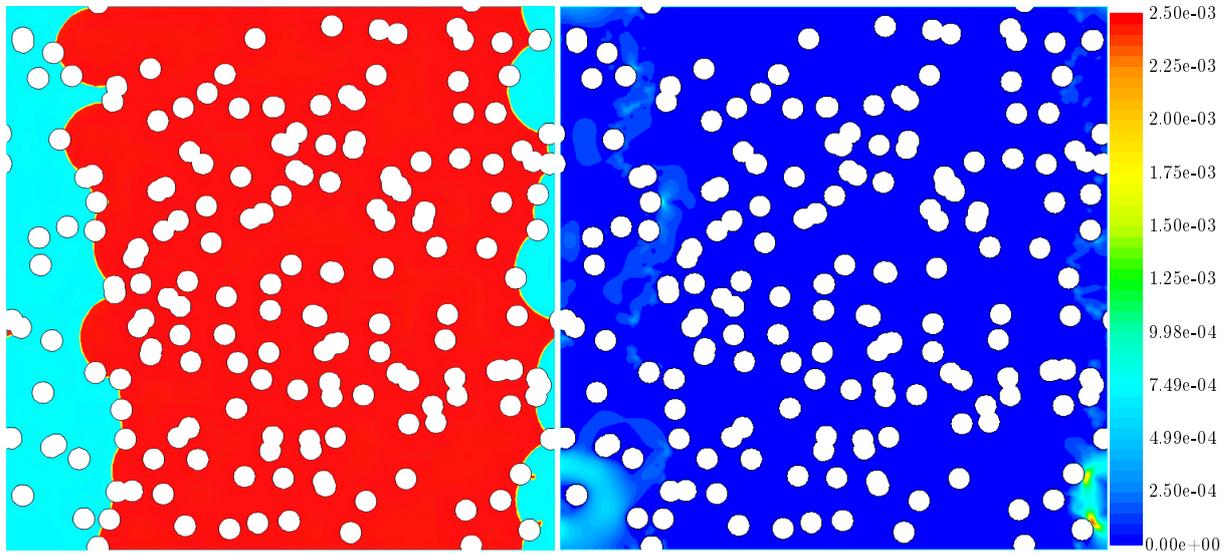


(g) $\nabla p = 5000 \text{ Pa/m}$.

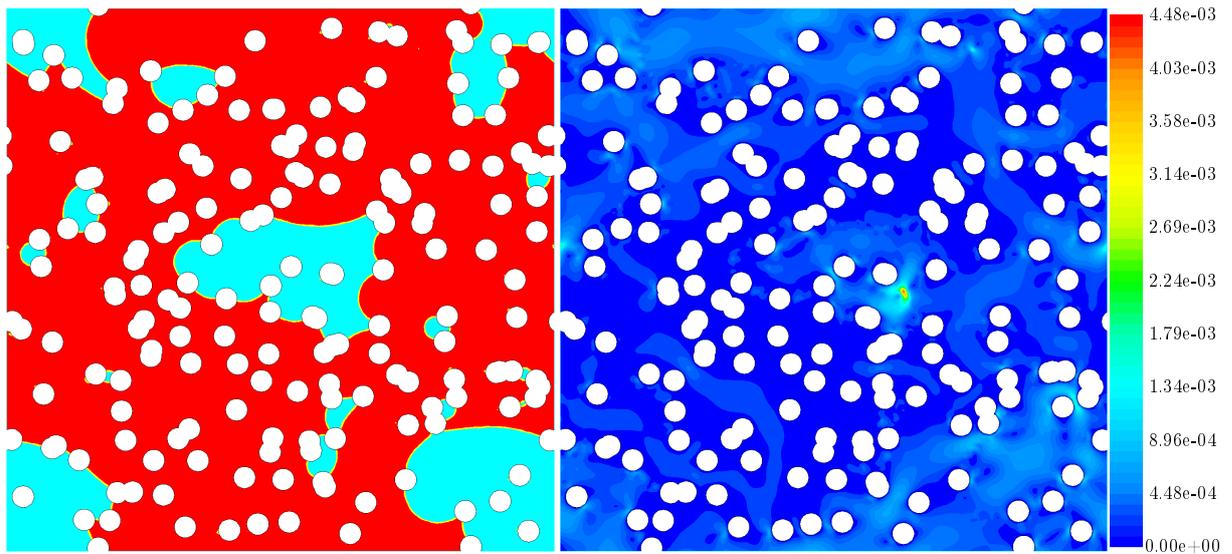
Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-3} \text{ N/m}$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

B.3 Caso $M = 10$; $\gamma = 10^{-2} N/m$.

Figura 9 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-2} N/m$.



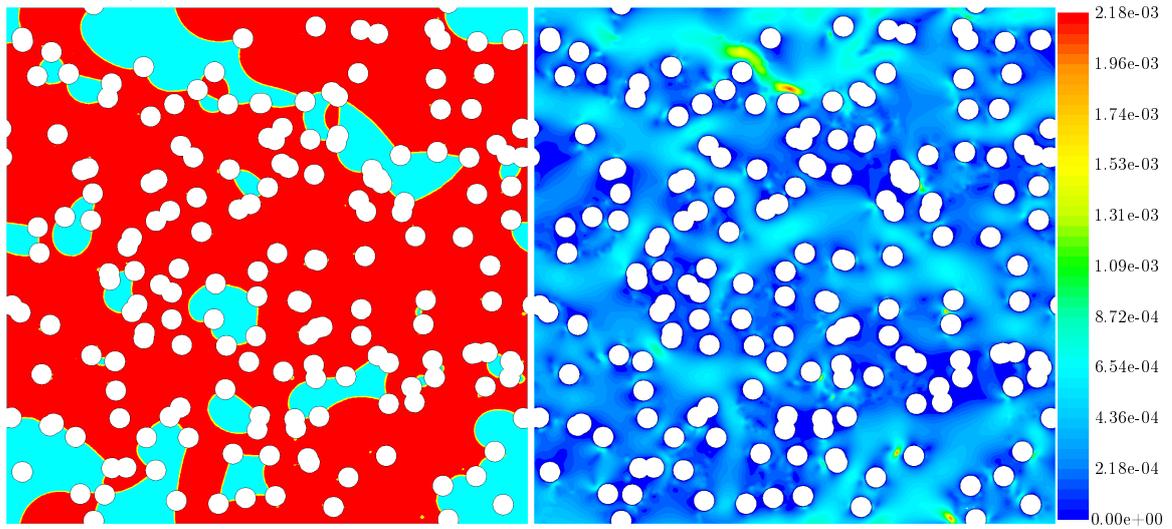
(a) $\nabla p = 100 Pa/m$.



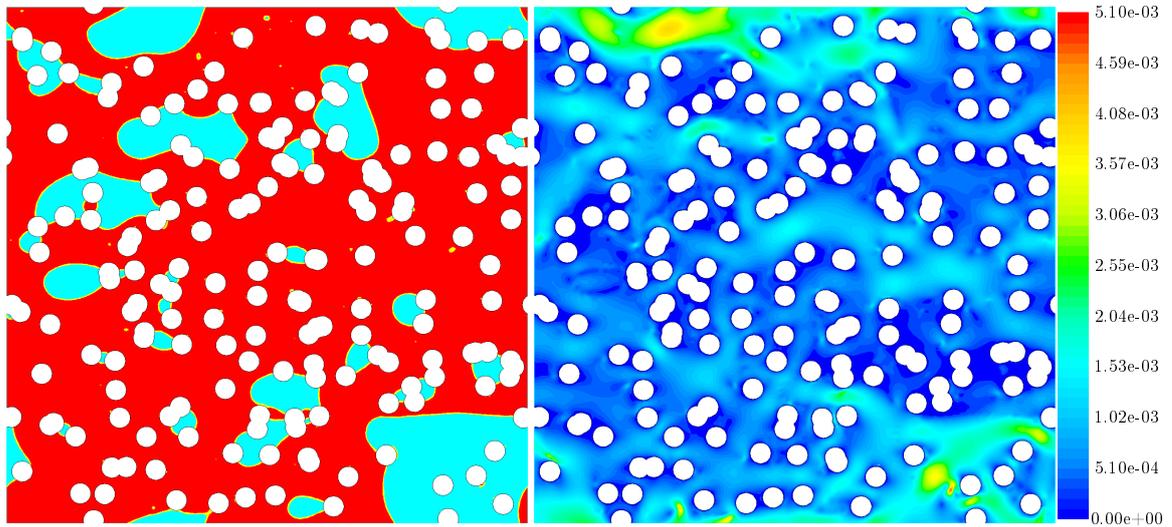
(b) $\nabla p = 250 Pa/m$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-2} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

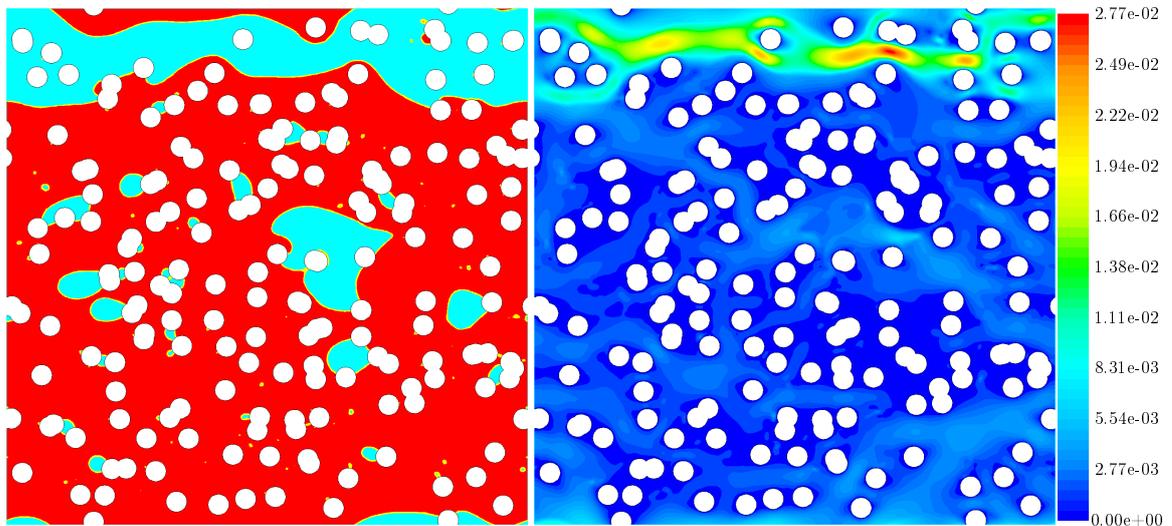
Figura 9 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade;
 $\gamma = 10^{-2} N/m$.



(c) $\nabla p = 500 Pa/m$.



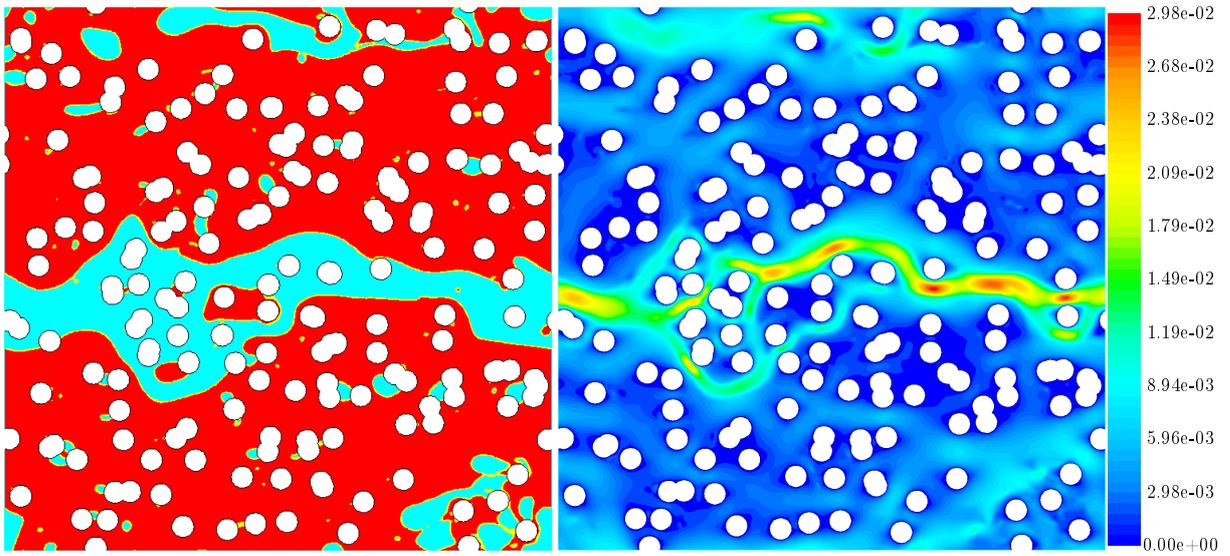
(d) $\nabla p = 1000 Pa/m$.



