



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO EM FÍSICA

FRANCISCO CLEITON ESTEVÃO LIMA

ASPECTOS DE ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS EM BAIXAS DIMENSÕES

FORTALEZA

2023

FRANCISCO CLEITON ESTEVÃO LIMA

ASPECTOS DE ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS EM BAIXAS DIMENSÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- L698a Lima, Francisco Cleiton Estevão.
Aspectos de estruturas topológicas em baixas dimensões / Francisco Cleiton Estevão Lima. – 2023.
185 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Estruturas bidimensionais. 2. Estruturas tridimensionais. 3. kink. 4. Vórtices magnéticos. 5. Formalismo BPS. I. Título.

CDD 530

FRANCISCO CLEITON ESTEVÃO LIMA

ASPECTOS DE ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS EM BAIXAS DIMENSÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Aprovada em: 17 de Julho de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Gomes de Souza Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Nelson Ricardo de Freitas Braga
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Com amor e carinho dedico este trabalho à minha família, em especial, a minha mãe Maria do Livramento Estevão Lima e ao meu pai Francisco Rodrigues de Lima que em todos os momentos estiveram ao meu lado me apoiando.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família. Em especial, agradeço aos meus pais, Francisco Rodrigues de Lima e a minha mãe Maria do Livramento Estevão Lima, por sempre estarem ao meu lado me apoiando. Agradeço por todo amor e carinho que vocês me proporcionam. Acima de tudo, agradeço por todo apoio e confiança que vocês depositam em mim. Sem o apoio de vocês, eu jamais teria conquistado nada disto. Também aproveito para agradecer às minhas irmãs, Cristina Estevão Lima, Cristelane Estevão Lima e Cristênia Estevão Lima, por todo amor, carinho e por todo cuidado comigo e com os nossos pais. Agradeço também às minhas sobrinhas, Stefany Lima da Silva, Gabrielle Lima Moura e Gracielle Lima Moura, por todo carinho, amor e por todos os momentos compartilhados.

Ao Prof. Carlos Alberto Santos de Almeida, gostaria de expressar minha sincera admiração e gratidão por ter aceitado novamente o desafio de me orientar nesta tese de doutorado. De fato, nos últimos anos, bem mais que um orientador, você tornou-se um grande amigo e um verdadeiro pai acadêmico. Agradeço por todos os ensinamentos compartilhados; muito mais que isso, agradeço por todas as críticas, comentários e sugestões que me permitiram buscar evoluir a cada novo projeto. Agradeço por sempre ter o cuidado de proporcionar a melhor formação possível para todos os seus alunos. Serei eternamente grato pelo seu apoio contínuo nessa árdua jornada, por sua valiosa amizade, paciência e entusiasmo a cada novo projeto. Agradeço também pela orientação impecável, pela simplicidade, seu exemplo de ética, sua disponibilidade e pelas excelentes discussões e compromisso que levaram ao enriquecimento e aprimoramento do trabalho.

Ao Prof. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, também expresse minha admiração e gratidão por todos os ensinamentos e momentos compartilhados. Agradeço por sua valiosa amizade, por sua colaboração e pelas diversas discussões sobre física.

Ao Prof. Eduardo Bedê Barros, agradeço por sua valiosa orientação no meu período de iniciação científica e por todos os seus ensinamentos. Agradeço por todas as discussões de física que contribuíram para minha formação e me ajudaram a ser um pesquisador. Obrigado!

Ao Prof. José Ramos Gonçalves, agradeço por seu exemplo como professor e como profissional. Também agradeço por todo o seu carinho e esforço em repassar o conhecimento da melhor forma possível em todas as disciplinas que ministra. Obrigado pelas excelentes aulas de Mecânica Teórica I e II. Reconheço que essas disciplinas e seus ensinamentos foram fundamentais na minha vida acadêmica. Muito obrigado, professor!

Ao Prof. Albert Yurievich Petrov, gostaria de agradecer por sua importante e valiosa colaboração. Agradeço por todas as discussões sobre física e por sua valiosa contribuição na obtenção de alguns resultados desta tese.

À banca examinadora, agradeço por sua disponibilidade para a avaliação deste trabalho. De fato, sou imensamente grato aos professores Francisco de Assis de Brito, Rodolfo Alván Casana Sifuentes, Nelson Ricardo de Freitas Bragas e Antônio Gomes de Souza Filho por todos os comentários, críticas, sugestões e questionamentos.

A todos os membros do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes-LASSCO, que de alguma forma, contribuíram para a construção desta tese. Em especial, agradeço aos colegas Allan Ranieri Pereira Moreira e Fernando de Menezes Belchior.

A todos amigos do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará. Em especial, agradeço ao amigo Luciano Ferreira de Almeida por sua amizade, pelas conversas e pelos momentos de alegria e aflição compartilhados.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Física, agradeço por me acompanharem ao longo dessa árdua jornada. Também sou grato por cada discussão de física, pelo apoio contínuo, pelas comemorações e pelas boas vibrações a cada trabalho publicado. Agradeço por sempre estarem ao meu lado nos momentos de alegria, mas também nos momentos de aflição. Em especial, gostaria de agradecer aos amigos Ramon Sampaio Ferreira e Francisco Israel Alves do Nascimento, pois mais que amigos, tornaram-se grandes irmãos. Obrigado!

A todos os colaboradores que nos ajudaram na elaboração de cada projeto publicado.

A todos os professores do Departamento de Física-UFC que contribuíram para a minha formação.

À coordenação do curso de Pós-Graduação em Física, na pessoa do coordenador Prof. Eduardo Bedê Barros, por toda infraestrutura fornecida.

À Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES), processo nº 88887.372425/2019-00, pela bolsa de estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Brevemente, gostaria de homenagear aos meus pais com duas sentenças que eles apreciam. Essas frases são: *“Bem sei eu que tudo podes, e que nenhum dos teus propósitos pode ser impedido; e os que confiam no senhor serão como o monte de Sião, que não se abalam, mas permanece para sempre.”*

(Jó 42:2; Salmos 125:1)

RESUMO

Estudamos os aspectos das estruturas topológicas bidimensionais e tridimensionais que surgem em modelos de teoria clássica de campos. Resumidamente, no caso bidimensional realizamos o estudo das configurações *kinks*. Enquanto isto, no caso tridimensional, investigamos o surgimento dos vórtices topológicos magnéticos. Para alcançar o nosso propósito, iniciamos considerando uma teoria ϕ^6 de multi-campo em um espaço-tempo plano. Nesse cenário, obtemos as configurações de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) dos campos que compõem a teoria. Além disso, considerando argumentos oriundos da entropia de configuração selecionamos as configurações tipo *kink* (e *antikink*) mais prováveis da teoria. Posteriormente, investiga-se as configurações tipo *kink* que surgem em um cenário de gravidade *dilaton* bidimensional. Neste cenário, alguns aspectos das estruturas são analisados. Entre eles, analisamos a estabilidade do campo de matéria e o modo translacional. Além disso, analisamos a interforça produzida pelas estruturas e posteriormente investigamos numericamente o processo de espalhamento de uma par de estruturas *kink-antikink*. Para estudar os vórtices topológicos magnéticos consideramos três cenários distintos. No primeiro cenário, adotamos os modelos generalizados e não-canônicos descritos por uma teoria de campo escalar. No segundo cenário, as teorias de multi-campos acopladas ao modelo sigma-O(3) não-mínimo é assumida. Finalmente, no terceiro cenário, estudamos as estruturas tridimensionais auto-gravitante na gravidade de Einstein. Para estudar o primeiro caso consideramos uma geração perturbativa para teorias escalar-vetor e demonstramos que as funções de permeabilidade dielétrica devem ter uma forma não-polinomial, i. e., a forma da função logarítmica. Com este resultado, investigamos as estruturas tridimensionais (i. e., os vórtices magnéticos generalizados) com propriedade BPS para um modelo do tipo Maxwell-Gaussen. Em seguida, investigamos a existência estruturas topológicas tridimensionais em um modelo tipo *cuscuton*. Neste caso, as soluções topológicas encontradas nesse cenário não são auto-duais, porém sugerem a existência de soluções de estruturas topológicas se algumas imposições sobre a energia dos campos forem adotadas. Além disso, mostra-se que quando a quebra de simetria espontaneamente não ocorre, o modelo tridimensional não-canônico com contribuição do termo *cuscuton* irá admitir somente soluções não-topológicas. Ao considerar o modelo sigma-O(3) com acoplamento não-mínimo, construímos uma teoria de multi-campos com o modelo sigma-O(3) não-canônico, com o campo de Maxwell modificado por uma função dielétrica e um campo escalar real. Através do formalismo BPS é feita uma investigação sobre possíveis configurações de vórtices em setores topológicos do modelo sigma e do campo escalar

real. Posteriormente, estudamos a influência das estruturas topológicas do campo escalar real no setor do campo sigma. Em seguida, fazemos uma extensão da teoria considerando um modelo constituído pelo campo sigma, pelo campo escalar do tipo *cuscuton* e pelo campo de Maxwell. Nesse caso, investigamos propriedades BPS considerando uma teoria efetiva sem interação. Além disso, anunciamos em detalhes os aspectos físicos dos vórtices magnéticos topológicos obtidos. Entre estes aspectos, anunciamos o comportamento da energia, do campo magnético e do fluxo magnético das estruturas. Para finalizar, considerando a gravidade de Einstein mostramos a influência do campo de matéria solitônico e do campo de calibre nas funções métricas do espaço-tempo. Neste cenário, conclui-se que o surgimento de vórtices magnéticos no espaço-tempo tridimensional induz o aparecimento de um buraco negro.

Palavras-chave: Estruturas bidimensionais. Estruturas tridimensionais. *kink*. vórtices magnéticos. Formalismo BPS.

ABSTRACT

In this thesis, we studied the aspects of two-dimensional and three-dimensional topological structures that arise in models of classical field theory. Briefly, in the two-dimensional case, we examined the kink configurations. For the three-dimensional models, we analyzed the emergence of topological magnetic vortices. In order to reach the purpose of this thesis, we started considering a multi-field theory with ϕ^6 interaction in a flat spacetime. In this scenario, we obtained the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) configurations for the fields that make up the theory. Furthermore, by adopting arguments from the configuration entropy, the most probable kink (and antikink) structures are selected. Afterward, we investigated the kink-like configurations that emerge in a two-dimensional dilaton gravity scenario. In this scenario, we inspected some aspects of these field configurations. Among them, we analyzed the stability of the matter field and the translational mode. Furthermore, we calculated the interforce produced by the structures and the scattering of these structures. To study magnetic topological vortices, we considered three different scenarios. In the first scenario, we adopted the generalized and non-canonical models described by a scalar field theory. In a moment second, multi-field theories coupled to the non-minimal O(3)-sigma model are assumed. Finally, in the third scenario, we studied the three-dimensional self-gravitating structures in Einstein's gravity. To inspect the first case, we considered a perturbative generation for scalar-vector theories and demonstrate that the dielectric permeability functions must have a non-polynomial form, i.e., the profile of a logarithmic function. By using this result, we investigated the three-dimensional structures (i.e., the generalized magnetic vortices) with BPS property for a Maxwell-Gausson-like model. Afterward, we investigated the existence of three-dimensional topological structures in a model with *cuscuton*-like dynamics. In this case, the topological solutions found in this scenario are not self-dual but suggest the structure's existence if some impositions on the energy of the fields are adopted. Furthermore, we showed that when spontaneous symmetry breaking does not occur, the non-canonical three-dimensional model with the contribution of the term *cuscuton* will admit only non-topological solutions.

By considering the O(3)-sigma model with non-minimal coupling, we constructed a multi-field theory with the non-canonical sigma field, with a scalar field and a Maxwell field modified by a dielectric function. We examine the possible vortex configurations in topological sectors of the sigma and the scalar field by mean of BPS formalism. We investigated the influence of the scalar field in the sigma field sector. Then, we build an extension of the theory considering

a model constituted by the sigma field, a cuscuton-like scalar field, and Maxwell's field. In this case, we investigate BPS properties considering a theory without interaction. Furthermore, we announced the physical aspects of the topological magnetic vortices. Among these aspects, we reported the energy behavior, the profile of the magnetic fields, and the magnetic flux of each structure.

Finally, by adopting Einstein's gravity, we show the influence of the solitonic matter and the gauge field in the spacetime metric functions. In this scenario, we concluded that the emergence of magnetic vortices in three-dimensional spacetime induces the appearance of a black hole.

Keywords: Two-dimensional structures. Three-dimensional structures. kink. magnetic vortices. BPS formalism.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comportamento do potencial $V(\phi)$ quando $m^2 \geq 0$	30
Figura 2 – Comportamento do potencial $V(\phi)$ quando $m^2 < 0$	31
Figura 3 – Comportamento do potencial $V(\phi)$ [Eq. (2.31)] quando $m^2 < 0$ [49].	34
Figura 4 – Configurações estáticas dos campos quando $v = 1$ e $x_0 = 1$. (a) Soluções <i>kink</i> , (b) Soluções <i>antikink</i>	42
Figura 5 – Densidade de energia do <i>kink</i> e do <i>antikink</i> quando $v = 1$ e $x_0 = 0$	43
Figura 6 – Mapeamento do campo ϕ [49].	50
Figura 7 – (a) Soluções tipo <i>kink</i> do campo $\chi(x)$ quando $x_0 = 1, 2$ e 4 . (b) Soluções <i>antikink</i> do campo $\chi(x)$ quando $x_0 = 1, 2$ e 4	64
Figura 8 – (a) Soluções tipo <i>kink</i> do campo $\phi(x)$ quando $c_0 = 6, n = 1$ e $x_0 = 1, 2, 4$. (b) Soluções <i>anti-kink</i> do campo $\phi(x)$ quando $c_0 = -6, n = 1$ e $x_0 = 1, 2, 4$	65
Figura 9 – (a) Soluções tipo <i>kink</i> do campo $\phi(x)$ quando x_0 e c_0 são constantes e n varia. (b) Soluções <i>anti-kink</i> do campo $\phi(x)$ quando c_0 e x_0 são constante e n varia.	65
Figura 10 – Densidade de energia BPS associada aos campos χ e ϕ	66
Figura 11 – Entropia configuracional diferencial em termo do parâmetro n quando $c_0 = x_0 = 1$	67
Figura 12 – Soluções mais prováveis com base no cálculo da entropia configuracional diferencial.	68
Figura 13 – Função de <i>warp</i> e o campo <i>dilaton</i>	71
Figura 14 – Campo de matéria quando $p = 1,00, 1,05$ e $1,15$	72
Figura 15 – (a) Potencial efetivo. (b) Modo translacional das estruturas tipo <i>kink</i>	73
Figura 16 – Interação das estruturas tipo <i>kink-antikink</i> amplamente espaçadas.	74
Figura 17 – Densidade da interforça exercida sobre as estruturas topológicas.	76
Figura 18 – Configuração inicial antes do processo de espalhamento.	76
Figura 19 – Espalhamento das estruturas.	78
Figura 20 – Espalhamento dependente do tempo das estruturas a partir do ponto de colisão $r = 0$	79
Figura 21 – Densidade de energia do campo de matéria quando $p = 1,00$ (linha tracejada), $1,05$ e $1,10$	79
Figura 22 – (a) Fração modal das estruturas independente do valor do parâmetro p . (b) Densidade entrópica associada a complexidade configuracional diferencial.	80

Figura 23 – Diagrama de Feynman de uma função de dois pontos.	86
Figura 24 – (a) Comportamento do campo variável correspondente ao campo escalar complexo quando $e = \xi = 1, \rho = 10^3, h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$. (b) Solução do campo de calibre quando $e = \xi = 1, \rho = 10^3, h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$	93
Figura 25 – Campo magnético associado à estrutura.	94
Figura 26 – Densidade de energia BPS usando a equação (4.37).	94
Figura 27 – (a) Solução da variável de campo correspondente ao campo escalar complexo quando $e = m_0 = \xi = 1, \rho = 10^3, h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$. (b) Solução do campo de calibre quando $e = m_0 = \xi = 1, \rho = 10^3, h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$	96
Figura 28 – Campo magnético do vórtice BPS	96
Figura 29 – Densidade de energia BPS da estrutura.	97
Figura 30 – (a) Solução de $g(r)$ correspondente ao campo escalar complexo quando $\rho = 10^5, e = \xi = 1, h = 1$ e $\mu = 10^{-2}$. (b) Campos variável de campo $a(r)$ correspondente ao campo de calibre quando $\rho = 10^5, e = \xi = 1, h = 1$ e $\mu = 10^{-2}$	99
Figura 31 – Campo magnético do vórtice.	100
Figura 32 – Densidade de energia BPS.	100
Figura 33 – (a) Comportamento do campo variável $g(r)$. (b) Solução do campo de calibre $a(r)$ associado ao campo $g(r)$. Em ambas as soluções assumimos que $e = \lambda = M = 1$	105
Figura 34 – Densidade de energia BPS associada a soluções do campo escalar e de calibre quando $e = \lambda = M = 1$	105
Figura 35 – Campo magnético associado do vórtice quando $e = \lambda = M = 1$	106
Figura 36 – (a) Soluções tipo <i>kink</i> do campo $\psi(r)$ para vários valores de α . (b) Soluções tipo <i>antikink</i> do campo $\psi(r)$ para vários valores de α	115
Figura 37 – (a) Soluções da variável de campo $f(r)$ para vórtices com $N = 1$. (b) Solução da variável de campo $a(r)$ associada ao campo de calibre quando $N = 1$	116
Figura 38 – (a) Densidade de energia para vários valores de α . (b) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,00$. (c) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,25$. (d) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,50$	117

Figura 39 – (a) Campo magnético para vários valores de β . (b) Campo magnético planar quando $\beta = 1$. (c) Campo magnético planar quando $\beta = 2$. (d) Campo magnético planar quando $\beta = 4$	118
Figura 40 – (a) Solução numérica da variável de campo $f(r)$ com $N = m = 1$. (b) Solução numérica da variável de campo $f(r)$ com $N = 1$ e $m = 2$	119
Figura 41 – (a) Solução numérica da variável de campo $a(r)$ com $N = 1$ e $m = 1$. (b) Solução numérica do campo variável $a(r)$ com $N = 1$ e $m = 2$	120
Figura 42 – (a) Densidade de energia para os casos $m = 1$ e $m = 2$ com vários valores do parâmetros α . (b) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,00$. (b) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,25$. (b) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,50$	121
Figura 43 – (a) Campo magnético do vórtice para vários valores do parâmetro β com $N = 1$ e $m = 1$. (b) Campo magnético com $\beta = 1,00$. (c) Campo magnético com $\beta = 1,25$. (b) Campo magnético com $\beta = 1,50$	122
Figura 44 – (a) Campo magnético do vórtice para vários valores do parâmetro β com $N = 1$ e $m = 2$. (b) Campo magnético com $\beta = 1,00$. (c) Campo magnético com $\beta = 1,25$. (b) Campo magnético com $\beta = 1,50$	123
Figura 45 – Solução numérica da variável de campo $f(r)$	124
Figura 46 – (a) Solução da variável de campo sigma $f(r)$. (b) Solução da variável de campo de calibre $a(r)$	131
Figura 47 – Comportamento do campo magnético função de r quando o parâmetro α varia.	133
Figura 48 – Densidade de energia BPS variando em função de r para vários valores do parâmetro α	134
Figura 49 – Perfil do campo de matéria para vários valores de α quando $n = v = 1$	138
Figura 50 – Campo de calibre associado ao campo de matéria (6.3) quando $n = 1$	141
Figura 51 – Comportamento do campo magnético produzido pelo campo de calibre $a(r)$ para alguns valores do parâmetro α	142
Figura 52 – O resultado numérico das funções métricas quando $n = \alpha = v = \lambda = 1$ e $G = 1/4\pi$. Em todos os casos, assume-se a constante de integração $C_0 = 1$. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$. (b) Gráfico quando $\Lambda = -2$	143
Figura 53 – Escalar de curvatura independente do parâmetro α quando $n = \alpha = v = \lambda = C_0 = 1$ e $G = 1/4\pi$	143

Figura 54 – O invariante quadrático do tensor de Ricci quando $n = \alpha = \nu = \lambda = C_0 = 1$ e $G = 1/4\pi$. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$. (b) Gráfico quando $\Lambda = -2$	144
Figura 55 – Escalar Kretschmann quando $n = \alpha = \nu = \lambda = C_0 = 1$ e $G = 1/4\pi$. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$. (b) Gráfico quando $\Lambda = -2$	145
Figura 56 – Resultado numérico da temperatura Bekenstein-Hawking. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$ e $\lambda = \nu = 1$. (b) Gráfico quando $\lambda = \nu = \alpha = 1$. (c) Comportamento da temperatura Bekenstein-Hawking em função do raio do horizonte de evento r_h (r_+) quando $\Lambda = -1$ e $\lambda = \nu = \alpha = 1$	151

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Resultado numérico da interforça entre as estruturas tipo *kink-antikink*. . . . 75
- Tabela 2 – Resultados numéricos da complexidade configuracional diferencial. 80
- Tabela 3 – Tabela com o resultado numérico da massa M_{AdS_3} assumindo $R = 10$ e $G = 1.148$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Uma retrospectiva do conceito de sóliton e sua aplicabilidade	20
1.2	Estruturas topológicas: síntese e aplicação	22
1.2.1	<i>Os defeitos tipo monopolo magnético</i>	22
1.2.2	<i>Os defeitos tipo corda cósmica</i>	23
1.2.3	<i>As paredes de domínios</i>	24
1.3	As estruturas topológicas em baixa dimensão	25
1.3.1	<i>As configurações tipo kink</i>	25
1.3.2	<i>Os vórtices</i>	26
1.4	O propósito e a organização da tese	26
1.4.1	<i>Organização da tese</i>	27
2	ASPECTOS TOPOLÓGICOS DE TEORIA DE CAMPOS	29
2.1	A quebra espontânea de simetria	29
2.1.1	<i>Quebra espontânea de simetria discreta</i>	29
2.1.2	<i>Quebra espontânea de simetria global $U(1)$ e os Bósons de Nambu-Goldstone</i>	33
2.1.3	<i>Quebra de simetria parcial no modelo $SO(3)$</i>	36
2.2	Sólitons Topológicos	40
2.2.1	<i>Kink</i>	40
2.2.2	<i>O teorema de Derrick</i>	43
2.2.3	<i>Os vórtices</i>	48
2.3	O formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)	54
2.3.1	<i>O formalismo BPS para o kink Z_2</i>	54
2.3.2	<i>O formalismo BPS estendido</i>	56
3	ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS BIDIMENSIONAIS	58
3.1	Uma breve motivação	58
3.2	<i>kink na teoria ϕ^6</i>	60
3.2.1	<i>O modelo</i>	60
3.2.1.1	<i>A entropia configuracional</i>	66
3.2.2	<i>Observações finais sobre o modelo</i>	67
3.3	Estruturas bidimensionais auto-gravitantes	68

3.3.1	<i>O modelo e sua estabilidade</i>	69
3.3.1.1	<i>A estabilidade das soluções</i>	71
3.3.2	<i>A interforça entre as estruturas</i>	74
3.3.3	<i>Espalhamento das estruturas</i>	75
3.3.4	<i>A transição de fase do campo de matéria</i>	77
3.3.5	<i>Observações finais sobre o modelo</i>	81
4	ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS TRIDIMENSIONAIS	83
4.1	Uma breve motivação	83
4.2	Algumas convenções	84
4.3	Vórtices em uma teoria com generalização logarítmica	85
4.3.1	<i>Esquema para gerar modelos generalizados</i>	86
4.3.2	<i>Vórtices com permeabilidade logarítmica do tipo Gausson</i>	88
4.3.2.1	<i>O Caso $m(\phi) = h \phi$</i>	92
4.3.2.2	<i>O caso: $m(\phi) = m_0 + h \phi$</i>	94
4.3.2.3	<i>Permeabilidade elétrica do tipo $\rho f(\phi)^2 \ln \left[\frac{m(\phi)^2}{\mu^2} \right]$</i>	97
4.3.2.4	<i>O caso: $f(g) = g(r)$ e $m(g) = hg(r)$.</i>	99
4.3.3	<i>Observações finais sobre o modelo</i>	101
4.4	Vórtices produzidos por uma teoria não-canônica	101
4.4.1	<i>A descrição dos vórtices de Maxwell</i>	102
4.4.2	<i>Observações sobre o modelo</i>	105
5	ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS TRIDIMENSIONAIS PRODUZIDAS NO MODELO SIGMA-O(3)	107
5.1	Uma breve motivação	107
5.2	Algumas convenções	109
5.3	Vórtices no modelo sigma-O(3) não-mínimo	110
5.3.1	<i>Modelo sigma-O(3) não-mínimo generalizado</i>	110
5.3.2	<i>Possível esquema para gerar novas classes de estruturas no modelo sigma-O(3)</i>	113
5.3.2.1	<i>O modelo canônico usual: $\mathcal{F} = 1$</i>	116
5.3.2.2	<i>O modelo não-canônico puro: $\mathcal{F} = \phi_3^m$</i>	117
5.3.2.3	<i>O modelo misto não-canônico: $\mathcal{F} = \psi(r)$</i>	122
5.3.3	<i>Observações finais sobre o modelo</i>	124
5.4	Vórtices no modelo sigma-cuscuton	125

5.4.1	<i>O vórtice BPS não-mínimo</i>	126
5.4.2	<i>Condições de contorno topológica e propriedades dos vórtices</i>	129
5.4.3	<i>Solução de vórtice sem interação</i>	129
5.4.3.1	<i>As soluções do campo escalar não-canônico</i>	129
5.4.3.2	<i>A Teoria sem interação</i>	130
5.4.3.3	<i>As soluções de vórtice sem interação</i>	131
5.4.4	<i>Observações finais sobre o modelo</i>	132
6	ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS EM GRAVIDADE DE EINSTEIN	135
6.1	Uma breve motivação	135
6.2	Os buracos negros de vórtices	137
6.2.1	<i>O caso: $A(r) = B(r)$</i>	140
6.2.2	<i>O comportamento assintótico</i>	144
6.2.2.1	<i>A função métrica</i>	144
6.2.2.2	<i>O campo de calibre</i>	145
6.3	A massa Arnowitt-Deser-Misner (ADM)	146
6.3.1	<i>Representação integral da massa</i>	147
6.4	Termodinâmica dos buracos negros de vórtices	148
6.5	Observações finais sobre o modelo	150
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	153
7.1	Perspectivas	156
	REFERÊNCIAS	157
	APÊNDICES	180
	APÊNDICE A – Lista de publicações relacionadas à tese	180
	APÊNDICE B – Lista de publicações relacionadas ao período de doutorado	182

1 INTRODUÇÃO

Antes de começar a discutir o tema e o propósito desta tese, deixo abaixo o seguinte trecho da música Trem-Bala como reflexão:

“Não é sobre chegar no topo do mundo e saber que venceu. É sobre escalar e sentir que o caminho te fortaleceu. É sobre ser abrigo e também ter morada em outros corações. E assim ter amigos contigo em todas as situações.

A gente não pode ter tudo! Qual seria a graça do mundo se fosse assim? Por isso, eu prefiro sorrisos e os presentes que a vida trouxe para perto de mim!”

(Trem-Bala - Ana Vilela)

1.1 Uma retrospectiva do conceito de sóliton e sua aplicabilidade

As estruturas topológicas são caracterizadas por sólitons. Assim, para uma melhor compreensão das estruturas topológicas, permita-nos iniciar apresentando uma síntese histórica do desenvolvimento do conceito destas estruturas. Basicamente, os sólitons são definidos como concentrações de energia conservativa que mantém sua forma inalterada ao interagir com outras configurações de energia [1]. Na verdade, a ideia preliminar de descrever um sóliton como uma concentração de energia localizada foi proposta por Zabusky e Kruskal em 1965 [1]. Entretanto, a definição e a observação dos sóliton surgiu muito antes. Por exemplo, a primeira definição de sóliton que se têm notícia foi proposta pelo o engenheiro naval John Scott-Russell [2]. Russel observava uma barcaça que estava sendo puxada por dois cavalos ao longo do canal de Hermiston, em Edimburgo, próximo à universidade Heriot-Watt, quando, de repente, a embarcação parou e uma onda gigante com estrutura bem definida e arredondada se formou [2]. Segundo Russel esta estrutura ondulatória deslocava-se com alta velocidade e parecia uma montanha de água arredondada e bem definida que seguia pelo canal sem alterar a sua forma e velocidade [2, 3]. Nesta ocasião, Russel perseguiu esta configuração de onda até ela desaparecer entre as inúmeras curvas do canal. Russel então chamou esta configuração de onda solitária de translação [2, 3].

Após as observações de Russel, Boussinesq [4], em 1871, e Lord Rayleigh [5] em 1876, buscaram uma descrição matemática das ondas solitárias de translação [6]. Porém, somente em 1895, Korteweg e De Vries anunciaram uma descrição matemática destes perfis de onda [7]. Resumidamente, o que Korteweg e De Vries fizeram para obter à descrição matemática das

ondas solitárias foi considerar a equação de Navier-Stokes e aplicar uma expansão perturbativa para propagar um perfil de onda com as propriedades das ondas solitárias de translação. Assim, em primeira aproximação as estruturas propagam-se com velocidade constante, i. e., $v_0 = \sqrt{gh}$ [7]. Enquanto isto, em segunda aproximação, a equação que descreve a estrutura da onda de Korteweg e De Vries (KdV) é

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - 6u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0, \quad (1.1)$$

onde o $u(x,t)$ é a amplitude da onda [7].

Somente após a proposta apresentada por Korteweg e De Vries [7] a palavra sóliton foi cunhada. Na verdade, a palavra surge com Zabusky e Kruskal [1] buscando estudar as soluções estacionárias da equação de KdV (1.1) [1, 7].

Para o desenvolvimento deste trabalho, entenda um sóliton como uma estrutura com as seguintes propriedades:

1. Tem um perfil constante, i. e., seu perfil tem a forma $f(x \pm v_0 t)$ com v_0 constante;
2. Tem uma configuração de energia finita e localizada;
3. Mantém sua identidade mesmo após interações com outros sólitons.

De modo geral, os sólitons topológicos [estruturas com as propriedades (1 à 3)] surgem quando dois espaços adjacentes encontram-se fora de fase [8, 9, 10]. Por exemplo, os sólitons topológicos ocorrem em fios enrolados de telefone (modelos antigos), que geralmente são enrolados no sentido horário. Porém, após o uso intenso, geralmente, este fio começa a enrolar no sentido anti-horário (oposto), quando isso acontecer, haverá um laço maior distinto que separa as duas direções de enrolamento. Este laço é um exemplo perfeito de um sóliton topológico. Além disso, os sólitons topológicos também aparecem em moléculas de DNA e RNA. Neste cenário, as bandas de estiramento de ligações de hidrogênio da dupla hélice são não lineares e suportam as concentrações de energia de onda solitária [11, 12, 13, 14, 15]. Os sólitons também aparecem em física da matéria condensada descrevendo semicondutores cristalinos usados na eletrônica moderna [16] e, nesse contexto, seus efeitos são quase sempre deletérios. Por esta razão tais transições cristalinas solitônicas são chamadas de defeitos topológicos. Entretanto, esta terminologia em física de partículas e campos desvia a atenção das propriedades matemáticas que estas estruturas (sólitos) possuem. Assim, é preferível chamar tais estruturas de sólitons topológicos (ou ainda, estruturas topológicas) [10, 17].

1.2 Estruturas topológicas: síntese e aplicação

As estruturas topológicas surgem como uma consequência de uma quebra espontânea de simetria [18, 19] que pode, em princípio, ser discreta ou contínua [20]. Devido à quebra espontânea de simetria, a origem das estruturas topológicas é fundamentada em diversas teorias usadas para descrever o modelo padrão das interações fundamentais (i. e., força eletrofraca e forte) [21, 22, 23, 24, 25, 26]. Neste contexto, essas interações se unificam em uma escala de alta energia da ordem de 10^{16} GeV [27, 28, 29]. Assim, devido à alta densidade do universo, neste regime de energia, a gravitação é tratada classicamente e as correções quânticas são introduzidas na teoria através do campo de matéria. Todavia, se a unificação das interações fundamentais ocorrem em 10^{16} GeV, pode-se considerar que o universo se resfriou de temperaturas mais elevadas e sofreu transições de fase decorrente da quebra espontânea de simetria produzindo as estruturas topológicas [18, 19, 30].

Basicamente, existem três tipos de defeitos topológicos, i. e., os defeitos do tipo monopolo magnético, tipo corda e as paredes de domínios [31]. Durante o processo de formação destas estruturas, acredita-se que os monopolos teriam se aniquilado com os anti-monopolos e as paredes de domínios e os defeitos tipo cordas colapsaram e se dissiparam em forma de radiação gravitacional [31, 32, 33]. Assim, apenas os efeitos das cordas cósmicas podem, em princípio, ser sentidos até os dias atuais, uma vez que ele permaneceriam influenciando na evolução do universo [33].

1.2.1 Os defeitos tipo monopolo magnético

Uma classe de defeitos (ou estruturas) particularmente interessante são os monopolos magnéticos. Na verdade, estas partículas foram propostas inicialmente por Dirac quando ele propõe os monopolos magnéticos como uma explicação notavelmente elegante, porém não confirmada, da quantização da carga [34, 35]. Após a formulação de Dirac, 't Hooft [36] e Polyakov [37] propõem que os campos de monopolos sem singularidades de cordas poderiam emergir naturalmente das teorias de gauge não-Abelianas como soluções solitônicas associadas à uma carga bem definida, i. e., o número de enrolamento (do inglês, *winding number*) [10, 38]. Além disso, baseado na teoria de 't Hooft [36] e Polyakov [37], os monopolos parecem ser uma estrutura fundamental oriunda da grande teoria unificada. Isto porque os monopolos magnéticos são consequências da quebra espontânea de simetria [36].

Apesar das previsões teóricas da produção de monopolos magnéticos no universo primitivo [39], ainda não temos evidências experimentais dessas partículas em nosso universo. Assim, os modelos teóricos sobre os monopolos são os primeiros passos para o estudo dessas estruturas e nos motivam no desenvolvimento de novos modelos inflacionários do universo [40]. Além do mais, atualmente, as investigações sobre os monopolos magnéticos continuam a evoluir com a introdução de modelos com simetria estendidas [41]. Esta extensões da teoria permitem a existência teórica de monopolos mais complexos com estruturas internas e propriedades físicas intrigantes.

1.2.2 Os defeitos tipo corda cósmica

Cordas cósmicas são defeitos topológicos análogos aos tubos de fluxos que surgem nos supercondutores tipo II e nos filamentos de vórtices em hélio superfluido. Essas estruturas podem ter sido formadas em uma grande transição de unificação [42], ou simplesmente concebível, posteriormente, na transição eletrofraca [42]. É importante destacar que o modelo padrão não prevê cordas estáveis, porém algumas generalizações permitem esta previsão [42].

Os defeitos de corda cósmica possuem grandes valores de energia [42]. Isto porque em sua forma canônica, a forma mais simples de uma corda, a energia por unidade de comprimento, μ , e a tensão da corda são iguais [43]. Conseqüentemente, a velocidade característica das ondas na corda é a velocidade da luz. Na verdade, isto é uma consequência da invariância local da configuração do campo em torno de uma corda sob impulsos de Lorentz ao longo de sua direção [43].

Um parâmetro particularmente importante desta teoria é a quantidade adimensional $G\mu \sim (T_c/M_{Pl})^2$, que caracteriza a força da interação gravitacional das cordas [42, 43]. Para grandes cordas unificadas, $G\mu$ é da ordem de 10^{-6} ou 10^{-7} . Assim, uma grande corda unificada de comprimento igual ao diâmetro solar seria tão massiva quanto o Sol, enquanto comprimento de corda formada na escala eletrofraca pesaria apenas 10mg [43]. Dessa maneira, pode-se dizer que os efeitos gravitacionais são desprezíveis. Além disso, essas cordas podem ser de grande interesse, por causa de outros tipos de interações. Em particular, as cordas cósmicas podem ainda se comportar como fios supercondutores finos com uma corrente crítica e vórtices magnéticos (semelhantes aos vórtices de Abrikosov), veja a referência [43, 44].

1.2.3 As paredes de domínios

As paredes de domínios são estruturas topológicas (ou sólitons topológicos) oriundas de uma quebra espontânea de simetria discreta. Em analogia, com as soluções clássicas do modelo sine-Gordon, as paredes de domínios são também chamadas de *kinks* [45, 46, 47, 48]. De modo geral, entende-se como parede de domínio o limite (ou interface) entre dois domínios distintos vizinhos [49]. Assim, uma parede de domínio é entendida como um “objeto” contido em um espaço-tempo de $(2 + 1)$ -dimensão, ou ainda, em $(1 + 1)$ -dimensão [49]. Fisicamente encontramos paredes de domínios descrevendo domínios magnéticos diferentes [50, 51], propriedades ópticas [52] e até singularidades bidimensionais em teoria das cordas [53].

Acredita-se que no início do universo ocorreram quebras discretas de simetrias que produziram redes de paredes de domínio que influenciaram nos estágios finais da inflação cosmológica e na radiação cósmica de fundo [42]. Além disso, existe uma classe de modelos de mundos-brana em que a membrana é uma parede de domínio formada pela interação de campos extra-dimensionais [54, 55, 56]. Nesse cenário, a quebra espontânea de simetria localiza os campos materiais em configurações de energias suficientemente altas. Comumente, este tipo de parede de domínio que aparece em mundo-brana é chamado de brana fina [57, 58]. Na verdade, o nome brana fina é um contraste com a brana espessa, que é um modelo onde o mundo-brana é descrito por uma superfície ideal com campo de matéria sobre ela.

Além disso, as paredes de domínios desempenham um papel fundamental na descrição das propriedades elétricas, eletromecânicas e ópticas de materiais ferroelétricos [16, 59, 60]. Por exemplo, analisando as paredes de domínios pode-se entender a polarização de materiais e sua estabilidade [61]. Além do mais, as paredes de domínios em materiais ferroelétricos são considerados em estudos recentes de nanoeletrônica [16]. Não distante dessa discussão, encontramos na literatura investigações de paredes de domínios aplicadas a novos modelos de física da matéria condensada [62], altas energia [63, 64, 65] e teorias não-lineares [66]. Recentemente, alguns estudos sobre paredes de domínios auto-gravitantes tem chamado a atenção de vários pesquisadores [67, 68]. Isto também deve-se ao fato que estas estruturas podem explicar questões relacionadas à gravidade quântica, colapso gravitacional e a evaporação de buracos negros. Para mais detalhes sobre o assunto, consultar as referências [67, 68].

1.3 As estruturas topológicas em baixa dimensão

Nesta tese, nosso propósito é estudar as estruturas topológicas do tipo cordas cósmica e tipo paredes de domínios. Particularmente, nosso foco nesta tese é o estudo das configurações do tipo kink (defeito do tipo parede de domínio) e do tipo vórtices (defeito do tipo corda cósmica). Assim, permita-nos, nas seções 1.3.1 e 1.3.2, motivar o estudo destas configurações particulares.

1.3.1 As configurações tipo kink

É incontestável que a quebra espontânea de simetria é onipresente nas teorias topológicas [69]. Isto porque neste cenário as estruturas topológicas são frutos da quebra espontânea de simetria, uma vez que elas estão relacionadas às transições de fase e à geração de estruturas localizadas [70, 71]. Essas estruturas topológicas são configurações de energia finita e geralmente podem aparecer em uma, duas e três dimensões espaciais. De modo genérico, os *kinks* enquadram-se como uma classe de estruturas topológicas que surgem nos modelos bidimensionais.

O fato é que os sólitons da teoria clássica e quântica de campos desempenham um papel importante devido às suas aplicações [10]. Nos modelos bidimensionais, o *kink* é uma configuração de onda solitária [17] que interpola entre diferentes mínimos da teoria. A interação entre estruturas *kink-kink* ou *kink-antikink* é um ramo de pesquisa com crescente interesse. Esse interesse ocorre devido às suas aplicações, e. g., o estudo da criação de *kink-antikink* a partir de partículas [72, 73] e colisões *multi-kink* [74, 75] são alguns exemplos.

Atualmente, a teoria ϕ^4 é o modelo mais utilizado na literatura, veja por exemplo as referências [76, 77]. Na verdade, isso ocorre porque o modelo ϕ^4 forma a base fenomenológica das transições de fase na teoria de Ginzburg-Landau [78]. Este modelo é interessante porque descreve bem um potencial duplo simétrico. Por outro lado, teorias de ordem superior como a teoria ϕ^6 tornam-se mais interessantes porque permitem que o modelo admita múltiplas transições de fase. Encontramos na literatura alguns estudos sobre o modelo ϕ^6 . Por exemplo, a teoria ϕ^6 com simetria $O(N)$, foi usada recentemente para estudar diferentes transições de fase [79]. Os modelos ϕ^6 também foram estudados no contexto da supersimetria [80] e no estudo do espalhamento de estruturas [81].

1.3.2 Os vórtices

Os vórtices são configurações de campos em $(2 + 1)$ -dimensões obtidas pela interação do campo gauge com o campo escalar. Em geral, essas estruturas possuem configurações de energia finita e localizada [82, 83, 84]. Entretanto, para que os vórtices tenham perfis de energia bem definidos é necessário que a teoria admita uma simetria local $U(1)$ [82, 83, 84]. Assim, a introdução de um campo de gauge minimamente acoplado ao campo escalar é necessária [44]. O grande interesse no estudo de soluções de vórtices deve-se às importantes aplicações de defeitos topológicos na física de altas energias [9], onde as estruturas surgem como soluções estáticas de equações de campo [10, 85]. Nesse contexto, essas estruturas podem desempenhar um papel importante na compreensão do início do universo e na evolução cósmica [86]. Na física da matéria condensada, essas estruturas aparecem quando estudamos o comportamento dos supercondutores e suas propriedades magnéticas [87, 88, 89].

Compreender essa classe de estruturas permite prever propriedades de materiais [88] ou objetos cosmológicos [90, 91, 92]. Atualmente, temos um vasto e interessante cenário de investigações sobre as estruturas de vórtices na literatura [93, 94, 95, 96, 97, 98]. Alguns exemplos de estudos topológicos de vórtices aparecem em investigações de configurações de campos tubulares em modelos com simetrias globais $SU(2)$ e $U(1)$ locais [99]. Esses modelos levam a estruturas topológicas estendidas com correntes longitudinais e envolvem dois campos escalares [99]. Além disso, nos chamados vórtices de Witten, uma simetria $U(1) \times U(1)$ com duas componentes [100], envolve dois campos escalares. Para finalizar, é interessante mencionar que sempre é possível modificar as teorias topológicas de campo de modo a investigar suas extensões, características e propriedades intrínsecas das estruturas de vórtice [101]. Em parte, faremos estes procedimentos ao longo dessa tese de doutorado.

1.4 O propósito e a organização da tese

Nosso principal propósito nessa tese de doutorado é realizar estudos de estruturas topológicas em baixa dimensão. Em outras palavras, nosso propósito será estudar os aspectos físicos produzidos por estruturas topológicas do tipo *kink* e vórtices. Ao longo desta tese, buscaremos responder algumas questões am aberto na literatura, e. g.,

- Qual a possibilidade do surgimento de estruturas tipo *kink* em uma teoria de multi-campos tipo ϕ^6 ? Quão provável são essas estruturas?

- Os *kinks* gravitantes podem emergir em um cenário gravitacional? Se possível, pares dessas estruturas gravitantes podem interagir? Qual o resultado disto?
- Qual a forma mais apropriada para estender à simetria dos modelos de vórtices?
- Como as teorias não-canônicas e não-lineares influenciam nos aspectos físicos das estruturas?
- Seria possível um vórtice produzir uma geometria de buraco negro?

Estas são algumas das questões que motivaram essa tese. Buscaremos responder esses questionamentos no decorrer da tese.

1.4.1 Organização da tese

Esta tese encontra-se organizada como segue: no Capítulo II, apresentamos uma breve revisão dos fundamentos da teoria topológica de campo. Resumidamente, apresentamos algumas discussões sobre a quebra de simetria discreta, quebra de simetria global $U(1)$ e os Bosons de Nambu-Goldstone e a quebra de simetria parcial que ocorre no modelo $SO(3)$. Além disso, expomos os principais conceitos sobre a descrição física dos sólitons topológicos, i. e., as definições de *kinks* e vórtices, bem como a existência do teorema de Derrick. Encerramos o capítulo, discutindo o formalismo BPS para os *kink* Z_2 , bem como o formalismo BPS estendido.

No capítulo III, apresentamos uma discussão sobre as estruturas topológicas bidimensionais. Após uma breve motivação, dividimos o capítulo em duas partes. Neste capítulo, implementamos uma teoria de multi-campos em $(1 + 1)D$ submetida a uma teoria ϕ^6 e estudamos o surgimento e as estruturas mais prováveis que essa teoria suporta. Em seguida, construímos uma teoria bidimensional auto-gravitante e investigamos os aspectos físicos dos *kinks* auto-gravitantes que emergem dessa teoria.

No capítulo IV, estudamos os vórtices magnéticos que surgem em teorias não-polinomiais e não-canônicas. Nesse caso, essa discussão nos leva a resultados interessantes como, por exemplo: a sugestão de uma forma específica para as generalizações que podem estender a simetria do modelo¹. Além disso, mostramos que podemos ter estruturas descritas por contribuições não-canônicas tipo *cuscuton*, sem propriedade BPS².

No capítulo V, relatamos o surgimento de estruturas topológicas com propriedades BPS no modelo sigma- $O(3)$. Para realizar essa investigação construímos modelos de múltiplos

¹ Fazemos uma breve discussão sobre esse assunto no início do respectivo capítulo.

² Modelos sem propriedades BPS são modelos cuja as equações BPS de primeira ordem que não obedecem as equações de movimento de Euler-Lagrange

campos de matéria que se acoplam ao campo eletromagnético de modo não-mínimo. Fazemos esses estudos considerando contribuições canônicas e não-canônicas do campo escalar. Além disso, uma teoria sem interação é investigada.

No capítulo VI, mostramos como a existência de vórtices magnéticos tipo anéis descrito por campos solitônicos induzem o surgimento de buracos negros em uma teoria gravitacional.

Finalmente, no capítulo VII, realizamos uma breve revisão dos resultados obtidos na tese e anunciamos nossas descobertas. Além disso, uma perspectiva futura é exposta.

2 ASPECTOS TOPOLÓGICOS DE TEORIA DE CAMPOS

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão de alguns conceitos que fundamentam a teoria topológica de campos clássicos. Em específico, expomos os principais conceitos que definem a quebra espontânea de simetria, os sólitons topológicos e o formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS). Resumidamente, estes três assuntos irão fundamentar os modelos e os resultados obtidos nesta tese.

2.1 A quebra espontânea de simetria

Nessa seção, apresentamos uma breve revisão sobre a quebra espontânea de simetria. Ao longo dessa seção, discutiremos a quebra espontânea de simetria discreta, a quebra espontânea de simetria global $U(1)$ e a quebra de simetria parcial do modelo $SO(3)$.

2.1.1 Quebra espontânea de simetria discreta

Vamos considerar o modelo mais simples para discutirmos esse assunto, i. e., o campo escalar real com o potencial $\lambda\phi^4$ [48]. Para esse caso, a densidade Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (2.1)$$

Observe que a Lagrangeana (2.1) é invariante sob a transformação discreta

$$\phi(x) \rightarrow -\phi(x). \quad (2.2)$$

Esta invariância é uma consequência da Lagrangeana só possuir contribuições de campo de ordem par.

Naturalmente, estes campos carregam uma energia que, por definição, para um espaço-tempo plano de $(D+1)$ -dimensões é

$$E = \int T^0_0 d^Dx = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial_0\phi - \mathcal{L} \right] d^Dx. \quad (2.3)$$

Assim, construindo a energia do modelo (2.1), obtém-se que

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right] \quad \text{com } \lambda > 0. \quad (2.4)$$

Para investigar o estado de vácuo da teoria, solicitamos que as configurações de campo $\phi(x)$ sejam estacionárias e homogêneas no espaço. Matematicamente, isto é

$$\partial_0\phi(\mathbf{x},t) = 0 \quad (2.5)$$

e

$$\partial_i \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.6)$$

Em outras palavras, ao impor as condições (2.5) e (2.6), estamos exigindo que o estado fundamental não dependam de \mathbf{x} nem de t . Assim, deve-se obter

$$\phi = \phi_0 \quad (2.7)$$

onde ϕ_0 é constante. Essa constante ϕ_0 é completamente definida a partir da densidade de energia potencial da teoria.

Considerando a densidade Lagrangeana (2.1), temos que a densidade de energia potencial é

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (2.8)$$

Analisando a expressão (2.8), percebemos que a densidade de energia potencial deve ser analisada para os dois casos: $m^2 \geq 0$ e $m^2 < 0$. Vamos iniciar analisando o potencial para a condição $m^2 \geq 0$. Nesse caso, o estado de vácuo ocorre para $\phi = 0$, como mostrado na figura 1.

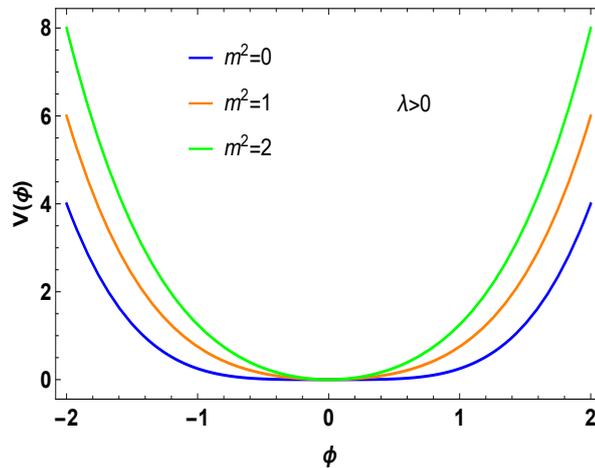


Figura 1 – Comportamento do potencial $V(\phi)$ quando $m^2 \geq 0$.

Observe que para $m^2 > 0$ o estado de vácuo é invariante sob a transformação (2.2). Nesse caso, é dito que o estado fundamental não quebra a simetria do modelo. Assim, as perturbações sobre o estado fundamental são descritas pelo campo ϕ e a Lagrangeana para essas perturbações coincide com a Lagrangeana original (2.1).

Enquanto isso, se $m^2 < 0$ como ilustrado na figura 2, o campo $\phi = 0$ é simétrico sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$, correspondente ao máximo local do potencial. Entretanto, nesse caso, é notório a existência de dois estados de vácuo que podem ser obtidos pela expressão

$$\frac{dV}{d\phi} = 0 \rightarrow -\mu^2 + \lambda\phi^2 = 0, \quad (2.9)$$

o que nos dá

$$\phi_0 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.10)$$

onde, por conveniência, assumimos que $\mu^2 = -m^2$ com $\mu > 0$.

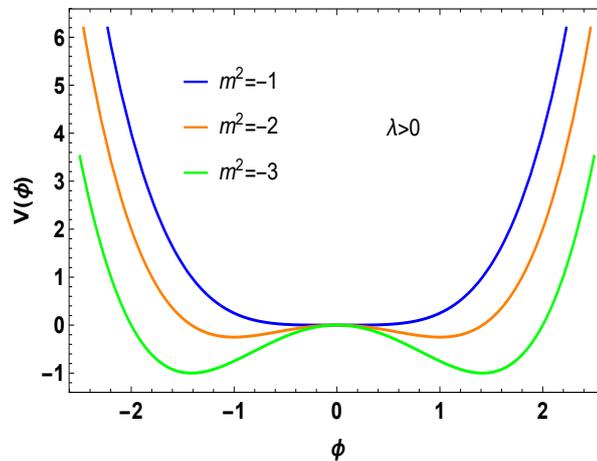


Figura 2 – Comportamento do potencial $V(\phi)$ quando $m^2 < 0$.

Note que se “retirarmos” toda a energia disponível do campo, então ϕ_0 será um dos estados fundamentais, digamos $\phi = +\phi_0$. Para transferir o campo de um estado fundamental para o outro, é preciso adicionar uma energia proporcional ao volume do espaço. Deste caso, para um sistema com um volume espacial grande ($\Omega \rightarrow \infty$), temos que escolher um dos estados fundamentais e considerar as perturbações sobre ele [48]. Vamos escolher como o estado fundamental

$$\phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.11)$$

Claramente, esse estado dado por (2.11) não é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$. Assim, dizemos que a simetria é quebrada de forma espontânea.

É importante mencionar que a energia do estado fundamental do modelo será

$$E_0 = \Omega V(\phi)|_{\phi=\phi_0} = -\frac{1}{4} \frac{\Omega \mu^4}{\lambda}, \quad (2.12)$$

onde Ω é o volume espacial.

Vamos analisar a “energia total” do modelo com relação a energia do estado de vácuo. Para isso, é conveniente considerar, ao invés da Lagrangeana (2.1), uma Lagrangeana que difere daquela por uma constante, i. e.,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda}, \quad (2.13)$$

a Lagrangeana (2.13) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \phi_0^2)^2. \quad (2.14)$$

Assim, a densidade de energia potencial do campo é

$$V(\phi) = \frac{\mu}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \phi_0^2)^2, \quad (2.15)$$

de modo que

$$V(\phi)|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (2.16)$$

É importante mencionar que é impossível observar um campo homogêneo no estado fundamental diretamente; qualquer observação tem a ver com mudanças nas quantidades físicas no espaço e no tempo. Entretanto, o fato do estado fundamental não ser trivial leva a uma série de consequências para as perturbações sobre o estado de vácuo [48].

Assumindo uma perturbação do tipo $\chi(x)$ sobre o estado de vácuo $\phi = \phi_0$, isto é,

$$\phi(x) = \phi_0 + \chi(x). \quad (2.17)$$

A Lagrangeana perturbada, i. e., a Lagrangeana para $\chi(x)$ é obtida por substituição de (2.17) em (2.13), ou seja,

$$\mathcal{L}_\chi(x) = \mathcal{L}(\phi_0 + \chi). \quad (2.18)$$

Nesse caso, temos que

$$\partial_\mu(\phi_0 + \chi) = \partial_\mu \chi \quad (2.19)$$

e o potencial $V_\chi(\chi)$ é

$$V_\chi(\chi) = \frac{\lambda}{4}[\chi^2 - 2\phi_0\chi]^2, \quad (2.20)$$

ou seja,

$$V_\chi(\chi) = \mu^2 \chi^2 + \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 + \frac{\lambda}{4} \chi^4. \quad (2.21)$$

Desta maneira, a Lagrangeana perturbada assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4. \quad (2.22)$$

Assim, conclui-se que a Lagrangeana não é invariante sob uma transformação discreta

$$\chi \rightarrow -\chi. \quad (2.23)$$

Esse resultado poderia ter sido antecipado, uma vez que o estado fundamental não é invariante.

2.1.2 *Quebra espontânea de simetria global $U(1)$ e os Bósons de Nambu-Goldstone*

Considerando o caso mais simples de simetria contínua, ou seja, a simetria $U(1)$, assumimos que

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad (2.24)$$

isto é, ϕ é um campo escalar complexo.

Além disso, adotamos a seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \phi - \lambda (\bar{\phi} \phi)^2 - c_0, \quad (2.25)$$

onde c_0 é uma constante introduzida por conveniência e $\bar{\phi}$ é o complexo conjugado do campo ϕ .

Escrevendo a Lagrangeana (2.25) em termos dos campos reais ϕ_1 e ϕ_2 , temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \frac{\lambda}{4} (\phi_i \phi_i)^2 - c_0, \quad \text{com } n = 1, 2. \quad (2.26)$$

Nesse caso, a Lagrangeana (2.26) é invariante sob a transformação global $U(1)$, i. e., a transformação

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \quad (2.27)$$

ou em termos dos campos componentes,

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha \quad (2.28)$$

e

$$\phi_2 \rightarrow \phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha. \quad (2.29)$$

Considerando a definição de energia (2.3), obtém-se que a energia dos campos é

$$E = \int d^3x [\partial_0 \bar{\phi} \partial_0 \phi + \partial_i \bar{\phi} \partial_i \phi + V(\bar{\phi}, \phi)], \quad (2.30)$$

onde

$$V(\bar{\phi}, \phi) = m^2 \bar{\phi} \phi + \lambda (\bar{\phi} \phi)^2 + c_0. \quad (2.31)$$

Vamos analisar os casos $m^2 \geq 0$ e $m^2 < 0$. Para o primeiro caso, o estado de vácuo ocorre em $\phi = 0$, as excitações representam dois campos reais ϕ_1 e ϕ_2 de massa igual com uma escolha especial da interação $(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$. Nesse caso, a simetria do modelo não é quebrada.

