



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

LAURA MARÍA PABÓN RODRÍGUEZ

**GENERALIZAÇÃO DAS CURVAS DE FORÇAS DE MATERIAIS COM RELAXAÇÃO
EXPONENCIAL E LEI DE POTÊNCIA**

FORTALEZA

2023

LAURA MARÍA PABÓN RODRÍGUEZ

GENERALIZAÇÃO DAS CURVAS DE FORÇAS DE MATERIAIS COM RELAXAÇÃO
EXPONENCIAL E LEI DE POTÊNCIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P112g Pabón Rodríguez, Laura María.
Generalização das curvas de forças de materiais com relaxação exponencial e lei de potência / Laura María Pabón Rodríguez. – 2023.
60 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.
1. Viscoelasticidade. 2. Calculo fracionário. 3. Modelo Híbrido. 4. Modelo Fracionário. I. Título.
CDD 530
-

LAURA MARÍA PABÓN RODRÍGUEZ

GENERALIZAÇÃO DAS CURVAS DE FORÇAS DE MATERIAIS COM RELAXAÇÃO
EXPONENCIAL E LEI DE POTÊNCIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em: 10/07/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de
Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Luiz Bezerra de Araujo
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

À Minha Mãe.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente eu quero agradecer a Ph.D. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira destacado professor do departamento de Física da Universidade Federal do Ceará. Pela paciência, tempo, comprometimento e conhecimento disponibilizados durante o desenvolvimento deste trabalho. Sim ele não teria sido possível a entrega do mesmo. Além, quero destacar que além de ser um excelente físico é um incrível ser humano.

Também agradeço aos companheiros que conheci durante o mestrado, em especial, ao Antonio Edinaldo de Oliveira Ferreira do departamento de física da UFC, pelo acompanhamento, colaboração e tempo para a execução da dissertação.

Eu quero agradecer à minha mãe, quem é a pessoa mais importante do meu mundo, quem com seu amor, seu paciência me criou e nunca se resignou, sempre com o melhor sorriso tenha a melhor palavra para mim. Obrigada pelos ensinamentos durante todos esses anos e obrigada pela motivação que foi o que permitiu terminar o trabalho com sucesso. Agradeço também às pessoas próximas de mim, com são minha família, meus amigos físicos e ao Andrés meu namorado, pelo amor e por confiar em mim.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Nós estudamos o comportamento da função relaxação de materiais viscoelásticos submetidos a indentadores rígidos. Materiais viscoelásticos geralmente apresentam decaimentos exponenciais ou em lei de potência que dependem da geometria do contato mecânico entre o indentador e a amostra. Nós então propomos um circuito mecânico composto por um elemento fracionário e um sólido linear padrão conectados em paralelo. O elemento sólido linear padrão é conhecido por apresentar relaxações exponenciais, encontrados em materiais macios como espuma ou materiais sintéticos. O cálculo fracionário tem sido aplicado a vários fenômenos físicos, algumas vezes com mais sucesso do que o cálculo tradicional, que apresenta derivadas de ordem inteira. Elementos fracionários, por exemplo, podem descrever materiais viscoelásticos em leis de potência, como ocorre, por exemplo, em células vivas. Nosso modelo analítico leva a equações generalizadas capazes de reproduzir os dois tipos mais comuns de decaimento temporal encontrados em materiais viscoelásticos. Além disso, nosso modelo leva em consideração indentadores com diferentes geometrias, as mais comuns sendo a cônica, esférica e cilíndrica. Nós analisamos as curvas de força de contato enquanto a amostra é deformada (chamada de curva de força de loading) ou enquanto a indentação é mantida constante (chamada de curva de força de dwell). No último caso, o material relaxa devido a um processo de minimização energética que diminui a força de resposta. Medidas de força são usadas para investigar diferentes materiais macios. O decaimento de relaxação está relacionado à composição desses materiais, podendo identificar falhas. No caso de células, por exemplo, a mudança nesse comportamento reológico está associada ao surgimento de patologias como o câncer e outras doenças. Nosso trabalho permite uma interpretação analítica generalizada das curvas de força, onde as propriedades mecânicas da amostra e a geometria do indentador são parâmetros regulados numa mesma equação.

Palavras-chave: viscoelasticidade; calculo fracionário; modelo híbrido; modelo fracionário.

ABSTRACT

We studied the behavior of the relaxation function of viscoelastic materials subjected to rigid indenters. Viscoelastic materials generally exhibit exponential or power-law decays that depend on the geometry of the mechanical contact between the indenter and the sample. We propose a mechanical circuit composed of a fractional element and a standard linear solid connected in parallel. The standard linear solid element exhibits exponential relaxations as those found in soft materials like foam or synthetic materials. Fractional calculus has been applied to various physical phenomena, sometimes with more success than traditional calculus, which presents integer order derivatives. Fractional elements, for example, can describe power-law viscoelastic materials, as occurs, for example, in living cells. Our analytical model leads to generalized equations capable of reproducing the two most common types of temporal decay found in viscoelastic materials. In addition, our model considers indenters with different geometries, the most common being conical, spherical, and cylindrical. We analyze the contact force curves while the sample is deformed (called the loading force curve) or the indentation is kept constant (called the dwell force curve). In the latter case, the material relaxes due to an energy minimization process that decreases the response force. Force measurements are used to investigate different soft materials. The relaxation decay is related to the composition of those materials, which can identify faults. In the case of cells, for instance, the change in the rheological behavior is associated with the emergence of pathologies such as cancer and other diseases. Our work allows a generalized analytical interpretation of the force curves, where the sample's mechanical properties and the indenter's geometry are parameters regulated in the same equation.

Keywords: viscoelasticity; fractional calculation; hybrid model; fractional model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – a) Representação de um m \ddot{o} nomero; b) Representação de um pol \acute{m} mero. Fonte autora.	15
Figura 2 – Pol \acute{m} meros em forma de a) corda; b) ramos e c) cordas reticuladas. Fonte autora.	16
Figura 3 – Cristais l \acute{q} uidos esm \acute{e} ticos e nem \acute{a} ticos. Fonte autora.	16
Figura 4 – Molecula surfactante. Fonte autora	17
Figura 5 – Micela em agua. Fonte autora.	17
Figura 6 – Micena invertida em \acute{o} leo. Fonte autora	17
Figura 7 – a) Representação da lei de Hooke por meio de uma mola; b) Representação da Lei de Newton com um amortecedor para fluidos.	21
Figura 8 – Gr \acute{a} ficos de a) tens \acute{a} o e deforma \acute{c} o para materiais viscoel \acute{a} sticos baixo teste de flu \acute{e} ncia y b) tens \acute{a} o e deforma \acute{c} o para materiais viscoel \acute{a} sticos baixo teste de relaxa \acute{c} o.	22
Figura 9 – Modelo de Maxwell \acute{e} representado por uma mola de constante el \acute{a} stica E em s \acute{e} rie a um amortecedor com viscosidade η em serie.	23
Figura 10 – Modelo de Kelvin-Voigt representado por uma mola de constante el \acute{a} stica k em paralelo a um amortecedor com viscosidade el \acute{a} stica η	24
Figura 11 – Modelo s \acute{o} lido linear padr \acute{o} o representado por uma mola de constante el \acute{a} stica E_1 e um amortecedor com viscosidade η em serie ligados com uma mola de constante el \acute{a} stica E_2 em paralelo.	25
Figura 12 – Modelo generalizado de Maxwell representado por modelos de Maxwell ligados em paralelo.	26
Figura 13 – Representa \acute{c} o de um elemento fracion \acute{a} rio. Quando $m = 0$ uma mola Hookeana \acute{e} recuperada e quando $m = 1$ um amortecedor newtoniano \acute{e} recuperado.	27
Figura 14 – Modelo h \acute{i} brido que cont \acute{e} m um modelo s \acute{o} lido linear padr \acute{o} o a um elemento fracion \acute{a} rio.	29
Figura 15 – Curvas de for \acute{c} as de relaxa \acute{c} o para diferentes valore de m , quando $m = 0.00$, (0,25), (0,50), (0,75), (1,00).	31
Figura 16 – Gr \acute{a} fico de for \acute{c} a $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para um indentador cil \acute{m} drico $\lambda = 1.00$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 3$. Fonte autora.	41
Figura 17 – Gr \acute{a} fico de for \acute{c} a $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para um indentador cil \acute{m} drico $\lambda = 1.50$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 3$. Fonte autora.	42

- Figura 18 – Gráfico de força $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para um indentador cilíndrico $\lambda = 2.00$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 3$. Fonte autora. 46
- Figura 19 – Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ aplicadas sobre a amostra para diferentes indentadores, indentador cilíndrico, esférico e cônico para valores de $m = 0,00$, $m = 0,25$, $m = 0,50$ e $m = 0,75$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 4$. Fonte autora. . . 48
- Figura 20 – Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ aplicadas sobre a amostra para diferentes indentadores: indentador cilíndrico, esférico e cônico para valores de $m = 0,80$, $m = 0,85$ e $m = 1,00$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 4$. Fonte autora. 49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Módulo de Young e coeficiente de Poisson um indentador feito de nitrato silício e diamante.	32
Tabela 2 – Modulo de Young e parâmetro de Poisson um indentador feito de nitrato silício e diamante.	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MATÉRIA MOLE	14
2.1	Materiais da Matéria Mole	15
2.1.1	<i>Polímeros</i>	15
2.1.2	<i>Cristais líquidos</i>	15
2.1.3	<i>Surfactantes</i>	16
2.1.4	<i>Coloides</i>	17
3	MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	19
3.1	Fluência (<i>Creep</i>) e Relaxação	21
3.2	Princípio da superposição de Boltzmann	22
3.3	Modelos Viscoelásticos	22
3.3.1	<i>Modelo de Maxwell</i>	23
3.3.2	<i>Modelo de Kelvin-Voigt</i>	24
3.3.3	<i>Modelo Sólido Linear Padrão</i>	25
3.3.4	<i>Modelo generalizado de Maxwell e Kelvin</i>	26
3.3.5	<i>Modelo Fracionário</i>	27
4	MODELO HÍBRIDO	29
5	CURVAS DE FORÇAS PARA DIFERENTES FORMAS DE UM IN- DENTADOR	32
5.1	Determinação de forças de Contato	32
5.2	Curvas de forças para o modelo híbrido	36
5.3	Curvas de forças para um λ generalizado	38
5.4	Curvas de forças para diferentes formas do indentador	39
5.4.1	<i>Indentador cilíndrico</i>	39
5.4.2	<i>Indentador esférico</i>	40
5.4.3	<i>Indentador cônico</i>	44
6	CONCLUSÕES	50
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICE A – CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE UM INDENTA- DOR	53

APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DE FORÇA	54
APÊNDICE C – PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	56
APÊNDICE D – FORÇA PARA λ GENERALIZADO	58

1 INTRODUÇÃO

A física da matéria mole é um ramo multidisciplinar onde se investiga os princípios físicos e aplicações de materiais macios como espumas, cristais líquidos, polímeros, dispersões coloidais, micelas, suspensões e vários tipos de líquidos biológicos e até materiais granulares. Sistemas vivos, por exemplo, respondem a estímulos mecânicos que alteram suas funções biológicas (MAINARDI, 2010), que dependem das suas propriedades reológicas quando tensões são aplicadas (ARAÚJO *et al.*, 2020). Em sólidos elásticos, a proporcionalidade entre a tensão e a deformação é dado pela constante de Young o qual nos informa o comportamento do material em função do tipo de força que lhe é aplicada. Os fluidos, por outro lado, apresentam atrito em regiões vizinhas que escoam com velocidades diferentes, o parâmetro que melhor o quantifica é a viscosidade (MOEENDARBARY; HARRIS, 2014). Quando a tensão é diretamente proporcional à taxa da deformação, e a constante de proporcionalidade é a viscosidade, o fluido é chamado de newtoniano. Os modelos físicos, e suas respectivas relações constitutivas, para descrever materiais reais como sólidos elásticos ou fluidos newtonianos são idealizações teóricas. Ou seja, o comportamento de muitos sólidos, em deformações infinitesimais, é aproximado pela Lei de Hooke e o comportamento de muitos líquidos, em pequenas velocidades de deformação, é aproximado pela Lei de Newton para fluidos. Uma forma para saber se o material é sólido ou fluido é a razão entre o tempo de relaxação característico da substância sobre o tempo que uma força externa é aplicada. A essa grandeza física adimensional se dá o nome de número de Deborah, *De* (REINER, 1964). O conceito deste número é que todas as substâncias (mesmo sólidas) podem fluir se for aplicado forças que duram tempo suficiente, da mesma forma um líquido pode se deformar como um sólido, quando se aplica uma força rápida ou suficiente. Em resumo, o número de Deborah mostra que todos os materiais apresentam características viscoelásticas.

Para efeitos práticos, entretanto, materiais viscoelásticos são aqueles que apresentam tempos intermediários de relaxação (da ordem de microsegundos a minutos), ou seja, os comportamentos característicos de sólidos e fluidos são observados simultaneamente em experiências diárias. Esse tipo de materiais possui grande potencial em vários contextos tecnológicos e, por isso, seu estudo é de grande interesse na ciência básica e aplicada (LAKES, 2009). Materiais viscoelásticos possuem memória mecânica, ou seja, o histórico de deformações afeta as tensões. O comportamento viscoelástico pode ser obtido em testes de fluência, quando a tensão aplicada é constante no tempo, ou em teste de relaxação, quando a deformação imposta é constante no

tempo (MAINARDI, 2010). Essas respostas reológicas dependem do material e podem ser descritas por diferentes modelos físicos, como por exemplo, circuitos mecânicos contendo molas e amortecedores. Esses tipos de modelos costumam apresentar relaxações exponenciais. Outros modelos físicos, que apresentam relaxações em leis de potência, são aqueles que utilizam operadores fracionários, um ramo da matemática que estende a ordem dos operadores de integração e diferenciação para não-inteiros (MAGIN, 2012). As equações fracionárias permite descrever a memória do sistema (FAZLI *et al.*, 2020).

Materiais viscoelásticos são encontrados com comportamento tanto exponenciais quanto em lei de potência. A explicação física desses comportamentos ainda é motivo de investigação científica. Neste trabalho, nós propomos um modelo híbrido capaz de fornecer forças de relaxação tanto exponenciais quanto em lei de potência. Nosso modelo é composto por um elemento viscoelástico de Maxwell em paralelo a um elemento fracionário, e como ele nós investigamos analiticamente a influência da geometria do indentador nas curvas de forças de contato entre o indentador e uma amostra viscoelástica.

2 MATÉRIA MOLE

A matéria condensada mole é a classificação de materiais que não podem ser descritos simplesmente por relações constitutivas de líquidos ou sólidos. Eles abrangem uma grande variedade de materiais macios como coloides, polímeros, cristais líquidos, surfactantes, vários tipos de líquidos biológicos, suspensões e até materiais granulares. Muitos desses materiais são conhecidos na nossa vida cotidiana, como sabonetes, tintas e colas. Alguns são utilizados em processos industriais, tais como os polímeros, outros são parte de nossa comida (RAHEEM, 2019; DOI, 2013). O comportamento da matéria mole apresenta características comuns com sistemas vivos. A matéria biológica é mole e grande parte das suas atividades biológicas ocorre em estado de desordem, os sistemas fora de equilíbrio tem comportamento de matéria mole (NAGEL, 2017).

