UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONILDO ELIAS CAMURÇA

TRIÂNGULO HARMÔNICO DE LEIBNIZ

FORTALEZA
2023

ANTONILDO ELIAS CAMURÇA

TRIÂNGULO HARMÔNICO DE LEIBNIZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C17t Camurça, Antonildo Elias.
Triângulo harmônico de Leibniz / Antonildo Elias Camurça. – 2023.
61 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Séries. 2. Série harmônica. 3. Ttiângulo de Pascal. 4. Triângulo harmônico. I. Título.

CDD 510

ANTONILDO ELIAS CAMURÇA

TRIÂNGULO HARMÔNICO DE LEIBNIZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 01/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais Luiz e Iêda, à minha esposa Brena Wany e aos meus filhos Tales, Miguel e Davy.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pai, todo poderoso, pela saúde, coragem para encarar os desafios, esperança e fé para acreditar na vitória e pelas possibilidades recebidas.

À minha esposa amada, Brena Wany, companheira de todas as horas pelo amor, incentivo, apoio e exemplo de dedicação e empenho.

Ao meu pai Luiz e minha mãe Iêda, por sempre me apoiar e acreditar no meu potencial.

Aos meus filhos Tales, Miguel e Davy, pelo incentivo, mesmo que de forma indireta.

A todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para que chegasse até aqui, meu muito obrigado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, em especial, pela paciência, competência e disponibilidade na orientação desse trabalho.

A todos os professores do PROFMAT da UFC, grandes doutores com os quais tive a honra de ter valorosos conhecimentos compartilhados, pela atenção, compreensão por nossas angústias e dúvidas, pelo empenho e dedicação.

Aos colegas da turma de mestrado PROFMAT SEDUC/UFC - 2021, Alexander Arley, Alfredo Luiz, André Pinheiro, Annelise Maymone, Antonio de Pádua, Antonio Zacarias, Paulo Lemos, Erineu Santos, Fábio Martins, Tyara Mota, Luiz Edson, Marcelo Bessa, Marcus Ítalo, Jéssyka dos Santos, Mariana Ingrid, Narcelio Gomes, Níbio Nascimento, Anthony Queiroz, Raimundo Inácio e Raimundo Neto, pela união do início ao fim do curso, pelas contribuições, companheirismo e apoio. Turma maravilhosa!

“Sem dúvida saber algo sobre uma coisa é diferente de compreendê-la, isto é, ter em nosso poder o que ela encerra.” (LEIBNIZ, 1962, p.360).

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um material teórico sobre o triângulo harmônico de Leibniz, sua relação com as séries, a série harmônica e com o triângulo de Pascal, bem como reunir e levar ao conhecimento do público apreciador dos padrões da matemática, sejam alunos do ensino médio ou de nível superior, um embasamento ao longo dos estudos para desenvolvimento de tal conhecimento. O triângulo harmônico foi definido por Leibniz (1646-1716) em 1673, com definição relacionada às diferenças sucessivas da série harmônica, e tal definição foi possível pelo fato de Leibniz ter estudado diversos textos matemáticos diferentes ao longo de sua vida. A formação desse triângulo harmônico é feita pelo recíproco dos elementos do triângulo de Pascal vezes seus próprios números. Este triângulo harmônico permite trabalhar com séries e pode até ser usado para calcular áreas. Tal definição foi feita a partir do estudo da série harmônica, e após análise de suas propriedades, utilizado para realizar as somas finitas e infinitas de séries por meio de um procedimento chamado, por Leibniz, de “soma de todas as diferenças”.

Palavras-chave: séries; série harmônica; triângulo de Pascal; triângulo harmônico.

ABSTRACT

This work aims to present theoretical material on Leibniz's harmonic triangle, its relationship with the series, the harmonic series and with Pascal's triangle, as well as to gather and bring to the knowledge of the public that appreciates the standards of mathematics, whether they are students of the high school or higher education, a basis throughout the studies for the development of such knowledge. The harmonic triangle was defined by Leibniz (1646-1716) in 1673, with a definition related to the successive differences of the harmonic series, and such a definition was possible because Leibniz had studied several different mathematical texts throughout his life. The formation of this harmonic triangle is made by the reciprocal of the elements of Pascal's triangle times their own numbers. This harmonic triangle allows you to work with series and can even be used to calculate areas. This definition was made from the study of the harmonic series, and after analysis of its properties, used to perform the finite and infinite sums of series through a procedure called, by Leibniz, “sum of all differences”.

Keywords: series; harmonic series; Pascal's triangle; harmonic triangle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

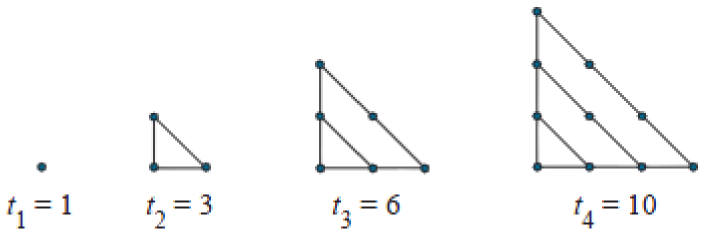
A finalidade deste trabalho é mostrar a definição, construção e utilidades do triângulo harmônico de Leibniz, definido a partir do triângulo de Pascal, que é o mais famoso conjunto de números em matemática dispostos em um triângulo tabela.

Tal trabalho, em seu objeto de estudo, o Triângulo Harmônico, tem as referências [6], [7] e [18] como principais fontes bibliográficas.

Como parte preliminar do presente trabalho, o estudo das sequências e séries sempre tiveram grande ênfase entre os principais estudiosos matemáticos no decorrer da história da matemática, sendo impulsionado por contribuições de Newton, exprimindo funções em termos de séries, e de Leibniz, com a soma de recíprocos dos números figurados.

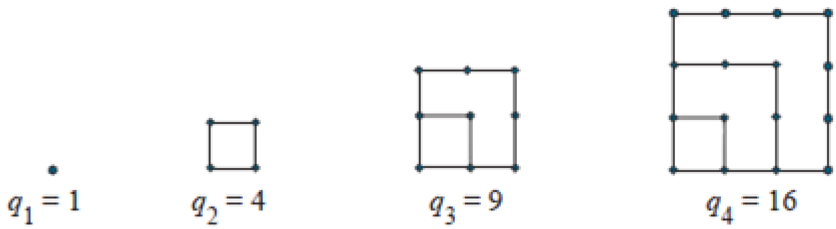
Estes números figurados ou poligonais, conhecidos desde a Grécia antiga, expressam a quantidade de pontos em certas configurações geométricas. Vejamos, nas figuras abaixo, alguns desses números:

Figura 1 – Números triangulares



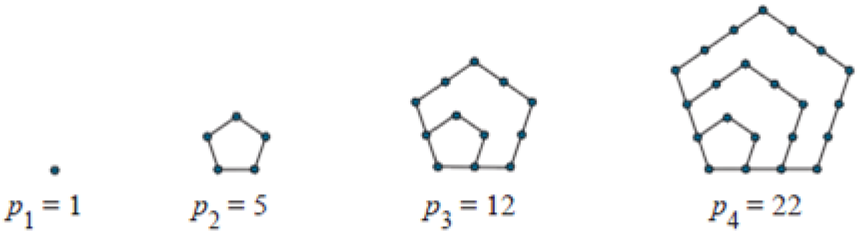
Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/numeros-figurados.htm

Figura 2 – Números quadrangulares



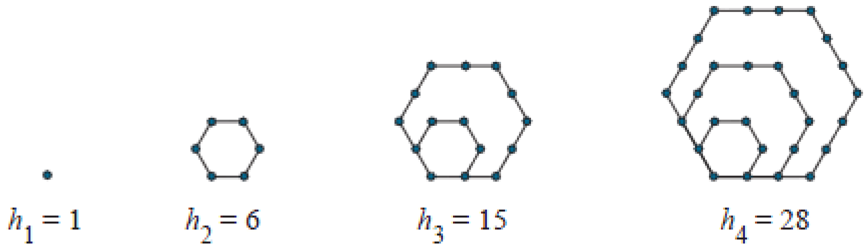
Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/numeros-figurados.htm

Figura 3 – Números pentagonais



Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/numeros-figurados.htm

Figura 4 – Números hexagonais



Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/numeros-figurados.htm

Segundo Boyer (2012), é provável que a abordagem indireta de Newton, sobre as séries, tenha sido benéfica para o futuro de sua obra, pois isso tornou claro para ele que seria possível operar com estas séries de modo muito semelhante ao usado para expressões polinomiais finitas. [...] Newton tinha verificado que a análise por série tinha a mesma consistência interior que a álgebra de quantidades finitas e, portanto, estas séries infinitas já não deviam mais ser consideradas apenas como instrumento de aproximação, e sim formas alternativas das funções que representavam.

Por outro lado, Oresme com a primeira prova da divergência da série harmônica; Mengoli com a soma da série harmônica alternada; Stirling com a convergência de séries; Taylor com a série de potências; Cauchy com limite e séries; e Weierstrass com a integração termo a termo de série uniformemente convergente, foram alguns dos diversos matemáticos que contribuíram com grandes descobertas sobre tal assunto.

Conforme visto em Massa (2018), uma característica da matemática no século XVII foi o início do uso do infinito na matemática, ou seja, a introdução dos procedimentos infinitos, especialmente nas obras de Mengoli e Leibniz. Na verdade, essa característica da matemática do século XVII é encontrada no objeto matemático envolvido neste trabalho: o triângulo harmônico.

A estrutura do referido trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo abordamos sobre sequências e séries, suas definições e alguns teoremas.

No segundo capítulo, definimos a progressão harmônica, a média harmônica entre dois números, a comparação com as outras médias mais conhecidas e a série harmônica.

Após embasamento teórico definido nos capítulos anteriores, chegamos ao terceiro capítulo. Tal capítulo, tem por finalidade a definição e construção do triângulo harmônico de Leibniz, com suas características e usos.

E por fim, no quarto capítulo, mostramos as Considerações finais que traz um compilado do trabalho, com ênfase no objeto de estudo, o triângulo harmônico.

No Apêndice A, para efeito de informações e curiosidades, mostramos um pouco sobre a história do sistema de numeração e o surgimento da fração no Egito e sua notação, bem como as frações unitárias, que compõem o objeto de estudo do referido trabalho, o triângulo harmônico.