Enquanto isso, se $m^2 = -\mu^2 < 0$, o potencial do modelo $V(\phi)$ é descrito por um sólido de revolução, conhecido como chapéu mexicano, como demonstrado na figura 3. Nesse caso, ressaltamos que

$$|\phi|^2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}. \quad (2.32)$$

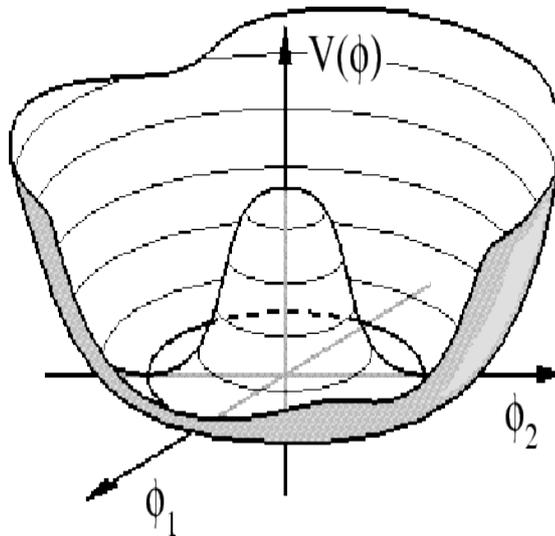


Figura 3 – Comportamento do potencial $V(\phi)$ [Eq. (2.31)] quando $m^2 < 0$ [49].

Assim, percebemos que o modelo possui um conjunto de valores de mínimos dado por:

$$\phi = e^{i\alpha} \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}, \quad (2.33)$$

com ϕ_0 determinado pela condição

$$\frac{\phi_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial V}{\partial |\phi|} = 0, \quad (2.34)$$

que nos dá

$$\phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.35)$$

Escolhemos um dos mínimos como o estado fundamental e consideramos as excitações sobre ele.

Chamamos a atenção para o fato que transições entre diferentes mínimos podem ser concluídas sem aumentar a energia potencial, simplesmente movendo-se ao longo do círculo dos valores mínimos, eles ainda requerem uma energia infinita no limite do volume infinito do espaço, i. e. $\Omega \rightarrow \infty$. De fato, lembramos que para um campo homogêneo ϕ , o termo cinético da energia é proporcional ao volume, a saber,

$$E_{cin} = \Omega |\dot{\phi}|^2, \quad (2.36)$$

portanto, uma mudança em todo o espaço, como mencionado, requer uma energia infinita.

Vamos, agora, considerar o estado de vácuo do modelo, a saber,

$$\phi = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}, \quad (2.37)$$

onde, tomamos, $\phi_1 = \phi_0$ e $\phi_2 = 0$.

Nesse caso, considerando pequenas perturbações sobre o estado de vácuo do tipo:

$$\phi_1(x) = \phi_0 + \chi(x), \quad (2.38)$$

$$\phi_2(x) = \theta(x), \quad (2.39)$$

observamos que

$$\partial_\mu \phi_1 = \partial_\mu \chi \quad \text{e} \quad \partial_\mu \phi_2 = \partial_\mu \theta. \quad (2.40)$$

Com a perturbação (2.38), obtemos que o potencial V é dado por

$$V = -\frac{\mu^2}{2} [(\phi_0 + \chi)^2 + \theta^2] + \frac{\lambda}{4} [(\phi_0 + \chi)^2 + \theta^2]^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (2.41)$$

onde a constante adicional da expressão (2.41) é escolhida para que o valor de estado de vácuo seja nulo.

Analisando a ordem quadrática dos campos χ e θ , obtemos que

$$V = \mu^2 \chi^2, \quad (2.42)$$

observe que não existe termos do tipo $\chi\theta$ ou θ^2 no potencial. Isso é visto claramente na ilustração da figura 3. Os termos quadráticos em χ e θ no potencial são a curvatura do potencial ao longo da direção ϕ_1 e ϕ_2 . Aqui é interessante mencionar que a curvatura do potencial ao longo da direção ϕ_2 é nula, uma vez que assumimos $\phi_1 = \phi_0$ e $\phi_2 = 0$, devido a simetria $U(1)$ do modelo.

A Lagrangeana quadrática é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)^2 - \mu^2 \chi^2. \quad (2.43)$$

Claramente, o campo χ tem massa $\sqrt{2}\mu$, enquanto isso o campo θ não possui massa. É interessante enfatizar que o modos sem massa está diretamente relacionada à presença da simetria $U(1)$ no Lagrangeano e à natureza não-simétrica do estado fundamental. O campo sem massa θ é conhecido como campo de Nambu-Goldstone e a partícula correspondente é o bósons de Nambu-Goldstone.

Ressaltamos que se a Lagrangeana é simétrica sob as transformações (2.27), o potencial não contém o campo $\alpha(x)$, ou seja, o campo $\alpha(x)$ irá aparecer na Lagrangeana através da derivada $\partial_\mu \alpha(x)$. A ausência de um termo do tipo $\alpha^2(x)$ na Lagrangeana significa que $\alpha(x)$ é um campo sem massa.

Com isso em mente, conclui-se que o modelo com simetria $U(1)$, a quebra espontânea da simetria global contínua nos leva à ocorrência de perturbações sem massa chamadas de modos de Nambu-Goldstone.

2.1.3 Quebra de simetria parcial no modelo $SO(3)$

A simetria global da Lagrangeana pode ser quebrada parcialmente. Um exemplo comum da quebra parcial de simetria surge no modelo com três campos reais, a saber,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial_\mu \phi^i + \frac{\mu^2}{2} \phi^i \phi^i - \frac{\lambda}{4} (\phi^i \phi^i)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \quad (2.44)$$

onde o parâmetro $\mu^2 > 0$.

Observe que a Lagrangeana (2.44) possui uma simetria $SO(3)$, i. e., uma simetria de rotação em três-dimensões no espaço interno dos campos. A densidade de energia potencial

associada à Lagrangeana (2.44) tem um mínimo de energia em

$$\phi^i \phi^i = \phi_0^2, \quad (2.45)$$

onde

$$\phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.46)$$

Sabemos que o conjunto de todos os possíveis estados fundamentais do modelo é descrito por uma esfera bidimensional no espaço interno dos campos com o raio ϕ_0 . Para o estado de vácuo, temos a liberdade de escolher qualquer ponto da esfera. Com isso em mente, escolhamos a configuração:

$$\phi^1 = 0, \quad \phi^2 = 0 \quad \text{e} \quad \phi^3 = \phi_0. \quad (2.47)$$

Perceba que essa escolha nos dá um vetor de vácuo

$$\vec{\phi}_0 = (0, 0, \phi_0) \quad (2.48)$$

que não quebra a simetria completamente. De fato, existe um subgrupo não trivial do grupo $SO(3)$, sob o qual o vetor vácuo é invariante, i. e.,

$$\omega \vec{\phi}^{(0)} = \vec{\phi}^{(0)}. \quad (2.49)$$

Esse subgrupo é conhecido como grupo $SO(2)$ de rotações no espaço dos campos sob a terceira componente, i. e.,

$$\phi^1 \rightarrow \phi^1 \cos \alpha - \phi^2 \sin \alpha, \quad (2.50)$$

$$\phi^2 \rightarrow \phi^1 \sin \alpha + \phi^2 \cos \alpha, \quad (2.51)$$

$$\phi^3 \rightarrow \phi^3. \quad (2.52)$$

Se voltarmos novamente a Lagrangeana (2.44), observamos claramente que a Lagrangeana para perturbações sobre o vácuo clássico escolhido será invariante neste grupo $SO(2)$.

De forma análoga ao caso anterior, discutiremos quais perturbações são modos de Nambu-Goldstone sem massa no modelo $SO(3)$. Para isto, introduzimos as perturbações:

$$\begin{aligned} \phi^1(x) &= \theta^1(x), \\ \phi^2(x) &= \theta^2(x), \\ \phi^3(x) &= \phi_0 + \chi(x). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Com as perturbações (2.53), a Lagrangeana perturbada assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta^1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta^2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{\mu^2}{2}[(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2] + \frac{\mu^2}{2}(\phi_0 + \chi)^2 \\ & - \frac{\lambda}{4}[(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + (\phi_0 + \chi)^2]^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Observe que a Lagrangeana (2.54) é invariante sob as rotações $SO(2)$ dos campos θ^1 e θ^2 , uma vez que contém apenas combinações do tipo $(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$. Claramente, a equação (2.54) não tem a simetria $SO(3)$ completa.

Novamente, consideramos pequenas perturbações sobre os vácuos da teoria, isso nos dá os termos quadráticos da Lagrangeana, a saber,

$$\mathcal{L}^{(2)} \rightarrow \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta^1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta^2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2. \quad (2.55)$$

Da Lagrangeana (2.55) observamos que θ^1 e θ^2 são campos de Nambu-Goldstone sem massa. De fato, a argumentação acima que deve haver dois modos Nambu-Goldstone reais torna-se claro quando notamos que dos três geradores do grupo $SO(3)$, um gerador aniquila o vácuo $\vec{\phi}^{(0)} = (0, 0, \phi_0)$, i. e.,

$$t_h \vec{\phi}^{(0)} = 0, \quad (2.56)$$

esse é o gerador do subgrupo $SO(2)$.

Note que a expressão (2.56) é análoga à equação (2.49), para ω sendo

$$\omega = 1 + \varepsilon t_h, \quad (2.57)$$

com o parâmetro $\varepsilon \ll 1$. Aqui é interessante mencionar que os outros dois geradores não aniquilam o vácuo do modelo. Dessa maneira, construímos dois vetores dados por:

$$\vec{n}_1 = t_1 \vec{\phi}^{(0)}, \quad (2.58)$$

$$\vec{n}_2 = t_2 \vec{\phi}^{(0)}, \quad (2.59)$$

onde $t_{1,2}$ são os geradores. É importante mencionar também que os vetores \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são linearmente independentes. Além disso, se assumimos que $\tilde{\theta}^1$ e $\tilde{\theta}^2$ são pequenos, então o vetor $\vec{\phi}$ é

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}^{(0)} + \tilde{\theta}^1 \vec{n}_1 + \tilde{\theta}^2 \vec{n}_2, \quad (2.60)$$

i. e., , na vizinhança de $\vec{\phi}^{(0)}$, é um vácuo clássico da teoria, e de fato,

$$\vec{\phi} = (1 + \tilde{\theta}^1 t_1 + \tilde{\theta}^2 t_2) \vec{\phi}^{(0)} = \omega \vec{\phi}^{(0)} \quad (2.61)$$

Para as primeiras ordens não triviais em $\tilde{\theta}^1$ e $\tilde{\theta}^2$, temos que

$$V(\vec{\phi}) = V(\vec{\phi}^{(0)}), \quad (2.62)$$

ou seja,

$$V(\vec{\phi}^{(0)} + \tilde{\theta}^1 \vec{n}_1 + \tilde{\theta}^2 \vec{n}_2) = 0. \quad (2.63)$$

Desde que $\vec{\phi}^{(0)}$ é um ponto de mínimo do potencial, então a primeira ordem dita ser não-trivial é a ordem quadrática. Dessa maneira, para desvios do vácuo $\vec{\phi}^{(0)}$ na forma da equação (2.60) a parte quadrática do potencial não possui contribuição de $\tilde{\phi}^1$ e $\tilde{\phi}^2$, i. e., os campos $\tilde{\phi}^1$ e $\tilde{\phi}^2$ são campos sem massa.

Lembramos que para o grupo $SO(3)$ o gerador tem a seguinte forma:

$$(t_a)_{bc} = \varepsilon_{abc}, \quad (2.64)$$

então, para a escolha do vácuo clássico, temos que:

$$\phi^{(0)a} = \delta^{a3} \phi_0, \quad (2.65)$$

disto temos que o gerador t_3 é

$$(t_3)_{bc} \phi^{(0)c} = \varepsilon_{3bc} \delta^{c3} \phi_0 = 0. \quad (2.66)$$

Enquanto isso, os geradores que quebram a simetria são t_1 e t_2 . Com isso, os vetores (2.58) e (2.59) são dados por:

$$n_1^a = (t_1)_{ab} \phi^{(0)b} = \varepsilon_{1ab} \delta^{b3} \phi_0 = \delta^{a2} \phi_0 \quad (2.67)$$

e

$$n_2^a = (t_2)_{ab} \phi^{(0)b} = \varepsilon_{2ab} \delta^{b3} = -\delta^{a1} \phi_0. \quad (2.68)$$

Portanto, o campo com perturbação sem massa tem a seguinte forma:

$$\vec{\phi}(x) = (-\tilde{\theta}^2(x) \phi_0, \tilde{\theta}^1(x) \phi_0, \phi_0) \quad (2.69)$$

Comparando (2.69) com (2.53) em $\chi = 0$, obtemos uma relação entre os campos $\theta^{1,2}$ e $\tilde{\theta}^{1,2}$, a saber,

$$\theta^1 = -\tilde{\theta}^2 \phi_0 \quad (2.70)$$

$$\theta^2 = \tilde{\theta}^1 \phi_0. \quad (2.71)$$

A construção aqui descrita generaliza o caso de um grupo global compacto arbitrário e uma representação unitária arbitrária de campos escalares. Esta generalização é chamada de teorema de Goldstone.

2.2 Sólitos Topológicos

Os sólitos são soluções ou estruturas não-perturbativas e fruto de uma equação diferencial não-linear. No contexto, de teoria de campos essas estruturas possuem configurações localizadas de energia estáveis. Ao longo desta seção discutiremos as estruturas topológicas mais simples, i. e., o *kink*¹. Em seguida, apresentamos o teorema de ausência de sólitos e definimos as estruturas de vórtices.

2.2.1 Kink

Uma estrutura topológica particularmente simples, o *kink*, surge em uma teoria descrita por um campo escalar real em $(1+1)D$. Nesse caso, a ação do modelo é

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad \text{com} \quad v = 0, 1. \quad (2.72)$$

Para investigar os *kinks* do modelo é necessário que a quebra espontânea de simetria ocorra na nossa teoria. Assim, adotamos uma interação tipo $\lambda \phi^4$, i. e.,

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\mu^2}{4\lambda}, \quad (2.73)$$

ou seja,

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2, \quad (2.74)$$

com $v = \mu/\sqrt{\lambda}$.

¹ O *kink* não é um sólito propriamente dito uma vez que na interação *kink-kink* ou *kink-antikink* não preserva a forma da estrutura após a colisão.

A ação (2.72) é invariante sobre uma transformação $\phi \rightarrow -\phi$ e a simetria do modelo é quebrada espontaneamente uma vez que os vácuos clássicos são

$$\phi^{(v)} = \pm v. \quad (2.75)$$

Mais detalhes sobre esta quebra espontânea de simetria pode ser verificada na seção 2.1.1.

Aqui é importante mencionar que o *kink* é uma solução estática da equação de campo $\phi(x)$. Essa estrutura é conhecida por interpolar entre o vácuo $\phi = -v$ e $\phi = +v$, uma vez que $-\infty \leq x \leq +\infty$.

Demonstraremos que essas soluções (*kink* e *antikink*) surgem naturalmente em nossa teoria. Para alcançar nosso propósito, aplicamos o princípio de mínima ação. Assim, temos que as equação de movimento do modelo é

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \lambda \phi (\phi^2 - v^2) = 0. \quad (2.76)$$

Para investigar as soluções de campo estático, assumimos que $\partial_0 \phi = 0$. Dessa maneira, a equação de movimento é descrita por

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \lambda \phi (\phi^2 - v^2) = 0. \quad (2.77)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.77) por $\phi'(x)$, i. e.,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} - \lambda (\phi^2 - v^2) \phi \frac{d\phi}{dx} = 0, \quad (2.78)$$

o que nos dá

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right] = 0. \quad (2.79)$$

Analisando a equação (2.79), observamos que a quantidade entre parênteses é constante com relação à x . Dessa maneira, observamos que os campos estáticos devem obedecer a seguinte equação:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - v^2). \quad (2.80)$$

Investigando a expressão (2.80), encontramos as configurações de campo estático do modelo são:

$$\phi(x) = \pm v \tanh \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right], \quad (2.81)$$

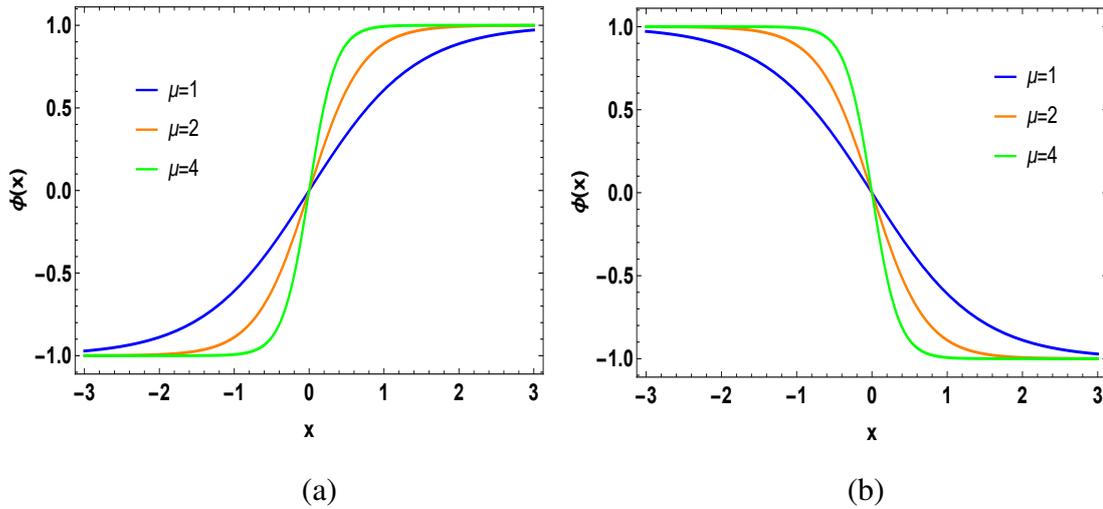


Figura 4 – Configurações estáticas dos campos quando $v = 1$ e $x_0 = 1$. (a) Soluções *kink*, (b) Soluções *antikink*.

onde x_0 é uma constante de integração. É importante mencionar que a solução (2.81) com o sinal positivo é conhecida como solução *kink*, enquanto isso, a solução com o sinal negativo é chamada de *antikink*. Na figura 4, exibimos o comportamento das configurações de campo estático.

Agora, é necessário investigar a energia associada as configurações de campo estático (2.81). Para isto, construímos o tensor energia-momentum do modelo, a saber,

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \delta^\mu{}_\nu + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \delta^\mu{}_\nu. \quad (2.82)$$

Usando a definição apresentada na equação (2.3), obtém-se

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right]. \quad (2.83)$$

Essa é a equação que descreve a energia do campo escalar real estático.

Substituindo as soluções estáticas (2.81) na expressão da energia (2.83), chega-se à

$$\begin{aligned} E &= \frac{v^2 \mu^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sech}^4 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \\ E &= \frac{2\sqrt{2} \mu^3}{3 \lambda}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

É válido observar que a energia da teoria é a mesma para ambas as soluções. Analisando a expressão (2.84), notamos que a densidade de energia, a saber,

$$\mathcal{E} = \frac{v^2 \mu^2}{2} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right], \quad (2.85)$$

concentra-se em uma região de largura $\sim \mu^{-1}$ centrada em x_0 . Fora dessa região o campo é indistinguível daquele no vácuo, embora tenhamos dois estados de vácuo diferente na teoria. Na figura 5 mostramos o comportamento da densidade de energia do *kink* e do *antikink*.

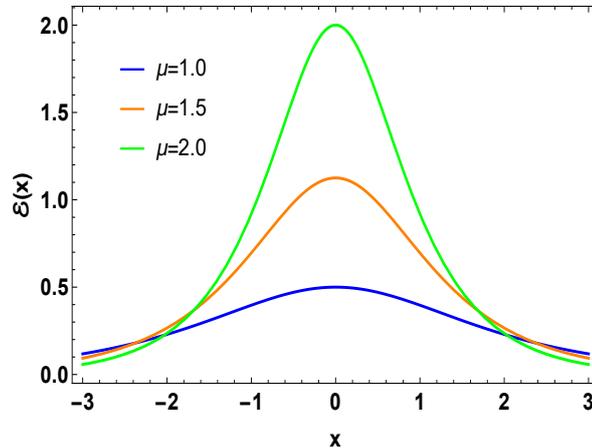


Figura 5 – Densidade de energia do *kink* e do *antikink* quando $v = 1$ e $x_0 = 0$.

Aqui é interessante mencionar que o resultado apresentado na equação (2.84) é conhecido como massa do *kink*. Em outras palavras, a energia estática do *kink* pode ser identificada com a massa dessa excitação clássica do campo semelhante a uma partícula, i. e.,

$$M_{kink} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} = \frac{2}{3} m v^2, \quad (2.86)$$

com $m = \sqrt{2}\mu$.

Para finalizar essa discussão, note que as soluções (2.81) não são invariantes sob uma translação espacial e sob as transformações de Lorentz. Entretanto, essas transformações devem levar uma solução das equações de campo para outra solução. Dessa maneira, aplicando essas transformações, obtemos a solução de *kinks* (ou *antikinks*) movendo-se, i. e.,

$$\phi(x - x_0; t) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{(x - x_0) - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \right]. \quad (2.87)$$

É válido ressaltar que o parâmetro u representa a velocidade do sóliton, x_0 é a posição inicial do centro do *kink*.

2.2.2 O teorema de Derrick

Em geral, para uma série de modelos em $(d + 1)$ -dimensões com $d > 1$, é possível mostrar que não existe soluções de campo estáticos não-triviais, i. e., não existe configurações

de campo com energia não-nula. Em geral, para realizar essa demonstração é aplicado alguns argumento de escala proveniente do conhecido trabalho de Derrick [102].

Para iniciar nossa discussão, consideramos inicialmente uma teoria de n campos escalares ϕ^k com $k = 1, 2, \dots, n$, em $(d + 1)$ -dimensões. Agora, consideramos uma Lagrangeana geral escrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{jk}(\phi) \partial_\mu \phi^j \partial_\mu \phi^k - V(\phi), \quad (2.88)$$

onde $\mathcal{F}_{jk}(\phi)$ e $V(\phi)$ são funções dos campos escalares ϕ^k .

Considerando que $\phi_a^j(\mathbf{x})$ é uma solução clássica do campo com energia finita e um extremo do funcional

$$E[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}_{jk}(\phi) \partial_i \phi^j \partial_i \phi^k + V(\phi) \right], \quad (2.89)$$

devemos assumir que para todo ϕ , a matriz $\mathcal{F}_{jk}(\phi)$, é definida por uma matriz quadrática positiva definida. Assim, todos os autovalores dessa matriz são positivos para todo campo ϕ , de modo que,

$$\mathcal{F}_{jk} \partial_i \phi^j \partial_i \phi^k \geq 0, \quad (2.90)$$

onde a igualdade é válida apenas para campos que não dependem de \mathbf{x} . Supomos que $V(\phi)$ é limitado por baixo, i. e., existe um valor de corte da energia mínima do modelo. Dessa maneira, é possível ajustar o nível de energia mínima de modo que o valor de V mínimo seja nulo, i. e.,

$$V(\phi^{(v)}) = 0. \quad (2.91)$$

Nesse caso, tem-se que

$$V(\phi) \geq 0. \quad (2.92)$$

É importante mencionar que a igualdade é válida apenas para o vácuo clássico. Nesse caso, o vácuo clássico, é um campo homogêneo que possui um mínimo absoluto e terá energia zero. Enquanto isso, qualquer outra configuração de campos terá energia positiva [48].

Se $\phi_c^j(x)$ é uma solução estática do campo com energia finita, então o funcional de energia deve ser um extremo em $\phi^j = \phi_c^j$ com respeito a quaisquer variações do campo que desaparecem no infinito espacial. Consideremos uma configuração de campo do tipo:

$$\phi_\lambda(\mathbf{x}) = \phi_c(\lambda \mathbf{x}), \quad (2.93)$$

com λ sendo um parâmetro pequeno. Desse modo, se λ é pequeno, temos que a diferença:

$$\phi_\lambda(\mathbf{x}) - \phi_c(\mathbf{x}) = \phi_c(\lambda\mathbf{x}) - \phi_c(\mathbf{x}) \quad (2.94)$$

é uma pequena variação do campo ϕ . Observe que no infinito espacial devemos ter

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} [\phi_\lambda(\mathbf{x}) - \phi_c(\mathbf{x})] \rightarrow 0, \quad (2.95)$$

uma vez que $\phi_c(\mathbf{x})$ tende a uma constante no infinito espacial.

É notório que o funcional de energia

$$E(\lambda) = E(\phi_\lambda(\mathbf{x})) \quad (2.96)$$

deve ter um mínimo quando $\lambda = 1$, i. e.,

$$\left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0. \quad (2.97)$$

Entretanto, pode-se verificar que em vários casos a afirmação acima não se sustenta.

Nesse momento, analisamos a energia da configuração de campo (2.93), cuja a energia é

$$E = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}_{jk}(\phi_c(\lambda\mathbf{x})) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \phi_c^j(\lambda\mathbf{x}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \phi_c^k(\lambda\mathbf{x}) \right) + V(\phi_c(\lambda\mathbf{x})) \right]. \quad (2.98)$$

Tomando a mudança de variável, $\mathbf{y} \rightarrow \lambda\mathbf{x}$, tem-se

$$E(\lambda) = \lambda^{-d} \int d^d y \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}_{jk}(\phi_c(\mathbf{y})) \cdot \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \phi_c^j(\mathbf{y}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \phi_c^k(\mathbf{y}) \right) + V(\phi_c(\mathbf{y})) \right], \quad (2.99)$$

onde, sem perder a generalidade, podemos escrever

$$E(\lambda) = \lambda^{2-d} \Gamma + \lambda^{-d} \Pi, \quad (2.100)$$

com

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int d^d y \mathcal{F}_{jk}(\phi_c) \partial_i \phi_c^j \partial_i \phi_c^k \quad (2.101)$$

e

$$\Pi = \int d^d x V(\phi_c). \quad (2.102)$$

Observe que as quantidade Γ e Π são dependentes das configurações de campo ϕ_c^j .

Lembrando das condições (2.90) e (2.92), notamos que

$$\Gamma > 0 \quad \text{e} \quad \Pi > 0. \quad (2.103)$$

Como Γ e Π não dependem do parâmetro λ , podemos investigar a condição de extremidade do funcional $E(\lambda)$. Para isto, calculamos a derivada da energia em relação ao parâmetro λ e igualamos a zero, o que nos dá

$$\left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \rightarrow [(2-d)\lambda^{1-d}\Gamma - d\lambda^{-(1+d)}\Pi]_{\lambda=0} = 0$$

$$(2-d)\Gamma - d\Pi = 0. \quad (2.104)$$

A condição (2.104) juntamente com as condições (2.90) e (2.92) restringe a existência de soluções clássicas em teorias escalares. Dessa maneira, a partir desse ponto, discutiremos algumas dessas restrições de existências de soluções clássicas em teorias escalares.

Para iniciar nossa análise, iniciamos considerando o caso $d > 2$. Nesse caso, observamos que a condição (2.104) só é satisfeita, se e somente se,

$$\Gamma = \Pi = 0. \quad (2.105)$$

Da expressão (2.105) é notório que $\partial_i \phi_c^j = 0$ e ϕ_c^j é o mínimo absoluto do potencial $V(\phi)$, ou seja, a única solução é o vácuo clássico para o caso $d > 2$.

Uma segunda restrição surge ao analisarmos o caso $d = 2$ na equação (2.104). Nesse caso, temos que

$$\Pi = 0. \quad (2.106)$$

Da restrição (2.106) notamos que se o potencial $V(\phi)$ não é trivial, então esta condição também significa que a única solução estática é o vácuo clássico. No entanto, ressaltamos que a única classe de modelos escalares em $(2+1)$ -dimensões onde a existência de soluções clássicas não-triviais é possível é quando

$$V(\phi) = 0 \quad \forall \quad \phi, \quad (2.107)$$

ou seja, não há nenhum termo potencial na Lagrangeana. Neste caso, o termo cinético deve ter uma estrutura mais complicada. É importante mencionar que essa situação ocorre no modelo sigma-O(N).

Finalmente, uma terceira restrição surge no caso que $d = 1$. Nessa condição, temos que

$$\Gamma = \Pi, \quad (2.108)$$

o que não impõe restrições a escolha do modelo.

Ressaltamos que a razão física para a ausência de sólitons estáticos em teorias escalares de dimensão $(d + 1)$ com $d > 2$, e $d = 2$ com $V(\phi) = 0$, é devido ao fato de que se $\phi^j(\mathbf{x})$ é alguma configuração de campo escalar, então, conforme é visto em (2.104), a energia da configuração de campo adjacente $\phi^j(\lambda\mathbf{x})$ é menor que a energia do campo original em $\lambda > 1$. A configuração $\phi^j(\lambda\mathbf{x})$ difere em tamanho de $\phi^j(\mathbf{x})$: se r é o tamanho característico da configuração $\phi^j(\mathbf{x})$, então o tamanho característico $\phi^j(\lambda\mathbf{x})$ é $\lambda^{-1}r$, isto é, ele é um fator λ^{-1} menor quando $\lambda > 1$. Em outras palavras, é energeticamente favorável que uma configuração de campo semelhante a uma partícula se reduza de forma ilimitada.

Aqui é válido mencionar que essas restrições podem ser contornadas nas teorias escalares com $d > 2$, um artifício bastante utilizado para contornar o problemas, é apenas adicionar termos com derivadas de altas ordens ao Lagrangiano, modificando a relação (2.104) [17, 49].

De forma mais geral, podemos considerar uma teoria escalar acoplada a um campo de calibre, i. e.,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \overline{D_\mu \phi} D_\mu \phi - V(\phi), \quad (2.109)$$

onde a derivada covariante é

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + T(A_\mu)\phi, \quad (2.110)$$

e o tensor $F_{\mu\nu}$ é

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.111)$$

Nesse caso, por argumentação similar, temos a seguinte condição:

$$(4 - d)H + (2 - d)\Gamma - d\Pi = 0, \quad (2.112)$$

onde

$$H = \int d^d y \left[-\frac{1}{2g^2} F_{ij}^{(c)}(\mathbf{y}) F_{ij}^{(c)}(\mathbf{y}) \right], \quad (2.113)$$

$$\Gamma = \int d^d y (\overline{D_{\mathbf{y}} \phi_c})(D_{\mathbf{y}} \phi_c) \quad (2.114)$$

e

$$\Pi = \int d^d y V(\phi_c). \quad (2.115)$$

Com uma análise semelhante ao caso anterior, observamos que a condição (2.112) é muito mais fraca do que (2.104). No caso de uma teoria escalar acoplada a um campo de *gauge*, como o modelo apresentado na Lagrangeana (2.109), não existe proibição da existência de soluções clássicas não-triviais para $d = 2$ e $d = 3$.

2.2.3 Os vórtices

Os vórtices são as estruturas mais simples que surgem em uma teoria de calibre acoplada a uma teoria escalar [44, 88]. De forma geral, essas estruturas surgem em um modelo com campo de calibre $U(1)$ e com mecanismo de Higgs no espaço-tempo tridimensional. De modo geral, o modelo contém um campo de calibre com componente $A_\mu(x)$ e um campo escalar complexo $\phi(x)$, transformando-se sob as transformações de calibre:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (2.116)$$

e

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.117)$$

onde os índices $\nu, \mu = 0, 1, 2$.

O modelo mais simples para o estudo dos vórtices é descrito pela Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \overline{D_\mu\phi}D_\mu\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi), \quad (2.118)$$

onde, por definição,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.119)$$

e a derivada covariante é

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi. \quad (2.120)$$

É interessante mencionar que o potencial $V(\phi)$ é escolhido de maneira a satisfazer o mecanismo de Higgs. Dessa maneira, admitimos que

$$V(\phi) = \mu^2\overline{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}(\overline{\phi}\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2\lambda}, \quad (2.121)$$

ou de forma simplificada:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\overline{\phi}\phi - v^2)^2 \quad \text{com} \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.122)$$

É válido mencionar que o estado fundamental (ou estado de vácuo) do modelo pode ser escolhido, convenientemente, de forma que $A_\mu = 0$ e $\phi = v$.

Investigamos agora as configurações de campo desta teoria. Para isto, consideramos todas as configurações de campo não singulares possíveis que não dependem do tempo no calibre $A_0 = 0$. Para as nossas configurações, exigiremos que a energia do campo seja finita. Com isto, obtemos que para as configurações nas quais estamos interessados o funcional de energia assume a forma

$$E = \int \left[(\overline{D_i \phi})(D_i \phi) + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + V(\phi) \right] d^2x. \quad (2.123)$$

Sabemos que uma condição necessária, porém não suficiente, para a energia ser finita é

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(\phi) \rightarrow 0, \quad (2.124)$$

i. e.,

$$|\phi| \rightarrow v \quad \text{para} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.125)$$

Para investigar as soluções de vórtices é necessário realizarmos um mapeamento dos campos. Para construir este mapeamento consideramos um grande círculo de raio R com centro na origem. Para R suficientemente grande, o módulo do campo neste círculo é igual a v . A fase do campo ϕ pode depender do ângulo polar θ no espaço bidimensional. Assim, nosso círculo, assume a forma:

$$\phi = e^{if(\theta)} v. \quad (2.126)$$

A função (2.126) define um mapeamento do círculo de raio R no espaço para um círculo de raio v no plano complexo de ϕ . O mapeamento do círculo em um círculo pode ser caracterizado por um inteiro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, que é conhecido como número de enrolamento (ou do inglês, “*winding number*”). Em geral, esse mapeamento pode ser ilustrado da seguinte maneira: considere um anel de borracha e coloque-o em um aro rígido. A maneira de fazer isso que corresponde a $n = 0$, é contrair todo o anel em um único ponto do arco, ou posicionar o anel conforme mostrado na figura 6(a). O mapeamento com vorticidade $n = +1$ é o mapeamento mostrado na figura 6(b). Enquanto isso, o mapeamento com $n = 2$ é obtido transformando o anel de borracha em uma figura “oito” (i. e., tipo uma fita de Möbius), dobrando-o conforme mostrado na figura 6(c) e, em

seguida, colocando-o no aro. Na forma analítica, os mapeamentos para n diferentes podem ser escolhidos, e. g.,

$$\phi = e^{in\theta} \mathbf{v}. \quad (2.127)$$

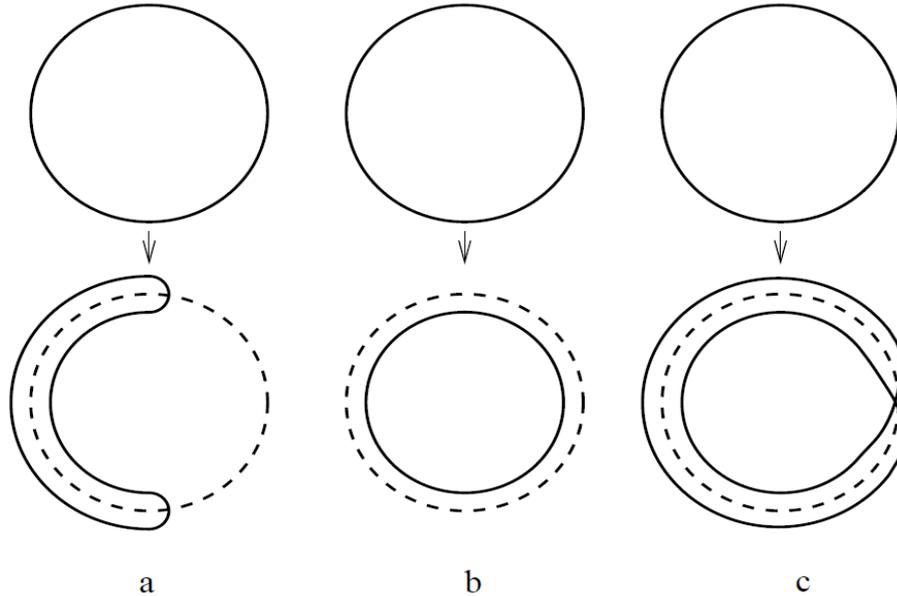


Figura 6 – Mapeamento do campo ϕ [49].

Ressaltamos que, a fase do campo ϕ não é invariante de calibre. No entanto, o “winding number” é invariante sob transformações de calibre que são suaves em todo o espaço.

Notamos que a equação (2.127) esgota todas as possibilidades de campos assintóticos possíveis. Para ver isso, notamos, em primeiro lugar, que o “winding number” pode ser escrito de forma explícita como

$$n = \frac{1}{2\pi i v^2} \oint \bar{\phi} \partial_i \phi dx^i \quad (2.128)$$

onde a integral é obtida sob o círculo da ilustração anterior. Se $\phi = e^{if(\theta)} \mathbf{v}$, então

$$n = \frac{1}{2\pi} [f(2\pi) - f(0)]. \quad (2.129)$$

Portanto, dois campos com o mesmo “winding number” diferem assintoticamente por um fator de fase, i. e., se assintoticamente temos dois campos:

$$\phi_1(x) = e^{if_1(\theta)} \mathbf{v} \phi_2(x) = e^{if_2(\theta)} \mathbf{v} \quad (2.130)$$

onde $f_1(2\pi) - f_1(0) = f_2(2\pi) - f_2(0)$, então

$$\phi_1(x) = e^{if_{21}(x)} \phi_2(x) \quad \text{com} \quad f_{21} = f_2 - f_1. \quad (2.131)$$

Com isto, obtemos claramente que

$$f_{21}(2\pi) - f_{21}(0) = 0. \quad (2.132)$$

Uma vez que f_{21} é uma função de θ , é possível construir uma função de calibre suave

$$\alpha(r, \theta) = g(r)f_{21}(\theta), \quad (2.133)$$

onde $g(r)$ é alguma função arbitrária que obedece as condições:

$$g(r \rightarrow 0) = 0 \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow \infty) = 1. \quad (2.134)$$

Após as transformações de calibre com a função (2.133), o campo ϕ_1 assume a forma

$$\phi_1'(x) = e^{i\alpha(r, \theta)} \phi_1(x), \quad (2.135)$$

ressaltamos que ϕ_1 têm o mesmo comportamento assintótico de ϕ_2 . Observe que usando transformações de calibre que são suaves em todo o espaço, pode-se conseguir que, assintoticamente, os campos tenham uma forma fixa para cada setor, i. e., para cada n .

Investigamos as estruturas topológicas do modelo com vorticidade $n = 1$, i. e.,

$$\phi = e^{i\theta} \mathbf{v}. \quad (2.136)$$

Ressaltamos que para obtermos as configurações de campo com energia finita, a derivada covariante deve diminuir mais rapidamente que o fator $1/r$, caso contrário, a contribuição do termo cinético no funcional da energia do modelo irá divergir no limite assintótico. É válido, ainda, ressaltar que derivada convencional não possui esta propriedade, uma vez que

$$\partial_i \phi = e^{i\theta} v_i \partial_i \theta = v e^{i\theta} \left(-\frac{i}{r} \epsilon_{ij} m_j \right) \quad (2.137)$$

com $m_j = x_j/r$, ou seja, um vetor unitário na direção \mathbf{x} .

Essa diminuição lenta na derivada convencional precisa ser compensada pelo campo de calibre A_i . Dessa maneira, adota-se

$$A_i = -\frac{1}{er} \epsilon_{ij} m_j. \quad (2.138)$$

Para esse comportamento do campo de calibre, o tensor F_{ij} decresce mais rapidamente, isto é, com o fator de $1/r^2$. Além do mais, considerando A_i pode-se adotar a escolha $A_0 = 0$. Isto é possível porque recuperamos um calibre em que a lei de Gauss é satisfeita.

Para encontrar um *ansatz* correspondente para o nosso modelo, notamos que as equações assintóticas (2.136) e (2.138) são invariantes sob rotações espaciais, e complementada por uma transformação de fase global do campo ϕ , ou seja,

$$\phi(\theta) = e^{-i\alpha} \phi(\theta + \alpha). \quad (2.139)$$

Assim, conclui-se que as formas mais gerais para os campos escalares e de calibres invariantes sob a rotação (2.139) são:

$$\phi(r, \theta) = v f(r) e^{i\theta} \quad (2.140)$$

e

$$A_i(r, \theta) = -\frac{1}{er} \varepsilon_{ij} m_j a(r) + m_i b(r). \quad (2.141)$$

onde $f(r)$, $a(r)$ e $b(r)$ são funções arbitrárias de r .

É interessante chamar a atenção do leitor para o fato que a contribuição de $b(r)$ é um calibre puro, ou seja,

$$m_i B(r) = \partial_i \int^r b(r) dr, \quad (2.142)$$

portanto, sem perder a generalidade, podemos definir $b(r) = 0$. Dessa forma, assumiremos os *ansätze*:

$$\phi(r, \theta) = v f(r) e^{i\theta} \quad (2.143)$$

e

$$A_i(r, \theta) = -\frac{1}{er} \varepsilon_{ij} m_j a(r). \quad (2.144)$$

Por substituição direta dos *ansätze* na Lagrangeana (2.118), estudamos as equações de movimento do modelo, o que nos leva à

$$-\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right) - 2e^2 v^2 \frac{f^2}{r} (1-a) = 0 \quad (2.145)$$

e

$$-\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \lambda v^2 r f (f^2 - 1) + \frac{f}{r} (1-a)^2 = 0, \quad (2.146)$$

de modo que, adotamos, por conveniência, os seguintes comportamentos assintóticos:

$$f(r \rightarrow 0) \rightarrow 0; \quad f(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1; \quad a(r \rightarrow 0) \rightarrow 0; \quad a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (2.147)$$

Ressaltamos que é impossível encontrar uma solução explícita para as equações de $f(r)$ e $a(r)$ mesmo assumindo as condições topológicas (2.147). Entretanto, as soluções de $f(r)$ e $a(r)$ podem ser investigadas através de algum método numérico.

Apesar de não ser possível encontrar as soluções analíticas das equações de campos, podemos nos convencer de suas existências analisando as configurações assintóticas dos campos. Analisemos as soluções assintóticas quando $r \rightarrow \infty$ associadas as equações de movimento. Para fazer isso, adotamos a mudança de variável $1 - a(r) = \xi(r)$ e $1 - f(r) = \chi(r)$. Neste caso, a equação (2.145) é reduzida à

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\xi}{dr} \right) - 2m_V^2 \xi = 0, \quad (2.148)$$

com $m_V = ev$. Portanto, esta equação possui uma família de soluções de um parâmetro tendendo a zero conforme $r \rightarrow \infty$, i. e.,

$$\xi(r) = C_a \sqrt{r} e^{-m_V r}, \quad (2.149)$$

onde C_a é uma constante arbitrária.

Enquanto isso, a equação (2.146), no limite de $r \rightarrow \infty$ toma a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) - m_H^2 \chi = 0, \quad (2.150)$$

de modo que, obtemos a seguinte família de soluções decrescente conforme $r \rightarrow \infty$:

$$\chi(r) = C_f \frac{e^{-m_H r}}{\sqrt{r}}, \quad (2.151)$$

com C_f uma constante arbitrária.

Analogamente, para o caso que $r \rightarrow 0$, obtemos que os campos tendem as seguintes famílias de soluções, a saber,

$$f(r) = \alpha_f r + \beta_f r^3 + \dots, \quad (2.152)$$

$$a(r) = \alpha_a r^2 + \beta_a r^4 + \dots, \quad (2.153)$$

com

$$\beta_a = -\frac{m_V^2}{8} \alpha_f^2, \quad (2.154)$$

$$\beta_f = -\frac{m_H^2}{16} \alpha_f - \frac{1}{8} \alpha_a \alpha_f. \quad (2.155)$$

Portanto, a segunda família de soluções é caracterizada pelos parâmetros α_f e α_a .

As soluções das equações de movimento na qual estamos interessados satisfazem ambas as condições (2.149, 2.150 - 2.153), ou seja, deve pertencer à primeira e à segunda família de soluções. Em outras palavras, alguma solução da primeira família, caracterizada por certos valores C_a e C_f , deve ser combinadas com uma solução da segunda família para alguns α_a e α_f . A condição para a combinação das duas soluções em algum ponto do espaço r_i é a igualdade das funções $f(r_i)$ e $a(r_i)$ e suas derivadas $f'(r_i)$ e $a'(r_i)$ naquele ponto. Este requisito fornece quatro equações algébricas para os quatro parâmetros desconhecidos. É evidente que tal sistema geralmente tem uma solução, ou um conjunto discreto de soluções, e este é um forte argumento que apoia a existência de soluções de vórtice do modelo.

2.3 O formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)

Nessa seção, discutiremos os fundamentos do formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield. Esse formalismo é particularmente útil no estudo de estruturas topológicas por nos fornecer conjuntos de equações auto-duais que, geralmente, é mais fácil de manusear. Nessa seção, iremos descrever este formalismo para as estruturas topológicas que emergem de teorias bidimensionais e tridimensionais com propriedade BPS.

2.3.1 O formalismo BPS para o kink Z_2

Para discutir o formalismo BPS, consideramos o caso mais simples de uma ação bidimensional, a saber,

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.156)$$

Em vez de resolver diretamente as equações do movimento associada à ação (2.156), podemos obter as equações de movimento de ordem reduzida pelo método proposto por Bogomol'nyi [103], Prasad e Sommerfield [104]. Basicamente, o formalismo BPS consiste em obter equações diferenciais de primeira ordem, manipulando o funcional de energia em uma “forma de quadrado inteiro”.

Para analisar a propriedade BPS da teoria, investigamos a energia (2.3) do campo ϕ . Por definição, a energia do campo ϕ associada à Lagrangeana (2.156) é

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.157)$$

Por conveniência, escreve-se o funcional de energia (2.157) como

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \sqrt{2V(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right], \quad (2.158)$$

ou seja,

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \right] \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \sqrt{2V(\phi')} d\phi'. \quad (2.159)$$

Portanto, para valores fixos de ϕ em $\pm\infty$, a energia é minimizada se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.160)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.161)$$

As equações (2.160) e (2.161) são chamadas de equação BPS. A primeira vantagem ao tratar modelos com propriedades BPS é que a ordem equação de movimento (2.161) é reduzida.

É importante mencionar que se as equações (2.160) e (2.161) são satisfeitas no limite de saturação da energia. Nesse cenário, a energia mínima do campo ϕ é

$$E_{min} = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \sqrt{2V(\phi')} d\phi', \quad (2.162)$$

onde o sinal positivo descreve a energia do *kink*. Enquanto isto, o sinal negativo descreve a energia das configuração *antikink*. É importante mencionar que no limite de mínima energia a energia BPS coincide com as carga topológica da teoria.

A energia (2.162) é também chamada de energia BPS. Essa energia (2.162) só pode ser minimizada se existir uma solução para a equação (2.161) com as condições de contorno corretas.

Nesse momento, podemos considerar o modelo $\lambda \phi^4$. Neste caso, a interação $V(\phi)$ é

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2. \quad (2.163)$$

Considerando o regime estacionário, as equações BPS são reduzidas à

$$\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - v^2) = 0. \quad (2.164)$$

Observe que a expressão (2.164) é idêntica à expressão (2.80). Portanto, comparando com o resultado encontrado na seção 2.2.1, conclui-se que as soluções da equação (2.164) são:

$$\phi(x) = \pm v \tanh \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]. \quad (2.165)$$

Substituindo (2.165) em (2.163) e lembrando que a energia BPS é dada por (2.162), obtemos

$$E_{BPS} = \frac{2\sqrt{2}\mu^3}{3\lambda}, \quad (2.166)$$

ou seja, concluímos que a energia do *kink* e *antikink* correspondem as energias mínimas do modelo.

2.3.2 O formalismo BPS estendido

De forma geral, o formalismo BPS pode ser estendido para incluir uma classe ampla de sistemas. Para analisar a extensão do formalismo BPS, consideramos o funcional de energia para um campo escalar complexo, i. e.,

$$E = \int dx [\text{Tr}|\partial_t\Phi|^2 + \text{Tr}|\partial_x\Phi|^2 + V(\Phi, \bar{\Phi})] \quad (2.167)$$

$$E = \int dx [\partial_t\bar{\Phi}_{ab}\partial_t\Phi_{ba} + \partial_x\bar{\Phi}_{ab}\partial_x\Phi_{ba} + V(\Phi, \bar{\Phi})]. \quad (2.168)$$

Seguindo a ideia apresentada na seção (2.3.1), estamos interessados em escrever a densidade de energia na forma quadrada inteira, para isto escrevemos

$$E = \int dx \{ \text{Tr}[|\partial_t\Phi|^2 + |\partial_x\Phi \mp U(\Phi)|^2 \pm (\partial_x\Phi^\dagger U) \pm (U^\dagger \partial_x\Phi)] \}, \quad (2.169)$$

onde estamos nos restringindo a soluções estáticas e U é tal que

$$\text{Tr}(U^\dagger U) = V(\Phi, \bar{\Phi}). \quad (2.170)$$

Examinando o funcional (2.169), percebemos que a energia é minimizada se

$$\partial_t\Phi = 0 \quad (2.171)$$

e

$$\text{Tr}|\partial_x\Phi \mp U(\Phi, \bar{\Phi})|^2 = 0, \quad (2.172)$$

que nos dá

$$\partial_x\Phi \mp U(\Phi, \bar{\Phi}) = 0. \quad (2.173)$$

Portanto, no limite de saturação da energia, obtém-se

$$E = \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{Tr}(\partial_x\Phi^\dagger U + U^\dagger \partial_x\Phi). \quad (2.174)$$

É interessante destacar que existe um outro caso especial, o caso “supersimétrico”, onde a integral de energia pode ser realizada explicitamente. Assim, se U for uma derivada total de uma função W , teremos:

$$\bar{U} = \frac{\partial W}{\partial \Phi}, \quad (2.175)$$

onde $W = W(\Phi, \bar{\Phi})$ é um superpotencial. Dessa forma, a energia mínima do modelo é descrita por

$$\begin{aligned} E &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \text{Tr} \left(\partial_x^\dagger \frac{\partial W}{\partial \bar{\Phi}} + \partial_x \Phi^T \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right) \\ E &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x W \\ E &= \pm [W(\Phi(+\infty)) - W(\Phi(-\infty))]. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Assim é possível observar que o formalismo de Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) nos permite obter equações de movimento de primeira ordem, desde que a interação (ou potencial) possa ser escrito também como $\text{Tr}(U^\dagger U)$. O método BPS também fornece uma expressão explícita para a energia do *kink* se o potencial for dado em termos de um superpotencial W como

$$V(\Phi) = \text{Tr} \left| \frac{dW}{d\Phi} \right|^2. \quad (2.177)$$

Para mais detalhes sobre abordagem BPS, consulte às referências [10, 17, 49].

3 ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS BIDIMENSIONAIS

As estruturas topológicas que aparecem nos modelos bidimensionais são fisicamente relevantes e o primeiro passo para a compreensão de sistemas mais complexos. Neste capítulo, estudaremos estruturas bidimensionais que emergem da teoria ϕ^6 no espaço-tempo plano. Além disso, estudamos as estruturas topológicas bidimensionais que surgem em uma gravidade *dilaton* bidimensional.

3.1 Uma breve motivação

Desde o seminal artigo de Finkelstein sobre *kinks* [105], vários trabalhos surgiram na literatura discutindo essas configurações [46, 106, 107, 108]. As aplicações de estruturas *kinks* aparecem em vários cenários físicos. Por exemplo, essas estruturas aparecem em física da matéria condensada [109, 110, 111], física de altas energias [112, 113] e teorias não-lineares [114]. Recentemente, estudos atraentes sobre estruturas *kinks* auto-gravitante despertaram o interesse de alguns pesquisadores [115]. De fato, esses estudos podem ajudar a explicar questões de gravidade quântica [116, 117], colapso gravitacional [118, 119] e evaporação de buracos negros [120, 121].

Atualmente diversos estudos foram realizados sobre estruturas bidimensionais [122, 123, 124, 125]. Esse interesse se deve aos resultados diversificados que surgem nas investigações de estruturas *kinks*. Alguns resultados impressionantes e promissores sobre configurações bidimensionais são encontrados em investigações sobre interações de longo alcance entre *kink* e *antikink* [47, 126, 127]. Outros resultados atraentes envolvendo essas estruturas topológicas também aparecem ao estudar partículas pontuais e o surgimento de branas no universo [128, 129]. Assim, é possível destacar que pesquisas sobre configurações bidimensionais são de grande interesse e nos ajudam a entender problemas mais complexos da física teórica [130, 131].

Recentemente, em teoria clássica de campos, investigações sobre as estruturas *kinks* em teorias de multi-campo (ou vários campos) também têm despertado o interesse de alguns especialistas no assunto [69, 132, 133]. Em parte, esse interesse deve-se ao fato que considerando essas teorias pode-se alterar os aspectos físicos das estruturas *kinks*. Por exemplo, considerando teorias com vários campos pode-se contrair ou deformar as estruturas de modo a obter novas classes de soluções [69]. Uma das consequências físicas disto é a obtenção de configurações de energia mais localizada, bem como um possível surgimento de estruturas internas. Além disso, é

importante mencionar que as teorias de multi-campos também surgem em modelos inflacionários [134]. Nesse caso, considerando uma teoria inflacionária é possível descrever essas teorias com configurações de multi-campos não-canônicos [134].

Não distante disto, nota-se que os modelos cosmológicos de alta dimensão sugerem algumas explicações para problemas em aberto na física de altas energias [135]. Esses modelos podem nos dar, ou sugerir, interpretações sobre questões como o problema relacionado à hierarquia [136, 137], à origem da matéria escura [138], à constante cosmológica [139] e à aceleração do universo [140, 141]. No entanto, uma alternativa simples para entender esses modelos cosmológicos é analisar os modelos gravitacionais bidimensionais [142]. Nas últimas décadas, o estudo de modelos bidimensionais tem se mostrado promissor para entender os efeitos da gravidade [116, 117]. Mais recentemente, o estudo dos *kinks* auto-gravitantes em gravidade bidimensionais tem contribuído para o retorno do interesse destas estruturas [142]. Mais aplicações são relatadas nas referências [143, 144, 145].

Uma maneira imediata de estender a gravidade de Einstein bidimensional é introduzir um campo de dilatação (ou do inglês *dilaton*) com acoplamento não-mínimo com a métrica. Essa extensão foi elaborada por Teitelboim [146] e Jackiw [147] na teoria de Einstein em modelos bidimensionais. Logo depois, uma extensão da ação de Jackiw-Teitelboim foi proposta por Mann, Morsink, Sikkema e Steele (MMSS), na qual a contribuição da constante cosmológica está ausente [148]. No modelo MMSS, o campo *dilaton* tem um termo dinâmico que leva à conservação da energia-momento. A ação MMSS é

$$S_{\text{MMSS}} = \frac{1}{\kappa} \int d^2x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \phi R + \kappa \mathcal{L}_M \right]. \quad (3.1)$$

A ação do MMSS é interpretada como um limite bidimensional da relatividade geral. O fato é que modelos regidos por uma ação do tipo MMSS têm se mostrado eficaz no estudo de gravidade entrópica [149]. Por outro lado, o estudo da dinâmica do campo da matéria ainda é uma área pouco investigada. Motivados por essas discussões, iremos, ao longo deste capítulo, estudar os aspectos das estruturas topológicas bidimensionais auto-gravitantes em gravidade *dilaton* e também os aspectos dessas estruturas em um espaço-tempo plano.

Basicamente, o que nos motiva no estudo de estruturas bidimensionais é que, em baixas dimensões, obtemos configurações de campos por técnicas elementares [17, 49]. Além disso, muitos sistemas físicos podem ser descritos aproximadamente ou efetivamente por configurações de campos bidimensionais [150]. Resumidamente, as configurações de campos bidimensionais são descritas por paredes de domínios que interpolam entre os vácuos da teoria.