Uma característica comum dos materiais macios é que eles apresentam estruturas que se organizam em escala mesoscópica que variam entre $0,01\mu m$ e $100\mu m$, essa escala é maior do que os átomos e menor que as dimensões gerais da amostra (GUCHT, 2018). Outras características da matéria mole são uma fácil deformação por flutuações térmicas (ou forças externas) e um longo tempo de relaxação. As borrachas, por exemplo, são polímeros que podem ser alongados e seu comportamento mecânico não pode ser descrito com uma relação linear. A segunda característica é distintiva da matéria mole e é a auto-organização, o qual é um processo em que alguma forma de ordem geral surge depois de uma interação local entre partes dela quando seu sistema está inicialmente desordenado (DOI, 2013).

A matéria mole é dissipativa, desordenada, fora do equilíbrio, não linear, térmica e entrópica, lenta, observável, afetada pela gravidade, padronizada, não local, interfacialmente elástica, formadora de memória e ativa dentre outras propriedades que faz da matéria mole muito atrativa para estudar (NAGEL, 2017). Este tipo de comportamento pode representar um estudo complexo dada a formação de padrão espontâneo com propriedades únicas como o automontagem e uma grande função de resposta a pequenos estímulos externos (GUCHT, 2018).

O estudo da matéria mole, portanto, descreve o comportamento das partículas mesoscópicas dos sólido ou líquido quando são dispersas em outro líquido como por exemplo fusão de polímero ou soluções em que o tamanho e conectividade das moléculas levam a novas propriedades como a viscoelasticidade. (JONES, 2002).

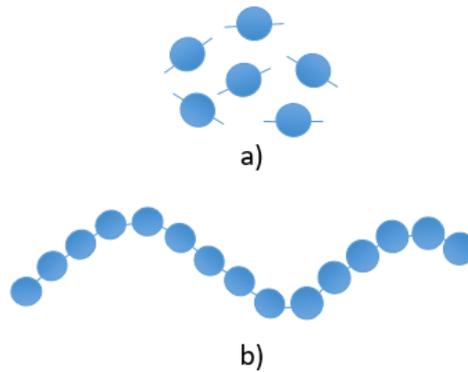


Figura 1 – a) Representação de um monômero; b) Representação de um polímero. Fonte autora.

2.1 Materiais da Matéria Mole

2.1.1 Polímeros

Polímeros são cadeias longas de moléculas feitas de pequenas unidades chamadas monômeros que se ligam em sequência como mostrado na Figura (1), que normalmente contêm milhares de monômeros e milhões de átomos. Os polímeros são materiais indispensáveis para a tecnologia moderna, são usados em plásticos, borrachas, filmes e têxteis.

Esses materiais “inteligente” podem ser usados para aplicações como processamento, armazenamento e recuperação de informações e reconhecimento molecular semelhantes aos sistemas biológicos (RAHEEM, 2019). Os polímeros também são chamados de moléculas da vida, por exemplo, as proteínas são biopolímeros feitos de aminoácidos e o DNA é um polímero natural que contém a informação genética da vida (DOI, 2013).

Eles não são sólidos normais porque não formam cristais. Eles dependem da estereoquímica da ligação dos monômeros, do comprimento de cadeia e de sua distribuição o que pode mudar a variedade do material, eles se distinguem por sua forma, como cordas que geralmente podem ser plásticos, como ramos que podem ser moldados quando se encontram num estado líquido e cordas reticuladas que podem ser as borrachas, como mostrado na Figura (2).

2.1.2 Cristais líquidos

Os cristais líquidos são uma mesofase da matéria que estão classificados em dois estados, o estado sólido que é governado por moléculas em ordem e o estado líquido que é caracterizado por moléculas em desordem, conseqüentemente eles são um estado anisotrópico e quase ordenado (COLLINGS., 1992), por exemplo as moléculas líquido-cristalinas se movem

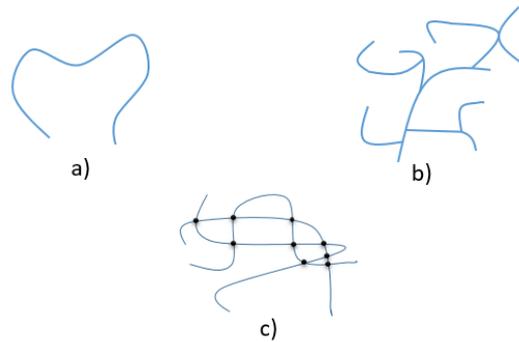


Figura 2 – Polímeros em forma de a) corda; b) ramos e c) cordas reticuladas. Fonte autora.

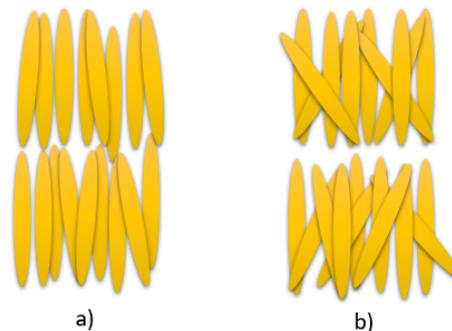


Figura 3 – Cristais líquidos esméticos e nemáticos. Fonte autora.

juntas quando giram. As moléculas podem ser caracterizadas em cristais líquidos nemáticos e cristais líquidos esméticos para identificá-los vamos representá-los semelhantes aos bastonetes, sua diferença pode se olhar na Figura (3), os nemáticos são a classe que tem certa ordem orientacional e os esméticos tem um ordem parcial, mas não uma direção certa (DOI, 2013).

2.1.3 *Surfactantes*

Surfactante (do inglês surfactant, contração de surface-active agent) é uma classe especial de material que contém uma estrutura molecular característica que consiste num grupo que tem atração pela água, ou é hidrófilo, e uma parte que não gosta de água chamada hidrofoba ou oleofílica, esses tipos de materiais são chamados materiais anfífilos.

A representação de uma molécula de surfactante está na Figura (4). Eles podem se dissolver em água e azeite, quando um surfactante é dissolvido em meio aquoso a parte hidrofóbica encapsula a parte hidrofílica dando forma a Figura (5) o que é chamado de micela. Por outro lado, um surfactante se converte numa micela invertida quando dissolvido em óleo, como na Figura (6) onde a parte hidrofílica é encapsulada (DOI, 2013).

As micelas podem ter diferentes formas que contêm milhões ou até bilhões de moléculas. Fatores como o tipo de surfactante, o ambiente, o tipo de solvente, a temperatura



Figura 4 – Molécula surfactante. Fonte autora

e concentração podem influenciar no tamanho e na forma. Esferas e cilindros (chamados de lamelas) são geometrias bastantes comuns. Exemplos de surfactantes são óleos de motores, fármacos, detergentes entre outros (WILEY; SONS, 2012).

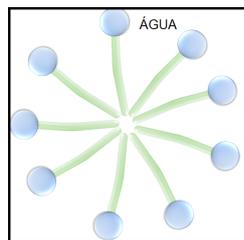


Figura 5 – Micela em água. Fonte autora.

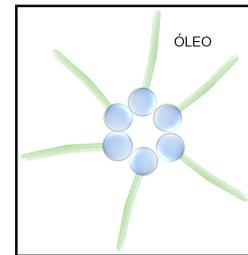


Figura 6 – Micela invertida em óleo. Fonte autora

2.1.4 Coloides

Os coloides são partículas insolúveis de diâmetro variando de $1\eta m$ e $1\mu m$ e podem conter milhões de átomos que se encontram num fluido dissolvente. Elas podem ser átomos, íons ou moléculas. São grandes em comparação às moléculas individuais mas não tão grandes para ser percebidas pelo olho humano. Foram descobertas em 1861 por Thomas Graham quando fez uma distinção entre dois tipos de soluções, aquelas cujas partículas do dissolvente são capazes de perpassar por uma membrana semipermeável e aquelas que não são capazes. Devido ao seu tamanho, as partículas coloidais são do segundo tipo. Como por exemplo de coloides, podemos citar as partículas nutritivas que compõem a solução de leite ou as partículas sólidas de pigmentação que dão a cor de a água (DOI, 2013).

Elas tem um comportamento bastante especial devido o movimento irregular. Esse movimento foi observado pela primeira vez pelo botânico Robert Brown e, por isso, seu movimento aleatório é chamado de movimento Browniano. Em 1910 a teoria foi constatada experimentalmente por Jean Perrin ao confirmar as previsões teóricas de Einstein de 1906 e Langevin de 1908 (DHONT, 1996).

As suspensões coloidais são soluções de partículas coloidais. Elas podem escoar se a concentração de partículas for baixa e, por isso, é chamado de sol. Tintas e vidros coloridos

são exemplos. Por outro lado, se a concentração for alta, a solução não escoar e isso é chamado de gel. Existem também muitas variedades nos tamanhos das partículas coloidais. Elas podem ser esféricas ou alongadas o que leva a diferentes aplicações na indústria. Elas podem escoar se a concentração de partículas for baixa e, por isso, é chamado de sol. Tintas e vidros coloridos são exemplos. Por outro lado, se a concentração for alta, a solução não escoar e isso é chamado de gel. Existem também muitas variedades nos tamanhos das partículas coloidais. Elas podem ser esféricas ou alongadas o que leva a diferentes aplicações na indústria.

3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

A reologia é o ramo da ciência e engenharia de materiais que estuda como sólidos e fluidos se deformam e escoam sob aplicações de tensões externas (LAKES, 2009). Sólidos perfeitamente elásticos, por exemplo, se deformam obedecendo a lei de Hooke, enquanto líquidos simples (chamados de fluidos newtonianos) escoam obedecendo a lei de Newton para fluidos. Essas propriedades, aparentemente antagônicas, às vezes são usadas para diferenciar sólidos de líquidos. Entretanto, existe uma classe de materiais que apresenta os dois comportamentos, ou seja materiais que se deformam e escoam simultaneamente. Esses materiais são conhecidos como materiais viscoelásticos. Materiais como ossos, cabelo e vidro, que são usualmente caracterizados como sólidos, apresentam forças viscosas que introduz uma dependência temporal quando são deformados (DHONT, 1996).

O comportamento mecânico desses materiais é muito diferente daqueles encontrados em materiais mais simples, devido a uma estrutura molecular anisotrópica que leva a estados com graus de ordenação intermediária entre um sólido cristalino e um líquido (GUCHT, 2018).

O tempo de relaxação de um material viscoelástico τ é uma propriedade física que mede o tempo que a amostra precisa para atingir o equilíbrio mecânico, após ser perturbada com forças externas. Tempos longos de relaxação correspondem a sólidos, enquanto tempos curtos a líquidos. A razão do tempo de relaxação de um material com o tempo de aplicação das forças externas t_p permite identificar melhor se um material é sólido, líquido ou viscoelástico. Essa grandeza física foi introduzida por Marcus Reiner em 1964 e nomeado de número de Deborah (De) em homenagem à personagem do velho testamento (KAELBLE, 1960; OSSWALD; RUDOLPH, 2015). De quantifica a observação de que, com tempo suficiente, até mesmo um material sólido pode fluir, ou um material fluido pode agir como sólido quando é deformado com rapidez suficiente. O número de Deborah é um número adimensional, frequentemente usado em reologia para caracterizar a fluidez de materiais sob condições específicas de fluxo, e é definido da seguinte forma

$$De = \frac{\tau}{t_p}. \quad (3.1)$$

Em geral, materiais viscoelásticos apresentam números de Deborah entre 0, 1 e 10. Valores mais baixos (próximos de zero) representam fluidos viscosos, enquanto valores elevados correspondem sólidos elásticos.

Sólidos elásticos são descritos pela Lei de Hooke (MAINARDI, 2010), onde a tensão σ é proporcional à deformação ε da seguinte forma (LAKES, 2009)

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.2)$$

onde E é o módulo de Young do material. Outra forma de representar a Lei de Hooke é por meio da função de fluência da seguinte maneira, onde J é a fluência do material

$$\varepsilon = J\sigma. \quad (3.3)$$

Por outro lado, fluidos newtonianos obedecem a Lei de Newton para materiais viscosos, onde a tensão σ é proporcional à taxa da deformação ε e η é a viscosidade do fluido

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3.4)$$

Materiais viscoelásticos são aqueles onde as relações constitutivas entre a tensão e a deformação dependem do tempo. Neste trabalho vamos tratar apenas de pequenas deformações, quando essa relação de viscoelasticidade é linear (FERRY, 1980). Ou seja, se a função deformação for multiplicada por uma constante, a tensão aumenta pela mesma constante e vice-versa. Também, a resposta a uma deformação é dada pela mesma combinação linear de as suas respostas individuais Além disso, se a resposta a uma deformação (ou uma tensão) é uma combinação linear de duas funções que é dada pela mesma combinação linear de as suas respostas individuais (MEDINA *et al.*, 2017). A teoria da viscoelasticidade linear representa um bom ponto de partida para o estudo de respostas não lineares que frequentemente dão origem a modelos mais complexos. Essa teoria foi proposta por Maxwell com a seguinte equação (FISCHER, 2017),

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\tau} \right). \quad (3.5)$$

O comportamento elástico é descrito pela equação constitutiva da Lei de Hooke como já se falou antes e é representada por uma mola com módulo de elasticidade E , o comportamento viscoso com a Lei de Newton para fluidos e é representado por um amortecedor com viscosidade η . As duas representações podem ser vistas na Figura (7).

Quando o tempo de relaxação é zero, o modelo newtoniano é recuperado. E quando a relaxação é infinitamente grande se produz um modelo de Hooke (FISCHER, 2017).

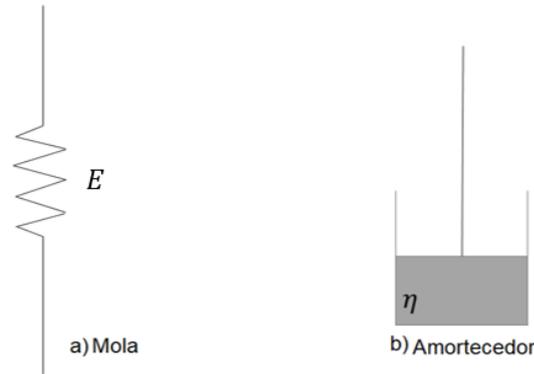


Figura 7 – a) Representação da lei de Hooke por meio de uma mola; b) Representação da Lei de Newton com um amortecedor para fluidos.

3.1 Fluência (*Creep*) e Relaxação

Em estudos das propriedades de materiais viscoelásticos é comum utilizar dois testes, o primeiro é o teste de fluência *Creep* e o segundo é o teste de relaxação.

O teste de fluência ocorre em deformações devido a uma tensão constante σ_0 (LAKES, 2009). À medida que o material é comprimido, a deformação aumenta com o tempo quase de forma instantânea. Para materiais completamente elásticos a deformação é constante para $t > 0$. Entretanto, quando se produz uma tensão constante no material viscoso a deformação cresce linearmente como o tempo. A função encarregada é a função $J = J(t)$ definida na equação 3.3 que agora é chamada *complacência de fluência*. O comportamento de fluência para materiais viscoelásticos se pode observar na Figura 8 a), a tensão permanece constante no material e a deformação cresce com o tempo de forma linear e depois de ser removida a força o material recupera sua forma inicial com um decaimento exponencial ou de lei de potência dependente do tempo (BANKS *et al.*, 2010).

No teste de relaxação por deformação, é aplicada uma deformação constante ϵ_0 , a função conhecida é agora a função de relaxação $G(t)$, então a equação 3.2 fica

$$\sigma(t) = G(t)\epsilon_0. \quad (3.6)$$

Neste caso, quando é aplicada uma deformação constante em um material viscoelástico, a tensão diminuí com o tempo porque o material gradualmente relaxa até alcançar equilíbrio mecânico. O seu comportamento se pode observar na Figura 8 b) (MALLICK, 2007).

