



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ EDILSON FERREIRA FILHO

**DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO
SIMÉTRICO**

FORTALEZA

2023

JOSÉ EDILSON FERREIRA FILHO

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO
SIMÉTRICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F441d Ferreira Filho, José Edilson.

Desigualdades geométricas para hipersuperfícies com bordo simétrico / José Edilson Ferreira Filho. – 2023.

49 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Desigualdades de Alexandrov–Fenchel. 2. Hipersuperfícies convexas com bordo. 3. Hipersuperfícies convexas com quinas. I. Título.

CDD 510

JOSÉ EDILSON FERREIRA FILHO

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO
SIMÉTRICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 30 / 05 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Celso dos Santos Viana
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pelo conhecimento e força durante toda minha caminhada.

À minha mãe, que durante toda minha vida me proporcionou todas as condições para ter uma educação de qualidade, sem a senhora esse sonho não teria se realizado.

À minha namorada e companheira Danielen Rodrigues que esteve ao meu lado numa fase bem difícil, obrigado por todo seu apoio, carinho e por todas as palavras de conforto, obrigado por cada abraço dado quando mais precisei, você é incrível! Eu te amo muito!

Aos meus irmãos por todo apoio na minha trajetória, vocês são incríveis.

Ao meu orientador Frederico Girão, pela orientação, conversas e discursões frutíferas que foram essenciais para a construção deste trabalho.

Aos professores Abdênago Barros, Antonio Caminha, Barnabé Pessoa e Celso Viana por terem aceitado participar da banca.

Aos meus amigos da UFPI e da UFC, em especial ao Diego Silva, Davi Ribeiro, Antonio Aguiar, Tiago Gadelha, André Costa, José Danuso, Wesley Vieira, Atecio Alves, Sandoel Vieira, José Marcio, João Vinicius e Erisvaldo Veras. A quem eu não citei, peço perdão, pois foram muitos amigos ao longo desta caminhada. Vocês foram e são essenciais amizades que construí durante esses anos e levarei para toda a vida.

Ao corpo docente da Pós-graduação em Matemática da UFC pelos conhecimentos repassados e dedicação na pesquisa e no ensino da matemática.

À Andrea e à Jessyca pela competência e agilidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“O essencial faz a vida valer a pena.”
(ANDRADE, 2020)

RESUMO

Nesta tese, obtemos versões das desigualdades de Alexandrov-Fenchel e Alexandrov-Fenchel com peso para um subconjunto da classe de hipersuperfícies com bordo em formas espaciais formada pelas hipersuperfícies convexas cujo bordo é simétrico em relação a alguma isometria do espaço ambiente. Isso é feito estendendo-se, para hipersuperfícies convexas com quinas, desigualdades conhecidas para hipersuperfícies convexas suaves e fechadas.

Palavras-chave: desigualdades de Alexandrov-Fenchel; hipersuperfícies convexas com bordo; hipersuperfícies convexas com quinas.

ABSTRACT

In this thesis, we obtain versions of the Alexandrov–Fenchel and weighted Alexandrov–Fenchel inequalities for a subset of the class of hypersurfaces with boundary in space forms formed by the convex hypersurfaces whose boundary is symmetric with respect to some isometry of the ambient space. This is done by extending, to convex hypersurfaces with corners, inequalities that are known to hold for closed and smooth convex hypersurfaces.

Keywords: Alexandrov–Fenchel inequalities; convex hypersurfaces with boundary; convex hypersurfaces with corners.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Hipersuperfície com quinas	15
Figura 2 – Função ângulo	15
Figura 3 – Hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico	18
Figura 4 – Σ_t em três partes	33
Figura 5 – γ bordo planar	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIES CONVEXAS NÃO SUAVES	20
3	PROVA DOS TEOREMAS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM QUINAS	32
3.1	Prova dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2	32
3.2	Prova dos Teoremas 1.0.3–1.0.7	37
4	DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIE COM QUINAS PLANARES	41
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

Seja Σ^{n-1} uma variedade diferenciável conexa, orientável e fechada (compacta, sem bordo) e seja $\psi : \Sigma \rightarrow M^n$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície mergulhada convexa, onde $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pode ser o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o espaço hiperbolico \mathbb{H}^n com curvatura seccional -1 ou a esfera \mathbb{S}^n com curvatura seccional 1 ; quando $M = \mathbb{S}^n$, assumimos que $\psi(\Sigma)$ está contida em um hemisfério.

Como M é simplesmente conexa e Σ é uma hipersuperfície orientável e conexa, $M \setminus \Sigma$ possui duas componentes conexas, a *região interna* e a *região externa*. Quando $M = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{H}^n , a região interna é a componente limitada de $M \setminus \Sigma$; quando $M = \mathbb{S}^n$, a região interna é a componente de $M \setminus \Sigma$ que está contida em um hemisfério. Também nos referimos à região interna por *região delimitada por Σ* .

Seja ξ o vetor normal unitário ao longo de Σ que aponta para fora. Denotamos por A o operador de forma de Σ (com respeito a ξ), isto é, o endomorfismo do fibrado tangente $T\Sigma$ que, para cada $p \in \Sigma$, é dado por

$$A(V) = D_V \xi, \quad \forall V \in T_p \Sigma,$$

onde D denota a conexão de Levi-Civita de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Os autovalores de A são chamados de curvaturas principais de Σ . Para $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, denotamos por H_j a j -ésima curvatura média normalizada de Σ , isto é,

$$H_j = \frac{\sigma_j}{C_{n-1}^j},$$

onde σ_j é a j -ésima função simétrica elementar das curvaturas principais de Σ . Por conveniência, se j é um inteiro tal que $j \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$, definimos $H_j = \sigma_j = 0$.

A hipersuperfície Σ é dita *convexa* se suas curvaturas principais são não negativas; ela é dita *estritamente convexa* se suas curvaturas principais são positivas; ela é dita *k-convexa* se $\sigma_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$; e ela é dita *estritamente k-convexa* se $\sigma_i > 0$ para $i = 1, \dots, k$. Uma hipersuperfície (estritamente) 1-convexa é também chamada de (*estritamente*) *média convexa*.

Quando $M = \mathbb{H}^n$, existe a noção de convexidade horoesférica. A hipersuperfície Σ é dita *horoesférica convexa* se suas curvaturas principais são maiores ou iguais a 1 .

Denotamos por Ω a região de M delimitada por Σ .

Seja $p \in \Omega$. A hipersuperfície Σ é dita *estrelada com respeito a p* se para todo $q \in \Sigma$, o interior do segmento geodésico minimizante ligando p a q está contido em Ω .

Fixamos uma origem em M e denotamos por r a distância geodésica para essa origem fixada. Consideramos a função $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\rho = \begin{cases} r^2, & \text{se } M = \mathbb{R}^n; \\ \cosh(r), & \text{se } M = \mathbb{H}^n; \\ \cos(r), & \text{se } M = \mathbb{S}^n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Consideramos também a *função suporte* $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, a qual é dada por

$$p = \begin{cases} \langle \psi, \xi \rangle, & \text{se } M = \mathbb{R}^n; \\ \langle D\rho, \xi \rangle, & \text{se } M = \mathbb{H}^n \text{ ou } \mathbb{S}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Em toda a tese, a área de Σ (ou seja, o volume $(n-1)$ -dimensional de Σ) será denotada por $|\Sigma|$, e o volume de Ω (ou seja, o volume n -dimensional de Ω) será denotado por $\text{Vol}(\Omega)$.

Consideramos ainda a quantidade

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \rho \, d\Sigma$$

e a chamamos de *área com peso* de Σ .

Seja $K \subset M$. Dizemos que K é *geodesicamente convexo* se para quaisquer $p, q \in K$, qualquer segmento geodésico minizante ligando p e q está contido em K . O subconjunto K é chamado de *corpo convexo* se é compacto, geodesicamente convexo e possui interior não vazio.

A seguir, listamos algumas desigualdades geométricas para hipersuperfícies suaves e fechadas. O principal objetivo desta tese é obter, para uma certa classe de hipersuperfícies suaves com bordo, versões destas desigualdades.

Iniciaremos com o caso em que o ambiente é o espaço Euclidiano.

As desigualdades de Alexandrov-Fenchel, [1] e [2], afirmam que se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície convexa, então

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_k \, d\Sigma \right)^{n-k} \geq \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_{k-1} \, d\Sigma \right)^{n-k-1}, \quad (1.3)$$

para $k \in \{1, \dots, n-1\}$, onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Ademais, para $k \in \{1, \dots, n-1\}$, a igualdade ocorre em (1.3) se, e somente se, Σ é uma esfera.

Em [11], Guan e Li mostraram que as desigualdades (1.3), e também o resultado de rigidez, valem quando Σ é estrelada e k -convexa.

Segue-se das desigualdades (1.3) que

$$\int_{\Sigma} H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}, \quad (1.4)$$

para $k \in \{1, \dots, n-1\}$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera.

O caso $k = 1$ de (1.4), ou seja,

$$\int_{\Sigma} H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (1.5)$$

é um passo fundamental na prova da desigualdade de Penrose para gráficos, obtida por Lam em [15] (veja também [19] e [23]). Mais geralmente, os casos de (1.4) para os quais k é ímpar foram usados de forma crucial para estabelecer, para gráficos, versões da desigualdade de Penrose no contexto da chamada massa de Gauss-Bonnet-Chern [6] (veja também [30] e [17]).

Em [14], Kwong e Miao mostraram que se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $H_k > 0$ em Σ , para algum $k \in \{2, \dots, n-1\}$, então

$$\int_{\Sigma} \rho H_k d\Sigma \geq \int_{\Sigma} H_{k-2} d\Sigma. \quad (1.6)$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera centrada na origem. Como consequência, obtemos que se $k \in \{2, \dots, n-1\}$ e $H_k > 0$ em Σ , então

$$\int_{\Sigma} \rho H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-k+1}{n-1}}, \quad (1.7)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera centrada na origem.

As desigualdades (1.7) podem ser vistas como versões com peso das desigualdades (1.4). Desta forma, uma questão natural é se (1.7) vale para $k = 1$.

Em [10], Girão e Rodrigues mostraram que se Σ é estrelada e estritamente média convexa, então

$$\int_{\Sigma} \rho H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (1.8)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera centrada na origem.

Consideramos agora o caso em que o ambiente é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n .

Em [18], de Lima e Girão mostraram a seguinte desigualdade de Alexandrov-Fenchel com peso: se Σ é uma hipersuperfície em \mathbb{H}^n a qual é estrelada e estritamente média convexa, então

$$\int_{\Sigma} \rho H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right]. \quad (1.9)$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem.

A desigualdade (1.9) foi conjecturada por Dahl, Gicquaud e Sakovich em [4], onde eles encontraram uma fórmula explícita da massa de um gráfico assintoticamente hiperbólico. A desigualdade (1.9) era então a única coisa a ser mostrada para provar a desigualdade de Penrose neste contexto.

Um dos ingredientes fundamentais para a prova de (1.9) é uma desigualdade similar, provada por Brendle, Hung e Wang em [3], cujo enunciado é o seguinte: se Σ é uma hipersuperfície em \mathbb{H}^n a qual é estrelada e estritamente média convexa, então

$$\int_{\Sigma} \rho H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \rho d\Sigma \right], \quad (1.10)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem.