Por outro lado, para confirmar a existência de paredes de domínios podem ser utilizadas abordagens oriundas da teoria da informação. Neste caso, a abordagem considerada será a entropia configuracional e suas variantes. De fato, vários trabalhos, em várias dimensões, têm utilizado argumentos da entropia configuracional para prever e complementar o entendimento dessas estruturas [151, 152, 153, 154, 155]. Essa interpretação é possível uma vez que esses formalismos podem fornecer critérios para controlar a estabilidade das configurações de campos com base apenas no conteúdo informacional. Para uma discussão mais detalhada das definições, aplicações e repercussão da entropia configuracional, e em particular, suas propriedades na descrição de transições de fase, veja os seminiais artigos de Gleiser *et al.* [156, 157, 158, 159, 160].

Considerando toda a fundamentação apresentada, estudamos agora os aspectos das estruturas *kinks* que emergem de uma teoria ϕ^6 em um espaço-tempo plano e os aspectos das estruturas que surgem em uma gravidade *dilaton*.

3.2 *kink* na teoria ϕ^6

Iniciamos estudando as estruturas topológicas de uma teoria ϕ^6 com multi-campos. A teoria ϕ^6 é interessante porque é uma teoria que permite contração das estruturas topológicas gerando configurações tipo duplo-*kink* ou mesmo multi-*kink*. Aqui nós consideramos e estudamos as soluções de um modelo de dois campos escalares reais. Afim de alcançar nosso propósito, adotamos o formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) para investigar as propriedades BPS da teoria. Usando a densidade de energia BPS, a entropia configuracional diferencial é estudada. Os resultados da entropia configuracional diferencial indicam as configurações de campos mais prováveis e estáveis.

3.2.1 *O modelo*

Iniciamos o estudo das estruturas tipo *kink* considerando uma teoria generalizada constituída por dois campos escalares generalizados. Um modelo semelhante foi investigado na referência [161], onde a teoria de multi-campos é adotada para estudar a existência de estruturas geometricamente contraídas na teoria ϕ^4 . Em nosso modelo, estudaremos uma interação ϕ^6 e buscaremos as configurações topológicas mais prováveis e estáveis. Para alcançar nosso propósito, consideramos a ação:

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} f(\chi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi) \right]. \quad (3.2)$$

A função $f(\chi)$ uma função de generalização positiva definida. Para este modelo, assumiremos a assinatura métrica do espaço-tempo sendo $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -)$. Além disso, por conveniência, assumimos $\hbar = c = 1$. O potencial $V(\phi, \chi)$ considerado no modelo acopla os campos escalares no limite de saturação de energia. Assim, a interação da teoria será relacionada à função de generalização $f(\chi)$ no limite BPS.

As equações de movimento surgem da variação da ação relativa aos campos ϕ e χ . Assim, obtemos que a equação de movimento da configuração do campo ϕ é

$$\frac{d}{dx} \left(f(\chi) \frac{d\phi}{dx} \right) - V_\phi(\phi, \chi) = 0. \quad (3.3)$$

Enquanto isto, a equação de movimento relacionada ao campo χ é

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{2}f_\chi \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V_\chi(\phi, \chi) = 0, \quad (3.4)$$

onde $V_\phi = \partial V / \partial \phi$, $V_\chi = \partial V / \partial \chi$ e $f_\chi = df/d\chi$.

Para obter as estruturas topológicas tipo *kink*, consideramos as condições topológicas dos campos escalares, i. e.,

$$\phi(x \rightarrow \pm\infty) = v_\pm \quad \text{e} \quad \chi(x \rightarrow \pm\infty) = u_\pm \quad (3.5)$$

com v_\pm e u_\pm sendo os valores de vácuos da teoria.

Vamos implementar o formalismo BPS [103, 104] na teoria. Para isso, é necessário obter a energia (2.3) dos campos. Aplicando à definição (2.3), obtém-se à energia

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2}f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right], \quad (3.6)$$

onde a densidade de energia é

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}f(\chi) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi). \quad (3.7)$$

Neste ponto, voltamos nossa atenção para o estudo das estruturas auto-duais considerando o formalismo BPS. Neste cenário, reestruturamos a energia dos campos como segue:

$$E = \int dx \left\{ \frac{f(\chi)}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right) \mp \frac{\mathcal{W}_\phi}{f(\chi)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d\chi}{dx} \mp \mathcal{W}_\chi \right]^2 + V(\phi, \chi) - \frac{\mathcal{W}_\phi^2}{2f(\chi)} - \frac{W_\chi^2}{2} \pm \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right\}. \quad (3.8)$$

Para inspecionar as estruturas BPS, reescrevemos o potencial em termos de uma função arbitrária, i. e., a função \mathcal{W} . Na referência [49], para estudar estruturas topológicas com propriedades

BPS é considerada uma função auxiliar \mathcal{W} . Neste contexto, a função auxiliar \mathcal{W} é chamada de função superpotencial [49]. Em geral, a implementação desta função auxiliar permite escrever o potencial e a energia em termos do superpotencial. Esta abordagem usando uma função auxiliar é útil no estudo do formalismo de primeira ordem de estruturas topológicas em vários cenários [162, 163].

Perceba que a energia dos campos é limitada por baixo. Assim, no limite de saturação de energia, chega-se às equações BPS

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{\mathcal{W}_\phi}{f(\chi)} \quad (3.9)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \mathcal{W}_\chi. \quad (3.10)$$

Além disto, nota-se que para o sistema ter propriedade BPS, é conveniente escolher o potencial do modelo como

$$V(\phi, \chi) = \frac{\mathcal{W}_\phi^2}{2f(\chi)} + \frac{\mathcal{W}_\chi^2}{2}. \quad (3.11)$$

Considerando a interação (3.11), a energia dos campos no limite de saturação é

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{W}}{dx} dx = \pm [\mathcal{W}(v_+, u_+) - \mathcal{W}(v_-, u_-)], \quad (3.12)$$

onde a densidade de energia BPS é

$$\mathcal{E}_{BPS} = \pm \frac{d\mathcal{W}}{dx}. \quad (3.13)$$

A expressão (3.12) nos conduz à energia BPS:

$$E_{BPS} = \pm \mathcal{W}(v_+, u_+) \mp \mathcal{W}(v_-, u_-). \quad (3.14)$$

Antes de assumir uma forma para a função auxiliar $\mathcal{W}(\phi, \chi)$, é importante mencionar que as equações de primeira ordem são mais simples quando $\mathcal{W}_{\phi\chi} = \mathcal{W}_{\chi\phi} = 0$. Neste regime, uma escolha particularmente interessante é

$$\mathcal{W}(\phi, \chi) = \mathcal{W}_1(\phi) + \mathcal{W}_2(\chi). \quad (3.15)$$

Para trabalhar em uma teoria ϕ^6 , nos deixe supor que o superpotencial tenha o seguinte perfil

$$\mathcal{W}(\phi, \chi) = \frac{\phi^2}{2} \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) + \frac{\chi^2}{2} \left(1 - \frac{\chi^2}{2}\right). \quad (3.16)$$

O perfil da função auxiliar (3.16) é interessante porque reproduz uma teoria ϕ^6 simétrica. De fato, esse superpotencial é uma extensão do modelo discutido na referência [161]. Na referência [161], os autores escolhem o superpotencial para reproduzir a teoria ϕ^4 . A escolha (3.16) nos leva a uma extensão da teoria ϕ^4 , i. e., um modelo com três valores de vácuo distintos. Além disso, em extensões da teoria ϕ^4 é comum esperar o aparecimento de estruturas geometricamente contraídas, como a classe de soluções multi-*kink*. Motivados por esta hipótese, assumimos o superpotencial (3.16) e escrevemos a interação como

$$V(\phi, \chi) = \frac{\phi^2(1-\phi^2)^2}{2f(\chi)} + \frac{\chi^2(1-\chi^2)^2}{2}. \quad (3.17)$$

De fato, observe que o potencial (3.11) descreve uma teoria tipo ϕ^6 . Particularmente, é interessante mencionar que as teorias ϕ^6 são discutidas extensivamente por alguns autores [78, 79]. Na referência [78], Saxena *et al.* estabelece a teoria ϕ^6 em uma teoria de Ginzburg-Landau de sucessivas transições de fase e estudam as propriedades físicas das estruturas. Além disso, as teorias ϕ^6 são particularmente interessantes porque permitem conexões com física de altas energias, e. g., os “modelos de bolsas” de Quarks dentro de Hádrons [78].

Adotando à interação (3.17) e $f(\chi) = \chi^{-n}$, obtemos as equações BPS como segue:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{1}{2} \chi^n \phi (1 - \phi^2) \quad (3.18)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \frac{1}{2} \chi (1 - \chi^2). \quad (3.19)$$

Vamos agora investigar as soluções das equações BPS, i. e., as soluções das equações (3.18) e (3.19). Investigando as soluções da equação (3.19), obtém-se

$$\int \frac{d\chi}{\chi(1-\chi^2)} = \pm \frac{1}{2} \int dx, \quad (3.20)$$

o que nos dá

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{(x_0 \mp x)}}}. \quad (3.21)$$

O sinal negativo da expressão acima indica soluções do tipo *kink*. Por outro lado, o sinal positivo indica a solução do tipo *antikink*. O valor x_0 descreve a posição inicial da estrutura topológica. Na figura 7 exibimos o comportamento gráfico do campo $\chi(x)$.

Usando à solução (3.19), pode-se encontrar a solução analítica da equação (3.18). Adotando a expressão (3.21), nota-se que a equação (3.18) é reescrita como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{1}{2[1 + e^{(x_0 \mp x)}]^{n/2}} \phi (1 - \phi^2), \quad (3.22)$$

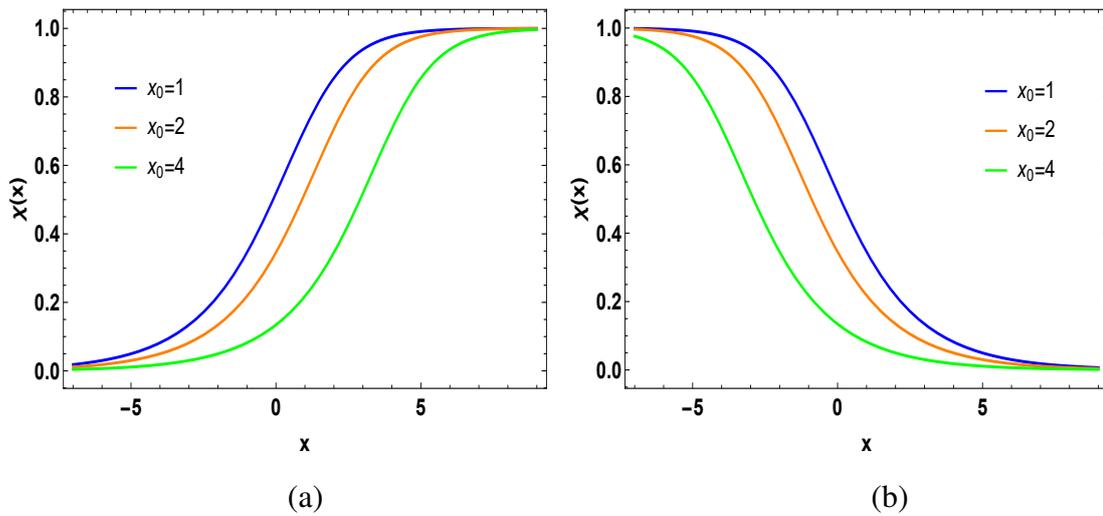


Figura 7 – (a) Soluções tipo *kink* do campo $\chi(x)$ quando $x_0 = 1, 2$ e 4 . (b) Soluções *antikink* do campo $\chi(x)$ quando $x_0 = 1, 2$ e 4 .

ou seja,

$$\int \frac{d\phi}{\phi(1-\phi^2)} = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dx}{[1 + e^{(x_0 \mp x)}]^{n/2}}. \quad (3.23)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} F(x, x_0) &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{[1 + e^{(x_0 \mp x)}]^{n/2}} \\ &= \pm [1 + e^{(\pm x_0 - x)}]^{-n/2} [1 + e^{(\mp x_0 + x)}]^{\pm n/2} {}_2F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 1 + \frac{n}{2}; e^{(-x_0 \pm x)}\right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

ressaltamos que ${}_2F_1(a, b, c; y)$ é conhecida como função hipergeométrica. Assim, definimos a função hipergeométrica como

$${}_2F_1(a, b, c; y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \frac{y^j}{j!} \quad (3.25)$$

onde $a = \frac{n}{2}$, $b = \frac{n}{2}$, $c = \frac{n}{2} + 1$ e $y = e^{(-x_0 \pm x)}$.

Usando (3.23) e (3.24), obtém-se as soluções para o campo ϕ . Neste caso, as soluções do campo ϕ são:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\mp 2F(x, x_0) \pm c_0}}}. \quad (3.26)$$

Aqui, c_0 é uma constante de integração e será responsável pela localização inicial da estrutura no setor topológico de $\phi(x)$. As configurações de campo no setor topológico de ϕ são expostas nas figuras 8 e 9.

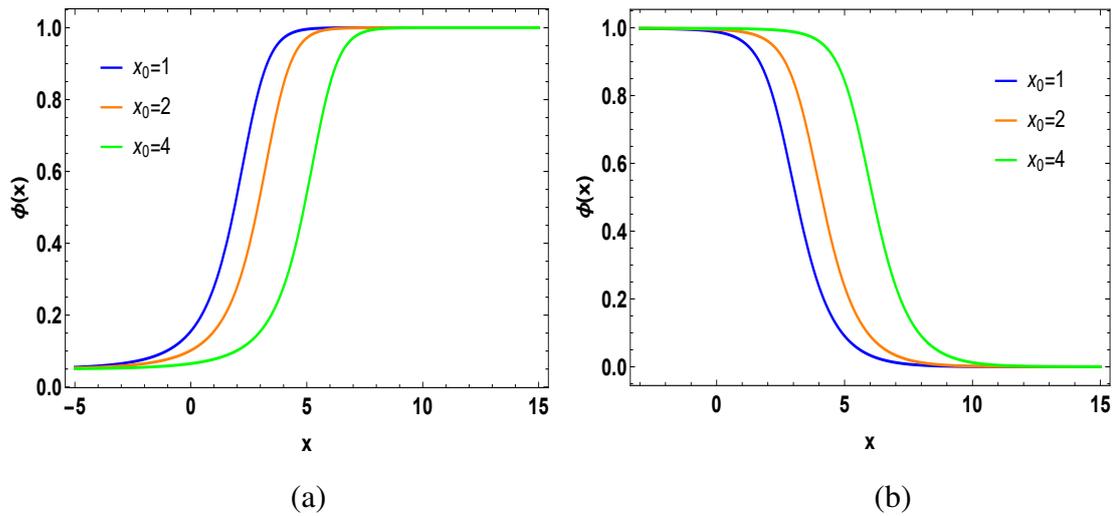


Figura 8 – (a) Soluções tipo *kink* do campo $\phi(x)$ quando $c_0 = 6$, $n = 1$ e $x_0 = 1, 2, 4$. (b) Soluções *anti-kink* do campo $\phi(x)$ quando $c_0 = -6$, $n = 1$ e $x_0 = 1, 2, 4$.

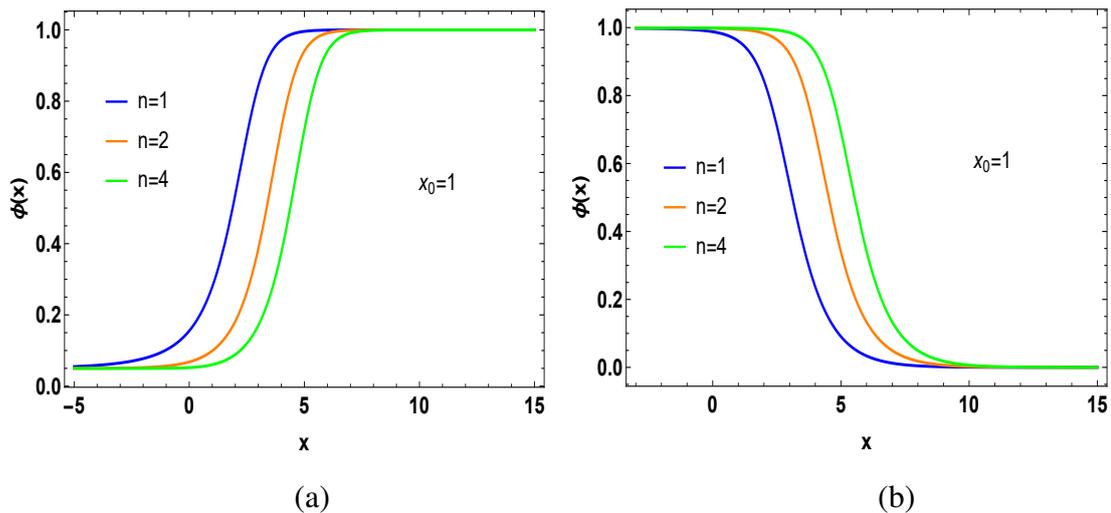


Figura 9 – (a) Soluções tipo *kink* do campo $\phi(x)$ quando x_0 e c_0 são constantes e n varia. (b) Soluções *anti-kink* do campo $\phi(x)$ quando c_0 e x_0 são constante e n varia.

Considerando as equações (3.21) e (3.26), obtém-se o comportamento da densidade de energia BPS. Mostramos o perfil de densidade de energia BPS do modelo na figura 10. Observe que quando n é pequeno, as configurações multi-campos de nossa teoria começam a ter um perfil de densidade de energia semelhante a densidade de energia de um *kink* localizado em $x = 0$, i. e., um perfil proporcional a secante hiperbólica ao quadrado [17]. Analisando, a densidade de energia BPS exposta na figura 10, notamos que a quebra de degenerescência da densidade de energia ocorre devido a contração dos campos χ e ϕ .

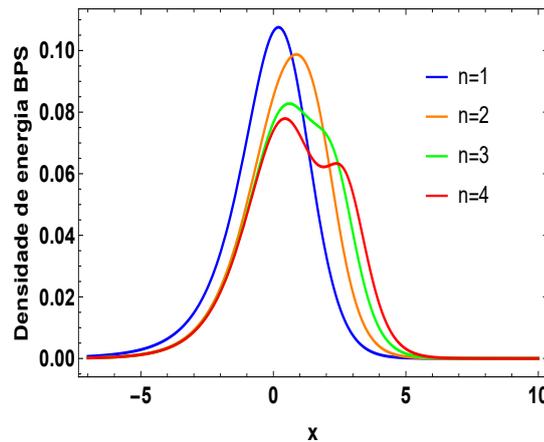


Figura 10 – Densidade de energia BPS associada aos campos χ e ϕ .

3.2.1.1 A entropia configuracional

Os resultados da seção anterior sugerem que o parâmetro n altera as estruturas topológicas do setor ϕ . Este resultado permite o surgimento da seguinte questão: Para qual valor do parâmetro n as configurações topológicas encontradas são mais estáveis? Para responder a essa questão, usaremos o conceito de entropia configuracional (ou sua variante, a entropia configuracional diferencial) para investigar a configuração de campo mais prováveis.

A entropia configuracional diferencial é uma variante da entropia configuracional. A entropia configuracional diferencial desempenha um papel relevante na medição da complexidade informacional de uma configuração de campo localizada. Para mais detalhes consulte às referências [156, 157, 158, 159, 160]. Além disso, podemos expressar a entropia configuracional diferencial como a transformada de Fourier da densidade de energia.

Para calcular a entropia configuracional diferencial, define-se a densidade de probabilidade [157, 158, 159] como

$$f(\omega) = \frac{|\mathcal{F}(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' |\mathcal{F}(\omega')|^2}, \quad (3.27)$$

onde

$$\mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{BPS}(x) e^{i\omega x} dx. \quad (3.28)$$

Para um campo localizado e contínuo, a entropia configuracional diferencial é

$$S_C[f] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \ln[f(\omega)] d\omega. \quad (3.29)$$

Para os campos $\phi(x)$ e $\chi(x)$ que descrevem o modelo (3.2), é conveniente analisar numericamente a entropia configuracional diferencial considerando as soluções (3.21) e (3.26).

Para investigar a entropia configuracional diferencial, começamos substituindo as soluções (3.21) e (3.26) na expressão da densidade de energia, i. e., equação (3.13). Substituindo a equação (3.13) em (3.28), obtém-se $\mathcal{F}(\omega)$. Posteriormente, aplicando a definição de densidade de probabilidade (3.27) e DCE (3.29), respectivamente, obtemos a entropia configuracional diferencial do modelo (3.2) discutido.

Expomos na figura 11 o resultado da entropia configuracional diferencial. Por definição, os pontos críticos da entropia configuracional diferencial indica as configurações mais prováveis (ou mais estáveis), veja as referências [156, 157, 158, 159]. Portanto, conclui-se que as estruturas mais prováveis da teoria aparecem quando o parâmetro $n \simeq 6$. Exibimos essa configuração na figura 11.

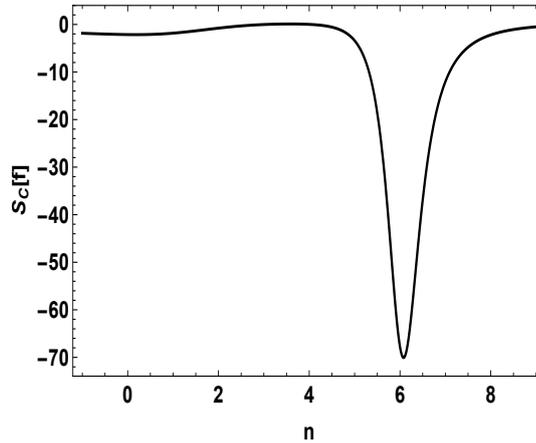


Figura 11 – Entropia configuracional diferencial em termo do parâmetro n quando $c_0 = x_0 = 1$.

3.2.2 Observações finais sobre o modelo

Para este modelo, apresentamos um estudo das configurações de campos da teoria ϕ^6 com dois campos escalares. Encontramos o valor adequado para o parâmetro n , usando o conceito de entropia configuracional diferencial.

Um resultado peculiar desse nosso modelo é que ele admite soluções analíticas. Outro resultado surge quando olhamos para a configuração do campo. Na verdade, mostramos analiticamente que nossa teoria tem uma contração. Referimo-nos à contração como a forma que os campos interpolam entre os vácuos $\phi^{(0)} = 0$ e $\phi^{(0)} = 1$. Observe a existência de um contraste com a teoria $\lambda\phi^4$ usual, onde usamos o potencial do tipo $V \propto (1 - \phi^2)^2$ os campos interpolam somente entre os vácuos $\phi^{(0)} = \pm 1$.

Foi encontrado o valor apropriado para o parâmetro n , usando os conceitos de derivadas da entropia configuracional. A análise dessa quantidade nos mostra numericamente que as configurações de campo mais prováveis e, portanto, mais estáveis, ocorrem quando $n = 6$ aproximadamente. Além disso, é possível ver que para $n = 6$, o campo $\chi(x)$ terá as soluções tipo *kink* mostradas na figura 7, enquanto o campo $\phi(x)$ tem as configurações do tipo *kink* e *antikink* mostradas nas figuras 12.

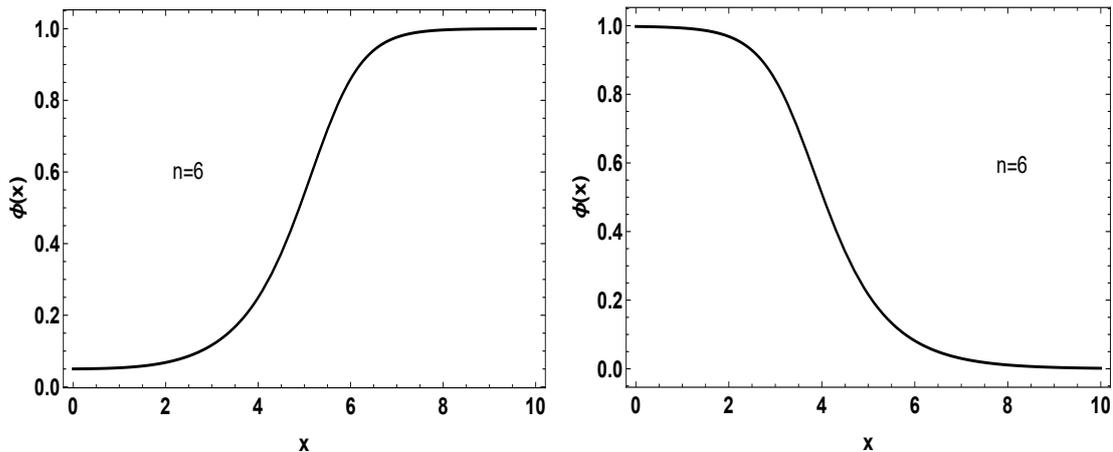


Figura 12 – Soluções mais prováveis com base no cálculo da entropia configuracional diferencial.

3.3 Estruturas bidimensionais auto-gravitantes

Estruturas topológicas que aparecem nos modelos bidimensionais são relevantes e o primeiro passo para a compreensão de sistemas mais complexos. Assim, nesta seção, estudaremos as soluções *kinks* do campo de matéria que surgem na gravidade *dilaton* bidimensional. Para complementar, a estabilidade linear do campo de matéria e o modo zero também serão estudados. Devido ao perfil específico das soluções topológicas tipo *kink*, usaremos uma análise complementar para estudar a entropia configuracional de complexidade para confirmar a natureza das estruturas. Nesse cenário, também estudaremos a força interna entre estruturas amplamente espaçadas. Basicamente, para o estudo da força considera-se um par do tipo *kink-antikink* na iminência de uma colisão. Os resultados dessa força foram alcançados por meios numéricos, com maior intensidade em configurações mais compactas. Também foi feito um estudo do espalhamento de um par de estruturas com número de enrolamento oposto. Um resultado interessante é que, em uma faixa de valores da velocidade inicial, as estruturas sofrerão a ação de uma força atrativa, que induz o processo de espalhamento elástico.

3.3.1 O modelo e sua estabilidade

Sabe-se que o tensor de Einstein bidimensional (i. e., em $(1+1)D$) é nulo. Portanto, para descrever um modelo em gravidade bidimensional, é necessário estender a ação de Einstein-Hilbert [164]. Uma maneira imediata de estender a gravidade de Einstein ocorre ao introduzir um campo dilaton ϕ acoplado à métrica de forma não-mínima. Dada esta consideração, consideremos a ação do tipo Mann, Morsink, Sikkema e Steele (MMSS) [148]

$$S = \frac{1}{\kappa} \int d^2x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + \phi R + \kappa \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \psi - V(\psi) \right) \right], \quad (3.30)$$

onde R é o escalar de Ricci, κ é o acoplamento gravitacional, ϕ é o campo dilaton e ψ é um campo escalar real.

A variação da ação leva a três equações de movimento, i. e., a equação de Einstein

$$\kappa T_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi + 4\nabla_\rho \nabla^\rho \phi) - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi, \quad (3.31)$$

a equação do campo dilaton

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + R = 0 \quad (3.32)$$

e a equação do campo escalar

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{dV}{d\psi} = 0. \quad (3.33)$$

Nesse cenário, o tensor energia-momentum é

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\rho \psi \nabla_\rho \psi + 2V). \quad (3.34)$$

Para estudar as estruturas topológicas bidimensionais auto-gravitantes, consideramos a métrica

$$ds^2 = e^{2A(r)} (-dt^2 + dr^2), \quad (3.35)$$

onde $A(r)$ é o fator de dobra (ou do inglês *warp factor*). Além disso, é interessante mencionar que essa métrica (3.35) é bastante usada em investigações de estruturas topológicas em cenário de dimensão extra. Detalhes sobre essas investigações podem ser consultados na referência [165].

É conveniente escrever a ação (3.30) em termos dos campos ϕ , ψ e do fator de dobra $A(r)$. Para isso, notamos que o escalar de Ricci é

$$R = -2e^{-2A(r)} A''(r), \quad (3.36)$$

portanto, a ação é reescrita como segue

$$S = \frac{1}{\kappa} \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \phi'(r)^2 - 2A''(r)\phi(r) - \frac{1}{2} \kappa \psi'(r)^2 - \kappa e^{2A(r)} V(\psi) \right],$$

onde a notação linha corresponde à derivada em relação à variável de posição.

Agora, consideramos uma interação ψ^4 . Como visto anteriormente, essa interação é responsável pela quebra espontânea de simetria, que por sua vez, induz o surgimento de estruturas topológicas. O potencial ψ^4 considerado em nosso sistema é

$$V(\psi) = \frac{\lambda}{2} (v^2 - \psi^2)^2. \quad (3.37)$$

Partindo do pressuposto que conhecemos o fator de *warp*, a ação passa a ter dois campos com uma variável independente de r . Esses campos descreverão o campo *dilaton* e o campo de matéria. Nesse caso, as equações de movimento são:

$$\psi''(r) + 2\lambda e^{2A(r)} \psi(r)(v^2 - \psi(r)^2) = 0 \quad (3.38)$$

e

$$\phi''(r) - 2A''(r) = 0. \quad (3.39)$$

Considerando a equação (3.39), obtém-se a relação entre o campo *dilaton* e o fator de *warp*. Essa relação é

$$\phi(r) = 2A(r) + \beta r + \gamma. \quad (3.40)$$

Sem perder a generalidade, pode-se assumir $\beta = \gamma = 0$ na expressão (3.40). O resultado (3.40) já foi discutido anteriormente na referência [166] para um modelo bidimensional com geometria diferente usando uma abordagem supersimétrica.

Neste momento é conveniente considerar um perfil particular para a função $A(r)$. Assim, adotamos o fator de *warp*:

$$e^{2A(r)} = \cosh^{-2p}(\lambda_0 r). \quad (3.41)$$

O parâmetro λ_0 torna o argumento do cosseno hiperbólico adimensional. De fato, pode-se supor, sem prejuízo, $\lambda_0 = 1$. Em mundo-brana com cinco dimensões, este perfil da função *warp* é amplamente utilizado na descrição de branas espessas, consulte à referência [131]. Na referência [131], utilizando este perfil da função *warp*, os autores demonstraram as soluções simétricas e

assimétricas da brana espessa em cinco dimensões. No caso bidimensional, o *ansatz* (3.41) nos leva, respectivamente, à seguinte equação para as estruturas tipo *kinks*

$$\psi''(r) + 2\lambda \cosh^{-2p}(r)\psi(r)(v^2 - \psi(r)^2) = 0. \quad (3.42)$$

Para a métrica (3.35) e o *ansatz* (3.41), o perfil do campo de dilaton é dado por

$$\phi(r) = \ln(\cosh^{-2p}(r)), \quad (3.43)$$

Exibimos o perfil do campo de dilaton na figura 13. Observe que, embora trabalhemos com uma geometria diferente, nossos resultados para o comportamento do campo de dilaton é semelhante ao exibido na referência [67].

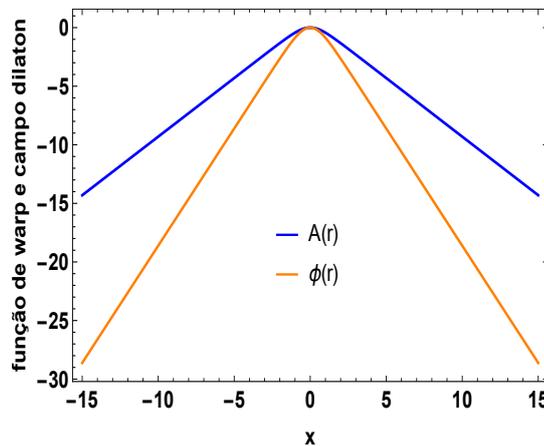


Figura 13 – Função de *warp* e o campo *dilaton*.

Pode-se resolver à equação (3.42) facilmente usando alguma técnicas numéricas.

Para investigar as estruturas topológicas consideramos as condições de contorno:

$$\psi(r \rightarrow -\infty) = -1 \quad \text{e} \quad \psi(r \rightarrow \infty) = 1 \quad (3.44)$$

na interpolação numérica. Como resultado, a configuração do campo $\psi(r)$ encontrado possui perfil do tipo duplo-*kink*. A solução é exposta na figura 14(a), enquanto a configuração duplo-*antikink* é apresentada na figura 14(b).

3.3.1.1 A estabilidade das soluções

Permita-nos, agora, analisar a estabilidade linear das soluções auto-gravitantes do tipo *kink-antikink* realizando pequenas perturbações nas soluções de campo (figura 14). Para

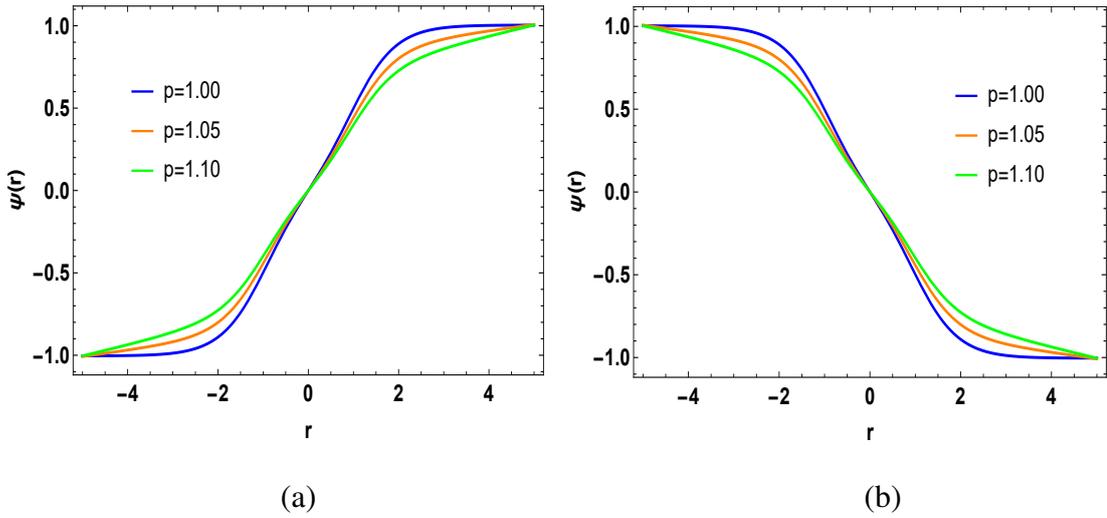


Figura 14 – Campo de matéria quando $p = 1,00, 1,05$ e $1,15$.

isto, consideramos pequenas perturbações em torno de soluções estáticas. Resumidamente, a perturbação da métrica é

$$\delta g_{\mu\nu} = e^{2A(r)} \begin{pmatrix} h_{00}(r,t) & \Phi(r,t) \\ \Phi(r,t) & h_{rr}(r,t) \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

e para primeira ordem, a perturbação da métrica inversa é

$$\delta g^{\mu\nu} = -e^{-2A(r)} h^{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

Como proposto por Zhong *et al.* [68, 166] é conveniente considerar uma nova variável $\Xi = 2\dot{\Phi} - h'_{00}$ e assumir o calibre $\delta\phi = 0$ para linearizar a equação de Einstein. Assim, essa linearização nos leva às equações

$$2A'\delta\phi' - 2A'\phi'h_{rr} - 2\delta\phi'' - \delta\phi'\phi' + h'_{rr}\phi' + 2h_{rr}\phi'' + \frac{1}{2}h_{rr}\phi'^2 = \kappa \left(\psi'\delta\psi' + \psi''\delta\psi + \frac{1}{2}\psi'^2 h_{rr} \right), \quad (3.47)$$

$$2A'\delta\phi - 2\delta\phi' - \phi'\delta\phi + \phi'h_{rr} = \kappa\psi'\delta\psi, \quad (3.48)$$

$$2A'\delta\phi' - 2A'\phi'h_{rr} - \delta\phi'\phi' - \ddot{\delta\phi} + \frac{1}{2}h_{rr}\phi'^2 + \Xi\phi' = \kappa \left(\psi'\delta\psi' - \psi''\delta\psi - \frac{1}{2}\psi'^2 h_{rr} \right). \quad (3.49)$$

A partir da linearização do campo escalar (3.33), encontramos uma nova equação de movimento perturbada do campo de matéria, a saber,

$$\ddot{\delta\psi} + \delta\psi'' + 2A'\frac{\psi''}{\psi}\delta\psi - \frac{\psi'''}{\psi'}\delta\psi - \frac{1}{2}\psi'h'_{rr} - \psi''h_{rr} + \frac{1}{2}\psi'\Xi = 0. \quad (3.50)$$

Note que temos três equações perturbadas independentes. No entanto, devemos observar também que as variáveis perturbadas não são independentes. Analisando a invariância das equações perturbadas, chega-se a

$$\delta\psi - \delta\psi'' + V_{\text{ef.}}(r)\delta\psi = 0. \quad (3.51)$$

Pode-se encontrar mais detalhes sobre os cálculos perturbativos nas referências [68, 166].

Nesse caso, o potencial efetivo é

$$V_{\text{ef.}}(r) = 4A'' - 2A' \frac{\psi''}{\psi'} - \phi'' + 2 \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2 - 2 \frac{\phi'''}{\phi'} + \frac{\psi'''}{\psi'}. \quad (3.52)$$

O perfil do potencial efetivo encontra-se exposto na figura 15(a).

Supomos que $\delta\psi = \xi(r)e^{i\omega t}$. Essa suposição nos leva a

$$-\xi''(r) + V_{\text{ef.}}(r)\xi(r) = \omega^2\xi(r). \quad (3.53)$$

O autovalor da expressão (3.53) é definido como $\omega \geq 0$. Isto nos informa se as soluções do tipo *kink* são estáveis contra perturbações lineares. O modo translacional descrito pela equação (3.53) da estrutura tipo *kink* é dado por

$$\xi_0(r) = \mathcal{C}_0 \frac{\psi'(r)}{2A'(r)}, \quad (3.54)$$

onde \mathcal{C}_0 é a constante de normalização do $\xi_0(r)$. Expomos o modo translacional da estrutura tipo *kink* na figura 15(b).

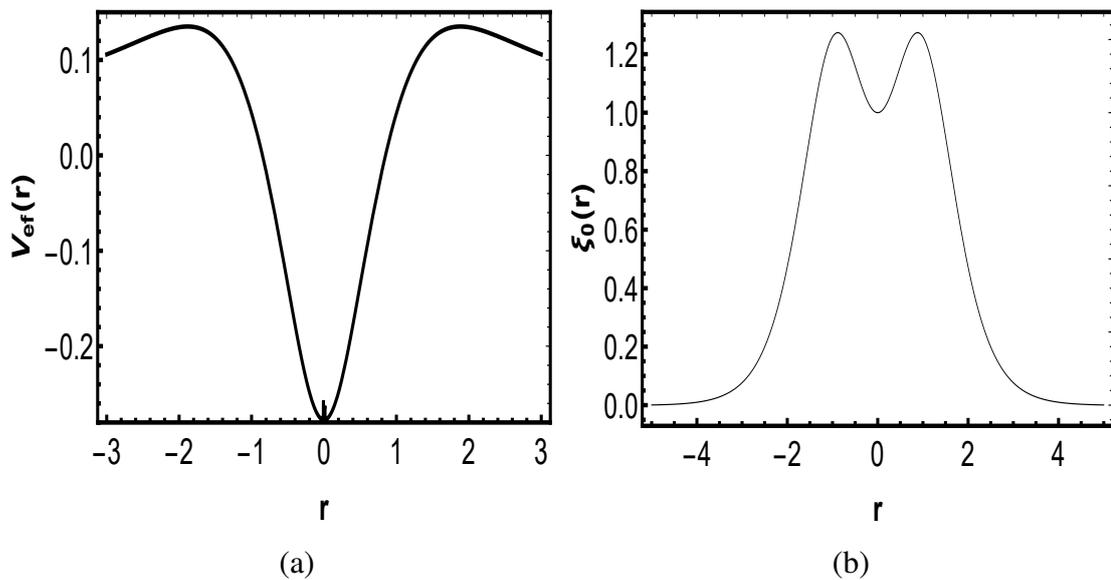


Figura 15 – (a) Potencial efetivo. (b) Modo translacional das estruturas tipo *kink*.

3.3.2 A interação entre as estruturas

Nesta seção, estudaremos a força que atua entre as estruturas auto-gravitantes do tipo *kink* e *antikink*. Para isso, começamos estudando numericamente as soluções tipo *kink* e *antikink* amplamente espaçadas, de modo que tenhamos um par de estruturas tipo *kink-antikink*. Na figura 16, mostramos uma representação do par dessas estruturas interagindo.

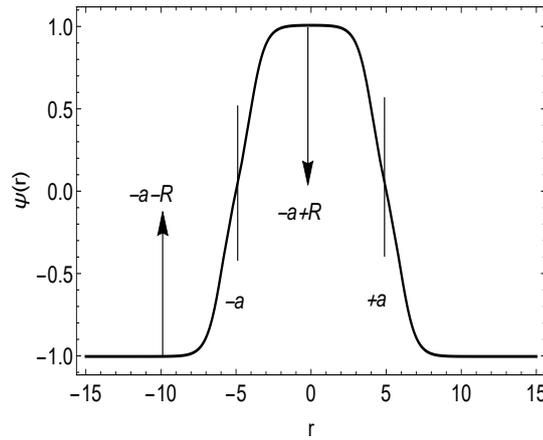


Figura 16 – Interação das estruturas tipo *kink-antikink* amplamente espaçadas.

A força exercida sobre uma estrutura topológica deve obedecer à segunda lei de Newton. Para calcular essa força, devemos analisar a densidade de momentum do campo. A integral da densidade de momentum $T^{0i} = e^{4A(r)} T_{0i}$ nos dará o momentum da estrutura na região ao redor da configuração topológica do campo de matéria. Para o par de estruturas topológicas considerada o momentum P do campo na região $(-a-R, -a+R)$ será

$$P = \int_{-a-R}^{-a+R} dr \cosh^{-4p}(r) \psi(r,t) \psi'(r,t). \quad (3.55)$$

Assim, a força sobre os campos nessa região é

$$F = \frac{dP}{dt} = \int_{-a-R}^{-a+R} \cosh^{-4p}(r) [\dot{\psi}(r,t) \psi'(r,t) + \psi(r,t) \dot{\psi}'(r,t)] dr. \quad (3.56)$$

Lembrando que

$$\ddot{\psi}(r) = \psi''(r) - 2\lambda \cosh^{-2p}(r) \psi(r) (v^2 - \psi(r)^2), \quad (3.57)$$

obtem-se

$$F = \int_{-a-R}^{-a+R} \cosh^{-4p}(r) \left[\frac{1}{2} \frac{d\psi'(r,t)^2}{dr} + \cosh^{-2p}(r) \frac{dV}{dr} + \dot{\psi}(r,t) \dot{\psi}'(r,t) \right] dr \quad (3.58)$$

Neste momento, assumiremos que as estruturas topológicas são estacionárias (nesse caso, estamos assumindo um tempo fixo t_0). Esta suposição implica que

$$\partial_t \psi|_{t=0} = 0, \quad (3.59)$$

o que nos leva à

$$F = \int_{-a-R}^{-a+R} \cosh^{-4p}(r) \left[\frac{1}{2} \frac{d\psi'(r,t)^2}{dr} + \cosh^{-2p}(r) \frac{dV}{dr} \right] dr, \quad (3.60)$$

onde V é a interação apresentada na equação (3.37).

Usando a expressão (3.60), nós podemos calcular numericamente a interforça entre as estruturas. Para alcançar nosso propósito, i. e., assumiremos $|a| = 5$ (espaçamento entre as estruturas) e $|R| = 4$. Para calcular a força, substituímos as soluções numéricas do campo de matéria $\psi(r)$ auto-gravitantes (soluções mostradas na Fig. 14) na expressão (3.60).

O resultado numérico da magnitude da força produzida pela interação do tipo *kink-antikink* é exposta na tabela (1) para vários valores do parâmetro p .

Tabela 1 – Resultado numérico da interforça entre as estruturas tipo *kink-antikink*.

Valor do parâmetro p	Intensidade da força
1,00	-0,1023
1,05	$-3,6197 \cdot 10^{-9}$
1,10	$-3,2558 \cdot 10^{-11}$

O gráfico da densidade de força (3.60) é mostrado na figura (17). Observe que na região onde as estruturas *kink-antikink* interagem o perfil de densidade de força torna-se “oscilante” mudando bruscamente a amplitude da densidade de força. Note também que a interforça em $r = 0$ é nula. Além disso, observe que quanto menor o parâmetro p , maior a intensidade da interforça (módulo). Enquanto isto, quando as estruturas estão distantes, uma força inter-*kink* na extremidade da estrutura atrai as configurações *kink* e *antikink*, induzindo um fenômeno de espalhamento das estruturas.

3.3.3 Espalhamento das estruturas

Nesse momento, vamos estudar a dispersão das soluções *kink-antikink* em nosso modelo. Para isso, investigamos as soluções das equações de movimento considerando o caso dinâmico. Nesse cenário, encontramos duas soluções novamente, i. e., as configurações tipo *kink*

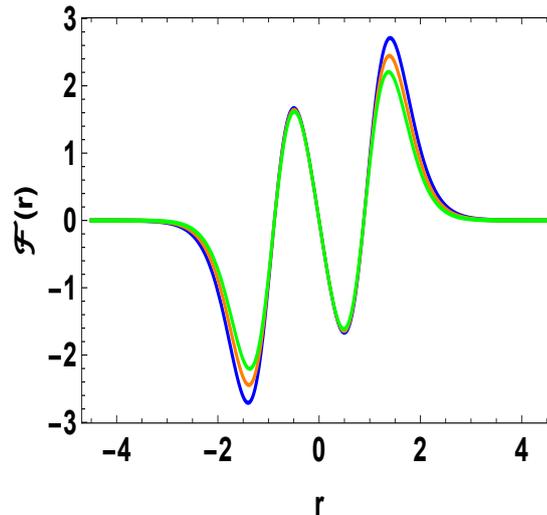


Figura 17 – Densidade da interforça exercida sobre as estruturas topológicas.

e *antikink*. Numericamente, assumimos que essas estruturas encontram-se amplamente, i. e., as configurações tipo *kink* encontram-se em $r = +a$ ¹, enquanto isto, as configurações *antikink* estão em $r = -a$. Além disso, consideramos que essas estruturas movem-se em direções opostas com velocidade inicial v_{in} . Fazendo este procedimento, estudamos o espalhamento das estruturas. Apresentamos o resultado da dispersão na figura 18.

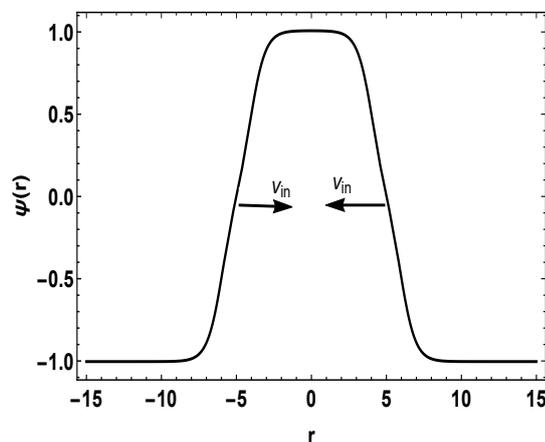


Figura 18 – Configuração inicial antes do processo de espalhamento.

Para fins de simulação, adotamos na simulação passos de 10^{-4} . Analisando os resultados da simulação, encontramos o valor crítico da velocidade inicial $v_{cr} \simeq 0,965$. A velocidade inicial das estruturas irá separar o processo de colisão em dois regimes. Se $0,965 < v_{in} < 0,153$, as estruturas colidem aniquilando-se mutuamente e irradiando sua energia. Enquanto isso, para $v_{in} > 0,153$ notamos a dispersão das estruturas (veja a figura 19). O processo de

¹ a é um parâmetro usado para analisar numericamente os resultados

dispersão ocorre para a velocidade $0,153 < v_{in} < 0,965$. Neste caso, observamos que cada estrutura carrega um número de enrolamento oposto, e a interforça é atrativa quando as estruturas estão distantes (consulte a tabela 1). No entanto, quando estão mais próximas, elas se repelem, refletem e se afastam, dando origem ao espalhamento de uma colisão elástica. Matematicamente, essa classe de evento é dada por

$$\Psi_{(-1,+1)} \cup \Psi_{(+1,-1)} \rightarrow \Psi_{(+1,-1)} \cup \Psi_{(-1,+1)}. \quad (3.61)$$

A ilustração desse efeito é exibida na figuras (19) e (20).

3.3.4 A transição de fase do campo de matéria

Uma indagação natural que surge é: o campo de matéria assume outras configurações de campo, como soluções multi-kink? Para responder a essa pergunta, usaremos argumentos da teoria da informação. Na verdade, usaremos novamente os fundamentos da entropia configuracional. Na verdade, neste caso, usaremos as discussões de sua variante, i. e., a complexidade configuracional diferencial [156, 157, 158, 159, 160].

Para responder o questionamento anterior, usaremos o conceito da complexidade configuracional diferencial, a saber,

$$\mathcal{S} = - \int \rho(\mathbf{k}) \ln \rho(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (3.62)$$

Conforme destacado por Gleiser *et al.* [156, 157, 158, 159, 160], a complexidade configuracional diferencial busca medir a complexidade informacional de uma configuração de campo localizada. Para uma configuração de campo localizado com energia $\mathcal{E}(r)$, a decomposição em modos de onda em duas dimensões é descrita pela transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{E}(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (3.63)$$

Um dispositivo sensível ao espectro de onda completa (ao campo) detectará um modo de onda dentro de um volume $d\mathbf{k}$ centrado em \mathbf{k} com probabilidade proporcional à potência do modo. Nesse caso, a probabilidade é

$$p(\mathbf{k}|d\mathbf{k}) \propto |\mathcal{F}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}, \quad (3.64)$$

isto permite escrever a fração modal como

$$f(\mathbf{k}) = \frac{|\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k})|}{|\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}_*)|}, \quad (3.65)$$

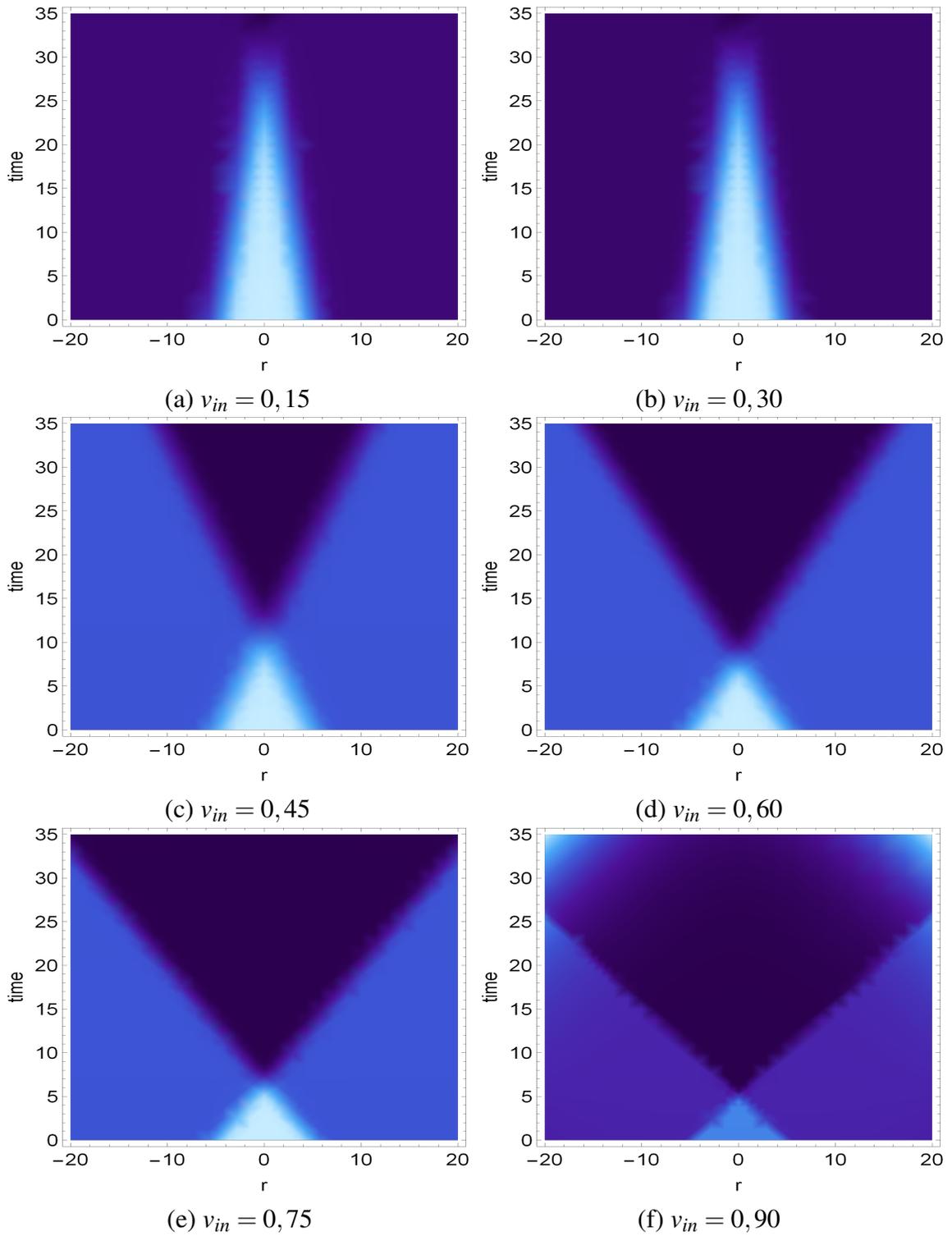


Figura 19 – Espalhamento das estruturas.

de modo que a complexidade configuracional diferencial [160] é

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = - \int f(\mathbf{k}) \ln[f(\mathbf{k})] d\mathbf{k}. \quad (3.66)$$

O integrando da equação (3.66) é chamado de densidade entrópica.

Para calcular a complexidade configuracional diferencial, é necessário investigar a

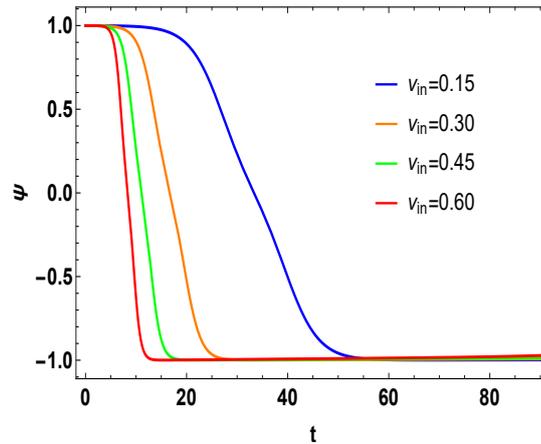


Figura 20 – Espalhamento dependente do tempo das estruturas a partir do ponto de colisão $r = 0$.

densidade de energia do campo de matéria. A densidade de energia é

$$\mathcal{E}(r) = \cosh^{-2p}(r) \left[\cosh^{-2p}(r) \psi'(r) + \frac{\lambda}{2} (v^2 - \psi(r)^2)^2 \right]. \quad (3.67)$$

O campo $\psi(r)$ tem o perfil de energia localizado mostrado na figura 21.

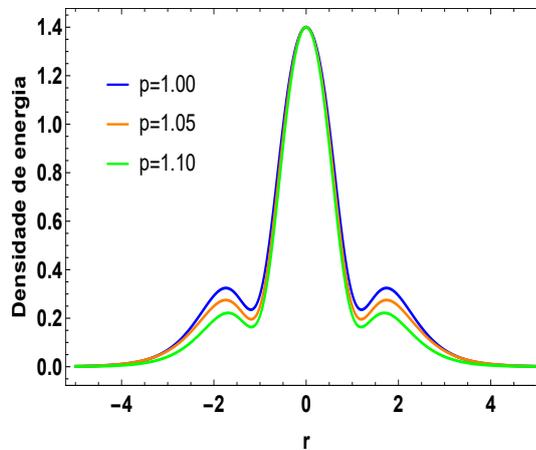


Figura 21 – Densidade de energia do campo de matéria quando $p = 1,00$ (linha tracejada), 1,05 e 1,10.