Ainda para efeito de curiosidade, abordamos sobre o procedimento conhecido como algoritmo de Sylvester, que permite escrever uma fração qualquer como soma de frações unitárias. E por último, mostramos a conjectura de Erdos-Straus, que afirma ser possível escrever a fração $\frac{4}{m}$ como soma de três frações unitárias do tipo $\frac{1}{n}$, onde m é um inteiro positivo maior do que ou igual a 2 e n um inteiro positivo.

No Apêndice B, apresentamos sobre a definição de números binomiais, a organização desses números no triângulo de Pascal, bem como a definição de números binomiais complementares e o desenvolvimento do Binômio de Newton, sem maiores aprofundamentos, porém, com o rigor necessário. Esses números binomiais são utilizados, exatamente, na construção do triângulo harmônico através de uma fórmula direta.

2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Nesta seção apresentamos um pouco da história e definimos alguns conceitos e resultados relevantes sobre sequências e séries numéricas que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Historicamente, as sequências e séries tiveram seu estudo impulsionado a partir das contribuições de Newton (1642–1727) que mostrou como exprimir funções em termos de séries infinitas e Leibniz (1646–1716) que encontrou que a soma da série dos recíprocos dos números triangulares é 2 e através desse resultado concluiu que seria capaz de achar a soma de quase todas as séries infinitas, o que foi um grande engano.

No entanto, as séries foram objetos de estudo e descoberta por parte de vários matemáticos como Nicole Oresme (1325-1382) que desenvolveu a primeira prova da divergência da série harmônica; Pietro Mengoli (1625-1686), enquanto estudava indivisíveis e áreas sob as hipérboles, que viu que soma da série harmônica alternada $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{n}}+\cdots=\ln 2$; Johann Hudde (1629-1704) que escreveu sobre a quadratura da hipérbole por meio de séries infinitas; James Stirling (1692-1770), que através de seu *Methodus differentiales*, de 1730, contribuiu significativamente ao estudo da convergência de séries infinitas, interpolação e funções especiais definidas por séries; Brook Taylor (1685-1731) que através da sua publicação *Methodus incrementurum direta et inversa*, de 1715, permite que uma função seja expandida como uma série de potências em torno de um ponto, mas só foi nomeada "série de Taylor em 1785; Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), tendo definido que uma série é convergente se, para cada valores de n, a soma S_n dos n primeiros termos tende a um limite *S*, a soma da série, ele demonstrou que uma condição necessária e suficiente para que uma série infinita convirja é que, para um dado valor de p, o módulo da diferença entre S_n e S_{n+p}, tenda a zero quando n cresce infinitamente; Karl Weierstrass (1798-1851) mostrou que para uma série uniformemente convergente, a integração termo a termo também é possível.

2.1 Sequências

Definição 2.1.1. Uma sequência de números reais é uma função x: N → R que associa cada número natural *n* a um número real *x(n)*. O valor *x(n)*, para todo $n \in$ N, será representado por x_n e denominado n-ésimo termo da sequência numérica.

Exemplo 2.1.1. Os exemplos a seguir ilustram o exposto na *Definição 2.1.1*.

a) $a_n = 1$, para todo $n \in$ N. Isto define a sequência constante (1, 1, ..., 1, ...);

b) $a_n = n$, para todo $n \in$ N. Neste caso, x: N → R é a aplicação de inclusão e obtém-se a sequência (1, 2, 3, n, ...);

c) $a_n = 2^n$, para todo $n \in$ N. Neste caso, obtém-se a sequência (2, 4, ... 2^n, ...).

Definição 2.1.2. O termo geral de uma sequência (a_n) é o n-ésimo termo dessa sequência, ao qual através dele obtém-se todos os termos da sequência.

Exemplo 2.1.2. A sequência (1, 3, 5, ...) tem seu termo geral dado por $a_n = 2n - 1$.

Definição 2.1.3. Uma sequência (a_n) na qual o termo geral é a_n dependa do termo anterior (ou termos anteriores), ou seja, $a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, ..., a_{n+1}, a_n)$, com *k, n* inteiros positivos, é denominada *sequência recorrente* ou *sequência recursiva*.

Exemplo 2.1.3. Seja (a_n) uma sequência que satisfaça a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 3$, e suponha que as condições iniciais sejam $a_1 = 3$ e $a_2 = 5$. Determine os dois próximos termos dessa sequência recorrente:

Solução:

Podemos calcular

$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$

e

$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$.

Definição 2.1.4. Uma sequência (a_n) será dita:

i) Limitada superiormente quando existir um número real *M* tal que $a_n \leq M$, para todo $n \in N$. Essa constante *M* será denominada cota superior da sequência.

ii) Limitada inferiormente quando existir um número real *N* tal que $a_n \geq N$, para todo $n \in N$. Essa constante *N* será denominada cota inferior da sequência.

iii) Limitada quando ela for limitada superiormente e inferiormente, ou seja, se existir uma constante $K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$, para todo $n \in N$.

Exemplo 2.1.4. A sequência $a_n = \frac{1}{n+1}$, com *n* inteiro positivo, tem como conjunto dos seus termos $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{,3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ que é limitado, pois temos que $\frac{1}{2}$ é cota superior (limitada superiormente), ou seja, $a_n \leq 1$. Por outro lado, 0 é cota inferior (limitada inferiormente), ou seja, $a_n > 0$.

Definição 2.1.5. Seja (a_n) uma sequência. Dizemos que (a_n) é crescente se

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n \ \ldots,$$

isto é, se $a_n < a_{n+1}$, *para todo* $n \geq 1$. Agora, se

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n \ \ldots,$$

isto é, $a_n > a_{n+1}$, *para todo* $n \geq 1$, dizemos que a sequência é decrescente.
A sequência é não-crescente se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \ \ldots, \text{ para todo } n \geq 1,$$

e não-decrescente se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \ \ldots, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Se uma sequência satisfaz qualquer uma das condições acima, ela é dita monótona.

Exemplo 2.1.5. A sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ não satisfaz a nenhuma das condições citadas na *Definição 2.1.5*, ou seja, ela não é monótona.

Exemplo 2.1.6. A sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = n$ é crescente, ou seja, é monótona.

Definição 2.1.6. Dizemos que uma sequência (a_n) tem limite L ou converge para um número L se, dado qualquer $\varepsilon > 0$**,** existe n_0 natural, tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0.$$

Notação: Escrevemos $a_n \to L$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou simplesmente $\lim a_n = L$.

Se uma sequência tem limite ela chama-se convergente, caso contrário, ela será chamada de divergente.

Exemplo 2.1.7. Temos que $\lim \frac{1}{n} = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Logo, para todo $n > n_0$ temos $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Exemplo 2.1.8. Temos que $\lim \frac{1}{2^n} = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Logo, para todo $n > n_0$ temos $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Teorema 2.1.1. Se uma sequência (a_n) for crescente e limitada superiormente, então ela será convergente. Isso vale se (a_n) for decrescente e limitada inferiormente.

Demonstração:

Note que o conjunto $\{a_n \mid n \geq 1\}$ é não vazio e limitado superiormente; logo, admite supremo. Seja a = sup $\{a_n \mid n \geq 1\}$ e provaremos que $\lim a_n = L$.

Sendo *a* o supremo de $\{a_n \mid n \geq 1\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe pelo menos um natural n_0 tal que

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq L$$

(Se tal n_0 não existisse, teríamos, para todo natural n, $a_n \leq L - \varepsilon$ e, então, L não poderia ser supremo do conjunto de todos os a_n).

Como, por hipótese, a_n é crescente, resulta

$$n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n.$$

Mas, para todo n, $a_n \leq a$, pois *a* é o supremo do conjunto $\{a_n \mid n \geq 1\}$. Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim a_n = L.$$

Por outro lado, sendo (a_n) decrescente e limitada inferiormente, tem-se ($-\, a_n$) crescente e limitada superiormente.

Daí, conforme demonstrado na primeira parte, temos que

$$\lim(-a_n) = -\,L \implies -\lim a_n = -L \implies \lim a_n = L.$$

□

Exemplo 2.1.9. A sequência *(a_n)* cujos elementos são $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$, ... é convergente, pois seu termo geral $a_n = \frac{n}{2n+1}$ é limitado. De fato, observe que $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}$ e daí,

$$\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right).$$

No entanto, conforme *Exemplo 2.1.7,* temos que $\lim \frac{1}{n} = 0$. Logo,

$$\lim\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \lim\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

E, portanto, a sequência *(a_n)* de termo geral $a_n = \frac{n}{2n+1}$ é limitada, e, consequentemente, convergente.

Exemplo 2.1.10. A sequência (a_n) cujos elementos são $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ... tem termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ não limitado, e, portanto, é divergente. Note que

$$a_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{t=3}^{4} \frac{1}{n} + \sum_{t=5}^{8} \frac{1}{n} + \ldots + \sum_{t=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \sum_{t=3}^{4} \frac{1}{4} + \sum_{t=5}^{8} \frac{1}{8} + \ldots + \sum_{t=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Logo, (a_n) não é limitada, e, portanto, diverge.

Teorema: 2.1.2. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Queremos mostrar que, dada uma sequência convergente ela será limitada.

Para isso, seja *(a_n)* uma sequência convergente com $\lim a_n = L$. Tomando Ɛ = 1, na definição de sequência convergente, concluímos que existe n_0 ∈ N tal que $n > n_0$, então $|a_n - L| < 1$, isto é, $a_n \in (L - 1, L + 1)$. Tomando

$$a = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L - 1\} \text{ e } b = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L + 1\}$$

temos imediatamente que $a_n \in [a, b]$ para todo n natural. Portanto, a sequência *(a_n)* é limitada.

□

Exemplo 2.1.11. A sequência (1, 2, 3, . . ., n, . . .) não converge porque não é limitada.

Exemplo 2.1.12. A sequência (0, 1, 0, 1, . . .) é limitada, mas não é convergente, o que mostra que a recíproca do *teorema 2.1.2*. é falsa.

Teorema 2.1.3. Toda sequência limitada, monótona é convergente.

Demonstração:

No *Teorema 2.1.1*, provamos que se uma sequência (a_n) for crescente e limitada superiormente ou decrescente e limitada inferiormente será convergente, logo, toda sequência limitada (superiormente e inferiormente) e monótona (conforme *definição 2.1.5*) será convergente.

