



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PEDRO DELEON TEIXEIRA DE ABREU

**ANÁLISE TOPOLÓGICA DA REDE COMPLEXA DESCRITA PELO ESPAÇO DE
PRODUTOS**

FORTALEZA

2023

PEDRO DELEON TEIXEIRA DE ABREU

ANÁLISE TOPOLÓGICA DA REDE COMPLEXA DESCRITA PELO ESPAÇO DE
PRODUTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física do Centro
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. César Ivan Nunes
Sampaio Filho

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A99a Abreu, Pedro Deleon Teixeira de.

Análise topológica da rede complexa descrita pelo espaço de produtos / Pedro Deleon
Teixeira de Abreu. – 2023.

39 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro
de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho.

1. Espaço de produto. 2. Sistemas Complexos. 3. Grafos. I. Título.

CDD 530

PEDRO DELEON TEIXEIRA DE ABREU

ANÁLISE TOPOLÓGICA DA REDE COMPLEXA DESCRITA PELO ESPAÇO DE
PRODUTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física do Centro
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
bacharel em Física.

Aprovada em: 12 de Julho de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio
Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vladimir R. V. de Assis
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

Ms. Francisco Israel Alves do Nascimento
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A minha família e amigos, que sempre acreditaram e apoiaram nessa jornada difícil.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho por me orientar, pela paciência e compreensão.

Aos meus pais, Lelia maria e Francisco Carlos, por todo apoio, incentivo e suporte para que eu concluísse a graduação.

Aos professores do Departamento de Física, que foram os meus pilares de inspiração, em especial ao professor Ramos pela sua compreensão e ensinamentos.

A minha namorada Renata Veloso que sempre me incentivou e esteve ao meu lado toda graduação.

Aos meus amigos, Diego Silva, Antonio Geovane, Mateus Martins e Francisco Rubens, por toda ajuda, troca de experiência e risada ao longo desses anos

“Nossas maiores realizações não podem ficar para trás, porque nosso destino está acima de nós.”

(COOPER, 2014, p.7)

RESUMO

Neste trabalho, é estudado o Espaço de Produto, um conceito que vem da complexidade econômica. O Espaço de Produtos é uma abordagem teórica que busca entender a estrutura produtiva de um país ou região por meio da análise das relações entre diferentes produtos. Essa abordagem considera que a diversidade dos países e a complexidade dos produtos influenciam o desenvolvimento econômico. O Espaço de Produtos, neste trabalho, é modelado usando conceitos matemáticos como grafos, em que os produtos são os nós e as conexões entre eles indicam uma medida sua proximidade, segundo uma dada medida de projeção sobre a estrutura bipartida entre países e produtos. A análise de grafos nos permite identificar oportunidades de especialização e diversificação produtiva. Além disso, o Espaço de Produtos indica a presença de vantagens comparativas e revela lacunas na estrutura produtiva que requerem atenção e investimentos.

Palavras-chave: espaço de produto; sistemas complexos; grafos.

ABSTRACT

In this work, we study the Product Space, a concept that stems from economic complexity. The Product Space is a theoretical approach that aims to understand the productive structure of a country or region by analyzing the relationships between different products. This approach considers that the diversity of countries and the complexity of products influence economic development. The Product Space in this work is modeled using mathematical concepts such as graphs, where the products serve as nodes and the connections between them indicate their proximity, based on a given measure of projection onto the bipartite structure between countries and products. Graph analysis allows us to identify opportunities for specialization and productive diversification. Additionally, the Product Space indicates the presence of comparative advantages and reveals gaps in the productive structure that require attention and investments.

Keywords: product space; complex systems; graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação visual dos grafos não direcionado e direcionado.	16
Figura 2 – Representação da matriz adjacente.	17
Figura 3 – Distribuição de graus de uma grafo.	19
Figura 4 – Uma rede bipartida tem dois conjuntos de nós, U e V. Os nós do conjunto U se conectam diretamente apenas aos nós do conjunto V. Portanto, não há links UU ou VV diretos. A figura mostra as duas projeções que podemos gerar a partir de qualquer rede bipartida. A projeção U é obtida conectando dois nós U entre si se eles se vincularem ao mesmo nó V na representação bipartida. A projeção V é obtida conectando dois nós V entre si se eles se conectarem ao mesmo nó U na rede bipartida.	21
Figura 5 – Representação de um grafo ponderado, matriz adjacente e graus médio. . . .	22
Figura 6 – Representação em rede da matriz de proximidade que considera apenas os valores de proximidade acima de 0,5, construída dos dados retirado de Feenstra, Lipsey, Deng, Ma, Mo's "World Trade Flows: "1962-2000". . . .	27
Figura 7 – Representação MST	27
Figura 8 – Representação em rede do espaço do produto. O layout usa um algoritmo de mola de força.	28
Figura 9 – Versão final do espaço do produto	29
Figura 10 – A figura (a) tem a matriz (raster plot) de países e produtos para o ano de 2015. Se um país exportou um produto com vantagem comparativa pintamos um ponto azul. Caso contrário pintamos um ponto branco. A figura (b) é equivalente mas ordenada em ordem decrescente os países em termos da diversidade e os produtos em termos da ubiquidade.	33
Figura 11 – Representação em rede do Espaço de Produto.	34
Figura 12 – Distribuição para os pesos do Espaço de Produtos. A curva contínua preta corresponde a um ajuste gaussiano para a distribuição.	35
Figura 13 – Distribuição para os pesos do Espaço de Produtos considerando os países. A curva contínua preta corresponde a um ajuste gaussiano para a distribuição.	35
Figura 14 – Dependência do grau dos nós no Espaço de Produtos com relação às respectivas Intensidades. A partir de uma regressão por mínimos quadrados para a equação $Intensidade \sim grau^\alpha$, obtemos como resultado $\alpha = 1.40 \pm 0.02$	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Um exemplo da estruturação dos dados.	24
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

G	Grafo
V	vértice ou nó
E	Atesta ou link
L	Número total de arestas
k	Grau
pk	Distribuição de grau
RCA	Revealed Comparative Advantage
ϕ	Proximidade
w	Densidade de transição

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	GRAFOS E SUAS PROPRIEDADES	16
2.1	Grau, Grau médio, Distribuição de graus e Conectividade	17
2.1.1	<i>Grau médio</i>	18
2.1.2	<i>Distribuição de Graus</i>	18
2.1.3	<i>Conectividade</i>	20
2.2	Grafos bipartido	21
2.3	Grafos Ponderados	22
2.4	Espaço de produtos	23
2.5	Dados e Revealed Comparative Advantage (RCA)	24
2.6	Matriz de Proximidade	25
2.7	Representação em rede do espaço de produto	26
2.8	Transição Entre produtos	30
3	METODOLOGIA	32
4	RESULTADOS	33
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

Complexidade econômica é um conceito teórico desenvolvido por economistas e físicos para entender as bases do desenvolvimento econômico e industrial de um país. Essa teoria, proposta por Ricardo Hausmann, César Hidalgo e colaboradores (HIDALGO; HAUSMANN, 2009), sugere que a diversidade e a complexidade dos produtos que um país produz são fatores-chave para determinar seu crescimento econômico a longo prazo.

De acordo com essa abordagem, a economia de um país é composta por uma rede complexa de produtos interconectados. Cada produto possui uma certa quantidade de conhecimento necessário para sua produção e a combinação desses produtos determina a complexidade econômica de um país. Alguns produtos são mais complexos do que outros, exigindo uma maior quantidade de conhecimento específico e habilidades para sua fabricação. Por exemplo, a produção de automóveis é geralmente considerada mais complexa do que a produção de roupas.

Os blocos fundamentais da complexidade econômica são os elementos básicos que compõem essa rede de produtos interconectados. Existem quatro blocos principais:

1. **Produtos:** São os diferentes bens e serviços que um país produz. Eles podem variar em complexidade, desde produtos simples, como commodities básicas, até produtos de alta tecnologia.

2. **Capacidades:** São os conhecimentos, habilidades e infraestrutura necessários para produzir determinados produtos. Isso inclui o capital humano, as instituições, os processos produtivos e a infraestrutura física e tecnológica disponíveis em um país.

3. **Conexões:** Referem-se às relações e interações entre diferentes produtos e setores da economia. Quanto mais produtos estiverem interconectados, maior será a capacidade de um país diversificar e adaptar sua produção.

4. **Ganhos de aprendizado:** São os benefícios acumulados através da produção de produtos complexos. Ao produzir bens e serviços mais sofisticados, as empresas e trabalhadores adquirem novas habilidades e conhecimentos, gerando um ciclo de aprendizado e inovação que impulsiona o crescimento econômico.