Note que, como a divergência do campo $D\rho$ é $n\rho$, a desigualdade (1.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Sigma} \rho H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{\omega_{n-1}} n \int_{\Omega} \rho d\Omega \right], \quad (1.11)$$

onde Ω é a região limitada por Σ .

Em [7], Ge, Wang e Wu definiram a massa de Gauss-Bonnet-Chern para variedades assintoticamente hiperbólicas. Neste contexto, eles mostraram que, para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ímpar, vale a seguinte desigualdade de Alexandrov-Fenchel com peso: se Σ é uma hipersuperfície horoesférica convexa em \mathbb{H}^n , então

$$\int_{\Sigma} \rho H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}} \right]^{\frac{k+1}{2}}. \quad (1.12)$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem. Isto foi obtido por meio de um argumento de indução (de j para $j+2$), tendo como base da indução a desigualdade (1.9). A prova de (1.12) para qualquer $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ apareceu em [13].

A função peso ρ na desigualdade (1.12) aparece naturalmente na definição de massa para variedades assintoticamente hiperbólicas, [12] e [7] (veja também [22]); portanto, sua aparição em (1.12) não é uma surpresa. Em \mathbb{H}^n , no entanto, existe a seguinte desigualdade de Alexandrov-Fenchel sem peso: se Σ é uma hipersuperfície horoesférica convexa em \mathbb{H}^n , então, para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$\int_{\Sigma} H_k d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2}{k}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{k(n-1)}} \right]^{\frac{k}{2}}, \quad (1.13)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica. A Desigualdade (1.13) foi conjecturada em [5], onde foi provada quando k é par. Uma prova para qualquer $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ foi dada em [32]. Um caso de (1.13) que nos interessa de forma especial é quando $k = 2$, ou seja,

$$\int_{\Sigma} H_2 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right) + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} \right], \quad (1.14)$$

que foi provado válido, juntamente com a rigidez, se Σ for estrelada e 2-convexa (veja [16]).

Quando $n = 3$, há ainda a seguinte desigualdade de Alexandrov-Fenchel sem peso: se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ é convexa, então

$$\int_{\Sigma} H_1 d\Sigma \geq 2\text{Vol}(\Omega) + 2\pi \ln \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} (H_1 + 1) d\Sigma \right). \quad (1.15)$$

A desigualdade (1.15), sem a caracterização da igualdade, foi obtida por Natário em [26]. Usando métodos diferentes, Vargas Pallete e Viana [27] mostraram a validade de (1.15) no caso em que Σ é horoesféricamente convexa; eles mostraram também (ainda supondo a convexidade horoesférica de Σ) que a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica.

Consideremos agora a esfera \mathbb{S}^n como nosso espaço ambiente.

Em [21], Makowski e Scheuer provaram que se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$ é convexa e não é um equador, então $\psi(\Sigma)$ está contida em um hemisfério aberto, delimitando um corpo convexo. Também em [21], foi mostrado que se Σ é uma hipersuperfície convexa em \mathbb{S}^n , então valem as desigualdades

$$\int_{\Sigma} H_1 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-2)}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.16)$$

e

$$\int_{\Sigma} H_2 d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right) \right]. \quad (1.17)$$

Além disso, eles mostraram que se qualquer uma das desigualdades acima for uma igualdade, então Σ é uma esfera geodésica.

Para enunciar nossa próxima desigualdade, precisaremos de algumas definições.

Foi provado em [21] (veja também [8]) que se Σ é estritamente convexa, então o fluxo pelo inverso da curvatura média (FICM) que tem Σ como hipersuperfície inicial converge, em tempo finito, para um equador. Este equador determina dois hemisférios abertos, com um deles, que denotamos por \mathcal{H}_{Σ} , contendo Σ . Associamos a cada hipersuperfície Σ suave e convexa

um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ do seguinte modo: seja $x(\Sigma)$ o centro de \mathcal{H}_Σ (olhando \mathcal{H}_Σ como uma bola geodésica). Nos referiremos a $x(\Sigma)$ pela terminologia *ponto associado a Σ via o FICM*. Uma hipersuperfície $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$ é dita *balanceada* se $x(\Sigma)$ coincide com a origem.

Girão e Pinheiro, em [9], provaram o seguinte: se Σ é uma hipersuperfície balanceada e estritamente convexa em \mathbb{S}^n , então

$$\int_{\Sigma} \rho H_1 d\Sigma \geq \left(\int_{\Sigma} -p d\Sigma \right) \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1 \right]. \quad (1.18)$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem. Note que, como a divergência do campo $D\rho$ é $-n\rho$, a desigualdade (1.18) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\int_{\Sigma} \rho H_1 d\Sigma \geq \left(n \int_{\Omega} \rho d\Omega \right) \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1 \right]. \quad (1.19)$$

Para obter versões das desigualdades acima para hipersuperfície com bordo, consideramos uma hipersuperfície fechada (possivelmente não suave) formada por duas cópias de tal hipersuperfície com bordo. Assim, precisamos estender as desigualdade geométricas acima para uma certa classe de hipersuperfícies não suaves, que definiremos a seguir.

Seja Σ^{n-1} uma variedade diferenciável, conexa, orientável e fechada, e seja $\gamma^{n-2} \subset \Sigma$ uma hipersuperfície suave e orientável tal que $\Sigma \setminus \gamma$ possui duas componentes conexas. Desta forma, existem subconjuntos $\hat{\Sigma}$ e $\check{\Sigma}$, de Σ , tais que:

- (i) $\Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$, onde $\hat{\Sigma}$ e $\check{\Sigma}$ são hipersuperfícies compactas com bordo;
- (ii) os interiores de $\hat{\Sigma}$ e $\check{\Sigma}$ são disjuntos;
- (iii) $\partial\hat{\Sigma} = \partial\check{\Sigma} = \gamma$.

Seja Σ como no parágrafo anterior. Dizemos que o mergulho topológico $\psi : \Sigma \rightarrow M$ é uma hipersuperfície com *quinas* (em inglês, *corners*) se

$$\psi|_{\hat{\Sigma}} : \hat{\Sigma} \rightarrow M \quad \text{e} \quad \psi|_{\check{\Sigma}} : \check{\Sigma} \rightarrow M$$

são hipersuperfícies mergulhadas suaves com bordo e, além disso

$$\psi|_{\gamma} : \gamma \rightarrow M$$

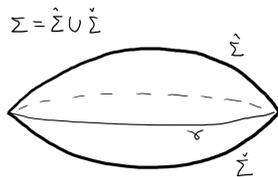
é uma subvariedade mergulhada suave. Podemos também nos referir a $\psi : \Sigma \rightarrow M$ como uma *hipersuperfície com quinas ao longo de γ* ou como uma *hipersuperfície com quinas ao longo da subvariedade γ de codimensão 2*. Além disso, podemos abusar da notação das duas formas a

seguir: podemos escrever apenas Σ ou $\Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$ para denotar uma hipersuperfície com quinas $\psi : \Sigma \rightarrow M$, e podemos denotar apenas por ψ as restrições de ψ a $\hat{\Sigma}$, $\check{\Sigma}$ ou γ (Figura 1).

A hipersuperfície com quinas $\psi : \Sigma \rightarrow M$ é dita convexa se $\psi(\Sigma)$ é o bordo de um corpo convexo $\Omega \subset M$.

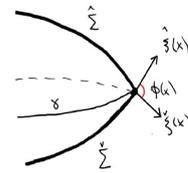
Associada à hipersuperfície convexa $\Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$ com quinas ao longo de γ , existe uma *função ângulo* $\phi : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma: $\phi(x)$ é o ângulo entre $\hat{\xi}(x)$ e $\check{\xi}(x)$, onde $\hat{\xi}$ e $\check{\xi}$ são os vetores unitários normais ao longo de $\hat{\Sigma}$ e $\check{\Sigma}$, respectivamente, que apontam para o exterior de Ω (Figura 2).

Figura 1 – Hipersuperfície com quinas



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Figura 2 – Função ângulo



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

O seguinte resultado é uma versão da desigualdade (1.5) para hipersuperfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.1. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2, então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (1.20)$$

O seguinte resultado é uma versão da desigualdade (1.8) para hipersuperfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.2. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2, então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} \rho H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (1.21)$$

O seguinte resultado é uma versão da desigualdade (1.9) para hipersuperfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.3. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2, então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} \rho H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right]. \quad (1.22)$$

O seguinte resultado é uma versão da desigualdade (1.11) para hipersuperfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.4. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2, então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} \rho H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{\omega_{n-1}} n \int_{\Omega} \rho d\Omega \right], \quad (1.23)$$

onde Ω é o corpo convexo delimitado por Σ .

O seguinte resultado é uma versão de (1.15) para superfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.5. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$ é uma superfície convexa com quinas ao longo de uma curva γ , então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \phi d\gamma \geq 2\text{Vol}(\Omega) + 2\pi \ln \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\Sigma}} (H_1 + 1) d\hat{\Sigma} + \frac{1}{2\pi} \int_{\check{\Sigma}} (H_1 + 1) d\check{\Sigma} + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \phi d\gamma \right) \quad (1.24)$$

O seguinte resultado é uma versão da desigualdade (1.16) para hipersuperfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.6. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2, então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-2)}{n-1}} - \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.25)$$

Para nosso próximo resultado, definiremos o que vem a ser balanceada para uma hipersuperfície convexa não suave.

Seja $\Sigma = \partial\Omega$, onde Ω é um corpo convexo. Dizemos que Σ é balanceada se existe uma sequência de hipersuperfícies suaves estritamente convexas $\{\Sigma_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ satisfazendo o seguinte:

- (i) A sequência $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, onde Ω_j é a região delimitada por Σ_j , converge para Ω na topologia de Hausdorff;
- (ii) A sequência $\{x(\Sigma_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$, onde $x(\Sigma_j)$ é o ponto associado com Σ_j via o FICM, converge para a origem.

O seguinte resultado é uma versão da desigualdade (1.18) para hipersuperfícies convexas com quinas.

Teorema 1.0.7. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície convexa e balanceada com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2, então*

$$\int_{\hat{\Sigma}} \rho H_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho H_1 d\check{\Sigma} + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \left(\int_{\hat{\Sigma}} -p d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} -p d\check{\Sigma} \right) \left[\left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1 \right]. \quad (1.26)$$

Note que os teoremas 1.0.1 – 1.0.7 não possuem um resultado de rigidez. Isso é devido ao processo de limite que usamos para obter as desigualdades (1.20) – (1.26).

Os teoremas 1.0.1–1.0.7 dão origem a versões das desigualdades (1.5), (1.8), (1.9), (1.11), (1.16) e (1.18) para uma classe de hipersuperfícies com bordo. A seguir, explicaremos os membros desta classe, que chamaremos de *hipersuperfícies convexas com bordo simétrico*.