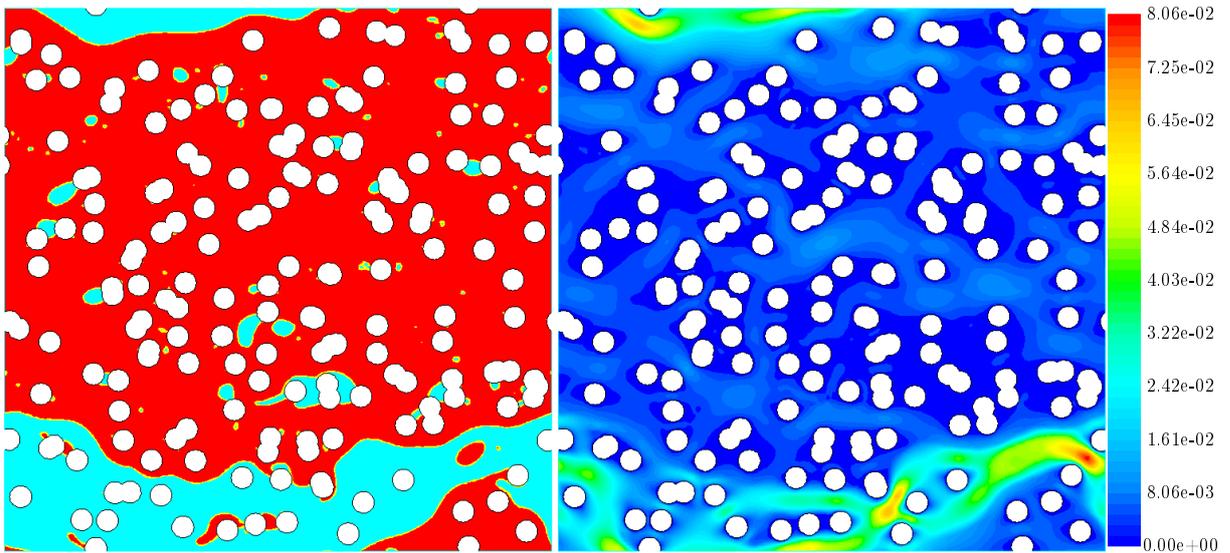
(e) $\nabla p = 2000 Pa/m$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-2} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

Figura 9 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade;
 $\gamma = 10^{-2} N/m$.



(f) $\nabla p = 4000 Pa/m$.

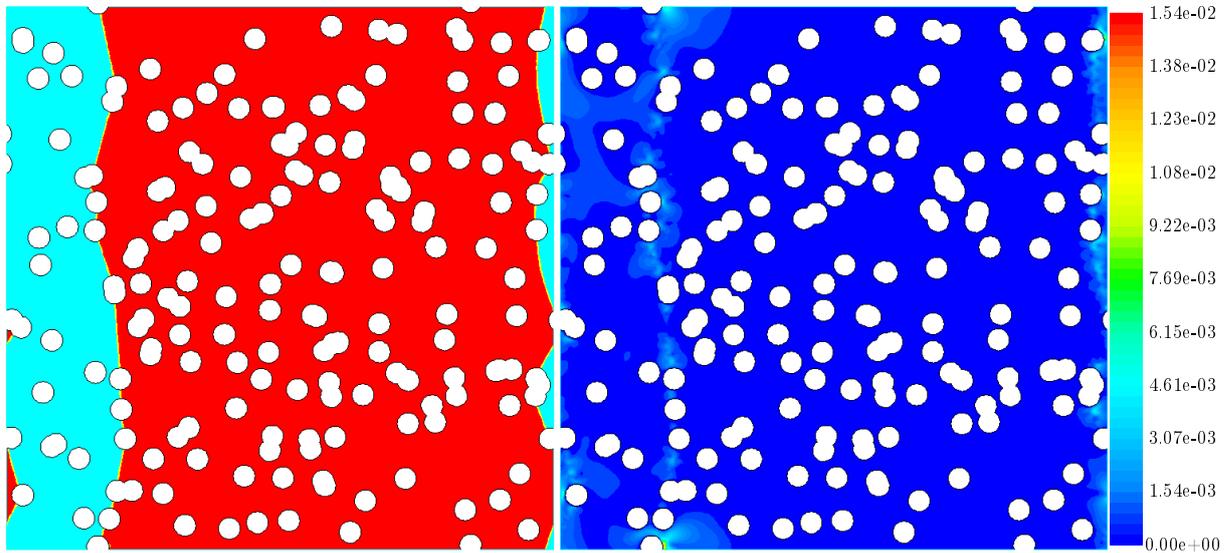


(g) $\nabla p = 5000 Pa/m$.

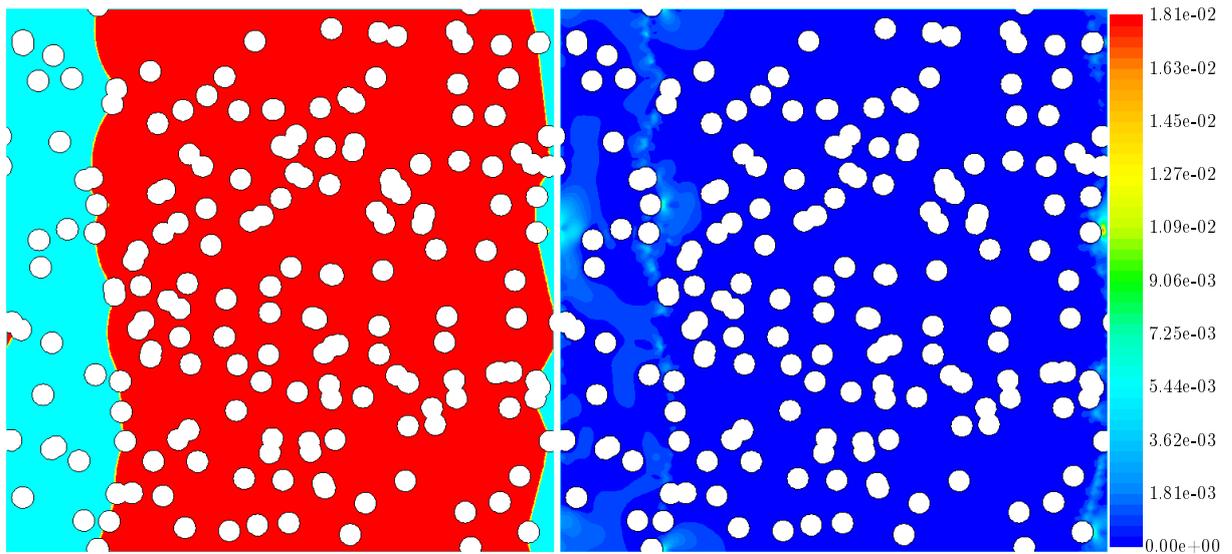
Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-2} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

B.4 Caso $M = 10$; $\gamma = 10^{-1} N/m$.

Figura 10 – Configuração do escoamento e contorno da velocidade; $\gamma = 10^{-1} N/m$.



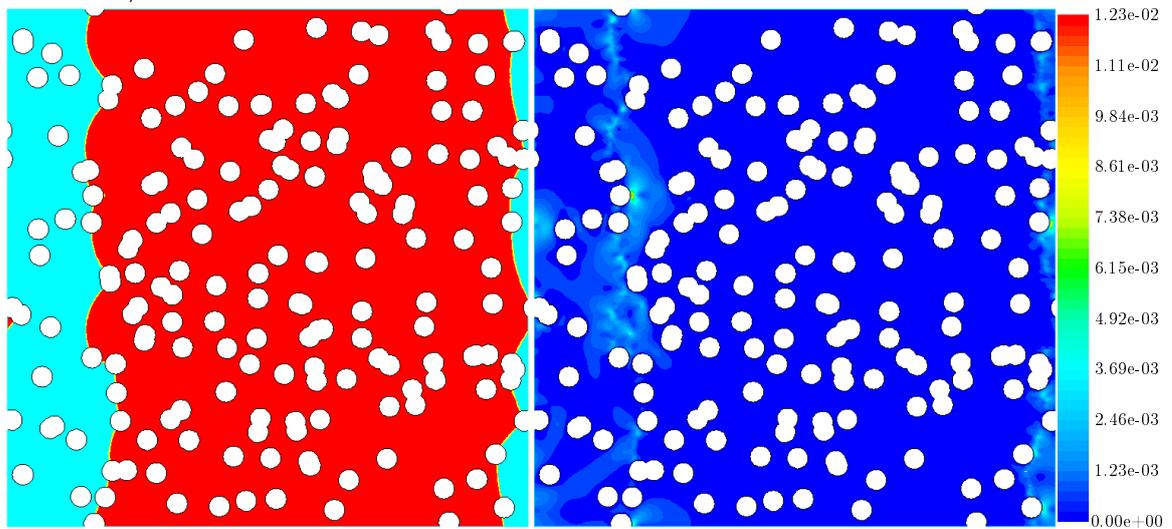
(a) $\nabla p = 100 Pa/m$.



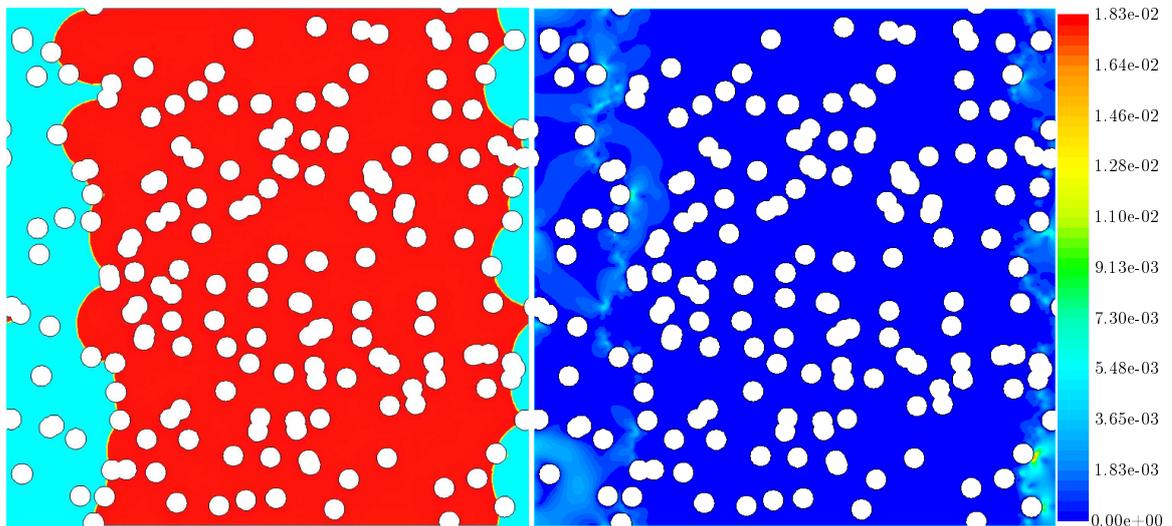
(b) $\nabla p = 250 Pa/m$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-1} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

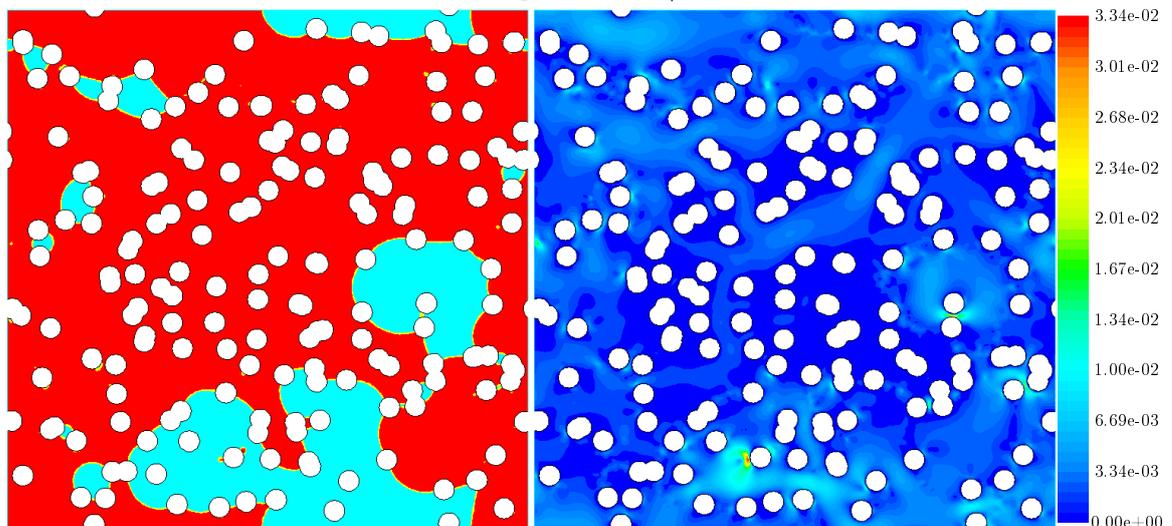
Figura 10 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade;
 $\gamma = 10^{-1} N/m$.