Segundo a teoria da complexidade econômica, países com maior diversidade e complexidade de produtos tendem a ter um crescimento econômico mais robusto e sustentável. Isso ocorre porque a produção de produtos complexos requer um conjunto mais amplo de habilidades e conhecimentos, o que estimula a inovação, aumenta a produtividade e possibilita a entrada em novos mercados. (HIDALGO; HAUSMANN, 2009)

Essa abordagem enfatiza a importância da construção de capacidades e da promoção de políticas que incentivem a diversificação produtiva e o aprendizado contínuo. Para os países em desenvolvimento, significa focar no desenvolvimento de habilidades e infraestrutura, promover a cooperação entre empresas e setores, facilitar o acesso a conhecimento e tecnologia, e criar um ambiente propício à inovação e ao empreendedorismo.

Nesse contexto, surge o conceito de Espaço de Produto, proposto por César A. Hidalgo, Ricardo Hausmann e A.-L. Barabási. Essa teoria sugere que a estrutura produtiva de um país, ou seja, a composição e diversidade de seus setores de produção, desempenha um papel crucial na determinação do seu potencial de desenvolvimento econômico. Neste trabalho, exploraremos mais detalhadamente essa teoria, analisando como a diversificação e conectividade dos produtos no espaço de produtos podem influenciar o crescimento econômico e a competitividade das nações. Compreender essa relação é fundamental para a formulação de políticas e estratégias voltadas para o fortalecimento da economia e promoção do desenvolvimento sustentável.(HIDALGO *et al.*, 2007)

A teoria de grafos desempenha um papel importante ao auxiliar na compreensão e análise do espaço de produto. Essa teoria fornece um arcabouço matemático e conceitual para representar a estrutura de interconexões entre os produtos em um espaço de produtos. Ao aplicar a teoria de grafos, é possível visualizar e analisar as relações entre os diferentes produtos, representando-os como nós ou vértices, e as conexões entre eles como arestas. Essa representação gráfica permite identificar clusters de produtos que estão interligados e possuem similaridades tecnológicas, revelando a estrutura produtiva de um país ou região.

A análise de grafos pode ser útil para identificar a diversidade ou a falta dela na estrutura produtiva de uma nação. Por meio da identificação de grupos de produtos interconectados, é possível avaliar a variedade de setores econômicos presentes e determinar se há uma ampla gama de produtos sendo produzidos e exportados, ou se há uma concentração em setores específicos.

Além disso, a teoria de grafos também auxilia na compreensão da conectividade entre os países no espaço de produtos. Por meio da análise das arestas ou conexões entre os nós que representam diferentes países, é possível identificar padrões de comércio e trocas de conhecimento tecnológico. Países que estão próximos no espaço de produtos, ou seja, têm produtos similares ou complementares, podem desenvolver relações comerciais vantajosas e colaborar na transferência de tecnologia.

Dessa forma, a teoria de grafos fornece uma abordagem visual e analítica para estudar

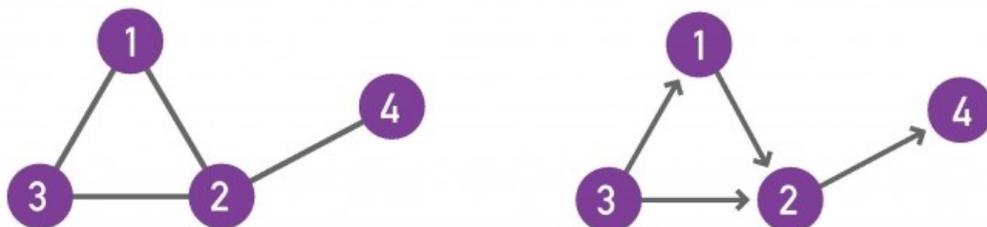
a estrutura produtiva e a conectividade entre os países no contexto do espaço de produtos. Ela permite identificar padrões, tendências e oportunidades que podem ser exploradas para promover a diversificação produtiva, a inovação e o desenvolvimento econômico de maneira sustentável.

2 GRAFOS E SUAS PROPRIEDADES

A teoria dos grafos é um ramo fundamental da Matemática que estuda as propriedades e relações entre objetos chamados de vértices ou nós, ligados por arestas ou links. Essa teoria desempenha um papel crucial em diversas áreas do conhecimento, como Física, Matemática, Engenharia e muito mais. A importância da teoria dos grafos reside no fato de fornecer uma estrutura abstrata poderosa para modelar e analisar problemas complexos, permitindo a representação de interações e conexões entre elementos de um sistema. Ela oferece ferramentas e algoritmos que auxiliam na resolução de diversos desafios, como analisar e estudar comportamentos em sistemas complexos. Em suma, a teoria dos grafos é uma poderosa ferramenta matemática que nos ajuda a compreender e resolver problemas do mundo real, possibilitando avanços significativos em diferentes áreas de estudo e aplicações práticas.

Em termos mais matemáticos, um grafo é uma estrutura composta por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas. Matematicamente, podemos representar um grafo G como um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. O conjunto de vértices (também chamados de nós), V , é uma coleção de elementos distintos que representam entidades individuais dentro do grafo. Cada vértice pode ser denotado por um símbolo ou identificador único. O conjunto de arestas (também chamado de links), E , é uma coleção de pares ordenados (u, v) , onde u e v são vértices do grafo e indicam uma conexão entre esses vértices. Em um grafo direcionado, o par ordenado (u, v) representa uma aresta que sai do vértice u e chega ao vértice v . Em um grafo não direcionado, o par ordenado (u, v) representa uma aresta que conecta os vértices u e v sem uma direção específica.

Figura 1 – Representação visual dos grafos não direcionado e direcionado.



Fonte: Retirada do livro BARABÁSI (2014).

Uma forma mais abstrata de representar um grafo é por meio de uma matriz de

adjacência ou uma lista de adjacência. A matriz de adjacência é uma matriz quadrada em que cada entrada indica se existe uma aresta entre dois vértices. A lista de adjacência é uma estrutura de dados que armazena, para cada vértice, uma lista dos vértices adjacentes a ele. A figura 2 ilustra a matriz adjacente.

Figura 2 – Representação da matriz adjacente.

$$A_{ij} = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix}$$

Fonte: Retirada do livro BARABÁSI (2014).

A teoria dos grafos estuda propriedades e características dos grafos, como a conectividade, ciclos, distância entre vértices, planaridade e muitas outras. Além disso, a teoria dos grafos fornece uma variedade de algoritmos para resolver problemas específicos, como a busca em profundidade, a busca em largura, o algoritmo de Dijkstra e o algoritmo de Kruskal, entre outros.

2.1 Grau, Grau médio, Distribuição de graus e Conectividade

O grau de um vértice em um grafo é definido como o número de arestas que incidem sobre esse vértice. Em outras palavras, é a quantidade de conexões que um vértice possui com outros vértices do grafo. Denotamos como k_i o grau do i -ésimo nó na rede, onde N é o número de nós da rede. Para um grafo não direcionado O número total de arestas L pode ser definido pela seguinte equação:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i$$

onde o fator $1/2$ é usado para corrigir o fato de que cada link é contado duas vezes.

O grau de um vértice é uma medida importante para a análise de grafos, pois pode fornecer informações sobre a conectividade e a estrutura do grafo. Existem dois tipos de grau associados a um vértice de um grafo direcionado: o grau de entrada e o grau de saída. O grau de entrada de um vértice é o número de arestas que chegam a esse vértice. O grau de saída de um vértice é o número de arestas que partem desse vértice. A diferença entre os grafos pode ser vista na Figura 1. O número total de links em um grafo direcionado pode ser dado pela queção abaixo:

$$L = \sum_{n=1}^N k_i^{entrada} = \sum_{n=1}^N k_i^{saida}$$

2.1.1 Grau médio

O grau médio de um grafo é calculado como a média dos graus de todos os vértices do grafo. Essa medida fornece uma visão geral da conectividade média do grafo. Para grafos não direcionados o grau médio é dado por

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N}$$

Para grafos direcionados o grau médio é dado por:

$$\langle k^{entrada} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{entrada} = \frac{L}{N}$$

O grau de um vértice também pode ser usado para identificar propriedades específicas de um grafo, como vértices de alto grau (conhecidos como "hubs") que possuem muitas conexões. Esses vértices podem desempenhar um papel central na rede e ter um impacto significativo em sua estrutura e dinâmica.

2.1.2 Distribuição de Graus

A distribuição de graus em grafos é uma medida estatística que descreve a frequência com que diferentes graus de vértices ocorrem no grafo. Essa distribuição pode fornecer informações valiosas sobre a estrutura e a conectividade do grafo.