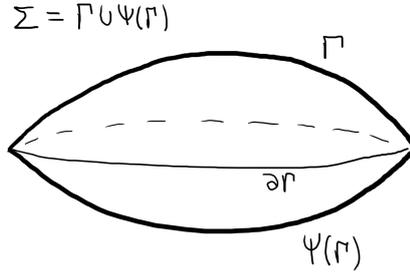
Seja Γ^{n-1} uma variedade diferenciável com bordo, seja $\psi : \Gamma \rightarrow M$ uma hipersuperfície com bordo mergulhada e suave, e seja $\Psi : M \rightarrow M$ uma isometria cuja restrição a $\partial\Gamma$ é uma bijeção sobre $\partial\Gamma$. Neste caso, dizemos que Γ é uma *hipersuperfície suave com bordo Ψ -simétrico*, ou apenas uma *hipersuperfície suave com bordo simétrico*.

Note que, partindo de uma hipersuperfície suave com bordo Ψ -simétrico, construímos uma hipersuperfície com quinas $\tilde{\psi} : \Sigma \rightarrow M$ da seguinte maneira: tomamos $\Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma}$, onde $\hat{\Sigma}$ e $\check{\Sigma}$ são cópias de Γ e seus bordos são identificados usando-se a seguinte aplicação:

$$(\psi|_{\partial\Gamma})^{-1} \circ \Psi \circ \psi|_{\partial\Gamma} : \partial\Gamma \rightarrow \partial\Gamma,$$

onde $\tilde{\psi}|_{\hat{\Sigma}} = \psi$ e $\tilde{\psi}|_{\check{\Sigma}} = \Psi \circ \psi$. Desta forma, $\tilde{\psi}$ é uma hipersuperfície com quinas ao longo de $\partial\Gamma$. Nós frequentemente abusamos notação e nos referimos a $\tilde{\psi} : \Sigma \rightarrow M$ por $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ (Figura 3).

Figura 3 – Hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Os seguintes corolários são consequências imediatas dos teoremas 1.0.1 – 1.0.7, respectivamente.

Corolário 1.0.8. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} H_1 d\Gamma + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$ e ϕ é a função ângulo da hipersuperfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Corolário 1.0.9. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} \rho H_1 d\Gamma + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$ e ϕ é a função ângulo da hipersuperfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Corolário 1.0.10. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} \rho H_1 d\Gamma + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right],$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$ e ϕ é a função ângulo da hipersuperfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Corolário 1.0.11. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} \rho H_1 d\Gamma + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{\omega_{n-1}} n \int_{\Omega} \rho d\Omega \right],$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$, ϕ é a função ângulo da hipersuperfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ e Ω é a região de \mathbb{H}^n delimitada por $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Corolário 1.0.12. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} H_1 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \phi d\gamma \geq 2\text{Vol}(\Omega) + 2\pi \ln \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} (H_1 + 1) + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \phi d\gamma \right),$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$, ϕ é a função ângulo da superfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ e Ω é a região de \mathbb{H}^3 delimitada por $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Corolário 1.0.13. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} H_1 d\Gamma + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \phi d\gamma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-2)}{n-1}} - \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$ e ϕ é a função ângulo da hipersuperfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Corolário 1.0.14. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície com bordo Ψ -simétrico, para alguma isometria $\Psi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Se $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é uma hipersuperfície balanceada e convexa, então*

$$2 \int_{\Gamma} \rho H_1 d\Gamma + \frac{1}{n-1} \int_{\gamma} \rho \phi d\gamma \geq \left(2 \int_{\Gamma} -p d\Gamma \right) \left[\left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1 \right],$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$ e ϕ é a função ângulo da hipersuperfície com quinas $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$.

Obtemos também, para hipersuperfícies convexas com quinas ao longo de uma subvariedade de codimensão 2, versões das desigualdades (1.3) e (1.6), para qualquer $k \in \{2, \dots, n-1\}$, e versões das desigualdades (1.14) e (1.17). Fomos capazes disso no caso em que γ está contida em alguma hipersuperfície totalmente geodésica $\Pi^{n-1} \subset M$ que passa pela origem e $\Psi : M \rightarrow M$ é a reflexão com respeito Π . Iremos apresentar esses resultados no capítulo 4.

2 DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIES CONVEXAS NÃO SUAVES

Seja Σ o bordo de um corpo convexo $\Omega \subset M$ (se $M = \mathbb{S}^n$, assumimos que Ω está contido em um hemisfério aberto).

Para cada $t \in [0, \varepsilon)$, seja Ω_t o conjunto dado por

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, \Omega) \leq t\}, \quad (2.1)$$

e denote $\partial\Omega_t$, a qual chamamos de *hipersuperfície paralela à distância t* , por Σ_t (se $M = \mathbb{S}^n$, tomamos ε de tal modo que Ω_t esteja contido em um hemisfério aberto, para todo $t \in [0, \varepsilon)$).

Nosso objetivo é estender as desigualdades (1.3), (1.6), (1.8), (1.11), (1.12), (1.13), (1.16), (1.17) e (1.19) para o caso em que Σ é não suave.

Seja m um inteiro positivo. Associado a cada espaço ambiente $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ e \mathbb{S}^n , definimos um espaço vetorial m -dimensional \mathcal{V}^m , do seguinte modo:

- (i) Se $M = \mathbb{R}^n$, então \mathcal{V}^m consiste dos polinômios, sobre \mathbb{R} , de grau no máximo $m - 1$.
- (ii) Se $M = \mathbb{H}^n$, então \mathcal{V}^m é o espaço gerado pelas funções

$$t \mapsto \cosh^{m-k-1}(t) \sinh^k(t),$$

para $k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$.

- (iii) Se $M = \mathbb{S}^n$, então \mathcal{V}^m é o espaço gerado pelas funções

$$t \mapsto \cos^{m-k-1}(t) \sin^k(t),$$

para $k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$.

Além disso, para cada M , a dimensão do subespaço \mathcal{V}^m é m .

Definição 2.0.1. A distância de Hausdorff d_H é definida do seguinte modo: para todos os conjuntos $K, L \subset M$,

$$d_H(K, L) = \inf\{t > 0, K \subset L_t \text{ e } L \subset K_t\}.$$

Teorema 2.0.2. Se $\Sigma = \partial\Omega$ para algum corpo convexo $\Omega \subset M^n$, então

- (i) A função de $[0, \varepsilon)$ em \mathbb{R} dada por $t \mapsto |\Sigma_t|$ é a restrição a $[0, \varepsilon)$ de algum elemento de \mathcal{V}^n .
- (ii) A função de $[0, \varepsilon)$ em \mathbb{R} dada por $t \mapsto \mathcal{W}(\Sigma_t)$ é a restrição a $[0, \varepsilon)$ de algum elemento de \mathcal{V}^{n+2} .

O item (i) do teorema 2.0.2 é um resultado conhecido, que pode ser provado usando-se a fórmula de Cauchy (veja, por exemplo [28]). Provaremos (i) e (ii) em duas etapas: primeiro, provaremos que eles são válidos para uma hipersuperfície suave; então, para provar o caso geral, usaremos o fato que um corpo convexo pode ser aproximado, na topologia de Hausdorff, por uma sequência de corpos convexos com bordos suaves.

O primeiro a obter fórmulas que expressam a área de Σ_t em termos de quantidades que só dependem de Σ foi Steiner, para curvas no plano e superfícies em \mathbb{R}^3 , [31]. Por esta razão, fórmulas que expressam $|\Sigma_t|$ como um elemento de \mathcal{V}^n são denominadas *fórmulas de Steiner para a área de Σ_t* . Baseados nisso, propomos a terminologia *fórmulas de Steiner para a área com peso de Σ_t* para as fórmulas que expressam $\mathcal{W}(\Sigma_t)$ como um elemento de \mathcal{V}^{n+2} .

Antes da prova do Teorema 2.0.2, vejamos alguns resultados que irão nos auxiliar.

Lema 2.0.3. *Se $\Omega \subset M$ é um corpo convexo, então existe uma sequência $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de corpos convexos satisfazendo o seguinte:*

- (i) $\{\Omega_k\}$ converge para Ω na topologia de Hausdorff;
- (ii) $\partial\Omega_k$ é suave e estritamente convexa, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $M = \mathbb{R}^n$, o resultado segue de [29]. Se $M = \mathbb{H}^n$ ou $M = \mathbb{S}^n$, considere a aplicação de Beltrami $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathbb{R}$ (veja a proposição 4 de [7]). A aplicação \mathcal{P} é uma bijeção suave satisfazendo o seguinte: $\Omega \subset M$ é um corpo convexo com bordo suave e (estritamente) convexo se, e somente se, $\mathcal{P}(\Omega)$ é um corpo convexo com bordo suave e (estritamente) convexo. Deste modo, como o resultado é válido para $M = \mathbb{R}^n$, o mesmo também é válido para $M = \mathbb{H}^n$ e $M = \mathbb{S}^n$.

□

Lema 2.0.4. *Se $K, L \subset M$ são corpos convexos e $t > 0$, então*

$$d_H(K_t, L_t) \leq d_H(K, L),$$

onde d_H denota a distância de Hausdorff.

Demonstração. Seja $d_0 = d_H(K, L)$. Iremos mostrar que $d_H(K_t, L_t) \leq d_0$.

Dado $s \in K_t$, queremos encontrar $q \in L_t$ de modo que $d(s, q) \leq d_0$, onde d denota a distância de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Existe $s \in K$ tal que $d(s, x) \leq t$. Existe também $y \in L$ tal que $d(x, y) \leq d_0$. Seja $d_1 = d(s, x)$ e $d_2 = d(x, y)$. Então, $d_1 \leq t$ e $d_2 \leq d_0$.

Se $t \geq d_1 + d_2$, então

$$d(s, y) \leq d(s, x) + d(x, y) = d_1 + d_2 \leq t,$$

e, portanto, $s \in L_t$. Neste caso, podemos tomar $s = q$.

Suponha agora que $t < d_1 + d_2$. Se $t \leq d_2$, seja q um ponto tal que $d(x, q) = d_2 - t$ e q pertence ao segmento geodésico que liga x e y . Temos

$$d(s, q) \leq d(s, x) + d(x, q) = d_1 + d_2 - t \leq t + d_0 - t = d_0.$$

Se $d_2 < t < d_1 + d_2$, seja q um ponto tal que $d(x, q) = t - d_2$ e q pertence ao segmento geodésico que liga x a s . Temos

$$d(s, q) = d(s, x) - d(x, q) = d_1 - (t - d_2) = d_1 + d_2 - t \leq t + d_0 - t = d_0.$$

□

Proposição 2.0.5. *Seja $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de corpos convexos em M . Suponha que $\{\Omega_k\}$ converge, na topologia de Hausdorff, para um corpo convexo Ω (se $M = \mathbb{S}^n$, assumimos que Ω está contida em um hemisfério aberto). Sejam $\Sigma = \partial\Omega$ e $\Sigma_k = \partial\Omega_k$. Se $u, u_k : [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por*

$$u(t) = |\Sigma_t| \quad e \quad u_k(t) = |(\Sigma_k)_t|,$$

e se $v, v_k : [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$v(t) = \mathcal{W}(\Sigma_t) \quad e \quad v_k(t) = \mathcal{W}((\Sigma_k)_t),$$

então, para cada $\ell \in (0, \tau)$, a seqüência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para u em $[0, \ell]$, e a seqüência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para v em $[0, \ell]$.

Demonstração. Estendemos u e u_k para $(-\infty, \tau)$ pondo $u(t) = 0$ e $u_k(t) = 0$ se $t < 0$.