(c) $\nabla p = 500 Pa/m$.



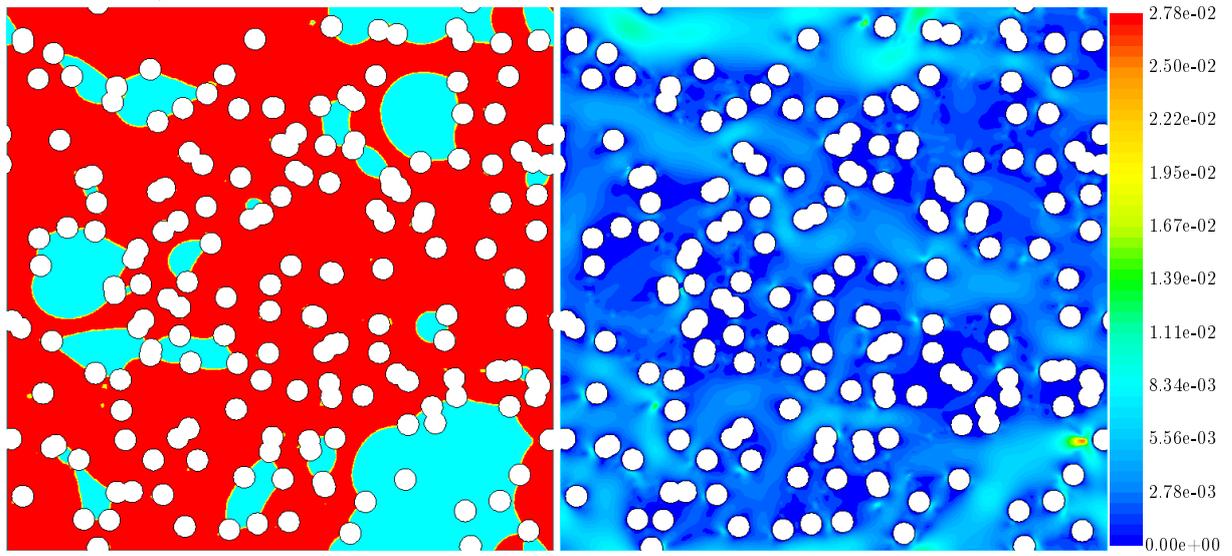
(d) $\nabla p = 1000 Pa/m$.



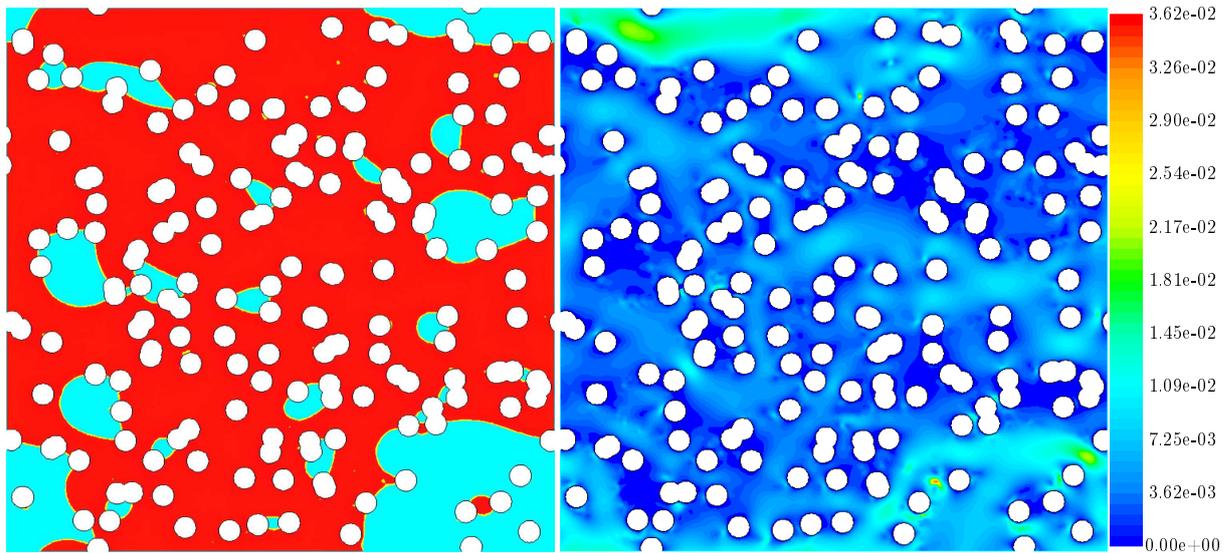
(e) $\nabla p = 2000 Pa/m$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-1} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

Figura 10 – (Continuação) Configuração do escoamento e contorno da velocidade;
 $\gamma = 10^{-1} N/m$.



(f) $\nabla p = 4000 Pa/m$.



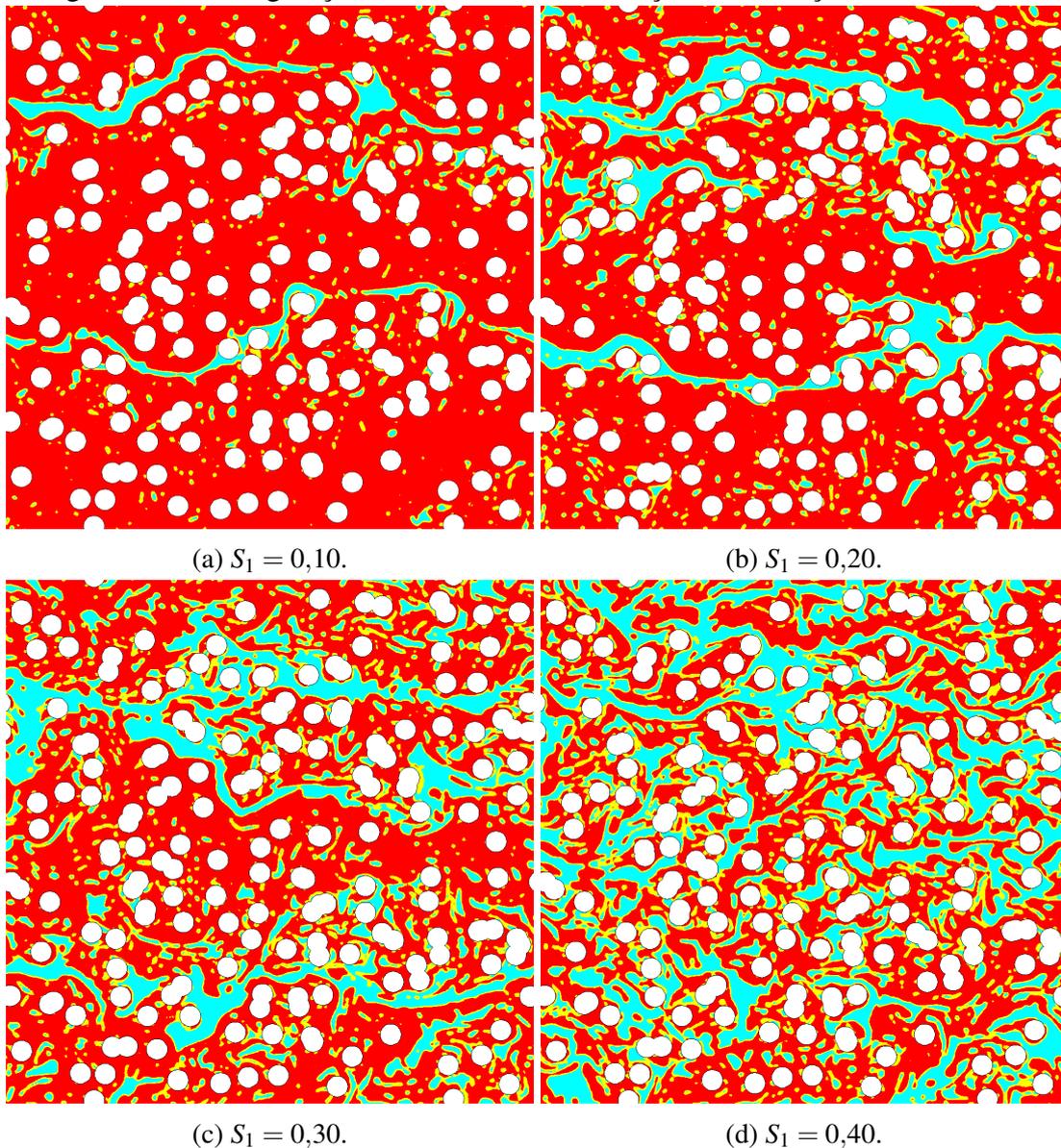
(g) $\nabla p = 5000 Pa/m$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso (esquerda), em um instante de tempo específico, para diferentes valores de gradientes de pressão e para $\gamma = 10^{-1} N/m$, e seu respectivo campo de velocidade (direita). Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

APÊNDICE C – ESCOAMENTO BIFÁSICO EM FUNÇÃO DA SATURAÇÃO DA FASE MENOS VISCOSA

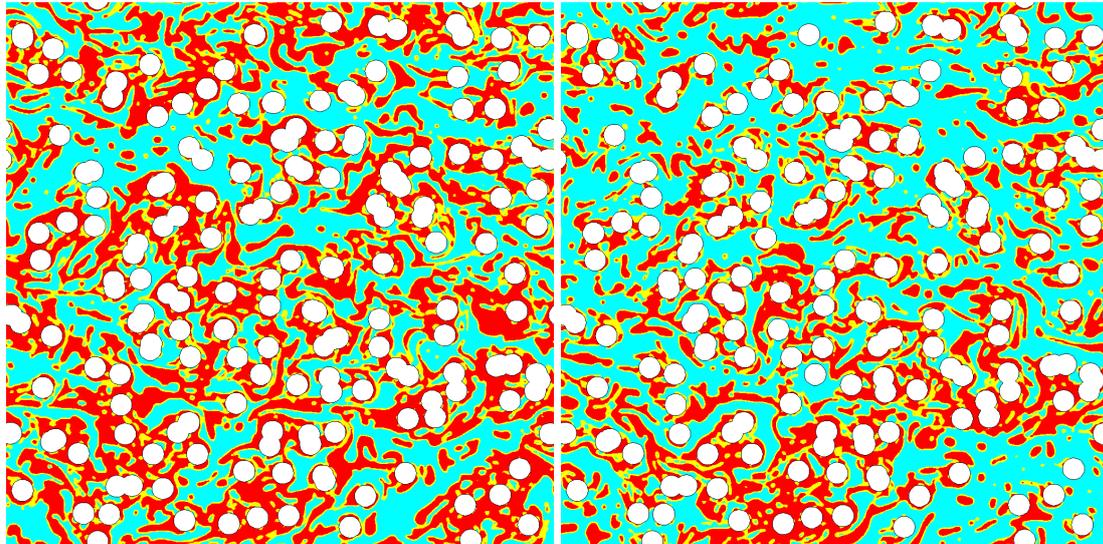
Neste apêndice são apresentadas as imagens das configurações do fluxo bifásico em um meio poroso, resultantes das simulações realizadas com diferentes valores da fração volumétrica da fase menos viscosa, enquanto os demais parâmetros permanecem fixos, a saber, $\nabla p = 1000 \text{ Pa/m}$, $\gamma = 0 \text{ N/m}$ e $M = 10$.

Figura 11 – Configuração do escoamento em função da saturação da fase menos viscosa.