A distribuição de graus é frequentemente representada como um histograma, em que os valores dos graus são plotados no eixo x e a frequência de ocorrência de cada grau é plotada no eixo y. Essa representação visual permite observar padrões e características da distribuição.

A distribuição de grau, p_k , fornece a probabilidade de que um nó selecionado aleatoriamente na rede tenha grau k . Como p_k é uma probabilidade, ela deve ser normalizada, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

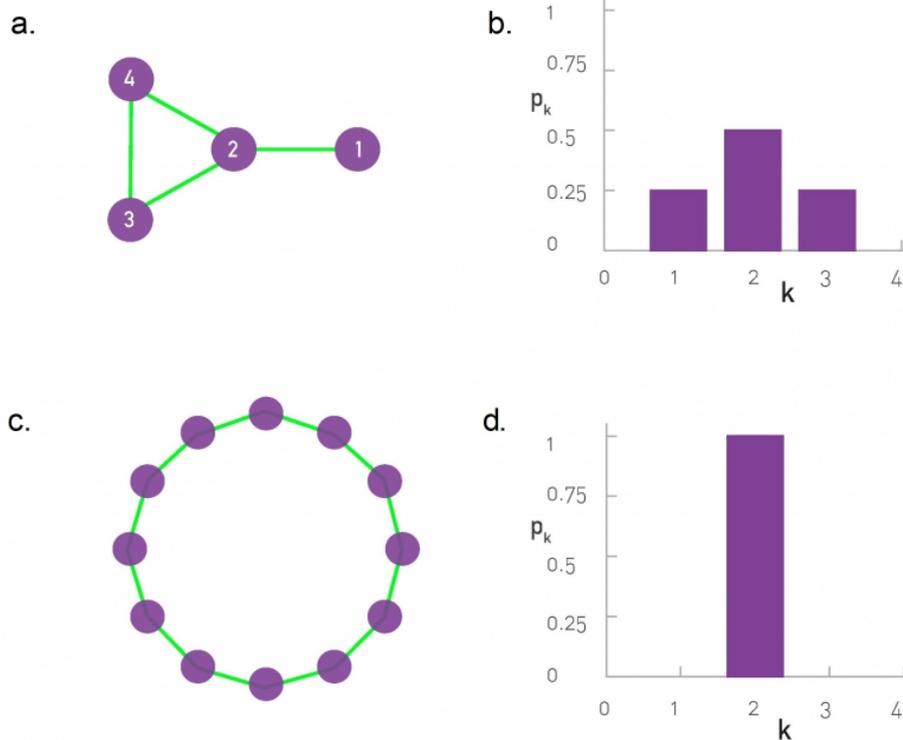
A normalização é dada por

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

onde N_k é o número de nós de grau k . grau médio de uma rede pode ser escrito como

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$$

Figura 3 – Distribuição de graus de uma grafo.



Fonte: Retirada do livro BARABÁSI (2014).

2.1.3 Conectividade

A conectividade em grafos refere-se à capacidade de se alcançar qualquer vértice a partir de outro por meio de caminhos ou arestas. É uma propriedade fundamental que descreve o quão interligado ou acessível um grafo é. Existem diferentes conceitos relacionados à conectividade em grafos, incluindo conectividade global e local.

Conectividade global: - Grafo Conexo: Um grafo é dito conexo se existe um caminho entre cada par de vértices. Isso significa que não existem vértices isolados e que todos os vértices são alcançáveis uns dos outros. - Componentes Conexas: Em um grafo não conexo, as componentes conexas são os subgrafos conexos resultantes da divisão do grafo original. Cada componente conexa é um conjunto de vértices onde é possível alcançar qualquer vértice desse conjunto a partir de qualquer outro vértice desse mesmo conjunto.

Conectividade local: - Grau de um Vértice: O grau de um vértice é o número de arestas que incidem sobre esse vértice. Ele pode ser usado como uma medida de conectividade local, indicando quantas conexões diretas um vértice possui. - Vizinhança: A vizinhança de um vértice é o conjunto de vértices adjacentes a ele, ou seja, os vértices que estão diretamente conectados a ele por uma aresta. - Grafo Regular: Se todos os vértices de um grafo forem iguais esse grafo pode ser considerado regular. Grafos regulares são altamente conectados e têm uma estrutura regular e uniforme.

A conectividade é frequentemente associada à ideia de alcançabilidade. Em um grafo conectado, todos os vértices estão de alguma forma relacionados entre si, o que significa que é possível alcançar qualquer vértice a partir de qualquer outro vértice através de uma sequência de arestas, com isso, podemos entender a interação e dinâmica dos grafos. Em grafos é um conceito fundamental para compreender a interação dos vértices entre si, fornecendo uma noção de sua conexão e importância relativa.

Além disso, existem conceitos relacionados à remoção de vértices ou arestas em grafos e seu impacto na conectividade: - Vértice de Articulação: Um vértice de articulação é um vértice cuja remoção aumenta o número de componentes conexas no grafo. Eles são pontos cruciais para a conectividade do grafo. - Aresta de Ponte: Uma aresta de ponte é uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexas no grafo. As arestas de ponte são essenciais para a conectividade entre componentes conexas.

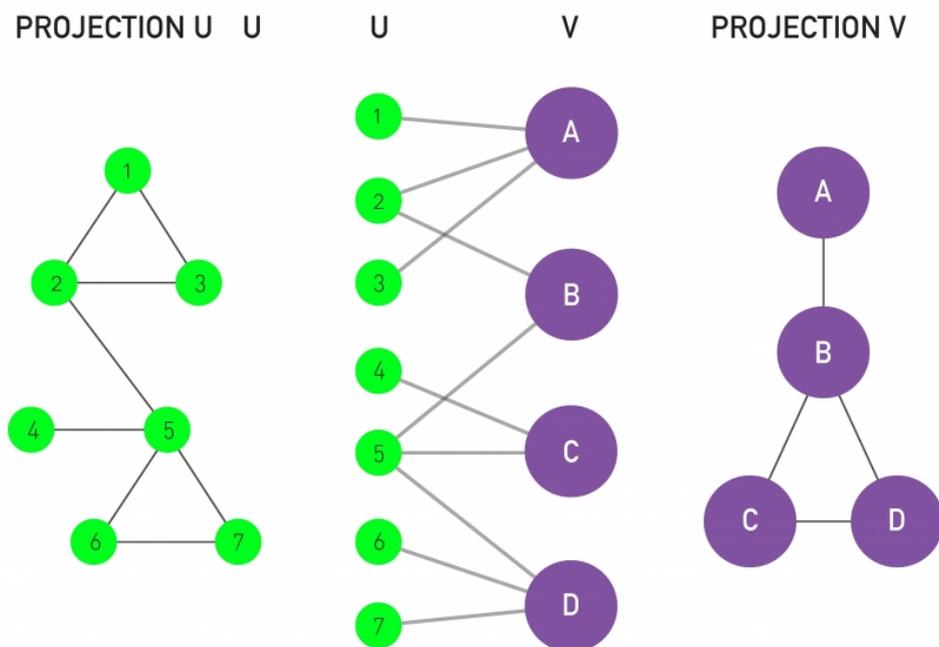
2.2 Grafos bipartido

Um grafo bipartido é um tipo de grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos distintos, de forma que todas as arestas conectem vértices de conjuntos diferentes. Essa propriedade é conhecida como "bipartição" do grafo.

Formalmente, um grafo $G = (M, E)$ é considerado bipartido se o conjunto de vértices M pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos V e U , de modo que todas as arestas em E conectem um vértice em V a um vértice em U . Em outras palavras, não pode haver arestas entre vértices do mesmo conjunto.

Uma forma comum de representar grafos bipartidos é através de um diagrama em que os vértices de V são colocados em um lado e os vértices de U no outro lado, e as arestas são desenhadas apenas entre os vértices dos conjuntos diferentes.

Figura 4 – Uma rede bipartida tem dois conjuntos de nós, U e V . Os nós do conjunto U se conectam diretamente apenas aos nós do conjunto V . Portanto, não há links UU ou VV diretos. A figura mostra as duas projeções que podemos gerar a partir de qualquer rede bipartida. A projeção U é obtida conectando dois nós U entre si se eles se vincularem ao mesmo nó V na representação bipartida. A projeção V é obtida conectando dois nós V entre si se eles se conectarem ao mesmo nó U na rede bipartida.



Fonte: Retirada do livro BARABÁSI (2014).