Afirmamos que $\{u_k\}$ é equicontínua e uniformemente limitada.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Fixe $a, b \in (-\infty, \tau)$ com $a < b$. Seja $\chi \in (0, \tau - b)$. Como u é contínua e $[a - \chi, b + \chi]$ é um intervalo compacto, a restrição de u ao intervalo $[a - \chi, b + \chi]$ é absolutamente contínua. Deste modo, existe $\delta > 0$ (podendo ser tomando de modo que $\delta < \chi$) tal que, se $x, y \in [a - \chi, b + \chi]$ e $|x - y| < \delta$, então $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Seja $t_0 \in [a, b]$. Tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica que $d_H(\Omega_k, \Omega) < \delta/3$. Usando o Lema 2.0.4 e a definição de distância de Hausdorff, encontramos

$$u\left(t - \frac{\delta}{3}\right) \leq u_k(t) \leq u\left(t + \frac{\delta}{3}\right),$$

para qualquer $t \in [a, b]$, e

$$-u\left(t_0 + \frac{\delta}{3}\right) \leq -u_k(t_0) \leq -u\left(t_0 - \frac{\delta}{3}\right).$$

Somando as duas desigualdades, encontramos

$$u\left(t - \frac{\delta}{3}\right) - u\left(t_0 + \frac{\delta}{3}\right) \leq u_k(t) - u_k(t_0) \leq u\left(t + \frac{\delta}{3}\right) - u\left(t_0 - \frac{\delta}{3}\right),$$

para qualquer $k > k_0$.

Se $t \in [a, b]$ é tal que $|t - t_0| < \delta/3$, então

$$\left| \left(t - \frac{\delta}{3}\right) - \left(t_0 + \frac{\delta}{3}\right) \right| < \delta \quad \text{e} \quad \left| \left(t + \frac{\delta}{3}\right) - \left(t_0 - \frac{\delta}{3}\right) \right| < \delta.$$

Por isso,

$$u\left(t - \frac{\delta}{3}\right) - u\left(t_0 + \frac{\delta}{3}\right) > -\varepsilon$$

e

$$u\left(t + \frac{\delta}{3}\right) - u\left(t_0 - \frac{\delta}{3}\right) < \varepsilon.$$

Deste modo, $|u_k(t) - u_k(t_0)| < \varepsilon$, para qualquer $k \geq k_0$, provando que a sequência $\{u_k\}$ é equicontínua.

Se $k_1 \in \mathbb{N}$ é tal que $k > k_1$ implica $d_H(\Omega_k, \Omega) < \chi$, então, invocando o Lema anterior novamente e o fato de u ser crescente, temos que

$$u_k(t) \leq u(t + \chi) \leq u(b + \chi),$$

para qualquer $k > k_1$ e todo $t \in [a, b]$. Deste modo, a sequência $\{u_k\}$ é uniformemente limitada.

Invocando o teorema de Arzelà-Ascoli, encontramos na sequência $\{u_k\}$ uma subsequência que converge uniformemente para uma função contínua definida em $[a, b]$. Entretanto, como u_k converge para u pontualmente, toda a sequência $\{u_k\}$ converge, de modo que a função limite é a restrição de u ao intervalo $[a, b]$.

Um argumento semelhante ao apresentado acima mostra que a sequência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para v em $[a, b]$.

□

Proposição 2.0.6. *Sejam m um inteiro positivo e $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de \mathcal{V}^m . Se $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função f em algum intervalo fechado $[a, b]$, com $0 \leq a < b$, então f é a restrição a $[a, b]$ de algum elemento de \mathcal{V}^m .*

Demonstração. Considere o conjunto das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{R} munido com a norma do supremo. Esse conjunto é um espaço de Banach, o qual contém \mathcal{V}^m como um subespaço de dimensão finita. Tendo em vista que um subespaço de dimensão finita em um espaço de Banach é fechado, segue nossa proposição. □

Demonstração do Teorema 2.0.2. O primeiro passo para nossa prova do Teorema 2.0.2 é mostrar o caso especial em que Σ é uma hipersuperfície suave. Para isso, seguiremos a abordagem usada por Montiel e Ros em [24].

Sejam $\psi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície suave, convexa e fechada, e ξ o vetor normal unitário apontando para fora de Σ . A hipersuperfície Σ_t é escrita como $\psi_t(\Sigma)$, onde

$$\psi_t(x) = \exp_{\psi(x)}(t\xi(x)),$$

para $x \in \Sigma$. Para finalizar a primeira parte da prova, vamos tratar cada espaço ambiente separadamente.

Quando o ambiente é \mathbb{R}^n , ψ_t é dada por

$$\psi_t(x) = \psi(x) + t\xi(x), \tag{2.2}$$

e assim, se e_1, \dots, e_{n-1} são as direções principais em um ponto de Σ , então

$$(\psi_t)_*(e_i) = (1 + t\lambda_i)e_i, \tag{2.3}$$

para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ são as curvaturas principais de Σ nesse ponto. Por (2.3), temos que a forma de volume de Σ_t satisfaz

$$\begin{aligned} d\Sigma_t &= (1 + \lambda_1 t) \cdots (1 + \lambda_{n-1} t) d\Sigma \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k t^k d\Sigma. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Deste modo, a área de Σ_t é dada por

$$|\Sigma_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\Sigma} \sigma_k d\Sigma \right) t^k. \tag{2.5}$$

Por (2.2), temos

$$|\psi_t|^2 = |\psi|^2 + 2t\langle \psi, \xi \rangle + t^2.$$

Juntando com (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
|\psi_t|^2 d\Sigma_t &= (|\psi|^2 + 2t\langle\psi, \xi\rangle + t^2) d\Sigma_t \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n-1} |\psi|^2 \sigma_k t^k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\langle\psi, \xi\rangle \sigma_k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k t^{k+2} \right] d\Sigma \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle\psi, \xi\rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) t^k d\Sigma.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Integrando (2.6), encontramos

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\int_{\Sigma} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle\psi, \xi\rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\Sigma \right) t^k. \tag{2.7}$$

Observação 1. Podemos reescrever (2.7) de tal forma que os termos envolvendo p não apareçam.

Para isso, recordemos as fórmulas de Minkowski, que dizem o seguinte:

$$\int_{\Sigma} p d\Sigma = n \text{Vol}(\Omega) \tag{2.8}$$

e

$$\int_{\Sigma} p \sigma_{k-1} d\Sigma = \frac{(n-k+1)}{k-1} \int_{\Sigma} \sigma_{k-2} d\Sigma, \tag{2.9}$$

para $k \in \{2, \dots, n\}$.

Usando (2.7)–(2.9), encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\Sigma_t) &= \mathcal{W}(\Sigma) + \left(\int_{\Sigma} \rho \sigma_1 d\Sigma + 2n \text{Vol}(\Omega) \right) t \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \left[\int_{\Sigma} \rho \sigma_k d\Sigma + \left(\frac{2n-k+1}{k-1} \right) \int_{\Sigma} \sigma_{k-2} d\Sigma \right] t^k.
\end{aligned}$$

Agora, suponha que $M = \mathbb{H}^n$.

Neste caso, por conveniência, usaremos o modelo do hiperboloide para \mathbb{H}^n , que descreveremos a seguir.

Seja \mathbb{R}_1^{n+1} o espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} com a métrica lorentziana dada por

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \tag{2.10}$$

Temos que \mathbb{H}^n pode ser visto como a hipersuperfície tipo espaço de \mathbb{R}^{n+1} dada por

$$\{x \in \mathbb{R}_1^{n+1}; |x|^2 = -1, x_0 \geq 1\}$$

com a métrica induzida por (2.10). Neste modelo, a função $\rho : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\rho(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0.$$

Se $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície suave, convexa e fechada, então ψ pode ser vista como uma aplicação $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$, com $|\psi|^2 = 1$ e $\pi_0(\psi) \geq 1$, onde $\pi_0(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0$. Se ξ é o vetor normal unitário apontando para fora de Σ , então ξ pode ser visto como uma aplicação $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$, com $|\xi|^2 = 1$ e $\langle \psi, \xi \rangle = 0$.

No modelo do hiperboloide, a hipersuperfície paralela Σ_t é dada por

$$\psi_t = \cosh(t)\psi + \sinh(t)\xi. \quad (2.11)$$

Assim, se e_1, \dots, e_{n-1} são as direções principais em um ponto de Σ , então

$$(\psi)_*(e_i) = (\cosh(t) + \lambda_i \sinh(t))e_i, \quad (2.12)$$

$i = 1, \dots, n-1$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ são as curvaturas principais neste ponto.

Por (2.12), a forma de volume de Σ_t satisfaz

$$\begin{aligned} d\Sigma_t &= (\cosh(t) + \lambda_1 \sinh(t)) \cdots (\cosh(t) + \lambda_{n-1} \sinh(t)) d\Sigma \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cosh^{n-k-1}(t) \sinh^k(t) \right) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com isso, a área de $|\Sigma_t|$ é dada por

$$|\Sigma_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\Sigma} \sigma_k d\Sigma \right) \cosh^{n-k-1}(t) \sinh^k(t). \quad (2.14)$$

Seja $a \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ dado por $a = (-1, 0, \dots, 0)$. Note que $\langle \psi, a \rangle = \rho$ e $\langle \xi, a \rangle = p$. Desse modo, por (2.11), temos

$$\begin{aligned} \rho_t &= \langle \psi_t, a \rangle \\ &= \langle \cosh(t)\psi + \sinh(t)\xi, a \rangle \\ &= \cosh(t)\langle \psi, a \rangle + \sinh(t)\langle \xi, a \rangle \\ &= \cosh(t)\rho + \sinh(t)p. \end{aligned}$$

Juntando com (2.13), temos

$$\begin{aligned} \rho_t d\Sigma_t &= (\cosh(t)\rho + \sinh(t)p) \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cosh^{n-k-1}(t) \sinh^k(t) d\Sigma \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\rho \sigma_k \cosh^{n-k}(t) \sinh^k(t) + p \sigma_k \cosh^{n-k-1}(t) \sinh^{k+1}(t) \right) d\Sigma \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\rho \sigma_k + p \sigma_{k-1}) \cosh^{n-k}(t) \sinh^k(t) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Integrando (2.15), encontramos

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\Sigma} (\rho \sigma_k + p \sigma_{k-1}) d\Sigma \right) \cosh^{n-k}(t) \sinh^k(t). \quad (2.16)$$

Observação 2. Podemos reescrever (2.16) de tal forma que os termos envolvendo p não apareçam.

Recordemos as fórmulas de Minkowski, que dizem o seguinte:

$$\int_{\Sigma} p d\Sigma = n \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (2.17)$$

e

$$\int_{\Sigma} p \sigma_{k-1} d\Sigma = \frac{n-k+1}{k-1} \int_{\Sigma} \rho \sigma_{k-2} d\Sigma, \quad (2.18)$$

para $k \in \{2, \dots, n\}$.

