



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CAMPUS CRATEÚS**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**MATHEUS CAVALCANTE ROMERO**

**COLORAÇÃO DE LISTA: UM SURVEY SOBRE NOVOS RESULTADOS.**

**CRATEÚS**

**2023**

MATHEUS CAVALCANTE ROMERO

COLORAÇÃO DE LISTA: UM SURVEY SOBRE NOVOS RESULTADOS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus Crateús da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas

CRATEÚS

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

R672c Romero, Matheus Cavalcante.

Coloração de lista : um survey sobre novos resultados / Matheus Cavalcante Romero. – 2023.  
78 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Crateús,  
Curso de Ciência da Computação, Crateús, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas.

1. Coloração de grafos. 2. Coloração de lista. 3. Número cromático.. I. Título.

CDD 004

---

MATHEUS CAVALCANTE ROMERO

COLORAÇÃO DE LISTA: UM SURVEY SOBRE NOVOS RESULTADOS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus Crateús da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Eurinaldo Rodrigues Costa  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Msc. Luiz Alberto do Carmo Viana

A meus pais, pela capacidade de acreditar e investir em mim e que sempre se sacrificarem para que eu possa ter bom um futuro. A minha família por me ajudar nos momentos que precisei.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por ter colocado pessoas maravilhosas na minha vida.

Aos meus pais, Antonio Marcio e Fabia Costa, por todo amor, carinho, apoio e por me ajudar nos momentos mais difíceis em que pensei que não conseguiria finalizar essa etapa da minha vida.

Ao meu orientador, professor Rennan Dantas, por todo acompanhamento e auxílio para a realização deste trabalho e pelas conversas descontraídas durante as reuniões no período de pandemia que não me deixaram desanimar.

À Universidade Federal do Ceará, pela oportunidade de fazer a graduação e ser minha casa durante todo esse período.

Aos meus amigos e colegas que me acompanharam e compartilharam experiências durante a graduação. Em especial, a Wermeson Rocha, Matheus Sampaio, Davi Barros, Yuri Kamagoe, Elton Rodrigues.

À todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Faça ou não faça. Tentativa não há.”

(Mestre Yoda - Star Wars)

## RESUMO

Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $G$  possui uma coloração própria em seus vértices, caso vértices adjacentes possuam cores diferentes. Uma coloração de lista de  $G$  denotada por  $L(G)$  é uma coloração própria nos vértices de  $G$  de modo que cada vértice tem uma lista de cores possíveis para ser colorido. Ao longo dos anos muitos resultados foram surgindo tendo como centro a Coloração de Lista. Neste trabalho apresentamos um *survey* onde organizamos pesquisas dentro do campo da Coloração de Lista. Nosso objetivo é mostrar as pesquisas mais recentes relacionadas de forma direta e indireta a Coloração de Lista.

**Palavras-chave:** Coloração de grafos. Coloração de lista. Número cromático.

## ABSTRACT

Let  $G = (V, E)$  be a graph,  $G$  has proper coloring in your vertices, case adjacents vertex have distincts colors. A list coloring of the graph  $G$  denoted as  $L(G)$  is a proper coloring in the  $G$  vertex such that each vertex has a list of colors available to color. Over the years, results have emerged, many of them have List Coloring as subject. In this paper we present a *survey* where we organize recent researchs in the field of Coloring List, which ones are directly and indirectly related to List Coloring.

**Palavras-chave:** Graph Coloring. List Coloring. Chromatic Number.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A esquerda exemplo do modelo de um mapa do Problema das Sete Pontes de Königsberg; A direita o modelo simplificado do problema. . . . .	15
Figura 2 – Grafo $G$ com a distribuição das listas de cores da coleção $\mathcal{L}$ . . . . .	17
Figura 3 – $G$ sendo colorido pelas cores selecionadas em cada lista o tornando $\mathcal{L}$ -lista-colorível. . . . .	17
Figura 4 – Grafo que não é 2-selecionável. . . . .	18
Figura 5 – Um grafo 2-colorível. . . . .	18
Figura 6 – Exemplo em forma colorida do grafo $G$ que não é 2-selecionável. . . . .	19
Figura 7 – Grafo $G$ com múltiplas arestas e um laço. . . . .	22
Figura 8 – Grafo simples. . . . .	22
Figura 9 – Exemplo de um grafo finito. . . . .	22
Figura 10 – Exemplo do complemento do grafo $G$ da Figura 9. . . . .	23
Figura 11 – Exemplo de um grafo $G$ que possui alguns conjuntos independentes. . . . .	23
Figura 12 – Exemplo de um grafo $G$ . . . . .	24
Figura 13 – Exemplo de um subgrafo gerador. . . . .	24
Figura 14 – Exemplo de um subgrafo não gerador. . . . .	24
Figura 15 – Grafo com um caminho $P_3$ . . . . .	25
Figura 16 – Exemplo de um $C_4$ (ciclo par). . . . .	26
Figura 17 – Exemplo de um $C_5$ (ciclo ímpar). . . . .	26
Figura 18 – Grafo $G$ que possui um ciclo hamiltoniano. . . . .	26
Figura 19 – Exemplo de um grafo $G$ bipartido, porém com os conjunto de vértices que não formam uma partição. . . . .	27
Figura 20 – Exemplo de um grafo $G$ não bipartido. . . . .	28
Figura 21 – Exemplo de um grafo $G$ bipartido. . . . .	28
Figura 22 – Exemplo de um grafo $K_{4,4}$ . . . . .	29
Figura 23 – Exemplo de uma clique $K_3$ . . . . .	29
Figura 24 – Exemplo de um grafo $K_5$ . . . . .	30
Figura 25 – Exemplo de um grafo $K_{4,4}$ . . . . .	30
Figura 26 – Representa um grafo $G$ onde $\Delta(G) = 5$ e $\delta(G) = 3$ . . . . .	31
Figura 27 – Representa um grafo $G$ 2-regular. . . . .	31
Figura 28 – Temos um grafo $G$ que representa uma árvore. . . . .	31

Figura 29 – Uma floresta com três árvores. . . . .	32
Figura 30 – Exemplo de uma estrela. . . . .	32
Figura 31 – Um grafo $G$ não plano. . . . .	33
Figura 32 – Um grafo $G$ planar. . . . .	33
Figura 33 – Exemplo de um grafo $G$ . . . . .	34
Figura 34 – Exemplo do grafo linha da Figura 33. . . . .	34
Figura 35 – Exemplo de um digrafo. . . . .	34
Figura 36 – Exemplo de um grafo $\Theta_{2,2,5}$ . . . . .	35
Figura 37 – Exemplo de agendamento. . . . .	36
Figura 38 – Exemplo de um grafo $G$ 3-cromático com uma coloração ótima. . . . .	36
Figura 39 – Subgrafo $H$ de $G$ com $\chi(H) < \chi(G) = 3$ . . . . .	37
Figura 40 – Exemplo de um emparelhamento saturado. . . . .	37
Figura 41 – Exemplo de um emparelhamento não saturado. . . . .	37
Figura 42 – Exemplo de um grafo 3-aresta colorível. . . . .	38
Figura 43 – Exemplo de um grafo $G$ com uma coloração de lista. . . . .	39
Figura 44 – Exemplo de um grafo $G$ 4-selecionável. . . . .	39
Figura 45 – Exemplo de um grafo $G$ com uma lista $k$ -coloração. . . . .	40
Figura 46 – Exemplo de um grafo $G$ com uma $k$ -lista coloração. . . . .	41
Figura 47 – Grafo $G$ representando a entrada do problema de coloração. . . . .	42
Figura 48 – Grafo $G$ representando a saída do problema de coloração. . . . .	43
Figura 49 – Representação do Caso 1 e Caso 2. . . . .	48
Figura 50 – Exemplo de um grafo 1-planar. . . . .	51
Figura 51 – Grafo $G$ . . . . .	52
Figura 52 – Grafo $G^*$ . . . . .	52
Figura 53 – Exemplo de um grafo 2-Correspondente não consistente. . . . .	55
Figura 54 – Dois distintos 2-conjuntos de dobra de um 4-ciclo. . . . .	56
Figura 55 – Um grafo com uma 2-lista atribuição e o correspondente 2-conjunto de dobra. . . . .	57
Figura 56 – Exemplo de $G'$ antes da remoção das arestas $e$ e $q$ . . . . .	61
Figura 57 – Exemplo de $G'$ com $E'(w) = E(w) - 1$ para qualquer $w \in V$ . . . . .	62
Figura 58 – Exemplo de $G'$ com $ E(a, b, c)  - 1$ . . . . .	62
Figura 59 – Exemplo de $G'$ com $ E(a, b, c)  - 1$ . . . . .	62
Figura 60 – Exemplo de $G'$ com $ E(a, b, c)  - 1$ . . . . .	63

Figura 61 – Exemplo de $G'$ com $ E(a, b, c)  = 1$ . . . . .	63
Figura 62 – Exemplo de 2–distante $k$ –coloração. . . . .	64
Figura 63 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 1. . . . .	67
Figura 64 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando $u$ é um $(1, 1, 0)$ -vértice e $v$ é um $4^+$ -vértice. . . . .	67
Figura 65 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando $u$ é um $(1, 1, 0)$ -vértice e $v$ é um $(0, 0, 0)$ -vértice. . . . .	68
Figura 66 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando $u$ é um $(1, 0, 0)$ -vértice. . . . .	68
Figura 67 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando $u$ é um $(0, 0, 0)$ -vértice adjacente a três vértices com um deles possuindo grau igual a 4. . . . .	69
Figura 68 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando $u$ é um $(0, 0, 0)$ -vértice adjacente a três vértices com grau 3 e um deles sendo um $(1, 1, 0)$ -vértice. . . . .	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela com a organização das complexidades de alguns problemas envolvendo coloração em algumas classes de grafos. . . . .	49
--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>19</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>19</b>
<i>1.3.1</i>	<i>Objetivo geral</i>	<i>19</i>
<i>1.3.2</i>	<i>Objetivos específicos</i>	<i>20</i>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Grafos e definições</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Coloração de grafos</b>	<b>35</b>
<b>2.3</b>	<b>Coloração de Lista</b>	<b>38</b>
<i>2.3.1</i>	<i>Exemplos sobre Coloração de Lista</i>	<i>40</i>
<b>2.4</b>	<b>Complexidade computacional</b>	<b>41</b>
<b>3</b>	<b>TRABALHOS RELACIONADOS</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Resultados gerais envolvendo grafos</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Resultados específicos envolvendo grafo bipartido completo e planares.</b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>Resultados envolvendo complexidade</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>COLORAÇÃO DE LISTA DE GRAFOS</b>	<b>50</b>
<b>4.1</b>	<b>Coloração de lista dinâmica de grafos 1-planar</b>	<b>50</b>
<i>4.1.1</i>	<i>Definições</i>	<i>50</i>
<i>4.1.2</i>	<i>Resultado</i>	<i>52</i>
<b>4.2</b>	<b>Coloração Correspondente</b>	<b>53</b>
<i>4.2.1</i>	<i>Definições</i>	<i>53</i>
<i>4.2.2</i>	<i>Resultado</i>	<i>57</i>
<b>4.3</b>	<b>Prova da conjectura da Coloração de Lista para multigrafos linha perfeitos</b>	<b>58</b>
<i>4.3.1</i>	<i>Definições</i>	<i>58</i>
<i>4.3.2</i>	<i>Resultados</i>	<i>59</i>
<b>5</b>	<b>VARIANTES DE COLORAÇÃO DE LISTA</b>	<b>64</b>
<b>5.1</b>	<b><math>(\Delta + 3)</math>-lista coloração de grafos esparsos com distância 2.</b>	<b>64</b>
<i>5.1.1</i>	<i>Definições</i>	<i>64</i>
<i>5.1.2</i>	<i>Resultados</i>	<i>65</i>

5.1.2.1	<i>Propriedades estruturais de G.</i> . . . . .	65
5.1.2.2	<i>Regras da descarga</i> . . . . .	66
5.1.2.3	<i>Verificação dos casos</i> . . . . .	66
5.2	<b>Um Estudo sobre Coloração de Lista Parcial.</b> . . . . .	71
5.2.1	<i>Definições</i> . . . . .	71
5.2.2	<i>Resultado</i> . . . . .	72
6	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	74
6.1	<b>Resultados alcançados</b> . . . . .	74
6.2	<b>Limitações encontradas</b> . . . . .	74
6.3	<b>Trabalhos futuros</b> . . . . .	75
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	76

## 1 INTRODUÇÃO

A introdução deste trabalho está dividida em três seções: a Seção 1.1 de Contextualização, Seção 1.2 sobre Organização do trabalho e a Seção 1.3 sobre os Objetivos. Na seção de Contextualização temos um breve histórico sobre a Teoria dos Grafos passando pela Coloração de Grafos até chegarmos na Coloração de Lista. Na seção de Organização do trabalho vamos falar sobre a forma em que o trabalho está dividido. Por fim, na seção de Objetivos, vamos abordar nossos principais objetivos divididos em objetivos gerais e objetivos específicos.

### 1.1 Contextualização

A Teoria dos Grafos teve seu início a partir do problema das Setes Pontes de Königsberg, cidade da Prússia onde o problema foi desenvolvido. Tudo ocorreu com uma dúvida popular entre seus habitantes que se perguntavam a possibilidade de atravessar as setes pontes sem repetir nenhuma durante o processo. As pontes ligavam uma ilha e três faixas de terra. Dessa forma, foi modelado um mapa com as pontes, as faixas de terra e a ilha como uma forma de visualizar o problema. Com essa forma de mapa foi perceptível que algumas informações contidas nele não eram necessárias, assim o que antes eram pontes se tornaram linhas chamadas de arestas e as faixas de terra e a ilha se tornaram pontos chamados de vértices. Dessa forma, foi possível trazer um problema real para o campo matemático o tornando mais simples de se resolver, chegando então no objetivo da Teoria dos Grafos. Na Figura 1 temos um exemplo da transição do mapa modelado para o problema ao grafo simplificado.

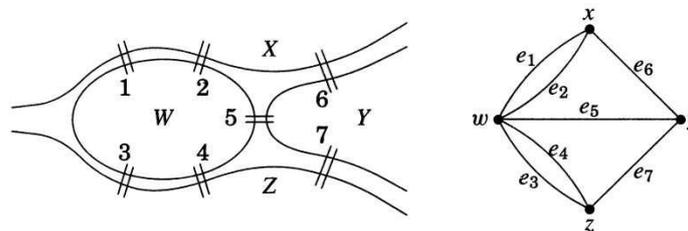


Figura 1 – A esquerda exemplo do modelo de um mapa do Problema das Sete Pontes de Königsberg; A direita o modelo simplificado do problema.

Fonte – (WEST *et al.*, 2001)

A Coloração de Grafos é um dos assuntos teóricos mais antigos dentro da Teoria dos Grafos. Dessa forma, vários problemas teóricos e práticos podem ser modelados com a

Coloração de Grafos. Essa seção tem como objetivo introduzir o trabalho apresentando os seus objetivos e sua justificativa.

O Problema das Quatro Cores surgiu em 1852 após a observação de que era possível colorir as regiões da Inglaterra com quatro cores de forma que regiões vizinhas fossem coloridas com cores diferentes. Dessa forma, foi questionado se era possível colorir outros mapas com quatro cores ou menos cores. Assim, matemáticos da época se interessaram na proposta no que faria surgir o Problema das Quatro Cores (CHARTRAND; ZHANG, 2008). A conjectura afirmava que o número máximo necessário para se colorir um mapa eram quatro.

Em Teoria dos Grafos, o Problema das Quatro Cores pode ser modelado como uma coloração de vértices de um grafo planar (grafo que pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas), onde as regiões do mapa são modeladas como vértices, duas regiões que dividem fronteira possuem uma aresta entre os vértices correspondentes e uma coloração onde regiões vizinhas possuem cores diferentes que chamamos de coloração própria quando modelamos no grafo. Novas variações foram surgindo adicionando restrições em como serão coloridos os vértices do grafo. Dessa forma, surgiu uma variação onde sua restrição é colorir cada vértice  $v$  tal que sua cor pertence a uma determinada lista de cores disponíveis para  $v$  de forma que os vértices adjacentes possuem cores diferentes (coloração própria). Essa variação tomou forma a partir dos estudos de Paul Erdős, Arthur L. Rubin e Hebert Taylor. (ERDOS *et al.*, 1979) e logo foi chamada de Coloração de Lista.

Seja  $G$  um grafo e  $L(v)$  uma lista de cores disponíveis para cada vértice  $v$  de  $G$ . Entende-se como Coloração de Lista uma propriedade de coloração própria de  $G$  no qual existe uma função  $f$  tal que  $f(v) \in L(v)$  para todo  $v \in V(G)$ . Seja  $\mathcal{L}$  uma coleção tal que  $\mathcal{L} = \{L(v) : v \in V(G)\}$ . Se  $\mathcal{L}$  é o conjunto de listas de cores disponíveis para todos os vértices de  $G$  e se é possível colorir  $G$  com esse conjunto de listas de cores, então podemos dizer que  $G$  é  $\mathcal{L}$ -lista-colorível. A Figura 2 representa um grafo  $G$  que possui uma lista em cada vértice que pertence a coleção  $\mathcal{L} = \{\{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ . Já na Figura 3 temos  $G$  sendo colorido com as cores das listas, o tornando  $\mathcal{L}$ -lista-colorível.

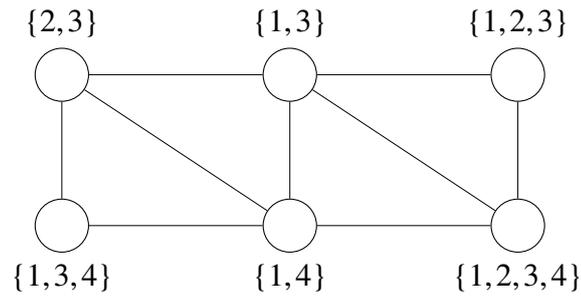


Figura 2 – Grafo  $G$  com a distribuição das listas de cores da coleção  $\mathcal{L}$ .

Fonte – Próprio autor

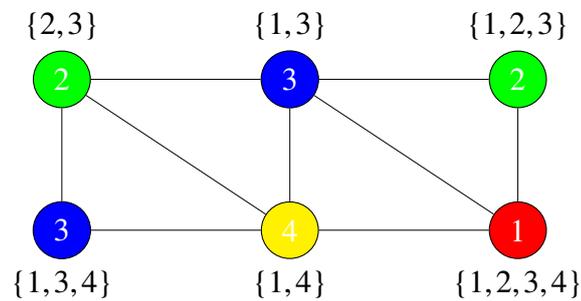


Figura 3 –  $G$  sendo colorido pelas cores selecionadas em cada lista o tornando  $\mathcal{L}$ -list-colorível.

Fonte – Próprio autor

Além da Coloração de Lista, outra propriedade introduzida por Paul Erdős (ERDOS *et al.*, 1979) foi a Seleccionabilidade. Erdős apresentou esse conceito como um jogo onde temos um Grafo  $G$  com os vértices nomeados de  $\{1, 2, \dots, n\}$  e uma função  $f$  que associa um inteiro positivo  $f(v)$  para cada vértice  $v$  fazendo com que cada vértice possa suportar uma lista de  $f(v)$  elementos. Podemos tratar esses elementos como cores ou números. O jogo também possui um jogador  $A$  e um jogador  $B$  (adversário). O jogador  $A$  solicita que o jogador  $B$  selecione  $f(v)$  cores para o vértice  $v$ , para cada  $v$  de 1 a  $n$ . Assumindo como  $L(v)$  as  $f(v)$  cores selecionadas para cada vértice e  $\mathcal{L}$  a coleção dessas  $L(v)$ . O jogador  $A$  irá usar essa coleção  $\mathcal{L}$  para tentar colorir cada vértice  $v$  do grafo  $G$ , selecionando uma das  $L(v)$  cores para colorir o vértice  $v$ . Dizemos que  $G$  é  $f$ -seleccionável se, não importa quais cores o jogador  $B$  escolha, o jogador  $A$  sempre pode fazer uma escolha para cada vértice, de forma que é possível obter uma Coloração de Lista para o grafo  $G$ .