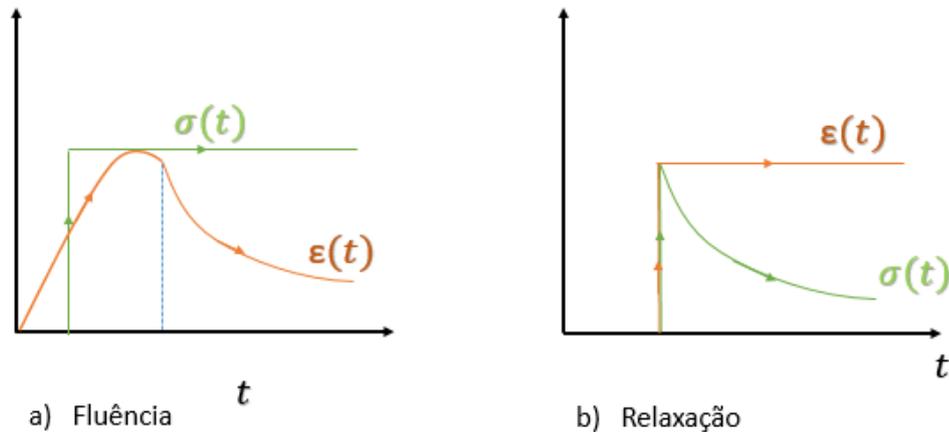


Figura 8 – Gráficos de a) tensão e deformação para materiais viscoelásticos baixo teste de fluência y b) tensão e deformação para materiais viscoelásticos baixo teste de relaxação.

3.2 Princípio da superposição de Boltzmann

O princípio de superposição de Boltzmann afirma que a deformação de um material viscoelástico é a soma, ou superposição, de todas as deformações que resultam da ação de várias forças em momentos diferentes, esta premissa é bem importante para a teoria da viscoelasticidade linear, já que é necessário equações constitutivas como as equações 3.2 e 3.4 para caracterizar um material com deformação e tensão dependentes do tempo. Isso gera as seguintes equações constitutivas para sistemas com tensões tridimensionais complexas e campos de deformação, da seguinte forma (OSSWALD; RUDOLPH, 2015)

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt', \quad (3.7)$$

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-t') \dot{\sigma}(t') dt'. \quad (3.8)$$

3.3 Modelos Viscoelásticos

Nesta seção, vamos estudar os diferentes modelos viscolásticos que permite visualizar propriedades e leis da teoria geral da viscoelasticidade linear. Dentro dos principais modelos estão, o modelo de Hooke para sólidos, Newton para fluidos e Kelvin, Voigt e Maxwell para materiais intermediários, além disso, é possível fazer combinações desse modelos para sistemas mais complexos, como o modelo de Kelvin, o modelo sólido de Padrão, o modelo de Zener, o modelo de Maxwell generalizado, de Kelvin generalizado e modelo fracionário. Modelos

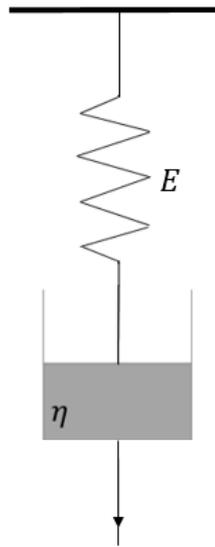


Figura 9 – Modelo de Maxwell é representado por uma mola de constante elástica E em série a um amortecedor com viscosidade η em serie.

viscoelásticos são descritos por meio de molas e amortecedores conectados em série ou paralelo, como os usados para descrever a Lei de Hooke e a Lei de Newton da Figura 7.

Notamos que quando dois elementos são combinados em série, suas fluências $J(t)$ são aditivas e quando os elementos são combinados em paralelo os módulos das funções $G(t)$ somam em paralelo, isso é chamada a regra de combinação.

3.3.1 Modelo de Maxwell

O modelo mecânico de Maxwell é composto por uma mola completamente elástica (portanto, capaz de armazenar energia) e um amortecedor que representa um componente viscoso ou entrópico. Eles são colocados em série como se pode observar na Figura 9. A tensão imposta é a mesma em cada elemento, mas a deformação é a soma das deformações, é

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) = \sigma_a(t), \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_a(t), \quad (3.10)$$

onde os subscritos m e a representam a mola e o amortecedor respectivamente. Dando lugar à equação constitutiva para o modelo de Maxwell que fornece uma relação entre a tensão e a deformação, ou seja se pode resolver a tensão $\sigma(t)$ se eu conheço uma deformação já específica,

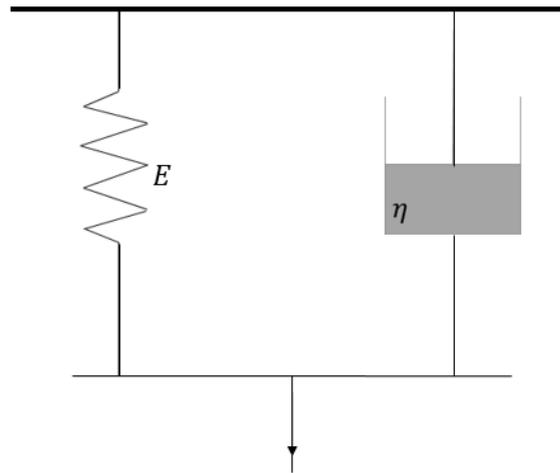


Figura 10 – Modelo de Kelvin-Voigt representado por uma mola de constante elástica k em paralelo a um amortecedor com viscosidade elástica η .

da mesma forma uma deformação com uma tensão específica, podemos encontrar (FERRY, 1980),

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_m(t) + \dot{\varepsilon}_a(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (3.11)$$

se $\tau = \eta E$, então se obtém uma equação relacionando $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$,

$$E\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\tau}\sigma(t). \quad (3.12)$$

3.3.2 Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt, consiste de dois elementos: uma mola de constante elástica E e um amortecedor com viscosidade η colocados em paralelo como se vê na Figura (10). Neste modelo a deformação é a mesma em todo o sistema e a tensão total é a soma das tensões dos elementos, isso é,

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) + \sigma_a(t), \quad (3.13)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) = \varepsilon_a(t), \quad (3.14)$$

aplicando a receita do Modelo de Maxwell, temos

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.15)$$

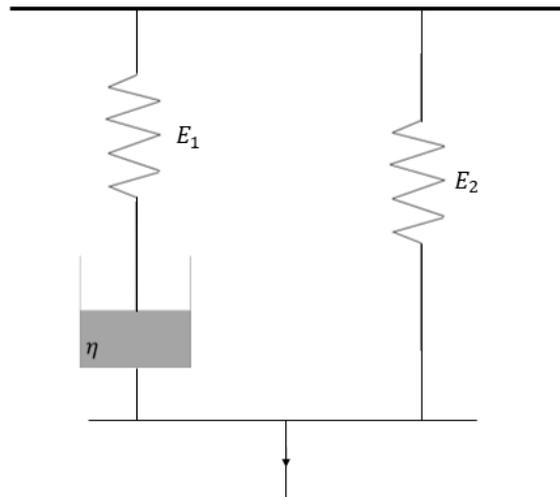


Figura 11 – Modelo sólido linear padrão representado por uma mola de constante elástica E_1 e um amortecedor com viscosidade η em serie ligados com uma mola de constante elástica E_2 em paralelo.

substituindo o conceito de τ ,

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \varepsilon(t) + \tau \dot{\varepsilon}(t), \quad (3.16)$$

temos uma equação de faz uma relação entre a tensão e a deformação do modelo de Kelvin-Voigt.

3.3.3 Modelo Sólido Linear Padrão

Este modelo consiste de três componentes, uma mola e um amortecedor em série ligados com uma mola em paralelo, como se observa na Figura (11). O equilíbrio de tensões é da seguinte forma

$$\sigma(t) = \sigma_{E_2}(t) + \sigma_M(t), \quad (3.17)$$

E a deformação do sistema é representada como

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t) + \varepsilon_{E_2}(t), \quad (3.18)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{E_2}(t). \quad (3.19)$$

Quando combinamos as equações 3.17 com a equação 3.19, obtemos a equação que governa o modelo sólido linear padrão com as variáveis de tensão e deformação:

$$\eta \dot{\sigma}(t) + E_1 \sigma(t) = \eta(E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t). \quad (3.20)$$

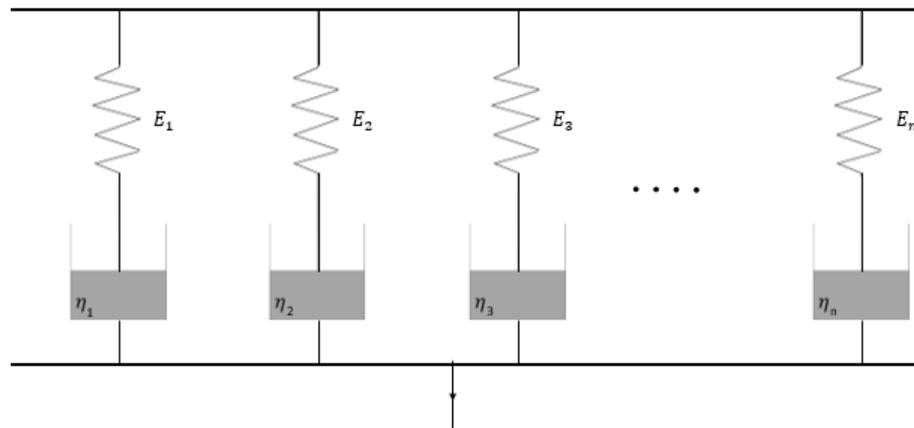


Figura 12 – Modelo generalizado de Maxwell representado por modelos de Maxwell ligados em paralelo.

3.3.4 Modelo generalizado de Maxwell e Kelvin

O modelo generalizado de Maxwell também é conhecido como o modelo de Wiechert, este contém um número arbitrário de elementos do modelo de Maxwell constituído por uma mola e um amortecedor ligados em paralelo, ele permite estudar o comportamento mecânico experimentalmente com mais precisão, como mostrado na Figura (12).

O comportamento da tensão do modelo generalizado de Maxwell total, tendo em conta o i^{th} elemento de Maxwell para n elementos, é dado como,

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t), \quad (3.21)$$

as deformações individuais são iguais

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon_i(t) \dots \quad (3.22)$$

A equação que governa o Modelo de Maxwell-Wiechert é

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_i(t)}{E_i} + \frac{\sigma_i}{\eta_i}, \quad (3.23)$$

onde E_i e η_i são as constantes de elasticidade e as viscosidades do i^{th} modelo de Maxwell, respetivamente. Por outro lado, o Modelo de Kelvin generalizado consiste em um sistema com n elementos do Modelo de Kelvin, onde uma mola e um amortecedor estão ligados em série, está representado na Figura (12).

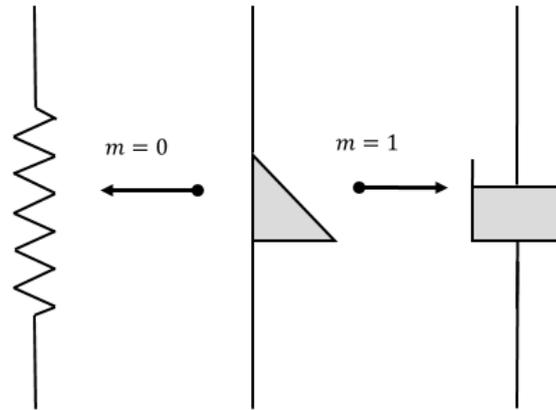


Figura 13 – Representação de um elemento fracionário. Quando $m = 0$ uma mola Hookeana é recuperada e quando $m = 1$ um amortecedor newtoniano é recuperado.

3.3.5 Modelo Fracionário

O cálculo fracionário permite integrais e derivadas de qualquer ordem positiva e pode ser considerado um ramo da física matemática que lida com equações integro-diferenciais, tendo sua origem na questão da extensão de números reais e fatoriais de inteiros. Um pouco mais sobre o *princípio de correspondência* entre os modelos mecânico-clássico e fracionário (MILLER; ROSS, 1993; LI *et al.*, 2013). Existe um fenômeno de atrito que é caracterizado pelo cálculo fracionário que resolve as equações de movimento para encontrar uma gama mais ampla de fenômenos, apresentando uma forma

$$F_R = -\mu \frac{d^m}{dt^m} x(t), \quad (3.24)$$

fazendo isto para um modelo viscoelásticos, podemos encontrar a variação do coeficiente de atrito fracionário m dentro do intervalo $0 \leq m \leq 2$, portanto, descreve os tipos de forças clássicas dependentes da aceleração-velocidade e da posição de um ponto de vista generalizado como atrito fracionário (HERRMANN, 2018). Dentro das aplicações do estudo do cálculo fracionário, existe o problema de amortecimento e viscoelasticidade de sistemas dinâmicos (YUAN; AGRAWAL, 2002).

A teoria viscoelástica linear pode ser considerada como uma generalização usando cálculo fracionário dos modelos clássicos em termos de derivadas de ordem fracionária $\frac{d^m}{dt^m}$ sendo $0 \leq m \leq 1$. A equação é do tipo

$$\sigma(t) = E \tau^m \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m}, \quad (3.25)$$

onde $\tau = \frac{\eta}{E}$. Quando $m = 0$, obtemos uma resposta elástica, no entanto com $m = 1$, obtemos uma resposta viscosa (MAINARDI, 2010). A Figura (13) descreve o elemento fracionário.

Podemos representar diferentes modelos montando diferentes sistemas, onde, o elemento de ordem fracionário pode ser usado com molas, amortecedores ou outros elementos também de ordem fracionário. Estes podem ser conectados em série ou em paralelo, para construir modelos mais complicados. As funções fracionárias podem ser tratadas com técnicas como transformadas de Laplace e Fourier (MAINARDI, 2010).

Cada modelo permite descrever diferentes comportamentos viscoelásticos em função do comportamento do material, se ele fosse mais elástico ou se tende a ser mais viscoso. O modelo de Maxwell é capaz de descrever o comportamento elástico e viscoso, mas não leva em conta os efeitos de memória na deformação. Ao contrário do modelo de Maxwell, o modelo de Kelvin-Voigt é capaz de levar em consideração os efeitos de memória na deformação. Também é útil para descrever materiais que exibem comportamento viscoso dominante. O modelo sólido linear padrão. É útil para descrever materiais que apresentam comportamento elástico linear e não apresentam efeitos viscosos, como fazem os modelos generalizados de Maxwell e Kelvin, que permitem descrever materiais viscoelásticos com múltiplos tempos de relaxação característicos. Por outro lado temos o modelo fracionário que é útil para descrever materiais que exibem comportamento viscoelástico complexo e não linear, como polímeros e géis (LAKES, 2009).

4 MODELO HÍBRIDO

Neste trabalho, nós propomos um modelo híbrido que contém uma mola, um elemento de Maxwell e um elemento fracionário, todos em paralelo entre si, como se pode observar na Figura (14).