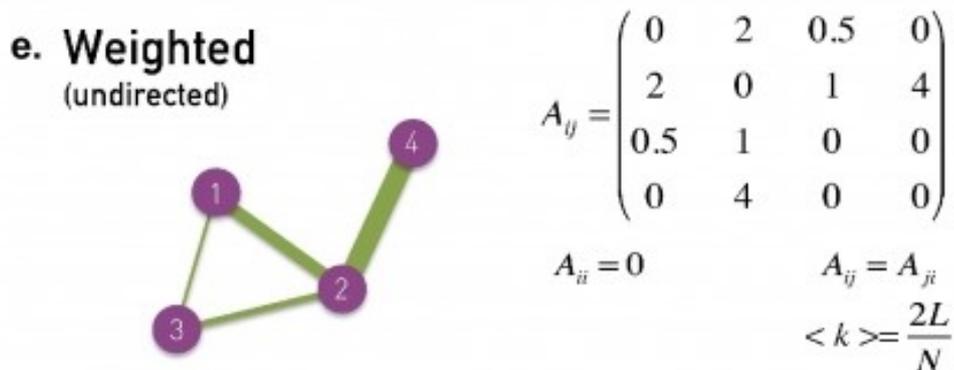
2.3 Grafos Ponderados

Grafos ponderados são uma variação dos grafos em que as arestas têm associados valores numéricos chamados de pesos. Esses pesos representam uma medida de custo, distância, capacidade ou qualquer outra métrica relevante para o problema em questão.

Cada aresta de um grafo ponderado possui um peso específico, que pode ser positivo ou zero. Os pesos podem representar diferentes tipos de informações, dependendo do contexto em que o grafo está sendo aplicado. Alguns exemplos comuns incluem distâncias entre cidades, custos de transporte, capacidades de fluxo, tempos de execução, entre outros.

Existem diferentes notações para representar grafos ponderados. Uma abordagem comum é adicionar o peso como um atributo adicional a cada aresta. Por exemplo, se tivermos um grafo G com uma aresta (u, v) de peso w , podemos representá-la como (u, v, w) .

Figura 5 – Representação de um grafo ponderado, matriz adjacente e graus médio.



Fonte: Retirada do livro BARABÁSI (2014).

Os grafos ponderados podem ser direcionados ou não direcionados, dependendo do contexto do problema. Em um grafo direcionado ponderado, cada aresta tem um peso associado e uma direção específica. Já em um grafo não direcionado ponderado, cada aresta possui um peso, mas não há uma distinção de direção.

A utilização de grafos ponderados permite a modelagem de problemas mais complexos e realistas, onde a métrica associada aos pesos desempenha um papel importante nas análises e tomadas de decisão. Além disso, os grafos ponderados têm aplicações em diversas áreas, incluindo:

Algoritmos de caminho mínimo: Os pesos das arestas podem representar distâncias

ou custos. E algoritmos como o Dijkstra e o algoritmo de Bellman-Ford podem ser utilizados para encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices em um grafo ponderado.

Redes de transporte e logística: Os pesos das arestas podem representar distâncias, tempos de viagem, custos de transporte, capacidades ou outras métricas relevantes. Grafos ponderados são utilizados para modelar sistemas de transporte, rotas de navegação, programação de veículos e otimização logística.

Redes de comunicação: Em redes de comunicação, os pesos das arestas podem representar atrasos, largura de banda, qualidade de serviço ou outras métricas de desempenho. Grafos ponderados são usados para otimizar o fluxo de dados, roteamento e gerenciamento de redes.

Sistemas de recomendação: Em sistemas de recomendação, os pesos podem representar preferências ou similaridades entre itens ou usuários. Grafos ponderados são usados para identificar conexões relevantes e fornecer recomendações personalizadas.

2.4 Espaço de produtos

A teoria do Espaço de Produtos, desenvolvida por César Hidalgo e Ricardo Hausmann, argumenta que a estrutura produtiva de um país tem um papel fundamental no seu desenvolvimento econômico. De acordo com essa teoria, chamada também de "teoria do desenvolvimento com base nas exportações", o padrão de produtos que um país produz e exporta está diretamente relacionado com o seu nível de desenvolvimento.

O Espaço de Produtos é uma representação gráfica que mostra as conexões entre diferentes produtos com base na similaridade das habilidades e conhecimentos necessários para produzi-los. Produtos similares são agrupados próximos uns aos outros no espaço, enquanto produtos diferentes estão distantes. Por exemplo, produtos como têxteis, vestuário e calçados estão mais próximos uns dos outros, pois compartilham habilidades e conhecimentos semelhantes, enquanto produtos como máquinas industriais e produtos farmacêuticos estão mais distantes.

A teoria argumenta que países que produzem e exportam uma ampla variedade de produtos têm maior probabilidade de se desenvolver economicamente do que aqueles que estão limitados a um conjunto estreito de produtos. Isso ocorre porque a diversificação da estrutura produtiva permite que um país se beneficie de externalidades positivas, como a difusão de conhecimentos e o acúmulo de habilidades especializadas.

Além disso, o Espaço de Produtos também influencia a capacidade de um país se

adaptar e inovar. Quando um país já possui conhecimentos e habilidades em determinada área, é mais fácil para ele adquirir novas competências e desenvolver produtos relacionados. Por outro lado, países com estruturas produtivas limitadas podem enfrentar dificuldades em diversificar e inovar, ficando presos em uma trajetória de desenvolvimento estagnada.

No entanto, é importante destacar que a teoria do Espaço de Produtos não é uma explicação completa para o desenvolvimento econômico. Existem outros fatores importantes a serem considerados, como instituições políticas, investimentos em educação e infraestrutura, estabilidade macroeconômica e acesso a mercados internacionais. A teoria do Espaço de Produtos fornece uma perspectiva útil e complementar para entender como a estrutura produtiva de um país pode influenciar seu desenvolvimento, mas não deve ser considerada isoladamente.

2.5 Dados e Revealed Comparative Advantage (RCA)

Os dados são estruturados em forma de matriz, na qual as linhas representam países e as colunas representam produtos. Essa estruturação desempenha um papel crucial no funcionamento das equações e análises que serão realizadas. A tabela a seguir ilustra essa estruturação.

Tabela 1 – Um exemplo da estruturação dos dados.

	produto 1	produto 2	produto 3	produto 4	produto 5
<i>país 1</i>	100	0	25	50	0
<i>país 2</i>	100	100	50	25	0
país 3	200	25	0	0	100
país 4	0	0	50	25	100

Fonte: o autor.

Antes de começar a falar de fato sobre as propriedades do espaço de produtos precisamos entender um conceito importante chamado de “Revealed Comparative Advantage” (RCA). Essa (RCA) é um conceito econômico usado para medir a competitividade relativa de um país ou região em relação a um determinado setor produtivo. Foi desenvolvido pelo economista sueco Staffan Linder e popularizado pelo economista belga Bela Balassa.

A RCA é calculada com base nas exportações de um país ou região em relação às suas importações. Ela ajuda a identificar os setores em que um país possui uma vantagem comparativa revelada, ou seja, onde suas exportações são relativamente mais fortes em comparação com suas importações. Essa vantagem comparativa pode ser devida a uma combinação de fatores, como recursos naturais, habilidades especializadas, tecnologia, infraestrutura ou vantagens de custo.

O cálculo da RCA envolve comparar a participação de um determinado setor nas exportações totais de um país com a participação desse mesmo setor nas exportações globais. Se a participação do setor nas exportações do país for maior do que sua participação nas exportações globais, isso indica uma vantagem comparativa revelada. Por outro lado, se a participação do setor nas exportações do país for menor do que sua participação nas exportações globais, isso sugere uma desvantagem comparativa revelada. O RCA é calculado pela seguinte equação:

$$RCA(c, i) = \frac{x(c, i) \sum_{i,c} x(c, i)}{\sum_i x(c, i) \sum_c x(c, i)}$$

onde $x(c,i)$ é o valor das exportações do país c no i -ésimo produto. Quando o RCA é maior ou igual a 1, indica uma vantagem comparativa revelada (BALASSA, 1986)/ (HAUSMANN; KLINGER, 2006).

A RCA é útil para os governos e formuladores de políticas, pois fornece informações sobre os setores em que um país é competitivo no comércio internacional. Com base nessas informações, os governos podem tomar medidas para promover setores de alta vantagem comparativa e aumentar sua competitividade global. Além disso, a RCA também pode ajudar as empresas a identificar oportunidades de negócios e orientar suas estratégias de exportação.

É importante observar que a RCA é uma medida relativa e dinâmica, sujeita a mudanças ao longo do tempo devido a vários fatores, como mudanças na demanda global, avanços tecnológicos e políticas comerciais. Portanto, é fundamental acompanhar regularmente a evolução da RCA para entender as mudanças na competitividade de um país ou região em diferentes setores.

2.6 Matriz de Proximidade

A teoria do Espaço de Produtos possui fundamentos matemáticos que sustentam sua abordagem. Ela se baseia em técnicas de análise de redes complexas e teoria dos grafos para mapear e analisar a estrutura produtiva de um país.