Utilizando uma função constante  $f(v) = k$ , dizemos que o **número de escolha** de  $G$  é igual a  $k$  se  $G$  é  $k$ -seleccionável e não é  $k-1$ -seleccionável. Para o grafo completo  $k_n$  com

$n \geq 1$ , podemos dizer que é sempre verdade que o número de escolha de  $k_n$  é igual a  $n$ . Pois, temos que o número de escolha  $G$  é maior ou igual ao número cromático de  $G$ .

Existe uma diferença entre  $k$ -coloração e  $k$ -selecionabilidade. Essa diferença pode ser facilmente identificada no exemplo a seguir. Continuando com a ideia do jogo de Erdős, o adversário terá que utilizar o mesmo tamanho  $k$  de conjunto de cores para todo vértice  $v$ . A Figura 5 representa uma coloração própria do grafo da Figura 2 que é 2-colorível, dessa forma seu número cromático é no máximo 2. Em contrapartida, visto pela ótica da Coloração de Lista  $G$  não é 2-selecionável, pois o adversário pode utilizar uma coleção  $\mathcal{L}$  na qual possui os modelos utilizados na Figura 4 para selecionar as cores. Dessa forma não será possível selecionar cores distintas para cada par de vértices adjacentes e como consequência o grafo  $G$  não será  $\mathcal{L}$ -lista-colorível.

Para comprovar que na Figura 4 não é 2-selecionável vamos colori-lo passo a passo na Figura 6. Começando com o vértice mais a esquerda com as cores  $\{1, 3\}$ , independente de qual cor for escolhida o resultado será análogo. Dessa forma iremos escolher a cor 3. Prosseguindo para o vértice a baixo percebemos que umas de suas opções foi invalidada pela escolha anterior, com isso temos que selecionar uma cor diferente de 3 e a escolha que nos resta é a cor 2. Continuando olhando para o vértice a direita, observamos que a forma como os conjuntos foram distribuídos para o grafo, isso fará com que o vizinhos seguintes de cada vértice possua uma cor a menos para ser selecionada, ate que ao chegarmos no último vértice temos que ambas as suas cores já foram selecionados fazendo com que  $G$  não seja 2-selecionável.

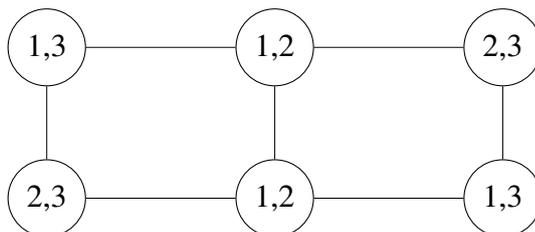


Figura 4 – Grafo que não é 2-selecionável.  
Fonte – Próprio autor

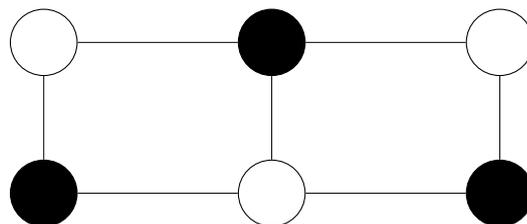


Figura 5 – Um grafo 2-colorível.  
Fonte – Próprio autor

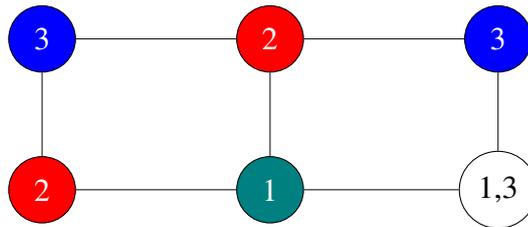


Figura 6 – Exemplo em forma colorida do grafo  $G$  que não é 2-selecionável.

Fonte – Próprio autor

## 1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 teremos nossa Fundamentação Teórica no qual se encontrará definições importantes para um melhor entendimento durante a leitura. No Capítulo 3, se encontram os Trabalhos Relacionados, onde são abordados os resultados encontrados na literatura sobre Coloração de Lista. Nos Capítulos 4 e 5 nós temos resultados mais recentes: no Capítulo 4 os mais gerais e no Capítulo 5 os mais específicos dentro do assunto. Por fim, no Capítulo 6 temos algumas observações sobre os resultados alcançados, dificuldades encontradas e trabalhos futuros.

Este trabalho busca organizar o conhecimento acadêmico sobre Coloração de Lista. Assim contribuindo com a estruturação de novos resultados sobre o assunto e mostrando sua importância para a Teoria dos Grafos. Vale ressaltar que iremos considerar como trabalhos recentes aqueles após 2016, ano no qual encontramos o *survey* mais recente. Além disso definimos também como trabalhos diretos aqueles no qual pertencem a um mesmo arcabouço.

## 1.3 Objetivos

Nesta seção são mostrados os objetivos deste trabalho. Ela será dividida em Objetivo geral e Objetivos específicos.

### 1.3.1 *Objetivo geral*

Apresentar resultados recentes e agrupá-los de forma a auxiliar futuros estudos de pesquisadores.

### ***1.3.2 Objetivos específicos***

Organizar trabalhos recentes e apresentar os resultados mais antigos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como objetivo introduzir definições fundamentais para o entendimento deste trabalho. Assim foi usado como base para pesquisa os conceitos que se encontram nos livros de Douglas B. West (WEST *et al.*, 2001) e Bondy e Murphy (BONDY *et al.*, 1976) para os assuntos relacionados à Teoria dos Grafos, Coloração de Lista e coloração em geral. Para o assunto de Complexidade Computacional foi usado o livro de Thomas H. Cormen (CORMEN *et al.*, 2009). A Seção 2.1 trata sobre algumas definições, exemplos e propriedades relacionadas à grafos em geral. A Seção 2.2 aborda Coloração de Grafos. A Seção 2.3 introduz a temática de Coloração de Lista. A Seção 2.4 define alguns conceitos sobre Complexidade Computacional.

### 2.1 Grafos e definições

Nesta seção se encontram definições importantes sobre grafos. É a partir delas que poderemos entender melhor o restante deste trabalho.

Um **grafo**  $G$  é uma tripla consistindo em **um conjunto de vértices**  $V(G)$ , **um conjunto de arestas**  $E(G)$  e uma relação que associa dois vértices a cada aresta (não necessariamente distintos) chamados de **extremidades**. Um grafo é **finito** se seu conjunto de arestas e conjunto de vértices são finitos. Na Figura 9 temos um exemplo de um grafo  $G$  finito com três vértices  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , duas arestas  $\{e_1, e_2\}$  com  $\{v_1, v_2\}$  associados à  $e_1$  e  $\{v_1, v_3\}$  associado à  $e_2$ . A **ordem** de um grafo  $G$  se dá pelo número de vértices que  $G$  possui.

Um **laço** é uma aresta cujas extremidades são iguais. **Arestas múltiplas** são arestas que possuem o mesmo par de extremidades. Um **grafo simples** é um grafo que não possui laços ou múltiplas arestas. Especificamos um grafo simples por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, tratando o conjunto das arestas como pares não ordenados de vértices escrevendo  $e = uv$  (ou  $e = vu$ ) para uma aresta  $e$  com extremidades  $u$  e  $v$ . Quando  $u$  e  $v$  são as extremidades de uma aresta, dizemos que são **adjacentes** ou **vizinhos**. Adotamos a notação  $u \leftrightarrow v$  para “ $u$  é adjacente a  $v$ ”. Neste trabalho adotamos a convenção de que todo grafo é simples e finito, a menos que seja dito o contrário.

Logo abaixo temos exemplos de grafos os quais estão divididos nas Figuras 7 e 8. Na Figura 7 temos o grafo que possui duas arestas  $e_1$  e  $e_2$  que compartilham o mesmo par de extremidades (logo  $e_1$  e  $e_2$  são arestas múltiplas) e uma aresta  $e_3$  que possui um único vértice como extremidades (assim,  $e_3$  é um laço). Já na Figura 8 temos o grafo simples, pois não possui

laço nem aresta múltipla.

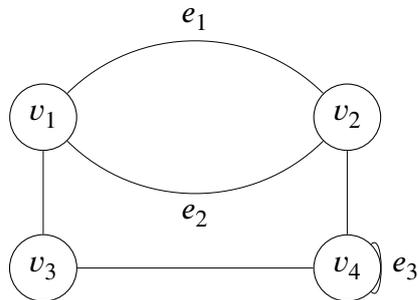


Figura 7 – Grafo  $G$  com múltiplas arestas e um laço.  
Fonte – Próprio autor

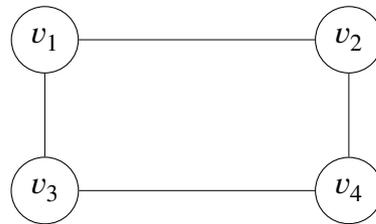


Figura 8 – Grafo simples.  
Fonte – Próprio autor

O **complemento**  $\bar{G}$  de um grafo  $G$  é o grafo com o conjunto de vértices  $V(G)$  e com conjunto de arestas definido por  $uv \in E(\bar{G})$  se e somente se  $uv \notin E(G)$ . O garfo da Figura 10 representa o complemento do grafo da Figura 9.

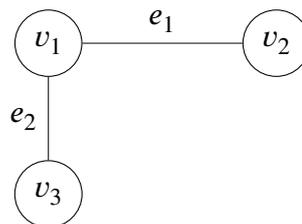


Figura 9 – Exemplo de um grafo finito.  
Fonte – Próprio autor

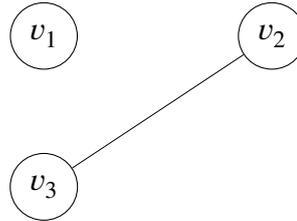


Figura 10 – Exemplo do complemento do grafo  $G$  da Figura 9.

Fonte – Próprio autor

Um conjunto **independente** em um grafo é um conjunto de vértices não adjacentes entre si tomados dois a dois. Na Figura 11 temos um grafo  $G$  com dois conjuntos independentes  $I_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$  e  $I_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ .

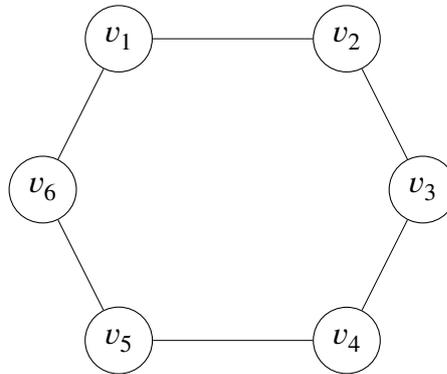


Figura 11 – Exemplo de um grafo  $G$  que possui alguns conjuntos independentes.

Fonte – Próprio autor

Um grafo  $H$  é considerado **subgrafo** de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$  e a associação para as arestas em  $H$  é a mesma que em  $G$ . Na sequência de figuras 12, 13 e 14 são alguns exemplos de subgrafos. Na Figura 12 temos um grafo  $G$ , e nas figuras 13 e 14 subgrafos do grafo  $G$ . Escrevemos  $H \subseteq G$  e dizemos que “ $G$  contém  $H$ ”. Um **subgrafo gerador** de  $G$  é um subgrafo com o conjunto de vértices  $V(G)$ . Na Figura 14 temos um subgrafo não gerador da Figura 12 e na Figura 13 tem um subgrafo gerador da Figura 12.

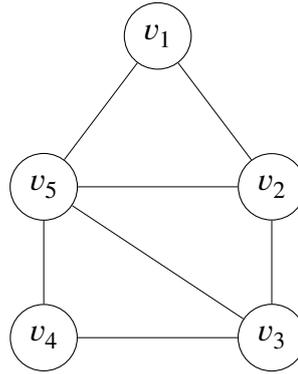


Figura 12 – Exemplo de um grafo  $G$ .  
Fonte – Próprio autor

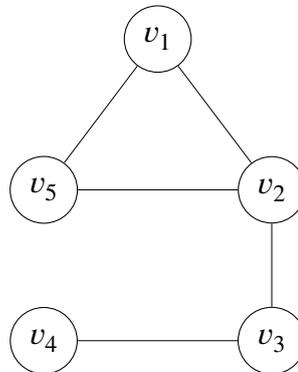


Figura 13 – Exemplo de um subgrafo gerador.  
Fonte – Próprio autor

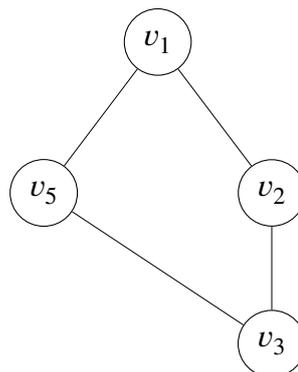


Figura 14 – Exemplo de um subgrafo não gerador.  
Fonte – Próprio autor

Seja  $G$  um grafo. Suponha que  $V'$  é um subconjunto não vazio de  $V(G)$ . O subgrafo  $H$  do grafo  $G$  cujo conjunto de vértices é  $V(H) = V'$  e  $\forall xy \in E(H) \Leftrightarrow xy \in E(G)$  é chamado de subgrafo **induzido** por  $V'$  e denotado por  $G[V']$ . Dizemos que  $G[V']$  é um **subgrafo induzido**

de  $G$ . O subgrafo induzido  $G[V(G)/V']$  é denotado por  $G-V'$ , este é o subgrafo obtido de  $G$  pela remoção dos vértices em  $V'$  junto com as arestas incidentes nos vértices de  $V'$ .  $G[V(G)/v]$ . Agora suponha que  $E'$  é um subconjunto não vazio de  $E(G)$ . O subgrafo de  $G$  cujo conjunto de vértices é o conjunto das extremidades das arestas em  $E'$  e cujo conjunto de arestas é  $E'$  é chamado de subgrafo aresta induzido por  $E'$  e denotado por  $G[E']$ .

Um **caminho** é um grafo cujos vértices podem ser ordenados em uma lista tal que dois vértices são adjacentes se e somente se forem consecutivos na lista. O caminho com  $n$  vértices é denotado por  $P_n$ . Na Figura 15 podemos observar um grafo que possui um subgrafo que é o caminho com vértices  $\{v_1, v_2, v_4 \text{ e } v_5\}$  representado pelas arestas em vermelho. Um **caminho hamiltoniano** de  $G$  é um subgrafo gerador que é um caminho. Um grafo  $G$  é **conexo** se existe um caminho entre qualquer par de vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ ; caso contrário,  $G$  é **desconexo**. Um grafo  $G$  é **perfeito** se  $\chi(H) = \omega(H)$  para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$ .

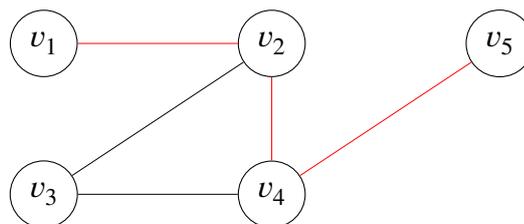


Figura 15 – Grafo com um caminho  $P_3$ .

Fonte – Próprio autor

Um **ciclo**  $C_n$  é um grafo com um número  $n$  de vértices e arestas cujos vértices podem ser colocados em torno de um círculo tal que dois vértices são adjacentes se e somente se eles aparecem consecutivamente ao longo do círculo. Dizemos que  $C_n$  é par se  $n$  é par e que  $C_n$  é ímpar se  $n$  é ímpar. Nas figuras 16 e 17 temos um  $C_4$  e um  $C_5$ . Se  $G$  possui um ciclo que contém todos os seus vértices dizemos que  $G$  possui um **ciclo hamiltoniano**. Na Figura 18, temos como exemplo um grafo  $G$  que possui um ciclo hamiltoniano, no caso o ciclo começa em  $v_1$  passando por  $v_8, v_5, v_2, v_3, v_6, v_7, v_4$  e retornando a  $v_1$ .

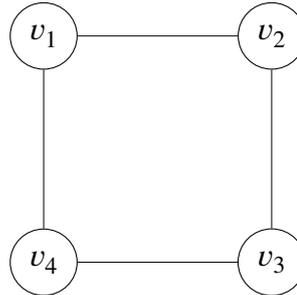


Figura 16 – Exemplo de um  $C_4$  (ciclo par).  
Fonte – Próprio autor

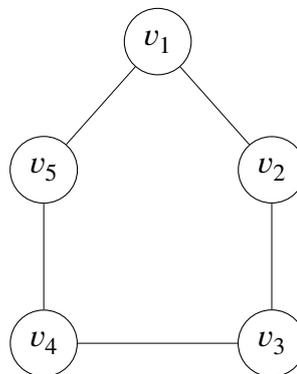


Figura 17 – Exemplo de um  $C_5$  (ciclo ímpar).  
Fonte – Próprio autor

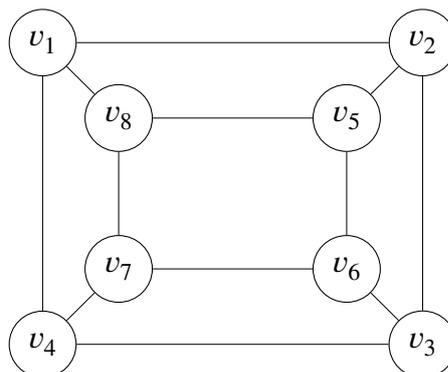


Figura 18 – Grafo  $G$  que possui um ciclo hamiltoniano.  
Fonte – Próprio autor

Um grafo  $G$  é **bipartido** se  $V(G)$  é a união de dois (possivelmente vazios) conjuntos disjuntos independentes chamados **conjuntos de partições** de  $G$ . No grafo da Figura 19 temos que  $\{v_1, v_2\}$  e  $\{v_3, v_4\}$  não formam uma bipartição, pois não são conjuntos independentes, ou seja, não possuem ligação entre vértices de mesmo conjunto. Porém isso não significa que ele

não é um grafo bipartido, já que na Figura 21 temos o mesmo grafo, com a escolha de vértices para os conjuntos independentes  $\{v_1, v_3\}$  e  $\{v_2, v_4\}$ , e com isso conseguimos duas partições de conjuntos independentes mostrando que o grafo é bipartido. Um grafo  $G$  é **k-partido** se  $V(G)$  pode ser expresso como a união de  $k$  conjuntos independentes.

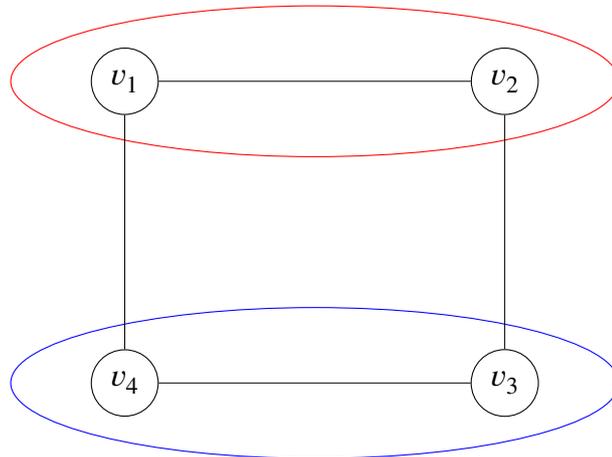


Figura 19 – Exemplo de um grafo  $G$  bipartido, porém com os conjunto de vértices que não formam uma partição.