□

Exemplo 2.1.13. A sequência cujo n-ésimo termo é $a_n = \frac{n}{n+1}$ é crescente (monótona), limitada e convergente. De fato, observe a sequência

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}\right),$$

que abrange apenas números reais positivos e $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \dots$ para todo n inteiro positivo, o que mostra que ela é crescente. Por outro lado, como $n < n+1$ para todo n inteiro positivo, teremos $\frac{n}{n+1} \leq 1$, logo é limitada. E por fim,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right).$$

No entanto, conforme *Exemplo 2.1.7,* temos que $\lim \frac{1}{n} = 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Portanto, a sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ é convergente.

2.2 Séries

Definição 2.2.1. Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, formamos uma nova sequência (S_n) cujos elementos são as somas

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

que chamaremos as reduzidas da série $\sum a_n$, onde a_n o n-ésimo termo ou termo geral da série.

Exemplo 2.2.1. Sendo a série $\sum n$, com n inteiro positivo, suas somas parciais são: $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2 = 3$, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, ..., $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, ...

Definição 2.2.2. A série $\sum a_n$ será dita convergente se a sequência das somas parciais (S_n) for convergente; e divergente se a sequência das somas parciais for divergente.

Exemplo 2.2.2. Considere a série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Sabendo que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, podemos escrever a sucessão das somas parciais:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

Observe que

$$\lim S_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\left(1 - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right).$$

No entanto, conforme *Exemplo 2.1.7,* temos que $\lim \frac{1}{n} = 0$. Daí, $\lim S_n = 1$, ou seja, a série é convergente e sua soma é 1:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exemplo 2.2.3. Considere a série $\sum(-1)^{n+1}$. Podemos ver facilmente que as somas parciais são $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0$, e assim por diante. As somas parciais oscilam entre os números 0 e 1, e não tendem a um número S. Por isso, a série é divergente.

Exemplo 2.2.4. Dada a série geométrica

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}}$$

suas somas parciais são:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\vdots$$

No entanto, conforme *Exemplo 2.1.8,* temos que $\lim \frac{1}{2^n} = 0$. Daí, $\lim S_n = 2$, ou seja, a série é convergente e sua soma é 2:

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Definição 2.2.3. O termo geral *a_n* de uma série é o n-ésimo termo da sequência associada à série, ou seja, é a expressão que nos permite determinar cada termo série.

Exemplo 2.2.5. A série $\sum 2n = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2n + \cdots$, é uma série com termo geral $\mathrm{a}_n = 2n$.

Teorema 2.2.1. Se $\sum \mathrm{a}_n$ é uma série convergente então seu termo geral tende a zero.

Demonstração:

Como a série $\sum \mathrm{a}_n$ é convergente, e conforme *Definição 2.2.2*, a sequência das somas parciais (S_n) é convergente, então a sequência (S_{n+1}) também é convergente, pois diferem apenas pelo termo inicial. Ou seja, $(\mathrm{S}_n) = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n)$ e $(\mathrm{S}_{n+1}) = (\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \dots, \mathrm{a}_{n+1})$.

Portanto, se (a_{n+1}) converge para zero, então (a_n) também convergirá para zero.

□

Exemplo 1.2.6. A recíproca do *Teorema 2.2.1* é falsa, pois a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, embora seu termo geral, $a_n = \frac{1}{n}$, tenda a zero, conforme visto no *Exemplo 2.1.7*.

3 PROGRESSÃO HARMÔNICA

3.1 Definições e Ideias iniciais

Definição 3.1.1. Uma progressão harmônica é uma sequência de números cujos termos são todos diferentes de zero e tais que seus inversos formam uma progressão aritmética.

Assim, a sequência (a_1, a_2, ..., a_n, ...) é uma progressão harmônica se, e somente se, a sequência dada por $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética.

Exemplo 3.1.1. A sequência $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ é uma progressão harmônica, uma vez que a sucessão dos inversos, $(1, 2, 3, \ldots, n \ldots)$, é a progressão aritmética de razão r = 1.

Observe que a sequência $\left(\frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$ não representa uma progressão harmônica, pois (3, 1, - 1, - 4, ...) não é uma progressão aritmética.

Definida a progressão harmônica, conforme visto anteriormente, vejamos o teorema que trata sobre o seu termo geral, apresentado em Lopes (1998, p. 18).

Teorema 3.1.1. Se $\{a_i\}$ é uma progressão harmônica, então o termo geral de ordem i, com $i > 2$, é dado por

$$a_i = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (i-1)(a_1 - a_2)}.$$

Demonstração:

Se a_i é o termo geral de uma progressão harmônica, então $b_i = \frac{1}{a_i}$ é o termo geral de uma progressão aritmética de razão $r = b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$. Logo,

$$b_i = b_1 + (i-1)r = \frac{1}{a_i} + (i-1)\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 + (i-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}.$$

Como $b_i = \frac{1}{a_i}$, segue que

$$\frac{1}{a_i} = \frac{a_2 + (i-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

e assim obtemos

$$a_i = \frac{a_1 a_2}{a_2+(i-1)(a_1-a_2)} \tag{1}$$

□

Vejamos outros casos de progressões harmônicas, (a_n), (b_n) e (c_n) dispostas a seguir:

$(a_n) = \left(-\frac{1}{3}, -1,\ 1,\ \frac{1}{3}, \ldots\right)$
$(b_n) = (5, 5, 5, 5, \ldots)$
$(c_n) = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{5}\right)$

Observemos que as sequências (a_n), (b_n) e (c_n), de fato, são progressões harmônicas, pois podemos associá-las, respectivamente, às sequências

$(d_n) = (-3, -1, 1, 3, \ldots)$
$(e_n) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$
$(f_n) = (7, 4, 1, -2, -5)$

que são progressões aritméticas.

Exemplo 3.1.2. Dada a progressão harmônica $\left(\frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$, determine o seu décimo termo.

Solução: Temos pela igualdade (1) que

$$a_{10} = \frac{a_1 a_2}{a_2+(10-1)(a_1-a_2)} = \frac{\frac{4}{3}.1}{1+9\left(\frac{4}{3}-1\right)} = \frac{1}{3}.$$

Para a continuidade do presente trabalho, a definição de média harmônica será de muita utilidade. Aqui veremos um caso particular com dois números.

Definição 3.1.2. Dados dois números a e b, reais positivos, dizemos que H é a média harmônica de a e b se entre tais números vale a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H}$, que é equivalente à igualdade

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$$

isto é, H é o inverso da média aritmética dos inversos dos números a e b.

Exemplo 3.1.3. Uma mangueira leva 20 horas para encher uma piscina, a outra, com vazão um pouco menor, leva 30 horas para encher a mesma piscina. Se elas forem ligadas simultaneamente, em quanto tempo a piscina estará cheia?

Solução: Temos que a = 20 e b = 30. Daí, pela definição 3.1.2., segue que:

$$H = \frac{2.20.30}{20+30} = \frac{1200}{50} = 24$$

Portanto, a piscina estará cheia após 24 horas.

Na Grécia antiga, cerca de 500 anos a.C. os Pitagóricos, tendo como líder e fundador da escola pitagórica o matemático e filósofo Pitágoras de Samos (580 - 500 a.C., aproximadamente), que proporcionaram grandes contribuições para a matemática, definiram a média harmônica assim:

Dados dois números positivos a e b, H é a média harmônica de a e b se existe um número n tal que

$$\mathrm{a} = \mathrm{H} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} \qquad (2)$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{b} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n}} \qquad (3)$$

Observemos que essa definição é equivalente à definição de média harmônica, pois ao multiplicar (2) por b e (3) por a, temos que

$$\mathrm{ab} = \mathrm{bH} + \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{aH} = \mathrm{ab} + \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n}}$$

e assim

$$\mathrm{ab} - \mathrm{bH} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n}} \qquad (4)$$

$$\mathrm{ab} - \mathrm{aH} = -\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{n}} \qquad (5)$$

Somando membro a membro (5) e (6), temos:

$$2\mathrm{ab} - (\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathrm{H} = 0$$

$$2\mathrm{ab} = (\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathrm{H}$$

e, portanto,

$$\mathrm{H} = \frac{2\mathrm{ab}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}. \qquad (6)$$

Propriedade 3.1.1. Em toda progressão harmônica, quaisquer três termos consecutivos são tais que o segundo é a média dos outros dois.

Exemplo 3.1.4. Determine o segundo termo de uma progressão harmônica (a_n) cujo primeiro termo é igual a 12 e o terceiro é tal que $a_3 = 3.a_1$.

Solução: Temos que $a_3 = 36$ e, pela propriedade 3.1.1, segue que a_2 é média harmônica entre os termos, inteiros positivos, $a_1 = 12$ e $a_3 = 36$. Daí, segue que:

$$a_2 = \frac{12.36}{12+36} = \frac{432}{48} = 8.$$

Para a generalização da *Definição 3.1.2,* consideremos *n* números reais positivos, $a_1, a_2, ..., a_n$. Assim, a média harmônica desses números será o número H definido por:

$$H = \frac{1}{\left[\dfrac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right]}$$

isto é, a média harmônica desses *n* números é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.

Exemplo 3.1.5. Determinemos a média harmônica dos números 3, 4 e 5 (aqui temos n = 3).

Solução:

Conforme generalização, temos que a média desses números será dada por:

$$H = \frac{1}{\left[\dfrac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}{3}\right]} = \frac{1}{\left[\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{3}\right]} = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$$

$$H = \frac{3}{\dfrac{20 + 15 + 12}{60}} = \frac{3}{\frac{47}{60}} = \frac{180}{47}.$$

Vale ressaltar que quando falamos de média harmônica, naturalmente, pensamos na comparação desta com as outras médias mais conhecidas, no caso, a aritmética e a geométrica.

Para mostrar essa comparação, precisamos, inicialmente, definir as médias aritmética e geométrica. Vejamos:

Definição 3.1.3. Consideremos uma sequência com *n* números reais positivos, a_1, a_2, ..., a_n. A média aritmética destes números será o número A definido por:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Definição 3.1.4. Consideremos uma sequência com *n* números reais positivos, a_1, a_2, ..., a_n. A média geométrica destes números será o número G definido por:

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Exemplo 3.1.6. Qual é a média aritmética e geométrica dos números 3, 8 e 9?

Solução:

Calculando a média aritmética, temos:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{3 + 8 + 9}{3} = \frac{20}{3} = 6{,}7.$$

Logo, a média aritmética é 6,7.

Calculando a média geométrica, temos:

$$G = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{3.8.9} = 6$$

Logo, a média geométrica é 6.