Para alcançar nossa aspiração de analisar as transições de fase, vamos assumir as soluções numéricas do campo de matéria (figura 14). Com o resultado numérico (3.67), calculamos a transformada de Fourier (3.63). Em seguida, analisamos a fração modal (3.65) da densidade de energia (3.67). Findamos calculando numericamente a densidade entrópica (3.66) e a complexidade configuracional diferencial da teoria (tabela 2).

Os resultados numéricos da densidade entrópica da complexidade configuracional diferencial mostra um mínimo absoluto na origem do espaço de potência, i. e. $k = 0$. Este

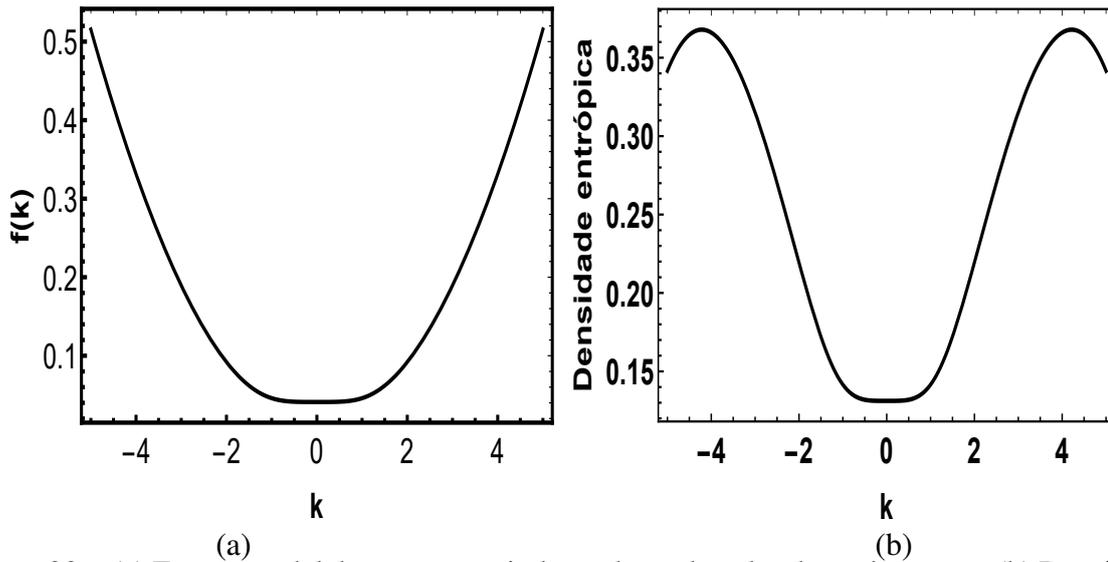


Figura 22 – (a) Fração modal das estruturas independente do valor do parâmetro p . (b) Densidade entrópica associada a complexidade configuracional diferencial.

Tabela 2 – Resultados numéricos da complexidade configuracional diferencial.

Valor do parâmetro p	Complexidade configuracional diferencial
1,00	1,83984
1,05	1,73782
1,10	1,64806

mínimo ocorre na faixa de valores $|k| < 0,69$. Por simulação, fica claro que este ponto descreve um mínimo absoluto, o que indica a presença de paredes de domínios no espaço de posição em torno de $r = 0$. A existência das paredes de domínios sugerem uma a existência de duplas transições de fase. Essas paredes de domínios são geradas pelas quebras espontâneas de simetria do modelo. Além disso, o espaço-tempo curvo parece influenciar na transição de fase do campo de matéria deformando a estrutura.

Além disso, nossos cálculos da fração modal e complexidade configuracional diferencial (figuras 22(a) e 22(b)), garantem que o campo de matéria deve ter um perfil semelhante à classe de soluções kinks. Portanto, essas soluções de campo se assemelharão a um perfil tipo tangente hiperbólica deformável localizado na vizinhança da origem. O cálculo numérico da complexidade configuracional diferencial (equação 3.66) ainda mostra que para os demais valores de p também ocorrem transições de fase. No entanto, os campos evoluirão mais suavemente em direção ao estado de vácuo para valores maiores do parâmetro p . Os picos de densidade entrópica indicam os valores no espectro de potência para os quais os campos atingem o estado de vácuo.

3.3.5 Observações finais sobre o modelo

Ao longo desta seção, estudamos as estruturas topológicas auto-gravitantes oriundas de uma teoria bidimensional em um cenário de gravidade *dilaton*. Para investigar a estabilidade da solução, utilizamos alguns argumentos utilizados por Zhong et. al. [68, 115] no calibre de dilaton ($\delta\phi = 0$). Além disso, utilizamos uma proposta similar à discutida por Gani et. al. [47] para investigar o modo zero (translacional) da estrutura. A ausência de modos vibracionais nos motivou a estudar o processo de espalhamento. A força de um par de estruturas do tipo *kink-antikink* foi calculada e as transições de fase das estruturas foram analisadas usando argumentos de entropia diferencial de complexidade.

Para estudar o modelo, consideramos que um campo da matéria governado por um campo escalar canônico oriunda de uma teoria ϕ^4 , uma vez que sabemos que no espaço-tempo plano, este modelo induz o surgimento de estruturas *kink* [49]. O fato que a teoria ϕ^4 motiva o surgimento de estruturas *kink* permitiu colocar a seguinte questão em pauta: Qual a influência da gravidade do dilaton (3.35) no campo da matéria? De fato, a gravidade *dilaton* bidimensional com a métrica (3.35) induz a deformação no campo da matéria. Desta forma, as soluções que descrevem o campo de matéria possuem um perfil semelhante a um duplo-*kink*. Este resultado é interessante, pois é análogo aos resultados encontrados no processo de divisão de branas no contexto de dimensões extras [136]. Essa semelhança nos resultados nos leva a acreditar que a deformação das estruturas *kink* para o duplo-*kink* esteja relacionada ao perfil do fator de *warp* considerado.

Considerando a formação de um par de estruturas (amplamente espaçadas) com números de enrolamentos opostos, observamos que as configurações de campo sofrem uma ação de uma interforça. Essa interforça é atrativa induzindo o processo de espalhamento. A dispersão das estruturas do tipo duplo-*kink* é particularmente interessante porque o processo dependerá da velocidade inicial. Em nosso modelo, o processo de espalhamento tem dois resultados possíveis. Para uma velocidade inicial na faixa $0,965 > v_{in} < 0,153$, as estruturas irão colidir e se aniquilar e irradiar sua energia. Por outro lado, para velocidade inicial na faixa $0,153 < v_{in} < 0,965$, as estruturas serão espalhadas, e sofrerão uma reflexão. Nesse caso, a energia antes e depois da colisão é a mesma, então temos um processo elástico.

O cálculo de energia e da complexidade configuracional diferencial sugerem a existência de paredes de domínios na vizinhança da origem. Além disso, esses resultados sugerem que essas paredes de domínios estão em uma região ao redor da faixa de valores

$|k| < 0.69$. Permitindo, por inspeção, interpretar que existem somente transições de fase dupla.

4 ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS TRIDIMENSIONAIS

Neste capítulo, estudaremos estruturas topológicas tridimensionais. Especificamente, estudaremos os vórtices que surgem em modelos não-polinomiais com propriedade BPS. Além disso, mostramos como construir uma teoria não-canônica com contribuições de termo tipo *cuscuton*. Ao aplicar o formalismo de primeira ordem para obter equações tipo vórtice sem propriedade BPS, as estruturas topológicas tridimensionais emergem da teoria.

4.1 Uma breve motivação

As estruturas topológicas tridimensionais, em especial, os vórtices têm despertado o interesse de muitos pesquisadores [49, 92, 167, 168, 169]. Parte desse interesse deve-se à possibilidade de sua aplicação na física da matéria condensada [87]. Do ponto de vista qualitativo, tais estruturas topológicas são formadas durante uma transição de fase relacionada à quebra de alguma simetria [170]. Desta forma, os vórtices topológicos BPS que surgem no contexto da teoria de campo são semelhantes aos vórtices de Abrikosov, conhecidos como fenômenos característicos da física da matéria condensada [88]. Os estudos dessas estruturas são baseados em algumas abordagens. Dentre estas abordagens temos o método proposto por Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) [103, 104], já supracitados nos capítulos anteriores. Como visto no segundo capítulo, a abordagem BPS [103, 104] é uma forma inovadora e útil para o estudo das soluções clássicas de campos e suas estabilidades. Para mais detalhes consulte às referências [85, 171].

As motivações para estudos de estruturas topológicas são extensas, uma vez que podemos descrever a dinâmica de um conjunto de partículas ou mesmo objetos cosmológicos, usando a abordagem de Nielsen e Olesen [44]. Uma consequência disso é que modelos de vórtices análogos aos que aparecem na matéria condensada [88] podem, em princípio, surgir em modelos cosmológicos [44, 172, 173, 174]. Nos últimos anos, novos modelos de vórtices topológicos surgiram e foram amplamente discutidos em vários artigos [93, 98, 101, 175]. Em geral, esses novos modelos generalizados são caracterizados por termos cinéticos não-canônicos ou, em casos particulares, o campo de calibre é generalizado por funções de permeabilidade dielétrica [176, 177]. É importante mencionar que, após a quebra espontânea de simetria, esses termos associam-se aos termos de interação no limite de saturação de energia deformando as configurações dos campos.

Em princípio, as soluções de vórtices que emergem de modelos generalizados exibem comportamentos topológicos semelhantes aos casos usuais. Entretanto, os modelos generalizados são interessantes porque, em geral, eles possuem algumas grandezas físicas alteradas, por exemplo, a energia e campo magnético [176, 177, 178, 179]. Além disso, é importante destacar que os vórtices que surgem nas teorias não-canônicas e não-polinômiais emergem de teorias regidas por campos estáticos escalares ou vetoriais acoplado a um campo calibre no espaço-tempo tridimensional. Estas estruturas encontram aplicações em diversas áreas da física [180, 181, 182, 183]. Entre as aplicações, se destacam as detecções de vórtices em uma rede de potencial linearmente crescente [184] e o surgimento de tubos de fluxo magnético [185].

Como já mencionamos, as motivações para estudar modelos generalizados não-canônicos são vastas [186, 187, 188]. Nesse sentido, notamos que esses modelos surgem, inicialmente, no cenário cosmológico dentro do desenvolvimento de modelos que buscam descrever a inflação do universo [189] e outros problemas cosmológicos [190].

Motivaremos nosso estudo sobre as estruturas tridimensionais não-polinômiais e não-canônicas ao fato que recentemente muitos modelos com essas características têm sido intensamente estudados na literatura [69, 70, 71, 191, 192]. Neste sentido, estudos aplicados aos conhecidos Skyrmons [193], que são estruturas que podem apresentar uma configuração auto-dual para uma escolha de campo de fundo apropriada, foram realizados na referência [194]. Recentemente, também têm surgido estudos sobre o Skyrmons generalizados por funções dielétricas [195], e estudos de modelos dielétricos com e sem a contribuição do termo de massa [196]. Num caso mais particular dos modelos de Skyrmons, i. e., o modelo sigma-O(3)¹ também observa-se o aparecimento dessas estruturas topológicas em meios dielétricos auto-duais [178].

Conhecendo as importantes aplicações deste tópico, neste capítulo, investigaremos as estruturas tridimensionais, i. e., as soluções de vórtices de modelos não-polinômiais e não-canônicos.

4.2 Algumas convenções

Ao longo desse capítulo, iremos assumir algumas convenções que são úteis no estudo dos vórtices topológicos.

Iniciamos, destacando que a notação ϕ refere-se a um campo escalar complexo, então $|\phi|^2 = \bar{\phi}\phi$, onde a sobrelinha denota a conjugação complexa do campo. Enquanto isto, o

¹ Discutiremos em mais detalhes o modelo sigma-O(3) no próximo capítulo.

campo de calibre Abelian é denotado por A_μ . Assim, o tensor eletromagnético é descrito por $F_{\mu\nu}$, de modo que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.1)$$

Também definimos a derivada covariante do campo ϕ como $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi$. Adotaremos a assinatura métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$ e usaremos o sistema de unidades naturais, i. e., $\hbar = c = 1$.

Além disso, nosso propósito nesse capítulo é o estudo de vórtices topológicos magnéticos. Desse modo, consideramos o seguinte comportamento para o campo de escalar ϕ :

$$\phi = g(r)e^{in\theta}. \quad (4.2)$$

Enquanto isto, buscaremos soluções para o campo de calibre descrito pelo *ansatz*:

$$\vec{A} = -\frac{1}{er}[a(r) - n]\hat{e}_\theta. \quad (4.3)$$

Finalmente, para estudar soluções de vórtices rotacionalmente simétricas, consideramos as equações (4.2) e (4.3), para as quais assumimos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, & g(\infty) &= \xi, \\ a(0) &= n, & a(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde ξ é o valor esperado de vácuo, n é a vorticidade da estrutura.

4.3 Vórtices em uma teoria com generalização logarítmica

Nesta seção, estudamos as estruturas topológicas de vórtices em modelos generalizados. Desenvolvemos uma abordagem de geração perturbativa para teorias escalar-vetor e demonstramos explicitamente que as funções de permeabilidade dielétrica devem ter uma forma não-polinomial, i. e., a forma da função logarítmica. Com base neste resultado, construímos modelos em $(2+1)D$ com permeabilidade dielétrica logarítmica para investigar a presença de estruturas topológicas de vórtices em um modelo de Maxwell. Esse tipo de modelo escalar-vetor é importante porque pode gerar soluções de campo estacionário em teorias que descrevem a dinâmica do campo escalar. Como exemplo, escolhemos o modelo do campo escalar complexo acoplados ao campo de Maxwell. Posteriormente, investigamos as configurações BPS do modelo e suas propriedades.

4.3.1 Esquema para gerar modelos generalizados

Iniciamos o estudo das estruturas topológicas tipo vórtices investigando um possível esquema que permite explicar o surgimento de termos vetoriais escalares não-polinomiais nas teorias topológicas. Nosso ponto de partida será a teoria que descreve um campo espinorial acoplado aos campos escalares e vetoriais, então empregamos a metodologia de geração dinâmica de novos termos que tem sido aplicada em vários modelos de teoria de campo, especialmente dentro do contexto de quebra de Lorentz onde era usado para gerar o termo Carroll-Field-Jackiw [197]. Como ponto de partida, iniciamos escolhendo a ação:

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m(\phi))\psi + S_{scal}[\phi] + S_{Maxw}[A], \quad (4.5)$$

onde $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$, $A\!\!\!/ = \gamma^\mu A_\mu$ e $m(\phi)$ é uma massa dependente do campo espinorial dada por alguma função arbitrária do campo escalar ϕ . Além disso, abandonamos a restrição de renormalizabilidade da teoria uma vez que pretendemos considerar no máximo correções de um *loop* (determinante fermiônico). Assim, as divergências surgirão apenas nos setores do campo de calibre e escalar. Além disso, estaremos interessados na geração de termos do tipo $f(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ que desempenham o papel de permeabilidades dielétrica na teoria clássica de vórtice. Além do mais, a contribuição S_{scal} é uma ação livre do campo escalar e S_{Maxw} é a ação de Maxwell do campo eletromagnético. Nós também assumiremos que o escalar ϕ está variando lentamente no espaço-tempo, ou seja, $\partial_\mu \phi$ é considerado pequeno em comparação com a escala de energia. Assim, as contribuições derivadas dependentes no setor escalar são desprezíveis.

Para gerar um termo de Maxwell generalizado $f(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, deixe-nos começar com a função de dois pontos do campo de calibre. Nesse caso, o diagrama de Feynman da função de dois pontos é representado na figura 23.

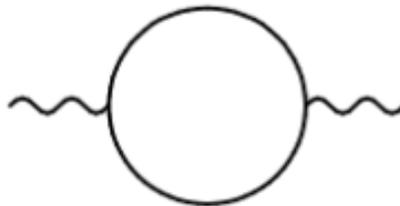


Figura 23 – Diagrama de Feynman de uma função de dois pontos.

Nesse caso, sua contribuição é dada por:

$$\Gamma_2 = -\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A_\mu(-p) \Pi^{\mu\nu}(p) A_\nu(p), \quad (4.6)$$

onde o sinal de menos é causado pelo fato de que a *loop* é fermiônico, $1/2$ é um coeficiente combinatório e o tensor de auto-energia é

$$\Pi^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m(\phi)} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m(\phi)}, \quad (4.7)$$

onde $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ e $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

Podemos realizar os cálculos fazendo uma analogia com a referência [198], com a única diferença de que a massa é uma função não-trivial dos campos escalares. Desta forma, o cálculo de $\Pi^{\mu\nu}$ é realizado. Procedendo como na referência [198], extraímos alguns multiplicadores comuns e simplificamos à expressão:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & 4i \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left[\int_0^1 dx [m^2(\phi) - p^2 x(1-x)]^{d/2-2} \times \right. \\ & \times [-2p^\mu p^\nu x(1-x) + \eta^{\mu\nu} p^2 x(1-x) + \eta^{\mu\nu} m^2(\phi)] - \\ & \left. - \eta^{\mu\nu} \int_0^1 dx [m^2(\phi) - p^2 x(1-x)]^{d/2-1} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

de modo que, se escolhermos $d = 4 - \varepsilon$, obtém-se $2 - \frac{d}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Agora, vamos nos concentrar na parte divergente, ou seja, em todos os lugares, exceto na função gama, colocamos $d = 4$. Após a rotação inversa de Wick (multiplicando por $-i$), descobrimos que a parte divergente é independente de ϕ , uma vez que os termos divergentes dependendo de $m^2(\phi)$ se cancelam:

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{8}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) [-p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^2] = \frac{1}{6\pi^2 \varepsilon} [-p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^2]. \quad (4.9)$$

Repetindo a argumentação de [198], vemos que a parte divergente da correção de um *loop* pode ser apresentada como $\frac{e^2}{6\pi^2 \varepsilon} \mathcal{L}_{Maxw}$ que é o resultado paradigmático da eletrodinâmica quântica e que pode ser claramente cancelado pela simples renormalização da função de onda.

Nos permita, agora, considerar a parte finita da equação (4.8) que é necessária para nossos propósitos. Para fazer isso, levamos em consideração apenas os termos que não desaparecem nem divergem em $\varepsilon \rightarrow 0$. Isso implica a seguinte contribuição para a ação efetiva:

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \int d^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left[\ln \frac{m(\phi)^2}{\mu^2} + c \right], \quad (4.10)$$

onde c é algum número independente de campo. Na verdade, c pode ser absorvido no reescalonamento de μ ou em uma renormalização finita do termo cinético.

O resultado líquido do nosso cálculo nos leva à

$$\Sigma = -\frac{a}{4} \ln \left[\frac{m(\phi)^2}{\mu^2} \right] F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

onde a é uma constante.

Portanto, agora podemos fazer várias suposições para $m(\phi)^2$ para obter as ações vetoriais escalares desejadas. O exemplo mais natural é $m(\phi) = m_0 + h\phi$, ou simplesmente $m(\phi) = h\phi$.

Uma outra possibilidade de obter novos termos do modelo vetor-escalar surge quando adotamos a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \bar{\psi} [i\partial\!\!\!/ - ef(\phi\phi^*)A\!\!\!/ - m(\phi^*\phi)] \psi + S_{\text{scal}}[\phi] + S_{\text{Maxw}}, \quad (4.12)$$

i. e., temos junto com a massa dependente do campo $m(|\phi|^2)$, o acoplamento dependente do campo $ef(\phi\phi^*)$ que pode está relacionado com a permeabilidade dielétrica. Neste caso, após o cancelamento da divergência de um *loop* com os contra-termos apropriados, temos a contribuição finita

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \int d^4x f(|\phi|^2) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ln \frac{m(|\phi|^2)}{\mu^2}. \quad (4.13)$$

Novamente, neste caso, absorvemos a constante finita na redefinição de μ .

É importante notar que pode-se assumir, sem perder generalidade, que nosso campo escalar é real, i. e., $\phi = \phi^*$. Nesse caso, por simplicidade, exemplos de casos simples que podemos escolher são $m(\phi) = h\phi$ e $f(\phi) = \lambda\phi$.

4.3.2 Vórtices com permeabilidade logarítmica do tipo Gausson

Considerando os resultados da eletrodinâmica quântica apresentados anteriormente, estudaremos as estruturas topológicas de vórtices que surgem no modelo generalizado descrito pela ação:

$$S = \int d^3x \left[-\frac{\rho}{4} \ln \left(\frac{m(\phi)^2}{\mu^2} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - \mathcal{V} \right], \quad (4.14)$$

onde ρ é um parâmetro ajustável adimensional. Notamos que esta ordem do modelo pode ser obtido com base no resultado do cálculo de um *loop* (4.11) sob uma redução da teoria quadridimensional para a tridimensional de maneira semelhante ao descrito na referência [199]. Para fazer isso, podemos “congelar” a coordenada espacial extra, digamos z , de modo que todos os campos não exibam nenhuma dependência de z , e impomos o calibre axial $A_3 = 0$. Além disso, a ação desta forma pode ser tratada como uma certa reminiscência do mecanismo de escalarização usado no contexto gravitacional [200] onde surgem novos termos iguais a invariantes topológicos gravitacionais multiplicados por algumas funções de um campo escalar.

Os modelos generalizados foram introduzidos pela primeira vez por Lee e Nam ao discutirem as soluções solitônicas de um modelo Abelian de Higgs [101]. Após o trabalho de Lee e Nam [101], outros estudos de modelos com dinâmica generalizada foram realizados [201, 202, 203, 204]. De modo geral, é interessante generalizar um modelo de um campo escalar complexo acoplado a um campo de calibre, a fim de gerar novas soluções clássicas. Normalmente, novos modelos com simetrias extendidas são construídos por meio de termos multiplicativos que, em geral, funções dos campos escalares.

Neste momento, sendo motivado pela geração perturbativa da teoria vetor-escalar, estudamos as estruturas topológicas para algumas formas de soluções de vórtices com uma função de permeabilidade dielétrica não-polinomial. Esta teoria envolverá um acoplamento não-linear de campos escalares com o campo de calibre, de modo que, podemos considerar várias formas de $m(|\phi|)^2$, e para cada forma deste parâmetro os vórtices topológicos podem admitir propriedades físicas diferentes.

Iniciamos nosso estudo das estruturas de vórtices, considerando a densidade Lagrangiana generalizada como segue:

$$\mathcal{L} = -\frac{\rho}{4} \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - \mathcal{V}(|\phi|), \quad (4.15)$$

onde lembramos que o parâmetro μ dentro do logaritmo é um parâmetro de normalização definido positivamente usado para ajustar a dimensão canônica do termo de permeabilidade magnética.

As equações de movimento dos campos são:

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\phi}{2|\phi|} \left[\frac{\rho m_{|\phi|}}{2m(|\phi|)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{V}_{|\phi|} \right] = 0 \quad (4.16)$$

e

$$J^\nu = \partial_\mu \left[\rho \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) F^{\mu\nu} \right], \quad (4.17)$$

onde definimos $m_{|\phi|} = dm/d|\phi|$ e $\mathcal{V}_{|\phi|} = \partial\mathcal{V}/\partial|\phi|$. Se assumimos que $\nu = 0$ na equação (4.17) obtemos a lei de Gauss do modelo. Dessa maneira, concluímos que os vórtices são eletricamente neutros.

A corrente conservada do modelo é descrita por:

$$J_\mu = ie(\bar{\phi} D_\mu \phi - \phi \overline{D_\mu \phi}). \quad (4.18)$$

Usando a simetria de translação do espaço-tempo, construímos o tensor energia-momentum, a saber,

$$T_{\mu\nu} = \rho \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) F_{\mu\lambda} F^{\lambda}_{\nu} + \overline{D_{\mu}\phi} D_{\nu}\phi + \overline{D_{\nu}\phi} D_{\mu}\phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.19)$$

Usando à expressão (4.3), também encontramos que o campo magnético do vórtice é

$$B = -F_{12} = -\frac{a'(r)}{er}, \quad (4.20)$$

portanto, observamos que o vórtice do modelo possui um fluxo magnético dado por

$$\Phi_B = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F^{12} r dr d\theta = -\frac{2\pi}{e} [a(\infty) - a(0)]. \quad (4.21)$$

Usando (4.4), concluímos que o fluxo magnético do vórtice generalizado é

$$\Phi_B = \frac{2\pi n}{e}, \quad (4.22)$$

i. e., o fluxo do modelo é quantizado.

Agora, nossos principais objetos de estudo serão as variáveis de campo, i. e., as funções radiais $g(r)$ e $a(r)$. Com isto em mente, usamos as equações (4.2) e (4.3) para reescrever a equação de movimento do modelo em termos das variáveis de campo. Desta forma, obtemos que as equações de movimento para os campos estáticos serão dadas por:

$$\frac{1}{r} [rg(r)]' = \frac{\rho m_g a'(r)^2}{2m(g)e^2 r^2} + \frac{a(r)^2 g(r)}{r^2} + \mathcal{V}_g, \quad (4.23)$$

e

$$r \left[\ln \left(\frac{m(g)}{\mu} \right) \right]' = \frac{ea(r)g(r)^2}{\rho}. \quad (4.24)$$

Estamos interessados no estudo de configurações de campo estático com energia finita. Para isto, voltamos a nossa atenção ao estudo da densidade de energia dos campos, a saber,

$$\mathcal{E} = T_{00} = \frac{\rho a'(r)^2}{e^2 r^2} \ln \left(\frac{m(g)}{\mu} \right) + g'(r)^2 + \frac{a(r)^2 g(r)^2}{r^2} + \mathcal{V}(g). \quad (4.25)$$

Buscando satisfazer o limite BPS, reorganizamos a expressão anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\rho}{2} \ln \left(\frac{m(g)^2}{\mu^2} \right) \left[\frac{a'(r)}{er} \pm \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{\rho \ln(m(g)^2/\mu^2)} \right]^2 + \left(g'(r) \mp \frac{a(r)g(r)}{r} \right)^2 + \mathcal{V} \\ & - \frac{e^2}{2} \frac{(\xi^2 - g(r)^2)^2}{\rho \ln(m(g)^2/\mu^2)} \mp \frac{1}{r} [a(r)(\xi^2 - g(r)^2)]'. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para obter uma teoria com propriedade BPS, assume-se

$$\mathcal{V} = \frac{e^2}{2} \frac{(\xi^2 - g(r)^2)^2}{\rho \ln(m(g)^2/\mu^2)}, \quad (4.27)$$

A escolha de potenciais logarítmicos semelhantes ao apresentado na eq. (4.27) aparece em várias áreas da física. Aqui, lembramos que podemos encontrar potenciais logarítmicos na teoria gravitacional de Newton quando consideramos um corpo com distribuição de massa atrativa em um espaço Euclidiano \mathbf{R}^3 [205]. O potencial da forma que aparece na equação (4.27) também é conhecido na literatura como potencial do tipo Gausson [206]. Este potencial desperta nossa atenção devido ao fato de está relacionado a soluções solitônicas em uma teoria tipo Schrödinger [207, 208, 209]. Neste contexto, o potencial tipo Gausson descreve partículas em um cenário da mecânica quântica não-linear, essas partículas respeitam a propriedade de homogeneidade da equação, ou seja, que o produto das soluções independentes em uma dimensão continua a ser a solução em duas dimensões. Em teoria de campo, nos últimos anos o estudo de potenciais do tipo Gausson foi sugerido por alguns autores [206]. No entanto, é interessante mencionar que os sólitons ou vórtices do tipo Gausson ainda são pouco estudados na literatura, pois as equações para os vórtices tipo Gausson geralmente não apresentam soluções analíticas.

Considerando o potencial (4.27), reescrevemos à expressão (4.26) como

$$E = 2\pi \int_0^\infty r \ln\left(\frac{m(g)}{\mu}\right) \left[\frac{a'(r)}{er} \pm \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{\rho \ln(m(g)^2/\mu^2)} \right]^2 dr + 2\pi \int_0^\infty r \left(g'(r) \mp \frac{a(r)g(r)}{r} \right)^2 dr + E_{\text{BPS}}, \quad (4.28)$$

onde E_{BPS} é a energia BPS é

$$E_{\text{BPS}} = \mp 2\pi \int_0^\infty [a(r)(\xi^2 - g(r)^2)]' dr = 2\pi |n| \xi^2. \quad (4.29)$$

Note que a energia é limitada por baixo pelo limite E_{BPS} , i. e., $E \geq E_{\text{BPS}}$.

Assim, no limite de saturação da energia, $E = E_{\text{BPS}}$, encontramos que os campos estáticos obedecem as equações de primeira ordem:

$$g'(r) = \pm \frac{a(r)g(r)}{r}, \quad (4.30)$$

e

$$\frac{a'(r)}{er} = \mp \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{2\rho \ln(m(g)/\mu)}. \quad (4.31)$$

No limite assintótico, ou seja, quando $r \rightarrow 0$, os campos assumem os seguintes comportamentos:

$$a(r \rightarrow 0) \approx n + \lambda r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow 0) \approx \beta r + \mathcal{O}(r^2), \quad (4.32)$$

onde $\beta = e^{n^2}$ uma constante definida pelo *winding number* e $\lambda = \rho/e$. Enquanto isso, quando $r \rightarrow \infty$, obtemos que:

$$a(r \rightarrow \infty) \approx c_0 + \frac{\mu/\ln(\xi/\mu)}{\sqrt{e^{2r}(\xi\mu)^{\frac{2r}{\ln(\xi/\mu)}}}} \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow \infty) \approx \xi^2 + \mathcal{O}(r), \quad (4.33)$$

onde c_0 pode ser tomado como zero, por conveniência. É necessário destacar que o comportamento logarítmico da permeabilidade dielétrica induz convergência mais rápida para zero, diferente dos vórtices de Abrikosov. Isso ocorre porque a função permeabilidade dielétrica é forte (ou encontra-se bastante localizada) próximo à origem do vórtice.

As equações acima são conhecidas como equações BPS do modelo. No limite BPS, a densidade de energia dos campos é reduzida a

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{2\rho a'(r)^2}{e^2 r^2} \ln\left(\frac{m(g)}{\mu}\right) + 2g'(r)^2. \quad (4.34)$$

4.3.2.1 O Caso $m(|\phi|) = h|\phi|$

O caso mais simples que podemos imaginar para estudar vórtices topológicos é assumir que a função $m(|\phi|) = h|\phi|$, com h uma constante a ser definida posteriormente. Para simplificar, estamos interessados no estudo de estruturas topológicas com vorticidade $n = 1$. Deste ponto em diante, observamos que, neste caso, as equações BPS do modelo são reduzidas para

$$g'(r) = \pm \frac{a(r)g(r)}{r}, \quad (4.35)$$

e

$$\frac{a'(r)}{er} = \mp \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{2\rho \ln\left(\frac{hg(r)}{\mu}\right)}. \quad (4.36)$$

A densidade de energia BPS é

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{2\rho a'(r)^2}{e^2 r^2} \ln\left(\frac{hg(r)}{\mu}\right) + 2g'(r)^2. \quad (4.37)$$

Desacoplando a equação que descrevem o campo escalar $g(r)$ do campos calibre $a(r)$, obtém-se que

$$g''(r) - \frac{g'(r)^2}{g(r)} + \frac{g'(r)}{r} + \frac{e^2(\xi^2 - g(r)^2)g(r)}{2\rho \ln\left(\frac{hg(r)}{\mu}\right)} = 0. \quad (4.38)$$

Considerando à equação (4.38) e adotando os limites topológicos para o campo $g(r)$, pode-se obter a solução numérica do campo $g(r)$.

O resultado numérico - A partir de agora, nos concentraremos na investigação numérica dos vórtices topológicos do modelo. Para atingir nosso objetivo, investigamos a solução numérica da equação (4.38). O resultado correspondente é mostrado na figura 24(a). Com a solução do campo escalar complexo representada na figura 24(a), podemos, considerando a expressão (4.35), investigar a solução para o campo de calibre numericamente. O resultado para $a(r)$ é mostrado na figura 24(b).

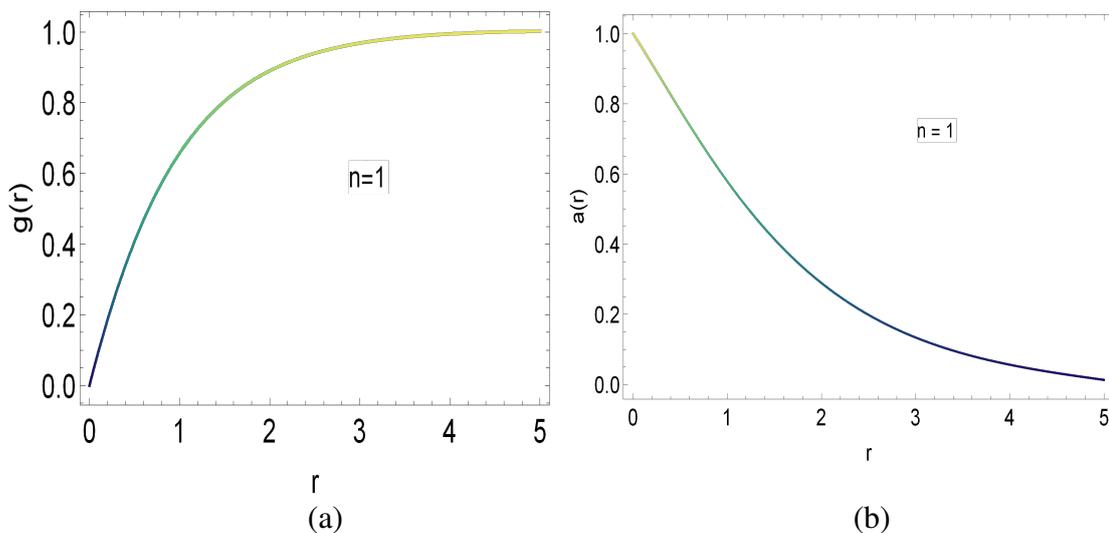


Figura 24 – (a) Comportamento do campo variável correspondente ao campo escalar complexo quando $e = \xi = 1$, $\rho = 10^3$, $h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$. (b) Solução do campo de calibre quando $e = \xi = 1$, $\rho = 10^3$, $h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$.

Usando a expressão (4.20), podemos encontrar a solução numérica do campo magnético responsável pelo fluxo do vórtice. O campo magnético é mostrado na figura 25. Enquanto isto, a energia BPS do vórtice é encontrada usando à equação (4.37). A solução numérica da densidade de energia BPS é demonstrada na figura 26.

Os resultados numéricos encontrados descrevem estruturas de vórtices topológicos da teoria. Observamos que essas estruturas apresentam um fluxo magnético mais intenso próximo

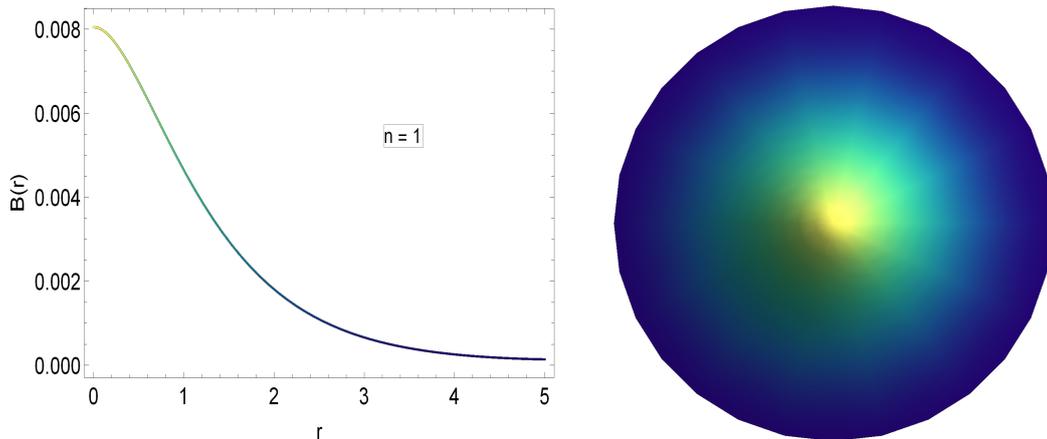


Figura 25 – Campo magnético associado à estrutura.

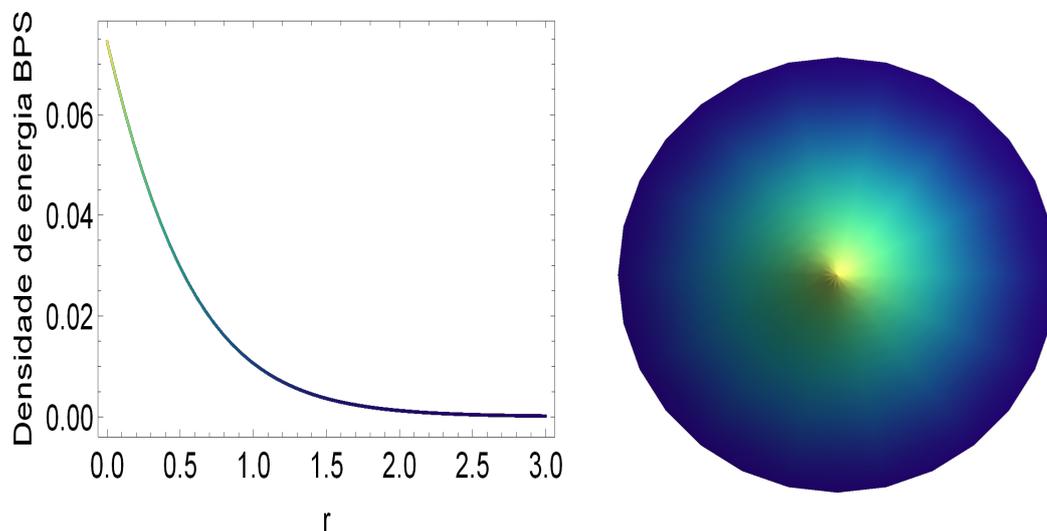


Figura 26 – Densidade de energia BPS usando a equação (4.37).

da origem $r = 0$. Esse fato acaba tornando o vórtice mais energético na origem do sistema. Observamos que o campo magnético produzido pelo vórtice tem comportamento semelhante à densidade de energia BPS, diferindo significativamente em sua magnitude. Observamos que os vórtices BPS, apesar de possuírem um “campo magnético fraco”, possuem uma energia bem elevada. Isso nos leva à hipótese de que isso ocorre devido à permeabilidade elétrica apresentar um comportamento logarítmico.

4.3.2.2 O caso: $m(|\phi|) = m_0 + h|\phi|$

Neste caso, vemos que as equações BPS do modelo são escritas da seguinte forma:

$$g'(r) = \pm \frac{a(r)g(r)}{r} \quad (4.39)$$

e

$$\frac{a'(r)}{er} = \mp \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{2\rho \ln\left(\frac{m_0 + hg(r)}{\mu}\right)}, \quad (4.40)$$

com m_0 e h sendo constantes a serem definidas.

Além disso, para $m(|\phi|) = m_0 + h|\phi|$ a densidade de energia BPS das estruturas de vórtice é

$$\mathcal{E}_{\text{BPS}} = \frac{2\rho a'(r)^2}{e^2 r^2} \ln\left(\frac{m_0 + hg(r)}{\mu}\right) + 2g'(r)^2. \quad (4.41)$$

Para descrever as soluções topológicas, investigamos as soluções das equações (4.39) e (4.40). Para isso, começamos desacoplando as equações BPS. Dessa maneira, obtemos que a equação que descreve o campo escalar complexo é

$$g''(r) - \frac{g'(r)^2}{g(r)} + \frac{g'(r)}{r} + \frac{e^2(\xi^2 - g(r)^2)g(r)}{2\rho \ln\left(\frac{m_0 + hg(r)}{\mu}\right)} = 0. \quad (4.42)$$

Novamente, o comportamento do campo $g(r)$ deve respeitar as condições topológicas descritas na expressão (4.4). Assim, adotando o comportamento assintótico (4.4), investigamos a solução numericamente da expressão (4.42).

O resultado numérico - Consideramos a equação (4.42) para realizar a análise numérica das suas soluções. Para fazer essa análise, usamos o método de interpolação numérica. Tendo isso em mente, voltamos nossa atenção para o estudo das estruturas de vórtices topológicos do modelo. Portanto, começamos adotando o contorno topológico (4.4), e assumimos o menor valor para a vorticidade, i. e., $n = 1$. Desta forma, obtemos a solução de vórtice apresentada na figura 27(a).

Uma vez que encontramos a solução do campo escalar complexo [por favor, consulte a figura 27(a)], podemos usar as equações BPS para encontrar a solução do campo de calibre que descreve o vórtice. Para encontrarmos a solução do campo $a(r)$, fazemos uma interpolação e lembramos que o campo de calibre deve satisfazer a condição exposta na equação (4.4). Com isso, obtém-se o comportamento do campo de calibre na figura 27(b).

Assumindo a equação (4.20), encontramos o comportamento do campo magnético do vórtice. Desse modo, usando a equação (4.20), encontramos o comportamento do campo magnético do vórtice exibido na figura 28. Enquanto isto, usando a expressão (4.41), encontramos a densidade de energia BPS associada ao vórtice, como demonstrado na figura 29.

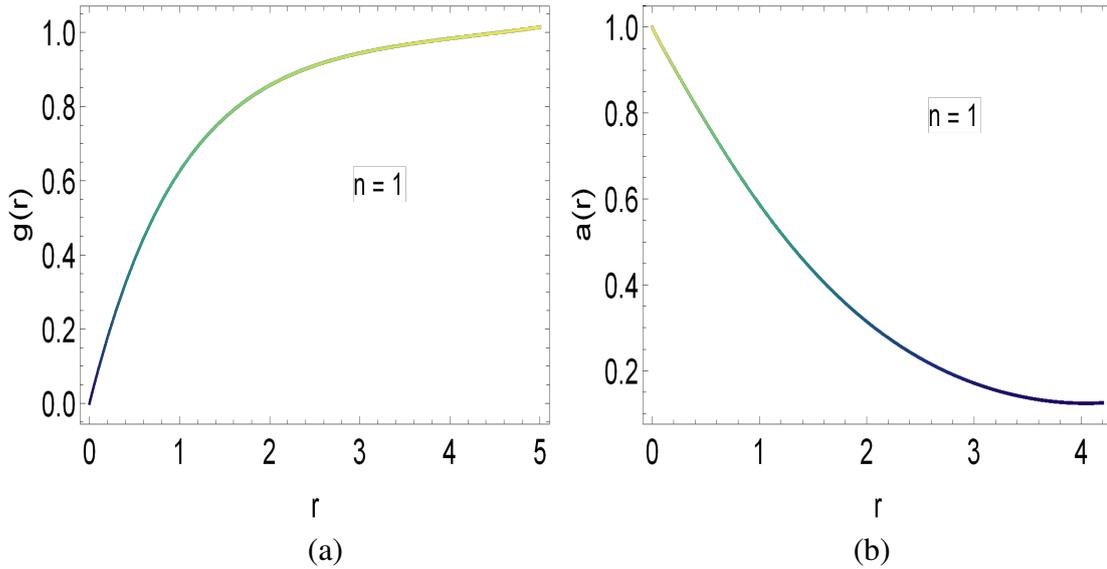


Figura 27 – (a) Solução da variável de campo correspondente ao campo escalar complexo quando $e = m_0 = \xi = 1$, $\rho = 10^3$, $h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$. (b) Solução do campo de calibre quando $e = m_0 = \xi = 1$, $\rho = 10^3$, $h = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-10}$.

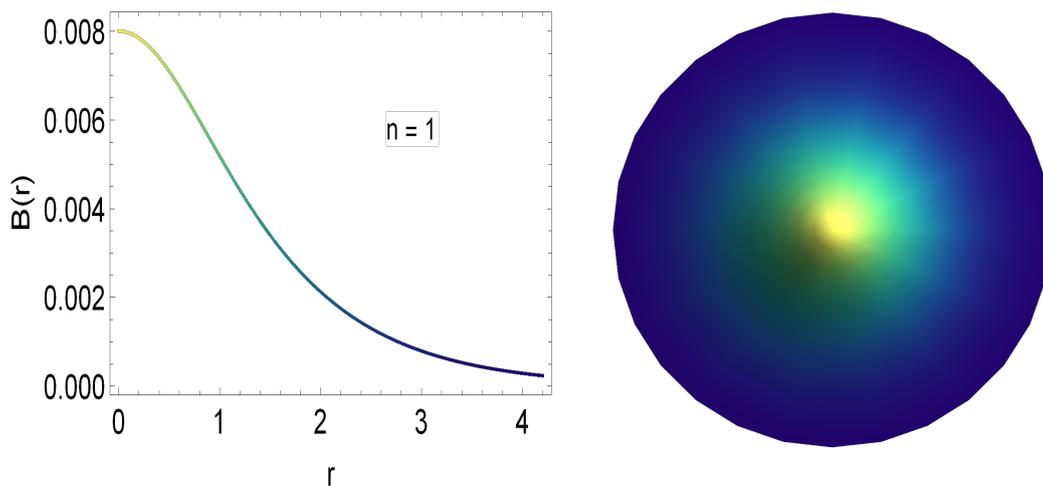


Figura 28 – Campo magnético do vórtice BPS

Analisando os resultados encontrados, nota-se que os vórtices ficam mais energéticos em torno de $r = 0$. Esse fato pode ser entendido porque a permeabilidade elétrica é do tipo logarítmico. Além disto, concluímos que à medida que o campo magnético se torna mais intenso nos vórtices, eles tornam-se mais energéticos mantendo um fluxo magnético constante. Observamos também que tanto a densidade de energia BPS quanto o campo magnético apresentam formas semelhantes nas proximidades da origem da estrutura e diferem apenas em sua magnitude em torno de $r \rightarrow 0$.

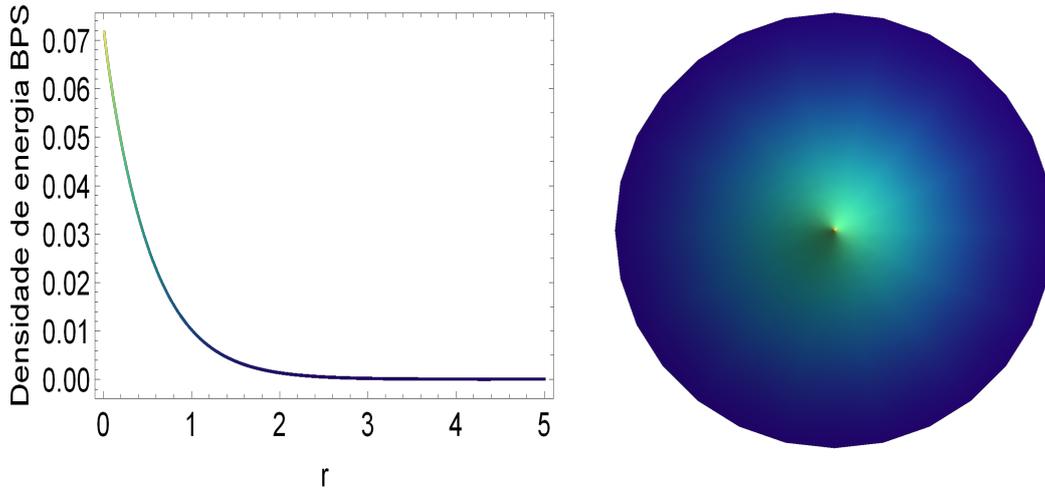


Figura 29 – Densidade de energia BPS da estrutura.

4.3.2.3 Permeabilidade elétrica do tipo $\rho f(|\phi|)^2 \ln \left[\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right]$

Investigaremos, agora, um caso mais geral que a eletrodinâmica quântica nos fornece, i. e., $\rho f(|\phi|)^2 \ln(m(|\phi|)^2/\mu^2)$. Na verdade, o termo de Maxwell generalizado é a contribuição efetiva apresentada na equação (4.13). Assim, buscando estudar as estruturas produzidas por essa teoria generalizada, iniciamos considerando a densidade Lagrangiana:

$$S = \int d^3x \left[-\frac{\rho f(|\phi|)^2}{4} \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - \mathcal{V} \right]. \quad (4.43)$$

Nesse caso, as equações de movimento que descrevem as estruturas de vórtices topológicos são:

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\phi}{2|\phi|} \left\{ \frac{\rho f(|\phi|)}{2} \left[\frac{f(|\phi|) m_{|\phi|}}{m(|\phi|)} + f_{|\phi|} \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) \right] F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{V}_{|\phi|} \right\} = 0 \quad (4.44)$$

e

$$J^\nu = \partial_\mu \left[\rho f(|\phi|)^2 \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) F^{\mu\nu} \right]. \quad (4.45)$$

onde definimos $f_{|\phi|} = df/d|\phi|$, $m_{|\phi|} = dm/d|\phi|$ e $\mathcal{V}_{|\phi|} = \partial \mathcal{V} / \partial |\phi|$.

A corrente conservada do modelo novamente assume a forma dada pela equação (4.18). Além disso, analisando novamente a lei de Gauss supõe-se que os vórtices devem ser eletricamente neutros.

Nesse cenário, o tensor energia-momentum é

$$T_{\mu\nu} = \rho f(|\phi|) \ln \left(\frac{m(|\phi|)^2}{\mu^2} \right) F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi + \overline{D_\nu \phi} D_\mu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4.46)$$

de modo que, ao assumir um campo de calibre (4.3) com as condições topológicas (4.4), conclui-se que o campo magnético do vórtice será

$$B = -(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = -\frac{a'(r)}{er}, \quad (4.47)$$

e portanto, o vórtice possuirá um fluxo magnético quantizado, i. e., $\Phi_B = 2\pi n/e$.

Claramente, estamos novamente interessados no estudo dos vórtices BPS. Para estudar estes vórtices, usamos novamente o tensor de energia-momentum. Neste caso, a densidade de energia é

$$\mathcal{E} = \frac{\rho f(g)^2 a'(r)^2}{e^2 r^2} \ln\left(\frac{m(g)}{\mu}\right) + g'(r)^2 + \frac{a(r)^2 g(r)^2}{r^2} + \mathcal{V}(g) \quad (4.48)$$

Rearranjando a densidade de energia do modelo, chega-se na equação

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\rho f(g)^2}{2} \ln\left(\frac{m(g)}{\mu^2}\right) \left[\frac{a'(r)}{er} \pm \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{\rho f(g)^2 \ln(m(g)^2/\mu^2)} \right]^2 + \left(g'(r) \mp \frac{a(r)g(r)}{r} \right)^2 + \mathcal{V} \\ & - \frac{e^2}{2} \frac{(\xi^2 - g(r)^2)^2}{\rho f(g)^2 \ln(m(g)^2/\mu^2)} \mp \frac{1}{r} [a(r)(\xi^2 - g(r)^2)]'. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Novamente, como sugerido anteriormente, o potencial escolhido aqui deve ser do tipo Gausson para satisfazer o limite do BPS. Portanto, assumimos

$$\mathcal{V} = \frac{e^2}{2} \frac{(\xi^2 - g(r)^2)^2}{\rho f(g)^2 \ln(m(g)^2/\mu^2)}, \quad (4.50)$$

para a teoria admitir propriedade BPS.

Para este potencial, a expressão da densidade de energia é significativamente simplificada. Nesse caso, no limite BPS, as equações de Bogomol'nyi são:

$$g'(r) = \pm \frac{a(r)g(r)}{r}, \quad (4.51)$$

e

$$\frac{a'(r)}{er} = \mp \frac{e(\xi^2 - g(r)^2)}{2\rho f(g)^2 \ln(m(g)/\mu)}. \quad (4.52)$$

Analisando o comportamento assintótico próximo a origem, i. e., $r \rightarrow 0$, obtemos:

$$g(r \rightarrow 0) \approx \lambda r^2 + \mathcal{O}(r^4) \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow 0) \approx n + \beta r^2 + \mathcal{O}(r^5), \quad (4.53)$$

onde $\lambda = e^n$ e $\beta = e/\rho$. Enquanto isto, em $r \rightarrow \infty$, concluímos que

$$g(r \rightarrow \infty) \approx \xi + \lambda r^{-3} + \mathcal{O}(r^{-5}) \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow \infty) \approx \frac{\mu f(\xi)^{-1} \ln(\xi/\mu)^{-1}}{e^{2r(\xi\mu)^{\frac{2r}{f(\xi)\ln(\xi/\mu)}}}}. \quad (4.54)$$

Consequentemente, a densidade de energia BPS do vórtice é

$$\mathcal{E}_{\text{BPS}} = \frac{2\rho f(g)^2 a'(r)^2}{e^2 r^2} \ln\left(\frac{m(g)}{\mu}\right) + 2g'(r)^2. \quad (4.55)$$

Com essas informações, a partir de agora, voltaremos a nossa atenção ao estudo numérico das estruturas topológicas descritas pelas equações BPS (4.51) e (4.52).

4.3.2.4 *O caso: $f(g) = g(r)$ e $m(g) = hg(r)$.*

Estudaremos as soluções das equações BPS (4.51) e (4.52). Para isto, usando o método de interpolação numérica, investigamos as soluções numéricas do campo $a(r)$ e $g(r)$. Para simplificar, consideramos o estudo dos casos $f(|\phi|)$ e $m(|\phi|)$ mais simples possíveis, i. e.,

$$f(g) = g(r) \quad \text{e} \quad m(g) = hg(r). \quad (4.56)$$

Assumindo essas funções e considerando as condições topológicas (4.4), encontramos a solução numérica do campo escalar exibida na figura 30(a). Considerando a solução para o campo variável $g(r)$ e usando a expressão (4.51) encontramos a solução numérica do campo de calibre. Esta solução é mostrada na figura 30(b).

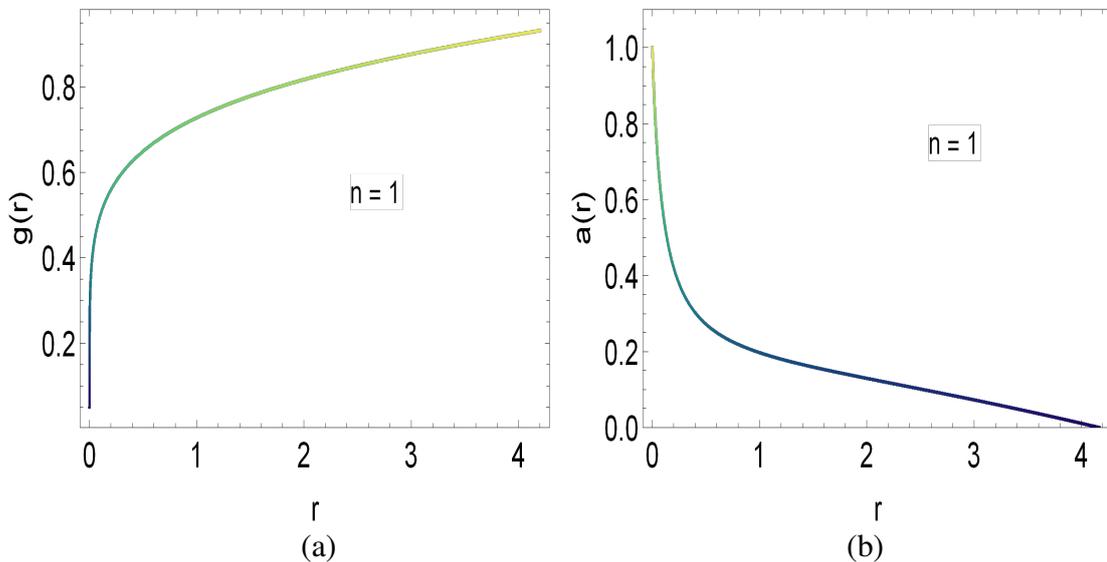


Figura 30 – (a) Solução de $g(r)$ correspondente ao campo escalar complexo quando $\rho = 10^5$, $e = \xi = 1$, $h = 1$ e $\mu = 10^{-2}$. (b) Campos variável de campo $a(r)$ correspondente ao campo de calibre quando $\rho = 10^5$, $e = \xi = 1$, $h = 1$ e $\mu = 10^{-2}$.