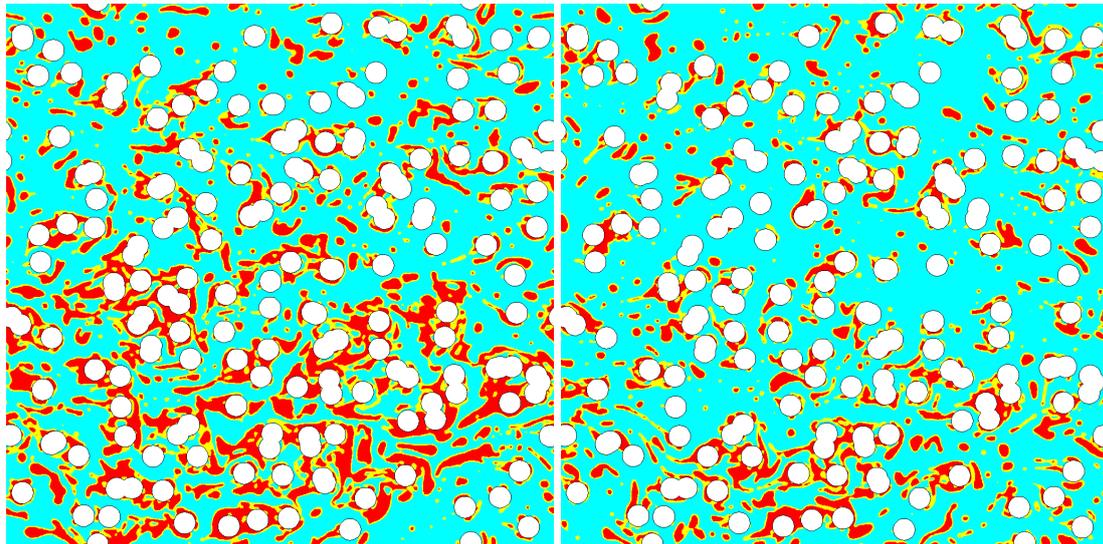
Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso, em um instante de tempo específico, para diferentes valores de S_1 . Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

Figura 11 – (Continuação) Configuração do escoamento em função da saturação da fase menos viscosa.



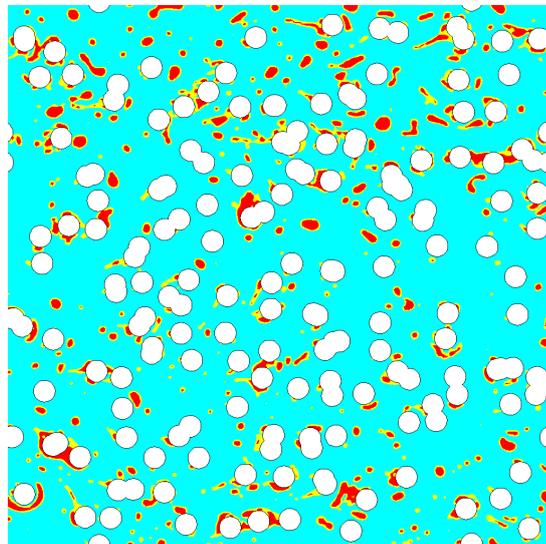
(e) $S_1 = 0,50$.

(f) $S_1 = 0,60$.



(g) $S_1 = 0,70$.

(h) $S_1 = 0,80$.



(i) $S_1 = 0,90$.

Fluxo do escoamento bifásico através do meio poroso, em um instante de tempo específico, para diferentes valores de S_1 . Fonte: Obtida através do software ANSYS Fluent.

APÊNDICE D – MÉTODO DFA

O método de análise de flutuações sem tendências ou método DFA (*Detrended Fluctuations Analysis*) [137], é um método amplamente utilizado para detectar correlações de longo alcance em séries temporais, e é particularmente útil para investigar a existência de auto-similaridade em dados temporais. O método DFA consiste basicamente em subtrair possíveis tendências determinísticas da série temporal original e analisar a flutuação dos dados uma vez removidas as tendências [147]. Esse método tem se mostrado uma técnica bastante segura e além disso tem sido aplicado inclusive em séries não-estacionárias [138, 148]. Segundo Kantelhardt et al [148], o DFA foi aplicado com sucesso a diversos campos de interesse como o DNA [139, 149], a dinâmica da frequência cardíaca [150, 151], redes neurais [152, 153], a marcha humana [154], registros climáticos [155, 156], estrutura de nuvens [157, 158], economia [159, 160] e também em física do estado sólido [161, 162].

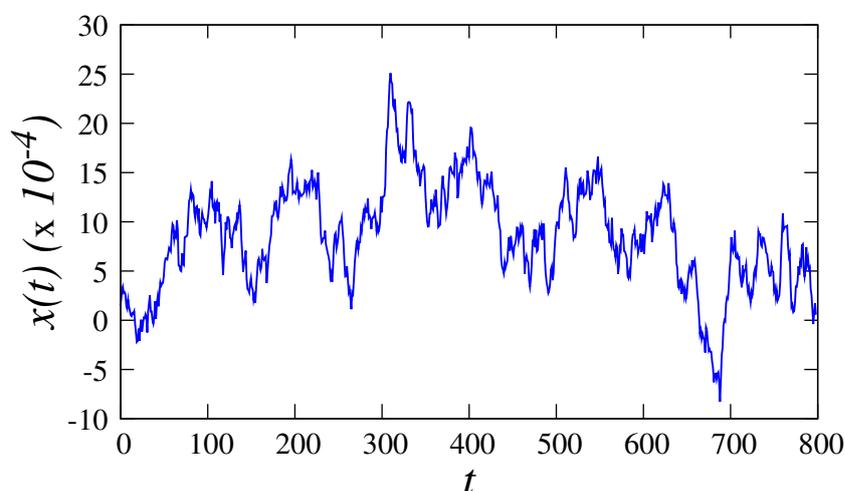
Os passos para aplicar o método DFA em uma série temporal são descritos a seguir. Seja $x(t)$ uma série temporal de tamanho N (Gráfico 19), cujo valor médio é $\langle x \rangle$. O primeiro passo para se aplicar o método DFA em uma série $x(t)$ é remover a tendência média da série $x(t)$ e depois calcular a série integrada ou acumulada, $X(t)$, dessa diferença. Esta etapa é expressa, matematicamente, por

$$X(t) = \sum_{i=1}^t (x(i) - \langle x \rangle). \quad (\text{D.1})$$

A Gráfico 20 ilustra essa primeira etapa do método DFA.

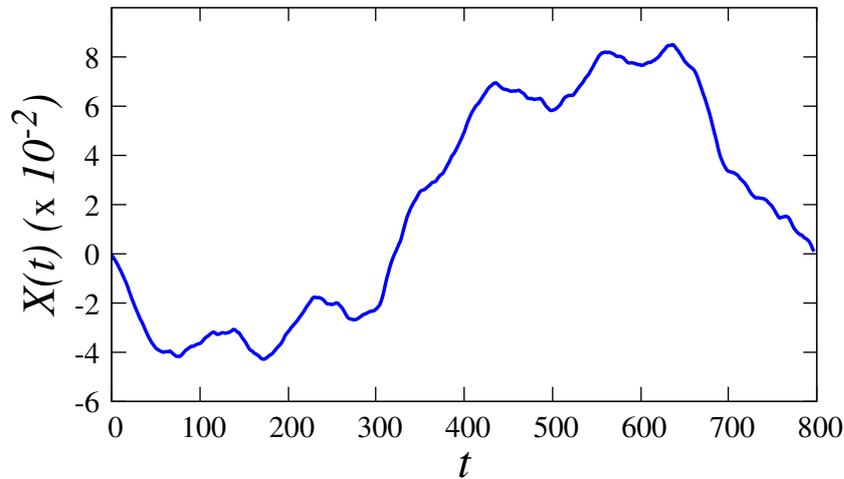
O próximo passo resume-se em remover as tendências locais dos dados da série

Gráfico 19 – Série temporal original usada para ilustrar a aplicação do método DFA.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 20 – Ilustração da aplicação do primeiro passo do método DFA.



O primeiro passo do método DFA consiste em calcular a série integrada $X(t)$ a partir da série temporal original $x(t)$ subtraindo seu valor médio, utilizando a Equação (D.1). Fonte: Elaborado pelo autor.

integrada, o que consiste primeiramente em dividir a série integrada em N/n blocos, ou janelas de tempo, de tamanho n , onde, para cada bloco k , é calculada uma tendência local $X_k(t, n)$. Nos casos abordados nesta tese, a tendência local, $X_k(t, n)$, é um polinômio do primeiro grau, obtido através do método dos mínimos quadrados, como mostrado no Gráfico 21. A seguir, uma nova série $Y(t, n)$ é criada removendo-se a tendência da série acumulada, isto é, subtraindo $X_k(t, n)$ de $X(t)$:

$$Y(t, n) = X(t) - X_k(t, n). \quad (\text{D.2})$$

No terceiro passo, as flutuações resultantes, geralmente referidas como funções de

Gráfico 21 – Ilustração da aplicação do segundo passo do método DFA.

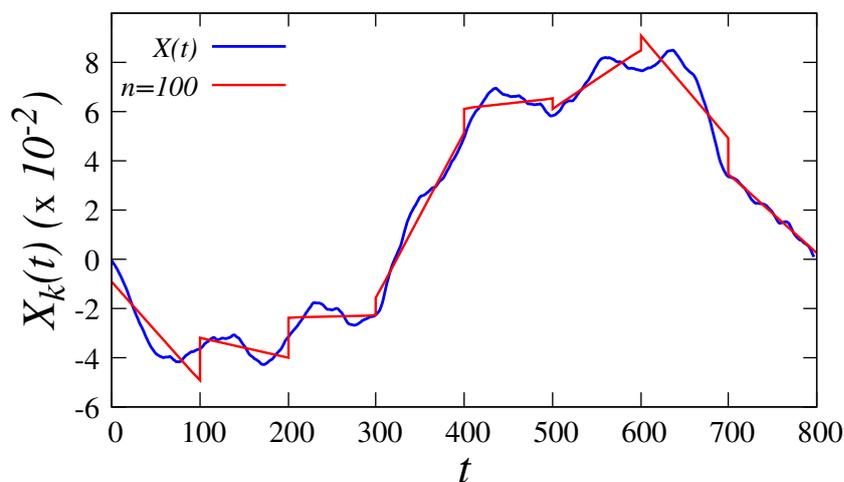


Gráfico da tendência local da série integrada, com 8 blocos de tempo de tamanho $n = 100$. O segundo passo do método DFA consiste em remover as tendências locais, $X_k(t, n)$, dos dados da série integrada, $X(t)$. Fonte: Elaborado pelo autor.

flutuação, $F(n)$, são calculadas como desvios quadráticos médios [138]:

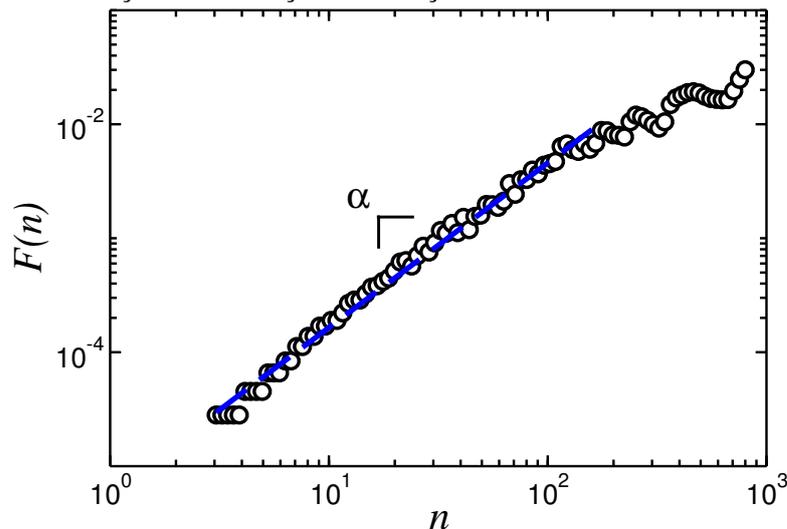
$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [Y(t,n)]^2}. \quad (\text{D.3})$$

No último passo, após repetir os passos anteriores para diferentes tamanhos, n , de blocos de tempo, constrói-se um gráfico, em escala logarítmica, de $F(n)$ versus n , como mostrado no Gráfico 22. Se os dados originais, $x(t)$, tiverem correlações de longo alcance, isso será refletido na função de flutuação, $F(n)$, como uma lei de potência [138],

$$F(n) \propto n^\alpha, \quad (\text{D.4})$$

onde o expoente α está relacionado aos padrões de correlação da série analisada [139, 140]. Este expoente de escala também está relacionado ao expoente de Hurst [163, 164], que mede o grau de memória de longo alcance de uma série temporal, como $\alpha = H$ para o ruído gaussiano fracionário e como $\alpha = H + 1$ para o movimento browniano fracionário [138].

Gráfico 22 – Função de flutuação em função do tamanho dos blocos de tempo.



Gráfico, em escala logarítmica, da função de flutuação em função do tamanho dos blocos (ou janelas) de tempo. Neste exemplo, o valor do expoente é $\alpha = 1.444 \pm 0.0159$. Fonte: Elaborado pelo autor.

O método DFA possibilita a análise de séries temporais complexas, sendo especialmente útil quando se suspeita da presença de comportamentos de longo alcance que não são detectáveis pelas medidas de correlação tradicionais. Além disso, o DFA auxilia na identificação de padrões de tendências e flutuações em diferentes escalas temporais.

APÊNDICE E - EQUAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL

Neste apêndice, apresentamos algumas identidades e equações do cálculo vetorial que foram utilizadas no desenvolvimento das equações apresentadas nesta tese. Vamos considerar f e g funções escalares e \vec{r} , \vec{u} e \vec{v} funções vetoriais.