Definidas as médias aritmética, geométrica e harmônica, agora apresentaremos as desigualdades entre essas médias, inicialmente entre as médias aritmética e geométrica, e posteriormente, entre as médias geométrica e harmônica.

Mostraremos que a desigualdade $A \geq G \geq H$ é válida para quaisquer números reais positivos a_1 e a_2 e que a igualdade das médias, duas a duas, ocorre se, e somente se, a_1 = a_2.

Consideremos os números reais positivos a_1 e a_2. Sabemos que $A = \frac{a_1 + a_2}{2}$ e que $G = \sqrt{a_1 a_2}$. Daí, temos que $\sqrt{a_1}$ e $\sqrt{a_2}$ também são reais positivos.

Assim:

$$\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$$
$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0$$
$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$$

Isto é,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

Ou seja, $A \geq G$.

Supondo $A = G$, temos:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2} \Longrightarrow a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = 0 \Longrightarrow \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

Agora, mostraremos que $G \geq H$. Temos que a média harmônica H é dada por:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}},$$

e seu inverso é:

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}{2}.$$

Seja A' a média aritmética dos inversos de a_1 e a_2, então $A' = \frac{1}{H}$. Seja G' a média geométrica dos inversos de a_1 e a_2, então,

$$G' = \sqrt{\frac{1}{a_1} . \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{\sqrt{a_1 . a_2}} = \frac{1}{G}.$$

Como demonstrado acima,

$$A' \geq G' \Longrightarrow \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \Longrightarrow G \geq H.$$

Assim, concluímos que

$$A \geq G \geq H.$$

Se $G = H \implies \frac{1}{G} = \frac{1}{H} \implies A' = G' \implies \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} \implies a_1 = a_2$.

Desta forma, finalizamos a demonstração para quaisquer dois números reais positivos a_1 e a_2.

No entanto, aqui não será demonstrado a desigualdade das médias de forma generalizada. Porém, caso o leitor queira ver tal demonstração e buscar maior aprofundamento, poderá consultar a referência [16].

3.2 Série Harmônica

A série harmônica é a soma infinita dos inversos dos números inteiros positivos, isto é:

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Segundo Ávila (1995 p. 55-56),

> [...] a série harmônica, também a mais simples dentre as séries divergentes com termo geral tendendo a zero. Aliás, para algum aluno iniciante e inexperiente em séries infinitas é levado a crer que a série deva ser convergente, e não divergente. Afinal, os termos estão decrescendo pra zero após uma soma muito grande deles, contudo é necessária uma análise mais cuidadosa.

Para Garbi (2000), Nicole Oresme (1323-1382), considerado por alguns historiadores como o maior Matemático do século XIV, foi o primeiro a demonstrar a divergência da série harmônica. Tal prova é a mais conhecida e utilizada no ensino tanto por ser elegantíssima, quanto simples e de fácil compreensão.

Observe que os termos da sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$, que representa a série harmônica acima, decrescem tendendo para zero, dando a impressão de ser convergente. Porém, como já sabemos, ela é divergente e foi provado por Oresme.

Em sua demonstração, Oresme começou por agrupar os termos da série da seguinte forma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots$$

Em seguida, ele observou que cada um desses grupos é maior do que $\frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2\,x\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4\,x\,\frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = 8\,x\,\frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32} = 16\,x\,\frac{1}{32} = \frac{1}{2};$$

e assim por diante, de sorte que

$$S > 1 + \frac{1}{2} + 2\text{ x }\frac{1}{4} + 4\text{ x }\frac{1}{8} + 8\text{ x }\frac{1}{16} + 16\text{ x }\frac{1}{32} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

e, como essa soma de um número infinito de parcelas iguais a $\frac{1}{2}$ aumenta indefinidamente, ou seja, a série apresenta termo geral ilimitado, conforme *Exemplo 2.1.10*, ela é diverge.

Por outro lado, Pietro Mengoli (1627-1686), três séculos mais tarde, em 1648, encontrou nova prova da divergência da série harmônica por um caminho diferente daquele utilizado por Oresme, mas também criativo e elegante. A prova de Mengoli baseia-se no fato de valer a desigualdade abaixo, para qualquer *n* natural maior do que 1:

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$$

A prova é simples:

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{3n^2-1}{n(n^2-1)}>\frac{3n^2-3}{n(n^2-1)}=\frac{3}{n}$$

Assim,

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)+\cdots>$$

$$1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+\cdots=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Ao repetir essa operação indefinidamente, verifica-se que a soma da série harmônica é maior do que a soma de um número ilimitado de parcelas iguais a 1, ou seja, tem termo geral ilimitado, e conforme *exemplo 2.1.10*, ela diverge.

Segundo Schickling (2019, p. 29) próximo ao ano de 1672, na Itália, Pietro Mengoli estudava os indivisíveis e a área sob as hipérboles, e no decorrer do processo tornou-se evidente o uso de séries, por exemplo, que a soma da série harmônica alternada $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$, logo, convergente.

Para efeito de aprofundamento acerca da demonstração da convergência da série harmônica alternada, o leitor interessado deve consultar a referência [15].

4 TRIÂNGULO HARMÔNICO DE LEIBNIZ

Segundo Boyer (1974) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) nasceu em Leipzig, aos quinze anos entrou na universidade e aos dezesseis obteve o grau de bacharel. Estudou teologia, direito, filosofia e matemática na universidade, em Leipzig, e aos vinte anos obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf, em Nuremberg. Entrou, então, para o serviço diplomático e como um influente representante do governo viajou muito, o que contribuiu bastante na sua preparação e, consequentemente, em seus estudos que culminaram em diversas contribuições para a matemática.

Os primeiros trabalhos de Leibniz foram baseados em séries. Huygens (1629 - 1695) tinha-lhe proposto o problema de achar a soma dos recíprocos dos números triangulares, isto é, $\frac{2}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}$.

Para resolver, Leibniz escreveu, astuciosamente, cada termo como a soma de duas frações, usando

$$\frac{2}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right):$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

de onde resulta evidentemente, escrevendo alguns termos, que a soma dos n primeiros termos é

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right),$$

e, portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$

Desse sucesso, ele ingenuamente concluiu que seria capaz der achar a soma de quase todas as séries.

Segundo Massa (2018), desde o início dos trabalhos de Leibniz sobre matemática, ele enfatizou seu interesse pelo infinito e pelas dificuldades que o envolvia, como se vê em seu tratado sobre a quadratura aritmética do círculo, a elipse e a hipérbole sobre a qual trabalhou durante sua estadia em Paris e em seus escritos sobre série.

A partir de 1672, e por recomendação de Chistian Huygens (1629 – 1695), Leibniz estava empenhado na demonstração da divergência da série harmônica (1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,...), e na soma da série (1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, ...) que têm por denominador números figurados, ou seja, números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais... Ele começou a trabalhar na série harmônica em um texto intitulado "*Differentiae Numerorum Harmonicorum et Reciprocorum Triangularium",* no que apresentou as diferenças de termos desta série. Em seu caminho para somar essas séries, Leibniz construiu o triângulo harmônico a partir do triângulo aritmético de pascal.

> "[...] Leibniz explicou pela primeira vez o triângulo aritmético, com citações da obra de Pascal e referências ao figurar números com os nomes: Triangularium, Pyramidalium, Triangulo-Triangularium, Triangulo-Pyramidalium, Pyramido-Pyramidalium." (MASSA, 2018, p. 245)

O triângulo harmônico que surge do triângulo aritmético permite trabalhar com séries e pode até ser usado para calcular áreas.

> "O triângulo harmônico é formado pelo recíproco dos elementos do triângulo aritmético vezes seus próprios números. Sua construção é a seguinte: pegue o triângulo de Pascal e, considerando a primeira linha, que é seu vértice, à parte, multiplique cada linha pelo número de termos que ela contém; isto é, a primeira linha por dois, a segunda por três; e assim, sucessivamente, ou seja a linha m por $m + 1$. Desta forma, os recíprocos desses números são encontrados, obtendo assim o triângulo harmônico. De fato, os lados desse triângulo formam a série harmônica."(MASSA, 2018, p. 235)

O triângulo harmônico foi definido por Leibniz, em 1673, a partir dos estudos da série harmônica e sua definição estava relacionada às sucessivas diferenças desta série e, foi possibilitada pelo estudo de muitos textos diferentes ao longo de suas viagens, entre eles, Arithmetica Infitorium (Oxford, 1656) por John Wallis e Opus Geometricum (Antuérpia, 1647) de Grégorie de Saint-Vincent (1584 – 1667), aos quais tratavam sobre somatórios de termos infinitos de séries.

Segundo Martins (2015) Leibniz começou a produzir em matemática quando estudou séries e, em especial, calculou várias séries através do triângulo harmônico.

Definido o triângulo harmônico e após a análise de suas pripriedades, Leibniz o utilizou para realizar as somas de séries através de um procedimento chamado por ele de “soma de todas as diferenças”.

> “Em dezembro de 1675, Leibniz apresentou um texto também intitulado “De Triangulo Harmonico” consistindo de três seções, a primeira das quais é chamada “De progresse harmonica” e contém a definição de série harmônica e discute a progressão no triângulo harmônico.”(MASSA, 2018, p. 246)

Tal triângulo idealizado por Leibniz, e que tanto o fascinou, foi construído da seguinte forma: na primeira coluna, de cima para baixo, são escritos os termos da série harmônica, do maior para o menor; na segunda coluna, cada elemento é a diferença entre o elemento imediatamente acima e o elemento abaixo, ambos da coluna à esquerda mais próxima, ou seja, $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$, ... e consequentemente, obtendo-se a segunda coluna: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ... do triângulo harmônico. Analogamente, obtém-se as demais colunas e a figura a seguir mostra os primeiros elementos desse triângulo harmônico.