Semelhante aos casos estudados anteriormente, usamos a equação (4.47) para investigar o campo magnético do modelo. Com isso, mostramos o comportamento do campo magnético

na figura 31. Enquanto isto, a densidade de energia associada aos vórtices BPS é descrita na expressão (4.55) e exposta na figura 32.

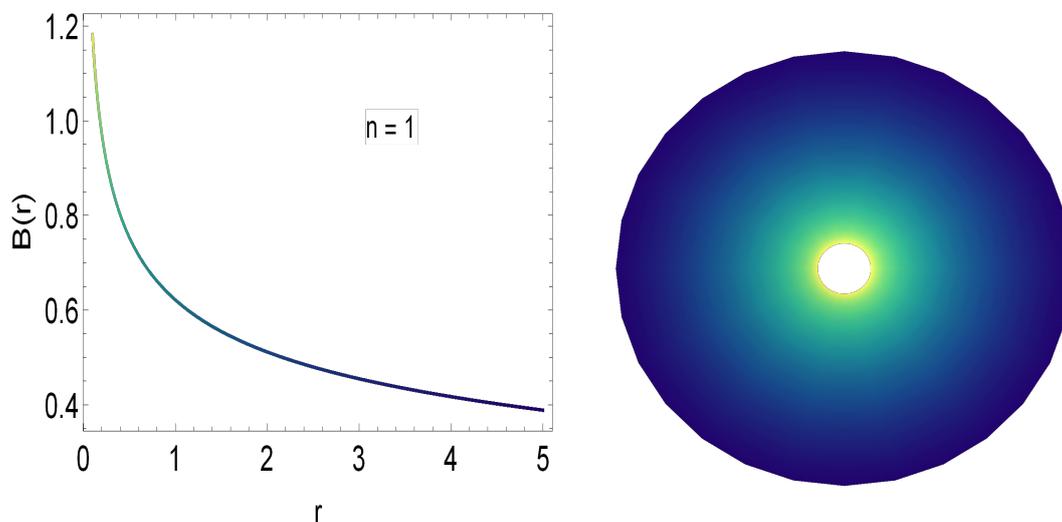


Figura 31 – Campo magnético do vórtice.

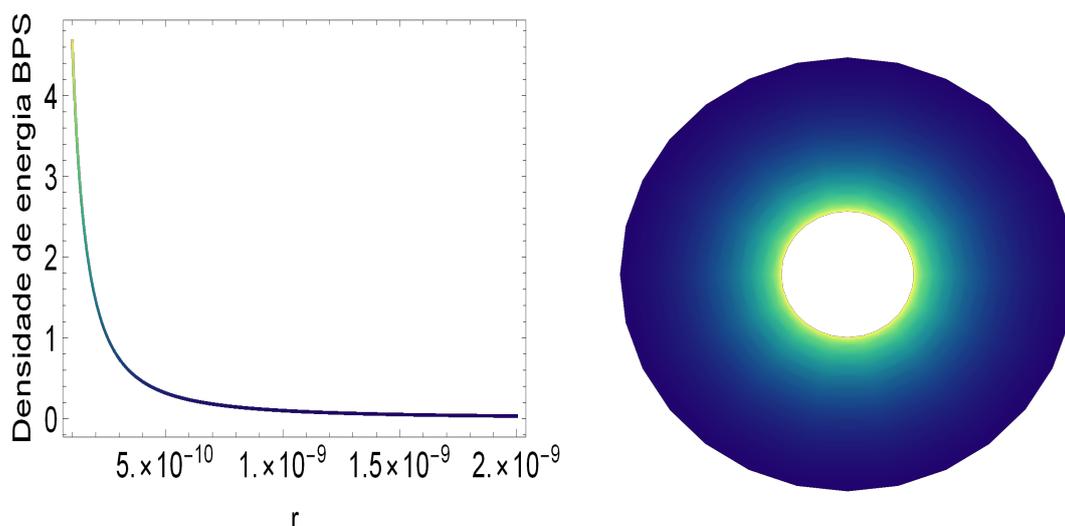


Figura 32 – Densidade de energia BPS.

Olhando para as estruturas de vórtices apresentadas acima, notamos que no caso mais simples, i. e., $f(|\phi|)^2 \propto |\phi|^2$, nos permite encontrar estruturas topológicas de vórtices quando a amplitude da função de permeabilidade elétrica é da ordem de $\rho = 10^5$. Essas estruturas possuem uma densidade de energia mais energética do que os vórtices estudados nos casos anteriores ($f \rightarrow 1$). Como estamos trabalhando com modelos caracterizados por permeabilidade logarítmica, encontramos vórtices topológicos com energia BPS extremamente localizada ao redor da origem. Notamos que quanto maior a ordem do polinômio $f(|\phi|)$, mais energético é o vórtice. Como nos casos anteriores, observamos que quando $r \rightarrow 0$, o campo magnético do

vórtice será maior. Dessa forma, maior a energia do vórtice naquela região.

4.3.3 Observações finais sobre o modelo

Nessa seção, usamos uma abordagem perturbativa em uma teoria escalar-vetor para obter algumas formas para as funções de permeabilidade elétrica. Em outras palavras, encontramos a forma que a função de generalização do modelo deve assumir, i. e., uma função do tipo logarítmico. Em seguida, estudamos uma teoria do tipo Maxwell generalizada por uma função escalar logarítmica. Iniciamos nossa investigação observando o surgimento de estruturas de vórtice no modelo. Estes vórtices possuem um campo magnético intenso no núcleo da estrutura e um fluxo magnético quantizado. Constatamos, também, que quando a função $f(|\phi|)$ assume formas polinomiais, os vórtices passam a ter um campo magnético mais intenso tornando a energia do vórtice extremamente localizada.

Notamos que os vórtices logarítmicos possuem uma propriedade interessante, i. e., os campos só alcançam o estado de vácuo em pontos distantes da origem. Essas características são mais visíveis quando se assume que as funções $f(|\phi|)$ e $m(|\phi|)$ são polinômios de ordem superior.

Claramente, como esperado, se $f(|\phi|)$ for assumido como uma função constante ($f = 0$), os vórtices topológicos do modelo não existirão mais. No entanto, é possível verificar soluções não topológicas de energia zero. Obviamente, esses sólitons seriam sólitons triviais do modelo.

Um fato extremamente intrigante dos modelos com generalizações logarítmicas estudados até agora, é o fato de que o campo magnético e a densidade de energia são extremamente intensos em $r \rightarrow 0$. Esse interessante resultado nos leva a acreditar que isso é uma consequência do perfil da função permeabilidade dielétrica.

4.4 Vórtices produzidos por uma teoria não-canônica

Nessa seção, investigamos a existência de estruturas topológicas em um modelo tipo *cuscuton*. Para isto, estudaremos as soluções de vórtice produzida por um campo escalar acoplado à um campo de calibre regido pelo termo de Maxwell. Para alcançar nosso propósito e estudar as estruturas de vórtices topológicos da teoria, reorganizamos a densidade de energia para obter, por conveniência, equações semelhantes a descrita na teoria usual, ou seja, o modelo de

Maxwell-Higgs. De fato, mesmo para este caso particular, observamos a existência de estruturas com energia localizada e fluxo magnético quantizado em um determinado setor. Também mostramos que quando a quebra espontânea de simetria não ocorre, o modelo tridimensional irá admitir somente soluções não-topológicas.

4.4.1 A descrição dos vórtices de Maxwell

Iniciamos construindo um modelo cujo o campo escalar real é não-canônico e do tipo *cuscuton*. O modelo *cuscuton* foi inicialmente proposto por Afshordi, Chung e Geshnizjani no artigo: *A causal field theory with an infinite speed of sound* [186]. Nesta teoria, a dinâmica *cuscuton* surge da descrição da estrutura simplética do Hamiltoniano degenerada no limite cosmologicamente homogêneo [186]. Neste caso, a teoria *cuscuton* torna-se homogênea quando a métrica é localmente Minkowski [186, 187, 188]. Uma característica interessante do campo *cuscuton* é que ele não contribui, em princípio, com a equação de movimento no limite estacionário. Assim, pode-se interpretá-lo, em alguns casos, como um campo auxiliar não-dinâmico que segue a dinâmica dos campos aos quais se acopla.

Tomando como motivação a teoria mencionada acima, investigamos as estruturas tipo vórtice que surgem de uma dinâmica do tipo *cuscuton*. Para investigar as estruturas de vórtices é necessário acoplar o campo não-canônico ao campo de calibre. Desta forma, propomos à ação:

$$S = \int d^3x \left[\mu^2 \sqrt{|D_\mu \phi \cdot D^\mu \phi|} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(|\phi|) \right], \quad (4.57)$$

onde o potencial deve ter a forma:

$$V = \frac{\lambda^2 \phi^4}{256\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]. \quad (4.58)$$

Este potencial é inspirado por cálculos perturbativos do modelo usual de campo escalar ϕ^4 , consulte às referências [176, 177]. Além disso, esse potencial também possui um perfil tipo Gauss, como já mencionado nas seções anteriores. Assim, em princípio, pode-se motivar seu uso considerando as aplicações já mencionadas na seção anterior (por favor, verifique a seção 4.3).

Também é importante destacar que as convenções consideradas na seção 4.2 permanecem válidas. Além disto, usaremos novamente as unidades naturais, i. e., $\hbar = c = 1$.

Nesse cenário, as equações de movimento do campo escalar e do campo de calibre são:

$$D_\mu \left(\frac{D^\mu \phi}{\sqrt{|D_\nu \phi D^\nu \phi|}} \right) + \frac{\phi}{|\phi|} V_{|\phi|} = 0, \quad (4.59)$$

e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (4.60)$$

Para essa dinâmica do campo não-canônica, o J^ν atual assume a forma

$$J_\nu = \frac{ie}{\sqrt{2|\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi|}} (\bar{\phi} D_\nu \phi - \phi \bar{D}_\nu \bar{\phi}). \quad (4.61)$$

Permita-nos, novamente, considerar a simetria translacional do espaço-tempo para construir o tensor energia-momentum. Isso nos leva a

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{D_\mu \bar{\phi} D_\nu \phi} + \frac{1}{2} \sqrt{D_\mu \phi \bar{D}_\nu \bar{\phi}} + F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.62)$$

Tomando a componente T_{00} do tensor energia-momentum e considerando novamente as equações (4.2) e (4.3), chega-se à densidade de energia, i. e.,

$$\mathcal{E} = \sqrt{g'(r)^2 + \frac{g(r)^2 a(r)^2}{r^2}} + \frac{a'(r)^2}{e^2 r^2} + \frac{\lambda^2 g(r)^4}{256\pi^2} \left[\ln \left(\frac{g(r)^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]. \quad (4.63)$$

Voltando nossa atenção ao estudo das configurações de campo de energia finita, reorganizamos a densidade de energia (4.63) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \sqrt{\left(g'(r) - \frac{g(r)a(r)}{r} \right)^2 + \frac{2g'(r)g(r)a(r)}{r}} + \left\{ \frac{a'(r)}{er} \mp \frac{\lambda g(r)^2}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{g(r)^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]^{1/2} \right\} \\ & \pm \frac{1}{4e\pi} \frac{\lambda a'(r)g(r)^2}{r} \left[\ln \left(\frac{g(r)^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Para estudar uma classe particular de estruturas localizadas do modelo, nos deixe assumir que os campos obedecem as restrições,

$$g'(r) = \frac{g(r)a(r)}{r} \quad (4.65)$$

e

$$\frac{a'(r)}{er} = \pm \frac{\lambda g(r)^2}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{g(r)^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]^{1/2}. \quad (4.66)$$

Analisando as expressões (4.65) e (4.66), nota-se que no limite $\lambda \rightarrow 0$, o campo de calibre assume um comportamento constante, i. e., $a(r) = a_0$. Enquanto isto, o campo escalar tem um comportado do tipo $f(r) \propto r^{a_0}$, o que nos dá uma configuração de campo não-topológica.

Além disso, analisando os comportamentos assintóticos da equação de movimento e das equações BPS, encontramos que em $r \rightarrow 0$, obtemos

$$a(r \rightarrow 0) \approx n + \mathcal{O}(r^{-1}) \quad \text{e} \quad g(r \rightarrow 0) \approx \beta r + \mathcal{O}(r^2). \quad (4.67)$$

Enquanto isto, no limite $r \rightarrow \infty$, concluímos que

$$a(r \rightarrow \infty) \approx \alpha r^{-2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{\lambda e \xi^2}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\xi^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]. \quad (4.68)$$

Nesse limite, o campo $g(r)$ assume a forma:

$$g(r \rightarrow \infty) \approx \gamma_0 e^{-r^2} \quad \text{com} \quad \gamma_0 = e^\alpha. \quad (4.69)$$

Se existe uma configuração de campo que respeita às equações (4.65) e (4.66), ela irá reduzir a densidade de energia para

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{2g'(r)g(r)a(r)}{r}} \pm \frac{1}{4e\pi} \frac{\lambda a'(r)g(r)^2}{r} \left[\ln \left(\frac{g(r)^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right]^{1/2}. \quad (4.70)$$

Aqui é importante mencionar que a densidade de energia acima não está escrita na forma de um termo de superfície. Porém, é possível fazer tal procedimento considerando as equações (4.65) e (4.66) e impondo restrições entre o campo *cuscuton* e o campo de calibre. Resumidamente, impondo condições de estruturas sem cisalhamento (i. e., todas as demais componentes do tensor energia-momentum se anulam no limite BPS) nos permitirá obter relações que permitem escrever o a densidade de energia como termo de superfície. Além disto, um procedimenso alternativo é implementar campos com dinâmina cuja sua a contribuição acopla-se ao campo *cuscuton*.

Resultados numéricos - Embora o caso escolhido não descreva uma configuração BPS, ele simplifica significativamente a descrição das configurações de campos que possuem energia localizada no modelo tipo *cuscuton* tridimensional. No entanto, para investigar as soluções das equações (4.65) e (4.66), é necessário um método numérico. Assim, novamente usaremos o método de interpolação numérica para estudar as configurações de campo expressas pelas equações (4.65) e (4.66). As soluções numéricas para as variáveis de campo $g(r)$ e $a(r)$ são ilustradas nas figuras 33(a) e 33(b), respectivamente.

A solução de vórtice mostrada na figura 33 possui uma energia localizada. Isso fica claro quando investigamos à densidade de energia (4.70) para o comportamento de $f(r)$ e $a(r)$. O resultado para a densidade de energia do modelo é mostrado na figura 34.

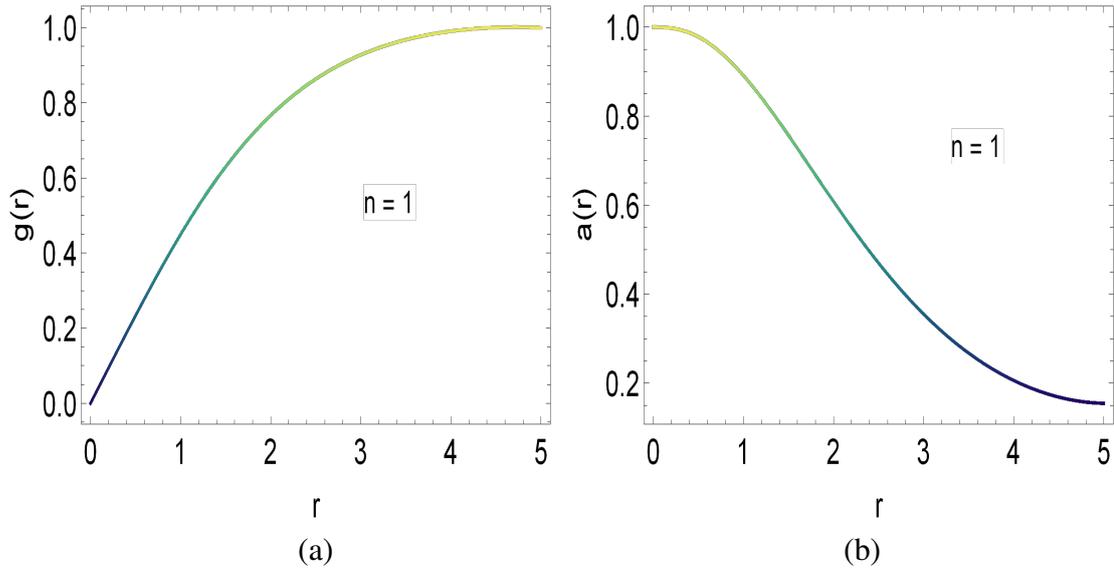


Figura 33 – (a) Comportamento do campo variável $g(r)$. (b) Solução do campo calibre $a(r)$ associado ao campo $g(r)$. Em ambas as soluções assumimos que $e = \lambda = M = 1$.

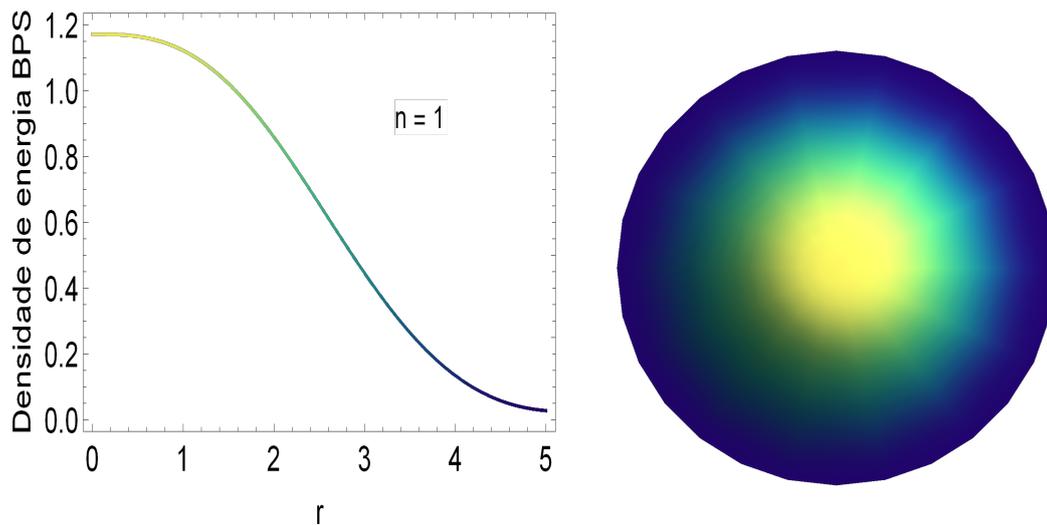


Figura 34 – Densidade de energia BPS associada a soluções do campo escalar e de calibre quando $e = \lambda = M = 1$.

O campo magnético que gera o fluxo do vórtice (4.21) é encontrado considerando as soluções expostas na figura 33. Por interpolação, o comportamento do campo magnético é demonstrado na figura 35.

4.4.2 Observações sobre o modelo

Considerando um cenário não-canônico, construímos um modelo tipo *cuscuton* tridimensional e estudamos a existência de estruturas topológicas com o termo de interação derivada da teoria perturbativa no modelo *cuscuton*. Investigamos à existência de soluções

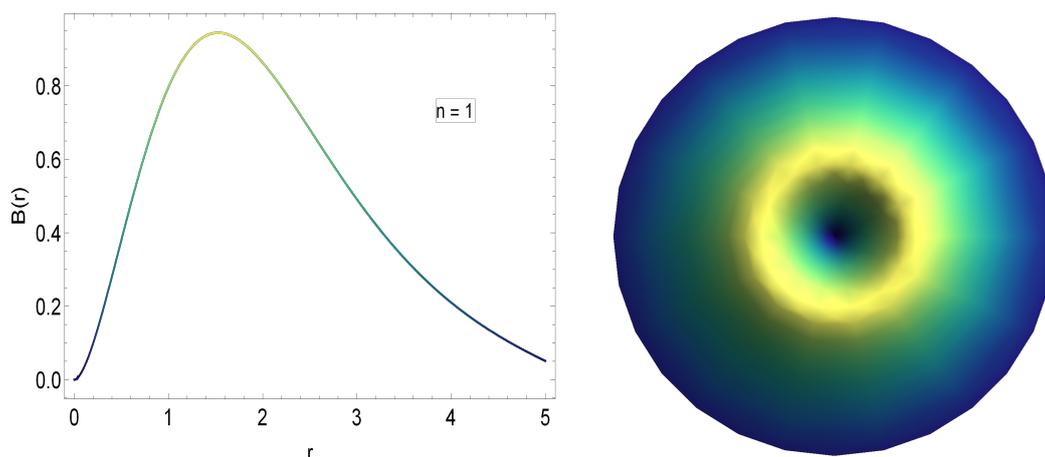


Figura 35 – Campo magnético associado do vórtice quando $e = \lambda = M = 1$.

vórtices e notamos que os vórtices analisados possuem um campo de calibre com um ponto crítico em torno da origem, i. e., quando $r \rightarrow 0$. Por outro lado, é notório que o campo de calibre dessas estruturas geram um campo magnético nulo próximo a $r = 0$, originando vórtices em forma de anel. Essas estruturas rapidamente atingem um valor máximo de intensidade em r_c (r_c é o valor de r que o campo escalar atinge o valor esperado do vácuo). Além disso, essas estruturas de vórtice investigadas até agora possuem um fluxo magnético quantizado dado por $2\pi n/e$. Além do mais, devido ao comportamento da variável de campo $f(r)$, as configurações de energia do vórtices localizados têm o perfil tipo uma função $\text{sech}(r)^2$. Vale ressaltar que apesar da característica localizada dessas estruturas, elas possuem uma intensa energia ao redor de $r = 0$.

Para fechar a discussão de soluções exatas, observa-se que se o parâmetro $\lambda \rightarrow 0$, o caso em tridimensional não terá estruturas topológicas. Neste caso particular, o modelo aceitará apenas as chamadas soluções não-topológicas.

5 ESTRUTURAS TOPOLÓGICAS TRIDIMENSIONAIS PRODUZIDAS NO MODELO SIGMA-O(3)

Neste capítulo, estudaremos as estruturas de vórtices que surgem no modelo sigma-O(3) não-mínimo. Particularmente, iremos considerar as teorias de multi-campos para descrever nossas estruturas. Primeiro, estudamos as estruturas que emergem no setor topológico do campo sigma considerando uma teoria canônica. Posteriormente, no segundo caso, consideramos contribuições de campos não-canônicos.

5.1 Uma breve motivação

Além das aplicações já mencionadas nos capítulos anteriores, nota-se que a física das estruturas planares descreve propriedades interessantes [210], e. g., fracionamento de carga [211, 212] e estatística fracionária [213]. Além disso, ao analisar os sistemas planares (tridimensionais), várias características interessantes surgem devido à correspondência entre as partículas e seus duais. Uma dessas correspondências é a dualidade partícula-vórtice [214, 215, 216]. No mundo planar, os vórtices constituem uma importante classe de estruturas. A importância dessas estruturas deve-se às suas aplicações relevantes, como podemos verificar nas referências [176, 177, 217, 218]. Além disto, uma aplicação notavelmente interessante, e já supracitada, aparece na física da matéria condensada, onde essas estruturas aparecem na descrição de fenômenos de supercondutividade [88, 219, 220].

Em geral, como já mencionado, pode-se entender os vórtices como estruturas que surgem no espaço-tempo tridimensional, i. e., $(2 + 1)D$ [96, 221, 222, 223, 224]. Em teoria de campos, os pioneiros no estudo de estruturas de vórtices foram Nielsen e Olesen [44]. No artigo seminal *Vortex-line models in dual strings*, os autores mostram as soluções de vórtices de uma ação construída com um campo escalar complexo minimamente acoplado a um campo de gauge com simetria $U(1)$ [44]. Após a proposta de Nielsen e Olesen, vários artigos surgiram discutindo essas estruturas [92, 169, 225, 226, 227].

Somente em 1991, Stern [228] propôs pela primeira vez o estudo de uma teoria não minimamente acoplada ao campo de calibre ¹. Usando um espaço-tempo tridimensional, Stern procura descrever partículas pontuais sem grau de liberdade de rotação que carregam um momento magnético apropriado. O trabalho de Stern motivou vários pesquisadores que

¹ Entretanto, o acoplamento não-mínimo surge pela primeira vez em no início da década de 90 no estudo sobre a influência do momento de dipolo magnético do elétron em átomos pesados. Para mais detalhes veja à referência [229].

posteriormente usaram novos modelos não-mínimos, e. g., os vórtices não-minimamente acoplados ao campo de calibre [217, 230, 231, 232, 233]. Para ser específico, na referência [234], os autores investigam soluções de vórtice BPS para uma interação específica usando um modelo sigma-O(3) não minimamente acoplado a um campo de Maxwell-Chern-Simons. Além disso, as propriedades BPS dos vórtices do modelo sigma também foram estudadas usando um acoplamento não-mínimo e uma abordagem multi-campo [217]. Motivado por essas aplicações, surge um questionamento natural: como as estruturas de vórtices são modificadas em uma teoria não-mínima constituída por multi-campos canônicos e não-canônicos? Ao longo deste capítulo, exploraremos a resposta para esta questão.

Neste capítulo, usaremos o modelo sigma-O(3) não-linear para construir nosso modelo não-mínimo. Resumidamente, o modelo sigma-O(3) não-linear é constituído por um tripleto de campos escalares reais [17], i. e., $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \{\phi_i(\mathbf{r}, t), i = 1, 2, 3\}$ com a restrição

$$\Phi \cdot \Phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \phi^i = 1. \quad (5.1)$$

Respeitando esta restrição, a dinâmica do campo sigma-O(3), i. e., do campo Φ é governado pelo Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi. \quad (5.2)$$

Assim, descreve-se o modelo sigma-O(3) como um vetor de campos em seu espaço interno, i. e., um espaço de campo tridimensional [17, 167, 235, 236, 237]. Em 1960, Gell-Mann e Lévy foram os primeiros a propor este modelo [238]. Na época, o objetivo era descrever a fórmula de Goldberger e Treiman para a taxa de decaimento do pión carregado usando uma interação forte proposta por Schwinger [239] e uma corrente fraca formulada por Polkinghorne [240]. Após o trabalho de Gell-Mann e Lévy, vários artigos consideraram o modelo sigma não-linear em suas análises. Por exemplo, usando o modelo sigma-O(3), o surgimento de fótons foi investigado na referência [241]. Além disso, a estabilidade dos sólitons e a violação de Lorentz foram estudadas, respectivamente, nas referências [242] e [243].

Não muito longe do modelo sigma não-linear, alguns autores propuseram os chamados modelos multi-campos [217]. Esses modelos desempenham um papel importante nas teorias inflacionárias [244]. Isso porque os resultados teóricos das teorias multi-campos concordam com as medidas fenomenológicas [244, 245, 246, 247, 248]. Assim, isso nos motiva a estudar as estruturas topológicas derivadas desse tipo de teoria. De fato, pode-se encontrar alguns artigos de pesquisa na literatura discutindo aspectos de estruturas em teorias multi-campos [249, 250].

Em particular, neste capítulo, além do campo sigma implementamos na teoria uma campo escalar real com uma dinâmica canônica usual. Posteriormente, no segundo momento, iremos construir uma nova teoria de multi-campo com contribuições tipo *cuscuton* [186]. Mostraremos, que em ambos os casos as configurações BPS são alcançadas.

5.2 Algumas convenções

Neste capítulo, para estudar as estruturas topológicas do modelo sigma-O(3) consideraremos que Φ refere-se a um tripleto de campo escalar ϕ_i com $i = 1, 2, 3$ e $\Phi \cdot \Phi = 1$ [17]. Enquanto isto, adota-se o campo de calibre Abelian A_μ , de modo que o tensor eletromagnético é descrito por $F_{\mu\nu}$, onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.3)$$

Também definimos a derivada covariante $D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ieA_\mu \hat{n}_3 \times \Phi$ [17]. Aqui \hat{n}_3 é o vetor $(0, 0, 1)$. Também assumiremos a assinatura métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$ e usaremos o sistema natural de unidades onde $\hbar = c = 1$.

Como sugerido nas referências [167, 236, 251], para investigar as soluções de vórtice do modelo sigma-O(3) é conveniente assumir o *ansatz* esfericamente simétrico, i. e.,

$$\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin f(r) \cos N\theta \\ \sin f(r) \sin N\theta \\ \cos f(r) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Enquanto isto, como proposto nas referências [167, 236, 251], para estudar os vórtices do modelo sigma-O(3), nos permita assumir o seguinte comportamento para o campo de calibre:

$$\mathbf{A} = -\frac{Na(r)}{er} \hat{e}_\theta, \quad (5.5)$$

onde N é o número de enrolamento (*winding number*) do vórtice.

Além disso, para o estudo dessas estruturas, assume-se as condições de contorno:

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad a(\infty) = -\eta_1. \quad (5.6)$$

Aqui é importante mencionar mencionamos escolhemos condições topológicas diferentes das propostas por Mukherjee [252], cuja $f(r \rightarrow \infty) = \pi/2$ juntamente com a quebra espontânea

de simetria nos leva a boas soluções BPS. Ao invés disso, usamos $f(r \rightarrow \infty) = \pi$, conforme as referências [167, 236, 251] e mostramos que é possível obter soluções solitônicas com propriedade BPS sem restrição para o winding number.

Partindo da definição do campo magnético, i. e., $B = F_{12}$ [85] e considerando o comportamento do campo de calibre (5.5) combinado com as condições topológicas (5.6), conclui-se que as estruturas dos vórtices que surgem na teoria emitem um fluxo magnético dado por

$$\Phi_{\text{fluxo}} = \frac{2\pi N \eta_1}{e}. \quad (5.7)$$

Agora que conhecemos essas definições preliminares estamos aptos a estudar os vórtices do modelo sigma-O(3).

5.3 Vórtices no modelo sigma-O(3) não-mínimo

Iniciamos nosso estudo das estruturas de vórtices, considerando um modelo sigma-O(3) não-mínimo. Nesse caso, construímos uma espécie de modelo sigma-O(3) não-canônico, com um termo de Maxwell modificado por uma função dielétrica. Através do formalismo BPS é feita uma investigação sobre possíveis configurações de vórtices em setores topológicos do modelo sigma e do campo escalar real. Para um determinado *ansatz*, as soluções do setor topológico do campo escalar real são descritas por soluções tipo *kink*. Por outro lado, ao estudar os vórtices em setor não-mínimo do modelo sigma-O(3) puro, detecta-se o surgimento de soluções de ondas solitárias. Observamos que no estudo de modelos mistos, ou seja, o setor topológico do modelo sigma-O(3) acoplado ao setor topológico do campo escalar real, as soluções de vórtice assumem um perfil de função degrau.

5.3.1 Modelo sigma-O(3) não-mínimo generalizado

Vamos começar nossa investigação adotando um espaço-tempo plano de $(2+1)$ -D. Particularmente, motivamos esse estudo nas discussões de Casana et al. [253] onde notamos que os modelos generalizados podem, em princípio, dar origem a estruturas com um fluxo intenso de energia irradiada formando estruturas internas. Propomos esse estudo considerando o modelo sigma-O(3) acoplado de forma não-mínima ao campo de calibre. Além disso, também consideramos a existência de um campo escalar real em nossa teoria. Desse modo, escreve-se a

densidade Lagrangiana como segue:

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{F}(\Phi, \psi)}{2} \nabla_\mu \Phi \cdot \nabla^\mu \Phi - \frac{\mathcal{G}(\Phi, \psi)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \mathcal{V}(\phi_3, \psi), \quad (5.8)$$

onde $\mathcal{V}(\phi_3, \psi)$ é o termo de potencial (ou interação). Φ é um tripleto de campos escalares que respeita o vínculo $\Phi \cdot \Phi = 1$ e ψ é um campo escalar real. Além disso, $\mathcal{F}(\Phi, \psi)$ é uma função arbitrária usada para modificar a contribuição do termo cinético do setor sigma e função $\mathcal{G}(\Phi, \psi)$ é a chamada função de permeabilidade dielétrica. Para mais detalhes sobre a função permeabilidade dielétrica verifique o capítulo anterior.

Diferindo do caso usual proposto por Casana *et al.* [253], definimos a derivada covariante não-mínima como segue:

$$\nabla_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \left(eA_\mu + \frac{g}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda} \right) \hat{n}_3 \times \Phi. \quad (5.9)$$

Nesse caso, a contribuição do momento magnético anômalo é descrita pelo termo $\frac{g}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda} \cdot (\hat{n}_3 \times \Phi)$. A contribuição desse termo nos leva a uma teoria que o campo de calibre e o campo de matéria estão acoplados de forma não-mínima. Pode-se encontrar o acoplamento não-mínimo aplicado em investigações das propriedades de sólitons BPS, e. g., consulte as referências [231, 232].

$$\partial_\nu [g \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{F}(\Phi, \psi) \hat{n}_3 \cdot (\Phi \times \nabla^\mu \Phi) - \mathcal{G}(\Phi, \psi) F^{\nu\lambda}] = j^\nu. \quad (5.10)$$

Note que na ausência da generalização, recuperamos a equação de movimento do campo de calibre (desconsiderando a contribuição de Chern-Simons) apresentado na referência [234].

Enquanto isto, a corrente do campo sigma é

$$j^\nu = e \hat{n}_3 \cdot (\Phi \times \nabla^\nu \Phi), \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{J}^\nu = -j^\nu \cdot \hat{n}_3$. Nesse caso, pode-se assumir novamente, como no capítulo anterior, $A_0 = 0$. Essa imposição nos leva a estruturas puramente magnéticas com o fluxo magnético descrito pela equação (5.7).

De modo semelhante, a equação de movimento do campo Φ é

$$\mathcal{F}(\Phi, \psi) \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = \frac{\mathcal{F}_\Phi}{2} \nabla_\mu \Phi \cdot \nabla^\mu \Phi - \frac{\mathcal{G}_\Phi}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{V}_\Phi, \quad (5.12)$$

onde $\mathcal{F}_\Phi = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi}$, $\mathcal{G}_\Phi = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Phi}$ e $\mathcal{V}_\Phi = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Phi}$.

Além disso, a equação de movimento para o campo escalar real é

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi = \frac{\mathcal{F}_\psi}{2} \nabla_\mu \Phi \cdot \nabla \Phi - \frac{G_\psi}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{V}_\psi. \quad (5.13)$$

Assim como nos capítulos anteriores, estamos interessados no estudo de configurações de campos solitônicos, i. e., configurações de campos com energia finita. Assim, é conveniente estudarmos nesse momento a energia associada a essas configurações. Para estudar a energia associada aos campos investigamos a componente o tensor energia-momentum que neste caso é

$$T^\mu{}_\nu = \mathcal{F}(\Phi, \psi) \nabla^\mu \Phi \cdot \nabla_\nu \Phi + \partial^\mu \psi \partial_\nu \psi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \quad (5.14)$$

Usando a definição da energia, i. e.,

$$E = \int T^0{}_0 d^2x, \quad (5.15)$$

obtem-se que a energia dos campos é

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left[\mathcal{F} \nabla_i \Phi \cdot \nabla^i \Phi + (\partial_i \psi)^2 + \mathcal{G} F_{ij} F^{ij} + 2\mathcal{V} \right], \quad (5.16)$$

onde os índices $(i, j) = 1, 2$.

A partir de agora, nos permita analisar a propriedade BPS da teoria. Para isto, é conveniente escrever o potencial em termos de funções arbitrárias. Essas funções são chamadas de superpotenciais [49]. Resumidamente, o uso do superpotencial é importante porque no limite de saturação da energia, ela é obtida em termos de um superpotencial. Devido a isto, estes superpotenciais têm sido aplicado em vários cenários para estudar o formalismo de primeira ordem de diversas teorias, consulte por exemplo as referências [163, 254]. Para implementar o formalismo de primeira ordem e obter as equações autoduais, vamos considerar dois superpotenciais do tipo $U(\Phi) = U(\phi_3)$ e $W = W(\psi)$. Assim, a energia do modelo é reformulada como segue:

$$E = \int d^2x \left\{ \left[\frac{\mathcal{F}}{2} \left(\nabla_i \Phi \mp \frac{1}{\mathcal{F}^{1/2}} \varepsilon_{ij} \Phi \times \nabla_j \Phi \right)^2 + \frac{\mathcal{G}}{2} \left(F_{ij} \pm \sqrt{\frac{2U}{\mathcal{G}}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_i \psi \mp \frac{W_\psi}{r} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. \pm \mathcal{F}^{1/2} \varepsilon_{ij} \Phi \cdot (\nabla_i \Phi \times \nabla_j \Phi) \mp F_{ij} \sqrt{2U\mathcal{G}} \pm \frac{W_\psi \psi'}{r} - \frac{W_\psi^2}{2r} - U + \mathcal{V} \right\}, \quad (5.17)$$

onde $W_\psi = \frac{\partial W}{\partial \psi}$.

Para o modelo admitir propriedade BPS, permita-nos assumir que

$$\mathcal{V}(\phi_3, \psi) = U + \frac{W_\psi^2}{2r}. \quad (5.18)$$

Analisando as correntes topológicas conservadas da teoria, nota-se, por inspeção, que a corrente conservada do modelo sigma é

$$\mathcal{J}_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\mathcal{F}^{1/2} \Phi \cdot \nabla^\nu \Phi \times \nabla^\lambda \Phi - F^{\nu\lambda} \sqrt{2U\mathcal{G}} \right]. \quad (5.19)$$

Enquanto isto, o tensor tipo corrente do setor topológico do campo ψ é

$$\mathcal{J}_\mu^{(\psi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \psi, \quad (5.20)$$

de modo que a corrente topológica total do modelo é

$$\mathcal{J}_{top} = \mathcal{J}_{top}^{(\sigma)} + \mathcal{J}_{top}^{(\psi)}. \quad (5.21)$$

Adotando as definições das correntes conservadas, pode-se reformular a energia (5.19) como segue:

$$E = \int d^2x \left\{ \left[\frac{\mathcal{F}}{2} \left(\nabla_i \Phi \mp \frac{1}{\mathcal{F}^{1/2}} \varepsilon_{ij} \Phi \times \nabla_j \Phi \right)^2 + \frac{\mathcal{G}}{2} \left(F_{ij} \pm \sqrt{\frac{2U}{\mathcal{G}}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_i \psi \mp \frac{W_\psi}{r} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. \pm \int d^2x \mathcal{E}_{BPS}, \right. \quad (5.22)$$

onde a densidade de energia BPS em termos da carga topológica² é

$$\mathcal{E}_{BPS} = \mathcal{Q}^{(\sigma)} + \mathcal{Q}^{(\psi)}, \quad (5.23)$$

Examinando a equação (5.22), nota-se que no limite de saturação da energia, obtemos as equações BPS do modelo sigma, a saber,

$$\mathcal{F}^{1/2} \nabla_i \Phi = \pm \varepsilon_{ij} \Phi \times \nabla_j \Phi; \quad (5.24)$$

$$F_{ij} = \mp \sqrt{\frac{2U}{\mathcal{G}}}; \quad (5.25)$$

$$\partial_i \psi = \pm \frac{W_\psi}{r}, \quad (5.26)$$

5.3.2 Possível esquema para gerar novas classes de estruturas no modelo sigma-O(3)

Para iniciar este tópico, motivaremos nossa discussão pela referência [161]. Nesse caso, os autores mostram que um modelo governado por dois campos escalares em uma teoria do tipo ϕ^4 gera estruturas deformáveis do tipo *kink*. Além disso, eles observaram que se a interação dos dois setores topológicos é semelhante, o *kink* sofre uma contração. Essa contração pode

² Por definição a carga topológica é $Q = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}^0 dx$. Para mais detalhes consultar a referência [17].

induzir o aparecimento de estruturas tipo *multi-kink* em um dos setores. Para prosseguir com a nossa investigação, supomos que os superpotenciais são

$$\mathcal{W} = \alpha\psi - \frac{1}{3}\alpha\psi^3 \quad \text{e} \quad U = \beta(\hat{n}_3 \cdot \Phi) - \frac{1}{3}\beta(\hat{n}_3 \cdot \Phi)^3, \quad (5.27)$$

com α e β sendo constantes.

Adotando os superpotenciais (5.27), obtém-se

$$\mathcal{V} = \frac{\alpha}{2r}(1 - \psi^2) + \beta \cos f(r) \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 f(r)\right). \quad (5.28)$$

Dessa maneira, as equações BPS do modelo sigma são:

$$f'(r) = \pm \frac{N}{r\sqrt{\mathcal{F}}} [a(r) - 1] \sin f(r), \quad (5.29)$$

$$a'(r) = \pm \frac{\sqrt{2}er\beta}{N} \left[\cos f(r) - \frac{1}{3} \cos^3 f(r) \right], \quad (5.30)$$

$$\psi'(r) = \pm \frac{\alpha}{r} (1 - \psi^2). \quad (5.31)$$

Analisaremos seus comportamentos assintóticos para os casos particulares que serão estudados a seguir. Fazemos isso, porque, a priori, não conhecemos a forma da função \mathcal{F} .

Para simplificar os cálculos, restringimos nosso estudo ao caso $\mathcal{G} = U^{-1}$. Neste caso, a permeabilidade dielétrica do ambiente se comporta de acordo com o perfil de U^{-1} , conforme discutido na referência [84]. Este tipo de escolha nos leva a uma certa classe de sólitons topológicos, i. e., os sólitons incompreensíveis [255]. Além disto, ao escolher a condição $\mathcal{G} = U^{-1}$ a dependência de \mathcal{G} nas equações BPS (veja nossas equações BPS) deixa de existir.

Para obter equações BPS independentes das constantes β e e , pode-se assumir, sem perder a generalidade, $\beta = 1/\sqrt{2}e$. Essa consideração nos leva as seguintes equações BPS, a saber,

$$f'(r) = \pm \frac{1}{r\sqrt{\mathcal{F}}} [a(r) - 1] \sin f(r), \quad (5.32)$$

$$a'(r) = \pm r \left[\cos f(r) - \frac{1}{3} \cos^3 f(r) \right], \quad (5.33)$$

$$\psi'(r) = \pm \frac{\alpha}{r} (1 - \psi^2). \quad (5.34)$$

Na verdade, essa escolha da constante β é para evitar o carregamento de termos adicionais que não influenciarão o perfil da estrutura topológica. Além disso, por conveniência, iremos assumir o *winding number* do vórtice sendo $N = 1$.

Investigando à equação (5.34), observa-se que a solução de $\psi(r)$ é

$$\psi(r) = \pm \frac{r^{2\alpha} - r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha} + r_0^{2\alpha}}, \quad (5.35)$$

onde r_0 é uma constante de integração. Por conveniência, deixe-nos assumir $r_0 = 1$. A escolha de $r_0 = 1$ nos permite escrever o campo $\psi(r)$ como

$$\psi(r) = \pm \tanh(\ln(r^\alpha)). \quad (5.36)$$

Portanto, as soluções topológicas do campo $\psi(r)$ são as chamadas soluções tipo *kink* (sinal positivo) e tipo *antikink* (sinal negativo). O parâmetro α será responsável por contrair essas estruturas. As soluções topológicas de $\psi(r)$ são mostradas na figura 36. Com o resultado exposto na figura 36, fica claro que as soluções topológicas que satisfazem as condições de contornos topológicos são

$$\psi(-\infty) = -1 \quad \text{e} \quad \psi(\infty) = 1 \quad (5.37)$$

são as soluções tipo *kink* descritas por

$$\psi(r) = \tanh(\ln(r^\alpha)). \quad (5.38)$$

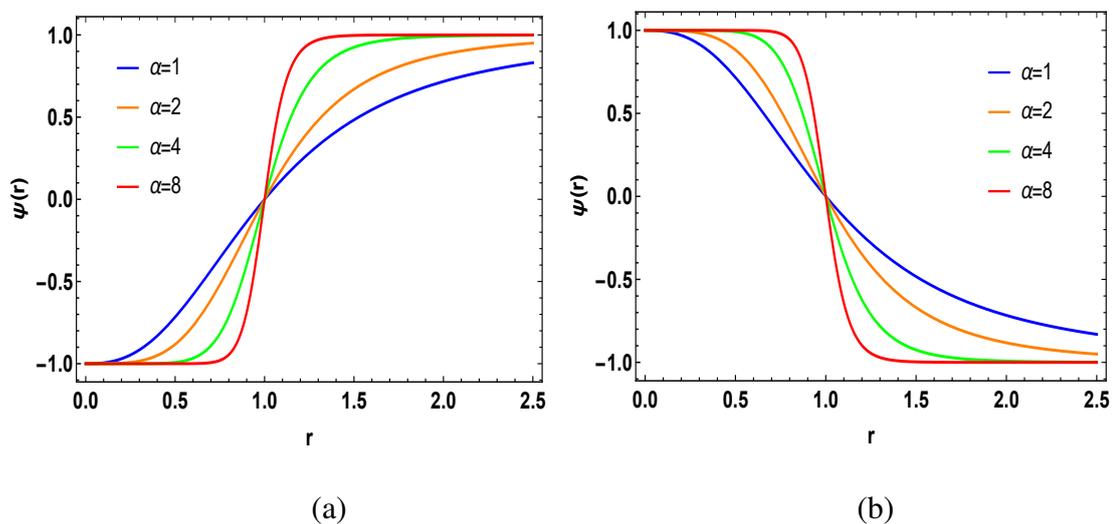


Figura 36 – (a) Soluções tipo *kink* do campo $\psi(r)$ para vários valores de α . (b) Soluções tipo *antikink* do campo $\psi(r)$ para vários valores de α .

Para investigar o surgimento de uma nova classe de soluções topológicas no modelo O(3)-sigma, devemos definir um perfil para a função que generaliza o termo não-canônico do modelo, i. e., a função $\mathcal{F}(\phi_3, \psi)$.

5.3.2.1 O modelo canônico usual: $\mathcal{F} = 1$

Nesse caso, as equações BPS (5.32) e (5.33) são reduzidas para

$$f'(r) = \pm \frac{1}{r} [a(r) - 1] \sin f(r) \quad \text{e} \quad a'(r) = \mp r \cos f(r) \left[\frac{1}{3} \cos^2 f(r) - 1 \right]. \quad (5.39)$$

Analisando o comportamento assintótico próximo da origem ($r = 0$), obtemos

$$a(r \rightarrow 0) \approx \frac{1}{3} r^{-2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow 0) \approx r e^{r^2/6} + \mathcal{O}(r^4) \quad (5.40)$$

Enquanto isso, em $r \rightarrow \infty$, chegamos aos resultados

$$a(r \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{6} r^2 + \mathcal{O}(r^3) \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow \infty) \approx 2 \operatorname{arccot}(e^{-r^3/18}) \dots \quad (5.41)$$

Aqui é necessário usar uma abordagem numérica para examinar as soluções da equação (5.39). Vamos inspecionar a configuração de campo da expressão (5.39) usando a técnica de interpolação. Aplicando esta abordagem, encontramos as soluções mostradas na figura 37 para os vórtices no setor topológico do modelo sigma-O(3).

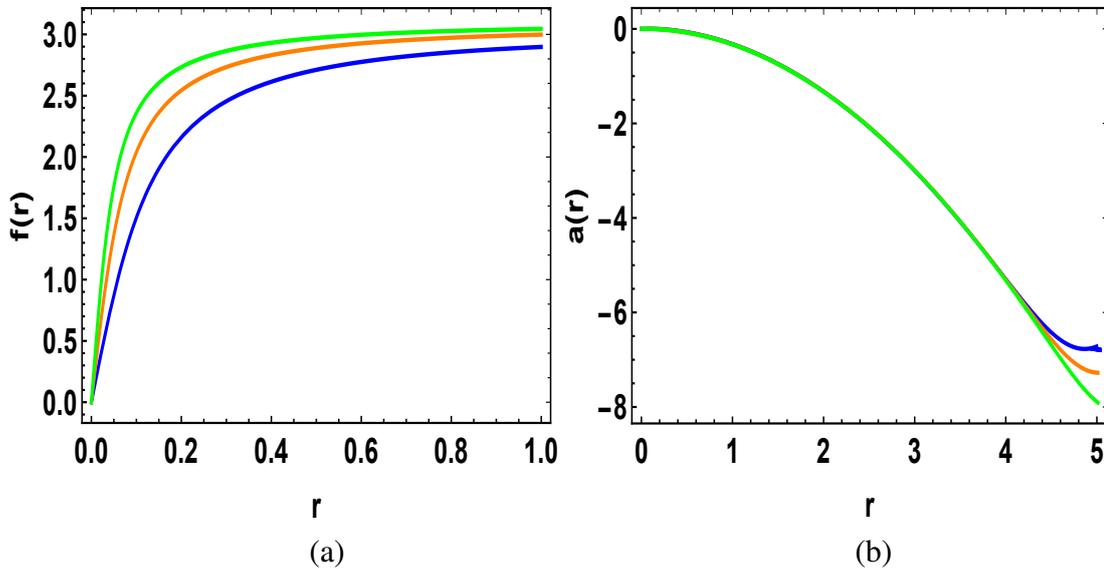


Figura 37 – (a) Soluções da variável de campo $f(r)$ para vórtices com $N = 1$. (b) Solução da variável de campo $a(r)$ associada ao campo de calibre quando $N = 1$.

Um comportamento atrativo emerge da investigação da densidade de energia e campo magnético de vórtices topológicos sem generalização (consulte as figuras 38 e 39). Neste caso, devido a escolha particular dos potenciais (5.27), os sólitons regidos pela dinâmica canônica possuem uma densidade de energia relacionada ao parâmetro α . De fato, o parâmetro α é responsável pela quebra de simetria no setor topológico do campo ψ . Para valores maiores de α ,

a densidade de energia tenderá a ficar ao redor do centro da torção descrita por $\psi(r)$ formando estruturas tipo anéis de energia. Enquanto isto, notamos que o parâmetro β é responsável pela quebra de simetria do modelo sigma-O(3). Esse parâmetro será o único responsável por alterar o campo magnético do vórtice.

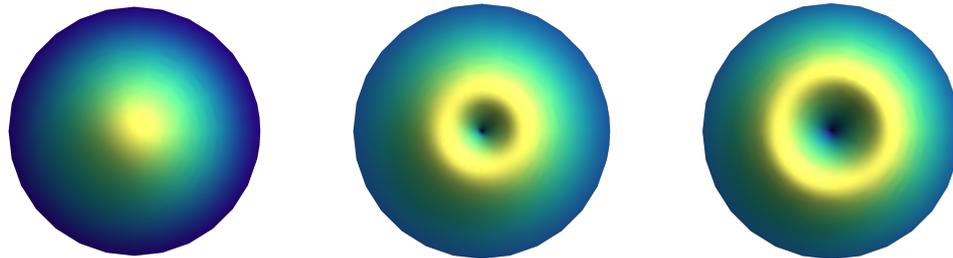
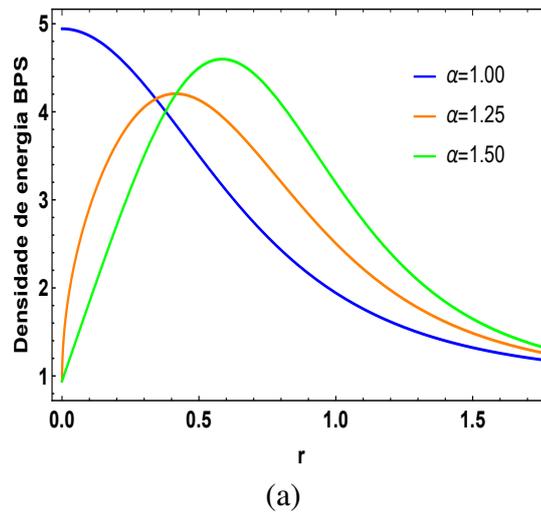
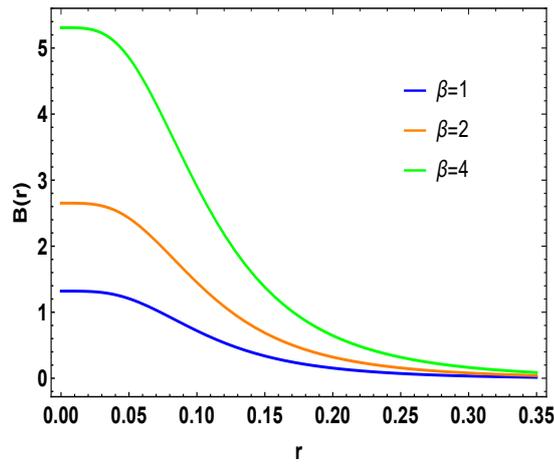


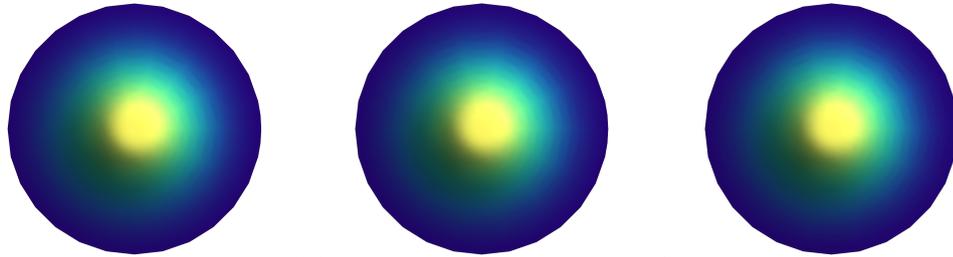
Figura 38 – (a) Densidade de energia para vários valores de α . (b) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,00$. (c) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,25$. (d) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,50$.

5.3.2.2 O modelo não-canônico puro: $\mathcal{F} = \phi_3^m$

Devido a forma genérica da função \mathcal{F} , observamos que existem três possibilidades distintas de generalização para o nosso modelo com dinâmica não-canônica. Dentre estes, temos o caso puro definido quando a generalização do termo cinético é apenas uma função de ϕ_3 ou $\mathcal{F} = h(\phi_3)$. O caso misto é definido por $\mathcal{F} = p(\psi)$ (neste caso, temos uma mistura do termo cinético do campo sigma com o campo ψ). O caso mais geral seria quando a generalização \mathcal{F} é simultaneamente uma função dos campos ϕ_3 e ψ . Dito isto, voltamos nossa atenção para o



(a)



(b)

(c)

(d)

Figura 39 – (a) Campo magnético para vários valores de β . (b) Campo magnético planar quando $\beta = 1$. (c) Campo magnético planar quando $\beta = 2$. (d) Campo magnético planar quando $\beta = 4$.

estudo do caso puro. Por conveniência, consideramos o caso mais simples possível, ou seja,

$$\mathcal{F}(\phi_3) = \phi_3^m \equiv [\cos f(r)]^m, \quad (5.42)$$

onde m é um inteiro positivo.

Neste caso, as equações BPS no setor sigma são

$$f'(r) = \pm \frac{1}{r} [a(r) - 1] \sin f(r) \cos^{-\frac{m}{2}} f(r), \quad (5.43)$$

$$a'(r) = \pm r \left[\cos f(r) - \frac{1}{3} \cos^3 f(r) \right]. \quad (5.44)$$

Investigando o comportamento assintótico próximo da origem ($r = 0$), concluímos que

$$a(r \rightarrow 0) \approx \frac{1}{3} r^2 + \mathcal{O}(r^3) \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow 0) \approx -r e^{r^2/6} + \mathcal{O}(r^4). \quad (5.45)$$

Enquanto isso, em $r \rightarrow \infty$, chegamos aos resultados

$$a(r \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{6} r^{-2} + \dots \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow \infty) \approx 2 \operatorname{arccot}[c_0 e^{\pm(1-\eta_1)}]. \quad (5.46)$$

para todo m par.

Conforme mencionado no caso anterior, i. e., no caso $\mathcal{F} = 1$, as soluções das equações (5.43) e (5.44) deve ser investigada numericamente. Para isto, deixe-nos adotar a abordagem de interpolação numérica e considerar as condições expostas nas equações (5.6). Este procedimento nos leva as soluções numéricas para o campo sigma. Expomos as soluções numéricas na figura 40.