Fonte – Próprio autor

Na Figura 20 temos um grafo e dois conjuntos  $\{v_1\}$  e  $\{v_2, v_3\}$ . Perceba que mesmo tendo dois conjuntos e um deles  $\{v_1\}$  só tendo ligações com os vértices fora da sua partição, a sua outra partição  $\{v_2, v_3\}$  não é conjunto independente. O grafo possui um ciclo ímpar e sabe-se que um grafo bipartido não possui ciclos ímpares. Dessa forma o grafo da Figura 20 não é bipartido.

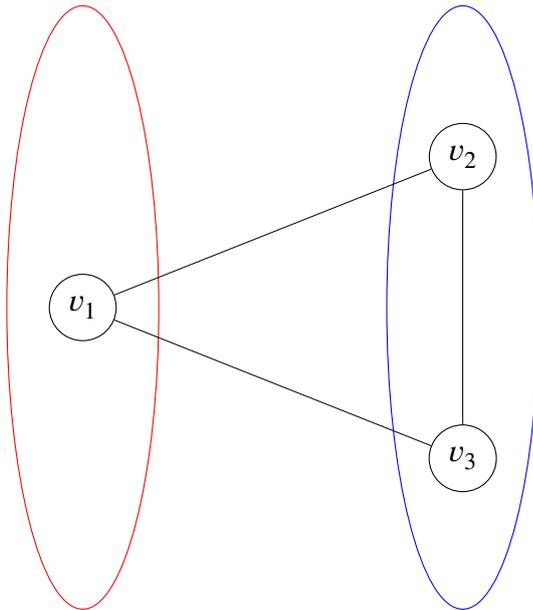


Figura 20 – Exemplo de um grafo  $G$  não bipartido.  
Fonte – Próprio autor

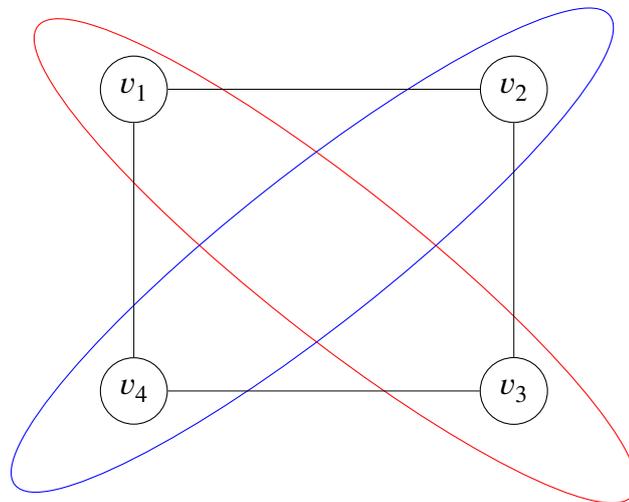


Figura 21 – Exemplo de um grafo  $G$  bipartido.  
Fonte – Próprio autor

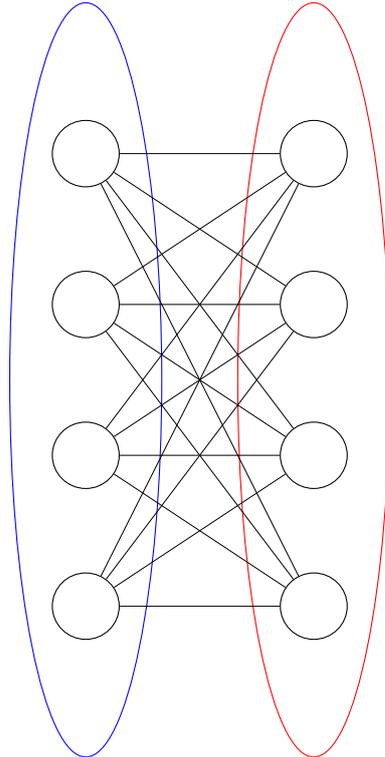


Figura 22 – Exemplo de um grafo  $K_{4,4}$ .  
Fonte – Próprio autor

Um **grafo completo** é um grafo cujos os pares de vértices são todos adjacentes entre si. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . Uma **clique** em um grafo é um conjunto de vértices tal que são todos adjacentes entre si. Um **grafo bipartido completo** ou **biclique** é um grafo bipartido tal que dois vértices são adjacentes se e somente se eles estão em conjuntos de partições diferentes. Quando os conjuntos possuem tamanho  $r$  e  $s$ , a biclique é denotada por  $K_{r,s}$ . Nas figuras 23, 24 e 25 consecutivamente temos o exemplo de um clique, em seguida um grafo  $K_5$  e um grafo  $K_{4,4}$ .

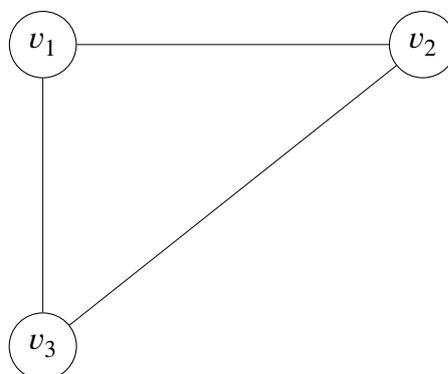


Figura 23 – Exemplo de uma clique  $K_3$ .  
Fonte – Próprio autor

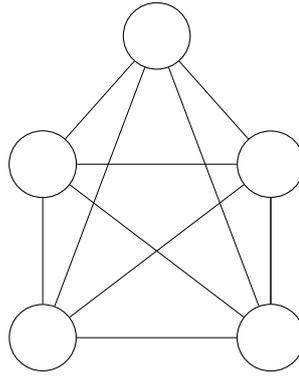


Figura 24 – Exemplo de um grafo  $K_5$ .  
Fonte – Próprio autor

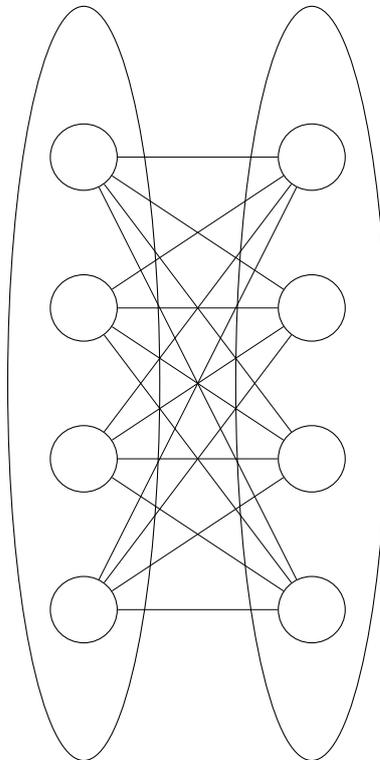


Figura 25 – Exemplo de um grafo  $K_{4,4}$ .  
Fonte – Próprio autor

O **grau** de um vértice  $v$  de um grafo  $G$ , denotado por  $d_G(v)$  ou  $d(v)$  (quando o grafo está claro no contexto), é o número de arestas que incidem em  $v$ . O grau máximo é denotado por  $\Delta(G)$ , o grau mínimo é denotado por  $\delta(G)$  e  $G$  é **regular** se  $\Delta(G) = \delta(G)$ . Veja na Figura 26, temos um grafo com  $\Delta(G) = 5$  e  $\delta(G) = 3$  que não é regular. Dizemos que um grafo  $G$  é  **$k$ -regular** se todos os seus vértices possuem grau  $k$ . A **vizinhança** de  $v$ , denotado por  $N_G(v)$  ou  $N(v)$  quando está claro no contexto, é o conjunto de vértices adjacentes à  $v$ . Na figura 27, temos um grafo 3-regular com  $\Delta(G) = \delta(G) = 3$ .

Um grafo com nenhum ciclo é dito **acíclico**. Uma **árvore** é um grafo conexo ací-

clico. Uma **floresta** é um grafo acíclico. Uma **folha** é um vértice de grau 1. Uma **árvore geradora** é um subgrafo gerador que é uma árvore. Na Figura 28 temos exemplo de uma árvore com  $v_2, v_3, v_5$  sendo suas folhas.

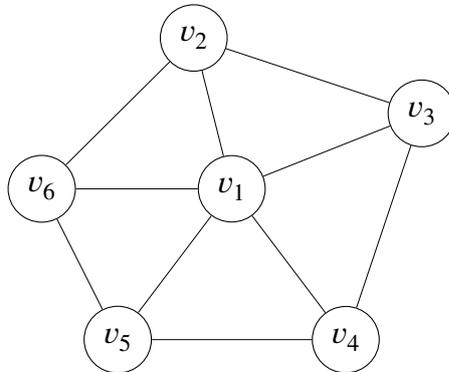


Figura 26 – Representa um grafo  $G$  onde  $\Delta(G) = 5$  e  $\delta(G) = 3$ .

Fonte – Próprio autor

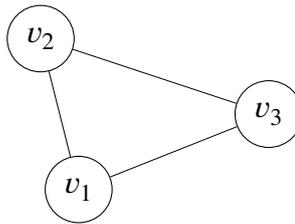


Figura 27 – Representa um grafo  $G$  2-regular.

Fonte – Próprio autor

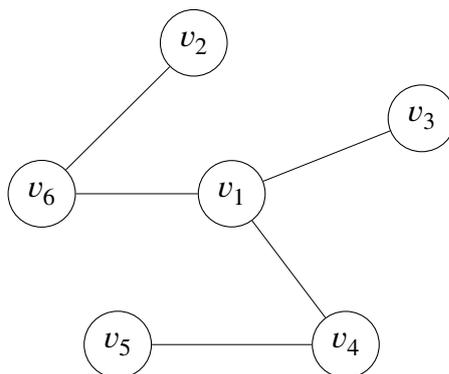


Figura 28 – Temos um grafo  $G$  que representa uma árvore.

Fonte – Próprio autor

As **componentes** de um grafo  $G$  são seus subgrafos conexos maximais. É dito que uma componente conexa é **trivial** se ela não possui arestas; caso contrário os chamamos de **maximais**. Nas figuras 26, 27 e 28 temos exemplos de três componentes conexas.

Uma árvore é uma floresta conexa e toda **componente** conexa de uma floresta é uma árvore. Um grafo sem ciclos não tem ciclos ímpares; por isso árvores e florestas são grafos bipartidos. Dizemos que caminhos são árvores pois os mesmos são conexos e não possuem ciclos ímpares. Uma árvore é um caminho se somente se seu grau máximo é dois. Nas figura 29 temos um exemplo de um florestas com três árvores.

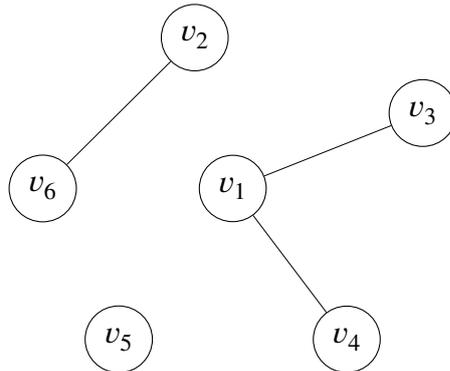


Figura 29 – Uma floresta com três árvores.  
Fonte – Próprio autor

Uma **estrela** é uma árvore consistindo de um vértice adjacente a todos os outros, isto é, Uma estrela com  $n$  vértices é uma biclique  $K_{1,n-1}$ . Na Figura 30, temos um exemplo de uma estrela  $K_{1,4}$ .

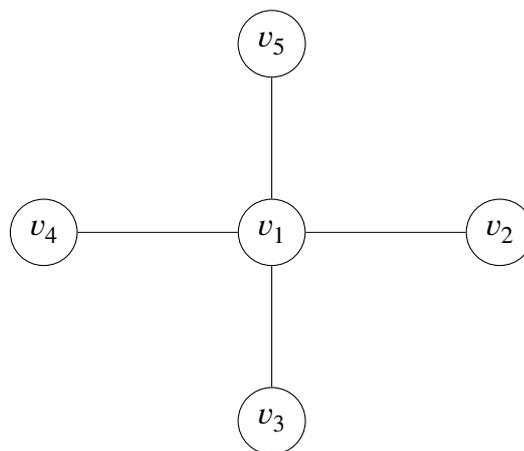


Figura 30 – Exemplo de uma estrela.  
Fonte – Próprio autor

As definições a seguir foram retirados de (WEST *et al.*, 2001) onde servirão para um melhor entendimento sobre planaridade. Uma **curva** é a imagem contínua do mapa de  $[0, 1]$  para  $\mathbb{R}^2$ . Uma **curva poligonal** é uma curva composta por finitos segmentos de linhas. Chamamos de  $u, v$ -**curva poligonal** quando a curva começa em  $u$  e termina em  $v$ . Um **desenho** de um grafo  $G$

é uma função  $f$  definida em  $V(G) \cup E(G)$  que associa cada vértice  $v$  a um ponto  $f(v)$  no plano e associa cada aresta com extremidades  $u, v$  a uma  $f(u), f(v)$ -curva poligonal. As imagens dos vértices são distintas. Tomando  $e = uv$  e  $e' = u'v'$  sendo  $uv$  pertencente a uma curva poligonal diferente de  $u'v'$ , dizemos que um **cruzamento** é um ponto  $f(e) \cap f(e')$ .

Um grafo é **planar** se ele possui um desenho no plano sem cruzamentos. Tal desenho é uma **imersão planar** de  $G$ . Um **grafo plano** é uma imersão planar particular de um grafo planar. Uma curva é **fechada** se o primeiro e último ponto são o mesmo. A curva é **simples** se ele não tem pontos repetidos exceto a possibilidade do primeiro e último ponto serem o mesmo. Na Figura 31 temos um exemplo de um grafo não plano, já na Figura 32 temos a representação planar do grafo anterior.

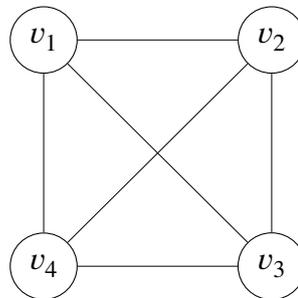


Figura 31 – Um grafo  $G$  não plano.

Fonte – Próprio autor

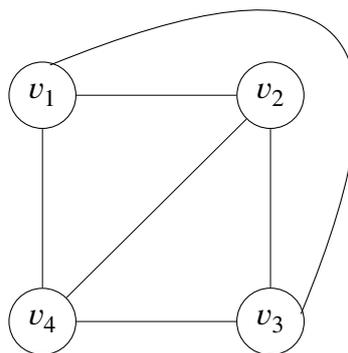


Figura 32 – Um grafo  $G$  planar.

Fonte – Próprio autor

O **grafo linha** de  $G$ , denotado por  $L(G)$ , é o grafo cujos vértices são as arestas de  $G$  isto é,  $V(L(G)) = E(G)$ , com  $e, f \in E(G)$  quando  $e$  e  $f$  possuem uma extremidade em comum em  $G$ . Na Figura 33, temos um exemplo de um grafo  $G$ , na sequência, na Figura 34 temos o

exemplo do grafo linha da Figura 33.

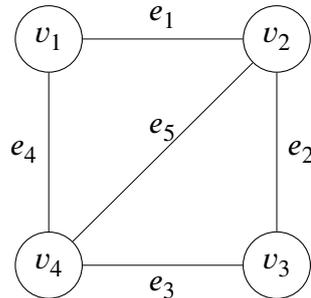


Figura 33 – Exemplo de um grafo  $G$ .

Fonte – Próprio autor

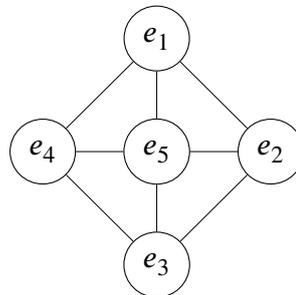


Figura 34 – Exemplo do grafo linha da Figura 33.

Fonte – Próprio autor

Um **grafo orientado** ou **digrafo**  $G$  é uma tripla que consiste de um **conjunto de vértices**  $V(G)$ , um **conjunto de arestas**  $E(G)$  e uma função que associa cada aresta a um par ordenado de vértices. O primeiro vértice do par ordenado é a **cauda** da aresta e o segundo é a **cabeça**; juntos, eles são as **extremidades** da aresta no digrafo. Em um digrafo ou grafo orientado  $G$ , uma aresta é associada a dois pares vértices ordenados, um em cada extremidade.

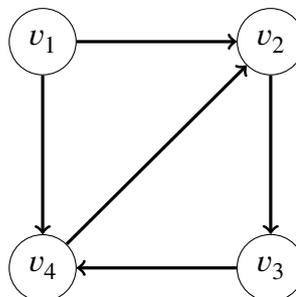


Figura 35 – Exemplo de um digrafo.

Fonte – Próprio autor

Um  $\Theta$ -grafo consiste de um grafo com dois vértices  $u$  e  $v$  conectados por três caminhos  $u - v$  internamente disjuntos. O grafo  $\Theta_{i,j,k}$  é o  $\Theta$ -grafo cujos três caminhos  $u - v$

internamente disjuntos possuem tamanho  $i, j$  e  $k$ . O **núcleo** de um grafo é obtido por sucessivas remoções de vértices que são as extremidades de uma aresta até que não sobre nenhum. Na Figura 36 temos um exemplo de um grafo  $\Theta_{2,2,5}$ , onde temos os caminhos  $P_1 = \{v_1, v_7, v_6\}$  com  $i = 2$ ,  $P_2 = \{v_1, v_8, v_6\}$  com  $j = 2$  e  $P_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  com  $k = 5$ .

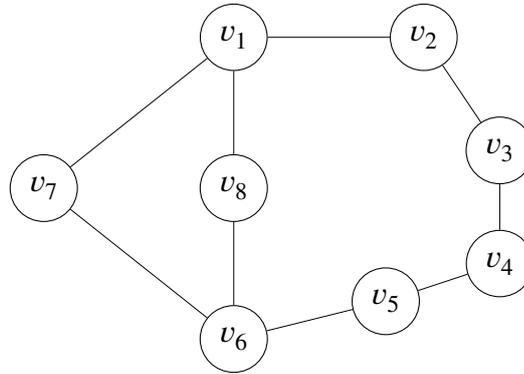


Figura 36 – Exemplo de um grafo  $\Theta_{2,2,5}$ .  
Fonte – Próprio autor

## 2.2 Coloração de grafos

Nesta seção serão tratadas definições básicas sobre a coloração de grafos. Uma  $k$ -**coloração** de um grafo  $G$  é a rotulação  $f : V(G) \rightarrow S$ , onde  $|S| = k$ . Os rótulos são **cores**; os vértices de uma mesma cor formam uma **classe de cor**. Uma  $k$ -coloração é **própria** se vértices adjacentes têm rótulos diferentes. Um grafo é  $k$ -**colorível** se este possui uma  $k$ -coloração própria. O **número cromático**  $\chi(G)$  é o número mínimo de cores  $k$  em que  $G$  é  $k$ -colorível. Logo abaixo, na Figura 37, temos um exemplo que em que podemos ver a coloração de grafos com o nome de *Agendamento e Coloração de grafos*.

Suponha que tenhamos que agendar encontros do comitê do senado em períodos da semana. Nós não podemos associar dois comitês no mesmo período se eles tiverem um membro em comum. Quantos períodos de tempos diferentes nós precisamos?

