UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

RODRIGO MENDES PEREIRA

HOMOLOGIA SEMIALGÉBRICA SOBRE CORPOS REAIS FECHADOS

FORTALEZA
2012

RODRIGO MENDES PEREIRA

HOMOLOGIA SEMIALGÉBRICA SOBRE CORPOS REAIS FECHADOS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Algébrica
Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA
2012

Dedico este trabalho ao Cosmo, a Diva, a Renata e a Kátia.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela paz e paciência;

A todos os meus familiares e amigos pelo apoio imensurável e ensinamentos (algumas vezes involuntários);

A ótima orientação, apoio e ensinamentos do professor Alexandre Fernandes. Também ao professor Vincent Grandjean pelas orientações sobre a apresentação do trabalho em si.

A todos os professores do departamento que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro;

RESUMO

Esta dissertação está baseada em uma serie de trabalhos publicados por H. Delfs e M. Knebusch sobre uma teoria de homologia para espaços semialgébricos sobre corpos reais fechados. Neste trabalho, reunimos as definições e principais resultados sobre a teoria de homologia semialgébrica. Além disso, como aplicação dessa teoria, trazemos uma prova do Teorema de Ax-Grothendick para aplicações polinomiais sobre corpos reais fechados.

Palavras-Chave: Homologia Semialgébrica; Teorema de Ax-Grothendick; Corpos Reais Fechados.

ABSTRACT

This thesis is based on a series of papers published by H. Delfs and M. Knebusch on a homology theory to semialgebraic spaces on real closed fields. In this work, we collect the definitions and main results on the theory of semialgebraic homology. Furthermore, as application of this theory, we present a proof of the theorem of Ax-Grothendick for polynomials applications on real closed fields.

Keywords: Semialgebraic Homology; Ax-Grothendick Theorem; Real closed fields.

Sumário

Introdução

Um questionamento interessante e acessível é o seguinte:

Qualquer aplicação polinomial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ injetiva é sobrejetiva?

Com o intuito de obter uma resposta positiva para este questionamento, temos que a imagem de tal aplicação deve ser aberta, conexa e simplesmente conexa. Mas isto não significa que deva ser todo o $\mathbb{R}^2$. Contudo, um fato interessante é que qualquer espaço descrito por equações e inequações polinomiais pode ser decomposto em gráficos e faixas abertas (delimitadas por estes gráficos) sobre $C_\lambda \times \mathbb{R}$, onde C_λ pertence a uma família de intervalos e pontos sobre $\mathbb{R}$. Em particular,o complementar de espaços deste tipo ainda possui tal propriedade (Ver subseção 1.2.2). Nessa linha de raciocínio, usando tal decomposição para $X = \mathbb{R}^2 - \varphi(\mathbb{R}^2)$, (onde $\varphi(x,y) = (P_1(x,y), P_2(x,y))$ é uma aplicação polinomial injetiva) é possível obter que $X = \emptyset$. O ponto forte para mostrar que $X = \emptyset$ é obter primeiramente que $int(X) = \emptyset$, usando que o fato contrário geraria um impasse com a contagem de soluções complexas do sistema

$$\begin{cases} P(x,y) = a \\ Q(x,y) = b \end{cases}$$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Esta argumentação é essencialmente baseada na demonstração dada por Donald J. Newman em 1960 (Ver [1]) e em trabalhos de seminários com o professor Alexandre Fernandes. Em particular, pode-se concluir, por exemplo, a impossibilidade de

$$\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - Y$$

onde $Y = \{(x(t), y(t)); t \leq 0\}$ e, nesse caso, $\varphi(\mathbb{R}^2)$ um aberto conexo e conexo simples. Tal impossibilidade se justifica notando que

$$dim(\overline{Y}^z - Y) < dimY$$

e no entanto,

$$1 = dim(\overline{Y}^z - Y) = dimY = 1$$

$\overline{Y}^z$ denota o fecho de Zariski de Y. (Ver capítulo 2)

No presente trabalho é explicada (e usada) esta linguagem, desejando-se obter uma generalização deste resultado, considerando, por exemplo,

$$\varphi : K^n \to K^n \text{ aplicação regular injetiva}$$

onde K denota um corpo ordenado tal que polinômios em $K[X]$ possuem a propriedade do valor intermediário.