Figura 5 – Triângulo harmônico

$\frac{1}{1}$						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Ciência e Natura, v. 37 Ed. Especial PROFMAT (2015, p. 435)

No que diz a respeito à comparação entre o triângulo aritmético de Pascal e o triângulo harmônico de Leibniz, é descrito por Boyer:

> “No triângulo aritmético de Pascal, cada elemento (que não esteja na primeira coluna) é a diferença dos dois termos logo abaixo dele e à esquerda; no triângulo harmônico, cada termo (que não esteja na primeira linha) é a diferença dos termos logo acima e abaixo dele, ambos na coluna à esquerda mais próximo. Além disso, no triângulo aritmético de Pascal, cada termo (que não esteja na primeira linha ou coluna) é a soma de todos os termos na diagonal acima dele e à esquerda, ao passo que no triângulo harmônico cada termo é a soma de todos os termos na linha abaixo dele e à esquerda. A série na primeira coluna é a série harmônica, que diverge; em todas as outras linhas, a série converge. Os números na segunda coluna são a metade dos recíprocos dos números triangulares, e Leibniz sabia que a soma dessa série é 1 [...]”. (BOYER, 2012, p. 288)

Posteriormente, em fevereiro de 1676, na segunda seção intitulada por “Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascali”,

> “Leibniz comparou seu triângulo harmônico com o triângulo aritmético de Pascal e descreveu seus usos, tanto para as somas da série no triângulo aritmético e série no triângulo harmônico, e para as quadraturas de parábolas e hipérboles”. (MASSA, 2018, p. 247)

Segundo Massa (2018) Leibniz explicou que conhecia o uso do triângulo aritmético para encontrar somatórios e suas potências, a partir das propriedades de formação do triângulo e dos números figurados, em comparação com o próprio triângulo harmônico.

> “[...] o triângulo harmônico serve para a descoberta das somas finitas das frações com números figurados, e somas infinitas que têm soma finita [...].” (MASSA, 2018, p. 249)

Ainda em 1676, Leibniz, através da terceira seção intitulada “Origo inventones trianguli harmonici”, explicou que no ano de 1673 Huygens sugeriu que ele encontrasse a soma dos números figurados recíprocos.

Anos depois, em carta datada de 27 de dezembro de 1694, enviada a Guillaume de L’Hôpital (1661-1704), Leibniz voltou a abordar sobre as propriedades das somas dos números figurados no triângulo aritmético. Ele também explicou que através do seu triângulo harmônico seria possível encontrar a soma infinita das frações com números triangulares no denominador ($1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ...$) usando o procedimento da soma de todas as diferenças.

Leibniz definiu o triângulo harmônico objetivando os estudos relacionados a somas infinitas de séries, os quais desempenharam papel importante nos seus primeiros trabalhos. Portanto, a definição desse triângulo foi de extrema importância para a continuidade os seus estudos sobre séries com somas finitas e infinitas.

4.1 Triângulo Harmônico de Leibniz construído de forma recursiva

Aqui mostraremos a construção do triângulo harmônico de Leibniz de forma recursiva, conforme *Definição 2.1.3.* Para tanto, denotemos por *n* e *k*, respectivamente, a posição do elemento na linha, de cima para baixo; e na coluna, da esquerda para a direita, no triângulo harmônico. Portanto, os elementos serão calculados pelas relações:

$$L_{n,k}; \text{ para } 1 \leq k \leq n$$

$$L_{n,1} = \frac{1}{n}; \text{ para } n \geq 1$$

$$L_{n,k} = L_{n-1,k-1} - L_{n,k-1}; \text{ para } 2 \leq k \leq n.$$

Por exemplo, $L_{5,3}$ denota o elemento que está na quinta linha e terceira coluna do triângulo harmônico, conforme indicado na figura 9 abaixo.

Figura 6 – Triângulo harmônico conforme notação recursiva

$$\begin{array}{ccccccc}
L_{1,1} & & & & & & \\
L_{2,1} & L_{2,2} & & & & & \\
L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & & & & \\
L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} & & & \\
L_{5,1} & L_{5,2} & L_{5,3} & L_{5,4} & L_{5,5} & & \\
L_{6,1} & L_{6,2} & L_{6,3} & L_{6,4} & L_{6,5} & L_{6,6} & \\
L_{7,1} & L_{7,2} & L_{7,3} & L_{7,4} & L_{7,5} & L_{7,6} & L_{7,7} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Fonte: elaborado pelo autor

4.2 Triângulo Harmônico de Leibniz construído por uma fórmula direta

Por outro lado, sabemos que no triângulo de Pascal, os termos são calculados usando coeficientes binomiais, e, consequentemente, pela relação entre os dois triângulos, o mesmo vale para o triângulo harmônico de Leibniz. Neste caso, esses termos são calculados, de forma direta, pela relação:

$$L_{n,k} = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} = \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)\ldots\big(n-(k-1)\big)},$$

onde $\binom{n}{k}$ é um coeficiente binomial.

Por exemplo,

$$L_{n,2} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$L_{n,3} = \frac{2!}{n(n-1)(n-2)}$$

$$L_{n,4} = \frac{3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$L_{n,5} = \frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$L_{n,6} = \frac{5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$$

$$L_{n,7} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}$$

Portanto, após calcular os termos do triângulo harmônico de Leibniz por recorrência ou forma direta, vejamos a figura abaixo que mostra tal triângulo construído.

Figura 7 – Triângulo harmônico construído por recorrência ou fórmula direta

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1/2	1/2				
3	1/3	1/6	1/3			
4	1/4	1/12	1/12	1/4		
5	1/5	1/20	1/30	1/20	1/5	
6	1/6	1/30	1/60	1/60	1/30	1/6

Fonte: fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_harmonique_de_Leibniz

Em relação a tudo que fora exposto durante todo o trabalho, os triângulos aritmético e harmônico apresentam uma estrutura visual aberta em que o número de termos arranjados, conforme as figuras 5 e 15 (no apêndice B), podem se tornar infinitos. Portanto, o infinito torna-se mais um elemento nos cálculos matemáticos desse autor, que na matemática do século XVII abriu um mundo de possibilidades no estudo das séries e em suas relações com o cálculo infinitesimal.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como foco principal mostrar a definição e construção do triângulo harmônico de Leibniz. Ele definiu e estudou o triângulo harmônico baseado na série harmônica e as somas de todas as diferenças.

No entanto, de forma preliminar, foi mostrado sobre sequências e séries, em especial a série harmônica, muito importante para a definição desse triângulo harmônico, e com grande contribuição durante todo esse processo por parte de vários matemáticos como Newton, Leibniz, Oresme, Mengoli, Stirling, Taylor, Cauchy, Weierstrass, os irmãos Bernoulli, entre outros.

Com isso, podemos concluir que este trabalho atingiu seu objetivo, pois mostramos que Leibniz construiu tal triângulo tendo como base o triângulo de Pascal, trabalhando, inicialmente, com as somas dos recíprocos dos números figurados e as sucessivas diferenças entre os termos da série harmônica.

Conforme mostrado, após a definição de tal triângulo, Leibniz o comparou com o triângulo de Pascal, verificou suas propriedades e descreveu sua utilização nas somas finitas e infinitas, dando continuidade aos seus estudos que culminaram em importantes contribuições no estudo das séries e em suas relações com o cálculo infinitesimal.

E por fim, mostramos duas outras formas de construir o tal triângulo, a forma recursiva e por uma fórmula direta, com utilização dos números binomiais.

Esperamos que o nosso trabalho possa contribuir, não só para a comunidade de estudiosos em matemática, mas também, para professores de matemática, tanto pela leitura do referido trabalho, quanto pela continuidade e aprofundamento dos estudos referentres ao mesmo.

REFERÊNCIAS

[1] ANTAR NETO, A. *et al*. **Progressões e logaritmos**. São Paulo: Moderna, 1979.

[2] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

[3] ÁVILA, Geraldo. A série harmônica e a fórmula de Euler-MacLaurin. **Matemática Universitária**, v. 19, p. 55-63, 1995.

[4] BARASUOL, Fabiana Fagundes. A matemática da pré-história ao antigo Egito. **UNI revista**, v. 1, n. 2, p. 1-6, 2006.

[5] BRASILESCOLA, **Números Binomiais**. Goiânia, 2023. Disponível em: https://brasilescola.uol.com/matemática/numeros-binomiais.htm. Acesso em: 20 de jan. 2023.

[6] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

[7] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

[8] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. V. 2.

[9] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 2 ed. Editora da Unicamp, São Paulo, 1997.

[10] FERREIRA, José William Porras. **Una solución sencilla a la conjectura de Erdos-Straus**. Disponível em: https://encr.pw/X1GiL. Acesso em: 26 de jan de 2023.

[11] FONSECA, Rubens Vilhena. **Sequências e séries** – Belém: UEPA / Centro de Ciências Sociais e Educação, 2011, 24 p.

[12] GARBI, G. A surpreendente série harmônica. **RPM**, n. 42, 2000.

[13] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo.** 5. Ed. Rio de Janeiro:LTC, 2013. V. 4.

[14] IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[15] LACERDA, Tessa Moura. Leibniz: a infinitude divina e o infinito em nós. **Cadernos Espinosanos** , n. 34, pág. 39-63, 2016.

[16] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. **De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis, critical edition with commentary**. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1993.

.

[17] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014, v. 1.

[18] LIMA, Elon Lages. *et al*. **A matemática do ensino médio.** São Paulo: SBM, 2002. V. 2.

[19] LOPES, Luís. **Manual de Progressões**. Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

[20] MASSA-ESTEVE, Maria Rosa. O triângulo harmônico nas obras de Mengoli e Leibniz. **Quaderns d'història l'enginyeria**. Spain, v. 16, p. 233-258, 2018.

[21] MARTINS, David Pinto. Progressão harmônica e o triângulo de Leibniz. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 426-438, 2015.

[22] MATEMÁTICA.NET. **Triângulo de Pascal**: Definição e Construção. Disponível em: https://matematicabasica.net/triângulo-de-pascal/. Acesso em: 20 de jan. 2023.

[23] MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: UFMG, 2013. p. 17.

[24] MORDELL, L. J., **Diophantine Equations**, London: Academic Press, 1968.

[25] NERI, Cassio. **Curso de Análise Real**. 1ed - Rio de Janeiro: UFRJ, 1973. 163p.

[26] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[27] ROQUE, Tatiana. História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. **Sustinere**: Revista de Saúde e Educação, v. 5, n. 2, 2012.

[28] SCHICKLING, Eduarda et al. **A Convergência de sequências e séries sob uma perspectiva histórica:** de Zenão a Cauchy. 2019. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2019.

[29] SILVA, Karina Schiabel. **Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares com difusibilidade grande localizada**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.

[30] SOUZA, Cássia Ribeiro de. **Os livros didáticos de matemática, a variedade de problemas propostos e o Binômio de Newton**. 2019. 181 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2019.