Modelando num grafo nós criamos um vértice para cada comitê e dois vértices são adjacentes quando seus comitês possuem membros em comum. Nós precisamos associar rótulos (períodos de tempo) para os vértices, então as extremidades de cada aresta recebem diferentes rótulos, já que não podemos possuir membros do comitê em encontros no mesmo período de tempo. Na Figura 37, podemos usar um rótulo para cada três conjuntos independentes de vértices agrupados bem próximos. Os membros de uma clique devem receber rótulos distintos, então neste exemplo o mínimo de números de período de tempo é três. Como estamos interessados apenas

nos vértices particionados e os rótulos não possuem valor numérico é conveniente chamá-los de cores.

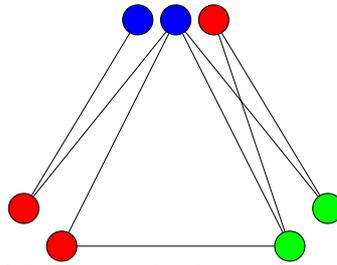


Figura 37 – Exemplo de agendamento.  
Fonte – (WEST *et al.*, 2001)

Um grafo  $G$  é  $k$ -**cromático** se  $\chi(G) = k$ . Uma  $k$ -coloração própria de um grafo  $k$ -cromático é uma **coloração ótima**. Se  $\chi(H) < \chi(G) = k$  para todo subgrafo  $H$  de  $G$ , então  $G$  é **cor-crítico** ou  $k$ -**crítico**. Nas figuras 38 e 39 temos exemplos de um grafo  $k$ -cromático e  $k$ -crítico.

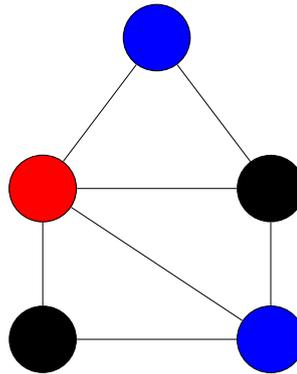


Figura 38 – Exemplo de um grafo  $G$  3-cromático com uma coloração ótima.

Fonte – Próprio autor

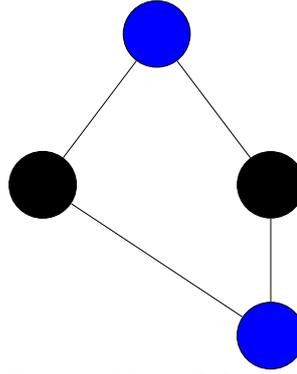


Figura 39 – Subgrafo  $H$  de  $G$  com  $\chi(H) < \chi(G) = 3$ .  
Fonte – Próprio autor

Um **emparelhamento** em um grafo  $G$  é o conjunto de arestas (duas a duas) que não compartilham a mesma extremidade. Dizemos que os vértices incidentes sobre as arestas de um emparelhamento  $M$  são **saturadas** por  $M$ ; caso contrário são **não saturadas**. Na Figura 40, podemos observar as arestas em vermelho  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4$  fazem parte de um emparelhamento  $M$  **perfeito** onde todos os vértices estão saturados. Já na Figura 41 temos um exemplo de um grafo com um emparelhamento onde  $e_1$  e  $e_2$  fazem com que nem todos os vértices sejam saturados.

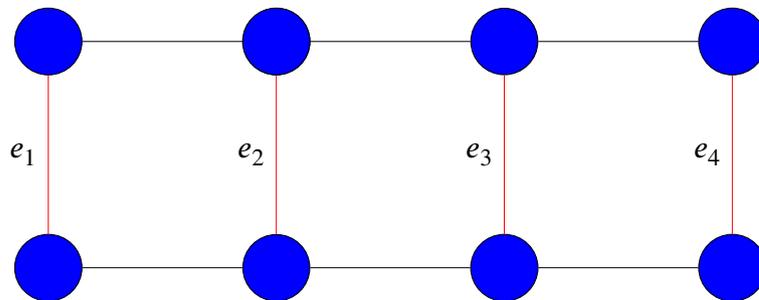


Figura 40 – Exemplo de um emparelhamento saturado.  
Fonte – Próprio autor

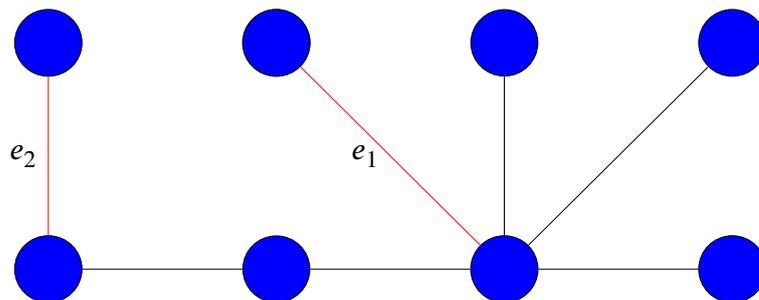


Figura 41 – Exemplo de um emparelhamento não saturado.  
Fonte – Próprio autor

Uma  $k$ -**aresta-coloração** de  $G$  é uma rotulação  $f: E(G) \rightarrow S$ , onde  $|S| = k$ . Os rótulos são **cores**; as arestas de uma mesma cor formam uma **classe de cor**. Uma  $k$ -aresta-coloração é própria se arestas que incidem sobre o mesmo vértice possuem rótulos diferentes; isto é, se cada classe de cor é um emparelhamento. Se  $G$  é um grafo  $k$ -aresta-colorível e não é  $k-1$ -aresta-colorível, então o  $\chi'(G) = k$ . Na Figura 42 temos um exemplo de um grafo  $G$  que possui uma 3-aresta coloração.

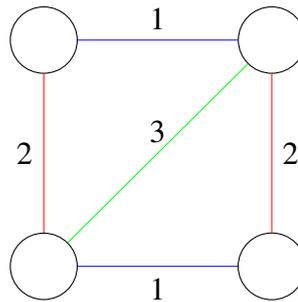


Figura 42 – Exemplo de um grafo 3-aresta colorível.

Fonte – Próprio autor

### 2.3 Coloração de Lista

Na seção anterior tratamos sobre as definições gerais envolvendo a coloração de grafos. Nesta iremos abordar algo mais específico com foco na Coloração de Lista.

Para cada vértice  $v$  em um grafo  $G$ ,  $L(v)$  denota uma lista de cores disponíveis para cada  $v \in V(G)$ . Uma **coloração de lista** ou **função de escolha** é uma coloração própria  $f$  tal que  $f(v) \in L(v)$  para todo  $v \in V(G)$ . Um grafo é  $k$ -**selecionável** ou **lista  $k$ -selecionável** se toda associação da lista de  $k$ -elementos para cada vértice de  $G$  temos que exista uma coloração de lista possível. O **número lista cromático**, **número escolha** ou **selecionabilidade**  $\chi_l(G)$  é o menor  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -lista-colorível. Nas figuras 43 e 44 temos exemplos de um grafo com uma coloração de lista e em sequência um grafo 4-selecionável. No exemplo 43 podemos observar que no vértice  $v_1$  possuímos uma lista  $l_1 = \{1, 2, 3\}$  cores, em  $v_2$  temos  $l_2 = \{2, 3\}$  cores, em  $v_3$  temos  $l_3 = \{1, 3\}$  cores e  $v_4$  temos  $l_4 = \{1, 2\}$  cores.

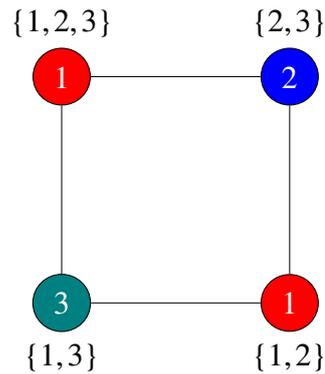


Figura 43 – Exemplo de um grafo  $G$  com uma coloração de lista.

Fonte – Próprio autor

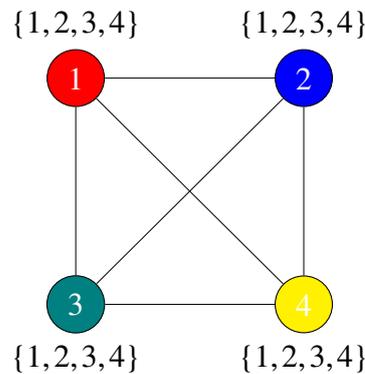


Figura 44 – Exemplo de um grafo  $G$  4-selecionável.

Fonte – Próprio autor

Uma  **$k$ -pré coloração** de um grafo  $G = (V, E)$  é um mapeamento  $c_w : W \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  para algum subconjunto  $W \subseteq V$ . Uma  $k$ -coloração  $c$  de  $G$  é uma **extensão** de uma  $k$ -pré coloração  $c_w$  de  $G$ , se  $c(v) = c_w(v)$  para cada  $v \in W$ .

Seja  $L(e)$  que denota a lista de cores disponíveis para  $e$ . Uma **lista aresta-coloração** é uma propriedade aresta-coloração  $f$  com  $f(e)$  escolhido de  $L(e)$  para cada  $e$ . A **aresta-selecionabilidade**  $\chi'_l(G)$  é o menor  $k$  tal que toda associação da lista de tamanho  $k$  produz uma propriedade lista aresta-coloração. De forma equivalente, podemos dizer que  $\chi'_l(G) = \chi(L(G))$ , onde  $L(G)$  é o grafo linha de  $G$ . Em 2.3.1 teremos dois exemplos sobre Coloração de Lista.

### 2.3.1 Exemplos sobre Coloração de Lista

O prefeito de uma cidade decide adicionar a rádio local em um projeto que reúne rádios de uma região com o objetivo de aumentar a visibilidade das mesmas. A empresa que iniciou a ideia do projeto possui antenas que serão usadas para transmitir o sinal das rádios. A empresa atribui até  $k$  frequências a cada antena. Chamamos de  $l$  a atribuição das frequências às antenas. Sabendo que cada antena pode transmitir em uma frequência dentre uma lista com até  $k$  frequências, dizemos que duas antenas são próximas entre si quando o alcance do sinal de uma delas causa interferência na outra, essa interferência só existe quando as antenas possuem frequências iguais. Assim, foi montado um arranjo em que durante as transmissões as antenas que são próximas entre si transmitam em frequências diferentes evitando qualquer tipo de interferência entre as rádios. Iremos modelar as antenas como vértices. Se considerarmos duas antenas  $v_1$  e  $v_2$ , teremos uma aresta  $e = v_1v_2$  se  $v_1v_2$  forem próximas entre si. Podemos modelar a lista de frequências  $L$  como uma lista de cores. Dessa forma temos a função  $f$  que atribui a cada antena  $v$  uma cor  $f(v)$  dentre a lista  $L(G)$  com até  $k$  cores. Esse problema recebe o nome de Distribuição de sinal de rádio porém da forma como foi modelado o mesmo pode ser reconhecido como um lista- $k$  coloração. Uma **lista  $k$ -coloração** possui uma propriedade de coloração  $f$  tal que  $f(v) \in L(v) \subseteq \{1, \dots, k\}$  para todo  $v \in V(G)$ . Podemos usar a Figura 45 como uma ilustração do exemplo abordado. Na Figura 45 percebemos que a lista  $k$ -coloração existe fazendo com que  $k$  seja igual a 4.

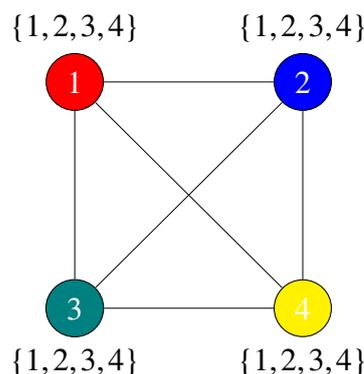


Figura 45 – Exemplo de um grafo  $G$  com uma lista  $k$ -coloração.

Fonte – Próprio autor

Abordando agora outro exemplo. Em uma gincana escolar os professores reuniram as crianças em um pátio e as distribuíram de forma que ficassem a aproximadamente um braço

de distância uma da outra. Dizemos que uma criança possui um colega ao seu redor se ela estiver a até um braço de distância do colega. Os professores foram entregando sacolinhas com bolinhas que eram numeradas para cada criança. As sacolinhas possuíam um número mínimo de bolas. Assim quando todas as crianças já estavam com as sacolinhas em mãos, os professores pediram que, uma por uma, as crianças fossem pegando as bolinhas mas se atentando a não terem o mesmo número dos colegas ao seu redor. Dessa forma, existe uma função  $f$  que associa a cada criança uma bolinha. No final, cada criança possuía uma bolinha com o número diferente dos seus colegas ao redor. Iremos modelar cada criança como um vértice. Se considerarmos duas crianças  $u$  e  $v$ , teremos uma aresta  $e = uv$  se  $u$  estiver ao redor de  $v$  ou  $v$  estiver ao redor de  $u$ . Podemos modelar o conjunto  $L$  de todos com as bolinhas como nossa lista de cores. Deste modo temos que a função  $f$  atribui a cada criança  $u$  uma cor  $f(u)$  dentre a lista  $L(u)$  com no mínimo  $k$  cores. Esse problema recebe o nome de  $k$ -lista coloração. Uma  $k$ -**lista coloração** possui uma propriedade de coloração  $f$  tal que  $f(v) \in L(v)$  onde  $L(v)$  tem tamanho pelo menos  $k$  para todo  $v$ . Na Figura 46 percebemos que o tamanho das listas dispostas para seus vértices tem tamanho pelo menos de  $k = 4$ .

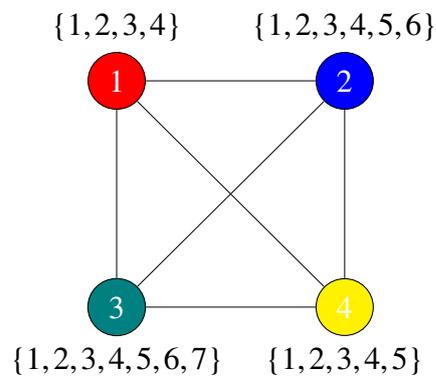


Figura 46 – Exemplo de um grafo  $G$  com uma  $k$ -lista coloração.

Fonte – Próprio autor

## 2.4 Complexidade computacional

Essa seção irá tratar de alguns conceitos básicos usados dentro da complexidade computacional como por exemplo: a ideia de problema, instância e tempo de execução. Informalmente, um **algoritmo** é qualquer procedimento computacional bem definido. Tais procedimentos possuem algum valor ou conjunto de valores como **entrada** e produzem algum valor ou conjuntos de valores como **saída**. Dessa forma um algoritmo, iniciando com uma entrada, produz uma

saída através de uma sequência computacional de passos.

Podemos relacionar algoritmo como uma ferramenta para resolver problemas computacionais específicos. O enunciado do problema em termos gerais motiva a criação de um procedimento computacional com o desejo de alcançar a relação entre entrada e saída.

Como uma forma de deixar mais claro, vamos utilizar um simples exemplo de um problema. Imagine que nos foi solicitado que desenvolvêssemos um algoritmo que resolva um problema de coloração. O problema se resume em receber os vértices de um grafo  $G$  qualquer e um conjunto de cores e retornar se é possível colorir seus vértices com a restrição de que vértices adjacentes não podem ter as mesmas cores. Formalmente, teremos o **Problema de Coloração** que tem como instância um grafo, um conjunto de cores e terá como **saída** os mesmos vértices coloridos por um mapeamento de cores  $c$  tal que  $c(v_1) \neq c(v_2)$  para todos os pares de vértices  $v_1$  e  $v_2$  adjacentes em  $G$  ou a informação de que não é possível colorir  $G$  de maneira própria.

Dando como instância o grafo ilustrado na Figura 47, podemos receber como saída o grafo colorido da Figura 48. Considerando o conjunto de cores podemos chamar esse grafo dado como instância de **instância** do Problema de Coloração.

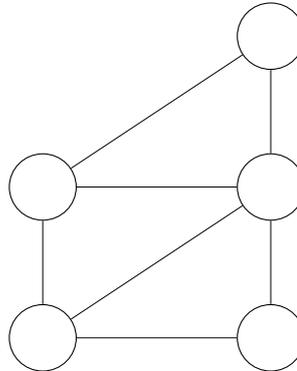


Figura 47 – Grafo  $G$  representando a entrada do problema de coloração.

Fonte – Próprio autor

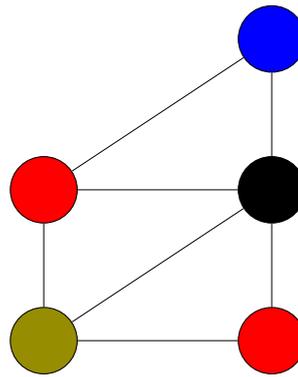


Figura 48 – Grafo  $G$  representando a saída do problema de coloração.  
Fonte – Próprio autor

Podemos definir o **tempo de execução** de um algoritmo como o número de operações ou passos que serão executados a partir de uma entrada até gerar uma saída. Mais adiante falamos sobre **P**, **NP** e **NPC** que são classes de **problemas de decisão** (problemas cuja resposta é simplesmente "sim" ou "não").

Podemos entender como uma **linguagem formal** qualquer conjunto de cadeias ou palavras formadas por símbolos extraídos de um **alfabeto**  $S$ . O alfabeto  $S$  é um conjunto finito de símbolos com os quais podemos construir **palavras** que por sua vez podem ou não pertencer a uma linguagem formal  $L$ .

A classe **P** (*Execution in Polynomial Time*) consiste de problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Mais especificamente, são problemas de decisão que podem ser resolvidos em  $O(n^k)$  para alguma constante  $k$ , onde  $n$  é o tamanho da entrada do problema.

Podemos definir o **Problema do Ciclo Hamiltoniano** como uma linguagem formal:  $\text{CICLO-HAMILTONIANO} = \{\langle G \rangle : G \text{ é um grafo hamiltoniano}\}$ . Como um algoritmo consegue decidir uma linguagem CICLO-HAMILTONIANO? Dado uma instância  $\langle G \rangle$ , um possível algoritmo de decisão lista todas as permutações dos vértices de  $G$  e então checa cada permutação para verificar se é um ciclo hamiltoniano. Qual é o tempo de execução desse algoritmo? Se usarmos uma codificação razoável de um grafo como sua matriz adjacências, o número  $m$  de vértices no grafo é  $\Omega(\sqrt{n})$ , onde  $n = |\langle G \rangle|$  é o tamanho da codificação de  $G$ . Existe  $m!$  possíveis permutações de vértices e portanto o tempo de execução é  $\Omega(m!) = \Omega\left(\left(\sqrt{n}\right)!\right) = \Omega\left(2^{\sqrt{n}}\right)$ , que não é  $O(n^k)$  para qualquer constante  $k$ . Desse modo, este ingênuo algoritmo não tem um tempo de execução polinomial.

A classe **NP** (*Execution Nondeterministic in Polynomial Time*) consiste de problemas de decisão que são verificáveis em tempo polinomial. Se de alguma forma nos for dado um certificado de uma solução, então poderíamos verificar que o certificado é correto em tempo polinomial no tamanho da entrada do problema. Por exemplo, no problema do Ciclo Hamiltoniano, dado um grafo orientado  $G = (V, E)$ , um certificado seria uma sequência  $\langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_{|V|} \rangle$  de  $|V|$  vértices. Podemos facilmente checar em tempo polinomial que  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, |V| - 1$  e que  $(v_{|V|}, v_1) \in E$  também.