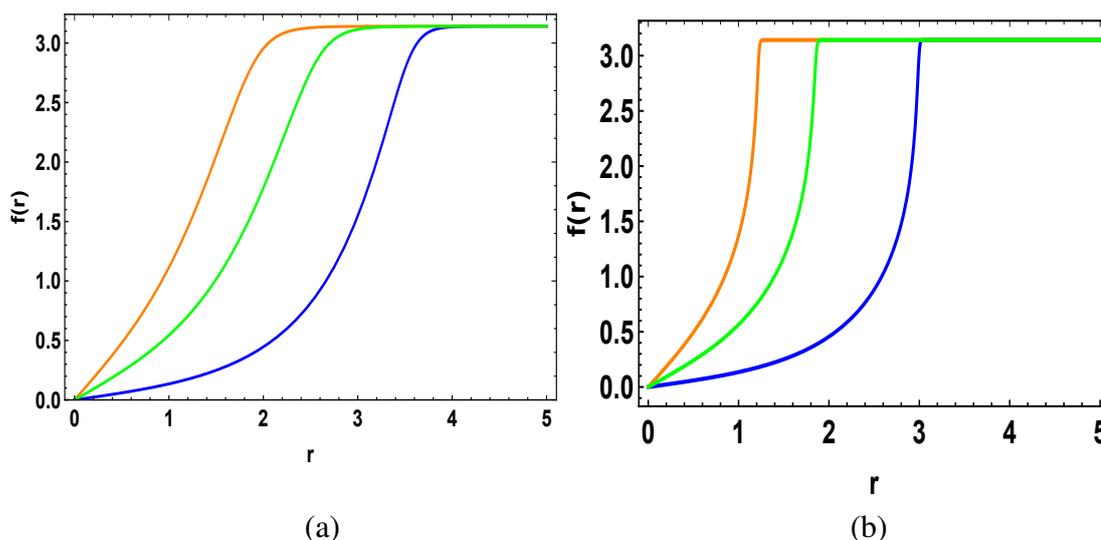


Figura 40 – (a) Solução numérica da variável de campo $f(r)$ com $N = m = 1$. (b) Solução numérica da variável de campo $f(r)$ com $N = 1$ e $m = 2$.

As soluções obtidas para as variáveis de campo no modelo puro parecem se comportar como configurações de campo com perfil do tipo compacto, pois é evidente o rápido crescimento do campo até atingir o valor esperado do vácuo. Consequentemente, após atingir o valor esperado do vácuo, as soluções do modelo permanecem estáveis. Ressaltamos que os perfis compactos a que nos referimos surgem no estudo de soluções clássicas de campo, são configurações que atingem rapidamente o estado de vácuo (numa região finita) e permanecem estáveis após atingir o vácuo teórico. Devido a essa característica, elas são chamados de estruturas tipo compactas. Estas de estruturas foram intensamente estudadas em outros trabalhos, consulte por exemplo as referências [178, 179]. Por outro lado, as soluções numéricas do campo de calibre são mostradas na figura 41. Os resultados apresentados na figura 40 e 41 mostram que a variação do parâmetro m da generalização $\mathcal{F} = [\cos f(r)]^m$, induz uma deformação da estrutura, levando-a de uma solução *kink* para uma configuração mais compacta (ou tipo compacton).

Por simulação (figura 40), vemos que para $m > 2$, as estruturas terão configurações de energia infinitas, portanto não servirão ao nosso propósito. Em outras palavras, para $m > 2$,

não obtemos sólitons topológicos. É interessante notar que as configurações das variáveis de campo $f(r)$ terão um perfil tipo *kink* quando $0 \leq m \leq 1$. Enquanto isto, para $1 < m \leq 2$ obtém-se configurações tipo compacton. Usando o método de interpolação numérica com passos de 10^{-4} , conclui-se para m fora do intervalo $[0, 2]$ que os sólitons topológicos não são detectados, i. e., não conseguimos encontrar configuração de campo de energia finita e carga topológica inteira para o contorno (5.6). Isso ocorre porque a equação desacoplada da variável de campo $f(r)$ tem uma contribuição do termo $\frac{m}{2} f'^2(r) \sin^{-1-\frac{m}{2}} f(r) \cos^{-\frac{m}{2}} f(r)$. Este termo para $m > 2$ domina sobre os outros termos, de modo que as configurações de energia localizadas não existem para o contorno (5.6). Entretanto, para $m \leq 2$ a contribuição do termo é pequena permitindo obter as soluções mostradas na figura 40 com a densidade de energia exibida na figura 42.

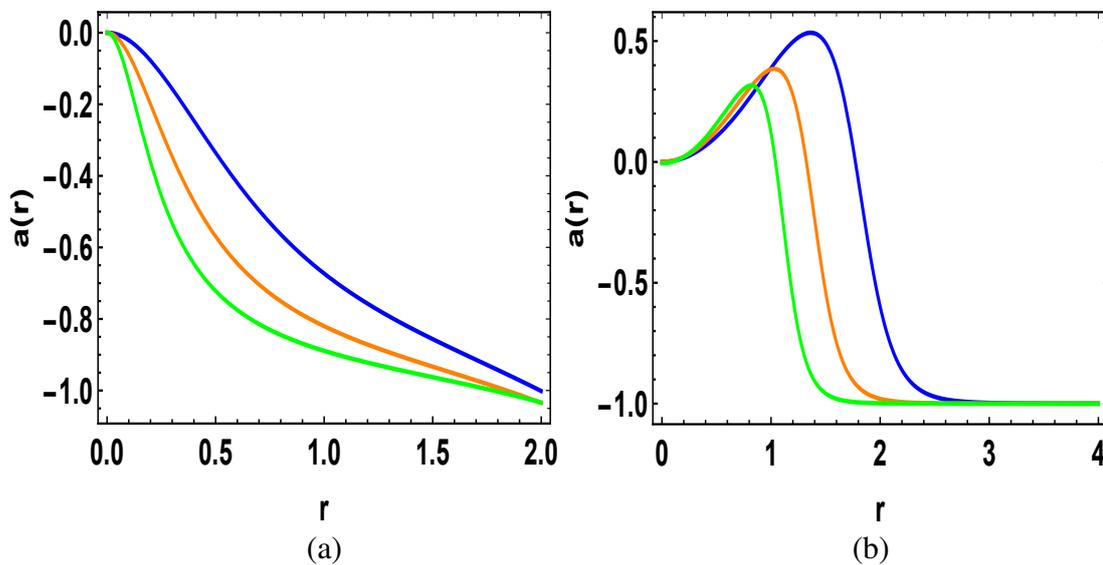


Figura 41 – (a) Solução numérica da variável de campo $a(r)$ com $N = 1$ e $m = 1$. (b) Solução numérica do campo variável $a(r)$ com $N = 1$ e $m = 2$.

Como esperado, apesar do perfil peculiar dos campos neste setor topológico, as estruturas são descritas por configurações de energia finita e têm uma forma semelhante a sólitons de uma teoria do tipo KdV [256]. Esta característica fica clara na figura 42.

Uma característica peculiar da estrutura do modelo puro aparece quando investigamos as configurações de energia para outros valores do parâmetro m . Numericamente observa-se que independente do parâmetro m [equação (5.42)], o perfil energético permanece o mesmo. É interessante mencionar que a energia também não muda sob a modificação do parâmetro α . Devido a essas peculiaridades, a solução numérica da densidade de energia BPS mostrada na figura 42 é a mesma em ambos os casos, i. e., para $m = 1$ e $m = 2$.

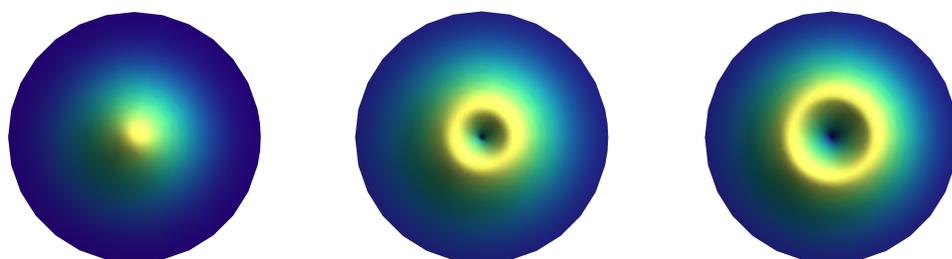
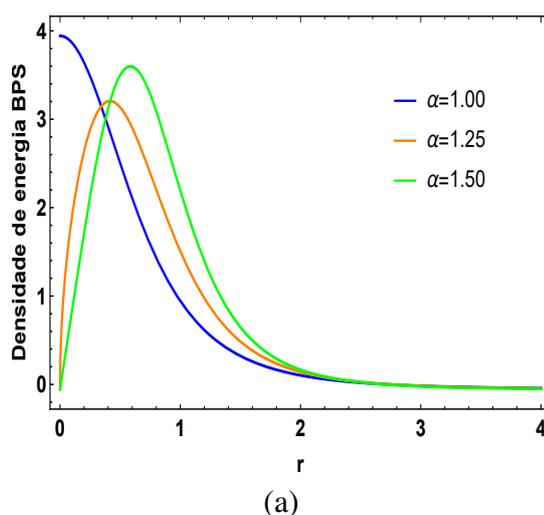


Figura 42 – (a) Densidade de energia para os casos $m = 1$ e $m = 2$ com vários valores do parâmetro α . (b) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,00$. (c) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,25$. (d) Densidade de energia planar quando $\alpha = 1,50$.

Para finalizar a análise dos vórtices topológicos deste modelo, permita-nos investigar o campo magnético produzido pelo vórtice não-mínimo. Usando a definição de campo magnético, i. e., $B = F_{12}$, obtém-se os resultados expostos nas figuras 43 e 44.

No modelo puro, a permeabilidade dielétrica do vórtice é $\mathcal{G} = U$. Neste caso, o vórtice tem energia localizada em torno (ou próximo) do núcleo do vórtice. Enquanto isto, os aspectos dos vórtices são modificados alterando o parâmetro m . Essa mudança desloca o ponto de energia máxima do núcleo do vórtice, criando um perfil de energia tipo anel. Parece-nos que esse comportamento é devido ao perfil do campo magnético que dessas estruturas. O campo magnético está diretamente relacionado com a nova classe de soluções de variáveis de campo, i. e., as soluções do tipo solitons-KdV que surgem quando m varia. Para finalizar esta breve discussão do modelo puro, vale ressaltar que no limite de $m \rightarrow 0$ e $\mathcal{G} \rightarrow 1$, recuperamos os resultados do modelo canônico discutidos anteriormente.

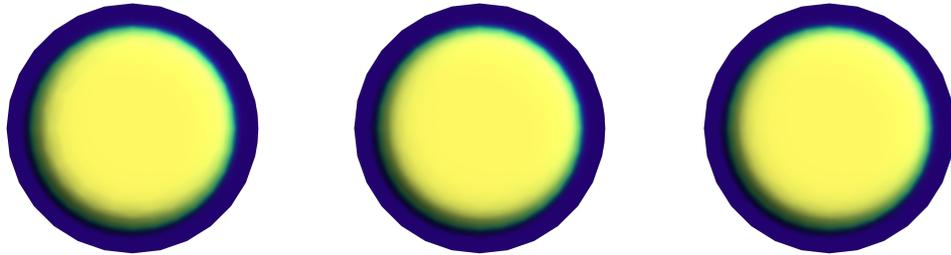
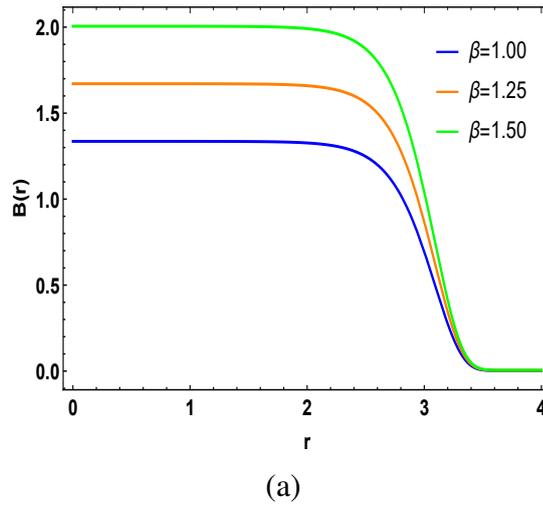


Figura 43 – (a) Campo magnético do vórtice para vários valores do parâmetro β com $N = 1$ e $m = 1$. (b) Campo magnético com $\beta = 1,00$. (c) Campo magnético com $\beta = 1,25$. (d) Campo magnético com $\beta = 1,50$.

5.3.2.3 O modelo misto não-canônico: $\mathcal{F} = \psi(r)$

Expomos anteriormente que a teoria ϕ^4 admite soluções de vórtices não-minimos nos casos não-generalizado e puros. Agora, vamos estudar o modelo generalizado por uma função ψ (ou seja, um modelo misto não-canônico). O caso mais simples é quando assumimos $\mathcal{F} = \psi(r)$. Nesta condição, as equações BPS são

$$f'(r) = \pm \frac{N}{r\sqrt{\tanh(\ln(r^\alpha))}} [a(r) - 1] \sin f(r) \quad (5.47)$$

e

$$a'(r) = \pm \frac{r}{N} \cos f(r) \left[1 - \frac{1}{3} \cos^2 f(r) \right]. \quad (5.48)$$

Analisando o comportamento assintótico desse caso, obtemos que

$$f(r \rightarrow 0) \approx 2\text{arccot}(c_0 r^{\pm N}) \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow \infty) \approx 2\text{arccot}[c_0 r^{\pm N(1-\eta_1)}], \quad (5.49)$$

cujas constantes c_0 e η_1 são parâmetros de normalização (ou ajuste). Enquanto isto, o campo de calibre $a(r)$ diverge nas proximidades da origem.

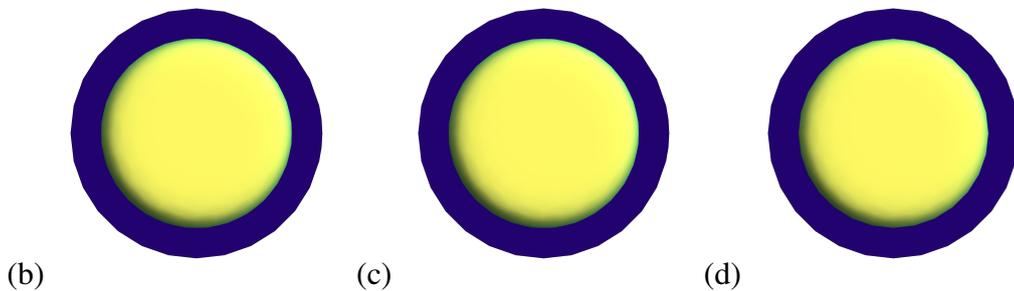
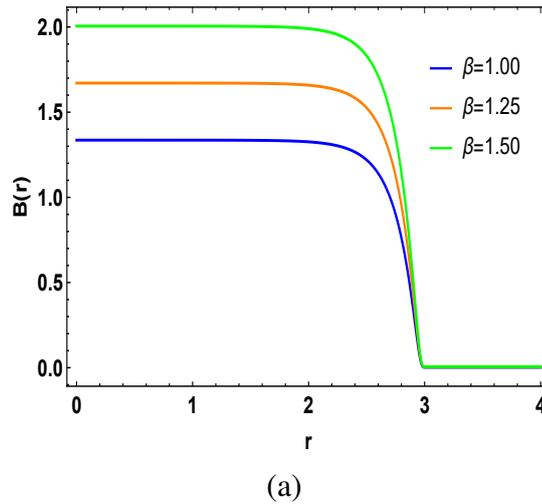


Figura 44 – (a) Campo magnético do vórtice para vários valores do parâmetro β com $N = 1$ e $m = 2$. (b) Campo magnético com $\beta = 1,00$. (c) Campo magnético com $\beta = 1,25$. (d) Campo magnético com $\beta = 1,50$.

Como nos casos anteriores, investigamos as soluções da variável de campo $f(r)$ numericamente. Essa investigação nos leva a um comportamento peculiar do campo sigma com o termo generalizado não-canônico descrito por um acoplamento do termo cinético do modelo sigma com o campo $\psi(r)$ dado pela equação (5.38). Na verdade, ela tem configurações de campo limitadas, i. e., as configurações da variável de campo assumem um perfil semelhante ao de uma função degrau. Este comportamento fica claro na figura 45 onde este perfil de campo é um comportamento limite de uma solução *kink* centrada em $r = 1$. Este comportamento nos parece ser uma consequência da mistura dos campos Φ e ψ . Em outras palavras, o *kink* do setor topológico ψ interfere no setor do campo sigma, então a única solução possível para esta configuração de campo seria um campo com o perfil da função degrau (observe que a solução no setor topológico do modelo sigma-O(3) parece ser um caso limite do setor ψ). Assim, inferimos que o *kink* do setor ψ influencia na localização dos sólitons do setor topológico do campo sigma. Desta forma, a interferência leva apenas a vórtices não-físicos do tipo degrau, ou seja, configurações de campo com energia infinita.

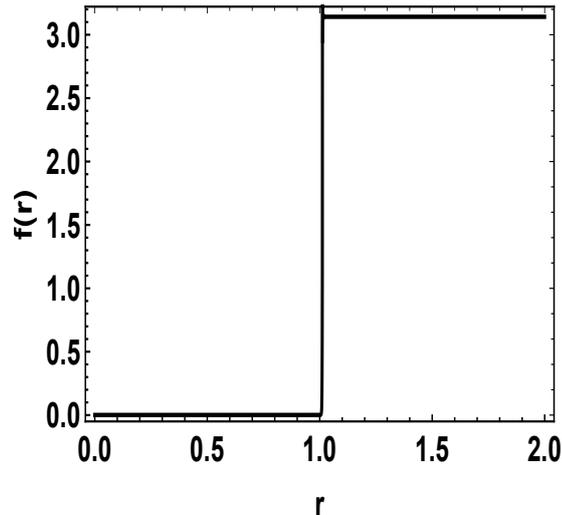


Figura 45 – Solução numérica da variável de campo $f(r)$.

Como uma consequência imediata do perfil da variável de campo $f(r)$, notamos que devido a expressão (5.47) o campo magnético explode na vizinhança da localização da estrutura, i. e., $r = 1$. Consequentemente, a densidade de energia torna-se infinita nesse ponto, devido a contribuição do termo $f'(r)$ na energia da estrutura.

Também é interessante mencionar que este problema pode ser resolvido atribuindo outras formas à função ψ , já que este resultado é consequência da localização do campo ψ em torno de $r = 1$ (ponto onde o estrutura *kink* do setor ψ está localizada).

5.3.3 Observações finais sobre o modelo

Neste modelo, estudamos as soluções topológicas dos vórtices regidos por uma de multi-campo não-mínimo. Analisando os casos particulares da função generalização, as propriedades físicas dos vórtices são alteradas. Dependendo da forma da função generalização, as soluções podem ser as soluções tipo *kink* ou até seu caso limite, i. e., um campo descrito por uma função do tipo degrau.

Analisando os resultados, notamos que as soluções do campo $\psi(r)$ são as soluções tipo *kink*. Enquanto isso, para o campo sigma Φ , observamos três possibilidades iniciais para o surgimento de uma nova classe de estruturas. As possibilidades são o modelo canônico usual (no caso $\mathcal{F} = 1$), o caso puro e o caso misto. O caso puro ocorre quando o termo cinético não-canônico é generalizado por uma contribuição do campo Φ . Ao mesmo tempo, o modelo misto generaliza o setor topológico do modelo sigma com uma função do setor $\psi(r)$.

De forma geral, fica evidente o aparecimento de vórtices com densidade de energia

relacionada ao parâmetro α . Para valores maiores do parâmetro α , a densidade de energia do modelo tenderá a se localizar ao redor do centro do *kink*. Por outro lado, o parâmetro β do modelo sigma é responsável por alterar a intensidade do campo magnético do vórtice, modificando assim o fluxo magnético. É interessante mencionar que todos os vórtices encontrados possuem fluxo magnético quantizado devido ao número do enrolamento (ou *winding number*).

No modelo canônico, nota-se que independentemente do parâmetro m [equação (5.42)], o perfil de energia permanece invariante. É interessante mencionar, neste caso, que a energia também permanece inalterável sob a mudança do parâmetro α . Devido a essas peculiaridades das soluções numéricas, a densidade de energia BPS dos vórtices é a mesma para os casos $m = 1$ e $m = 2$. Também observamos que modificando o parâmetro α , anéis de energia se formam na teoria, de modo que o fluxo de energia irradiado pela estrutura é mais intenso para essas configurações, i. e., quando α é grande.

Um resultado atraente aparece no caso misto, i. e., quando assumimos uma generalização em termos do campo $\psi(r)$. Nesse caso, a parte cinética do modelo sigma é generalizada pelo campo ψ . Isto induz uma configuração semelhante a função degrau para variável de campo $f(r)$. Assim, observamos que o *kink* do setor topológico ψ está interferindo (através do termo de generalização) sobre um setor sigma, de modo que a única solução possível para esta configuração de campo, nesta situação, será um campo com o perfil da função degrau. Vale ressaltar que este perfil de $f(r)$ é uma solução não física, pois as estruturas oriundas desta configuração possuem energia infinita.

5.4 Vórtices no modelo sigma-cuscuton

Construindo uma teoria de multi-campos com contribuições canônicas e não-canônicas, estudamos as configurações de vórtices do modelo sigma. Propomos um modelo constituído por um campo sigma, um campo escalar do tipo *cuscuton* e o campo de Maxwell. Investigamos propriedades BPS considerando uma teoria sem vácuo usando formalismo de primeira ordem. Embora a teoria não tenha um vácuo, em cada setor topológico haverá. Assim, em cada setor topológico, a quebra de simetria espontânea é preservada. Simultaneamente, assume-se um acoplamento não-mínimo entre o campo sigma e o campo de Maxwell. Neste cenário, surgem resultados interessantes, i. e., nota-se que os vórtices possuem estrutura interna e perfil anelar. Além disso, observa-se que os perfis de vórtices em forma de anéis que emergem na teoria relacionam-se com a contribuição do termo *cuscuton*.

5.4.1 O vórtice BPS não-mínimo

Neste modelo, estudaremos a teoria de multi-campos abordada na seção 5.3, considerando que o campo escalar é não-canônico, i. e., ele é um campo tipo *cuscuton*. Fazemos este estudo porque, em princípio, esse modelo pode ser útil para descrever sólitons cristalinos de teorias não-canônicas com contribuições de momento de dipolo magnético anômalo (MDMA). De fato, isso é possível porque pode-se usando o modelo sigma-O(3) caracterizar sólitons cristalinos calibrados que permitem o aparecimento de estruturas eletromagnéticas com cargas topológicas diferentes de zero. Para mais detalhes, consulte à referência [257]. Além disso, em nosso estudo, adotaremos novamente um modelo não-mínimo, ou seja, consideraremos que as estruturas têm contribuição do MDMA. Motiva-se isso porque as propriedades físicas das partículas são modificadas quando submetidas ao MDMA [258]. Assim, em nossa teoria, o MDMA pode, a princípio, alterar a energia das estruturas, tornando-as mais ou menos energéticas e produzindo, por exemplo, anéis ou discos de energia. Finalmente, consideraremos uma contribuição não-canônica do tipo *cuscuton* para nossa teoria. Isso porque essas contribuições, amplamente utilizadas em modelos cosmológicos [259, 260], podem nos fornecer uma resposta sobre a influência de teorias não-canônicas nas propriedades físicas das estruturas, no nosso caso, dos vórtices magnéticos. Assim, começaremos nosso estudo considerando um modelo tridimensional, ou seja, um espaço-tempo com $(2 + 1)$ D. Neste cenário, a densidade Lagrangiana de nossa teoria é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \cdot \nabla^\mu \Phi + \eta \sqrt{|\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi|} + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{V}(\phi_3, \psi). \quad (5.50)$$

Em concordância com as convenções assumidas na seção 5.2, Φ é o campo sigma, ψ é um campo escalar real, $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. Enquanto isto, $\mathcal{V}(\phi_3, \psi)$ é a interação da teoria. Além disso, o termo $\eta \sqrt{|\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi|}$ é chamado de termo *cuscuton*. Este termo descreve teorias não-canônicas, como discutido no capítulo quatro (seção 4.4.1).

Novamente, neste caso, assumiremos uma teoria não-mínima. Assim, a derivada covariante é

$$\nabla_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \left(eA_\mu + \frac{g}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda} \right) \hat{n}_3 \times \Phi. \quad (5.51)$$

Nesse caso, os vórtices possuem uma contribuição anômala do momento magnético. Introduzimos essa contribuição através do acoplamento $\frac{g}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda} (\hat{n}_3 \times \Phi)$ na derivada covariante, i. e., um acoplamento entre o campo de calibre e o campo de matéria. Pode-se encontrar o

acoplamento não-mínimo aplicado em investigações das propriedades de sólitons BPS. Exemplos dessas aplicações são encontrados nas referências [231, 232, 233, 234].

Adotando a assinatura métrica exposta na seção 5.2, define-se o campo de calibre como

$$j^\nu = \partial_\lambda [g\varepsilon_{\mu\lambda\nu}(\Phi \times \nabla^\mu \Phi) \cdot \hat{n}_3 - F^{\lambda\nu}], \quad (5.52)$$

onde $j^\nu = e(\Phi \times \nabla^\nu \Phi) \cdot \hat{n}_3$ e $\mathbf{J}^\nu = -j^\nu \cdot \hat{n}_3$. Por análise da lei de Gauss, i. e., da componente $\nu = 0$ da equação (5.52), adotamos $A_0 = 0$. De fato, como mencionado anteriormente, a escolha de $A_0 = 0$ nos leva aos vórtices puramente magnéticos.

Investigando a equação de movimento, obtém-se que a equação do campo de matéria é

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi = -\mathcal{V}_\Phi \quad (5.53)$$

com $\mathcal{V}_\Phi = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Phi}$.

Enquanto isto, a equação do campo escalar é

$$\partial_\mu \left[\partial^\mu \psi + \eta \frac{\partial^\mu \psi}{\sqrt{|\partial_\nu \psi \partial^\nu \psi|}} \right] = -\mathcal{V}_\psi \quad (5.54)$$

com $\mathcal{V}_\psi = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \psi}$.

Uma vez que conhecemos as definições preliminares do campo sigma [equação (5.4)], do campo de calibre [equação (5.5)] e do campo escalar tipo *cuscuton* (i. e., $\psi = \psi(r)$), podemos investigar as estruturas topológicas da teoria. Para estudar essas estruturas é necessário investigar a energia do sistema. Neste caso, a energia do sistema é

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(f'(r) \mp \frac{N}{r} [a(r) - 1] \sin f(r) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\psi'(r) \mp \frac{W_\psi}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (B \mp \sqrt{2\mathcal{U}})^2 + \right. \\ \left. + \eta \psi'(r) \pm \frac{N[a(r) - 1]}{r} f'(r) \sin f(r) \pm \frac{Na'(r)}{er} \sqrt{2\mathcal{U}} \pm \frac{W_\psi \psi'}{r} - \frac{W_\psi^2}{2r} + \mathcal{V} - \mathcal{U} \right]. \quad (5.55)$$

Em princípio, para obter a expressão de energia apresentada acima, nós implementamos os superpotenciais $\mathcal{W} = \mathcal{W}[\psi(x_i); x_i]$ e $\mathcal{U} = \mathcal{U}[\phi_3(x_i); x_i]$ com $\mathcal{W}_\psi = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \psi}$. Novamente, as funções \mathcal{W} e \mathcal{U} são superpotenciais que auxiliam na construção do formalismo de primeira ordem. Detalhes sobre os superpotenciais foram mencionados na seção 5.3.1.

Analisando a energia (5.55), nota-se que as configurações de campo estático são limitadas por baixo. Assim, no limite de saturação da energia, obtém-se

$$f'(r) = \pm \frac{N}{r} [(a(r) - 1) \sin f(r)], \quad a'(r) = \pm \frac{r}{N} \sqrt{2\mathcal{U}} \quad \text{e} \quad \psi'(r) = \pm \frac{W_\psi}{r}. \quad (5.56)$$

Observe que as duas primeiras equações de primeira ordem da expressão (5.56) são as equações de Bogomol'nyi (ou equação BPS) que descrevem os vórtices do modelo sigma-O(3). Por outro lado, a expressão $\psi'(r) = \pm \frac{W_\psi}{r}$ é a equação BPS para o campo escalar sem a contribuição do termo não-canônico (a contribuição *cuscuton*). De fato, no caso estacionário, a dinâmica derivada do termo *cuscuton* não contribui para a equação de movimento. Isso ocorre porque quando consideramos o caso do campo escalar tipo *cuscuton* $\psi = \psi(r_1) \equiv \psi(r)$, a contribuição do termo *cuscuton* na equação de movimento é

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{cusc}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{cusc}}{\partial \psi'} \right)' = \eta \left(\frac{\partial |\psi'|}{\partial \psi'} \right)', \quad (5.57)$$

que desaparece, exceto no caso singular, i. e., $\psi' = 0$. Portanto, pode-se atribuir o valor zero à contribuição tipo *cuscuton* na equação de movimento. Assim, as contribuições puras do termo *cuscuton* produzem apenas uma contribuição trivial para as equações de movimento, independentemente da forma do potencial. Portanto, esperamos que a equação de movimento de primeira ordem para o campo ψ seja simplesmente a equação BPS para o campo ψ sem as contribuições do termo *cuscuton*.

Para obter uma teoria com propriedade BPS, consideramos que

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \frac{W_\psi^2}{2r^2} \mp \eta \frac{W_\psi}{r}. \quad (5.58)$$

Note que o último termo no potencial é a contribuição do termo não-canônico. Assim, o termo *cuscuton* no limite BPS desempenha o papel que chamamos de impureza. Esta palavra é aplicada para caracterizar os termos da ação que não alteram as equações de movimento, mas podem alterar o perfil do sóliton [261]. Na verdade, podemos encontrar teorias com impurezas em algumas obras. Por exemplo, as impurezas aparecem nos estudos de solubilidade de configuração auto-dual [261], soluções de vórtices CP(2) [262], e os vórtices na presença de um campo neutro [263].

Adotando a equação (5.58), obtém-se no limite de saturação da energia

$$E_{\text{BPS}} = \pm \int \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [N(a(r) - 1) \cos f(r) + W] d^2x \quad (5.59)$$

com $\cos f(r) = \sqrt{\mathcal{U}}$. Aqui a notação linha é a derivada em relação a variável r . Além disso, é importante mencionar que o integrando da equação (5.59) é a densidade de energia BPS. Assim, a densidade de energia BPS é

$$E_{\text{BPS}} = \pm \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [N(a(r) - 1) \cos f(r) + W]. \quad (5.60)$$

Além disso, destacamos que a contribuição do setor topológico do campo sigma na energia BPS é

$$E_{\text{BPS}}^{(\sigma)} = \pm \int \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [N(a(r) - 1) \cos f(r)] d^2x. \quad (5.61)$$

Por outro lado, a contribuição do setor topológico do campo ψ é

$$E_{\text{BPS}}^{(\psi)} = \pm \int \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} d^2x, \quad (5.62)$$

de modo que a energia BPS completa (5.59) é

$$E_{\text{BPS}} = E_{\text{BPS}}^{(\sigma)} + E_{\text{BPS}}^{(\psi)}. \quad (5.63)$$

5.4.2 Condições de contorno topológica e propriedades dos vórtices

Para o estudo dos vórtices magnéticos descrito pela densidade Lagrangiana (5.50), é necessário assumir alguma condição de contorno topológica. Assim, adotamos as condições topológicas expostas na equação (5.6). Além disso, para o campo escalar não-canônico, consideramos que

$$\psi(r \rightarrow -\infty) = \mp 1 \quad e \quad \psi(r \rightarrow \infty) = \pm 1. \quad (5.64)$$

Considerando as condições de contorno topológicas (5.6) e o ansatz (5.5), temos que o vórtices magnéticos possuem um fluxo magnético dado por

$$\phi_{\text{flux}} = \frac{2\pi\eta_1 N}{e}, \quad (5.65)$$

onde $N \in \mathbb{Z}$.

Além disso, as condições topológicas (5.6) e (5.64), nos levam a energia

$$E_{\text{BPS}} = \mp(2\pi M + \Delta W), \quad (5.66)$$

onde $M \in \mathbb{Z}$ é igual a $N(2 + \beta)$. Além do mais, $\Delta W = W(r \rightarrow \infty) - W(r \rightarrow -\infty)$.

5.4.3 Solução de vórtice sem interação

5.4.3.1 As soluções do campo escalar não-canônico

Pensando em uma teoria tipo ϕ^4 no setor do campo ψ , nos permita assumir o superpotencial

$$\mathcal{W} = \alpha\psi - \frac{1}{3}\alpha\psi^3. \quad (5.67)$$

Para evitar carregar muitas constantes em nossa teoria, deixe-nos adotar $\eta = \alpha$.

O superpotencial (5.67) descreve uma interação do tipo ϕ^4 . Portanto, ao considerar esse superpotencial, estamos garantindo que ocorra quebra espontânea de simetria no setor do campo ψ . Essa quebra espontânea de simetria será responsável pelo surgimento de estruturas no setor topológico de ψ [49].

Na verdade, considerando o superpotencial (5.67) e a expressão (5.56), i. e.,

$$\psi'(r) = \pm \frac{W_\psi}{r}, \quad (5.68)$$

obtemos, novamente que

$$\psi(r) = \pm \tanh[\ln(r^\alpha)]. \quad (5.69)$$

Note que o resultado da equação acima é idêntico à expressão (5.36). Isso ocorre porque o superpotencial adotado para o setor do campo ψ é o mesmo em ambos os modelos. Assim, essa teorias suporta as soluções tipo *kink* e *antikink*. Os gráficos dessas soluções já foram reportados na figura 36.

5.4.3.2 A Teoria sem interação

Neste caso, para estudar as configurações de vórtices do modelo sigma-O(3) não mínimo, particularizamos nossa análise para o caso de um modelo sem interação. Por exemplo, alguns autores usaram teorias semelhantes para considerar a teoria sem vácuo em estudos do vórtice com a eletrodinâmica de Maxwell e Chern-Simons [264]. Além disso, estruturas em espaço-tempo curvo [265] e sólitons topológicos [266] foram estudadas considerando essas teorias. Portanto, permita-nos considerar uma teoria sem interação para investigar as soluções de vórtice do modelo sigma-*cuscuton* não-mínimo. Assim, para obter um modelo sem interação, assume-se

$$\mathcal{U} = -\frac{W_\psi^2}{2r^2} \pm \alpha \frac{W_\psi}{r}. \quad (5.70)$$

Neste caso, a interação da teoria [por gentileza, consulte a Lagrangiana (5.50)] é nula, ou seja, $\mathcal{V} = 0$.

5.4.3.3 As soluções de vórtice sem interação

Deixe-nos, agora, investigar a possibilidade da existência de vórtices topológicos³ descritos pelo sistema de equações:

$$f'(r) = \pm \frac{N}{r} [(a(r) - 1) \sin f(r)] \quad \text{e} \quad a'(r) = \pm \frac{r}{N} \sqrt{\mathcal{U}}. \quad (5.71)$$

No limite assintótico, i. e., $r \rightarrow 0$, obtemos

$$a(r \rightarrow 0) \approx \frac{r^2}{2N} + \dots \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow 0) \approx 2 \operatorname{arccot}(c_0 r^{\pm N}). \quad (5.72)$$

Enquanto, em $r \rightarrow \infty$, temos

$$a(r \rightarrow \infty) \approx -\eta_1 + \dots \quad \text{e} \quad f(r \rightarrow \infty) \approx 2 \operatorname{arccot}[c_0 r^{\pm N(1-\eta_1)}]. \quad (5.73)$$

Considerando as condições topológicas de contorno (5.6), deixe-nos investigar as soluções de vórtices produzidas pelas equações (5.71) e restrita ao vínculo do modelo sigma e da propriedade BPS. Estudando numericamente as estruturas topológicas, expomos as soluções numéricas na figura 46. A figura 46(a) corresponde às soluções de campo de matéria do setor topológico para o campo Φ . Por outro lado, a figura 46(b) corresponde às soluções topológicas do campo de calibre.

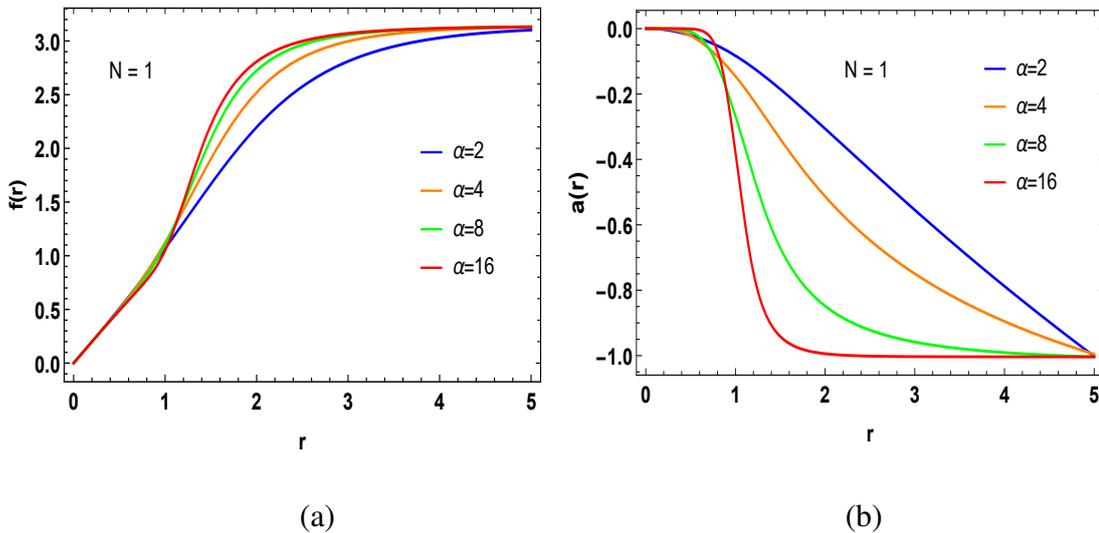


Figura 46 – (a) Solução da variável de campo sigma $f(r)$. (b) Solução da variável de campo de calibre $a(r)$.

Usando as soluções numéricas do campo sigma e do campo de calibre, pode-se analisar o campo magnético e a densidade de energia BPS (5.60) do vórtice. Vamos começar

³ Entenda as soluções topológicas como configurações que respeitam as condições (5.6).

nossa análise investigando o campo magnético do vórtice. Para fazer essa análise, lembramos que o campo magnético é $B = F_{12}$. Assim, substituindo a solução numérica do campo de calibre na definição do campo magnético, obtemos o seu comportamento. Exibimos o campo magnético na figura 47. Este resultado nos mostra uma propriedade interessante do vórtice, i. e., o campo magnético assumindo a forma de anéis bem definidos.

Adotando à equação (5.60), a densidade de energia BPS em termo das variáveis de campos é

$$\mathcal{E}_{\text{BPS}}(r) = \pm \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ N(a(r) - 1) \cos f(r) \pm \alpha \tanh[\ln(r^\alpha)] \left[1 - \frac{1}{3} \tanh^2[\ln(r^\alpha)] \right] \right\}. \quad (5.74)$$

Portanto, substituindo as soluções numéricas das equações (5.71) na equação (5.74) obtemos a densidade de energia BPS da estrutura. A figura 48 mostra a solução numérica da densidade de energia BPS. Assim, analisando a densidade de energia BPS (ver à figura 48), destacamos o surgimento de uma estrutura interna.

5.4.4 Observações finais sobre o modelo

Neste modelo, estudamos as soluções de vórtices de uma teoria de multi-campos. O modelo proposto possui um campo canônico, i. e., o campo que descreve o modelo sigma-O(3), e um campo não-canônico, i. e., o campo ψ . Além disso, considera-se que Φ está acoplado de forma não mínima ao campo de calibre. Assim, os vórtices produzidos têm uma contribuição anômala do momento do dipolo magnético.

Para o estudo desse modelo, consideramos que a dinâmica do campo escalar tem contribuições canônicas e não-canônicas. Essas contribuições são, respectivamente, $\frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi$ e $\eta \sqrt{|\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi|}$. A contribuição não-canônica é conhecida como *cuscuton*. O termo *cuscuton* é interessante pois sua contribuição no caso estacionário é trivial. Assim, a equação de movimento terá apenas contribuições dos termos canônicos no limite estacionário. Porém, neste caso, o termo *cuscuton* terá uma contribuição não trivial para a densidade de energia das estruturas. Portanto, no limite BPS, o *cuscuton* pode ser interpretado como uma impureza no setor topológico do campo sigma. Na verdade, isto parece ser uma consequência de lidar com uma teoria sem interação, i. e., $\mathcal{V} = 0$.

Além disso, este modelo de multi-campo provou suportar vórtices eletricamente neutros que engendram uma estrutura interna interessante. Além disso, o campo magnético dos vórtices também tem uma forma de anel. Observe que essas estruturas de anel tornam-se

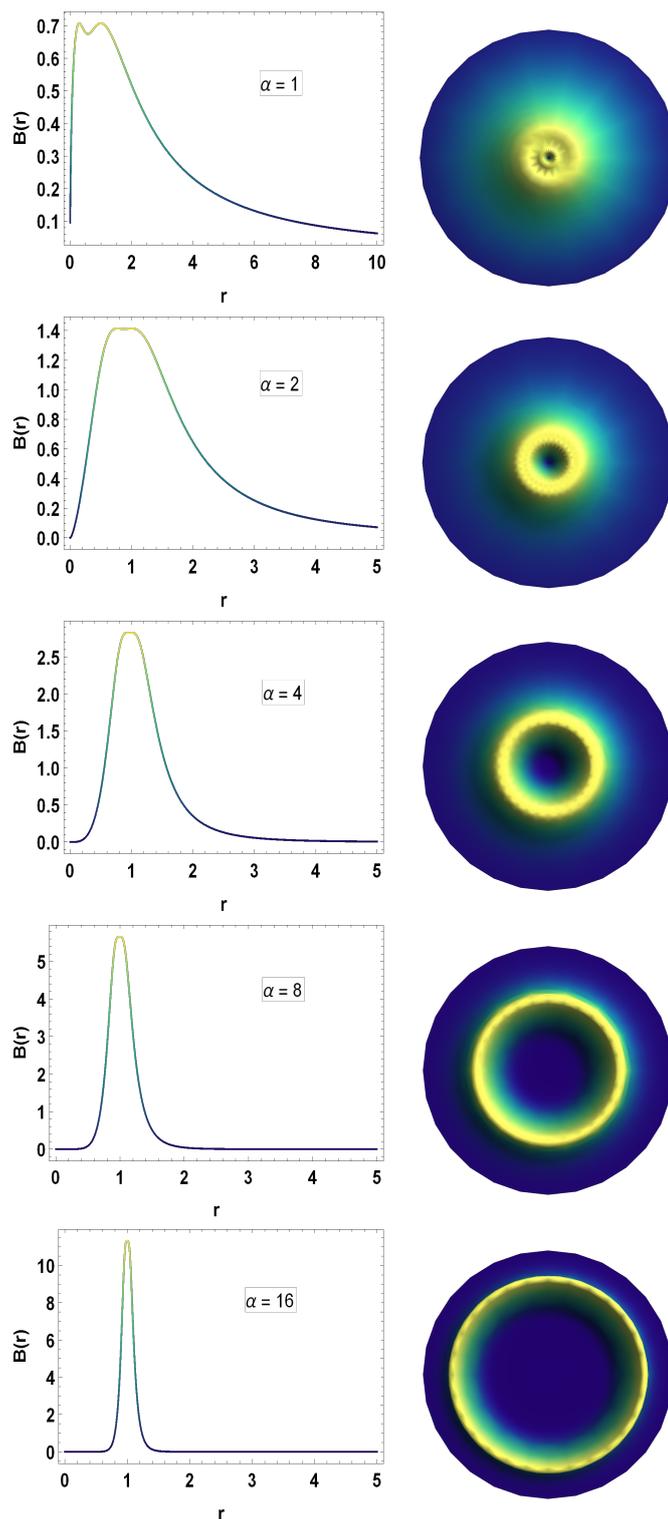


Figura 47 – Comportamento do campo magnético função de r quando o parâmetro α varia.

bem definidas se a contribuição de *cuscuton* aumenta, i. e. quando o parâmetro α aumenta. Consequentemente, à medida que η aumenta, o campo magnético aumenta e, portanto, a energia irradiada pelo vórtice aumenta. Em geral, podemos interpretar isso como consequência do comportamento do campo de matéria e do campo de calibre no setor topológico do modelo

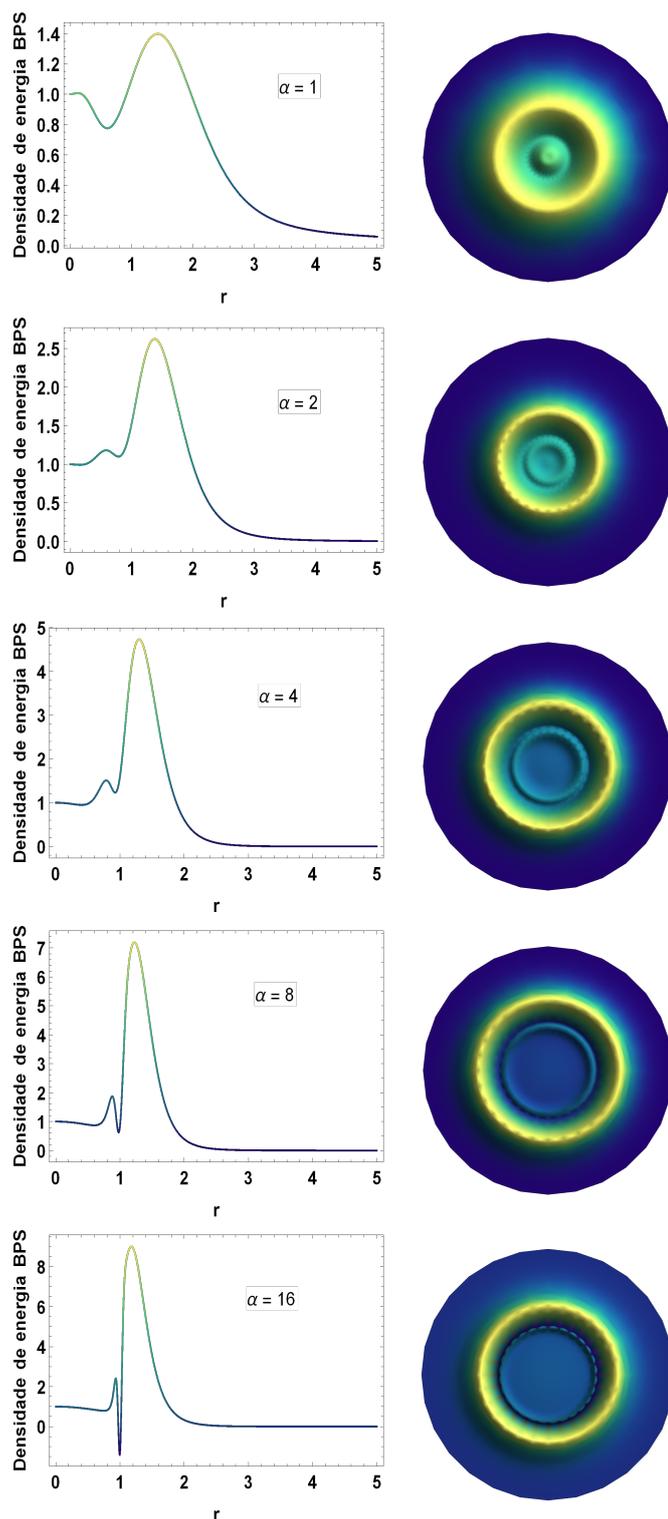


Figura 48 – Densidade de energia BPS variando em função de r para vários valores do parâmetro α .

sigma. Esses campos têm um comportamento muito peculiar, i. e., quando a contribuição do termo de *cuscuton* (a impureza) aumenta, o campo de matéria e o campo de calibre tornam-se mais compactos. Isso ocorre devido à localização do *kink* no setor topológico de ψ em torno de $r = 1$.

6 ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS EM GRAVIDADE DE EINSTEIN

Neste capítulo, investigamos a influência do campo de matéria e do campo de calibre de uma teoria Maxwell-Higgs nas funções métricas de um espaço-tempo curvo. Ao considerar um campo de matéria com um perfil solitônico e com capacidade de ajustar a variável de campo de configurações tipo *kink* à configurações tipo *compacton*, o aparecimento de soluções de buraco negro é notado.

6.1 Uma breve motivação

Conforme discutido amplamente nos capítulos anteriores, as soluções de campos topológicas que descrevem os vórtices são descritas por soluções estáticas de campos não-lineares. Essas soluções surgem devido ao mecanismo de quebra espontânea de simetria [10]. Nesse sentido, tais estruturas têm sido intensamente estudadas, e suas consequências são aplicadas em diversas áreas de interesse, principalmente na cosmologia [86].

Recentemente, os vórtices ganharam uma releitura no cenário cosmológico, ou melhor, na descrição física dos buracos negros [267]. Nesse cenário, os vórtices são estruturas que podem ser emitidos de buracos negros e aprisionar um fluxo magnético quantizado. Assim, chamamos essas configurações de vórtices de buracos negros. Desta forma, baseamos a interpretação do vórtice de buraco negro na descrição do condensado de grávitons de um buraco negro e na correspondência entre buracos negros e objetos genéricos com entropia máxima compatível com a unitariedade, os chamados *saturons* [267]. Assim, esta abordagem teórica (ou interpretação) pode fornecer uma explicação topológica para a estabilidade de buracos negros extremos e suas repercussões na evaporação de Hawking [267].

Um objeto astrofísico de grande interesse na física contemporânea é o buraco negro [268]. Com as recentes evidências experimentais, vários pesquisadores se tornaram adeptos do estudo desses objetos [269]. Esses objetos cosmológicos surgem como uma solução da equação do campo gravitacional de Einstein [270]. A primeira solução conhecida de buraco negro foi demonstrada por K. Schwarzschild e descreve a geometria de um buraco negro esférico e estático. Posteriormente, Oppenheimer e Snyder mostraram que a solução de Schwarzschild descreve o estado final de colapso de uma estrela massiva e esférica [271].

Uma das características das soluções de buracos negros em qualquer dimensão do espaço-tempo é sua singularidade. Em geral, essas soluções são caracterizadas por diversos

parâmetros de cargas assintóticas associadas a simetrias globais da solução [272]. Mais recentemente, uma questão que vem ganhando destaque está relacionada à singularidade das soluções de buracos negros na presença de campos escalares [272]. Esta questão está relacionada com a formulação conjectura *no-hair*, i. e., a ausência de configurações de campos escalares não triviais no *background* do buraco negro [273, 274, 275]. Nesse contexto, questões relevantes surgem, e. g., uma questão interessante diz respeito à possibilidade de haver cargas escalares independentes da massa do buraco negro [272].

Embora as soluções de vórtices topológicos não-perturbativas já tenham sido intensamente estudadas, o estudo dos efeitos da interação dessas estruturas com a gravidade ainda é pouco compreendido. Isso ocorre porque, no espaço-tempo plano, a gravidade de Einstein é trivial no sentido que, fora de fontes localizadas, o espaço-tempo no vácuo é localmente plano [224, 276]. No entanto, alguns artigos interessantes surgiram discutindo esse assunto. Por exemplo, podemos observar a solução do buraco negro BTZ em *background* AdS_3 , na gravidade de Einstein de $(2 + 1)$ -dimensões [277, 278]. Por outro lado, Cardoni *et. al.* [272] estudou as soluções analíticas de buracos negros esféricos com campos escalares não triviais na gravidade de Einstein em um fundo AdS_3 . Além de um campo escalar real, eles também consideraram um campo escalar complexo com potencial, o que lhes permitiu construir soluções de vórtice no buraco negro.

Atualmente, a ideia de buraco negro é comumente ligada ao conceito de radiação de Hawking, o que torna a descrição termodinâmica de buracos negros um conceito mais acessível [279]. De fato, as propriedades termodinâmicas dos buracos negros foram intensamente discutidas por Bardeen *et. al.* [280]. Nesse trabalho, eles formularam as quatro leis da termodinâmica dos buracos negros, com base nas ideias de Bekenstein [281]. Essas leis foram propostas devido às suas semelhanças com algumas propriedades mecânicas dos buracos negros, i. e., sua massa, área do horizonte e gravidade superficial. Desse modo, os buracos negros são considerados sistemas térmicos que obedecem a uma termodinâmica específica, i. e., a termodinâmica de buracos negros.

Neste capítulo, buscaremos compreender como as estruturas topológicas de vórtices do modelo Abelian de Maxwell-Higgs podem alterar a geometria do espaço-tempo na gravidade de Einstein tridimensional. Procuramos responder se é possível que buracos negros apareçam em um espaço-tempo tridimensional curvo na gravidade de Einstein. Além disso, estudamos a influência que o campo de matéria pode ter sobre o buraco negro, se o campo de matéria se

tornar mais compactado. Para isso, partimos de uma métrica geral e consideramos um campo de matéria solitônico.

6.2 Os buracos negros de vórtices

Desde o artigo de Deser *et al.* [276] e Witten [282, 283], problemas relativísticos tridimensionais tornaram-se cada vez mais populares no estudo das teorias clássica e quântica da gravidade [284]. Até certo ponto, isso ocorre porque, em modelos tridimensionais, a teoria de Einstein possuem um limite clássico, i. e., o limite Newtoniano com graus de liberdade de propagação [284]. Embora, os modelos gravitacionais quadridimensionais sejam mais realistas, os modelos tridimensionais são protótipos que nos ajudam à interpretar teorias de dimensões superiores [284, 285]. Somente em 1992, Banados *et al.* [277] afirmou que a gravidade tridimensional pode ter uma solução de buraco negro. De fato, essas estruturas propostas por Banados são assintoticamente anti-de Sitter (AdS) sem singularidade de curvatura na origem. No entanto, a estrutura do buraco negro de tridimensional tem um horizonte de eventos que aparece como o estado final da matéria em colapso [277]. Este horizonte de eventos se assemelha ao horizonte de eventos de buracos negros tridimensionais.

Considerando isto, permita-nos iniciar nossa discussão adotando a seguinte densidade Lagrangiana para uma teoria tipo Maxwell-Higgs acoplado com a gravidade de Einstein:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \right], \quad (6.1)$$

onde G é a constante de Newton, R é o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, v é o valor esperado de vácuo da teoria, $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético, A_μ é o campo de calibre e a derivada covariante é definida como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi. \quad (6.2)$$

Deixe-nos destacar que é difícil descrever como passar de *kinks* para configurações compactas em diferentes cenários. Discussões de soluções compactas em modelos com dinâmica padrão foram reportadas no espaço-tempo plano [179] e curvo [287], o que nos incentivou a buscar a influência dessas estruturas na geometria do espaço-tempo. Para transformar uma configuração *kink* em configuração tipo compacton¹ é necessário escrever um potencial que

¹ O termo compacton refere-se à configurações de campos solitônicos com um comprimento de onda finito [179]. Geralmente, usa-se estruturas compactas na descrição de estruturas topológicas associadas a partículas e objetos cosmológicos. Para mais detalhes consulte as referências [179, 286].

controle as flutuações das soluções. Num modelo bidimensional, o potencial que controla as flutuações da massa *kink* ao aumenta para valores cada vez maiores permite que o potencial do modelo mude tendendo a se comportar como um poço infinito, localizando então as flutuações em um espaço mais compacto. Por isso, para investigar configurações compactas, devemos modificar o potencial para que a massa do *kink* possa aumentar para valores cada vez maiores. Uma possibilidade de estudar à influência de configurações do tipo compacto na métrica do modelo é assumir que o vórtice é governado por um campo de matéria conhecido e com esta característica [69]. Assim, assumimos o seguinte perfil para o campo de matéria:

$$\phi(r, \theta) = v \tanh(r^\alpha) e^{in\theta} \quad \text{com} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (6.3)$$

onde n é o número de enrolamento (ou *winding number*), v é o valor esperado de vácuo e α é um parâmetro reponsável pela contração da estrutura.

É interessante mencionar que o perfil escolhido para o campo da matéria descreve uma estrutura topológica. O perfil tipo compacto do campo de matéria (6.3) é visto na figura 49.