[31] STEWART, James. **Cálculo, volume 2**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

APÊNDICE A – FRAÇÕES

Aqui buscamos mostrar um pouco da história sobre o sistema de numeração, o surgimento e utilização da fração no Egito Antigo, sem esquecer, é claro que nas civilizações antigas (babilônios, gregos, hindus e chineses) também tiveram seus sistemas de numeração e fizeram uso de frações. Segundo BOYER (2012), o entendimento de número para os egípcios significava o domínio dos números naturais e frações unitárias; enquanto para os babilônios, as frações sexagesimais; e para os gregos, apenas os inteiros eram tidos como números.

Os egípcios usavam dois sistemas de numeração: o hieroglífico (usado em monumentos) e o hierático (usado nos papiros).

Com o passar do tempo os egípcios começaram a utilizar, principalmente, frações para a remarcação das terras que eram inundadas pelas cheias do Nilo.

> Segundo Boyer (1996), o processo de mensuração das terras consistia em estirar cordas e verificar o número de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. Havia uma unidade de medida assinada na própria corda. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno.

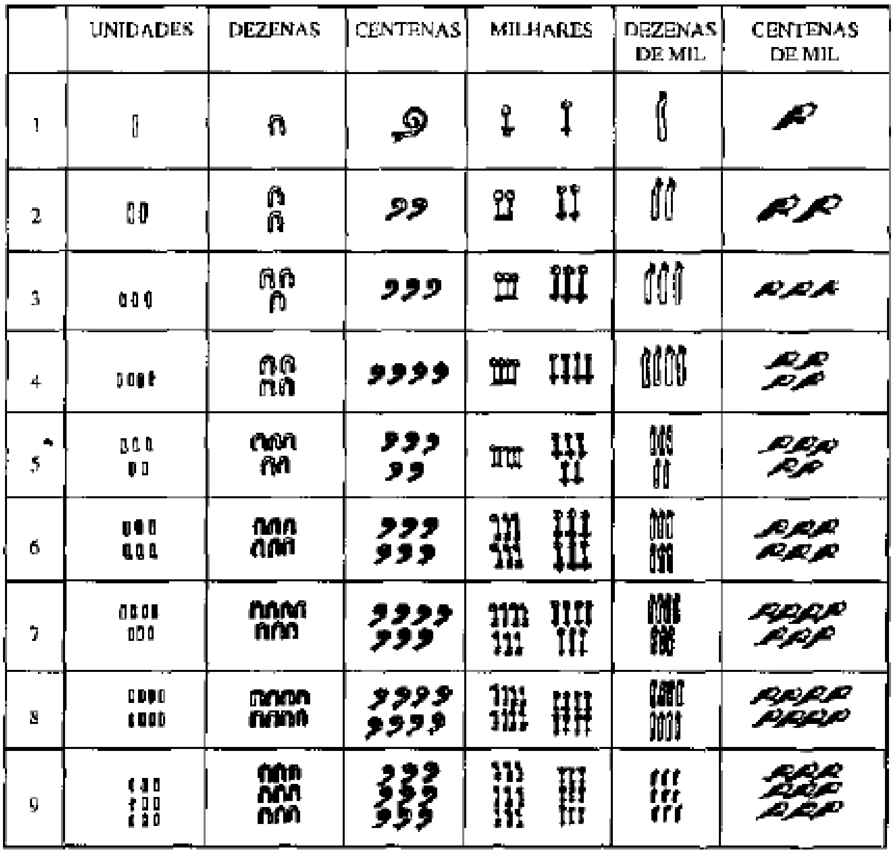
Segundo Dias e Moretti (2011), para medir, os esticadores utilizavam cordas que possuíam diversos nós, cuja distância entre dois nós consecutivos media, aproximadamente, 45 cm. Porém, em alguns momentos essa medição nem sempre representava um número inteiro, o que levou os egípcios a fracionar a unidade de medida. Daí, ao fracionar a unidade, ou seja, construir o conceito de fração, acabou por proporcionar a expansão do campo dos números naturais ao campo dos números racionais.

Assim, dentro do processo histórico, a fração passou pelo aperfeiçoamento de algumas civilizações, entre elas, os babilônios, os gregos, os hindus e árabes.

Frações Unitárias

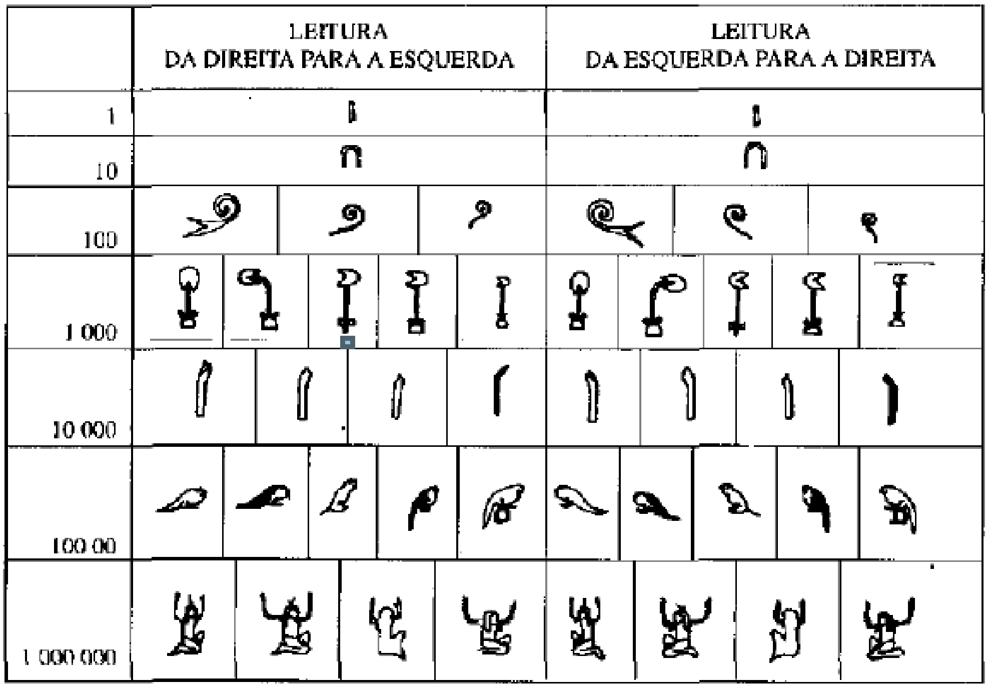
Com o advento da escrita em papiros, os escribas egípcios desenvolveram o sistema hierático, que era um sistema cifrado com símbolos diferentes para unidade, dezena, centena, e assim por diante. O sistema de numeração egípcio apenas agrupava a figura quantas vezes indicasse a quantidade contada, sendo visto como um sistema de agrupamento simples que utilizava o princípio aditivo e uma base decimal. Segundo Ifrah (1997), os sinais numéricos inferiores a 10.000 que figuram no Grande papiro Herris, trata-se de um importante manuscrito da XX dinastia, e podemos observar tais representações nas figuras 1, 2 e 3 abaixo.

Figura 8 – Sistema de numeração hierático



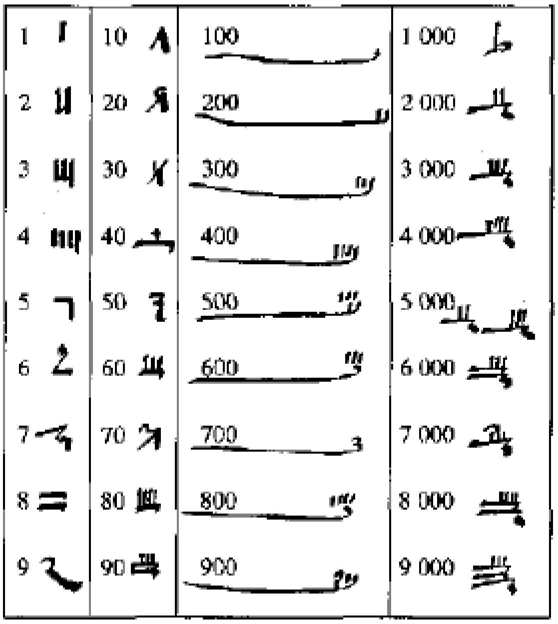
Fonte: Ifrah (1997, p 346)

Figura 9 – Sistema de numeração hierático



Fonte: Ifrah (1997, p 342)

Figura 10 – Sistema de numeração hierático



Fonte: Ifrah (1997, p 354)

Provavelmente, os egípcios tenham sido os primeiros a inserir frações em seu sistema de numeração, porém, tal utilização fora também praticada por outros povos antigos. Segundo Mol (2013), os egípcios admitiam apenas frações unitárias, ou seja, frações com numeradores 1, com exceção da fração 2/3.

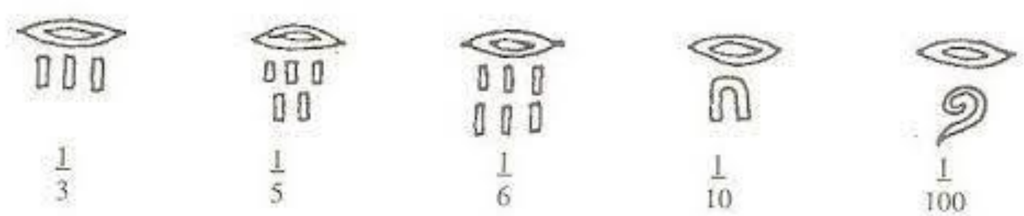
Boyer (1974) descreve que os antigos egípcios atribuíam um papel especial a fração 2/3 nos cálculos aritméticos, de modo que para achar o terço de um número primeiramente achavam os dois terços e depois tomavam a metade disso.

> “[...] conheciam e usavam o fato de 2/3 da fração unitária 1/p ser a soma de duas frações unitárias 1/2p e 1/6p; também tinham percebido que o dobro da fração 1/2p é a fração 1/p. No entanto, parece que tirando a fração 2/3, os egípcios consideravam a fração racional própria da forma m/n não como elementar, mas como parte de um processo incompleto. A fração 3/5, para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como a soma de três frações unitárias 1/3, 1/5 e 1/15.” (BOYER, 1974, p. 10).

Segundo Boyer (1974), o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo $\frac{2}{n}$ como soma de frações unitárias, sendo n os valores ímpares de 5 a 101. Por exemplo, o equivalente de $\frac{2}{n}$ é dado como $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{15}$; $\frac{2}{11}$ é dado como $\frac{1}{6}$ mais $\frac{1}{66}$; e $\frac{2}{15}$ expressa como $\frac{1}{10}$ mais $\frac{1}{30}$. Em seguida, também possui uma pequena tabela para expressar as frações da forma $\frac{n}{10}$, sendo n um valor entre 1 e 9, com o auxílio das frações unitárias e da fração $\frac{2}{3}$. A fração $\frac{9}{10}$, por exemplo, é decomposta como $\frac{1}{30}$ mais $\frac{1}{5}$ mais $\frac{2}{3}$.