Discutiremos aqui a prova apresentada em [7]. Esta prova usa como ferramenta a geometria semialgébrica em K (capítulo 1) e conceitos básicos sobre dimensão de espaços (semi)algébricos e topologia de Zariski nesse espaços. No capítulo 3, é apresentada (e estabelecida) uma teoria de Homologia semialgébrica sobre espaços semialgébricos em corpos reais fechados e em particular é demonstrada a invariância topológica de tais grupos de homologia. Tal prova é impossível de ser obtida tal como é feito em espaços euclidianos (usando subdivisão baricêntrica). Este pode ser considerado o 2º resultado significativo (depois do teorema de injetividade). O príncipio de Transferência de Tarski-Seindenberg é peça fundamental para tornar consistente tal teoria de homologia bem como para compreender como tranferir consequencias topológicas conhecidas (advindas da teoria de homologia) no espaço euclidiano para um espaço K^n arbitrário.
Ainda sobre a sobrejetividade de aplicações regulares injetivas, a prova apresentada no último capítulo tem uma forte conexão com o artigo de Andrzej Bailynicki-Birula and Maxwell Rosenlicht denominado Injective Morphisms of Real Algebraic Varieties onde é provado que:

Se V_1, V_2 são subconjuntos algébricos de $\mathbb{R}^n$ então $\mathbb{R}^n - V_1$ e $\mathbb{R}^n - V_2$ são homeomorfos se, e somente se, $dimV_1 = dimV_2$.

Isto é suficiente para mostrar que uma aplicação regular (ver observação 1.15) injetiva f de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é sobrejetiva.

Nesse caso é considerado $V_1 = \overline{X}^z \cap \mathbb{R}^n$ e $V_2 = f^{-1}(V_1)$, onde X é o complemento da imagem (fechado) em $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, já se tem que $\mathbb{R}^n - V_1$

e $\mathbb{R}^n - V_2$ são homeomorfos. Mas trabalhando com a noção de dimensão e fecho de Zariski, obtém-se que $dimV_2 < dimV_1$! Portanto V_1 deve ser o conjunto vazio. Após a leitura deste trabalho, ficará mais claro a conexão citada há pouco.

Capítulo 1

Preliminares

.

Neste capítulo abordaremos os aspectos gerais sobre a estrutura e topologia de corpos reais fechados.

1.1 Corpos reais fechados

Definição 1.1. *Um corpo real fechado* $\mathbf{K}$ *é um corpo ordenado satisfazendo uma das seguintes condições equivalentes:*

- *Todo elemento positivo é um quadrado e todo polinômio em* $\mathbf{K}[X]$ *com grau ímpar tem uma raíz em* $\mathbf{K}$.
- *Para todo polinômio* $F \in K[X]$ *e para todo* a, b *em* $\mathbf{K}$ *tal que* $a < b$ *e* $F(a)F(b) < 0$ *existe* $c \in K, a < c < b$, *tal que* $F(c) = 0$.
- $K\left[\sqrt{-1}\right] = K[X]/(X^2+1)$ *é um corpo algebricamente fechado.*

Observação 1.2. *Naturalmente, elementos em* $K[X]/(X^2+1)$ *podem ser representados com a mesma notação algébrica de elementos em* $\mathbb{C}$. *Vemos que,*

$$x + 1 \in (x+1) \Rightarrow \overline{x+1} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{-1}.$$

Logo,

$$\overline{x}^n = \pm\overline{1}, \textit{ se } n \textit{ é par e } \overline{x}^n = \pm\overline{x} \textit{ quando } n \textit{ é impar.}$$

Seja então

$$\overline{a_0 + a_1x + a_2x + ...a_nx^n} \in K[X]/(X^2+1)$$

Então $\overline{a_0 + a_1x + a_2x + ...a_nx^n} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}\overline{x}, \alpha, \beta \in K$

Assim,

$$K[X]/(X^2+1) = \left\{\overline{\alpha} + \overline{\beta}\overline{x}, \alpha, \beta \in K\right\} = K[\sqrt{-1}]$$

No caso então de um corpo real fechado K, um polinômio em $K[X]$ de grau positivo sempre possui ao menos uma raíz em $K[\sqrt{-1}]$.

.

Observação 1.3. *Quando não houver perigo de confusão, representaremos $\mathbb{C} = K[i]$, K um corpo real fechado arbitrário.*

Uma topologia em K^n pode ser naturalmente dada pela topologia de K obtida pelo produto de intervalos abertos (a_i, b_i), $a_i < b_i$, formando uma base desta topologia. Ou ainda através de bolas abertas definidas em K^n (topologia Euclidiana). Como sabemos, tais topologias são equivalentes.