A tensão resultante do modelo híbrido é dada por

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t) + \sigma_2(t), \quad (4.1)$$

onde $\sigma_0(t)$ é a tensão aplicada para E_0 , $\sigma_1(t)$ é a tensão aplicada ao elemento de Maxwell e $\sigma_2(t)$ é a tensão aplicada ao modelo fracionário. Por enquanto, estamos aplicando um teste de relaxação, onde a deformação é constante, isto é, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Como já vimos antes, se $m = 0$, o elemento fracionário (E_2, τ_2, m) tem comportamento puramente elástico, enquanto o caso $m = 1$, o comportamento é puramente viscoso. Usando a definição da equação (3.25), a tensão do modelo fracionário é $\sigma_2(t) = E_2 \tau_2^m \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m}$. O elemento fracionário vai depender de três parâmetros (E_2, τ_2, m) , com E_2 sendo a constante elástica de Hooke, τ_2 o tempo de relaxação e m o termo que define a derivada fracionária. A tensão para o modelo de Maxwell é

$$\sigma_1(t) = \sigma_{E_1}(t) = \sigma_\eta(t), \quad (4.2)$$

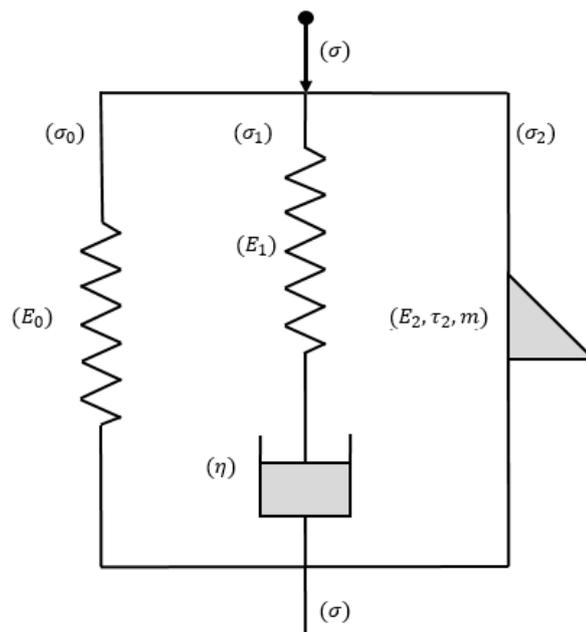


Figura 14 – Modelo híbrido que contém um modelo sólido linear padrão a um elemento fracionário.

mas a deformação total do modelo é dada pela soma das deformações da mola e do amortecedor

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_{E_1}(t) + \varepsilon_\eta(t), \quad (4.3)$$

derivando as equações (4.2) e (4.3) com respeito ao tempo, temos

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1(t)}{dt} + \frac{\sigma_1(t)}{\eta}, \quad (4.4)$$

onde a tensão do modelo de Maxwell é

$$\sigma_1(t) = \frac{\frac{d\varepsilon(t)}{dt}}{\frac{1}{E_1} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta}}. \quad (4.5)$$

Finalmente, se o termo de relaxação para o Modelo de Maxwell $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$, equação (4.1) vai ter a forma,

$$\sigma(t) = \left(E_0 + E_1 \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_1}} + E_2 \tau_2^m \frac{d^m}{dt^m} \right) \varepsilon(t), \quad (4.6)$$

com as seguintes condições de contorno, $\varepsilon(0) = 0$ e $\sigma(0) = 0$. Usando a transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = E_0 \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} + E_1 \mathcal{L}\{\sigma_1(t)\} + E_2 \tau_2^m \mathcal{L}\left\{ \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m} \right\}, \quad (4.7)$$

com o argumento de que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ e que a transformação de Laplace para derivadas fracionárias atua como $\mathcal{L}\left\{ \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m} \right\} = s^m \tilde{\varepsilon} - \left(\frac{d^{m-1} \tilde{\varepsilon}(t)}{dt^{m-1}} \right)_{t=0}$, como este último termo é uma constante $\left(\frac{d^{m-1} \tilde{s}(t)}{dt^{m-1}} \right)_{t=0} = C$, podemos desprezá-la, temos

$$\tilde{\sigma}(s) = E_0 \tilde{\varepsilon}(s) + \tilde{\sigma}_1(s) + E_2 \tau_2^m s^m \tilde{\varepsilon}(s). \quad (4.8)$$

Para encontrar a função relaxação do modelo híbrido, vamos procurar transformada da Laplace da função relaxação do modelo de Maxwell $\tilde{G}_1(s)$, podemos reescrever a equação (4.4) como,

$$\tilde{\sigma}_1(s) = E_1 s \tilde{\varepsilon}(s) = s \tilde{\sigma}_1 + \frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{\tau_1}, \quad (4.9)$$

isolando o termo $\tilde{\sigma}_1(s)$, temos

$$\tilde{\sigma}_1(s) = \frac{E_1 s \tilde{\varepsilon}(s)}{s + \frac{1}{\tau_1}}, \quad (4.10)$$

para isso, usamos a relação entre tensão e deformação da equação (3.7) que tem como transformada de Laplace $\tilde{\sigma}_1(s) = s \tilde{G}_1(s) \tilde{\varepsilon}(s)$, então obtemos

$$\tilde{G}_1(s) = E_1 \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}}. \quad (4.11)$$

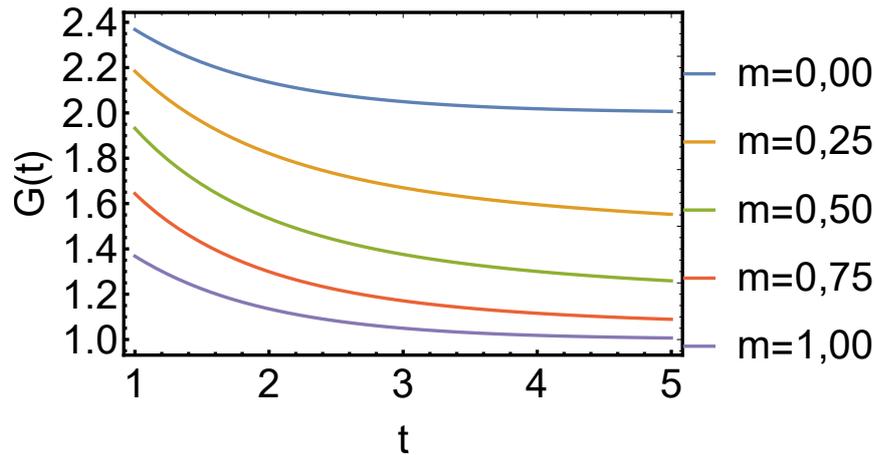


Figura 15 – Curvas de forças de relaxação para diferentes valores de m , quando $m = 0,00$, $(0,25)$, $(0,50)$, $(0,75)$, $(1,00)$.

A transformação inversa de Laplace da equação acima é $E_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}} \right] = E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$, então

$$G_1(t) = E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \quad (4.12)$$

Assim, obtemos a primeira contribuição da função relaxação, agora vamos procurar a contribuição da parte fracionária que está dada pelo último termo da equação (4.8), vamos usar a transformação de Laplace $\tilde{\sigma}(s) = s\tilde{G}(s)\tilde{\epsilon}(s)$ e usando a equação (4.4), temos que

$$\tilde{G}_2(s) = E_2(\tau_2^m s^{m-1}), \quad (4.13)$$

e aplicando a transformação inversa de Laplace da função relaxação na equação (4.13), temos que

$$G_2(t) = \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (4.14)$$

Podemos observar que se $m = 0,00$, a função relaxação tem um comportamento puramente elástico $G_2(t) = E_2$, mas se $m = 1,00$ o comportamento é puramente viscoso e $G_2(t) = E_2 \tau_2 t^{-1}$. Finalmente, a função relaxação final é uma superposição das funções relaxação de todo o sistema híbrido,

$$G(t) = E_0 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (4.15)$$

Na Figura 15, mostramos as curvas da função relaxação $G(t)$ para diferentes valores do parâmetro m em função do tempo. Quando o valor de m tende ao $m = 1,00$, temos um decaimento mais rápido da função relaxação, quando temos valores de m próximos ao $m = 0,00$ o decaimento é mais divagar.

5 CURVAS DE FORÇAS PARA DIFERENTES FORMAS DE UM INDENTADOR

5.1 Determinação de forças de Contato

Primeiramente, vamos calcular a força de contato indentador-amostra para materiais elásticos. O ponto de contato pode ser determinado por três modelos (HERTZ, 1881; JOHNSON; GREENWOOD, 1997; JOHNSON *et al.*, 1971; MAUGIS, 1992): (i) o modelo de Hertz; (ii) o modelo de Jonson, Kendall e Roberts (JKR); (iii) e o modelo Derjaguin, Muller e Toporov (DMT). O estudo do modelo de Hertz, com uma análise mais profunda da indentação do meio elástico foi feito por Sneddon que encontrou relações diretas entre a indentação da amostra representada por δ e a força $F(\lambda)$ para diferentes geometrias do indentador, e ser representada por meio da equação,

$$F(\lambda) = \zeta E^* \delta^\lambda, \quad (5.1)$$

onde ζ é uma constante que depende da geometria de contato, E^* é a constante elástica de Young reduzida e λ é o expoente da lei de potência que sai do ajuste da curva $F - \delta$ cujo valor representa geometrias específicas do indentador. Os expoentes 1, 3/2 e 2 são observados em indentadores achatados, esféricos e cônicos, respectivamente. O módulo reduzido de Young pode ser calculado usando a seguinte expressão,

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} + \frac{(1 - \nu_i^2)}{E_i}, \quad (5.2)$$

onde E é o módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson para o material indentado, E_i e ν_i são o módulo de Young e o parâmetro de Poisson do indentador. Por exemplo, os parâmetros de indentadores feitos de nitrado de silício (Si) e diamante, são mostrados na Tabela 1. Fazendo uma substituição dos valores dos módulos no termo final da equação 5.2, observamos que esse termo pode ser desprezado.

Indentador	Módulo de Young (E_i)	Parâmetro de Poisson (ν_i)
Nitrado de Silício	72GPa	0,17
Diamante	1411GPa	0,07

Tabela 1 – Módulo de Young e coeficiente de Poisson um indentador feito de nitrato silício e diamante.

Tendo em conta as condições da tabela acima, o indentador é muito rígido que a amostra, por isso, podemos fazer uma simplificação da equação 5.2 e reduzi-la próxima equação,

com o modulo de Young E^* ,

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (5.3)$$

E também tem uma relação com o módulo de cisalhamento da forma,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.4)$$

A equação 5.1 pode ser reescrita na forma,

$$F(\lambda) = \frac{\zeta E \delta^\lambda}{(1 - \nu^2)}. \quad (5.5)$$

O modelo anterior é principalmente aplicado para materiais rígidos, mas não para materiais moles, como células. Para pequenas forças logo depois do contato, a interação entre o indentador e a matéria mole, não é afetada pela adesão e nem pela deformação plástica, somente pela deformação elástica e teorias elásticas, como estão presentes na teoria de Hertz (GREENWOOD *et al.*, 1984). Então o histórico de carga de força mantém a forma matemática de Hertz, mas substituindo $E \rightarrow E(t)$ e também o $\delta \rightarrow \delta(t)$, apresentando uma dependência temporal,

$$F(t) = \frac{\zeta E(t) \delta^\lambda(t)}{(1 - \nu^2)}. \quad (5.6)$$

Vamos assumir agora que a força de carga $F(t)$ e a indentação $\delta(t)$ podem ser representadas como $F(t) = F_{max} \bar{F}(t)$ e $\delta = \delta_{max} \bar{\delta}(t)$, onde F_{max} e δ_{max} são os valores máximos de força de carga e indentação respectivamente e $\bar{F}(t)$ e $\bar{\delta}(t)$ representam o histórico de força de carga e indentação, respectivamente. Então o histórico de carga pode ser escrito da seguinte forma,

$$\bar{F}(t) = \frac{\zeta E(t) \delta_{max} \bar{\delta}^\lambda(t)}{(1 - \nu^2) F_{max}}, \quad (5.7)$$

cuja solução é desenvolvida usando a Transformada de Laplace para $\tilde{F}(s)$, como $\mathcal{L}[\bar{F}(t)]$, então

$$\tilde{F}(s) = \mathcal{L}[\bar{F}(t)], \quad (5.8)$$

$$\tilde{\delta}^\lambda(s) = \mathcal{L}[\bar{\delta}^\lambda(t)], \quad (5.9)$$

e aplicando sobre todo o termo, temos

$$\tilde{F}(s) = \frac{\zeta \delta_{max}}{(1 - \nu^2) F_{max}} \tilde{E}(s) \tilde{\delta}^\lambda(s), \quad (5.10)$$

usando a definição $\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{E}(s)}{s}$ e fazendo uma substituição em 5.10, podemos ter uma relação entre a força de carga e função relaxação,

$$\tilde{F}(s) = \frac{\zeta \delta_{max}}{(1-v^2)F_{max}} \tilde{G}(s) s \tilde{\delta}^\lambda(s), \quad (5.11)$$

calculando a transformação inversa de Laplace na equação 5.11

$$\mathcal{L} \left[\tilde{G}(s) s \tilde{\delta}^\lambda(s) \right] = \mathcal{L} \left[\int_0^t G(t-t') \frac{d\tilde{\delta}^\lambda(t')}{dt} dt' \right], \quad (5.12)$$

então a força de carga vai ser escrita da forma

$$F(t) = \Omega(\lambda) \delta_{max}^\lambda \int_0^t G(t-t') \frac{d\tilde{\delta}^\lambda(t')}{dt} dt', \quad (5.13)$$

onde $\Omega(\lambda) = \frac{\zeta}{(1-v^2)F_{max}}$ e o histórico de força de carga é

$$\bar{F}(t) = \frac{F(t)}{F_0} = \int_0^t G(t-t') \frac{d\tilde{\delta}^\lambda(t')}{dt}, \quad (5.14)$$

com $F_0 = \Omega(\lambda) \delta_{max}^\lambda$ é o fator de força normalizada. A função Creep Compliance apresenta uma relação módulo de relaxação, tendo a seguinte forma

$$\frac{1}{\bar{J}(s)} = s \bar{E}(s), \quad (5.15)$$

com o módulo de Young já definido, então

$$\bar{J}(s) \bar{G}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (5.16)$$

portanto, o cálculo para a função Creep Compliance é

$$\delta^\lambda(t) = \frac{1-v^2}{\Gamma} \int_0^t J(t-t') \frac{dF(t')}{dt'} dt'. \quad (5.17)$$

Tendo a função de força de carga em função do tempo, vamos estudar as curvas de cargas durante os diferentes momentos da indentação:

- **(l)** Fase em que o indentador entra em contato com a amostra e começa uma indentação linear;
- **(d)** Fase em que o indentador mantém invariável a indentação na amostra e, consequentemente, da força aplicada.
- **(u)** Fase de descarga.