Ifrah (1997) relata que os egípcios, para representar as frações de um número, serviam-se, de modo geral, do hieróglifo da boca (com o sentido de “parte”), colocando-o sobre o número que representa o denominador da fração. E quando esse denominador inteiro não podia levar o sinal da “boca”, inscreviam o excedente na sequência, conforme figuras a seguir.

Figura 11 – Notação hieroglífica egípcia das frações unitárias



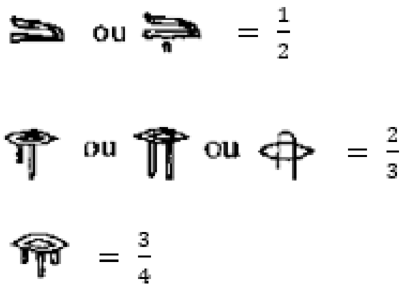
Fonte: Ifrah (1997, p. 349)

Figura 12 – Notação hieroglífica egípcia das frações unitárias

Fonte: IFRAH (1997, p. 349)

Ainda segundo Ifrah (1997), as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ eram representadas por sinais especiais, vejamos figura a seguir.

Figura 13 – Notação hieroglífica egípcia das frações unitárias



Fonte: IFRAH, 1997, p. 349)

O Algoritmo de Sylvester

Segundo Eves (2011) e Silva (2013), o matemático inglês J. J. Sylvester (1814 – 1897) estabeleceu um procedimento para expressar univocamente qualquer fração racional entre 0 e 1 como soma de frações unitárias. Em 1880 ele apresentou a demonstração que possibilitaria escrever qualquer fração $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros positivos e a < b, como soma de um número finito de frações unitárias com denominadores distintos.

Tal algoritmo segue os passos seguintes:

1. Achar a fração unitária menor que a fração dada, isto é, aquela com menor denominador;

2. Subtrair essa fração unitária da fração dada;

3. Achar a maior fração unitária menor que a diferença obtida

anteriormente. Para achar essa maior fração unitária menor que uma fração dada, divida o denominador desta última pelo seu numerador e tome o sucessor do quociente como denominador da fração unitária procurada;

4. Subtrair novamente, e continuar o processo até chegar a uma fração unitária como resultado da subtração.

Vejamos a demonstração desse algoritmo:

Consideremos a maior fração $\frac{1}{m}$ tal que $\frac{1}{m} \leq \frac{a}{b}$, o que é equivalente a

$$\frac{1}{m} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{m-1}.$$

Fazendo a = 1 e tomando b = m, fica claro e nada mais se tem a fazer. Caso contrário,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{m} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} + \frac{am-b}{bm} .$$

No entanto, nas condições anteriores, $\frac{1}{m} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{m-1}$, temos $am - b < a$, pois

$$\frac{1}{m} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{m-1} \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{1}{m-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{a(m-1)-b}{b(m-1)} < 0$$

$\Rightarrow am - a - b < 0$ (pois, $b > 0$ e $m - 1 > 0$, o que implica que $b(m-1) > 0$.

E consequentemente,

$$am - b < a.$$

Desta forma, percebemos, facilmente, que a nova fração obtida através do algoritmo tem numerador menor do que a, ou seja, $\frac{am-b}{bm} < \frac{a}{b}$ e $am - b < a$.

De forma geral, aplicando tal algoritmo à fração $\frac{am-b}{bm}$, significa procurar a maior fração unitária $\frac{1}{p}$, tal que $\frac{1}{p} < \frac{am-b}{bm}$. Conforme visto anteriormente, não podemos obter uma soma de frações unitárias iguais, isto é, obter $\frac{1}{p} = \frac{1}{m}$. Pois, $\frac{am-b}{bm} < \frac{1}{m}$.

Como $am - b < a$ e a < b, então $am - b < b$. Logo,

$$\frac{am-b}{bm} < \frac{b}{bm} = \frac{1}{m}.$$

Daí, conclui-se que o algoritmo de Sylvester, aplicado em uma fração qualquer $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros positivos e a < b, sempre resulta em número finito de passos, uma vez que a sequência de numeradores obtidos é decrescente, e cada fração unitária obtida é sempre menor do que as anteriores e, consequentemente, distintas entre si.

Vejamos como exemplo, expressar a fração $\frac{17}{20}$ em frações unitárias.

Usando o Algoritmo de Sylvester, é necessário primeiramente, encontrar a maior fração com numerador 1, ou seja, fração do tipo $\frac{1}{m}$, e menor que $\frac{17}{20}$.

Daí, temos $\frac{1}{m} < \frac{17}{20} \Longrightarrow 20 < 17m$. Assim, m = 2 é o menor inteiro positivo para o qual a desigualdade se verifica.

Seguindo o processo, subtraindo $\frac{1}{2}$ da fração $\frac{17}{20}$, temos: $\frac{1}{m} < \frac{17}{20} - \frac{1}{2} = \frac{7}{20}$. Repetindo o processo anterior, temos que $\frac{1}{m} < \frac{7}{20} \Longrightarrow 20 < 7m$; neste caso, a escolha deve ser m = 3. Como $\frac{7}{20} - \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$ é unitária, então

$$\frac{17}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{60}.$$

A Conjectura de ERDOS-STRAUS

Paul Erdos (1913 – 1996), matemático húngaro e Ernst Gabor Straus (1922 – 1983), matemático alemão-americano, propuseram, em 1948, a conjectura de Erdos-Straus, onde afirmam que para qualquer número inteiro positivo $\mathrm{m} \geq 2$, pode-se expressar a fração $\frac{4}{\mathrm{m}}$ como soma de três frações unitárias do tipo $\frac{1}{\mathrm{n}}$. Ou seja, a equação

$$\frac{4}{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{\mathrm{z}}$$

possui solução com x, y e z inteiros positivos.

Exemplos:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10},$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} + \frac{1}{210},$$

$$\frac{4}{19} = \frac{1}{6} + \frac{1}{38} + \frac{1}{57}.$$

Por outro lado, sempre que forem conhecidos os inteiros positivos x, y e z tais que

$$\frac{4}{m} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

então conheceremos uma solução para qualquer múltiplo de m:

$$\frac{4}{mn} = \frac{1}{xn} + \frac{1}{yn} + \frac{1}{zn}.$$

Exemplo:

Observemos a decomposição da fração $\frac{4}{6}$,

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

Vejamos a decomposição de uma fração múltipla de $\frac{4}{6}$,

$$\frac{4}{3x6} = \frac{1}{3x2} + \frac{1}{3x10} + \frac{1}{3x15} = \frac{4}{18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}.$$

Assim como acontece com muitos dos problemas em aberto com enunciados simples, apareceram e/ou aparecem soluções, mesmo que parciais. Dos casos mais conhecidos temos, Mordell (1968) que demonstrou que a conjectura de Erdos-Straus era sempre verificada para qualquer inteiro m > 1, exceto, possivelmente, quando o m é primo e congruente com 1^2; 11^2; 13^2; 17^2; 19^2 ou 23^2 mod 840; e Swett (1999) que estabeleceu a validez da conjectura de Erdod-Straus para todos os m menor do que ou igual a 10^{14}.

No entanto, não há nenhuma prova largamente aceita pela comunidade matemática, e tal conjectura ainda se encontra sem uma demonstração ou um contraexemplo.

E, caso o leitor ache que seria uma boa ideia recorrer a um computador para tentar encontrar um tal contraexemplo, convém que saiba que pesquisas computacionais verificaram a veracidade da conjectura até $m \leq 10^{17}$.

APÊNDICE B – BINÔMIO DE NEWTON

Neste capítulo apresentaremos, mesmo sem grandes aprofundamentos, a definição de números binomiais e a organização desses números em um dispositivo denominado triângulo de Pascal, bem como o desenvolvimento do Binômio de Newton. Esse triângulo de Pascal tem relação direta com o triângulo harmônico de Leibniz, pois a partir deste ele definiu seu triângulo.

Números Binomiais

Definição 1. Sendo n, um número inteiro positivo, com $n \geq 2$. O fatorial de n (indicado por n!) corresponde ao produto dos n primeiros inteiros positivos, escrito de n até 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Exemplo 1: vejamos

6! = 6 . 5 . 4 , 3 . 2 . 1 = 720.

8! = 8 . 7 . 6 . 5 . 4 , 3 . 2 . 1 = 40320.

Observação 1: Em análise combinatória, o número $C_{n,p}$ significa o total de combinações de p elementos que podem formar de um conjunto de n elementos.

Definição 2. Sejam n e p inteiros não negativos, com $n \geq p$. Definimos número binomial de n sobre p, ou simplesmente, coeficiente binomial, o número representado por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,p}$, onde n e p, respectivamente, representam a ordem e a classe do número binomial. Ou seja, o cálculo do número binomial é o mesmo para calcular o total de combinações.

Exemplo 2: Dado um conjunto com 5 elementos, quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar?

Solução:

Observe que ao formar um conjunto a ordem dos elementos não é importante. Veja que os conjuntos A = {a, b, c} e B = {b, a c} são iguais, pois apresentam os mesmos elementos. Assim, sendo n = 5 e p = 3, teremos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

Logo, podemos formar 10 subconjuntos com 3 elementos cada.

Observação 2: Como consequência imediata da *definição 2*, dado o inteiro não negativo n, segue que

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.\,n!} = 1, \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!.\,(n-1)!} = n \text{ e } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,.0!} = 1 \text{ para } n \geq 1.$$

Definição 3. Sejam dois números binomiais de mesma ordem (índice superior) n. Dizemos que esses números binomiais são complementares quando a soma das classes (índice inferior) é igual à ordem (índice superior) n. Ou seja, sendo $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ esses números binomiais complementares, então, p + n – p = n.

Observação 3: Pela *definição 2*, $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!.[n-(n-p)]!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$.

No entanto, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$. Daí, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Ou seja, dois números binomiais complementares são iguais.

Exemplo 3: Vejamos que $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.(6-2)!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6!}{4!.(6-4)!} = \binom{6}{4}$.

Triângulo de Pascal

Definido os números binomiais, feito anteriormente, mostraremos o triângulo de pascal, construído com esses números binomiais dispostos em ordem específica, levando em consideração que os de mesma ordem, situando-se na mesma linha, enquanto os de mesma classe, situam-se na mesma coluna.