Definição 1.4. *Seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, $r \in K$,K corpo real fechado e $r > 0$. Denotaremos,*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

$$B_n(x,r) = \{y \in K^n; |y-x| < r\}$$

$$\overline{B_n}(x,r) = \{y \in K^n; |y-x| \leq r\}$$

$$S^n(x,r) = \{y \in K^{n+1}; |y-x| = r\} \text{ Esfera n-dimensional em } K.$$

Proposição 1.5. *Toda aplicação polinomial $P : K^n \to K^m$ é contínua com esta topologia.*

Demonstração. Mostremos inicialmente para uma aplicação $P : K^2 \to K$. Se mostrarmos que $P_1(x,y) = x + y$ e $P_2(x,y) = x.y$ são contínuas então segue-se que P será contínua. Consideremos ,sem perda de generalidade, um aberto básico $B = (0,1) \in K$. A imagem inversa $P_1^{-1}((0,1))$ é a faixa aberta compreendida entre as retas $y = -x$ e $y = 1 - x$. Portanto $P_1(x,y)$ é contínua. Em relação a P_2, temos que $P_2^{-1}((0,1))$ consiste da região aberta entre o gráfico da função $\frac{1}{x}$ e as retas $x = 0$, $y = 0$, nos 1º e 3º quadrantes em K^2. Segue-se então a continuidade de P_2. O argumento é facilmente generalizado para K^n. Agora, sabemos que uma aplicação $P : K^n \to K^m$ é contínua $\Leftrightarrow$ P_i é contínua. (Para o nosso caso, onde temos um número finito de abertos básicos). $\square$

Exemplo 1.6. *O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é, obviamente, fechado. O corpo dos números algébricos sobre $\mathbb{Q}$ (Soluções de equações polinomiais com coeficientes em $\mathbb{Q}$) é também um corpo real fechado. Outro exemplo interessante é o corpo das séries de Puiseux com coeficientes em $\mathbb{R}$. Mais precisamente,*

$$\mathbb{R}\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} a_k . t^{\frac{k}{n}}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

E nesse caso, como $\mathbb{C}\{\{t\}\} = \mathbb{R}\{\{t\}\}[i]$ segue-se que $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ é um corpo real fechado.

Observação 1.7. *Existe uma ordem em $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ denotada por 0_+ tal que a indeterminada t é positiva e menor do que qualquer número positivo $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que, por exemplo, $\lambda(t) = a_p t^{\frac{p}{n}} + a_{p-1} t^{\frac{p-1}{n}} + \ldots + a_{m+1} t^{\frac{m+1}{n}} a_m t^{\frac{m}{n}} > 0 \Leftrightarrow a_m > 0$. Note que é preciso uma certa cautela ao trabalhar com corpos reais fechados diferentes de $\mathbb{R}$: Em particular, veja que $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ é não arquimediano (pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{t} > N$) e portanto intervalos da forma $[0, \frac{r}{t}]$ não ficam "pequenos" já que $\mathbb{R} \supset [0, \infty) \subset [0, \frac{r}{t}]$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.*

Mostremos uma das equivalências citadas na definição 1.1.

Proposição 1.8. *Seja K um corpo ordenado tal que $K\left[\sqrt{-1}\right]$ é algebricamente fechado. Considere $f \in K[X]$, $a, b \in K$ com $a < b$. Se $f(a).f(b) < 0$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração. f pode ser decomposto em $K\left[\sqrt{-1}\right]$ como produto de fatores lineares ou termos da forma $(X - (c + id)) . (X + (c + id)) = (X - c)^2 + d^2$. Se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos então $g(a)$ e $g(b)$ terão sinais opostos para algum fator linear g de f. Segue-se por continuidade que a raiz de g está em $]a, b[$. $\square$

Mais geralmente, um corpo K é dito real quando -1 não pode ser escrito como soma de quadrados de elementos de K. Tal corpo possui característica zero, já que se fosse $m.1 = 0$, $m \in \mathbb{N}$ teríamos $-1 = m-1$. Nesse contexto um corpo real K é dito corpo real fechado quando não possui extensão algébrica $K \subset K_1$, K_1 diferente de K.

Observação 1.9. *Se K for um corpo real fechado então existe uma única ordem $<$ em K, compatível com as operações de K.*

Demonstração. Ver [8], teorema 1.1. □

Segundo [7] quando corpos reais fechados contém estritamente $\mathbb{R}$, tais corpos possuem elementos positivos que são menores do que qualquer número real positivo como, por exemplo, $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ (Note que a ordem 0_+ definida em $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ é única de acordo com a observação acima). Já no sentido contrário, há corpos reais fechados estritamente contidos em $\mathbb{R}$ como o corpo dos números algébricos com coeficiente em $\mathbb{Q}$ (que denotaremos por $\mathbb{R}_{alg}$).