Usando a função de força 5.13, podemos definir a função F_l em termos também de δ_l^λ ,

$$F_l(t) = \Omega(\lambda) \int_0^t G(t-t') \frac{d\delta_l^\lambda(t')}{dt'} dt', \text{ com } (t \leq \tau_l), \quad (5.18)$$

fazendo uma normalização da equação anterior para obter o histórico de força em l ,

$$\bar{F}_l(t) = \int_0^t G(t-t') \frac{d\bar{\delta}_l^\lambda(t')}{dt'} dt', \text{ com } (t \leq \tau_l), \quad (5.19)$$

para o caso $\bar{F}_d(t)$, temos

$$\bar{F}_d(t) = \int_0^{\tau_l} G(t-t') \frac{d\bar{\delta}_l^\lambda(t')}{dt'} dt' + \int_{\tau_l}^t G(t-t') \frac{d\bar{\delta}_d^\lambda(t')}{dt'} dt', \text{ com } (\tau_l \leq t \leq \tau_l + \tau_d). \quad (5.20)$$

e o histórico de força $\bar{F}_u(t)$,

$$\begin{aligned} \bar{F}_u(t) = \int_0^{\tau_l} G(t-t') \frac{d\bar{\delta}_l^\lambda(t')}{dt'} dt' + \int_{\tau_l}^{\tau_l + \tau_d} G(t-t') \frac{d\bar{\delta}_d^\lambda(t')}{dt'} dt' + \\ \int_{\tau_l + \tau_d}^t G(t-t') \frac{d\bar{\delta}_u^\lambda(t')}{dt'} dt', \text{ com } (t \geq \tau_l + \tau_d). \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde $\delta_l(t)$, representa a indentação de carga na amostra

$$\delta(t) = \delta_{max} \frac{t}{\tau_l}, \quad (5.22)$$

$$\delta^\lambda(t) = \delta_{max}^\lambda \frac{t^\lambda}{\tau_l^\lambda}, \text{ com } (t \leq \tau_l), \quad (5.23)$$

$\delta_d(t)$ é a indentação permanente na amostra, donde $f(t - \tau_l)$ é uma função suave $\frac{df}{dt} \simeq 0$

$$\delta_d(t) = \delta_{max} (1 + f(t - \tau_l)), \quad (5.24)$$

$$\delta_d^\lambda(t) = \delta_{max}^\lambda (1 + f(t - \tau_l))^\lambda, \text{ com } (\tau_l \leq t \leq \tau_l + \tau_d), \quad (5.25)$$

e $\delta_u(t)$ representa a indentação de descarga sobre a amostra

$$\delta_u(t) = \delta_d(\tau_d + \tau_l) \left[1 - \frac{t - (\tau_l + \tau_d)}{\tau_u} \right], \text{ com } (t \geq \tau_l + \tau_d). \quad (5.26)$$

Se aplicarmos a função (5.22) somente para $G_2(t)$ para os casos $\bar{F}_l(t)$ e $\bar{F}_d(t)$, temos o termo para lei de potência da seguinte forma

$$\bar{F}_{lp}(t) = \frac{\lambda}{\tau_l^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^t t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt', \text{ com } (t \leq \tau_l), \quad (5.27)$$

onde o subscrito lp significa lei de potência na parte de loading e também

$$\begin{aligned} \bar{F}_{dp}(t) &= \lambda \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^{\tau_1} \frac{t'^{\lambda-1}}{\tau_1^\lambda} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt' \\ &+ \int_{\tau_1}^t \lambda \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} \left[\delta_{max}(1+f(t-\tau_1)^{\lambda-1} dt') \right] \left(\frac{d\delta_{max}}{dt} + \frac{d[\delta_{max}f(t-\tau_1)]}{dt} \right), \text{ com } (\tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_d) \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde o suscito dp é a função dwell em lei de potência e $\left(\frac{d[\delta_{max}f(t-\tau_1)]}{dt} \right)$ é desprezível porque função suave $f(t-\tau_1)$ sobre as amostras é uma constante e a derivação de uma constante é zero. Por último, o histórico de força de descarga com a função de relaxação é dado

$$\bar{F}_{dp}(t) = \frac{\lambda}{\tau_1^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^{\tau_1} t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt', \text{ com } (\tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_d). \quad (5.29)$$

5.2 Curvas de forças para o modelo híbrido

Vamos agora calcular as curvas de forças da função relaxação do modelo híbrido que representa o modelo do sólido linear padrão que tem o comportamento exponencial, o modelo fracionário, com comportamento de lei de potência, apresentando dois modelos como uma superposição na equação (4.15), para isto vamos fazer uma nova notação para todas as forças, a força de carga é $\bar{F}_l(t)$

$$\begin{aligned} \bar{F}_l(t) &= \underbrace{\int_0^t E_0 \frac{d\bar{\delta}_l^\lambda(t')}{dt'} dt'}_{\bar{F}_{l0}(t)} + \underbrace{\int_0^t E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{d\bar{\delta}_l^\lambda(t')}{dt'} dt'}_{\bar{F}_{le}(t)} \\ &+ \underbrace{\int_0^t \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-\lambda} \frac{d\bar{\delta}_l^\lambda(t')}{dt'} dt'}_{\bar{F}_{lp}(t)}, \text{ com } (t \leq \tau_1). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Primeiro vamos calcular a força normalizada $\bar{F}_l(t)$, realizando uma substituição do valor de $G_1(t)$ na equação 5.19, podemos encontrar as curvas de forças para uma função relaxação, dada pela lei de potência para o caso $\bar{F}_{lp}(t)$ como já vimos antes,

$$\bar{F}_{lp}(t) = \frac{\lambda}{\tau_1^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^t t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt', \text{ com } (t \leq \tau_1). \quad (5.31)$$

As curvas de forças para a lei de potência para o caso $\bar{F}_{dp}(t)$,

$$\bar{F}_{dp}(t) = \frac{\lambda}{\tau_1^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^{\tau_2} t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt', \text{ com } (\tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_d). \quad (5.32)$$

As soluções das equações (5.31) e (5.32) são dadas por meio de uma integração analítica, com pode ser observado no apêndice B, temos que,

$$\bar{F}_{dp}(t) = E_2 \Gamma(\lambda + 1) \frac{I\left(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1 - m\right)}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_l}\right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{-m}, \text{ com } (\tau_l \leq t \leq \tau_l + \tau_d), \quad (5.33)$$

onde $I\left(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1 - m\right)$ representa a função beta incompleta (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965).

Então, finalmente podemos reescrever a função $\bar{F}_l(t)$

$$\begin{aligned} \bar{F}_l(t) = & \underbrace{\frac{\lambda E_0}{\tau_l^\lambda} \int_0^t t'^{\lambda-1} dt'}_{\bar{F}_{l0}(t)} + \underbrace{\frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} \int_0^t t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_1}} dt'}_{\bar{F}_{le}(t)} + \\ & \underbrace{\frac{\lambda}{\tau_l^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^t t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2}\right)^{-m} dt'}_{\bar{F}_{lp}(t)}, \text{ com } (t \leq \tau_l), \quad (5.34) \end{aligned}$$

onde o termo de lei de potencia vai ser,

$$\bar{F}_{lp} = \frac{\lambda}{\tau_l^m} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^t t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2}\right)^{-m} dt' = E_2 \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{t}{\tau_l}\right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{-m}, \quad (5.35)$$

o primeiro termo da equação (5.34) é constante e vai ser $F_{l0}(t)$,

$$\bar{F}_{l0}(t) = \frac{\lambda E_0}{\tau_l^\lambda} \int_0^t t'^{\lambda-1} dt' = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l}\right)^\lambda, \quad (5.36)$$

e parte exponencial $\bar{F}_{le}(t)$,

$$\bar{F}_{le}(t) = \frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} \int_0^t t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_1}} dt' = \frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^t t'^{\lambda-1} e^{\frac{t'}{\tau_1}} dt', \quad (5.37)$$

fazendo uma mudança de variáveis com $u = \frac{t'}{\tau_1}$, então $t' = u\tau_1$, isso leva a que $du = \frac{dt'}{\tau_1}$ e $dt' = \tau_1 du$, então a força $\bar{F}_{le}(t)$ é

$$\bar{F}_{le}(t) = \frac{\lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\frac{t}{\tau_1}} u^{\lambda-1} \tau_1^{\lambda-1} \tau_1 e^u du, \quad (5.38)$$

$$\bar{F}_{le}(t) = E_1 \lambda e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^\lambda \int_0^{\frac{t}{\tau_1}} u^{\lambda-1} e^u du. \quad (5.39)$$

5.3 Curvas de forças para um λ generalizado

Curvas de força $\bar{F}_l(t)$ para um λ generalizado usando os resultados as equações 5.36, 5.35 e 5.39, então

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{\tau}{\tau_l} \right)^\lambda + E_1 \lambda e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \int_0^{\frac{t}{\tau_1}} u^{\lambda-1} e^u du + E_2 \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (5.40)$$

Fazendo uma transformação do termo exponencial da força, onde $u = -x$ e $du = -dx$, fica da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{le}(t) &= E_1 \lambda e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \int_0^{\frac{t}{\tau_1}} u^{\lambda-1} e^u du \\ &= -(-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \int_0^{-\frac{t}{\tau_1}} x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \end{aligned} \quad (5.41)$$

a integral final tem um valor em termo da função Gamma incompleta, ela é $\int_0^{-\frac{t}{\tau_1}} x^{\lambda-1} e^{-x} dx = \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right)$. Então a curva de força $\bar{F}_l(t)$ generalizada para λ é

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{\tau}{\tau_l} \right)^\lambda - (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right) + E_2 \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (5.42)$$

Por outro lado, a força $\bar{F}_d(t)$ generalizada para λ é

$$\bar{F}_d(t) = E_0 - (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right) + E_2 \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \frac{I\left(\frac{t}{\tau_2}; \lambda; 1 - m\right)}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} \quad (5.43)$$

fazendo $t \rightarrow \infty$ na força $\bar{F}_d(t)$, temos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_d(t) = E_0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 I\left(\frac{t}{\tau_2}; \lambda; 1 - m\right) t^{\lambda-m} \right) = E_0, \quad (5.44)$$

onde $k_1 = -(-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right)$ e $k_2 = E_2 \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-m)} \left(\frac{1}{\tau_l} \right)^\lambda \left(\frac{1}{\tau_2} \right)^m$. A relaxação apresenta uma força constante para $t \rightarrow \infty$. Fazendo a mesma analogia, tomando um tempo t que tende ao infinito, para a função relaxação $G(t)$ na equação 4.15,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = E_0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} \right), \quad (5.45)$$

a função relaxação para tempos muito grandes vai convergir em dois valores diferentes que dependem do termo m . Por exemplo, se m for um valor que tende a 1, encontramos que o caso é puramente viscoso e $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = E_0$, mas, se m for um valor que tende a zero n o caso é puramente elástico, então $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = E_0 + E_2$. Da mesma forma, acontece para função relaxação para tempo de longa duração, ela converge para a constante E_0 .

5.4 Curvas de forças para diferentes formas do indentador

Desde o começo estamos interessados em encontrar a função relaxação para o caso onde o parâmetro λ vai ser $\lambda = 1$, $\lambda = 3/2$ e $\lambda = 2$ que são os casos cilíndrico, esférico e cônico, respectivamente. Para um λ qualquer, temos (apêndice D)

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda + E_2 \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} + \bar{F}_{le}(t), \quad (5.46)$$

$$\bar{F}_{le}(t) = \begin{cases} -(-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right), & \text{com } \lambda = (1, 0; 2, 0) \\ (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right), & \text{com } \lambda = (3/2) \end{cases} \quad (5.47)$$

A equação geral para $\lambda = (1; 1, 5; 2)$ para $\bar{F}_d(t)$ tem a seguinte forma,

$$\bar{F}_d(t) = E_0 + E_2 \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \frac{I\left(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1 - m\right)}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} + \bar{F}_{de}, \quad (5.48)$$

$$\bar{F}_{de}(t) = \begin{cases} -(-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{\tau_l}{\tau_1}; \lambda\right), & \text{para } \lambda = (1, 0; 2, 0) \\ (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{\tau_l}{\tau_1}; \lambda\right), & \text{para } \lambda = (3/2) \end{cases} \quad (5.49)$$

5.4.1 Indentador cilíndrico

As curvas de força de relaxação com base na nossa proposta de modelo híbrido para um indentador com forma cilíndrica, que é o caso quando $\lambda = 1, 0$, são da seguinte forma

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l} \right) + \frac{E_2}{\tau_l} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\tau_1}} dt' + E_2 \Gamma(2) \left(\frac{t}{\tau_l} \right) \frac{1}{\Gamma(2 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.50)$$

onde o termo exponencial que contem uma integral é da forma, $\frac{E_1}{\tau_l} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\tau_1}} dt = \frac{E_1 \tau_1}{\tau_l} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$.

Então a curva de força para um indentador cilíndrico vai ficar como,

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l} \right) + \frac{E_1 \tau_1}{\tau_l} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + E_2 \Gamma(2) \left(\frac{t}{\tau_l} \right) \frac{1}{\Gamma(2 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.51)$$

Finalmente a curva de força $\bar{F}_d(t)$ para o caso cilíndrico com $\lambda = 1, 0$ é

$$\bar{F}_d(t) = E_0 + E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(e^{\frac{\tau_l}{\tau_1}} - 1 \right) + E_2 \Gamma(2) \left(\frac{t}{\tau_l} \right) \frac{I\left(\frac{\tau_l}{t}; 1; 1 - m\right)}{\Gamma(2 - m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (5.52)$$

Nós modelamos o comportamento das forças de loading e Dwell com valores fixos para todas as gráficas com $\tau_l = 1$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$, $E_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 1$. O comportamento das forças $\bar{F}_l(t)$ e $\bar{F}_d(t)$ separadamente para um indentedor cilíndrico $\lambda = 1,0$ pode ser observado na Figura 16 para um tempo de relaxação $\tau_l = 1$ e em função do tempo para diferentes valores de m , escolhemos os valores de $m = 0,00$, $m = 0,25$, $m = 0,50$, $m = 0,75$ e especificamente para olhar o comportamento das funções em valores próximos ao $m = 1,00$, escolhemos $m = 0,80$, $m = 0,85$, $m = 0,90$ e $m = 1,00$. O resultado para a força $\bar{F}_l(t)$ é interessante quando o valor de m se vai aproximando a $1,0$ a curva adquire concavidade, particularmente a concavidade para $m = 1$ é abrupta em comparação aos outros valores. Para valores de m próximos de $1,0$ o decaimento da força $\bar{F}_d(t)$ é mais rápido com respeito ao tempo, mas nenhum valor se encontra no tempo, por enquanto temos que para valores próximos de $m = 0,00$ a força $\bar{F}_d(t)$ é maior na amostra.

Quando a amostra começa experimentando a força $\bar{F}_d(t)$ o decaimento dela é bastante rápido tanto que para $m = 1,00$ que é a curva amarela, não se consegui observar esse decaimento, por esse motivo encontramos os resultados para $m = 0,80$, $m = 0,85$, $m = 0,90$ e $m = 1,00$, onde eles mostram que efetivamente quando a força inicia o decaimento em $t = 0$ é quase vertical. O ponto máximo de aplicação de força na amostra não muda significativamente quando se altera o valor de m .