Usando (2.16)–(2.18), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Sigma_t) &= \mathcal{W}(\Sigma) \cosh^n(t) + \left(\int_{\Sigma} \rho \sigma_1 d\Sigma + n \int_{\Omega} \rho d\Omega \right) \cosh^{n-1}(t) \sinh(t) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \left[\int_{\Sigma} \rho \left(\sigma_k + \frac{n-k+1}{k-1} \sigma_{k-2} \right) d\Sigma \right] \cosh^{n-k}(t) \sinh^k(t). \end{aligned}$$

Finalmente, suponha que $M = \mathbb{S}^n$. Considere \mathbb{R}^{n+1} com a métrica canônica

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1}. \quad (2.19)$$

Então \mathbb{S}^n pode ser vista como uma hipersuperfície

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x|^2 = 1\}$$

com a métrica induzida por (2.19). Este é o modelo canônico de \mathbb{S}^n . Neste modelo, se a origem é escolhida para ser $(0, \dots, 0, 1)$, então a função $\rho : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}.$$

Neste caso, ψ_t é dada por

$$\psi_t(x) = \cos(t) \psi + \sin(t) \xi. \quad (2.20)$$

Assim, se e_1, \dots, e_{n-1} são as direções principais em um ponto de Σ , então

$$(\psi_t)_*(e_i) = (\cos(t) + \lambda_i \sin(t)) e_i, \quad (2.21)$$

para $i = 1, \dots, n-1$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ são as curvaturas principais neste ponto.

Por (2.21), segue que o elemento de volume de Σ_t satisfaz

$$\begin{aligned} d\Sigma_t &= (\cos(t) + \lambda_1 \sin(t)) \cdots (\cos(t) + \lambda_{n-1} \sin(t)) d\Sigma \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cos^{n-k-1}(t) \sin^k(t) \right) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Deste modo, a área de Σ_t é dada por

$$|\Sigma_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\Sigma} \sigma_k d\Sigma \right) \cos^{n-k-1}(t) \sin^k(t). \quad (2.23)$$

Seja $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $a = (0, \dots, 0, 1)$. Note que $\langle \psi, a \rangle = \rho$ e $\langle \xi, a \rangle = -p$. Deste modo, por (2.20), temos que

$$\begin{aligned} \rho_t &= \langle \psi_t, a \rangle \\ &= \langle \cos(t)\psi + \sin(t)\xi, a \rangle \\ &= \cos(t)\langle \psi, a \rangle + \sin(t)\langle \xi, a \rangle \\ &= \cos(t)\rho - \sin(t)p. \end{aligned}$$

Juntamente com (2.22), isso nos dá (lembre-se que $\sigma_j = 0$ se $j \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$)

$$\begin{aligned} \rho_t d\Sigma_t &= (\cos(t)\rho - \sin(t)p) \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cos^{n-k-1}(t) \sin^k(t) d\Sigma \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\rho \sigma_k \cos^{n-k}(t) \sin^k(t) - p \sigma_k \cos^{n-k-1}(t) \sin^{k+1}(t) \right) d\Sigma \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\rho \sigma_k - p \sigma_{k-1}) \cos^{n-k}(t) \sin^k(t) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Integrando (2.24), encontramos

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\Sigma} (\rho \sigma_k - p \sigma_{k-1}) d\Sigma \right) \cos^{n-k}(t) \sin^k(t). \quad (2.25)$$

Observação 3. Podemos reescrever (2.25) de tal forma que os termos envolvendo p não apareçam.

Recordemos as fórmulas de Minkowski, que dizem o seguinte:

$$\int_{\Sigma} p d\Sigma = n \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (2.26)$$

e

$$\int_{\Sigma} p \sigma_{k-1} d\Sigma = \frac{n-k+1}{k-1} \int_{\Sigma} \rho \sigma_{k-2} d\Sigma, \quad (2.27)$$

para $k \in \{2, \dots, n\}$. Usando (2.25)–(2.27), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Sigma_t) &= \mathcal{W}(\Sigma) \cos^n(t) + \left(\int_{\Sigma} \rho \sigma_1 d\Sigma - n \int_{\Omega} \rho d\Omega \right) \cos^{n-1}(t) \sin(t) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \left[\int_{\Sigma} \rho \left(\sigma_k - \frac{n-k+1}{k-1} \sigma_{k-2} \right) d\Sigma \right] \cos^{n-k}(t) \sin^k(t). \end{aligned}$$

Quando Σ é suave, os itens (i) e (ii) do Teorema 2.0.2 seguem pelas identidades (2.5), (2.14), (2.23), (2.7), (2.16) e (2.25), respectivamente.

Seja $\Omega \subset M$ um corpo convexo tal que $\partial\Omega$ não é suave. Pelo Lema 2.0.3, existe uma sequência $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de corpos convexos em M tal que $\{\Omega_k\}$ converge para Ω na topologia de Hausdorff e $\partial\Omega_k$ é suave, para cada $k \in \mathbb{N}$. Este fato, juntamente com (2.5), (2.14), (2.23), (2.7), (2.16), (2.25) e as proposições 2.0.5 e 2.0.6, implica que as funções $t \mapsto |\Sigma_t|$ e $t \mapsto \mathcal{W}(\Sigma_t)$ são restrições a $[0, \tau]$ de elementos dos espaços vetoriais \mathcal{V}^n e \mathcal{V}^{n+2} , respectivamente. Isto prova o Teorema 2.0.2. □

Se $\Sigma = \partial\Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um corpo convexo, então os números reais $\mathcal{A}_k(\Sigma)$, para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, são definidos pela equação

$$|\Sigma_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k(\Sigma) t^k,$$

e os números reais $\mathcal{B}_k(\Sigma)$, para $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, são definidos pela equação

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{B}_k(\Sigma) t^k.$$

Note que, quando Σ é suave, a desigualdade (1.3) pode ser escrita da forma

$$\left(\frac{\mathcal{A}_k(\Sigma)}{\omega_{n-1} C_{n-1}^k} \right)^{n-k} \geq \left(\frac{\mathcal{A}_{k-1}(\Sigma)}{\omega_{n-1} C_{n-1}^{k-1}} \right)^{n-k-1}, \quad (2.28)$$

a desigualdade (1.6) pode ser escrita da forma

$$\mathcal{B}_k(\Sigma) \geq \frac{n(n+1)}{k(k-1)} \mathcal{A}_{k-2}(\Sigma), \quad (2.29)$$

e a desigualdade (1.8) pode ser escrita da forma

$$\mathcal{B}_1(\Sigma) \geq (n-1) \omega_{n-1} \left(\frac{\mathcal{A}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} + 2n \text{Vol}(\Omega). \quad (2.30)$$

Se $\Sigma = \partial\Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ é um corpo convexo, então os números reais $\mathcal{C}_k(\Sigma)$, para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, são definidos pela equação

$$|\Sigma_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_k(\Sigma) \cosh^{n-k-1}(t) \sinh^k(t),$$

e os números reais \mathcal{D}_k , para $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, são definidos pela equação

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{D}_k(\Sigma) \cosh^{n-k+1}(t) \sinh^k(t).$$

Note que, quando Σ é suave, a desigualdade (1.9) pode ser escrita da forma

$$\frac{\mathcal{D}_1(\Sigma)}{\omega_{n-1}} \geq \left(\frac{\mathcal{C}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{\mathcal{C}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} n \int_{\Omega} \rho d\Omega\right), \quad (2.31)$$

a desigualdade (1.11) pode ser escrita da forma

$$\frac{\mathcal{D}_1(\Sigma)}{\omega_{n-1}} \geq \left(\frac{\mathcal{C}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + 2 \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} n \int_{\Omega} \rho d\Omega\right), \quad (2.32)$$

a desigualdade (1.13) pode ser escrita da forma

$$\frac{2\mathcal{C}_2(\Sigma)}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \geq \frac{\mathcal{C}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}} + \left(\frac{\mathcal{C}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-3}{n-1}} \quad (2.33)$$

e a desigualdade (1.15) pode ser escrita como

$$\mathcal{C}_1(\Sigma) \geq 2\text{Vol}(\Omega) + 2\pi \ln \left(1 + \frac{\mathcal{C}_0(\Sigma)}{2\pi} + \frac{\mathcal{C}_1(\Sigma)}{2\pi}\right). \quad (2.34)$$

Se $\Sigma = \partial\Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ é um corpo convexo, então os números reais $\mathcal{E}_k(\Sigma)$, para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, são definidos pela equação

$$|\Sigma_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{E}_k(\Sigma) \cos^{n-k-1}(t) \sin^k(t),$$

e os números reais $\mathcal{F}_k(\Sigma)$, para $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, são definidos pela equação

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{F}_k(\Sigma) \cos^{n-k+1}(t) \sin^k(t).$$

Note que, quando Σ é suave, a desigualdade (1.16) pode ser escrita da forma

$$\left(\frac{\mathcal{E}_1(\Sigma)}{(n-1)\omega_{n-1}}\right)^2 \geq \left(\frac{\mathcal{E}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2(n-2)}{n-1}} - \left(\frac{\mathcal{E}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^2, \quad (2.35)$$

a desigualdade (1.17) pode ser escrita da forma

$$\frac{\mathcal{E}_2(\Sigma)}{\mathcal{C}_{n-1}^2 \omega_{n-1}} \geq \left(\frac{\mathcal{E}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-3}{n-1}} - \frac{\mathcal{E}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}}, \quad (2.36)$$

e a desigualdade (1.19) pode ser escrita da forma

$$\frac{\mathcal{F}_1(\Sigma) + n \int_{\Omega} \rho \, d\Omega}{n-1} \geq \left(\int_{\Omega} \rho \, d\Omega \right) \left[\left(\frac{\mathcal{E}_0(\Sigma)}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1 \right]. \quad (2.37)$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um corpo convexo e seja $\Sigma = \partial\Omega$. Pela proposição 2.0.5, se $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, com $\partial\Omega_j = \Sigma_j$, é uma sequência de corpos convexos convergindo, na topologia de Hausdorff, para um corpo convexo Ω , com $\partial\Omega = \Sigma$, então, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, a sequência $\mathcal{A}_k(\Sigma_j)$ converge para $\mathcal{A}_k(\Sigma)$, quando $j \rightarrow \infty$; e para cada $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, a sequência $\mathcal{B}_k(\Sigma_j)$ converge para $\mathcal{B}_k(\Sigma)$, quando $j \rightarrow \infty$. Também temos que a sequência $\text{Vol}(\Omega_j)$ converge para $\text{Vol}(\Omega)$, quando $j \rightarrow \infty$.

Desta forma, aplicando (2.28), (2.29) e (2.30) para Ω_j e passando o limite quando $j \rightarrow \infty$, garante-se que as desigualdades (2.28), (2.29) e (2.30) são verdadeiras para Σ , ainda que Σ seja uma hipersuperfície não suave.

Argumentos análogos ao do parágrafo anterior mostram que as desigualdades (2.31), (2.32) e (2.33) são válidas se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ delimita um corpo convexo Ω , e que a desigualdade (2.36) é válida se $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ é bordo de um corpo convexo Ω .

Finalmente, se $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ é bordo de um corpo convexo Ω e Σ é balanceada, então existe uma sequência $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de corpos convexos satisfazendo o seguinte: $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge para Ω na topologia de Hausdorff, onde cada $\Sigma_j = \partial\Omega_j$ é suave e estritamente convexo, e $\{x(\Sigma_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge para a origem.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{I}_j : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma isometria de modo que $\mathcal{I}_j(x(\Sigma_j))$ é a origem. A sequência $\{\mathcal{I}_j(\Omega_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ de corpos convexos ainda converge para Ω (na topologia de Hausdorff) e cada $\mathcal{I}_j(\Sigma_j) = \partial(\mathcal{I}_j(\Omega_j))$ é balanceada. Aplicando (2.37) para $\mathcal{I}_j(\Sigma_j)$ e passando o limite, quando $j \rightarrow \infty$, garantimos que (2.37) é válida para Σ .