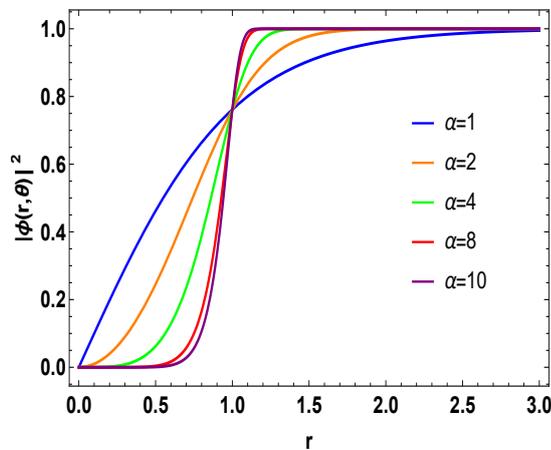


Figura 49 – Perfil do campo de matéria para vários valores de α quando $n = v = 1$.

Para estudar os vórtices topológicos do modelo, vamos considerar um *Ansatz* para a métrica que descreva estruturas estáticas rotacionalmente simétricas. Para esse caso, assumimos

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2d\theta^2. \quad (6.4)$$

Essa métrica foi considerada anteriormente em estudos de vórtices de Maxwell num *background* AdS_3 [224, 288].

Para que as estruturas sejam invariantes de calibre e rotacionalmente simétricas, assumimos que o campo de calibre é descrito pelo ansatz:

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij} \hat{x}^j \frac{a(r)}{er}. \quad (6.5)$$

Sabemos dos capítulos anteriores que este tipo de *Ansatz* nos leva a vórtices puramente magnético com o campo magnético sendo

$$B = -\frac{1}{er} a'(r), \quad (6.6)$$

o que nos leva à estruturas com fluxo magnético quantizado, i. e.,

$$\Phi_{\text{fluxo}} = \frac{2\pi n}{e}, \quad (6.7)$$

onde $n \in \mathbb{Z}$.

Adotando as equações (6.4), (6.3) e (6.5), nós reescrevemos a densidade Lagrangiana como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & r \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \frac{v^2 \tanh(r^\alpha)^2 (n - a(r))^2}{2r^2} + \frac{v^2 \alpha^2 r^{2(\alpha-1)} \text{sech}(r^\alpha)^4 A(r)}{2} + \right. \\ & \left. - \frac{A(r) a'(r)^2}{2e^2 r^2} - \frac{\lambda}{4} (v^2 \tanh(r^\alpha)^2 - v^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde a notação linha descreve a derivada em relação à variável r . O tensor de Ricci em termos das funções métricas $A(r)$ e $B(r)$ é

$$R = -\frac{A'(r)}{r} + \frac{A(r)B'(r)^2}{2B(r)^2} - \frac{A(r)B''(r)}{B(r)} - \frac{A'(r)B'(r)}{2B(r)} - \frac{A(r)B'(r)}{rB(r)}. \quad (6.9)$$

Note que a Lagrangiana tem três funções r associadas as configurações de vórtices, i. e., $A(r)$, $B(r)$ e $a(r)$. Suas equações de movimento são respectivamente:

$$e^2 r A(r) B'(r) + B(r) [2e^2 r^2 \Lambda + 4\pi G (-2e^2 v^2 (n - a(r))^2 \tanh(r^\alpha)^2 + 2e^2 v^2 r^{2\alpha} \alpha^2 A(r) \text{sech}(r^\alpha)^4 + e^2 r^2 \lambda v^4 \text{sech}(r^\alpha)^4 - 2A(r) a'(r)^2)] = 0, \quad (6.10)$$

$$-2e^2 r^2 \Lambda + 4\pi G [2e^2 v^2 (n - a(r))^2 \tanh(r^\alpha)^2 + 2e^2 v^2 r^{2\alpha} \alpha^2 A(r) \text{sech}(r^\alpha)^4 - e^2 r^2 \lambda v^4 \text{sech}(r^\alpha)^4 + -2A(r) a'(r)^2] - e^2 r A'(r) = 0, \quad (6.11)$$

$$r a'(r) A(r) B'(r) + B(r) [2e^2 r v^2 (a(r) - n) \tanh(r^\alpha)^2 + a'(r) (-2A(r) + r A'(r)) + + 2r A(r) a''(r)] = 0. \quad (6.12)$$

As equações acima descrevem o perfil do campo de calibre e as funções métricas $A(r)$ e $B(r)$ relacionadas ao perfil solitônico do campo de matéria [consulte à equação (6.3)].

6.2.1 O caso: $A(r) = B(r)$

Antes de especificar nossa escolha, mencionamos que na referência [224], foi estudado o caso $A(r) \neq B(r)$. Em seu estudo, Edery mostra que não há buracos negros neste *background* gravitacional. Esta observação é porque para o perfil do campo de matéria encontrado as soluções das funções métricas são sempre definidas positivas. Assim, presumimos que um campo de matéria solitônico pode produzir um buraco negro. Essa hipótese é suportada pelo fato de que essas estruturas interagem com a geometria gerando o surgimento de tais objetos. Para realizar nossa análise, vamos considerar o caso mais simples possível, i. e., $A(r) = B(r)$. Além disso, para suportar a hipótese do surgimento dessas estruturas (i.e., buracos negros) em no espaço-tempo tridimensional, é necessário analisar algumas grandezas, i. e., o tensor de Ricci, o invariante quadrático do tensor de Ricci e o escalar de Kretschmann. Essa análise é necessária para confirmar que tais estruturas são buracos negros estáveis. Para começar nossa análise, escrevemos o tensor de Ricci como

$$R = -\frac{2A'(r)}{r} - A''(r). \quad (6.13)$$

Manipulando as equações (6.10) e (6.11), chega-se à

$$\frac{B'(r)}{B(r)} = -\frac{A'(r)}{A(r)} + 16\pi G \left(-v^2 r^{2\alpha-1} \alpha^2 \operatorname{sech}(r^\alpha)^4 + \frac{a'(r)^2}{e^2 r} \right). \quad (6.14)$$

Portanto, se $A(r) = B(r)$ o campo de calibre é dado por

$$a'(r) = \pm e v r^\alpha \alpha \operatorname{sech}(r^\alpha)^2, \quad (6.15)$$

i. e.,

$$a(r) = a(0) \pm e v \alpha \int_0^r r'^\alpha \operatorname{sech}(r'^\alpha)^2 dr'. \quad (6.16)$$

Para estruturas de campos topológicas, assumimos que $a(0) = 0$. Com isso, chega-se à

$$a(r) = \pm e v \alpha \int_0^r r'^\alpha \operatorname{sech}(r'^\alpha)^2 dr'. \quad (6.17)$$

Por integração por partes, podemos reescrever $a(r)$ como

$$a(r) = \pm e v \left[r \tanh(r^\alpha) - \int_0^r \tanh(r'^\alpha) dr' \right]. \quad (6.18)$$

Note que se $\alpha = 1$ o campo de calibre assume sua forma mais simples, i. e.,

$$a(r) = \pm e v [r \tanh(r) - \ln(\cosh(r))]. \quad (6.19)$$

Para os casos de $\alpha > 1$, é conveniente calcular o comportamento de $a(r)$ usando alguma técnica numérica. No nosso caso, permita-nos considerar a equação diferencial (6.14) e realizar uma integração numérica para calcular os outros perfis de campo de calibre para $\alpha > 1$. O resultado numérico do campo gauge é mostrado na figura 50. Também exibimos o comportamento do campo magnético na figura 51. Na figura 51 nota-se o comportamento da propriedade de vórtice tipo anel surgindo na teoria a medida que o parâmetro α aumenta.

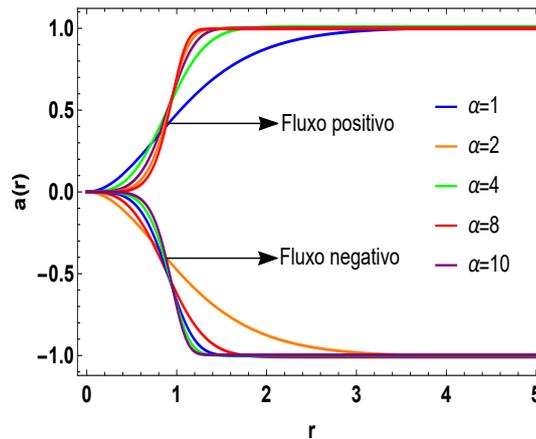


Figura 50 – Campo de calibre associado ao campo de matéria (6.3) quando $n = 1$.

Analisando as equações de movimento, vemos que a equação (6.12) não é uma equação independente das equações (6.10) e (6.11). Assim, para o caso $A(r) = B(r)$ temos apenas duas equações diferenciais independentes. Para estudar as funções métricas, vamos multiplicar a equação (6.10) por $B(r)$ e subtraindo a equação (6.9) da equação (6.10), obtém-se que

$$A'(r) = B'(r) = -2\pi\Lambda + 2\pi G \left[\frac{4v^2(n - a(r))^2 \tanh(r^\alpha)^2}{r} - 2r\lambda v^4 \operatorname{sech}(r^\alpha)^4 \right]. \quad (6.20)$$

A solução numérica da equação (6.20) é mostrada na figura 52. Observe que a função métrica $A(r)$ nas proximidades do núcleo do vórtice varre um domínio negativo e a medida que se distância do vórtice torna-se totalmente positiva, portanto, há um horizonte de eventos em torno do valor $r = 1,5$. É notável a partir da simulação numérica que a função métrica $A(r)$ perto da origem e, portanto, no núcleo do vórtice tem um perfil polinomial². Por outro lado, longe do vórtice, tem um comportamento assintótico do tipo r^2 ³. Analisando as figuras 52(a) e 52(b),

² Pode-se verificar esta afirmação realizando uma análise analítica em torno da origem, ou seja, $r = 0$. Neste caso, obtemos $\lim_{r \rightarrow 0} A(r) \simeq -\Lambda r^2 + \mathcal{O}(r^2)$.

³ Verifica-se esta análise na próxima seção desse capítulo.

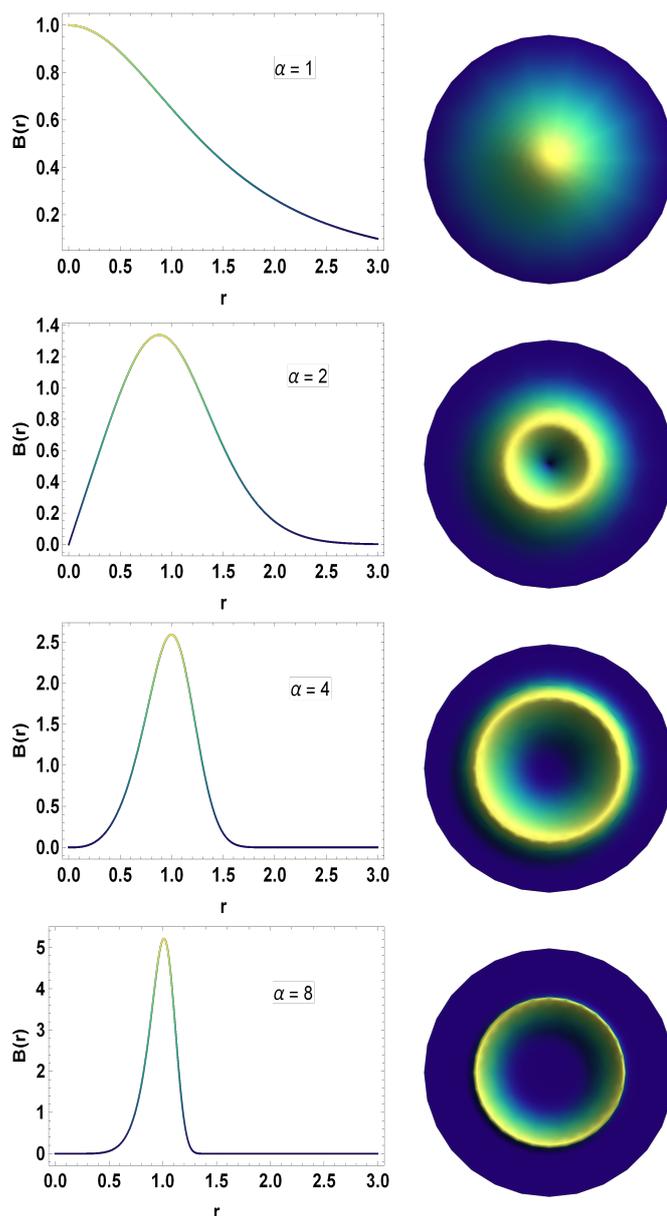


Figura 51 – Comportamento do campo magnético produzido pelo campo de calibre $a(r)$ para alguns valores do parâmetro α .

observa-se que independente da constante cosmológica, se a variável de campo se torna mais compacto as funções métricas tendem a um comportamento linear no limite assintótico. Em outras palavras, para configurações compactas a “massa *kink*” aumenta e isso significa que para ocorrer o confinamento das flutuações de campo, a função métrica tem que tender, de fato, a um comportamento linear. Observe que o resultado encontrado na referência [224], é obtido se considerarmos uma configuração de campo semelhante a um *kink* (porém bastante localizada). Um resultado interessante é que para todos os perfis de campo de matéria, teremos um buraco negro localizado na origem do sistema. O escalar de curvatura associado à métrica é mostrado na figura 53.

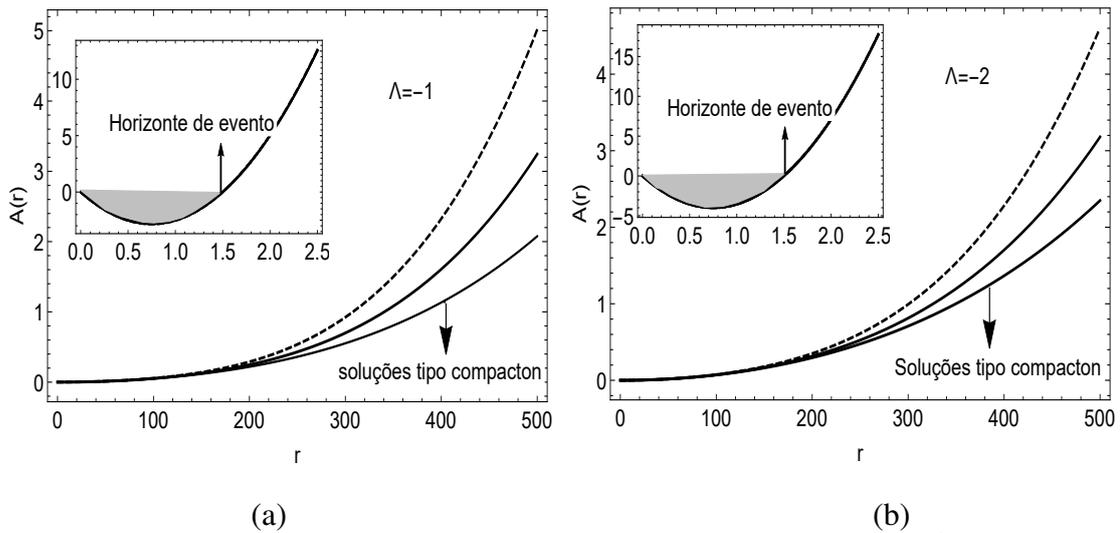


Figura 52 – O resultado numérico das funções métricas quando $n = \alpha = \nu = \lambda = 1$ e $G = 1/4\pi$. Em todos os casos, assume-se a constante de integração $C_0 = 1$. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$. (b) Gráfico quando $\Lambda = -2$.

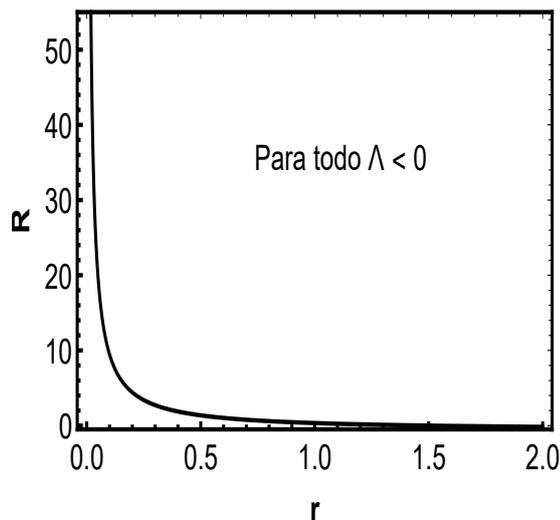


Figura 53 – Escalar de curvatura independente do parâmetro α quando $n = \alpha = \nu = \lambda = C_0 = 1$ e $G = 1/4\pi$.

Conforme mencionado no início da discussão, é necessário analisar algumas grandezas para analisar a estabilidade dos buracos negros. Usando as soluções numéricas das funções métricas, investigaremos o invariante quadrático do tensor de Ricci e o escalar de Kretschmann.

Por cálculos diretos para a métrica (6.4), o invariante quadrático do tensor de Ricci é dado por

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2r^2}A'(r)[A'(r) + rA''(r)]. \quad (6.21)$$

O resultado numérico do invariante quadrático de Ricci é mostrado na figura 54. Observe que o invariante quadrático do tensor de Ricci tem uma singularidade no centro do vórtice do buraco

negro e um comportamento constante fora dessa estrutura.

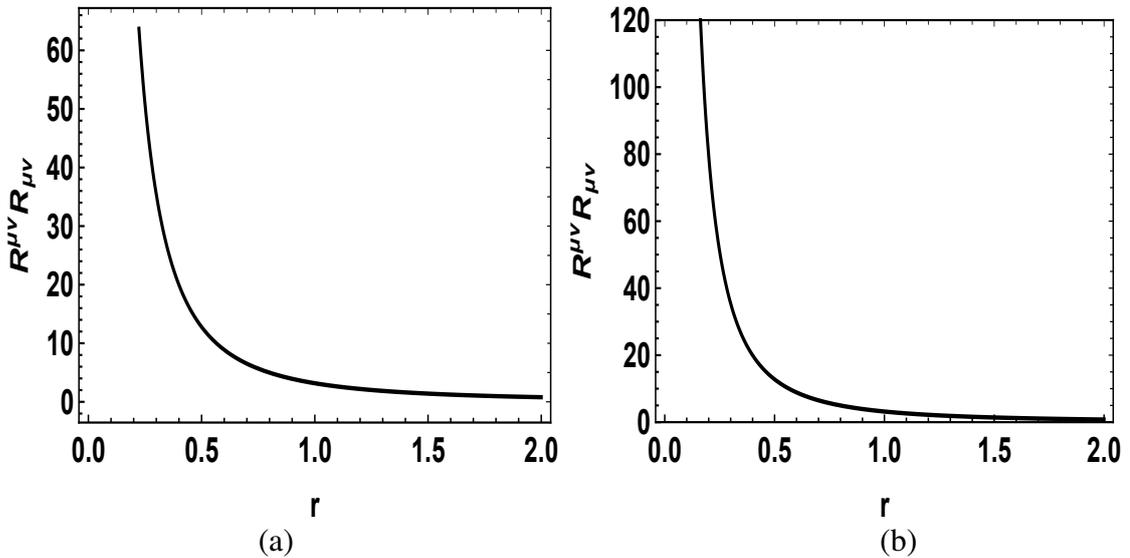


Figura 54 – O invariante quadrático do tensor de Ricci quando $n = \alpha = \nu = \lambda = C_0 = 1$ e $G = 1/4\pi$. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$. (b) Gráfico quando $\Lambda = -2$.

Além disso, o escalar de Kretschmann é

$$K = R^{\mu\nu\tau\sigma}R_{\mu\nu\tau\sigma}, \quad (6.22)$$

onde $R_{\mu\nu\tau\sigma}$ é o tensor de curvatura de Riemann. Para a nossa teoria, o escalar de Kretschmann é reduzido para

$$K = R^{\mu\nu\tau\sigma}R_{\mu\nu\tau\sigma} = \frac{A'(r)^2}{r^2}. \quad (6.23)$$

A solução numérica da função métrica (52) juntamente com a equação (6.23), nos leva ao resultado numérico exibido na figura 55.

Os resultados numéricos do escalar de Kretschmann (figura 55), mostra que existe uma singularidade física na origem, e assintoticamente o campo gravitacional é descrito apenas pela constante cosmológica. Assim, estes resultados [por favor, consulte as figuras 54 e 55] sugerem a existência de um buraco negro localizado em $r = 0$.

6.2.2 O comportamento assintótico

6.2.2.1 A função métrica

Permita-nos investigar os comportamentos assintóticos das funções métricas. Para isso, pode-se resolver analiticamente a equação (6.10), na proximidade do vácuo da teoria, i. e.,

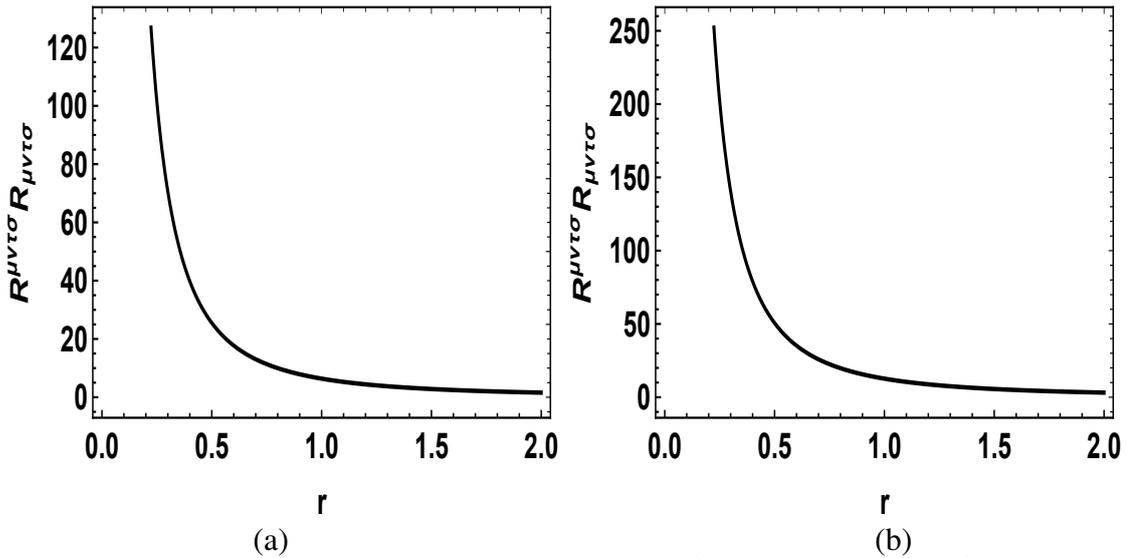


Figura 55 – Escalar Kretschmann quando $n = \alpha = \nu = \lambda = C_0 = 1$ e $G = 1/4\pi$. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$. (b) Gráfico quando $\Lambda = -2$.

$a \rightarrow n$ e $|\phi| \rightarrow \nu$. Isso nos dá a equação para $A(r)$, a saber,

$$A'(r) = -2r\Lambda, \quad (6.24)$$

i. e.,

$$A_0(r) = -\Lambda r^2 + C. \quad (6.25)$$

O subscrito ‘0’ descreve o estado de vácuo. C é uma constante de integração que define as condições iniciais na fonte. Considerando que estamos interessados em estudar um espaço-tempo assintoticamente de Minkowski ($\Lambda = 0$), assumimos $C = 1$.

Enquanto isto, no limite assintótico, i. e., em $r \rightarrow \infty$, obtém-se

$$A(r) = -\Lambda r^2 + D. \quad (6.26)$$

Aqui, vale destacar que a constante D é diferente da constante C .

6.2.2.2 O campo de calibre

A análise do comportamento assintótico dos campos de calibre é conveniente para entender a estrutura topológica com mais detalhes. Analisando o perfil do campo de calibre mostrado na equação (6.14), na vizinhança da origem, obtém-se que

$$a(r) \simeq \pm e\nu \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3 + \mathcal{O}(r^5) \right) \text{ se } \alpha = 1. \quad (6.27)$$

Note que o campo de calibre tem um perfil de uma função monotônica crescente próximo à origem. Isso faz com que a maior contribuição do fluxo magnético esteja próxima ao núcleo do vórtice (quando $\alpha = 1$, caso contrário, i. e., $\alpha \neq 1$ a maior contribuição tem um raio bem definido). Observe que, em nossa teoria, temos uma estrutura de vórtice puramente magnética localizada nas proximidades de um buraco negro. Isso nos permite supor que a termodinâmica que descreve essas estruturas deve ser semelhante à termodinâmica do buraco negro. Discutiremos a termodinâmica do buraco negro produzido pela nossa teoria mais adiante.

6.3 A massa Arnowitt-Deser-Misner (ADM)

Proposto por Arnowitt-Deser-Misner (ADM) em 1959 [289], o formalismo ADM é uma formulação Hamiltoniana da relatividade geral. Este formalismo desempenha um papel relevante na teoria da gravidade quântica e na relatividade numérica [290, 291]. De fato, o formalismo ADM se apresenta como uma abordagem para estudar o conteúdo teórico de campos, em vez de informações geométricas. O formalismo ADM nos fornece informações sobre a energia ADM (massa ADM). Naturalmente, isso ocorre porque a massa gravitacional (energia total) no espaço-tempo assintoticamente plano se relaciona com o Hamiltoniano gravitacional da teoria [292]. Nesse formalismo, o conceito de massa ADM nos informa sobre as medições do campo assintoticamente plano. Além disso, é possível encontrar discutido na referência [293] extensões do formalismo ADM para o espaço-tempo assintoticamente AdS.

Para a análise da massa ADM, o modelo é assintoticamente embutido em um espaço-tempo AdS₃. O vetor Killing é semelhante ao tempo, já que nenhum componente métrico é dependente do tempo. A noção de energia conservada é aplicada à matéria embutida em AdS₃. Para calcular a massa ADM, usamos sua forma generalizada para 2 + 1-dimensões [292], ou seja,

$$M = -2\alpha_0 \lim_{S_t \rightarrow R} \oint_{S_t} (k - k_0) N(R) \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (6.28)$$

Acima, S_t é um contorno no infinito espacial (ou seja, $r = R$), σ_{AB} é a métrica em S_t e $k = \sigma^{AB} k_{AB}$ é a curvatura extrínseca de S_t embutida na superfície espacial bidimensional obtida pela definição de t como constante. Da mesma forma, k_0 é a curvatura extrínseca de S_t embutida na superfície espacial bidimensional de AdS₃. Como mostrado na referência [224], para a métrica utilizada, temos

$$k = \frac{\sqrt{A(r)}}{R}, \quad k_0 = \frac{\sqrt{A_0(R)}}{R}, \quad N(r) = \sqrt{A_0(R)}, \quad \sqrt{\sigma} = R. \quad (6.29)$$

Substituindo a equação (6.28) em (6.27), chega-se à

$$M = 4\pi\alpha_0\{A_0(R) - [A_0(r)A(R)]^{1/2}\}. \quad (6.30)$$

É interessante ressaltar que a massa ADM (6.30) no caso estático é de grande importância física. Essa relevância se dá porque um corpo isolado pode emitir radiação, e a taxa de variação da massa está relacionada ao fluxo externo de energia irradiada [292].

A expressão de massa é simplificada observando que

$$A(R) = -R^2\Lambda + C + (D - C) = A_0(R) + (D - C). \quad (6.31)$$

Observe que para $A_0(R) = A(R)$, a massa ADM é nula. Porém, quando R é grande, a expansão binomial reduz a expressão de massa para

$$M = 2\pi\alpha_0(C - D). \quad (6.32)$$

De fato, a expressão obtida é constante. A massa constante é uma indicação de que o espaço-tempo é radiante. De fato, a massa ADM (6.28) representa toda a energia (massa) contida na superfície espacial bidimensional. Neste caso, temos que esta quantidade geral é constante. Essa constância ocorre porque a superfície intercepta o vórtice de buraco negro, cuja massa aumenta (aumenta a radiação) quando Λ diminui (como veremos mais adiante). Por outro lado, a superfície também interceptará a radiação. Assim, a massa ADM é responsável por ambas as formas de energia, e neste caso temos uma quantidade conservada.

Portanto, a expressão de massa no *background* AdS₃ é

$$M_{\text{AdS}_3} = 2\pi\alpha_0(A_0(R) - A(R)). \quad (6.33)$$

Assim, o espaço-tempo do buraco negro BTZ é recuperado assintoticamente. De fato, para modelos BTZ, define-se α_0 como $1/2\pi$ e $C = 0$. Neste caso, $M = -D$, então $A(R) = -R^2\Lambda - M$, e $B(R) = \kappa A(R)$ representa o espaço-tempo do buraco negro BTZ assintoticamente. Para mais detalhes consulte a referência [224].

6.3.1 Representação integral da massa

Podemos resolver as equações de movimento para a função métrica $A(r)$ em termos de campos de matéria. Para fazer isso, permita-nos considerar a equação (6.20) para $A'(r)$. A representação integral para a massa ADM do vórtice embutido no *background* AdS₃ é

$$M_{\text{AdS}_3} = 2\pi\alpha_0 \int \left\{ -2\pi\Lambda + 2\pi G \left[\frac{4v^2(n - a(r))^2 \tanh(r^\alpha)^2}{r} - 2r\lambda v^4 \text{sech}(r^\alpha)^4 \right] \right\} dr, \quad (6.34)$$

i. e., a massa M_{AdS_3} não depende puramente de campos de matéria. De fato, a massa é dependente da constante cosmológica e da constante gravitacional quando o campo de matéria é descrito por um sóliton topológico. O valor numérico da massa AdS_3 é mostrado na tabela 3, para vários valores da constante cosmológica e para os primeiros valores de α .

Tabela 3 – Tabela com o resultado numérico da massa M_{AdS_3} assumindo $R = 10$ e $G = 1$.

α	(n, ν, Λ)	M_{AdS_3}
1	$(1, 1, -1)$	545,40
	$(1, 1, -2)$	940,40
	$(1, 1, -3)$	1334,97
2	$(1, 1, -1)$	482,06
	$(1, 1, -2)$	876,84
	$(1, 1, -3)$	1271,63

6.4 Termodinâmica dos buracos negros de vórtices

Deixe-nos usar o formalismo de Hamilton-Jacobi para estudar a termodinâmica de buracos negros através da abordagem de tunelamento [294, 295, 296, 297, 298]. O objetivo principal desta técnica é obter a temperatura Hawking para o buraco negro gerada pelo perfil da função métrica (6.20).

A ideia básica do método de tunelamento é calcular a probabilidade de partículas criadas perto do horizonte de eventos escaparem do buraco negro através do tunelamento quântico. Isso é possível quando interpretamos a radiação de Hawking como um processo de emissão através do buraco negro. Esse processo de emissão ocorre devido à criação espontânea de pares de partículas dentro do horizonte de eventos. Partículas com energia negativa permanecem dentro do buraco negro e contribuem para sua perda de massa. A partícula de energia positiva consegue escapar do horizonte através de um “túnel” rumo ao infinito. Assim é possível associar a probabilidade de tunelamento à temperatura do buraco negro. A principal vantagem de usar o método de tunelamento para investigar a termodinâmica do buraco negro é que as propriedades termodinâmicas estão relacionadas com a geometria do espaço-tempo, permitindo uma ampla aplicação às diversas variedades de espaço-tempo [299, 300, 301, 302].

Perto do horizonte de evento do buraco negro, temos apenas os termos temporais e radiais da métrica, uma vez que a parte angular é desviada para o vermelho. Assim, a métrica se

torna bidimensional, ou seja,

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A(r)^{-1}dr^2. \quad (6.35)$$

Pode-se encontrar mais detalhes na referência [303].

Considerando uma perturbação de um campo escalar massivo ϕ ao redor do *background* do buraco negro, obtém-se

$$\hbar^2 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (6.36)$$

A equação acima é uma equação tipo Klein-Gordon onde m é a massa associada ao campo ϕ .

Usando a decomposição em harmônicos esféricos, chega-se à

$$-\partial_t^2 \phi + A(r)^2 \partial_r^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_r A(r)^2 \partial_r \phi - \frac{m^2}{\hbar^2} A(r) \phi = 0. \quad (6.37)$$

Nessa abordagem o campo ϕ é um campo semiclássico associado a partículas criadas no buraco negro. Assim, podemos usar a chamada aproximação WKB [304], adotando o *ansatz* [294, 295, 296, 297, 298]:

$$\phi(t, r) = \exp \left[\frac{1}{\hbar} \mathcal{S}(t, r) \right], \quad (6.38)$$

obtemos à solução da equação (6.37).

Note que a equação (6.37) para pequenas ordens em \hbar é

$$(\partial_t \mathcal{S})^2 - A(r)^2 (\partial_r \mathcal{S})^2 - m^2 A(r) \phi = 0, \quad (6.39)$$

onde as soluções tipo partícula tem a forma [294, 295, 296, 297, 298]

$$\mathcal{S}(t, r) = -\omega t + W(r). \quad (6.40)$$

Aqui ω é uma constante que pode ser pensada como a energia da radiação emitida. Substituindo a solução (6.40) na equação (6.39), verifica-se que

$$W(r) = \pm \int \frac{dr}{A(r)} \sqrt{\omega^2 - m^2 A(r)}, \quad (6.41)$$

onde a solução positiva representa a partícula emitida e a solução negativa a partícula que tunela. Permita-nos agora nos concentrar na solução das partículas emitidas, pois essas soluções está associada as partículas que emitem radiação à medida que cruzam o horizonte de eventos. Por

simplicidade, é conveniente assumir que $A(r)$ encontra-se muito próximo ao horizonte de eventos, i. e., r_+ . Isto nos leva à

$$A(r) = A(r_+) + A'(r_+)(r - r_+) + \dots \quad (6.42)$$

Desta forma, a equação (6.41) torna-se

$$W(r) = \int \frac{dr}{A'(r_+)} \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2 A'(r_+)(r - r_+)}}{(r - r_+)}. \quad (6.43)$$

Usando o teorema dos resíduos para resolver a integral (6.43), obtém-se que

$$W(r_+) = \frac{2\pi i \omega}{A'(r_+)} + (\text{real contribution}). \quad (6.44)$$

Portanto, a probabilidade de uma partícula escapar do buraco negro através do tunelamento é

$$\Gamma \sim \exp(-2im\mathcal{I}) = \exp\left[-\frac{4\pi\omega}{A'(r_+)}\right]. \quad (6.45)$$

Ao comparar a probabilidade de tunelamento (6.45) com o fator de Boltzmann $e^{-\omega/T}$, conclui-se diretamente que a temperatura de Hawking é

$$T_H = \frac{\omega}{2im\mathcal{I}} = \frac{A'(r_+)}{4\pi}. \quad (6.46)$$

Analisando os resultados numéricos apresentados anteriormente para o vórtice de buraco negro, pode-se ver que $r_+ \approx 1,5$. Observe que a temperatura de Bekenstein-Hawking T_H só pode ser obtida numericamente para este modelo. Para o caso $\lambda = \nu = \alpha = 1$ e $\Lambda = -1$, $T_H \approx 0,2021$. A figura 56 representa a temperatura de Bekenstein-Hawking, variando o parâmetro α que controla a formação da estrutura compacta (e os vórtice com o perfil de anel) do modelo (Figura 56a), e variando a constante cosmológica Λ (Figura 56b).

6.5 Observações finais sobre o modelo

Neste capítulo, estudamos a influência do campo de matéria e do campo de calibre nas funções métricas de um espaço AdS_3 . Para este estudo, foi considerado um campo de matéria axialmente simétrico, com uma variável de campo descrita por uma solução solitônica com capacidade de ser contraída. Por simplicidade, consideramos para nosso estudo um caso particular da métrica tridimensional ($A(r) = B(r)$). Nesse cenário, o estudo sugere que as estruturas tridimensionais do espaço AdS_3 são topológicas e os buracos negros produzidos por vórtices magnéticos possuem um fluxo quantizado.

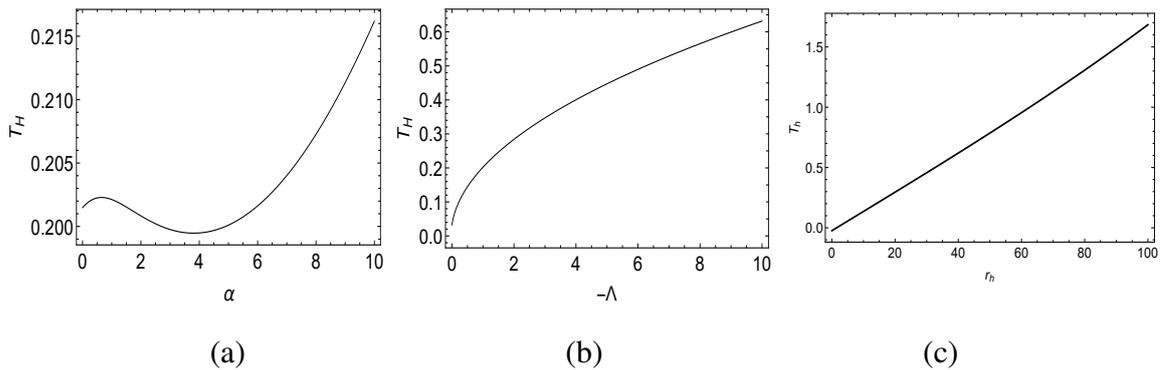


Figura 56 – Resultado numérico da temperatura Bekenstein-Hawking. (a) Gráfico quando $\Lambda = -1$ e $\lambda = \nu = 1$. (b) Gráfico quando $\lambda = \nu = \alpha = 1$. (c) Comportamento da temperatura Bekenstein-Hawking em função do raio do horizonte de evento r_h (r_+) quando $\Lambda = -1$ e $\lambda = \nu = \alpha = 1$.

Ao estudar o caso particular $A(r) = B(r)$, surge um resultado interessante devido ao perfil do campo de matéria, ou seja, as funções métricas devem ser do tipo buraco negro com horizonte em $r_+ \approx 1,5$. Este resultado é interessante porque generaliza o resultado da referência [224]. Nesse trabalho, uma solução tipo de *kink* da variável de campo gera funções métricas definidas positivamente com uma singularidade em $r = 0$ e, portanto, essa estrutura será um buraco negro produzido por um vórtice. Acreditamos que possam surgir também nos modelos apresentado na referência [224], se algum mecanismo de ajuste do campo de matéria for usado para ajustar a variável de campo e torná-la um “*kink* verdadeiro”.

Nossos resultados de vórtice de buraco negro são confirmados pela análise escalar de Kretschmann e Ricci, bem como pela curvatura do modelo. Analisando essas quantidades, pode-se ver que assintoticamente as soluções métricas devem depender apenas da constante cosmológica. Consequentemente, esta constante cosmológica influenciará diretamente os resultados numéricos da massa M_{AdS_3} .

Por inspeção, notou-se que a constante cosmológica deve ser negativa ou zero, implicando o surgimento de vórtices de buracos negros. Essas estruturas já foram comprovadas na chamada gravidade massiva de Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) [305]. Portanto, isso sugere que nossos resultados são compatíveis com a literatura existente.

Através do formalismo de tunelamento, foi mostrado que as propriedades termodinâmicas do buraco negro são modificadas pela constante cosmológica, e pelo parâmetro de compactação do campo. A mudança de temperatura do buraco negro ocorre devido à modificação da gravidade superficial, que é consequência da modificação da geometria. Alterar a geometria também é responsável por alterar a área da superfície do vórtice do buraco negro.

Assim, observa-se que as estruturas mais compactas do campo de matéria irão influenciar a geometria de forma que a temperatura dos vórtices de buracos negros é modificada.

Por fim, observa-se que a compactação do campo de matéria altera o perfil do campo de calibre, tornando o campo magnético do vórtice mais intenso e permitindo o surgimento de estruturas tipo anéis com emissão de fluxo magnético quantizado. As configurações topológicas compactas também geram estruturas com menor massa ADM, quando comparadas a estruturas regidas pela variável de campo com perfil de *kink*. Observe que, apesar das estruturas compactas terem um perfil de massa menor, elas ainda têm uma contribuição muito alta quando comparadas com o resultado de massa da referência [224]. Acreditamos que essa característica se deve à contribuição explícita da constante cosmológica e ao fato do modelo admitir buracos negros, o que não era possível na referência [224].

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese de doutorado, foi realizado o estudo dos aspectos físicos das estruturas topológicas bidimensionais e tridimensionais, i. e., as estruturas tipo *kink* e vórtices que surgem em modelos de teoria clássica de campos.

Obtemos uma descrição analítica das estruturas topológicas de uma teoria de multi-campos com interação ϕ^6 . Essas soluções analíticas permitem contrair geometricamente as estruturas tipo *kink* obtidas. Nota-se que diferente da teoria usual no caso da teoria de multi-campo com interação ϕ^6 as estruturas interpolam entre os vácuos $\phi^{(0)} = 0$ e $\phi^{(0)} = 1$. Este resultado é importante, uma vez que difere das teorias usuais em que geralmente a interação assume a forma $V \propto (1 - \phi^2)^2$ e os campos interpolam entre os vácuos $\phi^{(0)} = \pm 1$. Além disso, adotando argumentos oriundos da teoria da informação, ou mais precisamente, da entropia configuracional, mostramos que o valor mais apropriado para a ordem da função generalização ocorre quando $n = 6$. Este resultado mostra que as estruturas topológicas mais prováveis são configurações tipo *kink* em ambos os setores topológicos.

Considerando o cenário de gravidade *dilaton*, concluímos que a gravidade *dilaton* bidimensional com a métrica (3.35) induz a deformação no campo da matéria. Desta forma, as soluções que descrevem o campo de matéria possuem um perfil semelhante à um duplo-*kink*. Estes resultados nos leva a acreditar que a deformação das estruturas *kink* para o duplo-*kink* esteja relacionada ao perfil do fator de *warp* considerado. Além disso, conclui-se que pares de estruturas (amplamente espaçadas) com cargas topológicas opostas, sofrem a ação de uma interforça atrativa, que induz o processo de espalhamento. Um resultado desse espalhamento é uma dispersão de estruturas do tipo duplo-*kink* particularmente interessante porque o processo dependerá da velocidade inicial. Em nosso modelo, no processo de espalhamento tem dois resultados possíveis. Para velocidades iniciais na faixa $0,965 < v_{in} < 0,153$, as estruturas irão colidir e se aniquilar e irradiar sua energia. Por outro lado, para velocidades iniciais na faixa $0,153 < v_{in} < 0,965$, a estrutura será espalhada, e sua forma sofrerá uma reflexão. Nesse caso, a energia antes e depois da colisão é a mesma, de modo que obtemos um processo colisão elástico. Para finalizar nossa análise, considerando os resultados da entropia configuracional sugerimos que múltiplas transições de fase (ou pelo menos duas) ocorrem nas proximidades de $r = 0$. Esses resultados mostram que as paredes de domínios estão em uma região ao redor da faixa de valores no espectro de potência, ou seja, $|k| < 0.69$.

Notamos que a forma adequada da função permeabilidade dielétrica deve ser do

tipo logarítmico. Partindo deste pressuposto, estudamos os vórtices magnéticos de uma teoria do tipo Maxwell-Gausson. Nesse cenário, observa-se a existência de estruturas de vórtices na teoria. Neste caso, os vórtices magnéticos possuem um campo magnético intenso próximo ao núcleo e um fluxo magnético quantizado. Constatamos, também, que quando a função $f(|\phi|)$ assume formas polinomiais, os vórtices passam a ter um campo magnético mais intenso tornando a energia mais localizada. Além disso, nota-se que se a generalização $f(|\phi|)$ for constante, os vórtices topológicos do modelo não surgem na teoria. Neste caso, somente soluções não-topológicas de energia nula existirão, ou seja, as soluções seriam sólitons triviais do modelo. Além destes resultados, mostramos a existência de soluções tipo vórtices para teorias não-canônicas. Neste cenário, nota-se a presença de estruturas com campo magnético nulo próximo à origem ($r = 0$), originando os chamados vórtices semelhantes à anéis. Neste caso, as estruturas de vórtices possuem também um fluxo magnético quantizado dado por $2\pi n/e$. Além do mais, devido ao comportamento da variável de campo $f(r)$, as configurações de energia do vórtices localizados têm o perfil semelhante à uma função $\text{sech}(r)^2$. Para fechar a discussão deste modelo, observa-se que quando o parâmetro $\lambda \rightarrow 0$ (constante de proporcionalidade da interação), o modelo suporta apenas soluções não-topológicas.

Ao considerar as teorias de multi-campos com o modelo sigma-O(3) acoplado não minimamente ao campo de calibre, conclui-se que as propriedades físicas do vórtice dependem do perfil da função generalização. Ao analisar os resultados, nota-se que as soluções do campo escalar real são tipo *kink*. Enquanto isso, para o campo sigma Φ , observamos três possibilidades iniciais para o surgimento de uma nova classe de estruturas. As possibilidades são o modelo canônico usual (no caso $\mathcal{F} = 1$), o caso puro e o caso misto. O caso puro ocorre quando o termo cinético não-canônico é generalizado por uma contribuição do campo Φ . Enquanto isto, o modelo misto generaliza o setor topológico do modelo sigma com uma função do setor $\psi(r)$. Em todos os casos, pode-se perceber que a densidade de energia do vórtice encontra-se relacionada ao parâmetro α . Para valores maiores de α , a densidade de energia do modelo tenderá a se localizar próximo da localização do *kink*. Por outro lado, o parâmetro β do modelo sigma é responsável por alterar a intensidade do campo magnético do vórtice, modificando assim a intensidade do fluxo magnético da estrutura. É interessante mencionar que todos os vórtices encontrados possuem um fluxo magnético quantizado. No caso canônico, nota-se que independente da ordem da generalização do setor sigma (i. e., o parâmetro m da generalização ϕ_3^m) a energia permanece constante. É interessante mencionar, neste caso, que a energia também permanece inalterável sob

a mudança do parâmetro α (parâmetro responsável pela contração do *kink* no setor ψ). Devido a essas peculiaridades das soluções numéricas, a densidade de energia BPS dos vórtices é a mesma para os casos $m = 1$ e $m = 2$. Também observamos que modificando o parâmetro α , anéis de energia se formam na teoria, de modo que, a energia irradiada pela estrutura é mais intensa para essas configurações quando α é grande. Finalmente, resultados atrativos aparecem no caso misto, i. e., quando assumimos uma generalização em termos do campo $\psi(r)$. Nesse caso, a parte cinética do modelo sigma é generalizada pelo campo ψ . Isto induz configurações de campo variável $f(r)$ com um perfil semelhante à função degrau. Assim, concluímos que o *kink* do setor topológico ψ está interferindo (através do termo de generalização) sobre um setor sigma, de modo que a única solução possível para esta configuração de campo, nesta situação, será um campo com o perfil da função degrau. Neste caso, a solução da variável de campo $f(r)$ é uma solução não-física.

Considerando um modelo sigma não-mínimo com uma contribuição não-canônica tipo *cuscuton*, conclui-se que o campo *cuscuton* terá uma contribuição não-trivial para a densidade de energia das estruturas. Entretanto, no limite BPS, o *cuscuton* pode ser interpretado como uma impureza do setor topológico do campo sigma. Na verdade, para obter esta conclusão foi necessário assumir uma teoria topológica efetiva sem interação, i. e., $\mathcal{V} = 0$. Neste cenário, o modelo de multi-campo sem interação e não-mínimo provou suportar vórtices eletricamente neutros que engendram uma estrutura interna. Além disso, o campo magnético dos vórtices toma a forma de anéis a medida que a contribuição canônica aumenta na teoria. Em outras palavras, as estruturas de anéis tornam-se bem definidas se a contribuição de *cuscuton* aumenta quando o parâmetro α aumenta. Conseqüentemente, à medida que η aumenta, o fluxo do campo magnético aumenta e, portanto, a energia irradiada pelo vórtice aumenta. Em geral, podemos interpretar isso como consequência do comportamento do campo de matéria e do campo de calibre no setor topológico do modelo sigma.

Finalmente, ao adotar um campo de matéria axialmente simétrico, com uma variável de campo descrita por uma solução solitônica com capacidade de ser contraída, obtém-se para um espaço-tempo com métrica $ds^2 = A(r) dt^2 + A(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$, vórtices de buracos negros magnéticos com fluxo magnético quantizado. Particularmente, essas estruturas surgem quando o perfil do campo de matéria possui um perfil solitônico ajustável. Neste cenário, as funções métricas são do tipo buraco negro e apresentam um horizonte de eventos em $r_+ \approx 1,5$. Por inspeção, nota-se que a constante cosmológica deve ser negativa ou zero, para que os vórtices de

buracos negros possam emergir da teoria. Para finalizar, conclui-se que modificações do campo de matéria irão influenciar a geometria do espaço-tempo modificando a temperatura Hawking dos vórtices de buracos negros.

7.1 Perspectivas

Para finalizar, as principais perspectivas desta tese serão estudar estruturas topológicas quadridimensionais com simetria estendida, como, por exemplo, as soluções de monopólos generalizadas. Além disso, buscaremos analisar estruturas bidimensionais e tridimensionais na vizinhança de um defeito geométrico. Também, analisaremos a influência da violação de Lorentz em teorias de multi-campos. Adicionalmente, estudaremos vórtices topológicos acoplados à eletrodinâmicas exóticas.

REFERÊNCIAS

- [1] ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D., Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, **Phys. Rev. Lett.**, v. 15, p. 240, 1965.
- [2] SHNIR, Y. M., Topological and non-topological solitons in scalar field theories, **Cambridge University Press**, (2018).
- [3] CHALUB, F. A. C. C.; ZUBELLI, J. P., Sólitos: Na crista da onda por mais de 100 anos, **Matemática universitária**, v. 30, p.41, 2001.
- [4] BOUSSINESQ J., Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, **CR Acad. Sci.**, Paris, v. 72, p. 755, 1871.
- [5] RAYLEIGH L., On waves, **Phil. Mag.**, v. 1, p. 257, 1876.
- [6] MUCALICA A., Soliton solution for the Korteweg-de Vries Equation, **MacEwan University Student eJournal**, v. 6, p. 1, 2022.
- [7] KORTEWEG D. J.; de VRIES, G., XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, **Phil. Mag.**, v. 39, p. 422, 1895.
- [8] NAKAHARA, M., Geometry, topology and physics, **CRC press**, 2018.
- [9] BUNKOV, Y. M.; GODFRIN H., Topological Defects and the Non-Equilibrium Dynamics of Symmetry Breaking Phase Transitions, **Springer Science & Business Media**, v. 549, 2012.
- [10] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P., Topological Solitons, **Cambridge University Press**, 2004.
- [11] YALUSSHEVICH, L. V.; SAVIN, A. V.; MANEVITCH, L. I., Nonlinear dynamics of topological solitons in DNA, **Phys. Rev. E**, v. 66, p. 016614, 2002.
- [12] SCOTT, A. C., Soliton oscillations in DNA, **Phys. Rev. A**, v.31 p. 3518(R), 1985.
- [13] MUTO, V.; HALDING, J.; CHRISTIANSEN, P. L.; SCOTT, A. C., Solitons in DNA, **Journal of Biomolecular Structure and Dynamics**, v. 5, p. 4, 1988.
- [14] FERNÁNDEZ, A., Proton exchange activity as a probe for solitons in RNA, **Physica A**, v. 167, p. 338, 1990.

- [15] PROHOFSKY, E. W., Solitons hiding in DNA and their possible significance in RNA transcription, **Phys. Rev. A**, v. 38, p. 1538, 1988.
- [16] SEIDEL, J., Nanoelectronics based on topological structures, **Nature Materials**, v. 19, p. 188, 2019.
- [17] RAJARAMAN, R., Solitons and instantons, **North Holland**, 1987.
- [18] KIBBLE, T. W. B., Topology of cosmic domains and strings, **J. Phys. A**, v. 9, p. 1387, 1976.
- [19] KIBBLE, T. W. B., Spontaneous symmetry breaking in gauge theories, **Phil. Trans. R. Soc. A**, v. 373, p. 20140033, 2015.
- [20] RYDER, L. H., Quantum field theory, **Cambridge university press**, 2nd ed., 1996.
- [21] ANDERSON, P. W., Plasmons, Gauge Invariance, and Mass, **Phys. Rev.**, v. 130, p. 439, 1963.
- [22] ENGLERT, F; BROUT R., Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, **Phys. Rev. Lett.**, v. 13, p. 321, 1964.
- [23] HIGGS, P. W., Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, **Phys. Rev. Lett.**, v. 13, p. 508, 1964.
- [24] QUIGG, C., Spontaneous symmetry breaking as a basis of particle mass, **Rep. Prog. Phys.**, v. 70, p. 1019, 2007.
- [25] COTĂESCU, I. I., $SU(n) \otimes U(1)_c$ Gauge Models with Spontaneous Symmetry Breaking, **Int. J. Mod. Phys.**, v. 12, p. 1483, 1997.
- [26] GAILLARD, M. K.; GRANNIS P. D.; SCIULLI, F. J., The standard model of particle physics, **Rev. Mod. Phys.**, v. 71, p. 596, 1999.
- [27] GLASHOW, S. L., Partial Symmetries of Weak Interactions, **Nucl. Phys.**, v. 20, p. 579, 1961.
- [28] WEINBERG, S., A model of Leptons, **Phys. Rev. Lett.**, v. 19, p. 1264, 1967.
- [29] GLASHOW, S.; ILIOPOULOS, J.; MAIANI, L., Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry, **Phys. Rev. D**, v. 2, p. 1285, 1970.

- [30] GUTH, A. H., Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, **Phys. Rev. D**, v. 23, p. 347, 1981.
- [31] VACHASPATI, T., Formation of topological defects, **Phys. Rev. D**, v. 44, p. 3723, 1991.
- [32] NETO, A. G. S., Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação, **Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física da Universidade de Brasília, Brasília**, p. 86, 2006.
- [33] PRESKILL, J., Cosmological production of superheavy magnetic monopoles, **Phys. Rev. Lett.**, v. 43, p. 1365, 1979.
- [34] DIRAC, P. A. M., Quantised singularities in the electromagnetic field, **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 133, p. 60, 1931.
- [35] DIRAC, P. A. M., The Theory of Magnetic Poles, **Phys. Rev.**, v. 74, p. 817, 1948.
- [36] 't HOOFT, G., Magnetic monopoles in unified gauge theories, **Nucl. Phys. B**, v. 79, p. 276, 1974.
- [37] POLYAKOV, A. M., Particle Spectrum in Quantum Field Theory, **JETP Lett.**, v. 20, p. 194, 1974.
- [38] ROSSI, P., Exact results in the theory of non-Abelian magnetic monopoles, **Phys. Rep.**, v. 86, p. 317, 1982.
- [39] EINHORN, M. B.; STEIN, D. L., Are grand unified theories compatible with standard cosmology?, **Phys. Rev. D**, v. 21, p. 3295, 1980.
- [40] OLIVE, K. A.; SECKEL D., Primordial Inflation and the Monopole Problem, **J.L. Stone (eds), Monopole, springer**, v. 83, p. 11, 1984.
- [41] SHIFMAN M., Simple models with non-Abelian moduli on topological defects, **Phys. Rev. D**, v. 87, p. 025025, 2013.
- [42] VILENKIN A., Cosmic strings and domain walls, **Phys. Rep.**, v. 121, p. 263, 1985.
- [43] HINDMARSHIS M. B.; KIBBLE, T. W. B., Cosmic strings, **Rep. Prog. Phys.**, v. 58, p. 411, 1995.