5.4.2 Indentador esférico

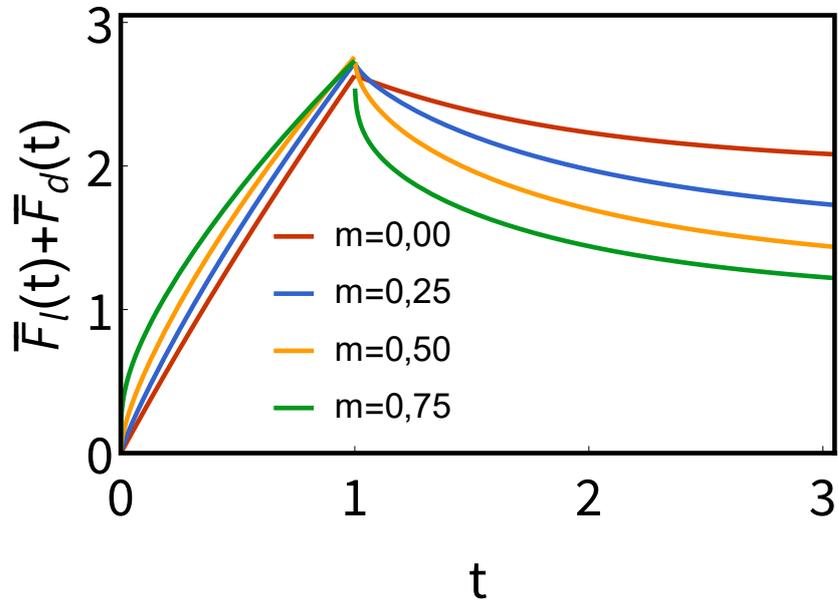
As curvas de forças para o caso esférico com $\lambda = \frac{3}{2} = 1,5$ para a parte exponencial resulta ser

$$\bar{F}_{el}(t) = E_1 \left(\frac{3}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{t}{\tau_1}} u^{\frac{1}{2}} e^u du, \quad (5.53)$$

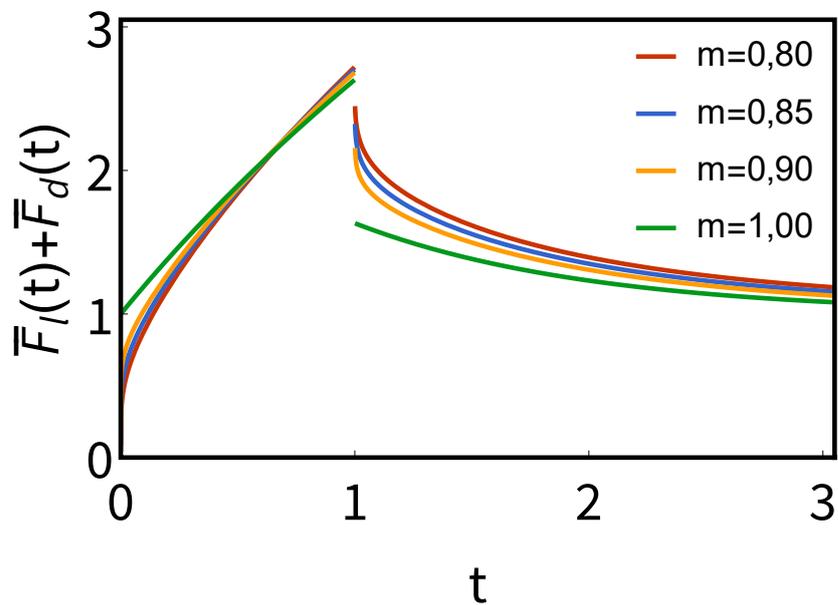
onde a integral final pode ser escrita como $\int_0^{\frac{t}{\tau_1}} u^{\frac{1}{2}} e^u du = e^{\frac{t}{\tau_1}} \sqrt{\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}} \right)$, onde a função erro imaginária é definida como $\operatorname{erfi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt$. Substituindo a descrição da função erro a força $\bar{F}_{el}(t)$, é

$$\bar{F}_{le}(t) = E_1 \left(\frac{3}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{t}{\tau_1}} e^{\frac{t}{\tau_1}} - E_1 \left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\pi} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad (5.54)$$

$$\bar{F}_{le}(t) = E_1 \left(\frac{3}{2}\right) \sqrt{t} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l^{\frac{3}{2}}}\right) - E_1 \left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\pi} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \quad (5.55)$$

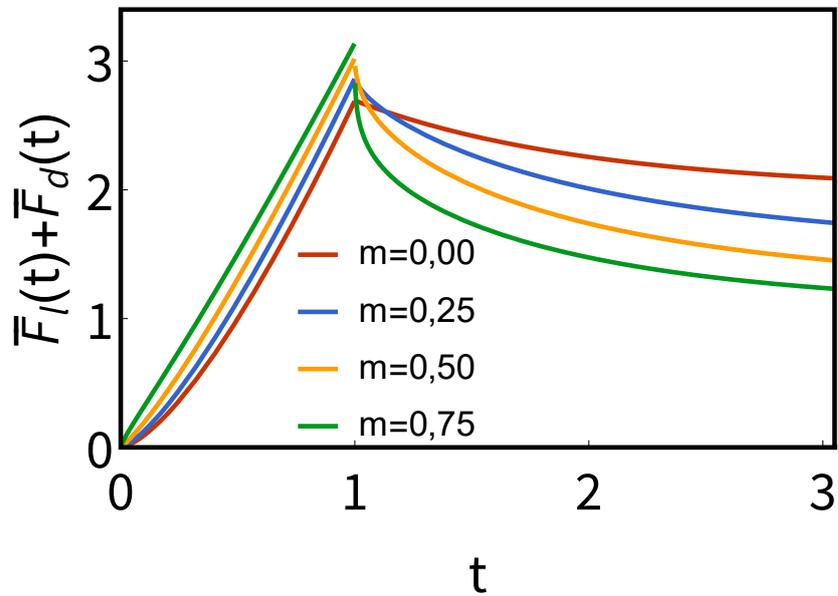


(a) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para $m = 0,00, m = 0,25, m = 0,50, m = 0,75$.

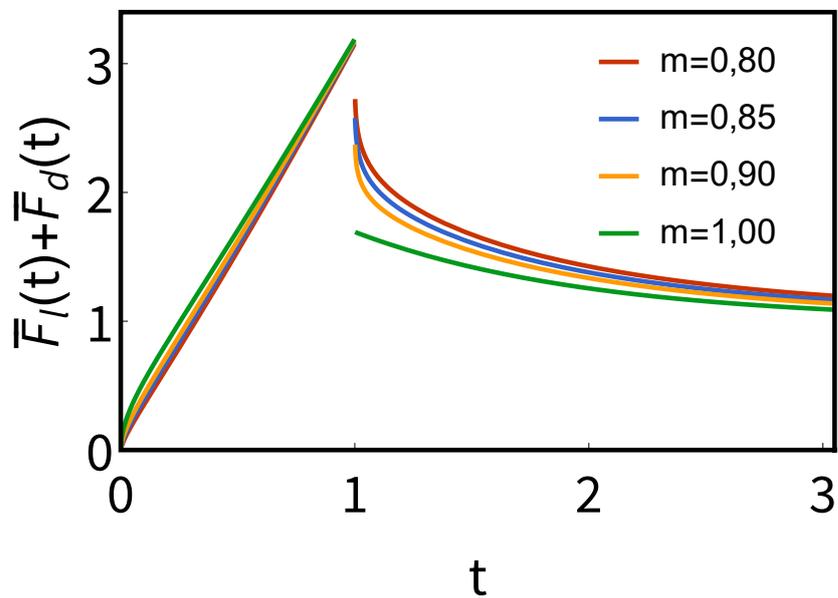


(b) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para $m = 0,80, m = 0,85, m = 0,90, m = 1,00$.

Figura 16 – Gráfico de força $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para um indentador cilíndrico $\lambda = 1,00$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 3$. Fonte autora.



(a) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para $m = 0,00, m = 0,25, m = 0,50, m = 0,75$.



(b) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para $m = 0,80, m = 0,85, m = 0,90, m = 1,00$.

Figura 17 – Gráfico de força $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para um indetador cilíndrico $\lambda = 1.50$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 3$. Fonte autora.

Então as curvas de forças para $\bar{F}_l(t)$ no caso esférico como $\lambda = \frac{3}{2} = 1,5$ são

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^{\frac{3}{2}} + E_1 \left(\frac{3}{2} \right) \sqrt{t} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l^{\frac{3}{2}}} \right) - E_1 \left(\frac{3}{4} \right) \sqrt{\pi} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + E_2 \Gamma \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma \left(\frac{5}{2} - m \right)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.56)$$

sabemos a que função de força de relaxação $\bar{F}_d(t)$ é

$$\bar{F}_d(t) = \frac{\lambda E_0}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} dt' + \frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_1}} dt' + \frac{\lambda}{\tau_l^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.57)$$

para $(\tau_l \leq t \leq \tau_l + \tau_d)$. O primeiro termo da equação 5.57 é uma força de forma constante, o segundo força de forma exponencial e o terceiro força de forma de lei de potência. Fazendo o calculo para todos os termos encontramos que para o termo constante,

$$\frac{\lambda E_0}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} dt' = E_0, \quad (5.58)$$

para o termo exponencial temos,

$$\frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_1}} dt' = \frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} e^{\frac{t'}{\tau_1}} dt', \quad (5.59)$$

fazendo algumas mudanças de notação $u = \frac{t'}{\tau_1} \rightarrow du = \frac{dt'}{\tau_1} \rightarrow t' = u\tau_1 \rightarrow dt' = \tau_1 du$, então a equação será

$$\frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_1}} dt' = E_1 \lambda e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^\lambda \int_0^{\frac{\tau_l}{\tau_1}} u^{\lambda-1} e^u du. \quad (5.60)$$

Então para $\lambda = \frac{3}{2}$, o termo exponencial vai ser,

$$\frac{\lambda E_1}{\tau_l^\lambda} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_1}} dt' = E_1 \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right) e^{-\frac{(t-\tau_l)}{\tau_1}} - E_1 \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{\tau_l}{\tau_1}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad (5.61)$$

para o termo de lei de potência,

$$\frac{\lambda}{\tau_l^\lambda} \frac{E_2}{\Gamma(1-m)} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} = E_2 \Gamma(\lambda+1) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \frac{I \left(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1-m \right)}{\Gamma(\lambda+1-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (5.62)$$

Finalmente as curvas de forças para $\bar{F}_d(t)$ no caso esférico como $\lambda = \frac{3}{2}$ vai ser,

$$\bar{F}_d(t) = E_0 + E_1 \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right) e^{-\frac{(t-\tau_l)}{\tau_1}} - E_1 \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{\tau_l}{\tau_1}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + E_2 \Gamma \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{I \left(\frac{\tau_l}{t}; \frac{3}{2}; 1-m \right)}{\Gamma \left(\frac{3}{2} + 1 - m \right)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}. \quad (5.63)$$

O comportamento das forças $\bar{F}_l(t)$ e $\bar{F}_d(t)$ sobre a amostra de um indentador esférico $\lambda = 1,5$ para os valores de m se pode ver na curva do gráfico 17. Quando a força $\bar{F}_l(t)$ é aplicada sobre a amostra, podemos observar que o comportamento não tem muita concavidade como se pode olhar no indentador cilíndrico, em vez disso, a concavidade é maior para os valores próximos de $m = 0,00$, a força $\bar{F}_l(t)$ é quase linear para $m = 1,00$, $m = 0,80$, $m = 0,85$ e $m = 0,90$.

O decaimento da força $\bar{F}_d(t)$ quando está sobre a amostra para o indentador esférico tem forma similar ao decaimento do indentador cilíndrico, elas decaem mais rápido quando $m = 1,00$, além disso, as curvas não se encontram depois de um ponto no tempo, ou seja, não convergem. Uma coisa para ressaltar diferente do decaimento cilíndrico é que a força máxima que fica sobre a amostra vai depender dos valores de m , se $m = 0,00$ a força máxima é menor, mas se $m = 1,00$ a força máxima sobre a amostra é maior, isso não acontece para o indentador cilíndrico.

Da mesma maneira, para o caso cilíndrico o comportamento vertical é mais clarificado quando $m = 0,80$, $m = 0,85$ e $m = 0,90$ do que $m = 1,00$.

5.4.3 Indentador cônico

As curvas de forças para o caso cônico com $\lambda = 2$ para a fase quando o indentador já está sobre amostra é

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^2 + \frac{2E_1}{\tau_l^1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\tau_1}} t' dt' + E_2 \Gamma(3) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^2 \frac{1}{\Gamma(3-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.64)$$

fazendo as contas para o termo exponencial da equação (5.64),

$$\frac{2E_1}{\tau_l^1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^t e^{\frac{t'}{\tau_1}} t' dt' = 2E_1 \frac{\tau_1}{\tau_l^2} t - 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \quad (5.65)$$

Escrevendo novamente a equação 5.64, temos que a força $\bar{F}_l(t)$ é,

$$\bar{F}_l(t) = E_0 \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^2 + 2E_1 \frac{\tau_1}{\tau_l^2} t - 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l} \right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau_2}{\tau_l} \right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + E_2 \Gamma(3) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^2 \frac{1}{\Gamma(3-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.66)$$

e a força mantém-se na amostra \bar{F}_d é

$$\bar{F}_d(t) = E_0 + \frac{2E_1}{\tau_l^2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^{\tau_l} e^{\frac{t'}{\tau_1}} t' dt' + E_2 \Gamma(3) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^2 \frac{I\left(\frac{\tau_l}{t}; 2; 1-m\right)}{\Gamma(3-m)} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m}, \quad (5.67)$$

onde a integral,

$$\frac{2E_1}{\tau_l^2} e^{-\frac{t}{\tau_l}} \int_0^{\tau_l} e^{\frac{t'}{\tau_l}} t' dt' = 2E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l} \right) e^{-\left(\frac{t-\tau_l}{\tau_l}\right)} - 2E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l} \right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l} \right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_l}} \quad (5.68)$$

finalmente a força $\bar{F}_d(t)$ para o caso cônico donde $\lambda = 2$ é da forma,

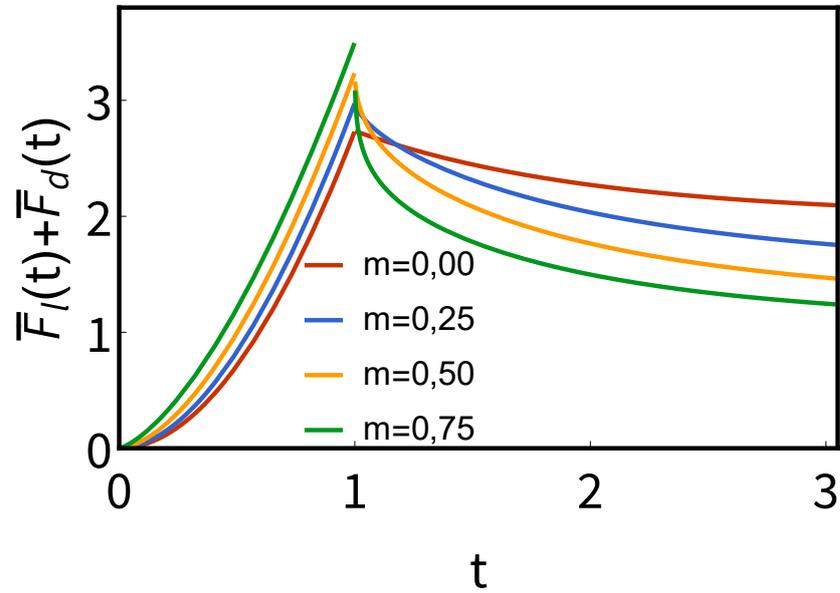
$$\begin{aligned} \bar{F}_d(t) = E_0 + 2E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l} \right) e^{-\frac{(t-\tau_l)}{\tau_l}} - 2E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l} \right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l} \right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_l}} \\ + E_2 \Gamma(3) \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^2 \frac{I\left(\frac{t}{\tau_l}; 2; 1-m\right)}{\Gamma(3-m)} \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^{-m}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Na Figura 18, podemos observar a soma das duas forças que atuam sobre amostra $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$. A força $\bar{F}_l(t)$ tem concavidade para diferentes valores de m , justo quando $m > 0$ as curvas das forças adquirem mais concavidade.