De forma intuitiva, um problema  $Q$  pode ser reduzido a outro problema  $Q'$  se qualquer instância  $I$  de  $Q$  pode ser facilmente reformulada como uma instância  $I'$  de  $Q'$ , de forma que a solução para  $I'$  provê solução para  $I$ . Por exemplo, o problema de solucionar equações lineares sobre um  $x$  se reduz ao problema de solucionar equações quadráticas para o mesmo  $x$ . Dado uma instância  $ax + b = 0$ , podemos transformar em  $0x^2 + ax + b = 0$ , cuja solução provê solução para  $ax + b = 0$ . Portanto, se um problema  $Q$  se reduz em tempo polinomial a outro problema  $Q'$ , então  $Q$  é, tão difícil de se resolver quanto  $Q'$ .

Um problema está na classe **NPC** (*NP-Completo*) se está em NP e é tão difícil de se resolver quanto qualquer outro problema em NP. Formalmente dizemos que um problema  $Q \in \text{NPC}$  se  $Q$  possui as seguintes propriedades:

1.  $Q \in \text{NP}$
2. Qualquer problema em NP pode ser reduzido a  $Q$  em tempo polinomial

Se apenas a Propriedade 2 é satisfeita, dizemos que o problema é **NP-difícil**, contudo se as duas forem satisfeita nosso problema é NP-Completo.

### 3 TRABALHOS RELACIONADOS

O objetivo deste capítulo é ilustrar alguns resultados que envolvem Coloração de Lista que estão organizados do mais geral ao mais específico. Esses resultados foram retirados do artigo de Simone (GAMA *et al.*, 2016) e dos livros Douglas West (WEST *et al.*, 2001) e Chartrand e Zhang (CHARTRAND; ZHANG, 2008). Além disso, temos (SANKAR *et al.*, 2016), um *survey* que serviu como base para o desenvolvimento deste trabalho.

#### 3.1 Resultados gerais envolvendo grafos

Essa seção irá focar nos resultados mais gerais envolvendo Coloração de Lista. Os teoremas e conjecturas que se encontram nessa seção foram retirados de (ERDOS *et al.*, 1979) e (CHARTRAND; ZHANG, 2008).

**Teorema 3.1.1** *Toda árvore é 2-selecionável. Além disso, para toda árvore  $T$ , para um vértice  $u$  de  $T$  e para uma coleção  $\mathcal{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$  de lista de cores de tamanho 2, existe uma  $\mathcal{L}$ -lista-coloração de  $T$  em que a cor  $a$  é atribuída ao vértice  $u$  onde  $a \in L(u)$ .*

**Prova 3.1.2** *Prosseguimos por indução na ordem da árvore. O resultado é trivial para uma árvore de tamanho 1 ou 2, visto que com apenas um vértice  $u$  podemos selecionar uma das cores para  $u$  e com dois vértices  $u, v$  podemos selecionar uma cor para  $u$  e outra para  $v$ . Assuma que a demonstração é verdade para todas as árvores de ordem  $k$ , onde  $k \geq 2$ . Seja  $T$  uma árvore de ordem  $k + 1$  e  $\mathcal{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$  uma coleção de listas de cores de tamanho 2, tome  $u \in V(T)$  e suponha que  $a \in L(u)$ . Assim iremos pegar  $x$  que será uma folha de  $T$  tal que  $x \neq u$  e  $\mathcal{L}' = \{L(v) : v \in V(T - x)\}$ . Seja  $y$  o nó vizinho de  $x$  em  $T$ . Por hipótese de indução, existe uma  $\mathcal{L}'$ -lista-coloração  $c'$  de  $T - x$  em que  $u$  é colorido por  $a$ . Agora seja  $b \in L(x)$  tal que  $b \neq c'(y)$ . Então a coloração  $c$  definida por:*

$$c(v) = \begin{cases} b & \text{se } v = x \\ c'(v) & \text{se } v \neq x \end{cases}$$

onde  $c(v)$  representa a coloração total da árvore  $T$  que é uma  $\mathcal{L}$ -lista-coloração de  $T$  em que  $u$  é colorido por  $a$ . ■

**Teorema 3.1.3** (ERDOS *et al.*, 1979). *Todo ciclo par é 2-selecionável.*

**Prova 3.1.4** *Partindo da ideia que já sabemos que um  $C_4$  é 2-selecionável. Seja  $C_n$  um  $n$ -ciclo onde  $n \geq 6$ . Suponha que  $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ . Dada uma coleção  $\mathcal{L} = \{L(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$  de lista de colorações de tamanho 2 para os vértices de  $C_n$ . Iremos demonstrar que  $C_n$  é  $\mathcal{L}$ -lista-colorível. Vamos considerar dois casos.*

*Caso 1. Todas as listas têm as mesmas cores, digamos que  $L(i) = \{1, 2\}$  para  $1 \leq i \leq n$ . Se associarmos a cor 1 para  $v_i$  para todo  $i$  ímpar e a cor 2 para  $v_i$  para  $i$  par, então  $C_n$  é  $\mathcal{L}$ -lista-colorível.*

*Caso 2. Nem todas as listas têm as mesmas cores em  $\mathcal{L}$ . Então há vértices adjacentes  $v_i$  e  $v_{i+1}$  em  $G$  tal que  $L(v_i) \neq L(v_{i+1})$ . Portanto existe uma cor  $a \in L(v_{i+1}) - L(v_i)$ . O grafo  $C_n - v_i$  é um caminho de ordem  $n - 1$ . Seja  $\mathcal{L}' = \{L(v) : v \in V(C_n - v_i)\}$ . Pelo teorema anterior, existe uma  $\mathcal{L}'$ -lista-coloração  $c'$  de  $C_n - v_i$  em que  $c'(v_{i+1}) = a$ . Seja  $b \in L(v_i)$  tal que  $b \neq c'(v_{i-1})$ . Então a coloração  $c$  definida por:*

$$c(v) = \begin{cases} b & \text{se } v = v_i \\ c'(v) & \text{se } v \neq v_i \end{cases}$$

*é uma  $\mathcal{L}$ -lista-coloração de  $G$ .* ■

**Teorema 3.1.5** (ERDOS et al., 1979). *Um grafo conexo  $G$  é 2-selecionável se e somente se seu núcleo é  $K_1$ , um ciclo par ou  $\theta_{2,2,2k}$  para algum  $k \geq 1$ .*

**Conjectura 3.1.6** (WEST et al., 2001)  $\chi'_l(G) = \chi'(G)$  para todo  $G$ .

Essa mesma conjectura foi provada para diversos tipos de grafos. Destacamos que em 1995 Galvin provou essa conjectura para grafos bipartidos.

**Teorema 3.1.7** (CHARTRAND; ZHANG, 2008). *Se  $r$  e  $k$  são inteiros positivos tal que  $r \geq \binom{2k-1}{k}$ , então  $\chi_l(K_{r,r}) \geq k + 1$ .*

**Prova 3.1.8** *Assuma, por contradição, que  $\chi_l(K_{r,r}) \leq k$ . Então existe uma  $k$ -lista-coloração de  $K_{r,r}$ . Seja  $U$  e  $W$  conjuntos de partições de  $K_{r,r}$  onde:*

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \text{ e } W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}.$$

Seja  $S = \{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ . Existem  $\binom{2k-1}{k}$  subconjuntos de  $k$ -elementos distintos de  $S$ , onde  $k$ -elementos são listas de tamanho  $k$ . Atribua essas listas de coloração para  $\binom{2k-1}{k}$  vértices de  $U$  e para  $\binom{2k-1}{k}$  vértices de  $W$ . Qualquer vértice restante de  $U$  e  $W$  é atribuído a qualquer  $k$ -elemento do subconjunto de  $S$ . Para  $i = 1, 2, \dots, r$ , selecione uma cor  $a_i \in L(u_i)$  e seja  $T = \{a_i : 1 \leq i \leq r\}$ . Consideramos dois casos.

*Caso 1.*  $|T| \leq k - 1$ . Então existe um  $k$ -elemento do subconjunto  $S'$  de  $S$  que é disjunto de  $T$ . No entanto,  $L(u_j) = S'$  para algum  $j$  com  $1 \leq j \leq r$ . Isso é uma contradição.

*Caso 2.*  $|T| \geq k$ . Portanto existe um  $k$ -elemento  $T'$  subconjunto de  $T$ . Consequentemente temos  $L(w_j) = T'$  para algum  $j$  com  $1 \leq j \leq r$ . Qualquer cor de  $L(w_j)$  que tenha sido atribuída para  $w_j$ , também foi atribuída para algum vértice  $u_i$ . Portanto  $u_i$  e  $w_j$  são associados a uma mesma cor e  $u_i w_j$  é uma aresta de  $K_{r,r}$ . Isto é uma contradição. ■

**Teorema 3.1.9** (ERDOS et al., 1979). *Seja  $G$  um grafo. Não há limite de quanto  $\chi_1(G)$  pode exceder  $\chi(G)$  a medida que o número de vértices aumenta.*

**Teorema 3.1.10** (VIZING, 1964). *Seja  $G$  um grafo simples, então  $\chi'(G) \leq \Delta + 1$ .*

### 3.2 Resultados específicos envolvendo grafo bipartido completo e planares.

Nessa seção vamos trazer resultados para classes de grafos específicas que podem ser encontrados dentro da Coloração de Lista.

**Proposição 3.2.1** (ERDOS et al., 1979) *Se  $m = \binom{2k-1}{k}$ , então  $K_{m,m}$  não é  $k$ -selecionável.*

**Prova 3.2.2** *Seja  $X, Y$  a bipartição de  $G = K_{m,m}$ . Seja ainda  $[2k - 1] = \{1, 2, 3, \dots, 2k - 1\}$ . Associe os subconjuntos distintos de tamanho  $k$  de  $[2k - 1]$  como as listas para os vértices de  $X$ , e o mesmo para  $Y$ . Considere uma função de escolha  $f$ . Se  $f$  usa menos que  $k$  escolhas distintas em  $X$ , então há um conjunto  $S$  de tamanho  $k$  tal que  $S \subseteq [2k - 1]$  não usado, o que significa que nenhuma cor foi escolhida para o vértice de  $X$  tendo  $S$  como esta lista. Se  $f$  usa ao menos  $k$  cores nos vértices de  $X$ , então há um conjunto de tamanho  $k$   $S \subseteq [2k - 1]$  de cores usadas em  $X$ , e nenhuma cor pode ser propriamente escolhida para o vértice de  $Y$  com lista  $S$ . ■*

**Teorema 3.2.3** (Thomassen [1994b]) *Grafos planares são 5-selecionáveis.*

**Prova 3.2.4** Adicionar arestas não pode reduzir o número lista cromático, então nós podemos restringir nossa atenção para grafos planos onde a face exterior é um ciclo e toda face limitada é um triângulo. Por indução em  $n(G)$ , provamos um resultado mais forte. Esse resultado além ter listas de tamanho 5 nos vértices, possuirá uma coloração que pode ser escolhida mesmo quando dois vértices externos adjacentes possuem listas distintas de tamanho 1 e outro vértice externo tem lista de tamanho 3. Para o passo base ( $n = 3$ ), uma cor permanece disponível para o terceiro vértice. Agora considere  $n > 3$ . Sejam  $v_p, v_1$  os vértices com cores fixas no ciclo externo  $C$ . Sejam  $v_1, \dots, v_p$  ser  $V(C)$  em sentido horário. Temos os casos:

**Caso 1:**  $C$  tem uma corda  $v_i v_j$  com  $1 \leq i \leq j - 2 \leq p - 2$ . Aplicamos a hipótese de indução ao grafo consistindo do ciclo  $v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_p$  e seu interior. Isso seleciona uma coloração própria em que  $v_i, v_j$  recebem cores fixas. Em seguida aplicamos a hipótese de indução ao grafo consistindo do ciclo  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$  e seu interior para completar a lista coloração de  $G$ .

**Caso 2:**  $C$  não tem uma corda. Sejam  $v_1, u_1, \dots, u_m, v_3$  os vizinhos de  $v_2$  em ordem. Pelo fato do limite das faces serem triângulos,  $G$  contém um caminho  $P$  com vértices  $v_1, u_1, \dots, u_m, v_3$ . Visto que  $C$  é sem cordas,  $u_1, \dots, u_m$  são vértices internos, e a face externa de  $G' = G - v_2$  é limitado por um ciclo  $C'$  em que  $P$  substitui  $v_1, v_2, v_3$ .

Seja  $c$  ser a cor associada a  $v_1$ . Visto que  $|L(v_2)| \geq 3$ , podemos escolher cores distintas  $x, y \in L(v_2) - \{c\}$ . Reservamos  $x, y$  para possível uso em  $v_2$  proibindo  $x, y$  de  $u_1, \dots, u_m$ . Visto que  $|L(u_i)| \geq 5$ , temos que  $|L(u_i) - \{x, y\}| \geq 3$ . Por isso podemos aplicar a hipótese de indução a  $G'$ , com  $u_1, \dots, u_m$  tendo listas de tamanho pelo menos 3 e outros vértices tendo a mesma lista como em  $G$ . Na coloração resultante,  $v_1$  e  $u_1, \dots, u_m$  possuem cores fora  $x, y$ . Podemos estender essa coloração para  $G$  escolhendo para  $v_2$  uma cor em  $x, y$  que não aparece em  $v_3$  na coloração de  $G'$ . ■

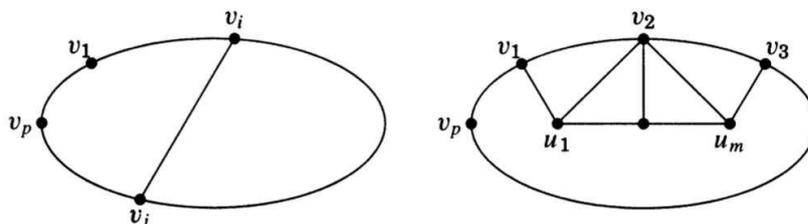


Figura 49 – Representação do Caso 1 e Caso 2.

Fonte – (WEST *et al.*, 2001)

### 3.3 Resultados envolvendo complexidade

Na Seção 2.4 foi apresentado alguns conceitos base sobre complexidade computacional. No trabalho (GAMA *et al.*, 2016) foram organizadas em uma tabela (Tabela 1) a complexidade de alguns problemas de coloração em determinadas classes de grafos. Neste trabalho mostramos uma adaptação focando na coloração própria e na Coloração de Lista.

<b>Classe de Grafos</b>	<b>Coloração Própria</b>	<b>Coloração de Lista</b>
Geral	NP-C (KARP, 1972)	NP-C (DROR <i>et al.</i> , 1999)
Blocos	P (BONOMO, 2007)	P (JANSEN, 1997)
Bipartido	P (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)	NP-C (KUBALE, 1992)
Bipartido Completo	P (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)	NP-C (JANSEN; SCHEFFLER, 1997)
Cografos	P (GRÖTSCHHEL <i>et al.</i> , 1981)	NP-C (JANSEN; SCHEFFLER, 1997)
Intervalo	P (GRÖTSCHHEL <i>et al.</i> , 1981)	NP-C (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)
Intervalo Unitário	P (GRÖTSCHHEL <i>et al.</i> , 1981)	NP-C (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)
Split	P (GOLUMBIE, 1980)	NP-C (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)
Split Completo	P (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)	NP-C (JANSEN; SCHEFFLER, 1997)
Linha do $K_{n,n}$	P (KÖNIG, 1916)	NP-C (KUBALE, 1992)
Linha do $K_n$	P (KÖNIG, 1916)	NP-C (BONOMO <i>et al.</i> , 2009)

Fonte – (GAMA *et al.*, 2016)

Tabela 1 – Tabela com a organização das complexidades de alguns problemas envolvendo coloração em algumas classes de grafos.

## 4 COLORAÇÃO DE LISTA DE GRAFOS

Neste capítulo abordaremos alguns novos resultados envolvendo Coloração de Lista de forma direta dentro de algumas classes de grafos. Nos resultados que se relacionam de forma direta, temos os artigos (ZHANG; LI, 2021) onde o autor utiliza a Coloração Dinâmica que é uma variante da Coloração de Grafos e a incorpora na Coloração de Lista apresentado na Seção 4.1. Em seguida temos em (DVOŘÁK; POSTLE, 2018) a Coloração Correspondente (*Correspondence Coloring*) onde se generaliza a Coloração de Lista e em (BERNSHTEYN; KOSTOCHKA, 2019) outra versão da Coloração Correspondente chamada de *DP-Coloring* sendo aplicada de uma forma diferente, ambos apresentados na Seção 4.2. Finalizamos este capítulo com (GORDEEV, 2019) onde o autor prova uma conjectura da Coloração de Lista para os multigrafos linha perfeitos apresentada na Seção 4.3.

### 4.1 Coloração de lista dinâmica de grafos 1-planar

Nesta seção escolhemos abordar um resultado do artigo diferente do resultado principal por se tratar de algo mais próximo de nossa proposta. O resultado em si é tratado como um fato pelos autores, o qual se segue de uma prova. O mesmo será abordado na Subseção 4.1.2. Na 4.1.1 será abordado algumas definições pertinentes para a compreensão do resultado.

Os autores apresentaram o trabalho de Thomassen (THOMASSEN, 1994) e o trabalho de Voigt (VOIGT, 1993) como uma forma de reforçar as diferenças entre o número cromático e o número lista cromático de um grafo. Em (THOMASSEN, 1994) temos que o número lista cromático de um grafo planar  $G$  é 5 ao invés de 4 como no caso do número cromático. Em (VOIGT, 1993) foi construindo um grafo planar  $G$  com  $\chi(G) = 4$  e  $\chi_l(G) = 5$  assim confirmando as afirmações de Thomassen e nos lembrando como  $\chi(G)$  e  $\chi_l(G)$  podem ser diferentes.

#### 4.1.1 Definições

Um grafo  $k$ -**planar** é um grafo que pode ser desenhado em um plano Euclidiano tal que cada aresta se cruze no máximo  $k$  vezes. Dessa forma quando falamos de um grafo 1-planar estamos indicando que suas arestas se cruzam no máximo uma vez. Na Figura 50 podemos observar um exemplo de um grafo 1-planar.

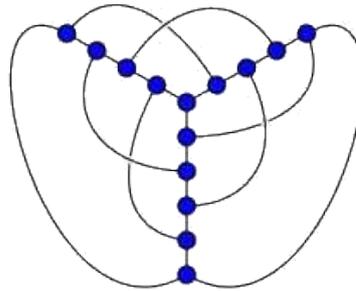


Figura 50 – Exemplo de um grafo 1-planar.  
Fonte – Wikipedia

Em (ZHANG; LI, 2021) temos a utilização da Coloração Dinâmica junto com Coloração de Lista. A **Coloração Dinâmica** é uma variante da coloração própria tradicional. Sua propriedade, além de garantir que os vértices adjacentes do grafo possuam cores diferentes, também garante que todo vértice com grau pelo menos dois possua em sua vizinhança pelo menos duas cores. Sabemos que a propriedade de Coloração de Lista de um grafo  $G$  se dá por uma coloração própria baseada em uma lista  $L$  associada a cada vértice  $v \in V(G)$ . Dessa forma, no artigo, temos a **Coloração de Lista Dinâmica**, onde os vértices possuem uma lista de cores associadas a cada vértice e todos seus vértices de grau pelo menos dois devem possuir ao menos duas cores em sua vizinhança.

Os autores utilizam uma propriedade chamada de 2-divisão. A 2-**divisão** de um grafo  $G$ , denotado por  $G^*$ , é o grafo derivado de  $G$  inserindo em cada aresta um novo vértice de grau 2. O **número dinâmico cromático** desse grafo é denotado por  $\chi^d(G^*)$  e o **número lista dinâmico cromático** representado por  $\chi_l^d(G^*)$ . A seguir, nas Figuras 51 e 52, temos um exemplo do antes e depois do processo de 2-divisão.