Segundo Eves (2011), Al-Kashi foi o primeiro autor Árabe que conhecemos a lidar com o teorema binomial em sua forma de “triangulo de Pascal”.

> “[...] Como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triangulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas das propriedades do triangulo, este se tornou conhecido como triângulo de Pascal. Uma das manifestações mais antigas aceitáveis do princípio de indução matemática aparece no tratado de Pascal sobre o triangulo.” (EVES, 2011. Pág. 365)

Neste triângulo, os coeficientes binomiais de mesma ordem (índice superior) fazem parte da mesma linha e os de mesma classe (índice inferior) fazem parte da mesma coluna. Observe que as linhas são numeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita. A seguir, o Triângulo de Pascal com as primeiras linhas, representadas pelos respectivos números binomiais.

Figura 14 – Triângulo de Pascal expresso por números binomiais

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/triangulo-pascal.htm

No entanto, a figura abaixo apresenta o mesmo triângulo de Pascal com cada número binomial substituído pelo seu respectivo valor numérico.

Figura 15 – Triângulo de Pascal expresso com os valores dos números binomiais

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/triangulo-pascal.htm

Observe, na figura 7, que cada linha pode ser lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Visto que o resultado é exatamente o mesmo. Ou seja, há simetria nos números binomiais que compõem o triângulo de pascal. Esta simetria é referenciada na *definição 3*.

Em seguida veremos a Relação de Stifel e o Teorema das linhas que são bem conhecidos e utilizados como aplicação do triângulo de Pascal.

Teorema 1 (Relação de Stifel): Dado *n* inteiro não negativo, com *n* ≥ *k*, temos a identidade

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Demonstração:

Pela *definição 2*, temos que

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

$$= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{[p + (n-p)](n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

□

Exemplo 4. De um conjunto de 10 maçãs, sendo que uma está estragada, quantos subconjuntos com 4 maçãs podemos formar?

Solução:

Observe que temos dois casos distintos para a formação desses subconjuntos de maçã:

I. Subconjuntos que não possuem a maça estragada:
Retirando uma maçã, teremos 9 maças, e destas escolheremos subconjuntos com 4 maçãs. Logo, $\binom{9}{4}$ maneiras distintas.

II. Subconjuntos que possuem a maçã estragada:
Incluindo a maça estragada em todos os subconjuntos, restam um total de 3 maçãs para serem escolhidas, no total de 9 maçãs. Isso poderá ser feito de $\binom{9}{3}$ maneiras distintas.
Daí, considerando os dois casos, temos $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$

A generalização do cálculo feito no *exemplo 2*, sobre o número de subconjuntos de um conjunto qualquer, com n elementos, se dará através do teorema a seguir, que trata da soma de todos os elementos de uma linha no triângulo de Pascal.

Teorema 2 (Teorema das linhas): Dado n inteiro não negativo, com n ≥ k, vale a identidade

$$\binom{\mathrm{n}}{0} + \binom{\mathrm{n}}{1} + \binom{\mathrm{n}}{2} + \cdots + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}} = 2^n.$$

A demonstração será dada utilizando-se o Princípio da Indução Matemática.

Demonstração: Observe que a igualdade é válida para n = 0, pois

$$\binom{\mathrm{n}}{0} = 1 = 2^0.$$

Suponhamos agora que a igualdade é válida para certo n, ou seja, a igualdade abaixo é válida

$$\binom{\mathrm{n}}{0} + \binom{\mathrm{n}}{1} + \binom{\mathrm{n}}{2} + \cdots + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}} = 2^n.$$

Vamos mostrar que a igualdade é válida para n + 1, ou seja, vamos mostrar que

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}.$$

Por hipótese de indução, temos

$$\binom{n}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] + \binom{n}{n} =$$

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] =$$

$= 2^n + 2^n = 2 \,.\, 2^n = 2^{n+1}$. (1)

Pela Relação e Stífel (*Teorema 1*), segue que

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1}$.

$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$.

.

.

.

$\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n}$.

Substituindo as somas anteriores em (1), obtemos

$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n} + \binom{n}{n} = 2^{n+1}$. (2)

Como

$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ e $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$

podemos escrever (2) da seguinte maneira:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}.$$

Daí, como a igualdade é válida para n e para n + 1, então, pelo Princípio da Indução Matemática é válida para todo n inteiro não negativo.

Portanto,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^{n}.$$

$\square$

Outra forma de demonstração do *Teorema 2 (Teorema das linhas)* é mostrada com auxílio do princípio fundamental da contagem. A saber, esse princípio

Exemplo 5. Dado um conjunto A com 10 elementos, quantos subconjuntos podemos formar?

Solução:

Conforme visto no *teorema das linhas*, o número de subconjuntos do conjunto A será dado por $2^{10} = 1024$. Portanto, o número de subconjuntos do conjunto A é 1024.

Desenvolvimento do Binômio de Newton

O Binômio de Newton ou Teorema Binomial é toda potência do tipo $(x+a)^n$, com *x* e *a* números reais quaisquer e *n* inteiro não negativo. Ao desenvolvermos uma potência inteira não negativa *n* do binômio $(x+a)$, surgem os coeficientes binomiais.

A sequência desses coeficientes numéricos do polinômio obtido é a mesma sequência dos números binomiais dispostas na linha *n* do triângulo de Pascal.

Vejamos abaixo, o desenvolvimento de algumas potências do binômio $(x+a)$, considerando os expoentes inteiros não negativos:

I. $(x+a)^0 = 1x^0a^0$;
II. $(x+a)^1 = 1x^1a^0 + 1x^0a^1$;
III. $(x+a)^2 = 1x^2a^0 + 2x^1a^1 + 1x^0a^2$;
IV. $(x+a)^3 = 1x^3a^0 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1x^0a^3$;

V. $(x + a)^4 = 1x^4a^0 + 4x^3a^1 + 6x^2a^2 + 4x^1a^3 + 1x^0a^4.$

E, assim por diante, até a n-ésima potência

$$(x + a)^n = 1x^na^0 + nx^{n-1}a^1 + \cdots + nx^1a^{n-1} + 1x^0a^n.$$

Por outro lado, podemos expressar os coeficientes de cada polinômio, escritos anteriormente, através dos números binomiais.

I. $(x + a)^0 = \binom{0}{0}x^0a^0;$

II. $(x + a)^1 = \binom{1}{0}x^1a^0 + \binom{1}{1}x^0a^1;$

III. $(x + a)^2 = \binom{2}{0}x^2a + \binom{2}{1}x^1a^1 + \binom{2}{2}x^0a^2;$

IV. $(x + a)^3 = \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0a^3;$

V. $(x + a)^4 = \binom{4}{0}x^4a^0 + \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^1a^3 + \binom{4}{4}x^0a^4.$

E, assim por diante, até a n-ésima potência

$$(x + a)^n = \binom{\mathrm{n}}{0}x^na^0 + \binom{\mathrm{n}}{1}x^{n-1}a^1 + \cdots + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}x^1a^{n-1} + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}}x^0a^n.$$

No entanto, podemos escrever o Teorema Binomial da seguinte forma:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}x^{n-k}a^k.$$

Demonstração:

Considerando a expansão binomial acima, utilizando a indução sobre *n* e fazendo *n = 0*, tem-se: $(x + a)^0 = \binom{0}{0}x^0a^0 = 1$, isto é, a igualdade é satisfeita para *n* = 0.

Agora, para *n = 1*, tem-se:

$$(x+a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1 = x + a.$$

Desta forma, a igualdade é válida para *n = 1.*

Supondo que a expansão binomial seja satisfeita para *n*, inteiro maior do que ou igual a 1, deverá ser satisfeita também para *n + 1*.

Pela hipótese de indução, tem-se:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k.$$

Para n + 1, tem-se:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a).(x+a)^n$$

Daí:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k.$$

Fazendo a distributividade em relação à soma, tem-se:

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + x \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k + a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k + a^{k+1}.$$

Reescrevendo, tem-se:

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} a^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} a^k + a^{k+1}.$$

O que é equivalente a:

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^{n-k+1} a^k + a^{k+1}.$$

Pela relação de Stifel, tem-se:

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{\mathrm{n}+1}{\mathrm{k}} x^{n-k+1} a^{k} + a^{k+1}.$$

Organizando e reescrevendo o somatório, tem-se:

$$(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} a^{k}.$$

Assim a relação também é válida para n + 1.

Logo, a relação

$$(x+a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{\mathrm{n}+1}{\mathrm{k}} x^{n+1-k} a^{k}.$$

é válida para qualquer inteiro não negativo.

Observe que através do desenvolvimento binomial, que é uma das aplicações dos números binomiais, podemos ver o resultado do *Teorema 2*. Assim, fazendo $x = a = 1$, temos

$$(1+1)^{n} = 2^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} (1)^{n-k} (1)^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}.$$

Vejamos abaixo um exemplo prático de aplicação do Binômio de Newton.

Exemplo 6. Uma moeda, não viciada, é lançada 5 vezes e observa-se a face voltada para cima. Qual a probabilidade de obter exatamente 3 caras?

Solução:

Denotando por *c* e *q*, respectivamente, a probabilidade de se obter cara e coroa em um lançamento dessa moeda, o desenvolvimento binomial para *n = 5* será dada por:

$$(c+q)^5 = \binom{5}{0} c^5 q^0 + \binom{5}{1} c^4 q^1 + \binom{5}{2} c^3 q^2 + \binom{5}{3} c^2 q^3 + \binom{5}{4} c^1 q^4 + \binom{5}{5} c^0 q^5.$$

Observe que cada termo neste desenvolvimento representa o cálculo da probabilidade de ocorrência de tantas caras e coroas, de tal forma que sua soma resulte em 5.

Desta forma, a probabilidade de se obter exatamente 3 caras é dada calculando-se o valor do quarto termo, no desenvolvimento acima. Neste caso, tem-se 3 caras e 2 coroas.

Sabemos que a probabilidade *c* ou *k* de se obter cara ou coroa em um lançamento dessa moeda é igual a $\frac{1}{2}$. Daí, substituindo os valores de *c* e *k* no quarto termo do desenvolvimento, tem-se:

$$p = \binom{5}{3} c^2 k^3 = 10.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10.\frac{1}{4}.\frac{1}{8} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência de exatamente 3 caras em 5 lançamentos dessa moeda é $\frac{5}{16}$, ou seja, 31,25%.