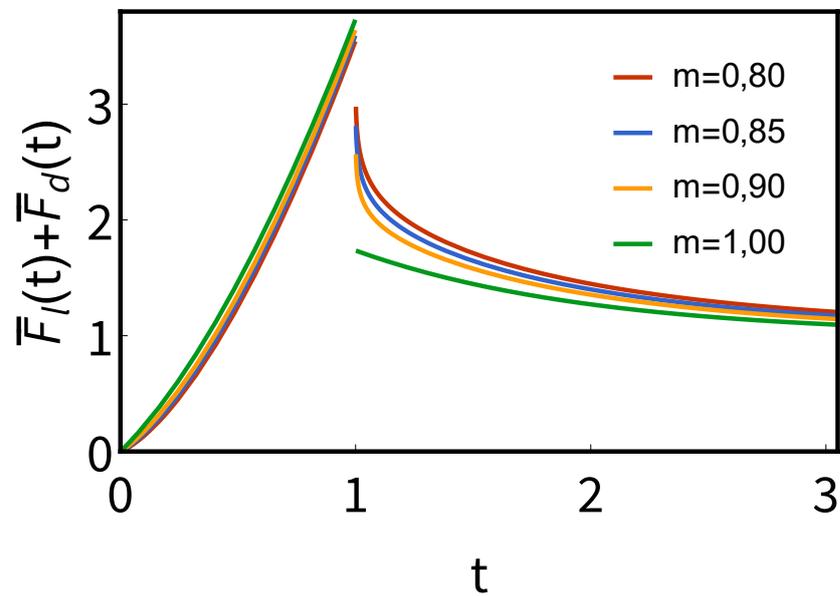
A força $\bar{F}_d(t)$ para diferentes valores de m tem um decaimento mais rápido que os decaimento quando o indentador é esférico e cilíndrico, também se pode observar que o valor máximo de força que acontece sobre a amostra muda para os diferentes valores de m , de acordo com o valor. Por exemplo, para $m = 1,00$, o máximo de força sobre a amostra é muito menor que para $m = 0,00$, isso faz que o decaimento da força $m = 0,00$ não seja tão rápido, seja mais bem um valor constante que toma no tempo. Justamente para os valor de $m = 0,80$, $m = 0,85$, $m = 0,90$ é mais visível o decaimento vertical em $t = 0$ que quando $m = 1,00$. As curvas para distintos valor de m não convergem no tempo.

Para observar outra perspectiva, o comportamento das forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ no tempo para diferentes valores de λ , foram traçadas as curvas das forças para $m = 0,00$, $m = 0,25$, $m = 0,50$, $m = 0,75$ e exclusivamente para o valor $m = 1,00$ se gráfico também $m = 0,80$ e $m = 0,85$.

No momento em que $m = 0,00$, podemos observar na Figura 19 a) que a força $\bar{F}_l(t)$ tem mais concavidade positiva quando o indentador é cônico e se torna linear quando vai para a forma esférico e depois para a forma cilíndrica, aí podemos observar que existe diferença entre os indentadores, além disso, a força máxima aplicada na amostra é maior quando o indentador tem forma cônica, um comportamento similar é observado nas Figuras 19 b), c) e d), a concavidade vai variando para valor de $m = 0,25$, $m = 0,50$ e $m = 0,75$ só que para algumas é positiva e para outras negativa, vemos o caso de $m = 0,25$ a concavidade quando o indentador é cilíndrico é negativa e conforme aumenta o valor de λ a concavidade é positiva, o mesmo acontece para $m = 0,50$ e $m = 0,75$ só que a mudança de concavidade é abrupta. Além disso, as forças máximas



(a) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para $m = 0,00, m = 0,25, m = 0,50, m = 0,75$.



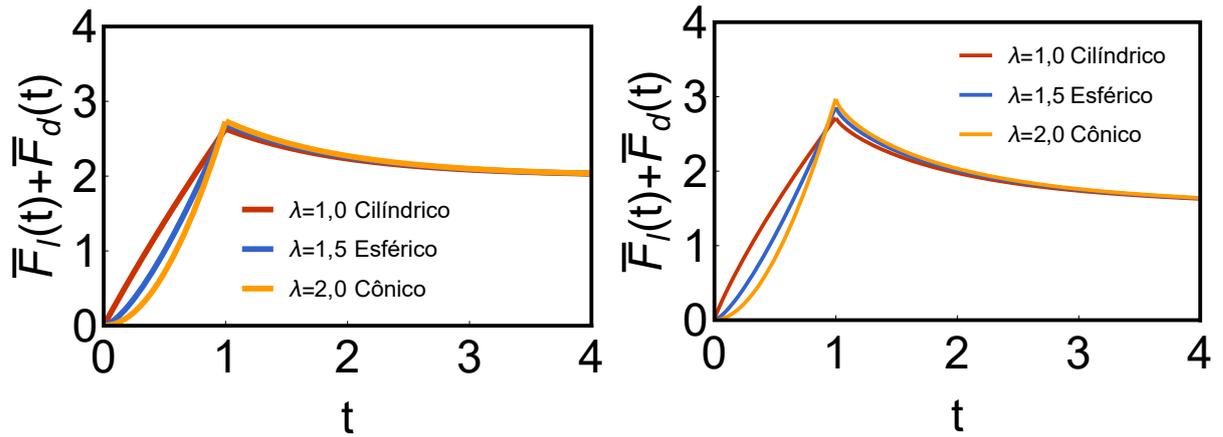
(b) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para $m = 0,80, m = 0,85, m = 0,90, m = 1,00$.

Figura 18 – Gráfico de força $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ para um indentador cilíndrico $\lambda = 2,00$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 3$. Fonte autora.

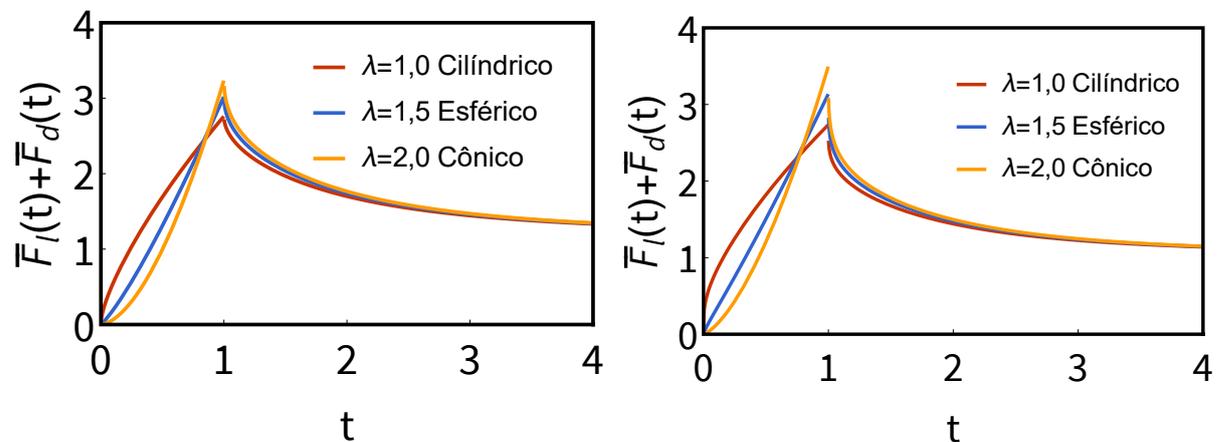
aplicadas sobre a amostra também são distintas, sendo maior para o indentador cônico e menor para o indentador cilíndrico.

Se $m = 0,75$ não é possível observar o decaimento vertical próximo a $t = 0$, mas como já foi descrito antes o decaimento é muito rápido. Para $\bar{F}_d(t)$ podemos observar que para $m = 0,00$, $m = 0,25$, $m = 0,50$ e $m = 0,75$ o comportamento não é muito diferente entre eles e além disso, eles convergem depois do tempo.

Exclusivamente para o comportamento quando $m = 1,00$ é feita sua análise usando os resultados para $m = 0,80$ e $m = 0,85$, como se pode observar na Figura 20. Ali se pode observar que para a força $\bar{F}_l(t)$ existe uma mudança de concavidade positiva para concavidade negativa desde $0,80$ até $m = 1,00$, o indentador primeiramente toma a forma cônica, depois esférica e finalmente cilíndrica. Além disso, é observado que o máximo de força aplicada na amostra muda em um valor significativo, ou seja, que a amostra experimenta uma força muito maior quando $m = 1,00$ e o indentador tem forma cônica.

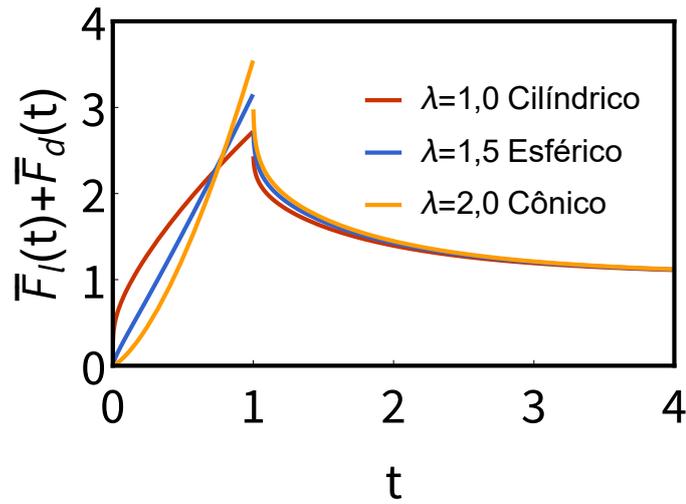


(a) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 0,00$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$. (b) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 0,25$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$.

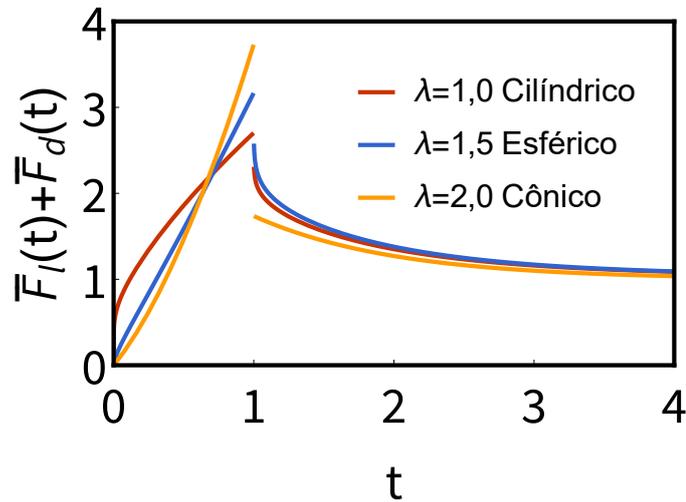


(c) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 0,50$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$. (d) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 0,75$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$.

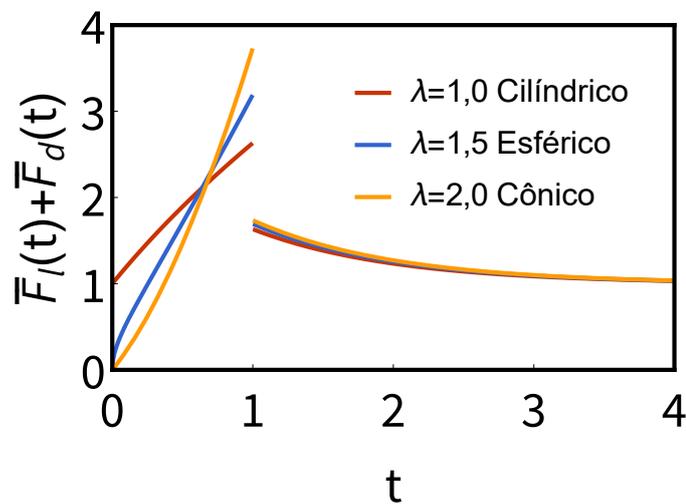
Figura 19 – Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ aplicadas sobre a amostra para diferentes indentadores, indentador cilíndrico, esférico e cônico para valores de $m = 0,00$, $m = 0,25$, $m = 0,50$ e $m = 0,75$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 4$. Fonte autora.



(a) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 0,80$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$.



(b) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 0,85$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$.



(c) Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ com $m = 1,00$ para $\lambda = 1,0$, $\lambda = 1,5$ e $\lambda = 2,0$.

Figura 20 – Forças $\bar{F}_l(t) + \bar{F}_d(t)$ aplicadas sobre a amostra para diferentes indentadores: indentador cilíndrico, esférico e cônico para valores de $m = 0,80$, $m = 0,85$ e $m = 1,00$ com tempos $0 \leq \tau_l \leq 1$ e $1 \leq \tau_d \leq 4$. Fonte autora.

6 CONCLUSÕES

Nós propomos um modelo físico para contatos mecânicos capaz de reproduzir comportamentos viscoelásticos generalizados, ou seja, capaz de reproduzir comportamentos exponenciais ou em lei de potência levando em conta a geometria do indentador. Para esse fim, nós desenvolvemos um circuito mecânico híbrido contendo um elemento de um sólido linear padrão e um elemento fracionário de ordem m , cujo valor determina o comportamento reológico. Quando $m = 0$ o comportamento do modelo é puramente elástico, e quando $m = 1$ o comportamento é puramente viscoso. Valores intermediário do expoente m leva para comportamento viscoelástico em lei de potência. Nós então realizamos um experimento de relaxação e calculamos separadamente a força de contato quando o indentador pressiona o material (intervalo chamado de "loading") e quando o material relaxa (intervalo chamado de "dwell"). Nós encontramos o comportamento das curvas especificamente para valores de $m = (0,00)$, $m = (0,25)$, $m = (0,50)$, $m = (0,75)$, $m = (0,80)$, $m = (0,85)$ e $m = (1,00)$, e para três geometrias do indentador. Os valores próximos de 1,00 foram obtidos para observar o comportamento da força de dwell em $t = 1$ quando estava próxima ao $m = (1,00)$, onde o decaimento foi mais rápido. Foi possível observar também que a força de loading é a maior sobre a amostrada especificamente em $t = 1$ quando m está próximo a 1,00 para os três tipos de indentador que nós estudamos. Além, usamos os resultados para observar com as diferentes tipos de geometrias descritas pelo fator λ , onde $\lambda = 1,0$ reproduz a geometria do indentador cilíndricos, $\lambda = 1,5$ do indentador esférico e $\lambda = 2,0$ do indentador cônico. Nós observamos que a força de loading era sempre maior para indentadores com formato cônico e menor para formatos cilíndricos. O crescimento da força de loading muda também, por exemplo, quando $\lambda = 1,0$ os crescimentos são em forma potencial, quando $\lambda = 2,0$ os crescimentos são de forma exponencial. Mas, a força de dwell tem o mesmo comportamento de decaimento exponencial.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of Mathematical Functions**: with formulas, graphs, and mathematical tables. [S. l.]: Dover Publications, 1965. (Applied mathematics series). ISBN 9780486612720.
- ARAÚJO, J. L. B. de; SOUSA, J. S. de; FERREIRA, W. P.; OLIVEIRA, C. L. N. Viscoelastic multiscaling in immersed networks. **Physical Review Research**, American Physical Society (APS), v. 2, n. 3, 2020. ISSN 2643-1564.
- BANKS, H.; HU, S.; KENZ, Z. R. A brief review of elasticity and viscoelasticity. In: . [S. l.]: Cambridge University Press, 2010. v. 3, n. 1.
- COLLINGS., P. J. Liquid crystals: nature's delicate phase of matter. **Crystal Research and Technology**, v. 27, n. 1, p. 40–40, 1992.
- DHONT, J. **An Introduction to Dynamics of Colloids**. [S. l.]: Elsevier Science, 1996. (ISSN). ISBN 9780080535074.
- DOI, M. **Soft Matter Physics**. [S. l.]: OUP Oxford, 2013. ISBN 9780199652952.
- FAZLI, H.; SUN, H.; NIETO, J. J. Fractional langevin equation involving two fractional orders: existence and uniqueness revisited. **Mathematics**, v. 8, 2020. ISSN 2227-7390.
- FERRY, J. **Viscoelastic Properties of Polymers**. [S. l.]: Wiley, 1980. ISBN 9780471048947.
- FISCHER, P. Understanding viscoelasticity: an introduction to rheology. **Applied Rheology**, p. 312–312, 2017.
- GREENWOOD, J.; JOHNSON, K.; MATSUBARA, E. A surface roughness parameter in hertz contact. **Wear**, Elsevier, v. 100, n. 1-3, p. 47–57, 1984.
- GUCHT, J. van der. Grand challenges in soft matter physics. **Frontiers in Physics**, v. 6, p. 87, 2018. ISSN 2296-424X.
- HERRMANN, R. **Fractional Calculus**: an introduction for physicists. [S. l.]: World Scientific Publishing, 2018. v. 3. ISBN ISBN: 978-981-3274-57-0.
- HERTZ, H. The contact of elastic solids. **J Reine Angew, Math**, v. 92, p. 156–171, 1881.
- JOHNSON, K.; GREENWOOD, J. An adhesion map for the contact of elastic spheres. **Journal of Colloid and Interface Science**, v. 192, p. 326–333, 1997. ISSN 0021-9797.
- JOHNSON, K. L.; KENDALL, K.; ROBERTS, A. D. Surface energy and the contact of elastic solids. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, n. 1558, p. 301–313, 1971. ISSN 00804630.
- JONES, R. A. L. Soft condensed matter. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 23, n. 6, p. 652–652, oct 2002.
- KAELBLE, D. H. Deformation, strain, and flow: an elementary introduction to rheology. **Journal of Polymer Science**, v. 46, n. 148, p. 556–556, 1960.
- LAKES, R. **Viscoelastic Materials**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2009.