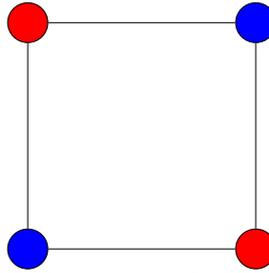


Figura 51 – Grafo  $G$ .

Fonte – Próprio autor

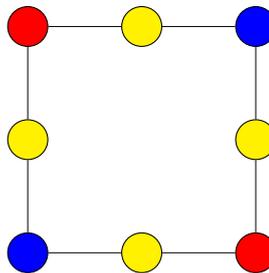


Figura 52 – Grafo  $G^*$ .

Fonte – Próprio autor

#### 4.1.2 Resultado

**Fato 4.1.0.1** Para qualquer grafo  $G$ ,  $\chi(G) \leq \chi^d(G^*)$  e  $\chi_l(G) \leq \chi_l^d(G^*)$ .

**Prova 4.1.1** Seja  $M : V(G) \rightarrow V(G^*)$  um mapeamento dos vértices de  $G$  para os vértices  $G^*$  correspondentes e seja  $S \subset V(G^*)$  o conjunto dos novos 2-vértices adicionados a  $G$  quando realizada a 2-divisão. Seja  $L$  uma  $l$ -lista em  $V(G)$ , onde  $l = \chi_l^d(G^*)$ . Estendemos  $L$  para uma  $l$ -lista  $L^*$  em  $V(G^*)$ , isto é,  $L^*(u) = L(M^{-1}(u))$  para qualquer  $u \in V(G^*) \setminus S$ . Já que os dois vizinhos de um 2-vértice de  $G^*$  deverão ser coloridos com cores distintas em qualquer coloração dinâmica de  $G^*$ , existe uma coloração dinâmica  $c^*$  de  $G^*$  de modo que  $c^*(M(u)) \in L(M(u)) = L(u)$ ,  $c^*(M(v)) \in L(M(v)) = L(v)$  e  $c^*(M(u)) \neq c^*(M(v))$  para qualquer  $uv \in E(G)$ . Portanto, construímos uma  $L$ -coloração  $c$  de  $G$  deixando  $c(v) = c^*(M(v))$  para qualquer  $v \in V(G)$ . Isto implica que  $\chi_l(G) \leq l = \chi_l^d(G^*)$ . A prova para  $\chi(G) \leq \chi^d(G^*)$  é similar. ■

## 4.2 Coloração Correspondente

Nesta seção iremos abordar sobre Coloração Correspondente (*Correspondence Coloring*), dentro desse tema foi utilizado dois artigos, *Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8* de (DVOŘÁK; POSTLE, 2018) e *On Differences Between DP-Coloring and List Coloring* de (BERNSHTEYN; KOSTOCHKA, 2019). Na Subseção 4.2.1 teremos as definições necessárias para uma boa compreensão e na Subseção 4.2.2 teremos o resultado.

Em (DVOŘÁK; POSTLE, 2018) temos a introdução de uma nova variação de coloração de grafos chamada *Correspondence Coloring* ou **Coloração Correspondente**. Tal coloração generaliza a coloração de lista qual é demonstrada pelos autores ao longo do trabalho. Em uma de suas demonstrações, temos a apresentação de um lema que demonstra a semelhança entre  $k$ -selecionabilidade e  $C$ -colorível que abordaremos na Seção 4.2.1. Os autores utilizam  $C$  para se referirem a Coloração Correspondente.

Em (BERNSHTEYN; KOSTOCHKA, 2019) temos a utilização da Coloração Correspondente mas agora com outra nomenclatura: a *DP-Coloring*. No artigo os autores abordam alguns limites superiores da Coloração de Lista que se estendem para *DP-Coloring* e que muitos não conhecem.

### 4.2.1 Definições

Nesta subseção são apresentadas definições e observações para um melhor entendimento do lema que será abordado na próxima subseção. Seja  $G$  um grafo. Uma **associação correspondente** para  $G$  consiste de uma lista de associações  $L$  e uma função  $C$  que para toda aresta  $e = uv \in E(G)$  atribui um emparelhamento parcial  $C_e$  entre  $\{u\} \times L(u)$  e  $\{v\} \times L(v)$ . Os autores explicam que a utilização do produto cartesiano é para distinguir os vértices de  $C_e$  no caso de cores iguais aparecerem em ambos  $L(u)$  e  $L(v)$ .

Uma  $(L, C)$ -**coloração** é uma função  $\varphi$  que para cada vértice  $v \in V(G)$  atribui uma cor  $\varphi(v) \in L(v)$ , tal que para toda  $e = uv \in E(G)$ , os vértices  $(u, \varphi(u))$  e  $(v, \varphi(v))$  não são adjacentes em  $C_e$ . Dizemos que  $G$  é  $(L, C)$ -colorível se uma  $(L, C)$ -coloração existe.

Uma atribuição  $k$ -**correspondente** para  $G$  é uma função  $C$  que para cada aresta  $e = uv \in E(G)$  atribui um emparelhamento parcial  $C_e$  entre  $\{u\} \times [k]$  e  $\{v\} \times [k]$ . Sendo  $L$  a associação correspondente que para cada vértice associa a lista  $[k] = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ , dizemos que

cada  $(L, C)$ -coloração de  $G$  é uma  $C$ -coloração de  $G$  e dizemos também que  $G$  é  $C$ -colorível se tal  $C$ -coloração existe. O **número correspondente cromático** de  $G$  é o menor inteiro  $k$  tal que  $G$  é  $C$ -colorível para todo  $k$ -correspondente associado a  $C$ .

Buscando um melhor entendimento, mostramos uma definição mais completa de outro artigo (CHOI *et al.*, 2018). Dado um grafo  $G$  e uma função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ , uma **associação  $f$ -correspondência**  $C$  é dada por um emparelhamento  $C_{vw}$ , para cada  $vw \in E(G)$ , entre  $\{v\} \times \{1, \dots, f(v)\}$  e  $\{w\} \times \{1, \dots, f(w)\}$ . Dizemos que para cada vértice  $x$  existe  $f(x)$  cores disponíveis. Uma **associação  $k$ -correspondência** é uma associação  $f$ -correspondência onde  $f(v) = k$  para todo  $v \in V(G)$ . Dado uma associação  $f$ -correspondência  $C$ , uma  **$C$ -coloração** é uma função  $\varphi : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\varphi(v) \leq f(v)$  para cada  $v \in V(G)$  e para cada aresta  $vw \in E(G)$ , os pares  $(v, \varphi(v))$  e  $(w, \varphi(w))$  não são adjacentes em  $C_{vw}$ . O **número cromático correspondente** de  $G$  é o menor inteiro  $k$  tal que, para toda associação  $k$ -correspondente  $C$  de  $G$ , o grafo  $G$  admite uma  $C$ -coloração. Isto é denotado por  $\chi_{corr}(G)$ . **Note que se  $G$  é  $k$ -degenerado, então colorir avidamente em alguma ordem mostra que  $\chi_{corr}(G) \leq k + 1$ .**

Além das definições anteriores, como uma forma de mostrar uma relação entre o número correspondente cromático de um grafo e sua selecionabilidade, os autores introduziram a noção de **consistência** de uma associação correspondente. Seja  $(L, C)$  uma associação correspondente para um grafo  $G$  e  $W = v_1 v_2 \dots v_m$  com  $v_m = v_1$  sendo um caminho fechado de tamanho  $m - 1$  em  $G$ . Dizemos que a associação  $(L, C)$  é **inconsistente** em  $W$  se existem cores  $c_1, \dots, c_m$  tal que  $c_i \in L(v_i)$  para  $i = 1, \dots, m$ ,  $(v_i, c_i)(v_{i+1}, c_{i+1})$  é uma aresta de  $C_{v_i v_{i+1}}$  para  $i = 1, \dots, m - 1$ , e  $c_1 \neq c_m$ . Caso contrário, a **associação correspondente  $(L, C)$  é consistente em  $W$** . Dizemos que a **associação correspondente  $(L, C)$  é consistente** se  $(L, C)$  é consistente em todo caminho  $W$  fechado em  $G$ . Na Figura 53 podemos ver que a mesma não é consistente no caminho fechado  $z_1 z_2 z_3 z_1$ , pois percebe-se que conseguimos sair de  $(z_1, 1)$  para  $(z_2, 1)$ , de  $(z_2, 1)$  para  $(z_3, 1)$  e de  $(z_3, 1)$  para  $(z_1, 2)$ , dessa forma atingimos os dois pontos que garantem a inconsistência, a existência de um caminho saindo de um vértice com uma cor e retornando para ele porém para uma cor diferente da inicial. Porém ela é consistente em  $z_3 z_1 z_2 z_3$ , assim tornando a associação correspondente apresentada na figura inconsistente já que nem todos seus caminhos fechados são consistentes.

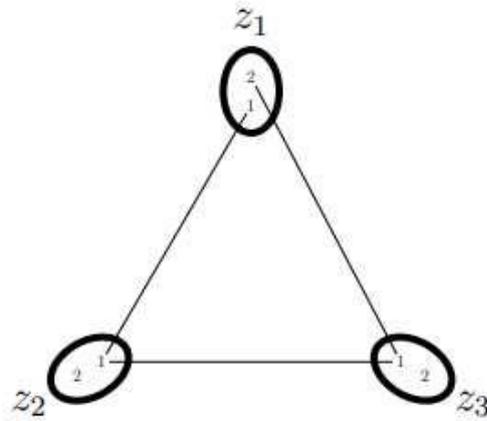


Figura 53 – Exemplo de um grafo 2-Correspondente não consistente.  
Fonte – (DVOŘÁK; POSTLE, 2018)

Vamos agora ilustrar três observações que são utilizadas para o entendimento do lema.

**Observação 4.2.0.1** *Sejam  $(L, C)$  e  $(L', C')$  associações correspondentes equivalentes para um grafo  $G$ , tal que  $(L', C')$  é obtido de  $(L, C)$  por uma sequência de renomeações em vértices pertencentes a um conjunto  $X \subseteq V(G)$ . Se  $\varphi$  é uma  $(L, C)$ -coloração de  $G$ , então existe uma  $(L', C')$ -coloração  $\varphi'$  de  $G$  tal que  $\varphi'(v) = \varphi(v)$  para todo  $v \in V(G) \setminus X$ . Em particular,  $G$  é  $(L, C)$ -colorável se e somente se  $G'$  é  $(L', C')$ -colorável.*

**Observação 4.2.0.2** *Seja  $(L, C)$  uma associação correspondente de um grafo  $G$ , tal que  $L$  atribui listas de mesmo tamanho  $k$  para cada vértice de  $G$ . Então existe uma associação correspondente equivalente  $(L', C')$  tal que  $L'(v) = [k]$  para todo  $v \in V(G)$ .*

**Observação 4.2.0.3** *Seja  $(L, C)$  e  $(L', C')$  associações correspondentes equivalentes para um grafo  $G$ . Para todo caminho fechado  $W$  em  $G$ , a associação correspondente  $(L, C)$  é consistente em  $W$  se e somente se  $(L', C')$  também o é.*

Vamos mostrar também dentro desta subseção algumas informações sobre o **DP-Coloring**. Essa coloração continua sendo a Coloração Correspondente, porém como dito no artigo (BERNSHTEYN; KOSTOCHKA, 2019), o nome é apenas uma versão resumida do que já conhecemos como Coloração Correspondente.

Seja  $G$  um grafo. O **DP-número cromático**  $\chi_{DP}(G)$  de  $G$  é o menor  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $G$  admite uma  $\mathcal{H}$ -coloração para todo  $k$ -conjunto de dobra  $\mathcal{H}$  de  $G$ . Para um conjunto  $S$ ,  $\text{Pow}(S)$  denota o conjunto de potências de  $S$ , isto é, o conjunto de todos os conjuntos de  $S$ .

Na Figura 54 mostra dois 2-conjuntos de dobra de 4-ciclos. Note que um  $C_4$  admite uma  $\mathcal{H}_1$ -coloração mas não uma  $\mathcal{H}_2$ -coloração. Em particular  $\chi_{DP}(C_4) \leq 3$ , de outro lado, isso pode ser facilmente notado visto que  $\chi_{DP}(G) \leq \Delta(G) + 1$  para qualquer grafo  $G$ , e também temos  $\chi_{DP}(C_4) = 3$ . Um argumento similar demonstra que  $\chi_{DP}(C_n) = 3$  para qualquer ciclo  $C_n$  de tamanho  $n \geq 3$ .

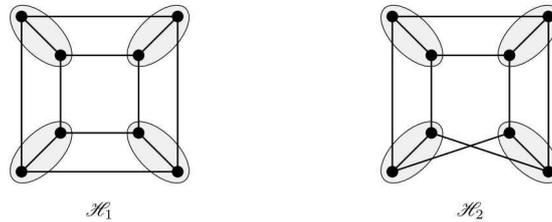


Figura 54 – Dois distintos 2-conjuntos de dobra de um 4-ciclo.

Fonte – (BERNSHTEYN; KOSTOCHKA, 2019)

Pode-se construir uma cobertura de um grafo  $G$  baseado em uma lista de associações para  $G$ , portanto mostrando que a coloração de lista é um caso especial de DP-Coloring e em particular  $\chi_{DP}(G) \geq \chi_l(G)$  para todo grafo  $G$  mostrado na Figura 55. Mais precisamente, seja  $G$  um grafo e suponha que  $L : V(G) \rightarrow \text{Pow}(C)$  é uma lista de associações para  $G$ , onde  $C$  é um conjunto de cores. Seja  $H$  um grafo com o conjunto de vértices

$$V(H) := \{(u, c) : u \in V(G) \text{ e } c \in L(u)\},$$

em dois vértices distintos  $(u, c)$  e  $(v, d)$  são adjacentes se e somente se

1. ambos  $u = v$ ,
2. se não,  $uv \in E(G)$  e  $c = d$ .

Para cada  $u \in V(G)$ , defina

$$L' := \{(u, c) : c \in L(u)\}.$$

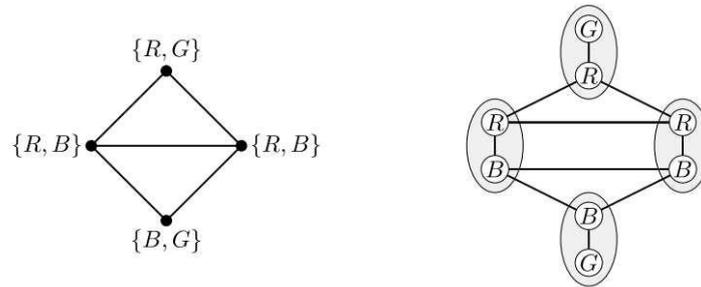


Figura 55 – Um grafo com uma 2–lista atribuição e o correspondente 2–conjunto de dobra.

Fonte – (BERNSHTEYN; KOSTOCHKA, 2019)

#### 4.2.2 Resultado

Nesta subseção teremos a apresentação do lema que foi enunciado anteriormente junto de sua prova. Escolhemos o lema pois em sua prova é mostrada a semelhança entre um grafo  $G$  ser  $k$ –seleccionável se e somente se  $G$  for  $C$ –colorível.

**Lema 4.2.1** *Um grafo  $G$  é  $k$ –seleccionável se e somente se  $G$  é  $C$ –colorível para toda associação  $k$ –correspondente consistente  $C$ .*

**Prova 4.2.2** *Suponha que  $G$  é  $C$ –colorível para toda associação  $k$ –corresponde consistente  $C$  e seja  $L$  uma atribuição de listas de tamanho  $k$  para os vértices de  $G$ . Seja  $(L, C')$  a atribuição correspondente tal que para cada  $uv \in E(G)$ ,  $C'_{uv}$  contém exatamente as arestas  $(u, c)(v, c)$  para todo  $c \in L(u) \cap L(v)$ . Claramente,  $(L, C')$  é consistente e pelas Observações 4.2.0.2 e 4.2.0.3, isto é equivalente a atribuição  $k$ –correspondente consistente  $C$ . Por suposição,  $G$  é  $C$ –colorível e pela observação 4.2.0.1, isto é  $(L, C')$ –colorível; equivalentemente,  $G$  é  $L$ –colorível.*

*Suponha agora que  $G$  é  $k$ –seleccionável e  $C$  seja a atribuição  $k$ –correspondente consistente para  $G$ . Seja  $H$  o grafo com conjunto de vértices  $V(G) \times [k]$  e conjunto de arestas  $\cup_{e \in E(G)} E(C_e)$ . Note que a consistência de  $G$  é equivalente ao fato que para todo vértice  $v \in V(G)$ , cada componente de  $H$  cruza  $\{v\} \times [k]$  em mais de um vértice, dessa forma cada componente de  $H$  pode ou não passar por um vértice, caso ele passe será no máximo em uma única cor. Para cada  $v \in V(G)$ , seja  $L(v)$  o conjunto de componentes de  $H$  que cruzam  $\{v\} \times [k]$ ; claramente  $|L(v)| = k$ . Por suposição, existe uma  $L$ –coloração  $\varphi$  de  $G$ , que podemos transformar em uma  $C$ –coloração dando cada vértice  $v \in V(G)$  a única cor  $c \in [k]$  tal que  $(v, c) \in V(\varphi(v))$ . Consequentemente,  $G$  é  $C$ –colorível. ■*

### 4.3 Prova da conjectura da Coloração de Lista para multigrafos linha perfeitos

No artigo de (GORDEEV, 2019) somos apresentados ao termo índice cromático que o autor cita é utilizado para nomear o número cromático dos grafos linha. O objetivo do trabalho é provar que o índice cromático de um multigrafo linha perfeito é igual ao índice lista cromático. Na Subseção 4.3.1 teremos as definições para entendimento do artigo e na Subseção 4.3.2 apresentaremos o resultado do artigo.

#### 4.3.1 Definições

Para esse artigo é importante termos o conhecimento de algumas definições. Iremos destacar quatro delas nesse primeiro momento que são: índice cromático, índice lista cromático, multigrafos e multigrafos linha perfeitos. Segundo o autor, o **índice cromático**  $\chi'(G)$  é o número cromático de  $L(G)$ , onde  $L(G)$  é um grafo linha. O **índice lista cromático**  $\chi'_l(G)$  é número escolha de  $L(G)$ . Em (CHARTRAND; ZHANG, 2008) temos que um **multigrafo**  $M$  é um conjunto não vazio de vértices, cada dois dos quais são unidos por um número finito de arestas. Em (PETERSON; WOODALL, 1999) temos que um **multigrafo é linha perfeito** se seu grafo linha é perfeito.

Nesse trecho teremos as definições necessárias para o entendimento dos teoremas que serão abordado na próxima seção.  $A_v$  é um conjunto de cores  $\{A_v\}_{v \in V}$ ,  $|A_v| = f(v)$  no qual podemos sempre escolher uma cor  $\{c_v\}_{v \in V}$  para cada vértice  $v \in V$ , onde  $c_v \in A_v$ , de forma que os vértices adjacentes possuam cores diferentes. Se  $G = (V, E)$ , dizemos que  $E(v) = \{e \in E : e \text{ incide em } v\}$ ,  $d_G(v) = |E(v)|$  para qualquer  $v \in V$ . Também temos que  $E(a, b) = E(a) \cap E(b)$ ,  $E(a, b, c) = E(a, b) \cup E(a, c) \cup E(b, c)$  para qualquer  $a, b, c \in V$  distintos.  $E(a, b)$  é o conjunto de todas as arestas entre  $a$  e  $b$ , e  $E(a, b, c)$  é o conjunto de todas as arestas no triângulo nos vértices  $a, b, c$ .