- [44] NIELSEN, H. B.; OLESEN P., Vortex-line models for dual strings, **Nuc. Phys. B**, v. 61, p. 45, 1973.
- [45] LOHE, M. A., Soliton structures in $P(\phi)_2$, **Phys. Rev. D**, v. 20, p. 3120, 1979.
- [46] GANI, V. A.; KUDRYAVTSEV A. E.; LIZUNOVA M. A., Kink interactions in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^6 model, **Phys. Rev. D**, v. 89, p. 125009, 2014.
- [47] GANI, V. A.; LENSKY V.; LIZUNOVA, M. A., Kink excitation spectra in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^8 model, **JHEP**, v. 2015, p. 147, 2015.
- [48] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E., Do we live inside a domain wall?, **Phys. Lett. B**, v. 125, p. 136, 1983.
- [49] VACHASPATI, T., Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons, **Cambridge University Press**, Cambridge, England, 2006.
- [50] de LEEUW, I. H.; DOEL, R. V. D.; ENZ, U., Dynamic properties of magnetic domain walls and magnetic bubbles, **Rep. Prog. Phys.**, v. 43, p. 689, 1980.
- [51] MALOZEMOF, A. P.; SLONCZEWSKI J. C., Magnetic domain walls in bubble materials: advances in materials and device research, **Academic press**, 2016.
- [52] NATAF, G. F.; GUENNOU M., Optical studies of ferroelectric and ferroelastic domain walls, **J. Phys.: Condens. Matter**, v. 32, p. 183001, 2020.
- [53] EVERETT, A. E.; VILENKIN, A., Left-right symmetric theories and vacuum domain walls and strings, **Nuc. Phys. B**, v. 207, p. 43, 1982.
- [54] LUKAS, A; OVRUT, B. A.; STELLE K. S.; WALDRAM, D., Universe as a domain wall, **Phys. Rev. D**, v. 59, p. 086001, 1999.
- [55] GEORGE, D. P.; TRODDEN M.; VOLKAS, R. R., Extra-dimensional cosmology with domain-wall branes, **JHEP**, v. 2009, p. 02, 2009.
- [56] ARAI, M.; BLASCHKE, F.; ETO, M.; SAKAI, N., Grand unified brane world scenario, **Phys. Rev. D**, v. 96, p. 115033, 2017.
- [57] DZHUNUSHALIEV V., FOLOMEEV V.; MINAMITSUJI, M., Thick brane solutions, **Rep. Prog. Phys.**, v. 73, p. 066901, 2010.

- [58] KOBAYASHI S.; KOYAMA K.; SODA J., Thick brane worlds and their stability, **Phys. Rev. D**, v. 65, p. 064014, 2002.
- [59] SCHULTHEIß, J.; ROJAC, T.; MEIE, D., Unveiling Alternating Current Electronic, Properties at Ferroelectric Domain Walls, **Adv. Electron. Mat.**, v. 8, p. 21100996, 2022.
- [60] MEIER D.; SELBACH, S. M., Ferroelectric domain walls for nanotechnology, **Nat. Rev. Mat**, v. 7, p. 157, 2022.
- [61] BEDNYAKOV, P. S.; STURMAN, B. I.; SLUKA, T.; TAGANTSEV A. K.; YUDIN, P. V., Physics and applications of charged domain walls, **Computational Materials**, v. 4, p. 65, 2018.
- [62] MEIER, D. Functional domain walls in multiferroics. **J. Phys.: Condens. Matt.**, v. 27, p. 463003, 2015.
- [63] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; MOTA-SILVA, J. C., Kondo effect from a Lorentz-violating domain wall description of superconductivity, **Phys. Lett. B**, v. 762, p. 327, 2016.
- [64] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; FONSECA, R. C., Fermion states on domain-wall junctions and the flavor number, **Eur. Phys. J. C**, v. 63, p. 163, 2009.
- [65] BAZEIA, D., BRITO, F. A.; COSTA, F. G., First-order framework and domain-wall/brane-cosmology correspondence, **Phys. Lett. B**, v. 661, p. 179, 2008.
- [66] ZHU, X.; GUO, Y.; LIU, X.; JIAO, Y.; WANG, Y.; ZHOU, S., Kink soliton dynamics for systems incorporating higher-order nonlinearity and dispersion, **Eur. Phys. J. D**, v. 76, p. 28, 2022.
- [67] STOETZEL, B., Two-dimensional gravitation and Sine-Gordon solitons, **Phys. Rev. D**, v. 52, p. 2192, 1995.
- [68] ZHONG, Y., Revisit on two-dimensional self-gravitating kinks: superpotential formalism and linear stability, **JHEP**, v. 04, p. 118, 2021.
- [69] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., New class of solutions in the non-minimal O(3)-sigma model, **Phys. Lett. B**, v. 829, p. 137042, 2022.
- [70] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Phase transitions in the logarithmic Maxwell O(3)-sigma model, **Eur. Phys. J. C**, v. 81, p. 1044, 2021.

- [71] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Differential configurational complexity and phase transitions of the BPS solutions in the $O(3)$ -sigma model, **Ann. Phys.**, v. 442, p. 168904, 2022.
- [72] ROMANCZUKIEWICZ, T., Creation of kink and antikink pairs forced by radiation, **J. Phys. A, Math. Gen.**, v. 39, p. 3479, 2006.
- [73] DUTTA, S.; STEER, D. A.; VACHASPATI, T., Creating kinks from particles, **Phys. Rev. Lett.**, v. 101, p. 121601, 2008.
- [74] MARJANEH, A. M.; SAADATMAND, D.; ZHOU, K.; DMITRIEV, S. V.; ZOMORRODIAN, M. E., High energy density in the collision of n kinks in the ϕ^4 model, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, v. 49, p. 30, 2017.
- [75] MARJANEH, A. M.; ASKARI, A.; SAADATMAND D.; DMITRIEV, S. V., Extreme values of elastic strain and energy in sine-Gordon multi-kink collisions, **Eur. Phys. J. B**, v. 91, p. 22, 2018.
- [76] YAN, H.; ZHONG, Y.; LIU, Y. -X.; MAEDA, K.-I., Kink-antikink collision in a lorentz-violating ϕ^4 model, **Phys. Lett. B**, v. 807, p. 135542, 2020.
- [77] EVSLIN, J., The two-loop ϕ^4 kink mass, **Phys. Lett. B**, v. 822, p. 136628, 2021.
- [78] SAXENA, A.; CHRISTOV, I. C.; KHARE, A., Higher-order field theories: ϕ^6 , ϕ^8 and beyond. In: A Dynamical Perspective on the ϕ^4 Model. **Springer**, Cham., p. 253, 2019.
- [79] HERZOG, C. P.; KOBAYASHI, N., The $O(N)$ model with ϕ^6 potential in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, **JHEP**, v. 2020, p. 126, 2020.
- [80] KWON, O-KAB; KIMB, C.; KIMA, Y., Supersymmetric inhomogeneous field theories in $1 + 1$ dimensions, **JHEP**, v. 2022, p. 140, 2022.
- [81] AMADO, A.; MOHAMMADI, A., A ϕ^6 soliton with a long-range tail, **Eur. Phys. J. C**, v. 80, p. 576, 2020.
- [82] BAZEIA, D., MARQUES, M. A.; MENEZES, R., Quasi-compact vortices, **Europhys. Lett.**, v. 129, p. 31001, 2020.
- [83] BAZEIA, D., LOSANO, L., MARQUES, M. A.; MENEZES, R., Analytic vortex solutions in generalized models of the Maxwell-Higgs type, **Phys. Lett. B**, v. 778, p. 222, 2018.

- [84] BAZEIA, D., MARQUES, M. A.; MELNIKOV, D., Planar ringlike vortices, **Phys. Lett. B**, v. 785, p. 454, 2018.
- [85] WEINBERG, E. J., Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics, **Cambridge University Press**, 2012.
- [86] VILENKIN A.; SHELLARD, E. P. S., Cosmic Strings and Other Topological Defects, **Cambridge University Press**, 2000.
- [87] SINGH, V.; BROWNE, D. A.; HAYMAKER, R. W., Structure of Abrikosov vortices in $SU(2)$ lattice gauge theory, **Phys. Lett. B**, v. 306, p. 115, 1993.
- [88] ABRIKOSOV, A. A., On the magnetic properties of superconductors of the second type, **Zh. Ā.ksp. Teor. Fiz.**, v. 32, p. 1442, 1957; ABRIKOSOV, A. A., On the magnetic properties of superconductors of the second group, **Sov. Phys. JETP**, v. 5, p. 1174, 1957.
- [89] GOLOD, T.; IOVAN, A.; KRASNOV, V. M., Single Abrikosov vortices as quantized information bits, **Natur. Comm.**, v. 6, p. 1, 2015.
- [90] POLCHINSKI, J.; STROMINGER, A., Effective string theory, **Phys. Rev. Lett.**, v. 67, p. 1681, 1991.
- [91] HANANY, A.; TONG, D., Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics, **JHEP**, v. 2004, p. 066, 2004.
- [92] JACKIW, R., WEINBERG, E. J., Self-dual chern-simons vortices, **Phys. Rev. Lett.**, v. 64, p. 2234, 1990.
- [93] BABICHEV, E., Gauge k -vortices, **Phys. Rev. D**, v. 77, p. 065021, 2008.
- [94] FLOOD, S. P.; SPEIGHT, J. M., Chern–Simons deformation of vortices on compact domains, **J. Geom. and Phys.**, v. 133, p. 153, 2018.
- [95] FORGÁCS, P.; LUKÁCS, A., Stabilization of semilocal strings by dark scalar condensates, **Phys. Rev. D**, v. 95, p. 035003, 2017.
- [96] BAZEIA, D.; CASANA, R.; FERREIRA JR., M. M.; DA HORA, E., Nontopological self-dual Maxwell-Higgs vortices, **Europhys. Lett.**, v. 109, p. 21001, 2015.

- [97] LEE, K. M., Vortex dynamics in self-dual Maxwell-Higgs systems with a uniform background electric charge density, **Phys. Rev. D**, v. 49, p. 4265, 1994.
- [98] ADAM, C.; KLIMAS, P.; SÁNCHEZ-GUILLÉN J.; WERESZCZYŃSKI, A., Compact gauge k -vortices, **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 42, p. 135401, 2009.
- [99] CHERNODUB, M. N.; NEDELIN, A. S., Pipelike current-carrying vortices in two-component condensates, **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 125022, 2010.
- [100] WITTEN, E. Superconducting strings, **Nucl. Phys. B**, v. 249, p. 557, 1958.
- [101] LEE, J.; NAM, S., Bogomol'nyi equations of Chern-Simons Higgs theory from a generalized abelian Higgs model, **Phys. Lett. B**, v. 261, p. 437, 1991.
- [102] DERRICK, G. H., Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles, **J. Math. Phys.**, v. 5, p. 1252, 1965.
- [103] BOGOMOL'NYI, E. B., The stability of classical solutions, **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 24, p. 449, 1976.
- [104] PRASAD M. ; SOMMERFIELD, C., Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon, **Phys. Rev. Lett.**, v. 35, p. 760, 1975.
- [105] FINKELSTEIN, D., Kinks, **J. Math. Phys.**, v. 7, p. 1218, 1966.
- [106] GANI, V. A.; KUDRYAVTSEV, A. E., Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies, **Phys. Rev. E**, v. 60, p. 3305, 1999.
- [107] BAZEIA, D.; BELENDRYASOVA, E.; GANI, V. A., Scattering of kinks of the sinh-deformed ϕ^4 model, **Eur. Phys. J. C**, v. 78, p. 340, 2018.
- [108] EDELSTEIN, J. D.; TROBO, M. L.; BRITO, F. A.; BAZEIA, D., Kinks inside supersymmetric domain ribbons, **Phys. Rev. D**, v. 57, p. 7561, 1998.
- [109] JUBERT, P. -O.; ALLENSPACH, R.; BISCHOF, A., Magnetic domain walls in constrained geometries, **Phys. Rev. B**, v. 69, p. 220410 (R), 2004.
- [110] VANHAVERBEKE, A.; BISCHOF, A.; ALLENSPACH, R., Control of domain wall polarity by current pulses, **Phys. Rev. Lett.**, v. 101, p. 107202, 2008.

- [111] UCHIDA, K., ADACHI, H., OTA, T.; NAKAYAMA, H., MAEKAWA, S.; SAITOH, E., Observation of longitudinal spin-Seebeck effect in magnetic insulators, **Appl. Phys. Lett.**, v. 97, p. 172505, 2010.
- [112] MATSUNAMI, D.; POGOSIAN, L.; SAURABH, A.; VACHASPATI, T., Decay of cosmic string loops due to particle radiation, **Phys. Rev. Lett.**, v. 122, p. 201301, 2019.
- [113] DUTTA, S., STEER, D. A.; VACHASPATI, T., Creating kinks from particles, **Phys. Rev. Lett.**, v. 101, p. 121601, 2008.
- [114] TIN, P. V., Construction of multi-solitons and multi kink-solitons of derivative nonlinear Schrödinger equations, **Nonlinear analysis**, v. 221, p. 112915, 2022.
- [115] ZHONG, Y.; LI, F.-Y.; LIU, X.-D., K-field kinks in two-dimensional dilaton gravity, **Phys. Lett. B**, v. 822, p. 136716, 2021.
- [116] HENNEAUX, M., Quantum Gravity in Two Dimensions: Exact Solution of the Jackiw Model, **Phys. Rev. Lett.**, v. 54, p. 959, 1985.
- [117] de ALWIS, S., Quantization of a theory of 2d dilaton gravity, **Phys. Lett. B**, v. 289, p. 278, 1992.
- [118] VAZ, C; WITTEN, L., Evaporation of a naked singularity in 2d gravity, **Phys. Lett. B**, v. 325, p. 27, 1994.
- [119] VAZ, C; WITTEN, L., Do naked singularities form?, **Class. Quantum Gravity**, v. 13, p. L59, 1996.
- [120] CALLAN JR., C. G.; GIDDINGS, S. B.; HARVEY, J. A.; STROMINGER, A., Evanescent black holes, **Phys. Rev. D**, v. 45, p. R1005, 1992.
- [121] BILAL, A.; CURTIS, C., Liouville models of black hole evaporation, **Nucl. Phys. B**, v. 394, p. 73, 1993.
- [122] DUSUEL, S.; MICHAUX, P.; REMOISSENET, M., From kinks to compactonlike kinks, **Phys. Rev. E**, v. 57, p. 2320, 1998.
- [123] ABRAHAM, E. R. C.; TOWNSEND, P. K., Q-Kinks, **Phys. Lett. B**, v. 291, p. 85, 1992.

- [124] CHRISTOV, I. C., DECKER, R. J., DEMIRKAYA, A., GANI, V. A., KEVREKIDIS, P. G., KHARE A.; SAXENA, A., Kink-Kink and Kink-Antikink interactions with long-range tails, **Phys. Rev. Lett.**, v. 122, p. 171601, 2019.
- [125] MARJANEH, A. M.; GANI, V. A.; SAADATMAND, D.; DMITRIEV, S. V.; JAVIDAN, K., Multi-kink collision in the ϕ^6 model, **JHEP**, v. 2017, p. 28, 2017.
- [126] BELENDRYASOVA, E; GANI, V. A., Scattering of the ϕ^8 kinks with power-law asymptotics, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, v. 67, p. 414, 2019.
- [127] MANTON, N. S., Forces between kinks and antikinks with long-range tails, **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 52, p. 065401, 2019.
- [128] ZLOSHCHASTIEV, K. G., Classical and quantum comparison of kink and bell solitons as zero-branes, **Mod. Phys. Lett. A**, v. 15, p. 67, 2000.
- [129] ZLOSHCHASTIEV, K. G., Field-to-particle transition and nonminimal particles in sigma model, dilaton gravity and gauged supergravity, **Phys. Lett. B**, v. 519, p. 111, 2001.
- [130] MOREIRA, A. R. P.; SILVA, J. E. G.; LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Thick brane in $f(T, B)$ gravity, **Phys. Rev. D**, v. 103, p. 064046, 2021.
- [131] MOREIRA, A. R. P.; LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S. Geometrically contracted structure in teleparallel $f(T)$ gravity, **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 31, p. 2250080, 2022.
- [132] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Differential configurational entropy for multi-field of the ϕ^6 theory. **Europhys. Lett.**, v. 141, p. 10002, 2023.
- [133] BAZEIA, D.; LOBÃO Jr., A. S., New results for cuscuton multi-field brane, **Eur. Phys. J. C**, v. 82, p. 725, 2022.
- [134] CHRISTODOULIDIS, P.; ROESTA, D.; SFAKIANAKIS, E. I., Scaling attractors in multi-field inflation, **JCAP**, v. 12, p. 059, 2019.
- [135] BRONNIKOV, K. A.; KONONOGOV, S. A.; MELNIKOV, V. N., Brane world corrections to Newton's law, **Gen. Relativ. Gravit.**, v. 38, p. 1215, 2006.
- [136] RANDALL, L.; SUNDRUM, R., Large mass hierarchy from a small extra dimension, **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 3370, 1999.

- [137] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; MARCH-RUSSEL, J., Stabilization of submillimeter dimensions: The New guise of the hierarchy problem, **Phys. Rev. D**, v. 63, p. 064020, 2001.
- [138] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G.; KALOPEL, N., Manyfold universe, **JHEP**, v. 012, p. 010, 2000.
- [139] CHEN, J. W.; LUTY, M. A.; PONTON, E., A critical cosmological constant from millimeter extra dimensions, **JHEP**, v. 09, p. 012, 2000.
- [140] RÄSÄNEN, S., On ekpyrotic brane collisions, **Nucl. Phys. B**, v. 626, p. 183, 2002.
- [141] KHOURY, J., OVRUT, B. A., STEINHARDT, P. J.; TUROK, N., Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang, **Phys. Rev. D**, v. 64, p. 123522, 2001.
- [142] ZHONG, Y.; LI, F. -Y.; LIU, X. -D., K-field kinks in two-dimensional dilaton gravity, **Phys. Lett. B**, v. 822, p. 136716, 2021.
- [143] GRUMILLER, D.; KUMMER, W.; VASSILEVICH, D. V., Dilaton gravity in two dimensions, **Phys. Rep.**, v. 369, p. 327, 2002.
- [144] ISHII, T.; OKUMURA, S.; SAKAMOTO J.; YOSHIDA, K., Gravitational perturbations as TT-deformations in 2D dilaton gravity systems, **Nucl. Phys. B**, v. 951, p. 114901, 2020.
- [145] HARTMAN, T.; SHAGHOULIAN, E.; STROMINGER, A., Islands in asymptotically flat 2D gravity, **JHEP**, v. 07, p. 022, 2020.
- [146] TEITELBOIM, C., Gravitation and hamiltonian structure in two spacetime dimensions, **Phys. Lett. B**, v. 126, p. 41, 1983.
- [147] JACKIW, R., Lower dimensional gravity, **Nucl. Phys. B**, v. 252, p. 343, 1985.
- [148] MANN, R. B.; MORSINK, S.; SIKKEMA, A.; STEELE, T., Semiclassical gravity in $1 + 1$ dimensions, **Phys. Rev. D**, v. 43, p. 3948, 1991.
- [149] MANN, R.; MUREIKA, J., $(1 + 1)$ -dimensional entropic gravity, **Phys. Lett. B**, v. 703, p. 167, 2011.
- [150] BELENDRYASOVA, E.; GANI, V. A.; ZLOSHCHASTIEV, K. G., Kink solutions in logarithmic scalar field theory: Excitation spectra, scattering, and decay of bions, **Phys. Lett. B**, v. 823, p. 136776, 2021.

- [151] CORREA, R. A. C.; da ROCHA, R., Configurational entropy in braneworld models, **Eur. Phys. J. C**, v. 75, p. 522, 2015.
- [152] BRAGA, N. R. F.; da ROCHA, R., Configurational entropy of anti-de Sitter black holes, **Phys. Lett. B**, v. 767, p. 386, 2017.
- [153] BRAGA, N. R. F.; FERREIRA, Y. F.; FERREIRA, L. F., Configuration entropy and stability of bottomonium radial excitations in a plasma with magnetic fields, **Phys. Rev. D**, v. 105, p. 114044, 2022.
- [154] BRAGA, N. R. F.; JUNQUEIRA, O. C., Configuration entropy and confinement/deconfinement transition in holographic QCD, **Phys. Lett. B**, v. 814, p. 136082, 2021.
- [155] BRAGA, N. R. F.; JUNQUEIRA, O. C., Configuration entropy in the soft wall AdS/QCD model and the Wien law, **Phys. Lett. B**, v. 820, p. 136485, 2021.
- [156] GLEISER M.; STAMATOPOULOS, N., Information content of spontaneous symmetry breaking, **Phys. Rev. D**, v. 86, p. 045004, 2012.
- [157] GLEISER M.; STAMATOPOULOS, N., Entropic measure for localized energy configurations: Kinks, bounces, and bubbles, **Phys. Lett. B**, v. 713, p. 304, 2012.
- [158] GLEISER, M.; SOWINSKI, D. Information-entropic stability bound for compact objects: Application to Q-balls and the Chandrasekhar limit of polytropes, **Phys. Lett. B**, v. 727, p. 272, 2013.
- [159] GLEISER, M.; GRAHAM, N., Transition to order after hilltop inflation, **Phys. Rev. D**, v. 89, p. 083502, 2014.
- [160] GLEISER, M.; SOWINSKI, D., Configurational information approach to instantons and false vacuum decay in D-dimensional spacetime, **Phys. Rev. D**, v. 98, p. 056026, 2018.
- [161] BAZEIA, D.; LIÃO, M. A.; MARQUES, M. A., Geometrically constrained kinklike configurations, **Eur. Phys. J. Plus**, v. 135, p. 383, 2020.
- [162] MOREIRA, A. R. P.; LIMA, F. C. E.; SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. A. S., First-order formalism for thick branes in $f(T, \mathcal{T})$ gravity **Eur. Phys. J. C**, v. 81, p. 1081, 2021.

- [163] ZHONG, Y.; GUO, R.-Z.; FU, C.-E.; LIU, Y.-X., Kinks in higher derivative scalar field theory, **Phys. Lett. B**, v. 782, p. 346, 2018.
- [164] WALD, R. M., General relativity. **University of Chicago press**, 2010.
- [165] YANG, J.; LI, Y.-L., ZHONG, Y.; LI, Y., Thick brane split caused by spacetime torsion, **Phys. Rev. D**, v. 85, p. 084033, 2012.
- [166] ZHONG, Y.; LI, F. -Y.; LIU, X. -D. K-field kinks in two-dimensional dilaton gravity, **Phys. Lett. B**, v. 822, p. 136716, 2021.
- [167] GHOSH, P. K.; GHOSH, S. K., Topological and nontopological solitons in a gauged $O(3)$ -sigma model with Chern-Simons term, **Phys. Lett. B**, v. 366, p. 199, 1996.
- [168] EDELSTEIN, J. D.; LOZANO, G.; SCHAPOSNIK, F. A., Vortices in curved space-time, **Mod. Phys. Lett. A**, v. 8, p. 3665, 1993.
- [169] KIMM, K.; LEE K.; LEE, T. Anyonic Bogomol'nyi solitons in a gauged $O(3) - \sigma$ model, **Phys. Rev. D**, v. 53, p. 4436, 1996.
- [170] GIAMARCHI, T.; BHATTACHARYA, S., Vortex phases, **In: High Magnetic Fields**, Springer, Berlin, Heidelberg, p. 314, 2002.
- [171] SUTCLIFFE, P., BPS monopole, **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 12, p. 4663, 1997.
- [172] GREGORY, R., Effective action for a cosmic string, **Phys. Lett. B**, v. 206, p. 199, 1988.
- [173] HINDMARSH, M.; RUMMUKAINEN, K.; WEIR, D. J., New Solutions for Non-Abelian Cosmic Strings, **Phys. Rev. Lett.**, v. 117, p. 251601, 2016.
- [174] KIM, N.; KIM, Y.; KIMM, K., Global vortex and black cosmic string, **Phys. Rev. D**, v. 56, p. 8029, 1997.
- [175] ATMAJA, A. N.; RAMADHAN, H. S.; da HORA, E., More on Bogomol'nyi equations of three-dimensional generalized Maxwell-Higgs model using on-shell method, **JHEP**, v. 1602, p. 117, 2016.
- [176] LIMA, F. C. E.; PETROV, A. YU.; ALMEIDA, C. A. S., Vortex solution in nonpolynomial scalar QED, **Phys. Rev. D**, v. 103, p. 096019, 2021.

- [177] LIMA, F. C. E.; PETROV, A. YU.; ALMEIDA, C. A. S., Topological structures in a noncanonical perturbative dynamic of a cuscutonlike model, **Phys. Rev. D**, v. 105, p. 056005, 2022.
- [178] LIMA, F. C. E.; DANTAS, D. M.; ALMEIDA, C. A. S., A new class of solutions of a generalized O(3)-sigma Chern-Simons model, **Europhys. Lett.**, v. 130, p. 10005, 2020.
- [179] LIMA, F. C. E., GOMES, D. A.; ALMEIDA, C. A. S., Transforming kinks into compactons in the O(3)-sigma model, **Ann. Phys.**, v. 422, p. 168315, 2020.
- [180] PETERSON, A., SHIFMAN, M.; TALLARITA, G., Spin vortices in the Abelian-Higgs model with cholesteric vacuum structure, **Ann. Phys.**, v. 363, p. 515, 2015.
- [181] SADLER, L. E.; HIGBIE, J. M.; LESLIE, S. R.; VENGALATTORE M.; STAMPER-KURN, D. M., Spontaneous symmetry breaking in a quenched ferromagnetic spinor Bose-Einstein condensate, **Nature**, v. 443, p. 312, 2006.
- [182] TONG, D.; WONG, K. Vortices and impurities, **JHEP**, v. 2014, p. 90, 2014.
- [183] HU, C. R., Transport entropy of vortices in superconductors with paramagnetic impurities, **Phys. Rev. B**, v. 14, p. 4834, 1976.
- [184] CREUTZ, M., Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory, **Phys. Rev. D**, v. 21, p. 2308, 1980.
- [185] HAYMAKER, R. W.; WOZIEK, J., Space structure of confining strings, **Phys. Rev. D**, v. 36, p. 3297, 1987.
- [186] AFSHORDI, N.; CHUNG, D. J. H.; GESHNIZJANI, G., Causal field theory with an infinite speed of sound, **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 083513, 2007.
- [187] AFSHORDI, N.; CHUNG, D. J. H.; DORAN M.; GESHNIZJANI, G., Cuscuton cosmology: Dark energy meets modified gravity, **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 123509, 2017.
- [188] AFSHORDI, N., Cuscuton and low-energy limit of Hořava-Lifshitz gravity, **Phys. Rev. D**, v. 80, p. 081502(R), 2009.
- [189] Armendariz-Picon, C.; Damour, T.; Mukhanov, V., k-Inflation, **Phys. Lett. B**, v. 458, p. 209, 1999.

- [190] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARD, P. J., Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration, **Phys. Rev. Lett.**, v. 85, p. 4438, 2000.
- [191] RAMADHAN, H. S., Some exact BPS solutions for exotic vortices and monopoles, **Phys. Lett. B**, v. 478, p. 140, 2016.
- [192] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Exponentially generalized vortex, **Europhys. Lett.**, v. 138, p. 44001, 2022.
- [193] BROWN, G. E.; RHO, M., Scaling effective Lagrangians in a dense medium, **Phys. Rev. Lett.**, v. 66, p. 2720, 1991.
- [194] NAYA, C.; OLES, K. Background fields and self-dual Skyrmons, **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 025007, 2020.
- [195] ADAM, C.; OLES, K.; WERESZCZYNSKI, A., The dielectric Skyrme model, **Phys. Lett. B**, v. 807, p. 135560, 2020.
- [196] GUDNASON, S. B., Dielectric skyrmions, **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 116013, 2020.
- [197] JACKIW, R; KOSTELECKY, V. A., Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics, **Phys. Rev. Lett.**, v. 82, p. 3572, 1999.
- [198] FUJIKAWA, K.; SUZUKI, H., Path Integrals and Quantum Anomalies, **Oxford Sci. Publ.**, (2013).
- [199] CASANA R.; CARVALHO, E. S.; FERREIRA, Jr., M. M., Dimensional reduction of the CPT-even electromagnetic sector of the standard model extension, **Phys. Rev. D**, v. 84, p. 045008, 2011.
- [200] SILVA, H. O.; SAKSTEIN, J.; GUALTIERI, L.; SOTIRIOU, T. P.; BERTI, E., Spontaneous scalarization of black holes and compact stars from a Gauss-Bonnet coupling, **Phys. Rev. Lett.**, v. 120, p. 131104, 2018.
- [201] ANDRADE, I.; BAZEIA, D; MARQUES, M. A.; MENEZES, R., Long range vortex configurations in generalized models with Maxwell or Chern-Simons dynamics, **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 025017, 2020.

- [202] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MARQUES, M. A.; MENEZES, R., Vortices in a Generalized Maxwell-Higgs Model with Visible and Hidden Sectors, **Advances High Energy Physics**, v. 2019, p. 1-10, 2019.
- [203] CASANA, R.; CAVALCANTI, A., FARIAS, C. F.; MOTA, A. L., Self-dual solitons in a generalized Chern-Simons baby Skyrme model, **Phys. Rev. D**, v. 100, p. 045022, 2019.
- [204] CASANA, R.; CAVALCANTI, A.; da HORA, E., Self-dual configurations in Abelian Higgs models with k-generalized gauge field dynamics, **JHEP**, v. 12, p. 051, 2016.
- [205] WEBSTER, A. G., Partial differential equations of mathematical physics, **Hafner**, 1955.
- [206] BELENDRYASOVA, E., GANI, V. A.; ZLOSHCHASTIEV, G. K., Kinks in the relativistic model with logarithmic nonlinearity, **Journal of Physics: Conference Series**. IOP Publishing, v. 1390, p. 012082, 2019.
- [207] ROSEN, G., *Particlelike Solutions to Nonlinear Complex Scalar Field Theories with Positive-Definite Energy Densities*, **J. Math. Phys.**, v. 9, p. 996, 1968.
- [208] ROSEN, G., Charged particlelike solutions to nonlinear complex scalar field theories, **J. Math. Phys.**, v. 9, p. 999, 1968.
- [209] BIALYNICKI-BIRULA, I.; MYCIELSKI, J., Gaussons: solitons of the logarithmic Schrödinger equation, **Phys. Scr.**, v. 20, p. 539, 1979.
- [210] BAIS, F. A.; SCHROERS, B. J.; SLINGERLAND, J. K., Broken quantum symmetry and confinement phases in planar physics, **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 181601, 2002.
- [211] FELDMAN, D. E., HALPERIN, B. I., Fractional charge and fractional statistics in the quantum Hall effects, **Rep. Prog. Phys.**, v. 84, p. 076501, 2021.
- [212] CHERMAN, A., SEN, S.; YAFFE, L. G., Anyonic particle-vortex statistics and the nature of dense quark matter, **Phys. Rev. D**, v. 100, p. 034015, 2019.
- [213] AROVAS, D.; SCHRIEFFER, J. R.; WILCZEK, F., Fractional statistics and the quantum Hall effect, **Phys. Rev. Lett.**, v. 53, p. 722, 1984.
- [214] KARCH, A; TONG, D. Particle-vortex duality from 3d bosonization, **Phys. Rev. X**, v. 6, p. 031043, 2016.

- [215] MURUGAN, J.; NASTASE, H., Particle-vortex duality in topological insulators and superconductors, **JHEP**, v. 05, p. 159, 2017.
- [216] METLITSKI, M. A.; VISHWANATH, A., Particle-vortex duality of two-dimensional Dirac fermion from electric-magnetic duality of three-dimensional topological insulators, **Phys. Rev. B**, v. 93, p. 245151 (2016).
- [217] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., New class of solutions in the non-minimal O(3)-sigma model, **Phys. Lett. B**, v. 829, p. 137042, 2022.
- [218] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Phase transitions in the logarithmic Maxwell O(3)-sigma model, **Eur. Phys. J. C**, v. 81, p. 1044, 2021.
- [219] DAVIS, R. L.; SHELLARD, E. P. S., The physics of vortex superconductivity, **Phys. Lett. B**, v. 207, p. 404, 1988.
- [220] DAVIS, R. L.; SHELLARD, E. P. S., The physics of vortex superconductivity II, **Phys. Lett. B**, v. 209, p. 485, 1988.
- [221] CASANA, R.; FERREIRA JR., M. M.; da HORA, E.; MILLER, C., Magnetic flux inversion in charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell–Higgs framework, **Phys. Lett. B**, v. 718, p. 620, 2012.
- [222] CASANA, R.; LAZAR, G., Topological charged BPS vortices in Lorentz-violating Maxwell-Higgs electrodynamics, **Phys. Rev. D**, v. 90, p. 065007, 2014.
- [223] EDERY, A., Nonminimally coupled gravitating vortex: Phase transition at critical coupling ξ_c , **Phys. Rev. D**, v. 106, p. 065017, 2022.
- [224] EDERY, A., Non-singular vortices with positive mass in 2 + 1-dimensional Einstein gravity with AdS3 and Minkowski background, **JHEP**, v. 01, p. 166, 2021.
- [225] HONG, J.; KIM, Y.; PAC, P. Y., Multivortex solutions of the abelian Chern-Simons-Higgs theory, **Phys. Rev. Lett.**, v. 64, p. 2230, 1990.
- [226] LEE, T. D.; PANG Y., Nontopological solitons, **Phys. Rep.**, v. 221, p. 251, 1992.
- [227] ARTHUR, K.; TCHRAKIAN, D. H.; YANG, Y., Topological and nontopological self-dual Chern-Simons solitons in a gauged O(3) σ model, **Phys. Rev. D**, v. 54, p. 5245, 1996.

- [228] STERN, J. Topological action at a distance and the magnetic moment of point-like anyons, **Phys. Lett. B**, v. 265, p. 119, 1991.
- [229] ALMEIDA, C. A. S.; AUTO-NETO, J. Influence of the electron's anomalous magnetic dipole moment on high-atomic number atoms, **Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)**, No. CBPF-NF-027/90, 1990.
- [230] GHOSH, S., Noncommutativity in Maxwell–Chern–Simons-matter theory simulates Pauli magnetic coupling, **Mod. Phys. Lett. A**, v. 20, p. 1227, 2005.
- [231] TORRES, M., Bogomol'nyi limit for nontopological solitons in a Chern-Simons model with anomalous magnetic moment, **Phys. Rev. D**, v. 46, p. R2295, 1992.
- [232] GHOSH, P. K., Bogomol'nyi equations of Maxwell-Chern-Simons vortices from a generalized Abelian Higgs model, **Phys. Rev. D**, v. 49, p. 5458, 1994.
- [233] NOBRE, F. A. S.; ALMEIDA, C. A. S., Pauli's term and fractional spin, **Phys. Lett. B**, v. 455, p. 213, 1999.
- [234] CAVALCANTE, F. S. A., CUNHA, M. S.; ALMEIDA, C. A. S., Vortices in a nonminimal Maxwell–Chern–Simons O(3)-sigma model, **Phys. Lett. B**, v. 475, p. 315, 2000.
- [235] GHOSH, P. K., Exact self-dual soliton solutions in a gauged O(3)-sigma model with anomalous magnetic moment interaction, **Phys. Lett. B**, v. 381, p. 237, 1996.
- [236] SCHROERS, B. J., Bogomol'nyi solitons in a gauged O(3) sigma model, **Phys. Lett. B**, v. 356, p. 291, 1995.
- [237] SCHROERS, B. J., The spectrum of Bogomol'nyi solitons in gauged linear sigma models, **Nuc. Phys. B**, v. 475, p. 440, 1996.
- [238] GELL-MANN, M.; LÉVY, M., The axial vector current in beta decay, **II Nuovo Cimento**, v. 16, p. 45, 1960.
- [239] SCHWINGER, J., A theory of the fundamental interactions, **Ann. Phys.**, v. 2, p. 407, 1957.
- [240] POLKINGHORNE, J. C., Renormalization of axial vector coupling, **Nuovo Cimento**, v. 8, p. 179, 1958.

- [241] MOTRUNICH, O. I.; VISHWANATH, A. Emergent photons and transitions in the sigma model with hedgehog suppression, **Phys. Rev. B**, v. 70, p. 075104, 2004.
- [242] LEESE, R. A., PEYRARD, M.; ZAKRZEWSKI, W. J., Soliton stability in the O(3) sigma-model in $(2 + 1)$ dimensions, **Nonlinearity**, v. 3, p. 387, 1990.
- [243] CASANA, R.; FARIAS, C. F.; FERREIRA Jr., M. M., Topological self-dual configurations in a Lorentz-violating gauged O(3) sigma model, **Phys. Rev. D**, v. 92, p. 125024, 2015.
- [244] LANGLOIS, D.; RENAUX-PETEL, S., Perturbations in generalized multi-field inflation, **JCAP**, v. 04, p. 017, 2008.
- [245] LANGLOIS, D., Correlated adiabatic and isocurvature perturbations from double inflation, **Phys. Rev. D**, v. 59, p. 123512, 1999.
- [246] BEAN, R.; DUNKLEY, J.; PIERPAOLI, E., Constraining isocurvature initial conditions with WMAP 3-year data, **Phys. Rev. D** v. 74, p. 063503, 2006.
- [247] TROTTA, R., The isocurvature fraction after WMAP 3-yr data, **Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Lett.**, v. 375, p. L26, 2007.
- [248] KESKITALO, R.; KURKI-SUONIO, H.; MUHONEN, V.; VALIVIITA, J., Hints of isocurvature perturbations in the cosmic microwave background?, **JCAP**, v. 09, p. 008, 2007.
- [249] ADAM, C; OLES, K., ROMANCZUKIEWICZ, T., WERESZCZYNSKI, A.; ZAKRZEWSKI, W. J., Spectral walls in multifield kink dynamics, **JHEP**, v. 2021, p. 147, 2021.
- [250] LIU, Y.-X.; LI, H.-T.; ZHAO, Z.-H.; LI, J.-X.; REN, J.-R., Fermion resonances on multi-field thick branes, **JHEP**, v. 10, p. 91, 2009.
- [251] GHOSH, P., Degenerate topological vortex solutions from a generalized abelian Higgs model with a Chern-Simons term, **Phys. Lett. B**, v. 326, p. 264, 1994.
- [252] MUKHERJEE, P., Magnetic vortices in a gauged O(3) sigma model with symmetry breaking self-interaction, **Phys. Rev. D**, v. 58, p. 105025, 1998.
- [253] CASANA, R.; SANTOS, A. C.; DIAS, M. L., BPS solitons with internal structure in the gauged O(3) sigma model, **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 085002, 2020.

- [254] ADAM, C.; WERESZCZYNSKI, A., BPS property and its breaking in $1 + 1$ dimensions, **Phys. Rev. D**, v. 98, p. 116001 2018.
- [255] ADAM, C.; NAYA, C.; OLES, K.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A., Incompressible topological solitons, **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 105007, 2020.
- [256] PELINOVSKY, E.; POLUKHINA, O.; SLUNYAEV, A.; TALIPOVA, T., “ Internal solitary waves, Solitary waves in fluids, edited by R. Grimshaw, **WIT press**, v. 47, USA, 2007.
- [257] CANFORA, F.; OH, S. H.; VERA, A., Analytic crystals of solitons in the four dimensional gauged non-linear sigma model, **Eur. Phys. J. C**, v. 79, p. 485, 2019.
- [258] CHAUDHURI, N.; GHOSH, S.; SARKAR, S.; ROY, P., Effects of quark anomalous magnetic moment on the thermodynamical properties and mesonic excitations of magnetized hot and dense matter in PNJL model, **Eur. Phys. J. A**, v. 56, p. 213, 2020.
- [259] BARTOLO, N.; GANZ, A.; MATARRESE, S., Cuscuton inflation, **JCAP**, v. 05, p. 008, 2022.
- [260] IYONAGA, A.; TAKAHASHI, K.; KOBAYASHI, T., Extended cuscuton: formulation, **JCAP**, v. 12, p. 002, 2018.
- [261] ADAM, C.; OLES, K.; QUEIRUGA, J. M.; ROMANCZUKIEWICZ, T.; WERESZCZYNSKI, A. Solvable self-dual impurity models, **JHEP**, v. 07, p. 150, 2019.
- [262] ALMEIDA, V.; CASANA, R.; da HORA, E.; KRUSCH, S., Self-dual $CP(2)$ vortex-like solitons in the presence of magnetic impurities, **Phys. Rev. D**, v. 106, p. 016010 ,2022.
- [263] BAZEIA, D.; LIÃO, M. A.; MARQUES, M. A., Impurity-like solutions in vortex systems coupled to a neutral field, **Phys. Lett. B**, v. 825, p. 136862, 2022.
- [264] MARQUES, M. A., Vortices in Vacuumless Systems, **Advances in High Energy Physics**, v. 2019, p. 1-16, 2019.
- [265] BAZEIA, D.; MOREIRA, D. C., From sine-Gordon to vacuumless systems in flat and curved spacetimes, **Eur. Phys. J. C**, v. 77, p. 884, 2017.
- [266] BAZEIA, D., Topological solitons in a vacuumless system, **Phys. Rev. D**, v. 60, p. 067705, 1999.

- [267] DVALI, G.; KÜHNEL, F.; ZANTEDESCHI, M., Vortices in Black Holes, **Phys. Rev. Lett.**, v. 129, p. 061302, 2022.
- [268] FROLOV, V. P.; ZELNIKOV, A., *Introductions to Black Hole Physics*, **Oxford University Press**, Oxford, New York, (2011).
- [269] AKIYAMA, K.; ALBERDI, A., et al., First *M87* Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole, **Astrophys. J. Lett.**, v. 875, p. L4, 2019.
- [270] RINDLER, W., *Relativity: Special, General and Cosmological*, **Oxford University Press**, 2nd ed. Oxford, New York, (2006).
- [271] OPPENHEIMER, J.; SNYDER, H., On continued gravitational contraction, **Phys. Rev.**, v. 56, p. 455, 1939.
- [272] CARDONI, M.; PANI, P.; SERRA, M., Scalar hairs and exact vortex solutions in 3D AdS gravity, **JHEP** v. 2010, p. 91, 2010.
- [273] BEKENSTEIN, J. D., Transcendence of the Law of Baryon-Number Conservation in Black-Hole Physics, **Phys. Rev. Lett.**, v. 28, p. 452, 1972.
- [274] BEKENSTEIN, J. D., Novel "no-scalar-hair" theorem for black holes, **Phys. Rev. D**, v. 51, p. R6608, 1995.
- [275] TEITELBOIM, C., Nonmeasurability of the quantum numbers of a black hole, **Phys. Rev. D**, v. 5, p. 2941, (1972).
- [276] DESER, S.; JACKIW, R.; 't HOOFT, G., Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space, **Ann. Phys.**, v. 152, p. 220, 1984.
- [277] BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J., Black hole in three-dimensional spacetime, **Phys. Rev. Lett.**, v. 69, p. 1849, 1992.
- [278] BAÑADOS, M.; HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J., Geometry of the 2 + 1 black hole, **Phys. Rev. D**, v. 48, p. 1506, 1993 [Erratum, v. 88, p. 069902. 2013].
- [279] GOMES, D. A., MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S., Thermodynamics of Schwarzschild-like black holes in modified gravity models, **Ann. Phys.**, v. 418, p. 168198, 2020.

- [280] BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W., The four laws of black hole mechanics, **Comm. Math. Phys.**, v. 31, p. 161, 1973.
- [281] BEKENSTEIN, J. M., Black holes and entropy, **Phys. Rev. D** 7, p. 2333, 1973.
- [282] WITTEN, E., 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system, **Nucl. Phys. B**, v. 311, p. 46, 1988.
- [283] WITTEN, E., Topology-changing amplitudes in 2 + 1 dimensional gravity, **Nucl. Phys. B**, v. 323, p. 113, 1989.
- [284] CARLIP, S., Lectures in (2 + 1)-dimensional gravity, **J. Korean Phys. Soc.**, v. 28, p. S447, 1995.
- [285] CARLIP, S., The (2 + 1)-dimensional black hole, **Class. Quantum Grav.**, v. 12, p. 2853, 1995.
- [286] ROSENAU, P.; HYMAN, J. M., Compactons: solitons with finite wavelength, **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, p. 564, 1993.
- [287] LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Compact-like vortices in isotropic curved spacetime, **Ann. Phys.** v. 434, p. 168648, 2021.
- [288] ALBERT, J., The Abrikosov vortex in curved space, **JHEP**, v. 09, p. 012, 2021.
- [289] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W., Dynamical structure and definition of energy in general relativity, **Phys. Rev.**, v. 116, p. 1322, 1959.
- [290] SHÄFER, G., The gravitational quadrupole radiation-reaction force and the canonical formalism of ADM, **Ann. Phys.**, v. 161, p. 81, 1985.
- [291] STEINHOFF, J., SCHÄFER, G.; HERGT, S., ADM canonical formalism for gravitating spinning objects, **Phys. Rev. D**, v. 77, p. 104018, 2008.
- [292] POISSON, E., A relativist's toolkit, **Cambridge University Press**, Cambridge, U.K., 2004.
- [293] ABBOTT, L. F.; DESER, S., Stability of gravity with a cosmological constant, **Nucl. Phys. B**, v. 195, p. 76, 1982.

- [294] SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T., Particle production and complex path analysis, **Phys. Rev. D**, v. 60, p.024007, 1999.
- [295] ANGHEBEN, M.; NADALINI, M.; VANZO, L.; ZERBINI, S., Hawking radiation as tunneling for extremal and rotating black holes, **JHEP**, v. 05, p.014, 2005.
- [296] KERNER, R.; MANN, R. B., Tunnelling, temperature, and Taub-NUT black holes, **Phys. Rev. D**, v. 73, p. 104010, 2006.
- [297] MITRA, P., Hawking temperature from tunnelling formalism, **Phys. Lett. B**, v. 648, p. 240, 2007.
- [298] AKHMEDOV, E. T.; AKHMEDOVA, V.; SINGLETON, D., Hawking temperature in the tunneling picture, **Phys. Lett. B**, v. 642, p. 124, 2006.
- [299] JIANG, Q.-Q.; WU, S.-Q.; CAI, X., Hawking radiation as tunneling from the Kerr and Kerr-Newman black holes, **Phys. Rev. D** v. 73, p. 064003, 2006;
JIANG, Q.-Q., WU, S.-Q.; CAI, X., Publisher's Note: Hawking radiation as tunneling from the Kerr and Kerr-Newman black holes [Phys. Rev. D 73, 064003 (2006)], **Phys. Rev. D**, v. 73, p. 069902, 2006,
- [300] KERNER, R; MANN, R. B., Fermions tunnelling from black holes, **Class. Quant. Grav.**, v. 25, p. 095014, 2008.
- [301] MA, M. S.; ZHAO, R., Corrected form of the first law of thermodynamics for regular black holes, **Class. Quant. Grav.**, v. 31, p. 245014, 2014.
- [302] GOMES, D. A.; LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S., Correlations between emission events in Rainbow Gravity, **Ann. Phys.**, v. 428, p. 168436, 2021.
- [303] SILVA, C. A. S.; BRITO, F. A., Quantum tunneling radiation from self-dual black holes, **Phys. Lett. B**, v. 725, p. 456 2013.
- [304] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J., Modern Quantum Mechanics, **Addison-Wesley**, 2nd ed., San Francisco, CA, 1994.
- [305] OLIVA, J.; TEMPO, D.; TRONCOSO, R., Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity, **JHEP**, v. 07, p. 11, 2009.

APÊNDICE A – LISTA DE PUBLICAÇÕES RELACIONADAS À TESE

Os resultados apresentados nesta tese de doutorado encontram-se relatados nas seguintes publicações:

1. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Differential configurational entropy for multi-field of the ϕ^6 theory*, Europhys. Lett. **141** (2023) 10002. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/acaac4).
2. **F. C. E. Lima**, A. R. P. Moreira and C. A. S. Almeida, *Properties of black hole vortex in Einstein's gravity*, Eur. Phys. J. Plus **138** (2023) 429. (DOI: doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04036-8).
3. **F. C. E. Lima**, A. Yu. Petrov and C. A. S. Almeida, *Topological structures in a noncanonical perturbative dynamic of a cuscuton-like model*, Phys. Rev. D **105** (2022) 056005. (DOI: doi.org/10.1103/PhysRevD.105.056005).
4. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *New class of solutions in the non-minimal $O(3)$ -sigma model*, Phys. Lett. B **829** (2022) 137042. (DOI: doi.org/10.1016/j.physletb. 2022. 137042).
5. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Exponentially generalized vortex*, Europhys. Lett. **138** (2022) 44001. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/ac535f).
6. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Differential configurational complexity and phase transitions of the BPS solutions in the $O(3)$ -sigma model*, Ann. Phys. **442** (2022) 168904. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2022.168904).
7. **F. C. E. Lima**, A. Yu. Petrov and C. A. S. Almeida, *Vortex solution in nonpolynomial scalar QED*, Phys. Rev. D **103** (2021) 096019. (DOI: doi.org/10.1103/PhysRevD. 103. 096019).
8. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Compact-like vortices in isotropic curved spacetime*, Ann. Phys. **434** (2021) 168648. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2021.168648).
9. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Phase transitions in the logarithmic Maxwell $O(3)$ -sigma model*, Eur. Phys. J. C **81** (2021) 1044. (DOI: doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09826-x).
10. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Ring-like vortices in a logarithmic generalized Maxwell theory*, Europhys. Lett. **131** (2020) 31003. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/131/31003).
11. **F. C. E. Lima**, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, *A new class of solution of*

a generalized $O(3)$ -sigma Chern-Simons model, Europhys. Lett. **130** (2020) 10005. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/130/10005).

12. **F. C. E. Lima**, D. A. Gomes and C. A. S. Almeida, *Transforming kinks into compactons in the $O(3)$ -sigma model*. Ann. Phys. **422** (2020) 168315. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2020.168315).

Além disso, outros resultados expostos nesta tese encontram-se em processo de submissão. Estes resultados estão reportados nas obras:

13. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Vortex solitons in the sigma-cuscuton-like model without interaction*, arXiv preprint arXiv: 2301.01397, (2022). DOI: doi.org/10.48550/arXiv.2301.01397. (Submetido)

14. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Aspects of self-gravitating kink-like structures in 2D dilaton gravity*, arXiv preprint arXiv: 2205.11570v1, (2022). DOI: doi.org/10.48550/arXiv.2205.11570. (Submetido)

APÊNDICE B – LISTA DE PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO PERÍODO DE DOUTORADO

Durante o período de doutorado, i. e., de Agosto de 2019 à Maio de 2023, o candidato a doutorado desenvolveu pesquisa nas seguintes áreas: Teoria Topológica de Campos, Teoria de Mundo-Brana e Gravidade Modificada, Fundamentos de Mecânica Quântica e Teoria da Informação aplicada à partículas e campos. Considerando as áreas mencionadas, listamos abaixo as contribuições do candidato a doutorado.

Publicações em fundamentos de Mecânica Quântica

1. **F. C. E. Lima**, L. N. Monteiro and C. A. S. Almeida, *Non-Hermitian fermions with effective mass*, Physica E: Low-dimensional systems & nanostructures **150** (2023) 115682. (DOI: doi.org/10.1016/j.physe.2023.115682).

Publicações em Teoria da Informação aplicada à partículas e campos

2. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Differential configurational entropy for multi-field of the ϕ^6 theory*, Europhys. Lett. **141** (2023) 10002. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/acaac4).

3. C. A. S. Almeida, C. O. Edet, **F. C. E. Lima**, N. Ali and M. Asjad, *Quantum information entropy of heavy mesons in the presence of a point-like defect*, Results in Physics **47** (2023) 106343. (DOI:doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106343).

4. **F. C. E. Lima**, A. R. P. Moreira, C. A. S. Almeida, C. O. Edet and N. Ali, *Quantum information entropy of a particle trapped by the Aharonov-Bohm-type effect*, Phys. Scr. **98** (2023) 065111. (DOI: doi.org/10.1088/1402-4896/acd309).

5. **F. C. E. Lima**, *Quantum information entropies for a soliton at hyperbolic well*, Ann. Phys. **442** (2022) 168906. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2022.168906).

6. A. R. P. Moreira, **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Configurational Entropy and braneworlds in $f(T,B)$ gravity*, Int. J. Mod. D **31** (2022) 2250080. (DOI: doi.org/10.1142/S0218271822500808).

7. C. O. Edet, **F. C. E. Lima**, C. A. S. Almeida, N. Ali and M. Asjad, *Quantum information of the Aharonov–Bohm ring with Yukawa interaction in the presence of disclination*, Entropy **24**

(2022) 1059. (DOI: doi.org/10.3390/e24081059).

8. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Differential configurational complexity and phase transitions of the BPS solutions in the $O(3)$ -sigma model*, Ann. Phys. **442** (2022) 168904. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2022.168904).

9. **F. C. E. Lima**, A. R. P. Moreira, L. E. S. Machado and C. A. S. Almeida, *Statistical properties of linear Majorana fermions*, Int. J. Quant. Chem. **121** (2021) e26749. (DOI: doi.org/10.1002/qua.26749).

10. **F. C. E. Lima**, A. R. P. Moreira and C. A. S. Almeida, *Information and thermodynamic properties of a non-Hermitian particle ensemble*, Int. J. Quant. Chem. **121** (2021) e26645. (DOI: doi.org/10.1002/qua.26645).

11. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Phase transitions in the logarithmic Maxwell $O(3)$ -sigma model*, Eur. Phys. J. C **81** (2021) 1044. (DOI: doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09826-x).

12. R. R. S. Oliveira, A. A. A. Filho, **F. C. E. Lima**, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, *Thermodynamic properties of an Aharonov-Bohm quantum ring*, Eur. Phys. J. Plus **134** (2019) 495. (DOI: doi.org/10.1140/epjp/i2019-12880-x).

Publicações em Teoria de Mundo-Brana e Gravidade Modificada

13. A. R. P. Moreira, **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Geometrically contracted structure in teleparallel $f(T)$ gravity*, Int. J. Mod. Phys. D **32** (2023) 2350013. (DOI: doi.org/10.1142/S021827182350013X).

14. A. R. P. Moreira, J. E. G. Silva, **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Thick brane in $f(T, B)$ gravity*, Phys. Rev. D **103** (2021) 064046. (DOI: doi.org/10.1103/PhysRevD.103.064046).

15. D. A. Gomes, **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Correlations between emission events in Rainbow Gravity*, Ann. Phys. **428** (2021) 168436. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2021.168436).

16. A. R. P. Moreira, **F. C. E. Lima**, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *First-order formalism for thick branes in $f(T, \mathcal{F})$ gravity*, Eur. Phys. J. C **81** (2021) 1081. (DOI: doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09883-2).

Publicações em Teoria Topológica de Campos

17. **F. C. E. Lima**, A. R. P. Moreira and C. A. S. Almeida, *Properties of black hole vortex in Einstein's gravity*, Eur. Phys. J. Plus **138** (2023) 429. (DOI: doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04036-8).

18. **F. C. E. Lima**, A. Yu. Petrov and C. A. S. Almeida, *Topological structures in a noncanonical perturbative dynamic of a cuscuton-like model*, Phys. Rev. D **105** (2022) 056005. (DOI: doi.org/10.1103/PhysRevD.105.056005).

19. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *New class of solutions in the non-minimal $O(3)$ -sigma model*, Phys. Lett. B **829** (2022) 137042. (DOI: doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137042).

20. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Exponentially generalized vortex*, Europhys. Lett. **138** (2022) 44001. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/ac535f).

21. **F. C. E. Lima**, A. Yu. Petrov and C. A. S. Almeida, *Vortex solution in nonpolynomial scalar QED*, Phys. Rev. D **103** (2021) 096019. (DOI: doi.org/10.1103/PhysRevD.103.096019).

22. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Compact-like vortices in isotropic curved spacetime*, Ann. Phys. **434** (2021) 168648. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2021.168648).

23. **F. C. E. Lima**, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, *A new class of solution of a generalized $O(3)$ -sigma Chern-Simons model*, Europhys. Lett. **130** (2020) 10005. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/130/10005).

24. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Ring-like vortices in a logarithmic generalized Maxwell theory*, Europhys. Lett. **131** (2020) 31003. (DOI: doi.org/10.1209/0295-5075/131/31003).

25. **F. C. E. Lima**, D. A. Gomes and C. A. S. Almeida, *Transforming kinks into compactons in the $O(3)$ -sigma model*. Ann. Phys. **422** (2020) 168315. (DOI: doi.org/10.1016/j.aop.2020.168315).

Submissões em Teoria Topológica de Campos e Mundo-Brana

26. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Vortex solitons in the sigma-cuscuton-like model without interaction*, arXiv preprint arXiv: 2301.01397, (2022). DOI: doi.org/10.48550/arXiv.2301.01397. (Submetido)

27. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Aspects of self-gravitating kink-like structures in 2D dilaton gravity*, arXiv preprint arXiv: 2205.11570v1, (2022). DOI: doi.org/10.48550/arXiv.2205.11570. (Submetido)

28. **F. C. E. Lima** and C. A. S. Almeida, *Effects of quantum fluctuations of the metric on a braneworld*, arXiv preprint arXiv: 2307.05879v1, (2023). DOI: doi.org/10.48550/arXiv.2307.05879. (Submetido)