3 PROVA DOS TEOREMAS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM QUINAS

3.1 Prova dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2

Seja $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície convexa no espaço Euclidiano com quinas ao longo da subvariedade γ de codimensão 2. Queremos calcular $\mathcal{A}_1(\Sigma)$ e $\mathcal{B}_1(\Sigma)$. Para fazermos isso, precisamos descrever Σ_t , a hipersuperfície paralela à distância t .

Seja $s \in \Sigma_t$. Como $\psi(\Sigma)$ é bordo de um conjunto convexo Ω , existe um único ponto $x = x(s) \in \psi(\Sigma)$ tal que

$$\text{dist}(s, \psi(\Sigma)) = \text{dist}(s, x(s)).$$

Temos três possibilidades para x : $x \in \text{int}(\psi(\hat{\Sigma}))$ (interior de $\psi(\hat{\Sigma})$), $x \in \text{int}(\psi(\check{\Sigma}))$ e $x \in \psi(\gamma)$. Desta forma, iremos dividir Σ_t em três partes (Figura 4), as quais chamaremos de $\hat{\Sigma}_t$, $\check{\Sigma}_t$ e γ_t , e que são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_t &= \overline{\{s \in \Sigma_t; x(s) \in \text{int}(\psi(\hat{\Sigma}))\}}, \\ \check{\Sigma}_t &= \overline{\{s \in \Sigma_t; x(s) \in \text{int}(\psi(\check{\Sigma}))\}} \end{aligned}$$

e

$$\gamma_t = \{s \in \Sigma_t; x(s) \in \psi(\gamma)\}.$$

Como a hipersuperfície com bordo $\psi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suave e convexa, os pontos de $\hat{\Sigma}_t$ são da seguinte forma:

$$\{\psi(x) + t\hat{\xi}(x); x \in \hat{\Sigma}\},$$

onde $\hat{\xi}$ é o campo normal unitário de $\hat{\Sigma}$. De modo análogo, os pontos de $\check{\Sigma}_t$ são da forma

$$\{\psi(x) + t\check{\xi}(x); x \in \check{\Sigma}\},$$

onde $\check{\xi}$ é o campo normal unitário de $\check{\Sigma}$.

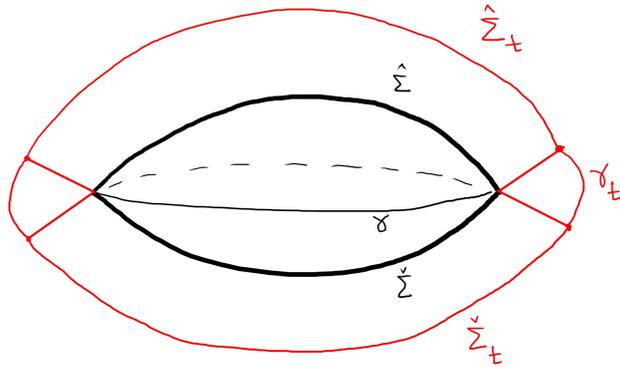
Como γ é uma subvariedade suave de codimensão 2, os pontos de γ_t são da seguinte forma:

$$\{\psi(x) + t(\cos(\theta)\hat{v}(x) + \sin(\theta)\hat{\xi}(x)); x \in \gamma \text{ and } \alpha(x) \leq \theta \leq \alpha(x) + \phi(x)\},$$

onde \hat{v} denota o campo unitário, ao longo de γ , que é normal a γ , tangente a $\hat{\Sigma}$ e aponta para o exterior de $\hat{\Sigma}$, $\alpha(x)$ é o ângulo de $\hat{v}(x)$ para $\hat{\xi}(x)$, e, como antes, $\phi(x)$ é o ângulo de $\check{\xi}(x)$ para

$\hat{\xi}(x)$, para cada $x \in \gamma$.

Figura 4 – Σ_t em três partes



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Desta forma, temos

$$|\Sigma_t| = |\hat{\Sigma}_t| + |\check{\Sigma}_t| + |\gamma_t|.$$

O cálculo de $|\hat{\Sigma}_t|$ (e de modo similar, o de $|\check{\Sigma}_t|$) é análogo ao feito no caso em que a hipersuperfície é suave. Deste modo, encontramos

$$|\hat{\Sigma}_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_k d\hat{\Sigma} \right) t^k$$

e

$$|\check{\Sigma}_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\check{\Sigma}} \sigma_k d\check{\Sigma} \right) t^k.$$

Assim, resta calcular $|\gamma_t|$. Seguiremos uma abordagem usada em [25].

Seja $q \in \gamma_t$. Queremos expressar a forma de volume de γ_t em q . O ponto q é da forma $\psi(x_0) + t(\cos(\theta)\hat{\nu} + \sin(\theta)\hat{\xi})$, para algum (x_0, θ) tal que $x_0 \in \gamma$ e $\theta \in (\alpha(x_0), \alpha(x_0) + \phi(x_0))$. Fixe θ e seja U uma vizinhança do ponto x_0 em γ tal que $\theta \in (\alpha(x), \alpha(x) + \phi(x))$, para qualquer $x \in U$. Vamos denotar o vetor $\cos(\theta)\hat{\nu} + \sin(\theta)\hat{\xi}$, normal a γ , por ξ_θ , e o operador de forma com respeito a ξ_θ por A_θ . Seja $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ um referencial ortonormal local em torno de x_0 tal que, em x_0 ,

$$A_\theta(e_i) = \lambda_i^\theta e_i,$$

para $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Para $x \in U$, seja

$$\zeta_t(x) = \psi(x) + t\xi_\theta(x).$$

Então

$$(\zeta_t)_*(e_i) = e_i + t\lambda_i^\theta e_i,$$

para $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Portanto, se $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-2}\}$ é o coreferencial dual de $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$, a forma de volume de γ_t em q satisfaz

$$\begin{aligned} d\gamma_t &= (\omega_1 + t\lambda_1^\theta \omega_1) \wedge \dots \wedge (\omega_{n-2} + t\lambda_{n-2}^\theta \omega_{n-2}) \wedge (td\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \sigma_k(\xi_\theta) t^{k+1} d\gamma \wedge d\theta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\sigma_k(\xi_\theta)$ denota a k -ésima função simétrica elementar do vetor $(\lambda_1^\theta, \dots, \lambda_{n-2}^\theta)$. Assim,

$$\begin{aligned} |\gamma_t| &= \int_\gamma \sum_{k=0}^{n-2} \left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} \sigma_k(\xi_\theta) d\theta \right) t^{k+1} d\gamma \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\int_\gamma \left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} \sigma_k(\xi_\theta) d\theta \right) d\gamma \right) t^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio $t \mapsto |\gamma_t|$ é tal que seu termo constante é 0 e o coeficiente do termo de grau 1 é dado por

$$\int_\gamma \left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} d\theta \right) d\gamma = \int_\gamma \phi d\gamma.$$

Mostramos, portanto, que

$$\mathcal{A}_0(\Sigma) = |\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}| \quad (3.2)$$

e

$$\mathcal{A}_1(\Sigma) = \int_{\hat{\Sigma}} \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_\gamma \phi d\gamma. \quad (3.3)$$

As equações (3.2) e (3.3) e o caso $k = 1$ da desigualdade (2.28) implicam a desigualdade (1.20). Isto finaliza a prova do Teorema 1.0.1.

Passemos agora à prova do Teorema 1.0.2. Temos que

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \mathcal{W}(\hat{\Sigma}_t) + \mathcal{W}(\check{\Sigma}_t) + \mathcal{W}(\gamma_t). \quad (3.4)$$

O cálculo de $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}_t)$ (e de modo similar, o de $\mathcal{W}(\check{\Sigma}_t)$) é analogo ao feito no caso em que a hipersuperfície é suave. Assim, encontramos

$$\mathcal{W}(\hat{\Sigma}_t) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\int_{\hat{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\hat{\Sigma} \right) t^k \quad (3.5)$$

e

$$\mathcal{W}(\check{\Sigma}_t) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\int_{\check{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\check{\Sigma} \right) t^k. \quad (3.6)$$

Falta calcular $\mathcal{W}(\gamma_t)$.

Seja $q = \psi(x) + t\xi_\theta(x)$ um ponto de γ_t , onde $\theta \in (\alpha(x), \alpha(x) + \phi(x))$ e $\xi_\theta = \cos(\theta)\hat{\nu} + \sin(\theta)\hat{\xi}$. Temos

$$|q|^2 = |\psi|^2 + 2\langle \psi, \xi_\theta \rangle t + t^2.$$

Isso, juntamente com (3.1), nos dá que a forma de volume com peso em q é dada por

$$\begin{aligned} & (|\psi|^2 + 2\langle \psi, \xi_\theta \rangle t + t^2) d\gamma_t \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(|\psi|^2 \sigma_k(\xi_\theta) t^{k+1} + 2\langle \psi, \xi_\theta \rangle \sigma_k(\xi_\theta) t^{k+2} + \sigma_k(\xi_\theta) t^{k+3} \right) d\gamma \wedge d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(|\psi|^2 \sigma_k(\xi_\theta) + 2\langle \psi, \xi_\theta \rangle \sigma_{k-1}(\xi_\theta) + \sigma_{k-2}(\xi_\theta) \right) t^{k+1} d\gamma \wedge d\theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Integrando (3.7), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\gamma_t) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\int_{\gamma} \left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} (|\psi|^2 \sigma_k(\xi_\theta) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\langle \psi, \xi_\theta \rangle \sigma_{k-1}(\xi_\theta) + \sigma_{k-2}(\xi_\theta)) d\theta \right) d\gamma \right) t^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Das equações, (3.4) – (3.6) e (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(\Sigma) &= \int_{\hat{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_1 + 2\langle \psi, \xi \rangle) d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_1 + 2\langle \psi, \xi \rangle) d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} |\psi|^2 \phi d\gamma \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} |\psi|^2 \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} |\psi|^2 \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} |\psi|^2 \phi d\gamma + \int_{\Sigma} 2\langle \psi, \xi \rangle d\Sigma \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} |\psi|^2 \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} |\psi|^2 \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} |\psi|^2 \phi d\gamma + 2n \text{Vol}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde foi usado que

$$\int_{\Sigma} \langle \psi, \xi \rangle d\Sigma = n \text{Vol}(\Omega). \quad (3.10)$$

Quando Σ é suave, a identidade (3.10) segue facilmente do teorema de divergência. Se Σ é uma hipersuperfície convexa com quinas, a igualdade (3.10) pode ser mostrada usando-se um argumento de aproximação.

O Teorema 1.0.2 segue de (2.30), (3.2) e (3.9).

3.2 Prova dos Teoremas 1.0.3–1.0.7

Seja $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow M$, onde M é \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n , uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2.

Para $t \in [0, \varepsilon)$, definimos $\hat{\Sigma}_t$, $\check{\Sigma}_t$ e γ_t exatamente como fizemos no caso Euclidiano.