Produto tensorial (produto diádico):

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u}(\vec{v})^t = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} (v_x \ v_y \ v_z) = \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Regra do produto para derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg) = f \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{E.2})$$

Regra da cadeia para a derivada:

$$\frac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{E.3})$$

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{E.4})$$

Divergência:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{E.5})$$

Rotacional:

$$\nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (\text{E.6})$$

Regra da divergência para um produto tensorial:

$$\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v}) = (\nabla \cdot \vec{u})\vec{v} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} \quad (\text{E.7})$$

Regra do produto (escalares) para gradiente:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (\text{E.8})$$

Regra do produto (escalar e vetor) para divergência:

$$\nabla \cdot (f\vec{u}) = f\nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla f \quad (\text{E.9})$$

Teorema de transporte de Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta(\vec{r}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} d\Omega + \oint_S \eta \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} d\Omega + \oint_S \eta \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Teorema da divergência (teorema de Gauss) [165, 166]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} d\Omega &= \oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\ &= \oint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Função delta de Dirac:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

Propriedades da função delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx &= f(x_0) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

ANEXO A – ARTIGO PUBLICADO: BUBBLE DYNAMICS IN STATIONARY TWO-PHASE FLOW THROUGH DISORDERED POROUS MEDIA



ORIGINAL RESEARCH
published: 21 March 2022
doi: 10.3389/fphy.2022.860190



Bubble Dynamics in Stationary Two-phase Flow Through Disordered Porous Media

J. M. A. Sales¹, H. J. Seybold^{1,2*}, C. L. N. Oliveira¹ and J. S. Andrade¹

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brazil, ²Department of Environmental Systems Science, ETH Zurich, Zurich, Switzerland

OPEN ACCESS

Edited by:

Matjaž Perc,
University of Maribor, Slovenia

Reviewed by:

Steffen Berg,
Shell, Netherlands
Allbens Picardi Faria Atman,
Federal Center for Technological
Education of Minas Gerais, Brazil

*Correspondence:

H. J. Seybold
hansjoerg.seybold@usys.ethz.ch

Specialty section:

This article was submitted to
Interdisciplinary Physics,
a section of the journal
Frontiers in Physics

Received: 22 January 2022

Accepted: 16 February 2022

Published: 21 March 2022

Citation:

Sales JMA, Seybold HJ, Oliveira CLN
and Andrade JS (2022) Bubble
Dynamics in Stationary Two-phase
Flow Through Disordered
Porous Media.
Front. Phys. 10:860190.
doi: 10.3389/fphy.2022.860190

Two-phase flow through porous media leads to the formation of drops and fingers, which eventually break and merge or may be trapped behind obstacles. This complex dynamical behavior highly influences macroscopic properties such as the effective permeability and it also creates characteristic fluctuations in the velocity fields of the two phases, as well as in their relative permeability curves. In order to better understand how the microscopic behavior of the flow affects macroscopic properties of two phases, we simulate the velocity fields of two immiscible fluids flowing through a two-dimensional porous medium. By analyzing the fluctuations in the velocity fields of the two phases, we find that the system is ergodic for large volume fractions of the less viscous phase and high capillary numbers Ca . We also see that the distribution of drop sizes m follows a power-law scaling, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$. The exponent ξ depends on the capillary number. Below a characteristic capillary number, namely $Ca^* \approx 0.046$, the drops are large and cohesive with a constant scaling exponent $\xi \approx 1.23 \pm 0.03$. Above the characteristic capillary number Ca^* , the flow is dominated by many small droplets and few finger-like spanning clusters. In this regime the exponent ξ increases approaching 2.05 ± 0.03 in the limit of infinite capillary number. Our analysis also shows that the temporal mean velocity of the entire mixture can be described by a generalization of Darcy's law of the form $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla P)^\beta$ where the exponent β is sensitive to the surface tension between the two phases. In the limit of infinite capillary numbers the mobility term increases exponentially with the saturation of the less viscous phase. This result agrees with previous observations for effective permeabilities found in dissolved-gas-driven reservoirs.

Keywords: porous media, two phase flow, Onsager symmetry, computational fluid dynamics, generalized Darcy's law

1 INTRODUCTION

Due to its technological application, two-phase flows in porous media have been an active subject of research for decades [1–4]. It is well known, for instance, that the flow of a water/oil mixture through a porous rock strongly depends on the volume ratio of the two fluids, the surface tension between the two phases and their wetting interactions with the solid walls [5–8]. Phenomenologically, this behavior has been described by relative permeability curves, which need to be determined experimentally. Over the years, many models have been proposed to explain those experimental measurements, or to approximate them when experimental gauging curves are not available [9–11]. Most of these studies focused on the displacement of an interface moving in a transient regime, such

as in gas/oil drainage or water/oil imbibition. Understanding this process is of great practical relevance in petroleum engineering where the main goal is to increase production by delaying the breakthrough of the injected fluid, i.e., to increase the amount of the displaced fluid by extending the time the injected fluid takes to reach the producing well [12].

Immiscible two-phase flows in porous media commonly exhibit intriguing phenomena that arise due to the competition between capillary and viscous effects. Generally speaking, the resulting interface formation is controlled by two dimensionless numbers, namely, the capillary number Ca , which describes the balance of viscous forces to capillary forces, and the ratio of the two viscosities. By carrying out multiple experiments, Lenormand classified the emerging patterns in two-phase flow into three major regimes, depending on these two dimensionless parameters. This classification is today known as the so-called Lenormand's phase-diagram [13], which was recently extended including effects of surface adhesion, namely, also considering contact angles [14]. While the general partitioning of the different flow regimes is characterized by Lenormand's phase diagram, the transitions at which one regime changes to another are not universal and depend on the particular pore geometry and the dimensionality of the system [7, 15, 16]. Low capillary numbers and high viscosity ratios are frequently associated with a "capillary fingering" regime, while high capillary numbers and high viscosity ratios to a "stable displacement." In addition, when a low viscous fluid displaces a high viscous one (low viscosity ratio), the resulting interface forms unstable patterns, known as "viscous fingering" [17–19], which can be obtained for any value of the capillary number. This flow regime can be described in terms of a Laplacian growth problem [20], which is also equivalent to diffusion-limited-aggregation (DLA) systems [21]. Experimental studies have also revealed that the capillary number influences the effective permeability of two immiscible phases in terms of a power-law $k_{eff} \sim Ca^\alpha$ [22, 23] and numerical studies suggest that the exponent α depends on the relative fraction of the two phases in the mixture [24].

The description of two-phase flow at the Darcy scale as an effective medium has a long history [25, 26], but the dynamics of the interface between the different phases at the pore scale still represents a challenging and scientifically important problem. In this case, the geometric properties of the substrate create heterogeneous flow paths which can be invaded by one fluid or the other or both. In such mixing flows, drops of many sizes and shapes naturally emerge. These drops may split and re-merge while they are dragged by the flow through the porous medium or maybe trapped behind obstacles for some time. Numerical simulations [5] and micro-tomography [6, 27] have been used to understand the interplay between two phases inside a porous medium on the scale of individual pores, but the connection between this micro-dynamic behavior and macroscopic quantities such as permeability or displacement efficiency is still poorly understood [28]. Over time, the dynamic of a two-phase flow inside a heterogeneous medium eventually reaches a

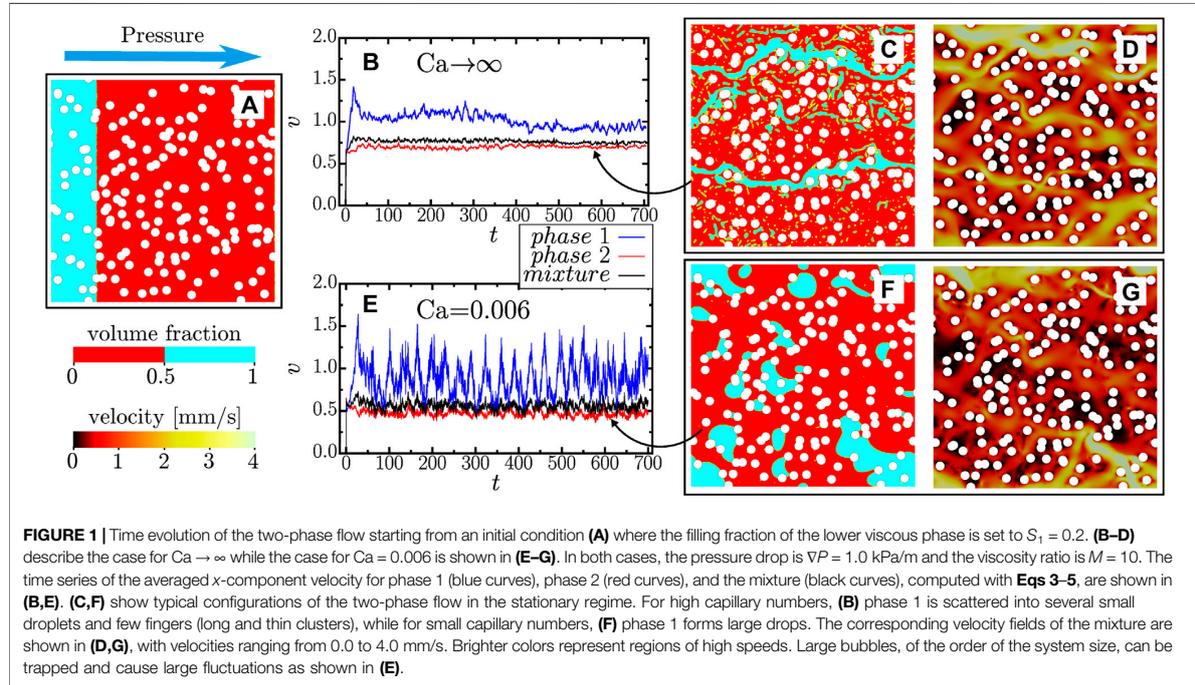
stationary regime, where certain variables fluctuate around a long-time averaged value [8]. In this regime the application of novel techniques from non-equilibrium statistical physics [29] proved to be very helpful in establishing a proper connection between micro and macro scale. Recent studies of fluctuations in mesoscopic properties, such as relative permeability and flow velocity, paved the way to a new perspective on the conceptual description for two-phase flow at low Reynolds numbers [30–32] with focus on its statistical properties. Here, we study through two-dimensional simulations the characteristic fluctuations in the velocity time series of two immiscible fluids flowing through an irregular porous medium.

The paper is organized as follows: In **Section 2**, we present the details of our pore geometry, the mathematical model and numerical technique used to calculate the velocity fields of the two phases. **Section 3** covers the analysis of the numerical results. More specifically, we analyze temporal correlations in the spatially averaged time series of the velocity fields of the different phases and the mixture in the stationary regime and apply Onsager's reciprocal relations in order to investigate time reversibility. Moreover, we show that the drop size distribution follows a power-law scaling and propose a generalization of Darcy's law with a non-linear coupling between flow rate and pressure drop in **Section 3.4**. We close our analysis with discussions and conclusions in **Section 4**.

2 MATHEMATICAL MODEL

The pore geometry of our system consists of a two-dimensional "Swiss cheese" type of porous medium [33–35], which is made of circular obstacles that can overlap with each other. More specifically, the porous domain is composed of a $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ square, which is iteratively filled with randomly placed discs of 1 mm in diameter until a desired porosity ϱ is reached. For all simulations performed here, $\varrho = 0.8$. Periodic boundary conditions are applied in both directions in order to avoid finite-size effects. The pore space is filled with two immiscible Newtonian fluids with a surface tension, γ , acting at the interface between them. A global pressure gradient, ∇P , in the horizontal direction (x -direction) drives the flow. **Figure 1A** shows the initial condition of the system, where the filling fraction S_1 of the low viscous phase (blue) is set to 0.2. The two phases flowing through the pore space are solved numerically by a Volume-of-Fluid (VoF) formalism [5, 36], which is an adaptation of the Navier-Stokes equations for multi-phase flow as implemented in the Ansys Fluent™ software [37]. This numerical technique has been previously validated in several studies through numerous distinct applications [38–44]. In particular, the surface tension and contact angle in the model of Fluent's VoF scheme have been successfully applied to quantitatively describe the droplet pinch-off dynamics in a microfluidic step emulsification device [45].