- LI, C.; CHEN, Y.; KURTHS, J. Fractional calculus and its applications. **Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences**, v. 371, p. 20130037, 2013.
- MAGIN, R. Fractional calculus in bioengineering: a tool to model complex dynamics. **Proceedings of the 2012 13th International Carpathian Control Conference**, 2012.
- MAINARDI, F. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity**: an introduction to mathematical models. [S. l.]: Imperial College Press, 2010. ISBN 9781848163300.
- MALLICK, P. **Fiber-Reinforced Composites**: materials, manufacturing, and design. [S. l.]: CRC Press, 2007. v. 2. ISBN 9780429122064.
- MAUGIS, D. Adhesion of spheres: the jkr-dmt transition using a dugdale model. **Journal of Colloid and Interface Science**, v. 150, p. 243–269, 1992. ISSN 0021-9797.
- MEDINA, G.; OJEDA, N.; PEREIRA, J.; ROMERO, L. Fractional laplace transform and fractional calculus. **International Mathematical Forum**, v. 12, p. 991–1000, 01 2017.
- MILLER, K.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. [S. l.]: Wiley, 1993. ISBN 9780471588849.
- MOEENDARBARY, E.; HARRIS, A. Cell mechanics: principles, practices, and prospects. **Wiley Interdisciplinary Reviews. Systems Biology and Medicine**, v. 6, p. 371 – 388, 2014.
- NAGEL, S. R. Experimental soft-matter science. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 89, p. 025002, Apr 2017.
- OSSWALD, T.; RUDOLPH, N. **Polymer Rheology**. [S. l.]: Hanser, 2015. I-XI p. ISBN 978-1-56990-517-3.
- RAHEEM, Z. **Physical Properties of Polymers Handbook**. [S. l.]: Springer New York, 2019. v. 2. ISBN 0387690026, 9780387690025.
- REINER, M. The deborah number. **Physics today**, v. 17, n. 1, p. 62, 1964.
- SCHIFF, J. L. **The Laplace Transform**: theory and applications. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 1999.
- WILEY, J.; SONS. **Characteristic Features of Surfactants**. [S. l.]: John Wiley Sons, Ltd, 2012. 1-38 p. ISBN 9781118228920.
- YUAN, L.; AGRAWAL, O. A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 124, p. 321–324, 2002.

APÊNDICE A – CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE UM INDENTADOR

Vamos procurar o termo final do modulo de Young reduzido da equação 5.2 para um indentador que é feito de dos tipos de materiais, de nitrado de silício e diamante, dividimos os termos em duas partes I e II e usamos as constantes deles como é observado na tabela 2.

Termo	Indentador	Modulo de Young (E_i)	Parâmetro de Poisson (ν_i)
I	Nitrado de Silício	72GPa	0,17
II	Diamante	1411GPa	0,07

Tabela 2 – Modulo de Young e parâmetro de Poisson um indentador feito de nitrato silício e diamante.

Vamos a calcular o termo I, então,

$$I = \frac{(1 - \nu^2)}{E_i} = \frac{(1 - (0,17)^2)}{72} = \frac{1 - 0,0289}{72} = \frac{0,9711}{72} \simeq 0,0013 \simeq 0, \quad (\text{A.1})$$

para II, temos

$$II = \frac{(1 - \nu^2)}{E_i} = \frac{1 - (0,07)^2}{1411} = \frac{1 - 0,049}{1411} = \frac{0,9951}{1411} \simeq 0,0007 \simeq 0. \quad (\text{A.2})$$

O modulo de Young é escrito

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad (\text{A.3})$$

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde E representa uma relação com o módulo de cisalhamento \mathcal{G} assim,

$$\mathcal{G} = \frac{E}{1(1 + \nu)}. \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DE FORÇA

Reescrevendo as equações 5.31 e 5.29 as curvas de força \bar{F}_l e \bar{F}_d representam dois tipos de integrais,

$$I_{1\alpha} = \frac{\lambda}{\tau_l^\lambda} \frac{1}{\Gamma(1-m)} \int_0^t t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt', \quad (\text{B.1})$$

$$I_{1\beta} = \frac{\lambda}{\tau_l^\lambda} \frac{1}{\Gamma(1-m)} \int_0^{\tau_l} t'^{\lambda-1} \left(\frac{t-t'}{\tau_2} \right)^{-m} dt'. \quad (\text{B.2})$$

Resolvendo a equação $I_{1\alpha}$ por meio do método de substituição, onde $u = \frac{t'}{t}$ e $du = \frac{dt'}{t}$, então $u = t'/t = 1$,

$$I_{1\alpha} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-m)} \int_0^1 u^{\lambda-1} \frac{t^{\lambda-1}}{\tau_l^\lambda} \left(\frac{t-ut}{\tau_1} \right)^{-m} du, \quad (\text{B.3})$$

reescrevendo de outra maneira, temos

$$I_{1\alpha} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} \int_0^1 u^{\lambda-1} (1-u)^{1-m-1} du, \quad (\text{B.4})$$

onde $\int_0^1 u^{\lambda-1} (1-u)^{1-m-1} du$ é a função Beta correspondente a $B(1; \lambda; 1-m) = B(\lambda; 1-\lambda)$. Então a função $I_{1\alpha}$ fica como,

$$I_{1\alpha} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} B(\lambda; 1-\lambda). \quad (\text{B.5})$$

Fazendo o mesmo para a integral $I_{1\beta}$, temos que $u = \frac{t'}{t}$ e $du = \frac{dt'}{t}$

$$I_{1\beta} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} \int_0^{\frac{\tau_l}{t}} \left(\frac{1-u}{\tau_1} \right)^{1-m-1} du, \quad (\text{B.6})$$

onde $\int_0^{\frac{\tau_l}{t}} \left(\frac{1-u}{\tau_1} \right)^{1-m-1} du$ é a função Beta incompleta da forma $B\left(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1-m\right)$, então a expressão para $I_{1\beta}$ é,

$$I_{1\beta} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_l} \right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{-m} B\left(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1-m\right), \quad (\text{B.7})$$

e fazendo uma generalização para qualquer integral da forma I_{1x}

$$I_{1x} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{-m} B(x; \lambda; 1-m), \quad (\text{B.8})$$

onde $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, onde,

$$B(\lambda; 1-m) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-m)}{\Gamma(\lambda+1-m)}, \quad (\text{B.9})$$

além disso,

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1-m)B(\lambda, 1-m)}, \quad (\text{B.10})$$

substituindo na equação B.8, usando $\lambda\Gamma(\lambda) = \Gamma(\lambda+1)$ temos

$$I_{1x} = \lambda \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1-m)B(\lambda, 1-m)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{-m} B(x; \lambda; 1-m), \quad (\text{B.11})$$

onde $I(x; \lambda; 1-m) = \frac{B(x; \lambda; 1-m)}{B(\lambda, 1-m)}$, substituindo, temos

$$I_{1x} = \frac{\lambda\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1-m)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{-m} I(x; \lambda; 1-m), \quad (\text{B.12})$$

onde $\lambda\Gamma(\lambda) = \Gamma(\lambda+1)$. Agora substituindo I_{1x} nas equações 5.31 e 5.29, temos

$$\bar{F}_l(t) = E_2\Gamma(\lambda+1) \frac{I(1; \lambda; 1-m)}{\Gamma(\lambda+1-m)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{-m} \text{ com } (t \leq \tau_l), \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{F}_d(t) = E_2\Gamma(\lambda+1) \frac{I(\frac{\tau_l}{t}; \lambda; 1-m)}{\Gamma(\lambda+1-m)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^\lambda \left(\frac{t}{\tau_2}\right)^{-m}, \text{ com } (\tau_l \leq t \leq \tau_l + \tau_d), \quad (\text{B.14})$$

onde $I(1; \lambda; 1-m) \approx 1$.

APÊNDICE C – PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é da forma (SCHIFF, 1999),

$$\tilde{F}(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{C.1})$$

sua transformada inversa é

$$\mathcal{L}^{-1}(\tilde{F}(s)) = f(t), t \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

Se $f(t) \equiv 1$ para $t \geq 0$, então,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\tau} \right) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

De forma geral, a transformada

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, (\Re\{s\} > 0) \quad (\text{C.4})$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ e sua transformada inversa é

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\right) = t^n. \quad (\text{C.5})$$

A transformada de Laplace para a derivada $f'(t)$ é

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) \quad (\text{C.6})$$

por seu turno a transformada de Laplace para a segunda derivada $f''(t)$,

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) \quad (\text{C.7})$$

por si próprio,

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \tilde{F}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0). \quad (\text{C.8})$$

A transformada para a função delta de Dirac é,

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}, \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1. \quad (\text{C.10})$$

A transformada de Laplace fracionaria para uma função $\varepsilon(t)$ (MEDINA *et al.*, 2017), é

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \right)^n \right) (s) = s^n \tilde{\varepsilon}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k-1} e^k(0). \quad (\text{C.11})$$

para qualquer número inteiro.

APÊNDICE D – FORÇA PARA λ GENERALIZADO

As contas das equações para as forças generalizadas de forma exponencial usando 5.47 e 5.48 dos indentadores $\lambda = 1,0$ e $2,0$ e também $\lambda = 1,5$. Vamos fazer uma substituição para tudo primeiro para os indentadores com forma $\lambda = 1,0$ e $\lambda = 2,0$ nas equações

$$\bar{F}_{le} = -(-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_l}; \lambda\right) \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right)^\lambda, \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{F}_{de} = -(-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{\tau_l}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{\tau_l}{\tau_l}; \lambda\right) \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right)^\lambda. \quad (\text{D.2})$$

A função erro está definida como

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (\text{D.3})$$

além disso, usamos a propriedade da função erro que diz,

$$\text{erfi}(x) = -i \text{erf}(ix). \quad (\text{D.4})$$

- $\lambda = 1$

A força de loading da parte exponencial para uma indentação cilíndrica é

$$\begin{aligned} \bar{F}_{le}(t) &= -E_1 e^{-\frac{t}{\tau_l}} \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right)^{-\frac{t}{\tau_l}} \int_0^{-\frac{t}{\tau_l}} e^{-x} dx \\ &= -E_1 e^{-\frac{t}{\tau_l}} \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right) \left(-e^{-x} \Big|_0^{-\frac{t}{\tau_l}}\right) \\ &= \frac{E_1}{\tau_l} \tau_l - \frac{E_1}{\tau_l} \tau_l e^{-\frac{t}{\tau_l}} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Por outro lado a força de dwell da parte exponencial é

$$\begin{aligned} \bar{F}_{de}(t) &= -(-1)^{1-1} 1 E_1 e^{-\frac{\tau_l}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{\tau_l}{\tau_l}; 1\right) \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right)^1 \\ &= -E_1 e^{-\frac{\tau_l}{\tau_l}} \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right) \left[\int_0^{\tau_l/\tau_l} t^0 e^t dt \right] \\ &= -E_1 e^{-\frac{\tau_l}{\tau_l}} \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right) \left[e^{-\tau_l/\tau_l} - e^0 \right] \\ &= E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right) e^{-\frac{(t-\tau_l)}{\tau_l}} - E_1 \left(\frac{\tau_l}{\tau_l}\right) e^{-\frac{t}{\tau_l}} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

- $\lambda = 2,0$

Usando a as equações D.1 e D.2 agora se vai encontra as forças para $\lambda = 2,0$. A força de loading é

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{le}(t) &= -(-1)^{2-1} 2E_1 e^{-\frac{\tau_1}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; 2\right) \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 \\
&= 2E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 \int_0^{-\frac{t}{\tau_1}} x e^{-x} dx \\
&= 2E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 \left(-x e^{-x} \Big|_0^{-\frac{t}{\tau_1}} + \int_0^{-\frac{t}{\tau_1}} e^{-x} dx\right) \\
&= 2E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 \left(\frac{t}{\tau_1} e^{\frac{t}{\tau_1}} - e^{-x} \Big|_0^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \\
&= 2E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 \left(\frac{t}{\tau_1} e^{\frac{t}{\tau_1}} - e^{\frac{t}{\tau_1}} + 1\right) \\
&= 2E_1 \frac{\tau_1}{\tau_l^2} + 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 + 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}}.
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Usando a definição da função Gamma a força dwell da parte exponencial é

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{de}(t) &= -(-1)^{2-1} 2E_1 e^{-\frac{\tau_1}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{\tau_l}{\tau_1}; 2\right) \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 \\
&= 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[\int_0^{\frac{\tau_l}{\tau_1}} t e^{-t} dt\right] \\
&= 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[-t e^{-t} \Big|_0^{\frac{\tau_l}{\tau_1}} - e^{-t} \Big|_0^{\frac{\tau_l}{\tau_1}}\right] \\
&= 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[\frac{\tau_l}{\tau_1} e^{-\frac{\tau_l}{\tau_1}} - e^{-\frac{\tau_l}{\tau_1}} + 1\right] \\
&= 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t-\tau_l}{\tau_1}} - 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t-\tau_l}{\tau_1}} + 2E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}}.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

- $\lambda = 1,5$

Finalmente quando $\lambda = 1,5$ nós usamos as seguintes equações

$$\bar{F}_{le} = (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{\tau_1}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right) \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^\lambda, \tag{D.9}$$

$$\bar{F}_{de} = (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{\tau_1}{\tau_l}} \Gamma\left(-\frac{\tau_l}{\tau_1}; \lambda\right) \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^\lambda. \tag{D.10}$$

A continuação a força de loading para parte exponencial para um indentador esférico

é

$$\bar{F}_{el}(t) = E_1 \frac{3}{2} \sqrt{t} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l^{\frac{3}{2}}}\right) - E_1 \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}}\right) e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \tag{D.11}$$

e a força de dwell para o mesmo indentedor

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{dl}(t) &= (-1)^{\lambda-1} \lambda E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^\lambda \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \lambda\right) \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(-\frac{t}{\tau_1}; \frac{3}{2}\right) \\
&= i \frac{3}{2} E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int_0^{-\frac{t}{\tau_1}} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \\
&= i \frac{3}{2} E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - e^{\frac{t}{\tau_1}} \sqrt{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \\
&= -\frac{3}{2} E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}}\right) - e^{\frac{t}{\tau_1}} \sqrt{\frac{t}{\tau_1}}\right) \\
&= -\frac{3}{4} E_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_l}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{3}{2} E_1 \tau_1 \sqrt{\frac{t}{\tau_l^{\frac{3}{2}}}}.
\end{aligned} \tag{D.12}$$