Considere um grafo  $G = (V, E)$  e o conjunto de cores  $\{A_e\}_{e \in E}$ . Definimos o seguinte:

- $A_F = \bigcup_{e \in F} A_e$  para  $F \subseteq E$ ;
- $A(v) = A_{E(v)}$  para  $v \in V$ ;
- $A(u, v) = A_{E(u, v)}$  para  $u, v \in V$ .

Se existe um par de arestas não adjacentes  $e, q \in E$  com interseção nos conjuntos de cores, e  $c \in A_e \cap A_q$ , nós iremos chamar um conjunto  $\{e, q, c\}$  de **conjunto redutor**.

Dizemos que um **caso transversal** ocorre, se existe nenhum conjunto redutor ou

equivalentemente, se  $A_e \cap A_q = \emptyset$  para qualquer duas arestas não adjacentes  $e, q \in E$ .

### 4.3.2 Resultados

Nesta seção abordaremos o teorema selecionado do artigo para demonstração. O mesmo possui uma forma geral semelhante ao que o autor se propôs a provar em seu trabalho, nosso objetivo é apenas ilustrar algo mais simples e de melhor entendimento.

**Observação 4.3.0.1** *Para um multigrafo linha perfeito  $G$ ,  $\chi'(G)$  é a maior clique em  $L(G)$ , então*

$$\chi'(G) = \max \left( \max_{v \in V} (d_G(v)), \max_{a,b,c \in V} (|E(a,b,c)|) \right).$$

O teorema abaixo será utilizado na prova escolhida como resultado nessa seção.

**Teorema 4.3.1** *No caso transversal, uma coloração de lista aresta própria existe se e somente se para qualquer  $F \subseteq E$ ,*

$$|F| \leq |A_F|.$$

O objetivo do autor é provar o seguinte teorema:

**Teorema 4.3.2** *Para um multigrafo linha perfeito qualquer,  $\chi'(G) = \chi'_l(G)$ .*

Para isso o autor se baseia na seguinte conjectura:

**Conjectura 4.3.3**  *$\chi'(G) = \chi'_l(G)$  para qualquer multigrafo  $G$ .*

Eles utilizam o seguinte teorema:

**Teorema 4.3.4** *Seja  $G = (V, E)$  um multigrafo bipartido. Para qualquer  $v \in V$ ,  $G$  é  $f_v$ -aresta-selecionável, onde*

$$f_v(e) = \begin{cases} d_G(v), & \text{se } e \in E(v), \\ \chi'(v), & \text{por outro lado.} \end{cases}$$

O artigo possui diversas definições. Para chegar no seu resultado principal, ou seja, para demonstrar que a conjectura supracitada é válida para multigrafos linha perfeitos, o autor usa uma grande quantidade de lemas e teoremas, ao todo são 6 lemas e 10 teoremas. Dessa forma utilizaremos a demonstração de um teorema menor que guarda uma semelhança com os demais.

**Teorema 4.3.5** *Seja  $G = (V, E)$  um multigrafo de quatro vértices. Para qualquer  $v \in V$ ,  $G$  é  $f_{G,v}$ -aresta-selecionável, onde*

$$f_{G,v}(e) = \begin{cases} d_G(v), & \text{se } e \in E(v), \\ \chi'(G), & \text{por outro lado.} \end{cases}$$

**Prova 4.3.6** *Vamos fixar os conjuntos de cores arbitrários  $\{A_e : |A_e| = f_{G,e}(e)\}_{e \in E}$ . Vamos usar indução no número de arestas no grafo. A base poderá ser um caso transversal. Vamos considerar isso no fim da prova. Se existe um conjunto de redução  $\{e, q, c\}$ , então vamos associar uma cor  $c$  para ambos  $e$  e  $q$  e considerar  $G' = (V, E')$ ,  $E' = E \setminus \{e, q\}$ ,  $A'_s = A_s \setminus \{c\}$  para  $s \in E'$ .  $|E'(w)| = |E(w)| - 1$  para qualquer  $w \in V$  já que como em  $E'$  as arestas  $e, q$  foram removidas as mesmas não incidem nos vértices fazendo com que o grau de qualquer vértice  $w$  diminua em 1, nas Figuras 56 e 57 podemos observar  $G'$  com  $E$  e  $E'$  respectivamente, em seguida  $|E'(a, b, c)| = |E(a, b, c)| - 1$  para qualquer  $a, b, c \in V$ , nas Figuras 58, 59, 60 e 61 podemos observar o que foi dito anteriormente, quando pegamos qualquer tripla de vértices  $a, b, c$  percebemos que teremos uma aresta faltando no tamanho total das arestas entre  $a, b, c$ , então, pela Observação 4.3.0.1,  $\chi'(G') = \chi'(G) - 1$ . Também temos que,  $|A'_s| \geq |A_s| - 1$  para qualquer  $s \in E'$ . Por indução,  $G'$  é  $f_{G',v}$ -aresta selecionável, então nós podemos terminar de colorir apropriadamente as arestas restantes usando o conjunto de cores  $\{A'_s\}$ .*

*Se ocorrer um caso transversal, ou seja, onde não possuímos um conjunto redutor no qual  $A_e \cap A_q \neq \emptyset$  com  $e, q \in E$ , então para aplicar o Teorema 4.3.1 e provar a  $f_{G,s}$ -aresta-selecionabilidade de  $G$ , precisamos provar que, para qualquer  $F \subseteq E$ , a desigualdade  $|F| \leq |A_F|$  se mantém. Como  $F$  pode ou não conter par de arestas não adjacentes, serão abordados esses dois casos.*

Se  $F$  contém um par de arestas não adjacentes  $e, q$ , então  $|A_F| \geq |A_e \cup A_q| = |A_e| + |A_q| \geq \chi'(G) + d_G(v)$ , pois pelo menos um entre  $e, q$  não incide em  $v$ . Pela observação 4.3.0.1  $\chi'(G) \geq |E(a, b, c)|$ , de uma forma mais clara, se fizermos as seguintes substituições:

$$\chi'(G) + d_G(v) =$$

$$\chi'(G) + |E(v)| =$$

$$|E(a, b, c)| + |E(v)| =$$

$$|E|$$

no qual substituímos  $d_G(v)$  por  $|E(v)|$  e  $\chi'(G)$  por  $|E(a, b, c)|$ , onde  $V = \{a, b, c\} \cup \{v\}$  e  $E = E(a, b, c) \cup E(v)$ , assim  $|A_F| \geq |E| \geq |F|$ .

Se  $F$  não contém um par de arestas não adjacentes, então necessariamente ou  $F \subseteq E(w)$  para algum  $w \in V$ , ou  $F \subseteq E(a, b, c)$  para algum  $a, b, c \in V$ . Se  $F \subseteq E(v)$ , então, tomando qualquer  $e \in F$ ,  $|A_F| \geq |A_e| = d_G(v) \geq |F|$ . Em todos os outros casos existe  $e \in F \setminus E(v)$ , assim  $|A_F| \geq |A_e| = \chi'(G) \geq |F|$ . (Vale lembrar que as figuras utilizadas nessa seção representam multigrafos, por motivos de simplicidade utilizamos grafos simples.)

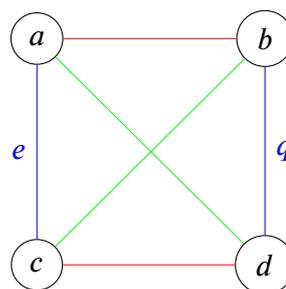


Figura 56 – Exemplo de  $G'$  antes da remoção das arestas  $e$  e  $q$ .

Fonte – Próprio autor

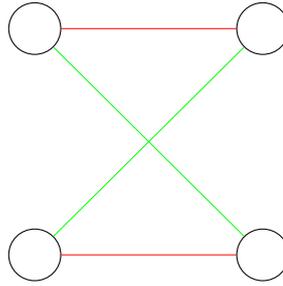


Figura 57 – Exemplo de  $G'$  com  $E'(w) = E(w) - 1$  para qualquer  $w \in V$ .

Fonte – Próprio autor

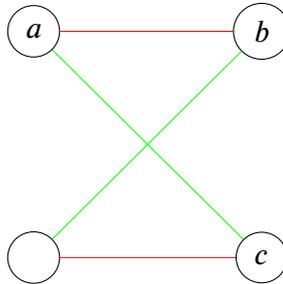


Figura 58 – Exemplo de  $G'$  com  $|E(a, b, c)| = 1$ .

Fonte – Próprio autor

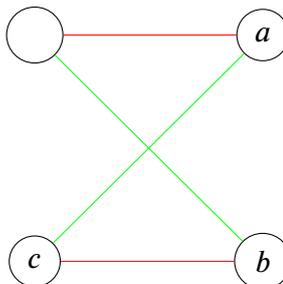


Figura 59 – Exemplo de  $G'$  com  $|E(a, b, c)| = 1$ .

Fonte – Próprio autor

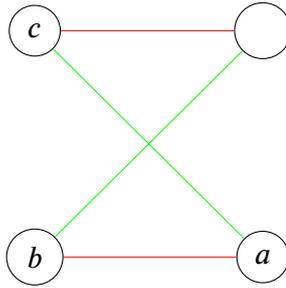


Figura 60 – Exemplo de  $G'$  com  $|E(a, b, c)| = 1$ .  
Fonte – Próprio autor

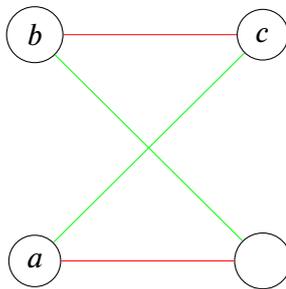


Figura 61 – Exemplo de  $G'$  com  $|E(a, b, c)| = 1$ .  
Fonte – Próprio autor

## 5 VARIANTES DE COLORAÇÃO DE LISTA

Este capítulo irá abordar algumas variantes da Coloração de Lista. Abordaremos também os resultados mais recentes envolvendo a Coloração de Lista de forma indireta.

Nos resultados que se relacionam de forma indireta, na Seção 5.1 temos o trabalho de Hoang La (LA, 2021) falando um pouco sobre  $(\Delta + 3)$ -lista coloração de grafos esparsos com distância 2. Finalizando o capítulo na Seção 5.2 temos o artigo (GUPTA, 2021) onde veremos o Partial List Coloring, uma variação que surgiu de um questionamento sobre a possibilidade de colorir um grafo com sua lista com o tamanho menor que seu número cromático.

### 5.1 $(\Delta + 3)$ -lista coloração de grafos esparsos com distância 2.

No trabalho de Hoang La (LA, 2021) somos apresentados a **Coloração de Lista 2-distante**, segundo o autor a mesma foi introduzida por Kramer e Kramer, ela generaliza a "propriedade" da restrição (no qual não permite que dois vértices adjacentes tenham a mesma cor) abordando a seguinte ideia: uma 2-distante  $k$ -coloração são dois pares de vértices com distância ao menos 2 que não possuem a mesma cor, na Figura 62 temos  $v$  e  $u$  que possuem uma distância de tamanho dois entre eles e cores diferentes. A 2-distante número cromático de  $G$ , denotado por  $\chi^2(G)$ , é o menor inteiro  $k$  no qual  $G$  possui uma 2-distante  $k$ -coloração. O autor usa  $\chi_1^2(G)$  para identificar a 2-distante número lista cromático de  $G$ . Na Subseção 5.1.1 teremos as definições importantes para o entendimento do resultado que será abordado na Subseção 5.1.2.

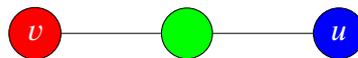


Figura 62 – Exemplo de 2-distante  $k$ -coloração.

Fonte – Próprio autor

#### 5.1.1 Definições

Para todo  $v \in V$  será utilizado  $d_G(v)$  para simbolizar o grau de vértice  $v$  em  $G$  e  $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$  como o grau máximo de um grafo  $G$ . Em alguns momentos será utilizado  $\Delta$  (correspondente a  $d(v)$ ) ao invés de  $\Delta(G)$  (correspondente a  $d_G(v)$ ). Podemos observar que para qualquer grafo  $G$ ,  $\Delta + 1 \leq \chi^2(G) \leq \Delta^2 + 1$ . O **grau médio** ou ad de um grafo  $G = (V, E)$  é definido por  $\text{ad}(G) = \frac{2|E|}{|V|}$ . O **grau médio máximo**  $\text{mad}(G)$  é o máximo, sobre todos os subgrafos  $H$  de  $G$ , de  $\text{ad}(H)$ . É definido também o termo  $g(G)$  que representa o **perímetro** de  $G$ . Dessa

forma quanto maior o perímetro mais esparsos os grafos são. Chamamos um grafo de **esparso** se o seu número de arestas é muito menor quando comparado com o seu número máximo possível de arestas.

**Proposição 5.1.1** *Para todo grafo planar  $G$ ,  $(mad(G) - 2)(g(G) - 2) < 4$ .*

Seguiremos agora para mais algumas definições importantes que serão necessárias para o entendimento da prova pelo método da descarga.

- Um  $d$ -vértice ( $d^+$ -vértice,  $d^-$ -vértice) é um vértice de grau  $d$  (pelo menos  $d$ , no máximo  $d$ );
- Um  $k$ -caminho ( $k^+$ -caminho,  $k^-$ -caminho) é um caminho de tamanho  $k + 1$  (pelo menos  $k + 1$ , no máximo  $k + 1$ ) onde o vértice interno  $k$  é 2-vértice;
- Um  $(K_1, K_2, \dots, K_d)$ -vértice é um  $d$ -vértice incidente a  $d$  diferentes caminhos, onde o  $i$ -ésimo caminho é um  $K_i^-$ -caminho para todo  $1 \leq i \leq d$ .

### 5.1.2 Resultados

O objetivo do artigo é provar dois teoremas, para isso o autor utiliza o método da descarga para provar ambos, dessa forma para cada um deles teremos os lemas, as regras da descarga e por fim seus casos. Para demonstração trouxemos apenas um dos dois.

**Teorema 5.1.2** *Se  $G$  é um grafo com  $mad(G) < \frac{8}{3}$  e  $\Delta(G) \geq 4$ , então  $\chi_1^2(G) \leq \Delta(G) + 3$ .*

Desde que  $mad(G) < \frac{8}{3}$ , temos que:

$$\sum_{u \in V(G)} (3d(u) - 8) < 0$$

#### 5.1.2.1 Propriedades estruturais de $G$ .

Os lemas a seguir foram usados pelo autor para estruturar a prova do teorema abordado nesse trabalho. Suas provas estão em seu artigo (LA, 2021).

**Lema 5.1.3** *Grafo  $G$  é conectado.*

**Lema 5.1.4** *O menor grau de  $G$  é pelo menos 2.*

**Lema 5.1.5** *Grafo  $G$  não possui  $2^+$ -caminhos.*

**Lema 5.1.6** *Grafo  $G$  não possui  $(1, 1, 1)$ -vértice.*

**Lema 5.1.7** *Grafo  $G$  não possui 3-vértice com um 2-vizinho e um  $(1, 1, 0)$ -vizinho.*

**Lema 5.1.8** *Grafo  $G$  não possui 3-vértice com dois  $(1, 1, 0)$  vizinhos e outro 3-vizinho.*

### 5.1.2.2 *Regras da descarga*

Nesse momento apresentamos as regras de descarregamento. Dessa forma para cada vértice teremos uma carga  $\mu(u) = 3d(u) - 8$ .

**R0** Todo  $3^+$ -vértice dá 1 para cada um dos seus 2-vizinhos.

**R1** Todo  $4^+$ -vértice dá 1 pra cada um dos seus 3-vizinhos.

**R2** Todo  $(0, 0, 0)$ -vértice dá 1 para cada um dos seus  $(1, 1, 0)$ -vizinhos.

### 5.1.2.3 *Verificação dos casos*

Seja  $\mu^*$  as cargas atribuídas após o processo de descarregamento. Em seguida será provado o seguinte:

$$\forall u \in V(G), \mu^*(u) \geq 0.$$

Seja  $u \in V(G)$ . Como  $G$  não possui um vértice com grau 1, então o início da verificação de casos começa com o grau do vértice sendo 2.

**Caso 1:** Se  $d(u) = 2$ , então  $u$  recebe 1 de carga de cada extremidade do 1-caminho que se encontra em **R0**(Como não existe  $2^+$ -caminho pelo lema 5.1.5). Portanto temos que  $\mu^*(u) = \mu(u) + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 - 8 + 2 = 0$ . Na Figura 63 temos um exemplo de como é feita a transferencia de carga no caso 1.

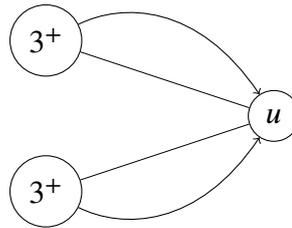


Figura 63 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 1.

Fonte – Próprio autor

Dessa forma com  $d(u) = 3$  podendo ter carga negativa quando doa carga 1 para mais de um 2-vizinhos, no caso seguinte será tratado as situações em que o mesmo doa carga sem ficar negativo.

**Caso 2:** Se  $d(u) = 3$ , então  $\mu(u) = 3 \cdot 3 - 8 = 1$ . Visto que não existe  $2^+$ -caminhos pelo lema 5.1.5 e  $(1, 1, 1)$ -vértices pelo lema 5.1.6, teremos os seguintes casos:

- Se  $u$  é um  $(1, 1, 0)$ -vértice, então  $u$  transfere 1 para cada um de seus dois 2-vizinhos por **R0**. Ao mesmo tempo que  $u$  também recebe 1 de seus  $3^+$ -vizinhos  $v$  por **R1** ou **R2**, já que  $v$  pode ser tanto um  $4^+$ -vértice ou um  $(0, 0, 0)$ -vértice pelo lema 5.1.7. Nas Figuras 64 e 65 temos ilustrações do processo.

$$\mu^*(u) \geq 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0.$$

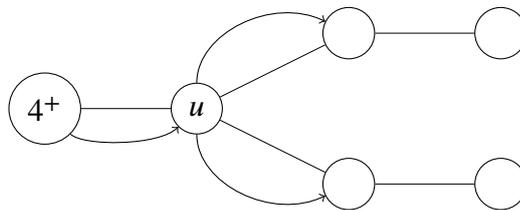


Figura 64 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando  $u$  é um  $(1, 1, 0)$ -vértice e  $v$  é um  $4^+$ -vértice.

Fonte – Próprio autor

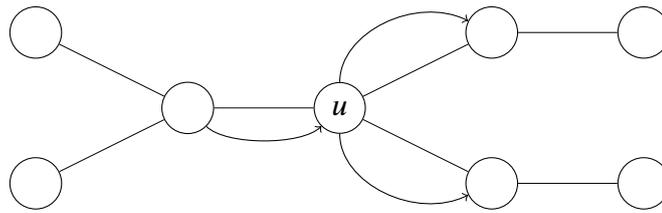


Figura 65 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando  $u$  é um  $(1, 1, 0)$ -vértice e  $v$  é um  $(0, 0, 0)$ -vértice.

Fonte – Próprio autor

- Se  $u$  é um  $(1, 0, 0)$ -vértice, então  $u$  apenas transfere 1 para seus 2-vizinhos por **R0**. Na Figura 66 temos uma ilustração da transferência de carga. Assim,

$$\mu^*(u) \geq 1 - 1 = 0.$$

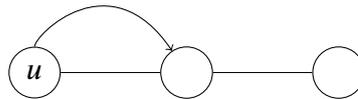


Figura 66 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando  $u$  é um  $(1, 0, 0)$ -vértice.