In the Volume-of-Fluid formalism, the Navier-Stokes and continuity equations describe the conservation of linear momentum and mass of the entire mixture,



$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \gamma \kappa \nabla s, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

where ρ , μ , p and \mathbf{u} are density, viscosity, pressure, and the fluid velocity, respectively. The term $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ is an outer product, and $s(\mathbf{x})$ is the fraction function of phase 1 in a given control volume. Due to mass conservation, the fraction of phase 2 is given by $1 - s(\mathbf{x})$. Because **Eq. 1** describes the motion of both phases, ρ and μ are not constants, but scalar fields, which depend on the fraction function $s(\mathbf{x})$. More specifically, a linear mixing rule $\mu(\mathbf{x}) = \mu_1 \cdot s(\mathbf{x}) + \mu_2 \cdot [1 - s(\mathbf{x})]$ is used to define a local effective viscosity of the mixture, where the constants μ_1 and μ_2 stand for the viscosities of phase 1 and 2, respectively. The same holds for the density in case of phases with different densities, ρ_1 and ρ_2 . The term $\gamma \kappa \nabla s$ in **Eq. 1** describes the interfacial tension force and is proportional to the gradient of s normal to the interface. Here, the variable $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ is the curvature of the interface. Because ∇s is nonzero only along the interface, interfacial tension forces vanish in the bulk of phase 1 and phase 2, where s is constant. As boundary conditions on the solid walls, we limit our study to neutral wettability (contact angle $\alpha = 90^\circ$) and no slip. The fraction function $s(\mathbf{x})$ has a sharp interface at the border between the two phases, and is advected by the flow via

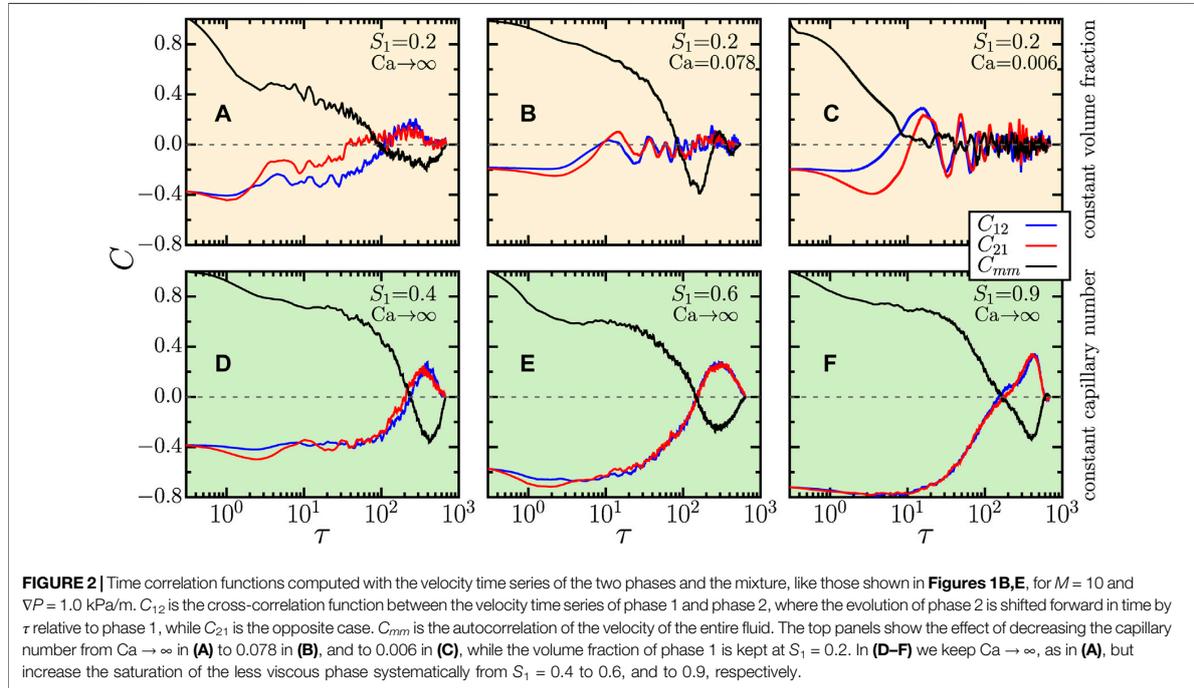
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0. \quad (2)$$

In this analysis, we keep the density of the two fluids equal $\rho_1 = \rho_2 = 1.0$ kg/m³, to avoid disturbance by inertial effects. Moreover,

we set $\mu_2 = 1.0$ Pa·s and keep the viscosity ratio $M = \mu_2/\mu_1$ at either 1 or 10. During a simulation, the integration time step dt is kept fixed and small enough to avoid high Courant numbers, generally $dt \approx 10^{-4}$ s. If not mentioned otherwise, our fluid mixture consists of 20% of phase 1 (blue, lower viscous phase) and 80% of phase 2 (red, high viscous phase). Initially, the two phases are placed in vertical strips (see **Figure 1A**) in the fluid domain with their interface perpendicular to the pressure gradient. Different initial configurations have been tested in multiple simulations to ensure that the stationary regime does not depend on this initial condition. Using this setup, we study the behavior of the mixture as we change the two major interactions between the phases, namely, the viscous forces, which is controlled here by the global pressure gradient, ∇P , and interfacial forces, which depends on surface tension, γ . We also ran simulations with vanishing surface tension and equal viscosities in order to test whether our two-phase model recovers the properties of a single-phase flow. Simulation data are only analyzed after the stationary state is reached, in order to produce statistically meaningful time series. This highly increases the computational costs as the initial transient part of the calculation has to be discarded.

3 RESULTS

Shear and surface tension exert forces on the fluid while it flows through the porous medium. These forces eventually lead to the breakup of connected components of a phase and, thus, to the generation of drops. These drops may flow separately through the



porous channels or may be trapped for some time by the porous matrix. Moreover, colliding drops may also merge with each other forming larger clusters. This complex dynamics of merging and disconnecting drops dominates the flow's microscopic behavior in the stationary state. As a result, the velocity fields of the two phases show typical transient fluctuations.

3.1 Velocity Time Series

In the VoF method, the volumetric average velocity of a phase, at time t , may be written in terms of the fluid velocity, \mathbf{u} , and the fraction function $s(\mathbf{x}, t)$. For the x -component of phase 1's velocity we find

$$v^{(1)}(t) = \frac{1}{\Omega_1} \int_{\Omega} u_x(\mathbf{x}, t) \cdot s(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad (3)$$

where $\Omega_1 = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) d\Omega$ is the domain occupied by phase 1, Ω is the total porous space occupied by the fluid mixture and $u_x(\mathbf{x}, t)$ is the x -component of \mathbf{u} , solved with **Eqs 1, 2**. Equivalently, the mean x -velocity of phase 2 is given by

$$v^{(2)}(t) = \frac{1}{\Omega_2} \int_{\Omega} u_x(\mathbf{x}, t) \cdot [1 - s(\mathbf{x}, t)] d\Omega, \quad (4)$$

with $\Omega_2 = \int_{\Omega} [1 - s(\mathbf{x})] d\Omega$. Since the two phases are incompressible and mass is conserved, Ω_1 and Ω_2 are constants. Finally the mean x -velocity of the entire mixture is given by

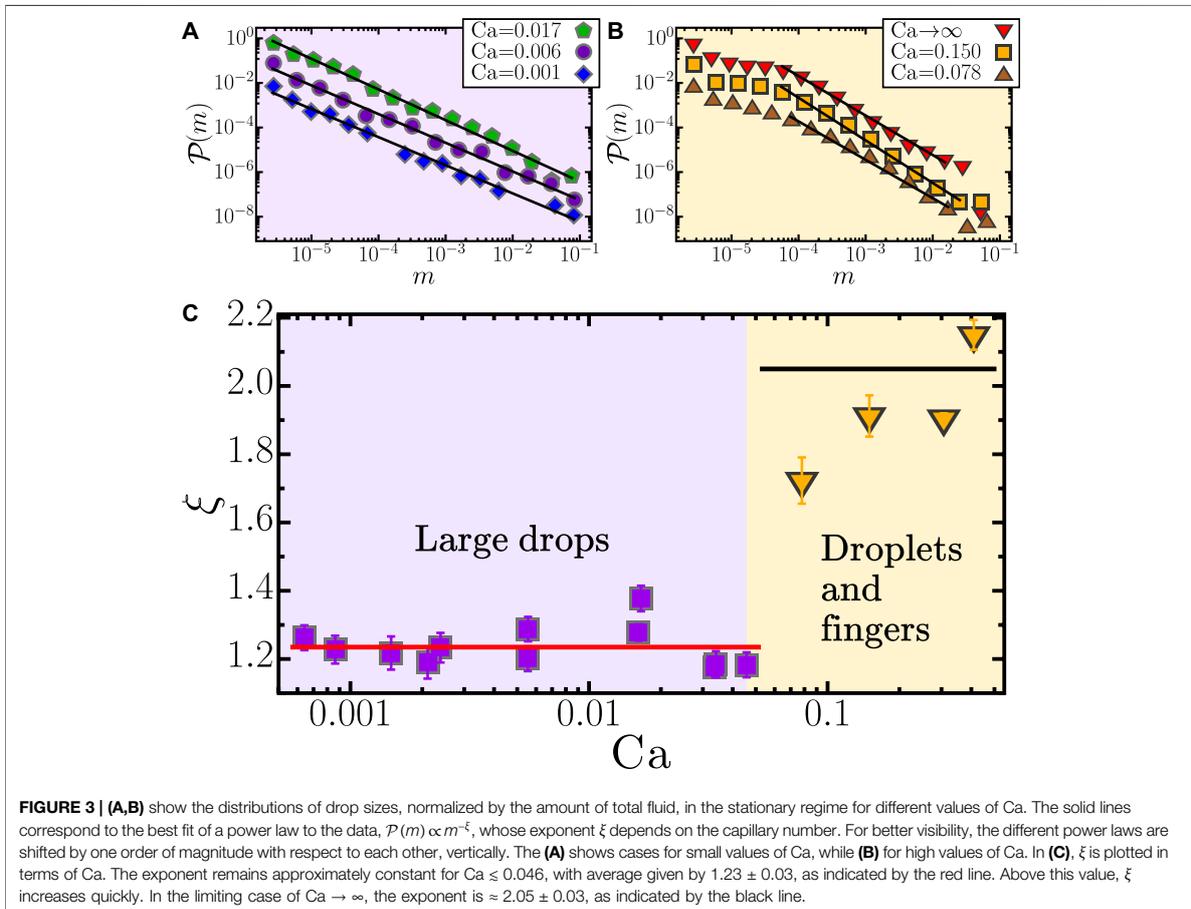
$$v^{(m)}(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_x(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (5)$$

The temporal mean values of these time series are computed through $\bar{v}^{(j)} = 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} v^{(j)} dt$, where $j = 1, 2, m$ stands for the two phases (1,2) or the mixture (m). The variable T corresponds to the time window spanning the stationary regime. The capillary number describes the ratio between viscous forces and surface tension being defined here in terms of the mean mixture velocity as

$$Ca = \bar{v}^{(m)} \mu_2 / \gamma. \quad (6)$$

Figure 1 shows the influence of the capillary number on the two-phase flow in the stationary regime. The initial configuration is shown in panel **(A)**, where the volume fraction of phase 1 is set to $S_1 = 0.2$. Panels **(B-D)** show the case of $Ca \rightarrow \infty$ while panels **(E-G)** the case for $Ca = 0.006$. The velocity time series computed through **Eqs 3-5** are presented in panels **(B)** and **(E)** where phase 1, phase 2, and the mixture are marked by blue, red and black lines, respectively. Note that, although the pressure drop is constant, the flow rate can actually vary due to the fluctuations in hydraulic resistance. These inherent fluctuations in the velocity time series reflect the dynamics of the drops and their interactions with the pore geometry. When drops get trapped in a region of the porous medium, the average velocity is slowed down. Conversely, when drops are released at a later time, the flow accelerates resulting in one or multiple peaks appearing in the time series.

The snapshots in panels **Figures 1C,F** show the distribution of phase 1 (blue) and phase 2 (red) in the pore space for the two cases $Ca \rightarrow \infty$ (equivalent to $\gamma = 0$) and $Ca = 0.006$. At high



capillary number, the flow is characterized by a large number of small droplets with a highly active merging and splitting dynamics. In some of these cases, the formation of one or more finger-like cluster spanning from left to right along a major flow path can be observed. In the case with low capillary number, the phases stick together and create more cohesive drops, preventing split-merging events. In cases of very small capillary numbers, the pressure gradient may even not be sufficient to overcome the interfacial forces and thus the formation and motion of drops may be suppressed. In this situation, permanently trapped drops are observed in the porous medium. The velocity maps corresponding to the snapshots shown in **(C)** and **(F)** are plotted in panels **(D)** and **(G)**. Darker colors represent regions with low velocities, while brighter colors indicate fast flowing regions.