O Espaço de Produtos é representado como um grafo, no qual os produtos são os nós e as conexões entre eles são as arestas. A matriz de proximidade entre produtos é medida por meio de indicadores, como a co-ocorrência de exportações e a correlação entre as estruturas de produção de diferentes países. Esses indicadores são usados para calcular a proximidade entre os produtos no espaço.

Definimos o espaço do produto como o conjunto de todas as medidas de proximidade. A proximidade entre os produtos i e j é dado pela seguinte equação:

$$\phi_{ij} = \min(P(RCA_i|RCA_j), P(RCA_j|RCA_i))$$

$P(RCA_i|RCA_j)$ é a probabilidade condicional de um país que exporta o produto i exportar o produto j .

2.7 Representação em rede do espaço de produto

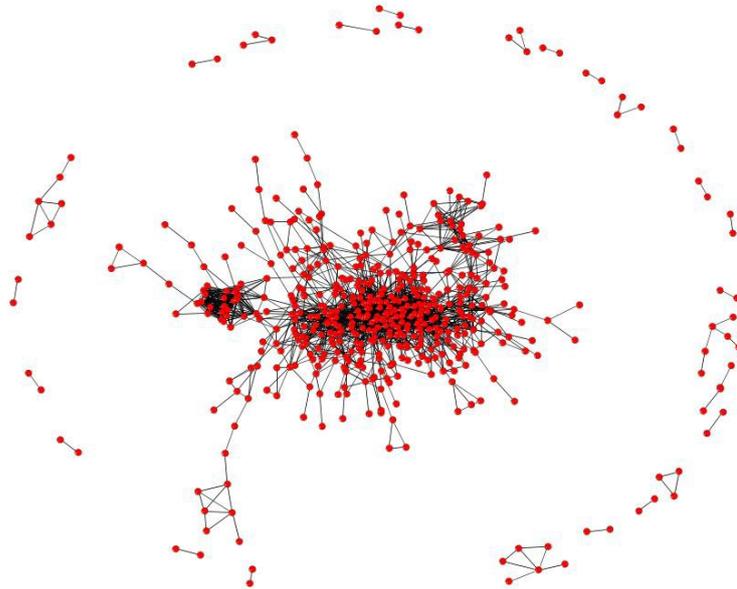
O cálculo da proximidade com base nos valores de exportação resulta na matriz de proximidade. Essa matriz representa o espaço de produtos e contém muitos valores baixos, indicando conexões mais fracas entre os produtos. A representação em forma de grafo dessa matriz é a abordagem mais adequada para estudar e visualizar o espaço de produtos.

A representação do Espaço de Produtos em uma rede complexa oferece vantagens em relação à imagem gráfica bidimensional, pois permite uma análise mais detalhada das conexões entre os produtos. Por exemplo, é possível identificar clusters de produtos altamente conectados, que representam setores produtivos relacionados. Esses clusters podem indicar oportunidades de especialização ou diversificação econômica. Além disso, a representação em rede complexa permite a aplicação de técnicas de análise de redes, como a identificação de nós centrais (produtos com muitas conexões), a detecção de comunidades (grupos de produtos altamente interconectados) e a avaliação da robustez da estrutura produtiva.

Em um grafo ponderado, cada aresta tem um peso associado a ela. Podemos fazer o uso da Minimum Spanning Tree (MST). O objetivo do MST é encontrar uma subárvore que inclua todos os vértices do grafo original, com o maior somatório dos pesos possíveis. Portanto, uma MST é uma árvore que contém um conjunto de arestas que abrange todos os vértices do grafo e possui o maior peso total possível

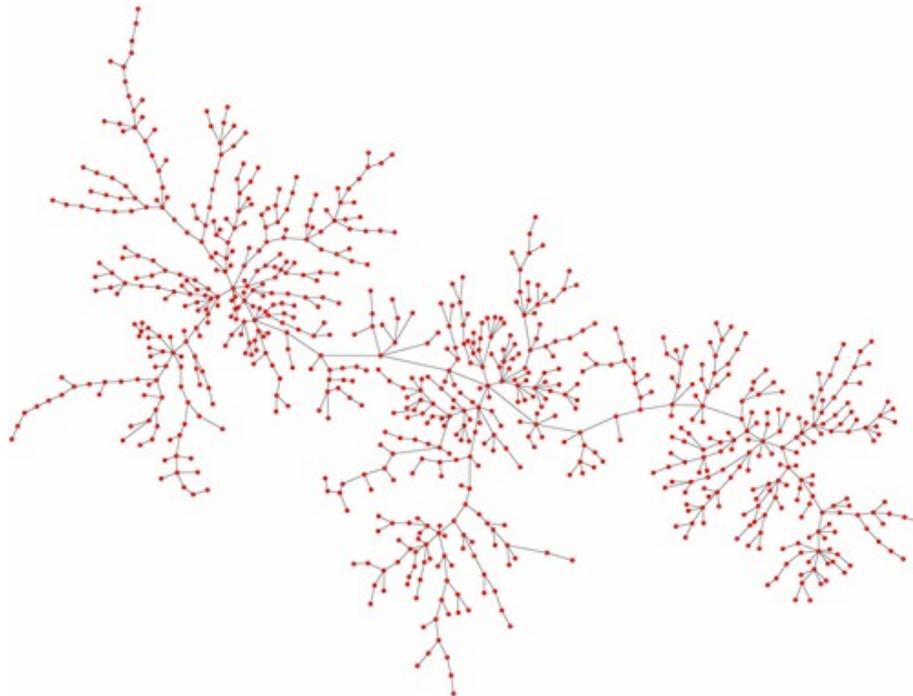
O algoritmo mais conhecido para encontrar uma MST é o algoritmo de Kruskal, que utiliza uma abordagem gananciosa que conecta os nós do grafos de acordo com os links de maiores pesos. O algoritmo de Prim também é comumente usado para encontrar uma MST, e ele funciona selecionando um vértice inicial e adicionando repetidamente a aresta de menor peso que conecta um vértice na árvore atual a um vértice fora da árvore, até que todos os vértices sejam incluídos.

Figura 6 – Representação em rede da matriz de proximidade que considera apenas os valores de proximidade acima de 0,5, construída dos dados retirado de Feenstra, Lipsey, Deng, Ma, Mo's "World Trade Flows: "1962-2000".



Fonte: Retirada do Hidalgo *et al.* (2007).

Figura 7 – Representação MST

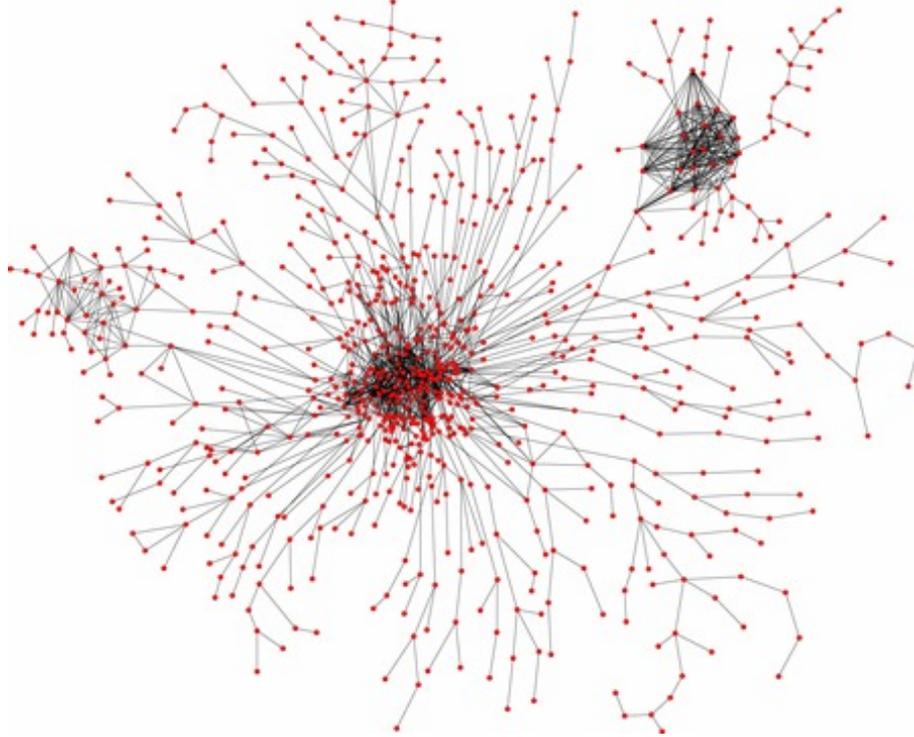


Fonte: Retirada do livro Hidalgo *et al.* (2007).