Fonte – Próprio autor

- Se  $u$  é um  $(0, 0, 0)$ -vértice, então  $u$  apenas transfere carga para  $(1, 1, 0)$ -vértices por **R2**. Seja  $t, v$  e  $w$   $3^+$ -vizinhos de  $u$ .
  - Se  $u$  é adjacente a um  $4^+$ -vizinho então ele recebe 1 carga por **R1** e no pior dos casos, ele dá 1 carga para cada um dos seus outros dois vizinhos por **R2**. Na Figura 67 temos uma ilustração desse primeiro sub caso. Como resultado,

$$\mu^*(u) \geq 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 0.$$

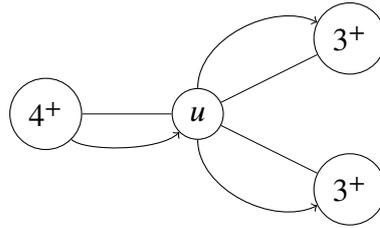


Figura 67 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando  $u$  é um  $(0,0,0)$ -vértice adjacente a três vértices com um deles possuindo grau igual a 4.

Fonte – Próprio autor

- Se  $u$  é adjacente a três 3-vértices, então no máximo um deles pode ser um  $(1,1,0)$ -vértice pelo lema 5.1.8. Assim,  $u$  apenas transfere no máximo 1 carga para um  $(1,1,0)$ -vizinho por **R2**. Na Figura 68 temos uma ilustração desse primeiro sub caso. Consequentemente:

$$\mu^*(u) \geq 1 - 1 = 0.$$

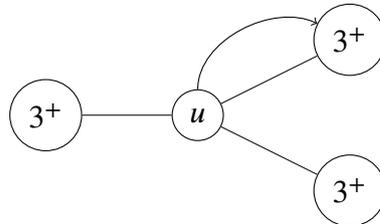


Figura 68 – Representação da transferência de carga que ocorre no caso 2 quando  $u$  é um  $(0,0,0)$ -vértice adjacente a três vértices com grau 3 e um deles sendo um  $(1,1,0)$ -vértice.

Fonte – Próprio autor

**Caso 3:** Se  $4 \leq d(u) \leq \Delta$ , então no pior dos casos,  $u$  transfere 1 carga para cada um de seus vizinhos por **R0** e **R1**. Como resultado,

$$\mu^*(u) \geq 3d(u) - 8 - d(u) \geq 2 \cdot 4 - 8 = 0.$$

Como  $d(u)$  é pelo menos 4 e no máximo o maior grau do grafo,  $d(u)$  irá transferir carga para seus  $d(u)$  vizinhos.

Para concluir, a carga inicial foi associada a uma soma negativa, mas depois do processo da descarga, a soma se preservou como um não negativo, no qual é uma contradição.

## 5.2 Um Estudo sobre Coloração de Lista Parcial.

Em (GUPTA, 2021) somos apresentados ao Partial List Coloring. Essa variação de coloração faz parte de uma conjectura que apenas foi provada para alguns grafos especiais. Ela surgiu a partir de uma limitação da Coloração de Lista na seguinte situação. Seja um grafo  $k$ -selecionável, quando se tenta associar uma lista  $l$  aos vértices desse grafo onde  $l < k$ , não é possível colorir todos os seus vértices, e como consequência não irá existir uma coloração de lista para todo o grafo. Dessa forma a conjectura nos diz que para um grafo  $G$  com  $n$  vértices e número lista cromático  $\chi_l(G)$ , e qualquer atribuição de listas de tamanho  $t$  aos vértices de  $G$ , onde  $t \leq \chi_l(G)$ , ao menos  $\frac{tn}{\chi_l(G)}$  vértices podem ser coloridos usando cores e suas respectivas listas de forma que dois vértices adjacentes não possuam a mesma cor. Na Subseção 5.2.1 temos as definições necessárias para o entendimento do resultado e na Subseção 5.2.2 temos o resultado provado pelo autor sobre a Partial List Coloring.

**Conjectura 5.2.1** *Para qualquer grafo  $G$  em  $n$  vértices tendo número lista cromático  $\chi_l(G)$ , e  $t \in \{1, 2, \dots, \chi_l(G)\}$ ,  $\lambda_t(G) \geq \frac{tn}{\chi_l(G)}$ .*

### 5.2.1 Definições

A seguir teremos algumas definições necessárias para o entendimento do restante do trabalho que está sendo apresentado nesta seção. Como dito na introdução, a conjectura do Partial List Coloring só foi provada até o momento para alguns grafos especiais. Tais grafos são os **Grafos livres de garra** e **Grafos sem corda**. Neste trabalho iremos trabalhar apenas com o resultado que envolve grafos livre de garra. Uma **Garra** é definida como um grafo  $K_{1,3}$ . Um grafo livre de garra é um grafo que não contém uma garra como subgrafo induzido. Em um grafo  $G(V, E)$ , é dito que duas arestas  $e_1, e_2 \in E$  são adjacentes se elas possuem um vértice em comum.

Um grafo  $G$  é 2-vértice conexo ou 2-conexo se a remoção de qualquer vértice não desconecta o grafo. Um grafo  $G$  é minimamente 2-conexo se ele é 2-conexo como também sem corda, e não for uma única aresta. Para  $X \subseteq V$  e  $U \subseteq V$  com  $V$  não estando em  $X$ ,  $N_X(U)$  é definido como o conjunto da vizinhança dos vértices de  $U$  em  $X$ , isto é,  $N_X(U) = \{v \in X : \exists u \in U \text{ tal que } (u, v) \in E\}$ .

Seja  $G$  qualquer grafo. Para  $t \leq \chi_l(G)$ ,  $\mathbf{L}$  é o conjunto de todas as  $t$ -atribuições possíveis. Então nem todas as  $t$ -atribuições devam possuir uma lista de coloração própria. Para

$l \in \mathbf{L}$ , definimos uma *partial list coloring* de  $l$  como uma atribuição para cada vértice  $v$  de algum subconjunto  $V' \subseteq V$  uma cor em  $l(v)$  tal que não há dois vértices em  $V'$  que recebam as mesmas cores. Dizemos que uma *partial list coloring* colore o conjunto de vértices em  $V'$  (e deixa os vértices em  $V$  que não estão em  $V'$  descoloridos). Seja  $\lambda_t(l)$  o número máximo de vértices que são coloridos por qualquer *partial list coloring* da  $t$ -atribuição  $l$ .  $\lambda_t(G) = \min_{l \in \mathbf{L}}(\lambda_t(l))$ .

### 5.2.2 Resultado

Aqui será abordado o resultado no qual o autor chegou sobre Partial List Coloring.

**Teorema 5.2.2** (GUPTA, 2021). *Seja  $G$  um grafo livre de garra em  $n$  vértices cujo o número lista cromático é  $s$ . Então para todo  $t \in \{1, 2, \dots, s\}$ ,  $\lambda_t(G) \geq \frac{tn}{s}$ .*

Nesse teorema vemos que é possível colorir parcialmente um grafo livre de garra com um número de cores menor que seu número lista cromático. Dessa forma temos  $s$  que representa o número lista cromático do grafo. Se  $t$  for igual a  $s$  temos uma consequência direta que o teorema é verdade. Nesse caso será trabalhado um valor para  $t < s$ .

A primeiro momento teremos um  $l_t$  que será uma  $t$ -atribuição. Em seguida teremos  $T$  que será igual a união de todos as  $l_t(v)$  com  $v \in V$ ,  $k$  que será igual a quantidade de cores que existem em  $T$  onde  $T$  será nossa paleta de cores com  $T = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ . Como  $t < s$ , possivelmente não existe uma coloração própria para as  $t$ -atribuições  $l_t$ . Dessa forma será usado um outro conjunto  $S$  de  $(s - t)$  cores diferentes das cores de  $T$ . Assim  $S = \{c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_{k+(s-t)}\}$ , observando que  $t \leq k$ . Agora podemos definir uma  $s$ -atribuição  $l_s$  de  $G$  dessa forma: para  $v \in V$ ,  $l_s(v) = l_t(v) \cup S$  onde teremos  $l_s(v)$  com as cores de  $S$  e as cores de  $T$ . Já que  $s$  é o número lista cromático do grafo, para uma  $s$ -atribuição  $l_s$ , então existe uma coloração própria de lista de  $G$ . Vamos considerar uma coloração própria de lista  $f$  de  $l_s$  tal que o número de vértices associados a uma cor de  $S$  é a menor possível. É conhecido que  $f$  particiona o conjunto de vértices em  $k + (s - t)$  classes de cor  $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_{k+(s-t)}$  onde  $v \in C_i \iff f(v) = c_i$ . Além de  $\forall_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $V_i = \{v \in V : c_i \in l_t(v)\}$ .

É afirmado que  $|\{v \in V : f(v) \in S\}| = \sum_{i=k+1}^{k+(s-t)} |C_i| \leq \frac{(s-t)n}{s}$ . Esta afirmação implica que  $|\{v \in V : f(v) \in T\}| = \sum_{i=1}^k |C_i| \geq \frac{tn}{s}$ , uma vez que  $\sum_{i=k+1}^{k+(s-t)} |C_i| + \sum_{i=1}^k |C_i| = n$ , já que os vértices estão em  $S$  ou em  $T$ .

Supondo por uma questão de contradição que  $|\{v \in V : f(v) \in S\}| = \sum_{i=k+1}^{k+(s-t)} |C_i| > \frac{(s-t)n}{s}$  como também existe uma classe de cor  $C_p$  onde  $k+1 \leq p \leq k+(s-t)$  tal que  $|C_p| > \frac{n}{s}$ , isto é, existe uma classe de cor  $C_p$  que corresponde a uma das cores em  $S$  cuja sua cardinalidade é maior que  $\frac{n}{s}$ . Então,

$$|\{v \in V : f(v) \in T\}| = \sum_{i=1}^k |C_i| < \frac{tn}{s}$$

desde que no somatório  $\sum_{i=1}^k |C_p \cap V_i|$ , para todo vértice  $v \in C_p$  é contado  $t$  vezes onde  $t$  representa cores em  $l_t(v)$ , tem se que

$$\sum_{i=1}^k |C_p \cap V_i| = t|C_p| > \frac{tn}{s}$$

Essas duas desigualdades implicam que existe uma classe de cor  $C_i$ , onde  $1 \leq i \leq k$ , tal que  $|C_i| < |C_p \cap V_i|$ .

Seja  $Z$  o menor subconjunto de  $C_p \cap V_i$  tal que  $|N_G(Z) \cap C_i| < |Z|$ . É dito que um  $Z$  sempre existe desde que  $Z = C_p \cap V_i$  já satisfaz a condição. É alegado que para todo  $v$  que pertence a  $N_G(Z) \cap C_i$ ,  $|N_Z(v)| \geq 2$ , para que se existir um  $v$  que pertence a  $N_G(Z) \cap C_i$  tal que  $|N_Z(v)| \leq 1$ , então é contradito a minimalidade de  $Z$ , desde  $Z \setminus N_Z(v)$  satisfaz as condições a cima e é menor em tamanho do que  $Z$ . Então se para algum  $v \in N_G(Z) \cap C_i$ , tem-se  $N_{C_p \setminus Z}(v) \neq \emptyset$ , então  $|N_{C_p}(v)| \geq 3$  já que em  $Z$  o tamanho da vizinhança de  $v$  é pelo menos 2. Desde que  $C_p$  é um conjunto independente em  $G$ , isto implica que existe um subgrafo induzido de  $G$  isomorfo a uma garra, no qual é uma contradição para o fato que  $G$  é livre de garra. Portando, conclui-se que  $\forall v \in N_G(Z) \cap C_i$ ,  $N_{C_p \setminus Z}(v) = \emptyset$ ,  $\nexists (u, v) \in E$  tal que  $u \in N_G(Z) \cap C_i$  e  $v \in C_p \setminus Z$ . Isto faz com que seja possível formar outra propriedade de coloração de lista  $f'$  de  $l_s$  pegando a coloração de  $f$  e então dando a cor  $c_i$  para  $Z$  e  $c_p$  para  $N_G(Z) \cap C_i$ . Desde que  $|N_G(Z) \cap C_i| < |Z|$ ,  $f'$  é uma propriedade de coloração de lista de  $l_s$  que se atribui um menor número de vértices a uma cor de  $S$  que  $f$ , que é uma contradição para escolha de  $f$ .

## 6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Este capítulo mostra de forma resumida o que foi abordado neste trabalho de conclusão de curso. Na Seção 6.1 temos os resultados que foram encontrados de acordo com a nossa proposta e na Seção 6.2 teremos as limitações encontradas durante a pesquisa do assunto. Por fim, na Seção 6.3 teremos a apresentação dos trabalhos futuros.

### 6.1 Resultados alcançados

Este trabalho apresentou um *survey* sobre Coloração de Lista, onde trazemos um conjunto de resultados alguns antigos e novos, tornando uma fonte de informação para estudos e possíveis novos trabalhos. Neste trabalho consideramos por **mais novos** os resultados depois de 2017, já que o último *survey* (SANKAR *et al.*, 2016) que se encontra na literatura foi no ano de 2016. Dessa forma, este trabalho também funciona como um ponto de partida para novos pesquisadores que desejam iniciar seu caminho na área da Teoria dos Grafos tendo com foco a Coloração de Lista.

Após a análise dos artigos sobre Coloração de Lista a partir de 2017, introduzimos e detalhamos alguns resultados a fim de tornar o entendimento do conteúdo desses artigos melhor tanto para iniciantes no tema como para aqueles que já possuem conhecimento na área. Com isso, conseguindo ampliar mais o assunto dentro da literatura de forma a estimular novos trabalhos.

### 6.2 Limitações encontradas

Durante o desenvolvimento deste trabalho foram encontrados algumas limitações que tornaram difícil a execução do que foi proposto no trabalho de conclusão de curso 1. Tivemos alguns pontos nos quais existiu um grau demasiado de dificuldade.

Um desses pontos foi durante a procura dos resultados mais recentes. Hoje na literatura existe uma gama de trabalhos relacionados à Coloração de Lista, porém uma parte é voltada para resultados não relacionados diretamente com o tema o que nos leva para um ponto bem distante da proposta deste trabalho. Além disso alguns artigos, por sua natureza resumida, foram bastante difíceis de entender. Dessa forma neste trabalho procuramos deixar de forma mais didática para melhor compreensão.

### 6.3 Trabalhos futuros

Nesta seção abordaremos alguns pontos que servem como trabalhos futuros.

- No trabalho (GAMA *et al.*, 2016) há uma tabela (Tabela 1) sobre a complexidade de um conjunto de tipos de grafos coloridos usando a Coloração de Lista. Porém há uma falta de alguns tipos de grafos, dessa forma é viável analisar a possibilidade de se verificar essa complexidade de coloração nos tipos de grafos que não se encontram na tabela;
- No artigo (GUPTA, 2021) temos a conjectura sobre Coloração de Lista Parcial, nela temos sua aplicação em duas classes de grafos com situações específicas para que a mesma seja provada, dessa forma poderá ser feito uma análise da aplicação da conjectura em outras situações;
- Em (SANKAR *et al.*, 2016) nós temos alguns pontos que os autores deixaram aberto, destacamos apenas um desses pontos: a possibilidade de caracterizar grafos que são 3–selecionáveis.
- Temos também alguns artigos que foram encontrados porém não foram aprofundados neste trabalho, assim podendo ser analisados futuramente, são eles: (HAJEBI *et al.*, 2021), (USUBA, 2023) e (HU; ZHU, 2020).

## REFERÊNCIAS

- BERNSHTEYN, A. Y.; KOSTOCHKA, A. On differences between dp-coloring and list coloring. **Siberian Advances in Mathematics**, Springer, v. 29, n. 3, p. 183–189, 2019.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *et al.* **Graph theory with applications**. [S. l.]: Macmillan London, 1976. v. 290.
- BONOMO, F. Gd graph coloring problems. **XII ELAVIO, February**, 2007.
- BONOMO, F.; DURÁN, G.; MARENCO, J. Exploring the complexity boundary between coloring and list-coloring. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 169, n. 1, p. 3, 2009.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic graph theory**. [S. l.]: CRC press, 2008.
- CHOI, I.; CRANSTON, D. W.; PIERRON, T. Painting and correspondence coloring of squares of planar graphs with no 4-cycles. **Combinatorica (Accepted with minor revision)**, 2018.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to algorithms**. [S. l.]: MIT press, 2009.
- DROR, M.; FINKE, G.; GRAVIER, S.; KUBIAK, W. On the complexity of a restricted list-coloring problem. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 195, n. 1-3, p. 103–109, 1999.
- DVOŘÁK, Z.; POSTLE, L. Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 129, p. 38–54, 2018.
- ERDOS, P.; RUBIN, A. L.; TAYLOR, H. Choosability in graphs. In: **Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium**. [S. l.: s. n.], 1979. v. 26, p. 125–157.
- GAMA, S. I. M. *et al.* Sobre problemas de lista coloração e a propriedade de selecionabilidade em grafos. Universidade Federal do Amazonas, 2016.
- GOLUMBIE, M. C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. [S. l.], 1980.
- GORDEEV, A. Proof of the list coloring conjecture for line perfect multigraphs. **arXiv preprint arXiv:1904.06662**, 2019.
- GRÖTSCHEL, M.; LOVÁSZ, L.; SCHRIJVER, A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. **Combinatorica**, Springer, v. 1, n. 2, p. 169–197, 1981.
- GUPTA, G. A study on partial list coloring. Indian Statistical Institute, Kolkata, 2021.
- HAJEBI, S.; LI, Y.; SPIRKL, S. List-5-coloring graphs with forbidden induced subgraphs. corr (2021). **arXiv preprint arXiv:2105.01787**, 2021.
- HU, J.; ZHU, X. List coloring triangle-free planar graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 94, n. 2, p. 278–298, 2020.
- JANSEN, K. The optimum cost chromatic partition problem. In: SPRINGER. **Italian Conference on Algorithms and Complexity**. [S. l.], 1997. p. 25–36.

- JANSEN, K.; SCHEFFLER, P. Generalized coloring for tree-like graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 75, n. 2, p. 135–155, 1997.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: **Complexity of computer computations**. [S. l.]: Springer, 1972. p. 85–103.
- KÖNIG, D. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 77, n. 4, p. 453–465, 1916.
- KUBALE, M. Some results concerning the complexity of restricted colorings of graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 35–46, 1992.
- LA, H. 2-distance list ( $\Delta + 3$ )  
–coloring of sparse graphs. **arXiv preprint arXiv:2105.01684**, 2021.
- PETERSON, D.; WOODALL, D. R. Edge-choosability in line-perfect multigraphs. **Discrete mathematics**, Elsevier, v. 202, n. 1-3, p. 191–199, 1999.
- SANKAR, J. R.; FELIX, A.; RAYALU, G. M.; NATHAN, M. M. S. A survey: List coloring problem. **International Journal of Control Theory and Applications**, p. 245–249, 2016.
- THOMASSEN, C. Every planar graph is 5-choosable. **Journal of Combinatorial Theory Series B**, Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, v. 62, n. 1, p. 180–181, 1994.
- USUBA, T. The list-chromatic number and the coloring number of uncountable graphs. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, p. 1–39, 2023.
- VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. **Discret Analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.
- VOIGT, M. List colourings of planar graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 120, n. 1-3, p. 215–219, 1993.
- WEST, D. B. *et al.* **Introduction to graph theory**. [S. l.: s. n.], 2001. v. 2.
- ZHANG, X.; LI, Y. Dynamic list coloring of 1-planar graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 344, n. 5, p. 112333, 2021.