3.2 Time Correlations in Two-phase Flow

In order to develop a description of the flow as a stochastic dynamical system, it is important to know whether the system is ergodic or not. Although originally applied to thermal

fluctuations on the molecular scale, Onsager symmetries [46, 47] have been successfully applied to describe the behavior of multi-phase flows in macroscopic porous media [48] and in pore-network models [30–32]. For this purpose, we apply Onsager's reciprocal relations in order to study ergodicity. Onsager's reciprocal relations are based on time correlations which can be calculated as follows

$$C_{AB}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} \frac{\Delta A(t) \Delta B(t+\tau)}{\sigma_A \sigma_B} dt. \quad (7)$$

Here $\Delta A(t) = A(t) - \bar{A}$ are the fluctuations of the time series $A(t)$ and $\Delta B(t + \tau)$ are the corresponding fluctuations of $B(t)$ shifted by τ . The mean values, \bar{A} and \bar{B} , and the variances, σ_A and σ_B , are all computed over the time window, $[0, T - \tau]$, shared by both time series. If $A(t)$ and $B(t)$ are identical, then Eq. 7 recovers the autocorrelation function, otherwise the cross-correlation function is calculated. Accordingly, a dynamical process is considered to be time reversible if the cross correlation function is symmetric, thus the integrals of

C_{AB} and C_{BA} are equal [49]. This condition is satisfied when $C_{AB}(\tau)$ collapses on $C_{BA}(\tau)$ at all times, except for some very small timescales in which the contribution to the integral is negligible [32]. Autocorrelations, on the other hand, measure the randomness in the time series and the rate at which fluctuations change with respect to the time scale τ . It can also be interpreted as the memory of a stochastic process, determining whether successive observations are independent or not.

In the following, we analyze the correlations in the time series of the spatially averaged x -velocity of phase 1, phase 2, and the entire fluid as defined through Eqs 3–5. Here, $C_{12}(\tau)$ and $C_{21}(\tau)$ describe the cross-correlation between phase 1 (2) and phase 2 (1), where the evolution of phase 2 (1) is shifted forward in time relative to phase 1 (2). $C_{mm}(\tau)$ is the autocorrelation of the mixture. Figure 2 shows $C_{12}(\tau)$, $C_{21}(\tau)$, and $C_{mm}(\tau)$ for $\nabla P = 1.0$ kPa/m and $M = 10$. Generally, for small delays, phase 1 and phase 2 tend to be anti-correlated and weakly correlated for increasing τ , *i.e.*, if one phase speeds up (comparing to its average velocity) the other phase slows down. In the limit of very large delays, the cross correlations of $C_{12}(\tau)$ and $C_{21}(\tau)$ both vanish. Conversely, the autocorrelation functions show the opposite behavior with strong correlations for small delays, slight anti-correlations in an intermediate range, and vanishing correlations for $\tau \rightarrow \infty$.

Figure 2 shows how the filling fraction of phase 1 and the capillary number affect the different correlations in the flow. Panels (A), (B), and (C) show the cross-correlation functions for decreasing Ca, keeping a constant filling fraction of $S_1 = 0.2$. For $Ca \rightarrow \infty$ and $S_1 = 0.2$, $C_{12}(\tau)$ and $C_{21}(\tau)$ seem to collapse only for large values of τ . As Ca decreases, the cross-correlation functions approach zero more rapidly, but the fluctuations also increase and thus the collapse of C_{12} with C_{21} is not completely clear for small Ca. For capillary-dominant systems, $Ca \rightarrow 0$, time-reversibility is less clear, similar to a recent experiments with two-phase flows in three-dimensional heterogeneous systems [30]. The figure also shows the effect of increasing filling fraction of the less viscous phase. Here S_1 is varied from 0.2 in panel (A) to 0.4 in (D), to 0.6 in (E), and to 0.9 in (F) while all other parameters are kept fixed. For filling fractions of 0.4, 0.6, and 0.9 the cross correlation functions almost perfectly collapse onto each other suggesting a more time reversal dynamics compared to the case with only 0.2 filling fraction, as shown in panel (A). In fact, by varying the saturation S_1 from 0.1 to 0.9, a good collapse of the two cross-correlation function is observed for $S_1 \geq 0.4$ at all time scales. Regarding the autocorrelation functions (black lines in Figure 2), our results show that they slowly become decorrelated, which is similar to Brownian motion [50]. However, as the surface tension increases, $C_{mm}(\tau)$ vanishes sooner, at smaller values of τ .

3.3 Drop Size Distribution

In order to study how the agglomerates of drops may influence the mesoscopic behavior of the two-phase flow, we determine the sizes of the different drops for every time step during the stationary regime and then calculate their distributions. Figure 3A shows the drop size distribution $\mathcal{P}(m)$ as a

function of capillary number for $\nabla P = 2.0$ kPa/m and $M = 10$, where m is the drop size normalized by the whole fluid volume. The distribution follows a power law, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$, whose exponent ξ depends on the capillary number. For $Ca \leq 0.046$, the exponent ξ is roughly constant with a value of $\xi \approx 1.23 \pm 0.03$. In this capillary range, the drops are mostly large and the split-merging events (as well as the spanning channels) are rarely observed. For $Ca > 0.046$, however, the drops are shattered into many smaller droplets and few fingers (thin elongated clusters) along higher speed channels. In this regime, ξ increases from 1.73 ± 0.06 to 1.92 ± 0.06 for $Ca = 0.078$ and 0.150, respectively, and then converging to 2.05 ± 0.03 as Ca approaches infinity. The characteristic capillary number, $Ca^* \approx 0.046$, separates the two regimes, which are marked by light blue and cream background in Figure 3. The heavy-tail scaling of the drop sizes in the large capillary regime may be associated with the emergence of long-range correlations, similar to those found in anomalous diffusion [51].

3.4 Generalized Darcy Law

Next, we analyze the stationary state from a single-phase Darcy flow perspective, namely, how the averaged fluid velocity depends on the pressure gradient. Figure 4 shows the x -velocity of the mixture averaged over space and time, $\bar{v}^{(m)}$, as a function of the applied pressure drop ∇P . As depicted, the temporal average velocity follows a power-law scaling, $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla P)^\beta$, for different values of the surface tension γ . This equation can be interpreted as a non-linear form of Darcy's law for two-phase flows. A similar generalization between flux and pressure drop has been successfully applied to non-Newtonian flows in pipes and pore networks [52, 53]. The exponent β varies as a function of surface tension. As

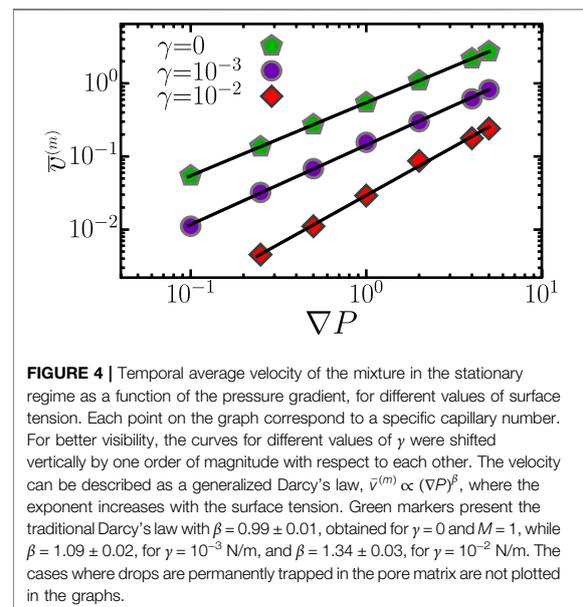
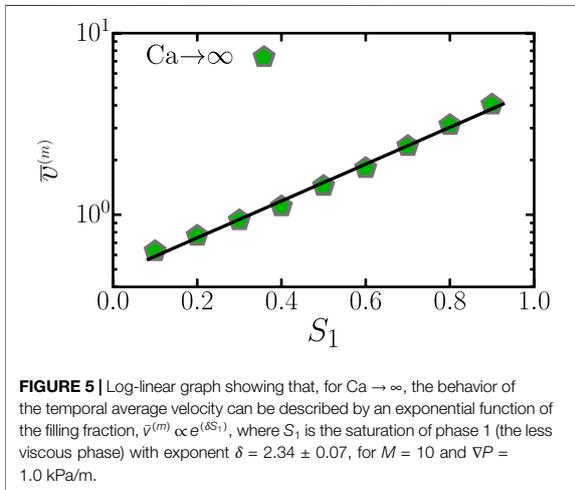


FIGURE 4 | Temporal average velocity of the mixture in the stationary regime as a function of the pressure gradient, for different values of surface tension. Each point on the graph correspond to a specific capillary number. For better visibility, the curves for different values of γ were shifted vertically by one order of magnitude with respect to each other. The velocity can be described as a generalized Darcy's law, $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla P)^\beta$, where the exponent increases with the surface tension. Green markers present the traditional Darcy's law with $\beta = 0.99 \pm 0.01$, obtained for $\gamma = 0$ and $M = 1$, while $\beta = 1.09 \pm 0.02$, for $\gamma = 10^{-3}$ N/m, and $\beta = 1.34 \pm 0.03$, for $\gamma = 10^{-2}$ N/m. The cases where drops are permanently trapped in the pore matrix are not plotted in the graphs.



expected, the case $\gamma = 0$ and $M = 1$ (green markers) recovers the traditional linear relation predicted by Darcy for a single phase, with $\beta = 0.99 \pm 0.01 \approx 1$.

In regimes of very high capillary numbers, the flow behavior is dominated by the presence of many small droplets. **Figure 5** shows how the filling fraction of the less viscous phase (phase 1) impacts the average velocity for $\nabla P = 1$ kPa/m and $M = 10$. The plot shows that $\bar{v}^{(m)}$ increases exponentially with filling fraction $\bar{v}^{(m)} \propto e^{(\delta S_1)}$ with an exponent $\delta = 2.34 \pm 0.07$, where $e^{(\delta S_1)}$ is a mobility coefficient for the mixture [54]. In a single phase flow, the mobility term is the ratio between the permeability and the viscosity. In a two-phase flow system, the mobility term is related to relative permeability curves [10]. The effective permeability in the form of an exponential increase with saturation fits particularly well with measurements of gas percolation in dissolved gas-driven reservoirs [55], where the oil phase is saturated with dispersed small bubbles, the so-called “foamy oil” [56, 57], in order to enhance the recovery rates. Despite the complexity involved in the two-phase flow dynamics, our results suggest that the mean flow velocity of the mixture can be described by a simple function of the saturation and the gradient of pressure.

4 DISCUSSION AND CONCLUSION

We investigated the stationary flow regime of two immiscible and incompressible Newtonian fluids in porous media by solving Navier-Stokes equations in multi-phase flow in two dimensions. The behavior of the time series of the fluid’s velocity is influenced by the complex dynamics of drops which form as the two phases interact with each other and the heterogeneous pore space. Despite the apparent disorder, in the stationary regime, the drop size distribution follows a well-defined power law, $\mathcal{P}(m) \propto m^{-\xi}$, whose exponent ξ

depends on the capillary number. This exponent is roughly constant $\xi \approx 1.23$ for $Ca \leq 0.046$, where the drops are mostly large and cohesive, and splitting and merging are less common. For $Ca > 0.046$, however, ξ increases systematically, reaching 2.05 ± 0.03 for $Ca \rightarrow \infty$. This regime is characterized by the presence of a large number of small droplets and few finger-like clusters. Fluctuations in the time series are analyzed via cross-correlation functions between the x -velocities of the two phases showing that Onsager’s reciprocal relations and time reversal symmetry are fulfilled for volume fraction above 0.4 and high capillary number. At lower capillary numbers Ca the time reversibility of the flow is less clear which is consistent with observations made in three dimensional two-phase experiments. Finally, we study the macroscopic scaling of the average velocity. Our results show that two-phase flows can be modeled by an effective Darcy type of description, namely, $\bar{v}^{(m)} \propto (\nabla P)^\beta$. In this generalization of Darcy’s law, the exponent β depends on the surface tension between the phases (and, thus, on the capillary number). When the surface tension is neglected and the viscosity ratio is unity, the traditional Darcy relation is recovered, $\beta = 1$. For $Ca \rightarrow \infty$, when the systems is dominated by the presence of many small droplets, the averaged fluid velocity increases exponentially with the filling fraction of the lower viscous phase, $\bar{v}^{(m)} \propto e^{(\delta S_1)}$, where this term represents the mobility coefficient and δ is a constant. This behavior is similar to effective permeabilities found in dissolved-gas-driven reservoirs. We believe that our results have direct applications in the behavior of the mesoscopic flow (at the level of the pore) in several real situations, and can help in the description of the macroscopic propagation of the invasion front in oil reservoirs.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

The raw data supporting the conclusions of this article will be made available by the authors, without undue reservation.

AUTHOR CONTRIBUTIONS

HS, CO, and JA designed the research. JS performed the simulations with input from HS and CO. All authors contributed to the discussion and interpretation of the results. HS, CO, and JA wrote the paper with input from JS. All authors approved the submitted version.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge financial support from the Brazilian agencies CNPq, CAPES, and FUNCAP, and Petrobras (“Física do Petróleo em Meios Porosos”, Project Number: F0185).