Após incluir todos os vértices no grafo do MST utilizamos o algoritmo de mola de força para a versão final do grafo. O algoritmo de mola de força em grafos é um método utilizado

para visualização de grafos, onde os nós do grafo são representados como partículas carregadas e as arestas como molas. Essa abordagem é conhecida como uma técnica de layout de grafos baseada em física.

Figura 8 – Representação em rede do espaço do produto. O layout usa um algoritmo de mola de força.



Fonte: Retirada do Hidalgo *et al.* (2007).

O objetivo principal desse algoritmo é organizar os nós do grafo de forma que eles ocupem posições próximas umas das outras, levando em consideração a estrutura do grafo e as conexões entre os nós.

O algoritmo de mola de força é inspirado pelas leis da física, onde cada partícula (nó) sofre ação de forças de atração e repulsão das outras partículas. A força de atração é aplicada entre nós conectados por uma aresta, enquanto a força de repulsão é aplicada entre todos os nós do grafo. (FORTUNATO; HRIC, 2016)

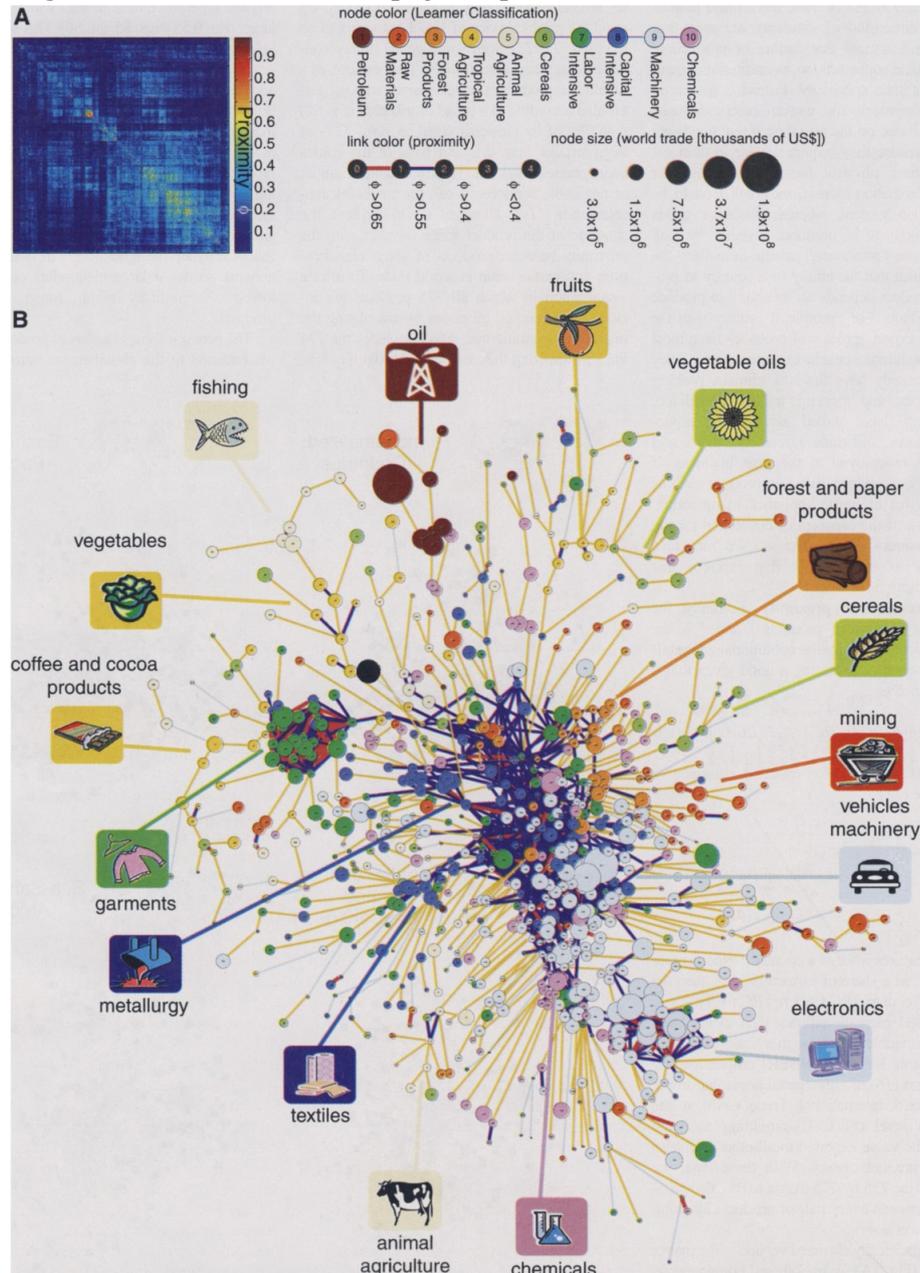
A força de atração entre dois nós conectados é geralmente calculada usando a Lei de Hooke, que descreve a força em uma mola em função da sua deformação. Quanto mais curta a aresta, maior a força de atração entre os nós correspondentes. Essa força de atração faz com que nós conectados fiquem próximos um do outro.

Por outro lado, a força de repulsão entre dois nós não conectados é calculada com base na distância entre eles. Quanto mais próximos, maior a força de repulsão. Essa força de

repulsão ajuda a evitar a sobreposição de nós e a manter o grafo organizado.

O algoritmo de mola de força é iterativo, o que significa que ele atualiza as posições dos nós do grafo várias vezes até que um estado de equilíbrio seja alcançado. Em cada iteração, as forças de atração e repulsão são calculadas e aplicadas aos nós, alterando suas posições. O processo continua até que as forças se equilibrem e os nós se estabilizem em posições finais.

Figura 9 – Versão final do espaço do produto .



Fonte: Retirada Hidalgo *et al.* (2007).

A figura 9 representa a versão final do espaço de produtos usando os dados do comércio internacional foram retirados do conjunto de dados World Trade Flows: 1962-2000

de Feenstra, Lipsey, Deng, Ma e Mo. Este conjunto de dados consiste em importações e exportações por país de origem e por destino, com produtos desagregados no SITC revisão 4. A) é uma representação da matriz de proximidade. B) é a rede de representação do espaço de produtos. Podemos observar que os nós da rede estão classificados por tipo de mercadoria usando cores diferentes para sua distinção. A cor do nó mostra sua classificação conforme proposta por Leamer e a cor do link indica um intervalo nos valores de proximidade (LEAMER, 2003).

A estrutura do espaço de produtos está relacionada a dois conceitos importantes: a diversidade de produtos e a ubiquidade. Esses conceitos refletem as conexões e interdependências entre os produtos. Compreender essa relação pode ajudar a identificar as vantagens comparativas de um país, bem como suas oportunidades e desafios em termos de diversificação produtiva e competitividade.

A diversidade de produtos está relacionada à extensão da rede de produtos em um espaço de produto. Quanto maior a diversidade, maior é o número de produtos distintos e únicos que um país produz. Isso implica em uma maior variedade de setores econômicos e capacidade de produção, o que pode trazer benefícios econômicos, como a redução de riscos de dependência de um único produto ou setor.

A ubiquidade, por sua vez, está relacionada à distribuição dos produtos no espaço de produto. Produtos de alta ubiquidade são aqueles que são produzidos por vários países em todo o mundo e têm uma presença global. Geralmente, esses produtos são commodities básicas ou produtos de consumo amplamente disponíveis. Sua alta ubiquidade implica que eles são produzidos em muitos lugares, o que pode limitar o poder de diferenciação e a capacidade de obter vantagens competitivas nesses produtos.

2.8 Transição Entre produtos

A RCA é uma medida dinâmica que pode variar ao longo do tempo, devido aos avanços tecnológicos e econômicos. À medida que os países se desenvolvem, eles podem começar a exportar novos produtos ou até mesmo deixar de exportar certos produtos. Portanto, é essencial medir essa transformação para acompanhar as mudanças na vantagem comparativa revelada.

Vamos considerar um produto que tem o RCA maior ou igual a 1 como ocupado (O) e o RCA menor que 1 desocupado (U), assim temos 4 possibilidades de transição. U->U, U->O, O->U, O->O, porém é de interesse calcular apenas as possibilidades de desocupado para ocupado

(U->O). Tal transformação é chamada de produtos de transição.

Os produtos de transição estão mais próximos dos produtos ocupados do que dos desocupados. Os países passam por transformações estruturais, saltando de produtos ocupados para os próximos. Para comprovar essa afirmação, utilizamos a densidade como uma medida ponderada da fração do espaço que é ocupada, do ponto de vista de um produto em um país específico. (HIDALGO *et al.*, 2007) . Matematicamente a densidade w pode ser escrita como

$$w_j = \frac{\sum_i x_i \phi_{ij}}{\sum_i \phi_{ij}}$$

onde x_i é 1 quando RCA é maior ou igual a 1 e 0 quando RCA é menor que 1.