Quando $M = \mathbb{H}^n$, usaremos o modelo do hiperboloide e, quando $M = \mathbb{S}^n$, usaremos o modelo canônico de \mathbb{S}^n .

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(t) = \begin{cases} \cosh(t), & \text{se } M = \mathbb{H}^n, \\ \cos(t), & \text{se } M = \mathbb{S}^n; \end{cases} \quad (3.11)$$

e

$$g(t) = \begin{cases} \sinh(t), & \text{se } M = \mathbb{H}^n, \\ \sin(t), & \text{se } M = \mathbb{S}^n. \end{cases} \quad (3.12)$$

Como a hipersuperfície com bordo $\hat{\Sigma}$ é suave e convexa, os pontos de $\hat{\Sigma}_t$ são dados por

$$\{f(t)\psi(x) + g(t)\hat{\xi}(x); x \in \hat{\Sigma}\}.$$

De modo análogo, os pontos de $\check{\Sigma}_t$ são dados por

$$\{f(t)\psi(x) + g(t)\check{\xi}(x); x \in \check{\Sigma}\}.$$

Como γ é uma subvariedade de codimensão 2, os pontos de γ_t são da forma

$$\left\{f(t)\psi(x) + g(t) \left(\cos(\theta)\hat{v} + \sin(\theta)\hat{\xi} \right); x \in \gamma \text{ and } \alpha(x) \leq \theta \leq \alpha(x) + \phi(x) \right\},$$

onde, assim como no contexto Euclidiano, \hat{v} denota o campo unitário, ao longo γ , que é normal a γ , tangente a $\hat{\Sigma}$ e aponta para o exterior de $\hat{\Sigma}$, $\alpha(x)$ é o ângulo entre $\hat{v}(x)$ e $\check{\xi}(x)$, e $\phi(x)$ é o ângulo entre $\check{\xi}(x)$ e $\hat{\xi}(x)$, para cada $x \in \gamma$.

Desta forma, temos

$$|\Sigma_t| = |\hat{\Sigma}_t| + |\check{\Sigma}_t| + |\gamma_t|.$$

O cálculo de $|\hat{\Sigma}_t|$ (e de modo similar, o de $|\check{\Sigma}_t|$) é análogo ao feito no caso em que a hipersuperfície é suave. Assim, temos

$$|\hat{\Sigma}_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_k d\hat{\Sigma} \right) f^{n-k-1}(t) g^k(t) \quad (3.13)$$

e

$$|\check{\Sigma}_t| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\check{\Sigma}} \sigma_k d\check{\Sigma} \right) f^{n-k-1}(t) g^k(t). \quad (3.14)$$

Temos também

$$\mathcal{W}(\Sigma_t) = \mathcal{W}(\hat{\Sigma}_t) + \mathcal{W}(\check{\Sigma}_t) + \mathcal{W}(\gamma_t).$$

O cálculo de $\mathcal{W}(\hat{\Sigma})$ (e de modo similar, o de $\mathcal{W}(\check{\Sigma})$) é análogo ao feito no caso em que a hipersuperfície é suave. Deste modo, encontramos

$$\mathcal{W}(\hat{\Sigma}_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\hat{\Sigma}} (\rho \sigma_k + p \sigma_{k-1}) d\hat{\Sigma} \right) f(t)^{n-k} g^k(t) \quad (3.15)$$

e

$$\mathcal{W}(\check{\Sigma}_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\check{\Sigma}} (\rho \sigma_k + p \sigma_{k-1}) d\check{\Sigma} \right) f^{n-k}(t) g^k(t). \quad (3.16)$$

Seja $q \in \gamma_t$. Iremos agora calcular a expressão da forma de volume para γ_t no ponto q . O ponto q é da forma $\cosh(t)\psi(x_0) + \sinh(t)(\cos(\theta)\hat{\nu} + \sin(\theta)\hat{\xi})$ para algum (x_0, θ) tal que $\theta \in (\alpha(x_0), \alpha(x_0) + \phi(x_0))$. Fixamos θ e tomamos uma vizinhança U do ponto x_0 tal que $\theta \in (\alpha(x), \alpha(x) + \phi(x))$, para todo $x \in U$. Vamos denotar o vetor $\cos(\theta)\hat{\nu} + \sin(\theta)\hat{\xi}$, normal a γ , por ξ_θ , e o operador forma com respeito a ξ_θ por A_θ . Seja $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ um referencial ortonormal em torno de x_0 tal que, em x_0 ,

$$A_\theta(e_i) = \lambda_i^\theta e_i,$$

para $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Para $x \in U$, seja

$$\zeta_t(x) = f(t)\psi(x) + g(t)\xi_\theta(x).$$

Então

$$(\zeta_t)_*(e_i) = f(t)e_i + g(t)\lambda_i^\theta e_i,$$

para $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Deste modo, se $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-2}\}$ é o coreferencial dual de $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$, a forma de volume de γ_i em q satisfaz

$$\begin{aligned} d\gamma_i &= (f(t)\omega_1 + g(t)\lambda_1^\theta \omega_1) \wedge \dots \wedge (f(t)\omega_{n-2} + g(t)\lambda_{n-2}^\theta \omega_{n-2}) \wedge (g(t)d\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \sigma_k(\xi_\theta) f^{n-k-2}(t) g^{k+1}(t) d\gamma \wedge d\theta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\sigma_k(\xi_\theta)$ denota a k -ésima função simétrica elementar do vetor $(\lambda_1^\theta, \dots, \lambda_{n-2}^\theta)$.

Integrando (3.17), encontramos

$$|\gamma_i| = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\int_\gamma \left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} \sigma_k(\xi_\theta) d\theta \right) d\gamma \right) f^{n-k-2}(t) g^{k+1}(t). \quad (3.18)$$

Pelas equações (3.13), (3.14) e (3.18), segue que

$$\mathcal{C}_1(\Sigma) = \int_{\hat{\Sigma}} \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_\gamma \phi d\gamma \quad (3.19)$$

e

$$\mathcal{E}_1(\Sigma) = \int_{\hat{\Sigma}} \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_\gamma \phi d\gamma. \quad (3.20)$$

Além disso, como $\rho_t = f(t)\rho + g(t)p$, então, por (3.17),

$$\rho_t d\gamma_t = \sum_{k=0}^{n-2} (\rho \sigma_k(\xi_\theta) + p \sigma_{k-1}(\xi_\theta)) f^{n-k-1}(t) g^{k+1}(t).$$

Portanto,

$$\mathcal{W}(\gamma_i) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\int_\gamma \left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} (\rho \sigma_k(\xi_\theta) + p \sigma_{k-1}(\xi_\theta)) d\theta \right) d\gamma \right) f^{n-k-1}(t) g^{k+1}(t) \quad (3.21)$$

Das equações (3.15), (3.16) e (3.21) encontramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\Sigma) &= \int_{\hat{\Sigma}} (\rho \sigma_1 + p) d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} (\rho \sigma_1 + p) d\check{\Sigma} + \int_\gamma \rho \phi d\gamma \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} \rho \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_\gamma \rho \phi d\gamma + \int_\Sigma p d\Sigma \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} \rho \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_\gamma \rho \phi d\gamma + n \int_\Omega \rho d\Omega, \end{aligned} \quad (3.22)$$

e, de modo similar, temos que

$$\mathcal{F}_1(\Sigma) = \int_{\hat{\Sigma}} \rho \sigma_1 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \rho \sigma_1 d\check{\Sigma} + \int_\gamma \rho \phi d\gamma - n \int_\Omega \rho d\Omega, \quad (3.23)$$

onde estamos usando as seguintes identidades:

$$\int_\Sigma p d\Sigma = \begin{cases} n \int_\Omega \rho d\Omega, & \text{se } M = \mathbb{H}^n, \\ -n \int_\Omega \rho d\Omega, & \text{se } M = \mathbb{S}^n. \end{cases} \quad (3.24)$$

Quando Σ é suave, a identidade (3.24) segue facilmente do teorema de divergência. Se Σ é uma hipersuperfície convexa com quinas, a igualdade (3.24) pode ser obtida por um argumento de aproximação.

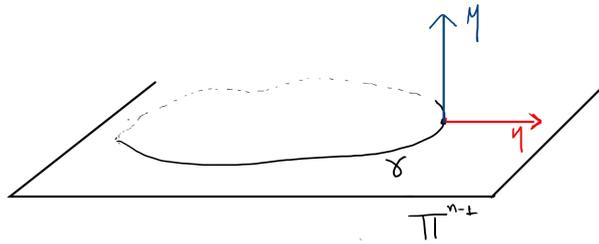
Agora, como $\mathcal{C}_0(\Sigma)$ e $\mathcal{E}_0(\Sigma)$ são dados por $|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|$, o Teorema 1.0.3 segue de (2.31) e (3.22), o Teorema 1.0.4 segue de (2.32) e (3.22), o Teorema 1.0.5 segue de (2.34) e (3.19), o Teorema 1.0.6 segue de (2.35) e (3.20), e o Teorema 1.0.7 segue de (2.37) e (3.23).

4 DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS PARA HIPERSUPERFÍCIE COM QUINAS PLANARES

Seja $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow M$ uma hipersuperfície convexa com quinas ao longo de uma subvariedade γ de codimensão 2.

Neste capítulo, supomos que γ está contida em alguma hipersuperfície totalmente geodésica $\Pi^{n-1} \subset M$ passando pela origem, e que $\Psi : M \rightarrow M$ é a reflexão com respeito a Π . Neste caso, dizemos que γ é *planar* ou que Σ possui *quinas planares* (esta terminologia será usada também quando o espaço ambiente for \mathbb{H}^n ou S^n). Denotamos por η o campo unitário ao longo de γ que é tangente a Π , normal a γ , e aponta para o exterior da região de Π delimitada por γ . Além disso, denotamos por μ o campo unitário ao longo de γ que é normal a Π e aponta para a região de M que contém $\hat{\Sigma}$ (Figura 5).

Figura 5 – γ bordo planar



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Neste caso, temos

$$\xi_\theta = \langle \xi_\theta, \mu \rangle \mu + \langle \xi_\theta, \eta \rangle \eta$$

e, sobre γ ,

$$\langle \psi, \xi_\theta \rangle = \langle \xi_\theta, \eta \rangle \langle \psi, \eta \rangle.$$

Ademais, o operador forma de γ com respeito a ξ_θ é $\langle \xi, \eta \rangle A^\gamma$, onde A^γ é o operador de forma

de γ com respeito a η . Deste modo,

$$\sigma_k(\xi_\theta) = \langle \xi_\theta, \eta \rangle^k \sigma_k(\eta), \quad (4.1)$$

para $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

Para $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, definimos $\Phi_j : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_j(x) = \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\phi(x)} \langle \xi_\theta(x), \eta(x) \rangle^j d\theta$$

(se $j < 0$ ou $j > n-2$, temos que $\Phi_j \equiv 0$). Usando (4.1) e as expressões para $|\hat{\Sigma}_t|$, $|\check{\Sigma}_t|$ e $|\gamma_t|$, encontramos

$$\mathcal{A}_k(\Sigma) = \int_{\hat{\Sigma}} \sigma_k d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_k d\check{\Sigma} + \left(\int_{\gamma} \Phi_{k-1} \sigma_{k-1}(\eta) d\gamma \right).$$

Usando (4.1) e as expressões para $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}_t)$, $\mathcal{W}(\check{\Sigma}_t)$ e $\mathcal{W}(\gamma_t)$, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(\Sigma) &= \int_{\hat{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\hat{\Sigma} \\ &+ \int_{\check{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\check{\Sigma} \\ &+ \int_{\gamma} \Phi_{k-1} (\sigma_{n-1}(\eta) + \langle \psi, \eta \rangle \sigma_{k-2}(\eta)) d\gamma + \int_{\gamma} \Phi_{k-3} \sigma_{k-3}(\eta) d\gamma \end{aligned}$$

Usando (4.1) e as expressões para $|\hat{\Sigma}_t|$, $|\check{\Sigma}_t|$ e $|\gamma_t|$ (com $M = \mathbb{H}^n$ ou $M = \mathbb{S}^n$), encontramos que $\mathcal{C}_2(\Sigma)$ e $\mathcal{E}_2(\Sigma)$ são ambos dados por

$$\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_2 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_2 d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} \Phi_1 \sigma_1(\eta) d\gamma.$$

O seguinte teorema é uma versão da desigualdade (1.3) para hipersuperfície com quinas planares.