REFERENCES

- McNutt MK, Camilli R, Crone TJ, Guthrie GD, Hsieh PA, Ryerson TB, et al. Review of Flow Rate Estimates of the Deepwater Horizon Oil Spill. *Proc Natl Acad Sci* (2012) 109:20260–7. doi:10.1073/pnas.1112139108
- Berkowitz B. Characterizing Flow and Transport in Fractured Geological media: a Review. *Adv Water Resour* (2002) 25:861–84. doi:10.1016/S0309-1708(02)00042-8
- Bloch S, Lander RH, Bonnell L. Anomalous High Porosity and Permeability in Deeply Buried sandstone Reservoirs: Origin and Predictability. *Bulletin* (2002) 86:301. doi:10.1306/61EEDABC-173E-11D7-8645000102C1865D
- Ortner F, Mazzotti M. Two-phase Flow in Liquid Chromatography, Part 1: Experimental Investigation and Theoretical Description. *Ind Eng Chem Res* (2018) 57:3274–91. doi:10.1021/acs.iecr.7b05153
- Raeini AQ, Blunt MJ, Bijeljic B. Modelling Two-phase Flow in Porous media at the Pore Scale Using the Volume-Of-Fluid Method. *J Comput Phys* (2012) 231: 5653–68. doi:10.1016/j.jcp.2012.04.011
- Raeini AQ, Blunt MJ, Bijeljic B. Direct Simulations of Two-phase Flow on Micro-CT Images of Porous media and Upscaling of Pore-Scale Forces. *Adv Water Resour* (2014) 74:116–26. doi:10.1016/j08.012.advwatres.2014
- Armstrong RT, Georgiadis A, Ott H, Klemin D, Berg S. Critical Capillary Number: Desaturation Studied with Fast X-ray Computed Microtomography. *Geophys Res Lett* (2014) 41:55–60. doi:10.1002/2013GL058075
- Avraam DG, Payatakes AC. Flow Regimes and Relative Permeabilities during Steady-State Two-phase Flow in Porous media. *J Fluid Mech* (1995) 293: 207–36. doi:10.1017/S0022112095001698
- Corey AT, Rathjens CH. Effect of Stratification on Relative Permeability. *Trans AIME* (1956) 207:358. doi:10.2118/744-G
- Chierici GL. Novel Relations for Drainage and Imbibition Relative Permeabilities. *Soc Pet Eng J* (1984) 24:275–6. doi:10.2118/10165-PA
- BergUnsalDijk SEH, Unsal E, Dijk H. Non-uniqueness and Uncertainty Quantification of Relative Permeability Measurements by Inverse Modelling. *Comput Geotechnics* (2021) 132:103964. doi:10.1016/j.compego.2020.103964
- Oliveira CLN, Araújo AD, Lucena LS, Almeida MP, Andrade JS. Post-breakthrough Scaling in Reservoir Field Simulation. *Physica A: Stat Mech its Appl* (2012) 391:3219–26. doi:10.1016/j01.017.physa.2012
- Lenormand R, Touboul E, Zarcone C. Numerical Models and Experiments on Immiscible Displacements in Porous media. *J Fluid Mech* (1988) 189:165–87. doi:10.1017/S0022112088000953
- Primkulov BK, Pahlavan AA, Fu X, Zhao B, MacMinn CW, Juanes R. Wettability and Lenormand's Diagram. *J Fluid Mech* (2021) 923: A34. doi:10.1017/jfm.2021.579
- Hilfer R, Oeren PE. Dimensional Analysis of Pore Scale and Field Scale Immiscible Displacement. *Transp Porous Med* (1996) 22:53–72. doi:10.1007/BF00974311
- Hilfer R, Armstrong RT, Berg S, Georgiadis A, Ott H. Capillary Saturation and Desaturation. *Phys Rev E* (2015) 92:063023. doi:10.1103/PhysRevE.92.063023
- Homsy GM. Viscous Fingering in Porous media. *Annu Rev Fluid Mech* (1987) 19:271–311. doi:10.1146/annurev.fl.19.010187.001415
- Oliveira CLN, Wittel FK, Andrade JS, Herrmann HJ. Invasion Percolation with a Hardening Interface under Gravity. *Int J Mod Phys C* (2010) 21:903–14. doi:10.1142/S0129183110015555
- Oliveira CL, Andrade JS, Herrmann HJ. Oil Displacement through a Porous Medium with a Temperature Gradient. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys* (2011) 83:066307. doi:10.1103/PhysRevE.83.066307
- Ben Amar M. Viscous Fingering: A Singularity in Laplacian Growth Models. *Phys Rev E* (1995) 51:R3819–R3822(R). doi:10.1103/PhysRevE.51.R3819
- Witten TA, Sander LM. Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon. *Phys Rev Lett* (1981) 47:1400–3. doi:10.1103/PhysRevLett.47.1400
- Tallakstad KT, Knudsen HA, Ramstad T, Lovøll G, Måløy KJ, Toussaint R, et al. Steady-state Two-phase Flow in Porous media: Statistics and Transport Properties. *Phys Rev Lett* (2009) 102:074502. doi:10.1103/PhysRevLett.102.074502
- Tallakstad KT, Lovøll G, Knudsen HA, Ramstad T, Flekkoy EG, Måløy KJ. Steady-state, Simultaneous Two-phase Flow in Porous media: An Experimental Study. *Phys Rev E* (2009) 80:036308. doi:10.1103/PhysRevE.80.036308
- Grova M, Hansen A. Two-phase Flow in Porous media: Power-Law Scaling of Effective Permeability. *J Phys Conf Ser* (2011) 319:012009. doi:10.1088/1742-6596/319/1/012009
- Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York: Dover publications (1972).
- Whitaker S. Flow in Porous media I: A Theoretical Derivation of Darcy's Law. *Transp Porous Med* (1986) 1:3–25. doi:10.1007/BF01036523
- Berg S, Ott H, Klapp SA, Schwing A, Neiteler R, Brussee N, et al. Real-time 3D Imaging of Haines Jumps in Porous media Flow. *Proc Natl Acad Sci* (2013) 110: 3755–9. doi:10.1073/pnas.1221373110
- Gu H, Duits MHG, Mugele F. Droplets Formation and Merging in Two-phase Flow Microfluidics. *Ijms* (2011) 12:2572–97. doi:10.3390/ijms12042572
- Kjelstrup S, Bedeaux D. *Non-Equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems*. Singapore: World Scientific (2008).
- McClure JE, Berg S, Armstrong RT. Thermodynamics of Fluctuations Based on Time-And-Space Averages. *Phys Rev E* (2021) 104:035106. doi:10.1103/PhysRevE.104.035106
- McClure JE, Berg S, Armstrong RT. Capillary Fluctuations and Energy Dynamics for Flow in Porous media. *Phys Fluids* (2021) 33:083323. doi:10.1063/5.0057428
- Winkler M, Gjennestad MA, Bedeaux D, Kjelstrup S, Cabriolu R, Hansen A. Onsager-Symmetry Obeyed in Athermal Mesoscopic Systems: Two-phase Flow in Porous Media. *Front Phys* (2020) 8:60. doi:10.3389/fphy.2020.00060
- Morais AF, Seybold H, Herrmann HJ, Andrade JS. Non-Newtonian Fluid Flow through Three-Dimensional Disordered Porous media. *Phys Rev Lett* (2009) 103:194502. doi:10.1103/PhysRevLett.103.194502
- Lorenz CD, Ziff RM. Precise Determination of the Critical Percolation Threshold for the Three-Dimensional "Swiss Cheese" Model Using a Growth Algorithm. *J Chem Phys* (2001) 114:3659–61. doi:10.1063/1.1338506
- Seybold HJ, Eberhard U, Secchi E, Cisne RLC, Jiménez-Martínez J, Andrade RFS, et al. Localization in Flow of Non-newtonian Fluids through Disordered Porous Media. *Front Phys* (2021) 9:635051. doi:10.3389/fphy.2021.635051
- Hirt CW, Nichols BD. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *J Comput Phys* (1981) 39:201–25. doi:10.1016/0021-9991(81)90145-5
- Ansys A. *Workbench User Manual*. Canonsburg: ANSYS (2019).
- Ban S, Pao W, Nasif MS. Numerical Simulation of Two-phase Flow Regime in Horizontal Pipeline and its Validation. *Hff* (2018) 28:1279–314. doi:10.1108/HFF-05-2017-0195
- Ambekar AS, Matthey P, Buwa VV. Pore-resolved Two-phase Flow in a pseudo-3D Porous Medium: Measurements and Volume-Of-Fluid Simulations. *Chem Eng Sci* (2021) 230:116128. doi:10.1016/j.ces.2020.116128
- Ambekar AS, Mondal S, Buwa VV. Pore-resolved Volume-Of-Fluid Simulations of Two-phase Flow in Porous media: Pore-Scale Flow Mechanisms and Regime Map. *Phys Fluids* (2021) 33:102119. doi:10.1063/5.0064833
- Gopala VR, van Wachem BGM. Volume of Fluid Methods for Immiscible-Fluid and Free-Surface Flows. *Chem Eng J* (2008) 141:204–21. doi:10.1016/j.ces.2007.12.035
- Renardy M, Renardy Y, Li J. Numerical Simulation of Moving Contact Line Problems Using a Volume-Of-Fluid Method. *J Comput Phys* (2001) 171: 243–63. doi:10.1006/jcph.2001.6785
- Piller M, Casagrande D, Schena G, Santini M. Pore-scale Simulation of Laminar Flow through Porous media. *J Phys Conf Ser* (2014) 501:012010. doi:10.1088/1742-6596/501/1/012010
- Carlson A, Kudinov P, Narayanan C. *Prediction of Two-phase Flow in Small Tubes: A Systematic Comparison of State-Of-The-Art CMFD Codes*. Netherlands: 5th European Thermal-Sciences Conference (2008). p. 126.
- Eggersdorfer ML, Seybold H, Ofner A, Weitz DA, Studart AR. Wetting Controls of Droplet Formation in Step Emulsification. *Proc Natl Acad Sci USA* (2018) 115:9479–84. doi:10.1073/pnas.1803644115
- Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Phys Rev* (1931) 37: 405–26. doi:10.1103/PhysRev.37.405
- Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II. *Phys Rev* (1931) 38:2265–79. doi:10.1103/PhysRev.38.2265

48. Flekkøy EG, Pride SR. Reciprocity and Cross Coupling of Two-phase Flow in Porous media from Onsager Theory. *Phys Rev E* (1999) 60:4130–7. doi:10.1103/PhysRevE.60.4130
49. de Groot SR, Mazur P. *Non-equilibrium Thermodynamics*. New York, NY: Dover (1984).
50. Chakraborty D. Velocity Autocorrelation Function of a Brownian Particle. *Eur Phys J B* (2011) 83:375–80. doi:10.1140/epjb/e2011-20395-3
51. Combe G, Richefeu V, Stasiak M, Atman APF. Experimental Validation of a Nonextensive Scaling Law in Confined Granular Media. *Phys Rev Lett* (2015) 115:238301. doi:10.1103/PhysRevLett.115.238301
52. Lenk RS. *Polymer Rheology*. London: Applied Science Publishers LTD (1978).
53. Eberhard U, Seybold HJ, Floriancic M, Bertsch P, Jiménez-Martínez J, Andrade JS, et al. Determination of the Effective Viscosity of Non-newtonian Fluids Flowing through Porous Media. *Front Phys* (2019) 7:71. doi:10.3389/fphy.2019.00071
54. Craft BC, Hawkins MF. *Applied Petroleum Reservoir Engineering*. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall (1991).
55. Smith GE. Fluid Flow and Sand Production in Heavy-Oil Reservoirs under Solution-Gas Drive. *SPE Prod Eng* (1988) 3:169–80. doi:10.2118/15094-PA
56. Sarma H, Maini B. Role of Solution Gas in Primary Production of Heavy Oils. *Proc Latin Am Petro Eng Conf Caracas, Venezuela* (1992). doi:10.2118/23631-MS
57. Lv W, Du D, Yang J, Jia N, Li T, Wang R. Experimental Study on Factors Affecting the Performance of Foamy Oil Recovery. *Energies* (2019) 12:637. doi:10.3390/en12040637

Conflict of Interest: The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.

Publisher's Note: All claims expressed in this article are solely those of the authors and do not necessarily represent those of their affiliated organizations, or those of the publisher, the editors and the reviewers. Any product that may be evaluated in this article, or claim that may be made by its manufacturer, is not guaranteed or endorsed by the publisher.

Copyright © 2022 Sales, Seybold, Oliveira and Andrade. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY). The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) and the copyright owner(s) are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.