3 METODOLOGIA

Para realizar os cálculos e plotagem dos resultados, utilizamos recursos computacionais, como programação em Python, assim obtendo a matriz de proximidade. Além disso, fazemos uso de software de plotagem de grafos, como o Gephi, para visualizar os grafos.

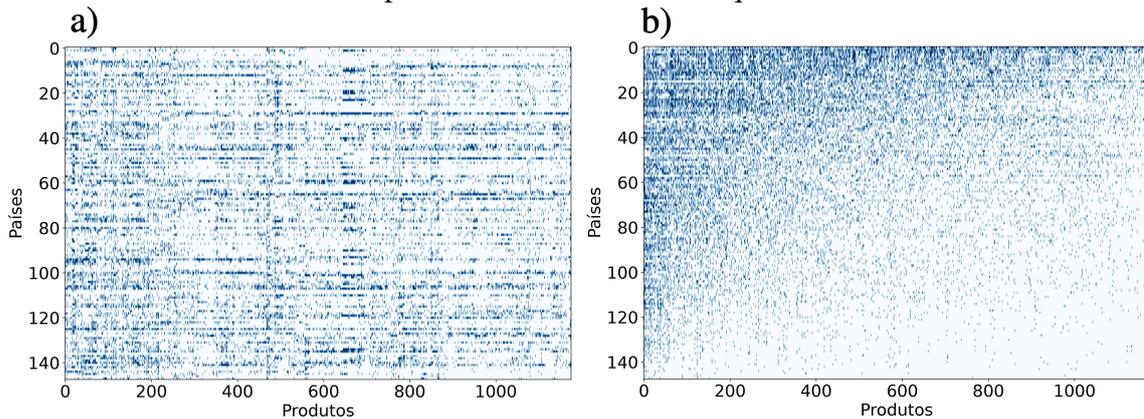
O primeiro passo é obter dados sobre as exportações do país ou região em estudo. Esses dados podem ser obtidos de fontes como organismos governamentais, institutos de estatísticas ou bases de dados internacionais. Os dados do comércio internacional foram retirados do conjunto de dados "World Trade Flows 2014-2015" de Feenstra, Lipsey, Deng, Ma e Mo.

Com base nos dados coletados, é construída uma matriz que relaciona os países aos produtos que eles exportam, como foi mostrado na tabela 1. Cada célula da matriz contém informações sobre o valor das exportações do país correspondente para o produto em questão.

A partir da matriz de produtos e países, é calculada a matriz de proximidade entre os produtos. Com a matriz de produtos já podemos obter alguns resultados como a distribuição dos valores de proximidade. Logo, montamos a MST utilizando a biblioteca networkx em python. Após obtermos a MST, utilizamos o algoritmo de força mola para evitar a sobreposição de nós e links, garantindo assim uma estruturação visual adequada do espaço de produtos.

4 RESULTADOS

Figura 10 – A figura (a) tem a matriz (raster plot) de países e produtos para o ano de 2015. Se um país exportou um produto com vantagem comparativa pintamos um ponto azul. Caso contrário pintamos um ponto branco. A figura (b) é equivalente mas ordenada em ordem decrescente os países em termos da diversidade e os produtos em termos da ubiquidade.



Fonte: O próprio autor.

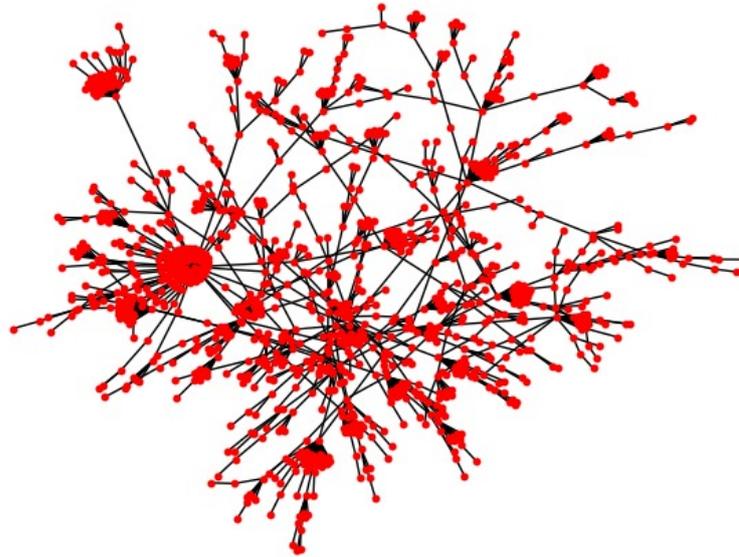
Países com uma maior diversidade de produtos têm uma gama mais ampla de setores econômicos e estão envolvidos na produção de uma variedade de bens, desde commodities básicas até produtos de alta tecnologia. Alguns exemplos de países que geralmente são considerados com alta diversidade de produtos incluem Estados Unidos, Alemanha e China,

Produtos de alta ubiquidade são aqueles amplamente produzidos e disponíveis em muitos países. Isso geralmente inclui produtos básicos e commodities, como grãos, petróleo, minerais, produtos têxteis simples, entre outros. Países que produzem predominantemente produtos de alta ubiquidade podem incluir grandes produtores de commodities, como Arábia Saudita, Rússia, Austrália e Canadá.

Na Figura 10, a matriz a) contém muitos valores zero, o que dificulta a observação da estrutura produtiva mundial. No entanto, na figura b), quando ordenamos em termos de diversidade e ubiquidade, a estrutura tridiagonal se torna evidente. Isso nos permite observar a estrutura produtiva mundial com base nas exportações de cada país.

Utilizando os dados de exportação, calculamos a proximidade entre os produtos e construímos a Minimum Spanning Tree (MST). Em seguida, aplicamos o algoritmo de força de mola para evitar a sobreposição de nós e links, obtendo assim a estrutura visual do Espaço de Produtos.

Figura 11 – Representação em rede do Espaço de Produto.

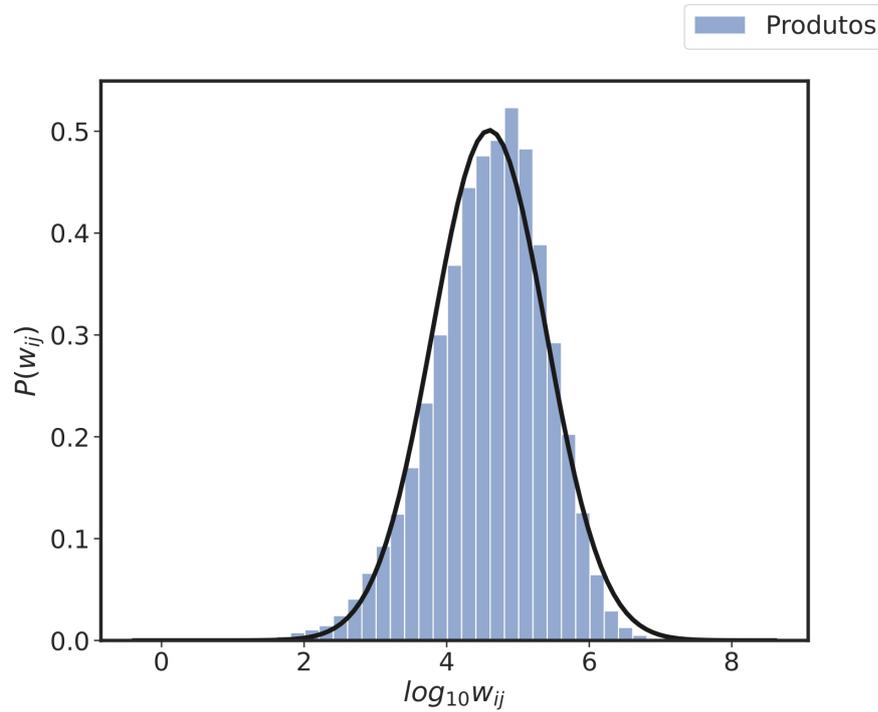


Fonte: O próprio autor.

A Figura 11 nos permite observar que os pontos com maior densidade correspondem a produtos mais complexos, como carros, por exemplo. Já os produtos que estão mais distantes e têm poucas conexões são aqueles que não requerem uma grande complexidade em sua produção, como é o caso da soja.