Teorema 4.0.1. *Seja $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície com quinas planares ao longo de uma subvariedade planar γ de codimensão 2. Para $k \in \{2, \dots, n-2\}$, tem-se*

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{C_{n-1}^k \omega_{n-1}} \left(\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_k d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_k d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} \Phi_{k-1} \sigma_{k-1}(\eta) d\gamma \right) \right]^{n-k} &\geq \\ \left[\frac{1}{C_{n-1}^{k-1} \omega_{n-1}} \left(\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_{k-1} d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_{k-1} d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} \Phi_{k-2} \sigma_{k-2}(\eta) d\gamma \right) \right]^{n-k-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

O seguinte teorema é uma versão da desigualdade (1.6) para hipersuperfície com quinas planares.

Teorema 4.0.2. *Seja $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície com quinas planares ao longo de uma subvariedade planar γ de codimensão 2. Para $k \in \{2, \dots, n-2\}$, tem-se*

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} (|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\check{\Sigma} \\ & + \int_{\gamma} \Phi_{k-1} (\sigma_{n-1}(\eta) + \langle \psi, \eta \rangle \sigma_{k-2}(\eta)) d\gamma + \int_{\gamma} \Phi_{k-3} \sigma_{k-3}(\eta) d\gamma \geq \\ & \frac{n(n+1)}{k(k+1)} \left[\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_{k-2} d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_{k-2} d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} \Phi_{k-3} \sigma_{k-3}(\eta) d\gamma \right] \end{aligned}$$

O seguinte teorema é uma versão da desigualdade (1.14) para hipersuperfície com quinas planares.

Teorema 4.0.3. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície com quinas planares ao longo de uma subvariedade planar γ de codimensão 2, então*

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left[\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_2 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_2 d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} \Phi_1 \sigma_1(\eta) d\gamma \right] \geq \\ \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right) + \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}}. \end{aligned}$$

O seguinte teorema é uma versão da desigualdade (1.17) para hipersuperfície com quinas planares.

Teorema 4.0.4. *Se $\psi : \Sigma = \hat{\Sigma} \cup \check{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície com quinas planares ao longo de uma subvariedade planar γ de codimensão 2, então*

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left[\int_{\hat{\Sigma}} \sigma_2 d\hat{\Sigma} + \int_{\check{\Sigma}} \sigma_2 d\check{\Sigma} + \int_{\gamma} \Phi_1 \sigma_1(\eta) d\gamma \right] \geq \\ \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} - \left(\frac{|\hat{\Sigma}| + |\check{\Sigma}|}{\omega_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Os seguintes colorários são consequências imediatas dos teoremas 4.0.1–4.0.3, respectivamente

Corolário 4.0.5. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície suave, com bordo planar, tal que $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa. Então, para $k \in \{2, \dots, n-2\}$,*

$$\left[2 \int_{\Gamma} \sigma_k d\Gamma + \int_{\gamma} \Phi_{k-1} \sigma_{k-1}(\eta) d\gamma \right]^{n-k} \geq \left[2 \int_{\Gamma} \sigma_{k-1} d\Gamma + \int_{\gamma} \Phi_{k-2} \sigma_{k-2}(\eta) d\gamma \right]^{n-k-1},$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$.

Corolário 4.0.6. *Seja $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície suave, com bordo planar, tal que $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa. Então, para $k \in \{2, \dots, n-2\}$,*

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} 2(|\psi|^2 \sigma_k + 2\langle \psi, \xi \rangle \sigma_{k-1} + \sigma_{k-2}) d\Gamma \\ & + \int_{\gamma} \Phi_{k-1}(\sigma_{k-1}(\eta) + \langle \psi, \eta \rangle \sigma_{k-2}(\eta)) d\gamma + \int_{\gamma} \Phi_{k-3} \sigma_{k-3}(\eta) d\gamma \geq \\ & \frac{n(n+1)}{k(k+1)} \left[2 \int_{\Gamma} \sigma_{k-2} d\Gamma + \int_{\gamma} \Phi_{k-3} \sigma_{k-3}(\eta) d\gamma \right], \end{aligned}$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$.

Corolário 4.0.7. *Se $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície suave, com bordo planar, tal que $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left[2 \int_{\Gamma} \sigma_2 d\Gamma + \int_{\gamma} \Phi_1 \sigma_1(\eta) d\gamma \right] \geq \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right) + \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}},$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$.

Corolário 4.0.8. *Se $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície suave, com bordo planar, tal que $\Gamma \cup \Psi(\Gamma)$ é convexa, então*

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left[2 \int_{\Gamma} \sigma_2 d\Gamma + \int_{\gamma} \Phi_1 \sigma_1(\eta) d\gamma \right] \geq \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} - \left(\frac{2|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right),$$

onde $\gamma = \partial\Gamma$.

REFERÊNCIAS

- [1] ALEKSANDROV, A. D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen. **Rec. Math. Moscou**, n. Ser. , v. 2, p.1205–1238 1937.
- [2] ALEKSANDROV, A. D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper. **Rec. Math.**, Moscou, n. Ser., v. 3, p. 272–46, 1938.
- [3] BRENDLE, S.; HUNG, P.-K.; WANG, M.-T. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the anti-de Sitter–Schwarzschild manifold. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 69, n. 1, p. 124–144, 2016.
- [4] DAHL, M.; GICQUAUD, R.; SAKOVICH, A. Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs. **Ann. Henri Poincaré**, v. 14, n.5, p. 1135–1168, 2013.
- [5] GE, Y.; WANG, G.; WE, J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities II. **J. Differential Geom.**, v. 98, n.2, p. 237–260, 2014.
- [6] GE, Y.; WANG, G.; WU, J. A new mass for asymptotically flat manifolds. **Adv. Math.**, v. 266, p.84–119, 2014.
- [7] GE, Y.; WANG, G.; WU, J. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. **Math. Z.**, v. 281, n. 1–2, p. 257–297, 2015.
- [8] GERHARDT, C. Curvature flows in the sphere. **J. Differential Geom.**, v. 100, n.2 p. 301–347, 2015.
- [9] GIRÃO, F. PINHEIRO, N. M. An Alexandrov-Fenchel-type inequality for hypersurfaces in the sphere. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 52, n. 4, p. 413–424, 2017.
- [10] GIRÃO, F.; RODRIGUES, D. Weighted geometric inequalities for hypersurfaces in sub-static manifolds. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 52, n.1, p. 121–136, 2020
- [11] GUAN, P; LI, J. The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains. **Advances in Mathematics.**, v. 221, n. 5, p. 1725–1732, 2009.
- [12] HERZLICH, M. Mass formulae for asymptotically hyperbolic manifolds. **AdS/CFT correspondence: Einstein metrics and their conformal boundaries**, v. 8, p. 103–121, 2005.
- [13] HU, Y.; LI, H.; WEI, Y. Locally constrained curvature flows and geometric inequalities in hyperbolic space. **Math. Ann.**, v. 382, n. 3–4, p. 1425–1474, 2022.
- [14] KWONG, K.-K.; MIAO, P. Monotone quantities involving a weighted σ_k integral along inverse curvature flows. **Commun. Contemp. Math.**, v. 17, n. 5, p. 1550014, 10, 2015.
- [15] LAM, M.-K.G. **The graph cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions**. Thesis (Ph.D.) – Duke University, 2011.

- [16] LI, H.; WEI, Y.; XIONG, C. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space. **Adv. Math.**, v. 253, p. 152–162, 2014.
- [17] LI, H.; WEI, Y.; XIONG, C. The Gauss-Bonnet-Chern mass for graphic manifolds. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 2. p. 465–489, 2019.
- [18] LIMA, L. L. de; GIRÃO, F. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. **Ann. Henri Poincaré.**, v. 17, n.4, p.979–1002, 2016.
- [19] LIMA, L. L. de; GIRÃO, F. The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, n. 9, p.6247–6266, 2015.
- [20] LIMA, R. F. de; ANDRADE, R. L. de. Convexity, rigidity and reduction of codimension of isometric immersions into space forms. **Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)**, v. 50, n. 1, p. 119–136, 2019.
- [21] MAKOWSKI, M.; SCHEUER, J. Rigidity results, inverse curvature flows and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. **Asian J. Math.**, v. 20, n. 5, p. 869–892, 2016.
- [22] MICHEL, B. Geometric invariance of mass-like asymptotic invariants. **J. Math. Phys.**, v. 52, n. 5, p. 052504, 14, 2011.
- [23] MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds. **Comm. Anal. Geom.**, v. 23, n.2, p.273–292, 2015.
- [24] MONTIEL, R.; ROS, A. Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. **Differential geometry**, v. 52, p. 279–286, 1991.
- [25] MORVAN, J.-M. **Generalized curvatures**, Berlin: Springer-Verlag, 2008. v. 2, p. xii–266.
- [26] NATÁRIO, José. A Minkowski-type inequality for convex surfaces in the hyperbolic 3-space. **Differential Geom. Appl.**, v.41, p.102–109, 2015.
- [27] PALLETE, F. Vargas; VIANA, C. Isoperimetric interpretation for the renormalized volume of convex co-compact hyperbolic 3-manifolds. **arXiv.org**, [Ithaca, N.Y.], 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2105.11540>. Acesso em: 27 jun. 2023.
- [28] SANTALÓ, L. A. **Integral geometry and geometric probability**. Reading, Mass.: Addison- Wesley Publishing Co., 1976. v. 1, p. xvii–404.
- [29] SCHNEIDER, R. Smooth approximation of convex bodies. **Rend. Circ. Mat. Palermo**, v. 33, n. 3, p. 436–440, 1984.
- [30] SOUSA, A. de; GIRÃO, F. The Gauss–Bonnet–Chern mass of higher-codimension graphs. **Pacific J. Math.**, v. 1, p. 27–44, 2019.
- [31] STEINER, J. **Jber preuss. akad. wiss.** Gesammelte Werke, v. 2, p. 171–177, 1971.
- [32] WANG, G.; XIA, C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space. **Adv. Math.**, v. 259, p. 532–556, 2014.