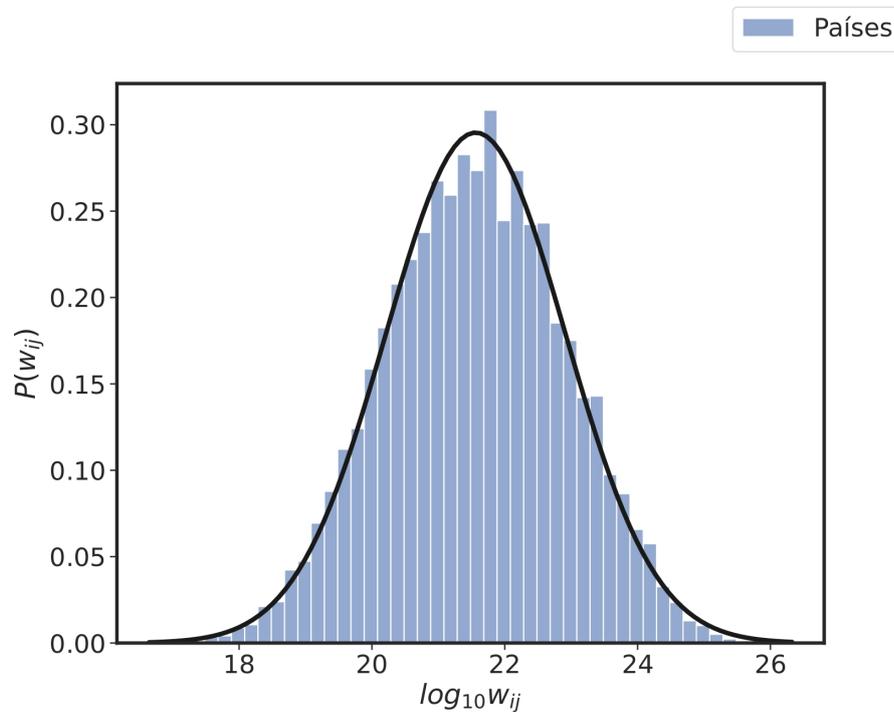
Com base na definição de produtos de transição, projetou-se as distribuições dos pesos no espaço de produtos e as projeções considerando os países. Representados nas figuras 12 e 13.

Figura 12 – Distribuição para os pesos do Espaço de Produtos. A curva contínua preta corresponde a um ajuste gaussiano para a distribuição.



Fonte: O próprio autor.

Figura 13 – Distribuição para os pesos do Espaço de Produtos considerando os países. A curva contínua preta corresponde a um ajuste gaussiano para a distribuição.

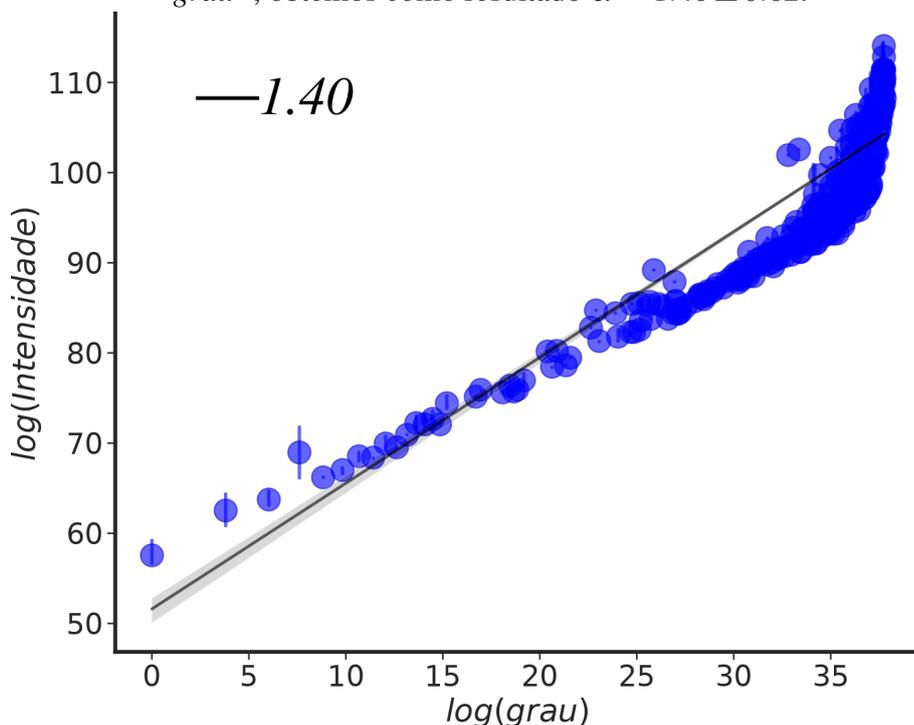


Fonte: O próprio autor.

As distribuições para os pesos referem-se à maneira como os produtos ou países são ponderados em termos de sua importância ou relevância dentro do espaço de produtos. Essas distribuições são usadas para quantificar a contribuição de cada produto para a complexidade econômica de um país ou região.

As distribuições dos pesos são log-normais são usadas para fornecer uma representação quantitativa da importância relativa dos produtos e países e ajudar a identificar os setores econômicos mais relevantes para a complexidade econômica de um país. Essas informações podem ser úteis para orientar políticas de desenvolvimento econômico, promover a diversificação produtiva e identificar oportunidades de crescimento e inovação.

Figura 14 – Dependência do grau dos nós no Espaço de Produtos com relação às respectivas Intensidades. A partir de uma regressão por mínimos quadrados para a equação $Intensidade \sim grau^\alpha$, obtemos como resultado $\alpha = 1.40 \pm 0.02$.



Fonte: O próprio autor.

Esse resultado é interessante pois descreve uma dependência não trivial entre as quantidades analisadas. Se a intensidade fosse simplesmente proporcional ao grau, teríamos $\alpha = 1$. Obtemos assim uma relação alométrica para nossa análise.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O Espaço de Produtos fornece informações e conclusões valiosas sobre a estrutura produtiva de um país ou região. O Espaço de Produtos pode revelar se um país está concentrado em um conjunto limitado de produtos ou se possui uma diversificação produtiva mais ampla. A análise do Espaço de Produtos pode indicar oportunidades de especialização em setores específicos ou a necessidade de diversificar a estrutura produtiva para estimular o desenvolvimento econômico.

Ao analisar a proximidade dos produtos no Espaço de Produtos, é possível identificar setores produtivos nos quais um país possui vantagens comparativas ou competitivas. Esses setores podem ser alavancados para impulsionar o crescimento econômico e a competitividade internacional.

O Espaço de Produtos revela as relações e conexões entre os produtos. Isso pode indicar oportunidades de encadeamento produtivo, ou seja, a capacidade de desenvolver novos produtos relacionados a partir de produtos já existentes. A identificação dessas oportunidades pode impulsionar a inovação e o desenvolvimento de novas indústrias.

Produtos mais complexos requerem habilidades e conhecimentos mais avançados, o que pode indicar a presença de um ambiente propício à inovação e ao desenvolvimento tecnológico.

É possível identificar lacunas na estrutura produtiva de um país, ou seja, produtos que estão ausentes ou pouco desenvolvidos. Essas lacunas podem representar desafios a serem superados para promover o desenvolvimento econômico, exigindo investimentos em capacitação, infraestrutura e políticas industriais adequadas.

É importante ressaltar que as conclusões a serem tiradas do Espaço de Produtos devem ser interpretadas em conjunto com outras análises e considerações, como fatores institucionais, políticas econômicas, infraestrutura e mercado internacional. A teoria do Espaço de Produtos fornece uma perspectiva valiosa para entender o desenvolvimento econômico, mas deve ser complementada com uma abordagem multidimensional para uma compreensão mais abrangente do contexto específico de cada país ou região.

REFERÊNCIAS

- BALASSA, B. Comparative advantage in manufactured goods: a reappraisal. **the Review of Economics and Statistics**, JSTOR, p. 315–319, 1986.
- BARABÁSI, A.-L. **Network Science**. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 2014.
- FORTUNATO, S.; HRIC, D. Community detection in networks: a user guide. **Physics reports**, Elsevier, v. 659, p. 1–44, 2016.
- HAUSMANN, R.; KLINGER, B. Structural transformation and patterns of comparative advantage in the product space. KSG Working Paper No. RWP06-041, CID Working Paper, 2006.
- HIDALGO, C. A.; HAUSMANN, R. The building blocks of economic complexity. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 106, n. 26, p. 10570–10575, 2009.
- HIDALGO, C. A.; KLINGER, B.; BARABÁSI, A.-L.; HAUSMANN, R. The product space conditions the development of nations. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 317, n. 5837, p. 482–487, 2007.
- LEAMER, E. E. Sources of international comparative advantage: theory and evidence. **NBER Working Paper**, v. 9348, 2003.