Observação 1.10. *Em geral, o conceito de conexidade falha quando se considera como ambiente corpos reais fechados diferentes de $\mathbb{R}$. Em relação a compacidade é preciso também uma certa cautela. Vejamos alguns exemplos:*

1. *O corpo $\mathbb{R}_{alg}$ dos números reais algébricos sobre $\mathbb{Q}$ não é conexo. Com efeito, $A = (-\pi, \pi) \bigcap \mathbb{R}_{alg} \subset \mathbb{R}_{alg}$ é aberto e fechado em $\mathbb{R}_{alg}$ com a topologia euclidiana. Considerando agora o intervalo $[0, 1]$ em $\mathbb{R}_{alg}$, vemos que $\bigcup_{n=5}^{\infty}[0, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}) \cap (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}, 1]$ é uma cobertura de $[0, 1]$ que não admite cobertura finita.*

2. *Em $\mathbb{R}\{\{t\}\}$, $\{f \in \mathbb{R}\{\{t\}\}\,; \exists\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \text{ e } f > \lambda\}$ é aberto e fechado. No que diz respeito a compacidade, é possível ainda obter uma cobertura de $[0, 1] \subset \mathbb{R}\{\{t\}\}$ que não admite subcobertura finita.*

No que se segue, veremos uma definição de adequada de conexidade (resp compacidade), tomando uma classe especial de conjuntos sobre corpos reais fechados.

1.2 Geometria semialgébrica sobre K

Uma classe importante de conjuntos que trabalharemos sobre corpos reais fechados são os conjuntos algébricos. Tal classe é bastante ampla (o próprio K^n é algébrico). Como exemplo (Ver em Nash [10]), podemos citar o fato de que qualquer variedade diferenciável fechada pode ser visualizada como uma porção não singular de uma variedade real algébrica. Mais precisamente, qualquer mergulho de uma subvariedade diferenciável pode ser aproximado por um mergulho algébrico da mesma. Muitos dos resultados e propriedades topológicas importantes sobre tais conjuntos se dá pela estabilidade de uma classe maior de conjuntos (no entanto a menor classe que contém os algébricos de K^n): A classe de conjuntos semialgébricos. Tal estabilidade é essencialmente dada pelo fato dos conjuntos semialgébricos serem fechados sobre projeções. Nesta seção abordaremos os resultados básicos sobre conjuntos semialgébricos. Estes fatos serão úteis futuramente.

1.2.1 Conjuntos semialgébricos e aplicações semialgébricas

Definição 1.11. *Um subconjunto semialgébrico de K^n é um subconjunto da forma*

$$\bigcup_{i=1}^{r}\bigcap_{j=1}^{r_i}\{x \in K^n / f_{ij} *_{ij} 0\} \ (I)$$

Onde $f_{ij} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ e $*_{ij}$ é $<$ ou $=$, para $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots r_i$.

Observação 1.12. *Note que poderíamos ter definido a classe de conjuntos semialgébricos de K^n como a menor classe $\mathcal{SA}_n$ de subconjuntos de K^n tal que*

1. *Se $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$, então $\{x \in K^n; P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n$ e $\{x \in K^n; P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n$.*

2. *$\mathcal{SA}_n$ é uma álgebra booleana de subconjuntos de K^n*

Podemos ver que tais definições são equivalentes já que a união finita de subconjuntos da forma $\bigcap_1^{r_i}\{x \in K^n / f_{ij} *_{ij} 0\}$ (Como definimos em (I)) é a menor classe de subconjuntos a qual valem as propriedades 1 e 2 citadas acima.

Vejamos alguns exemplos:

- Subconjuntos definidos por equações polinomiais (Conjuntos algébricos) em $K[X_1, \ldots, X_n]$ são semialgébricos.

- Os subconjuntos semialgébricos de K consistem exatamente da união finita de pontos e intervalos.(Ver 1.12).

- Considere $f : K^m \to K^n$ aplicação polinomial, onde $f(x_1, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots f_n(x_1, \ldots, x_m))$. Então $f^{-1}(A)$ é semialgébrico, para todo conjunto $A \subset K^n$ semialgébrico.

- O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = e^x\}$ não é semialgébrico.

Observação 1.13. *Um conjunto semialgébrico $A \subset K^n$ é invariante por mudança linear de coordenadas. Segue-se que se A' é dado por apenas uma permutação das coordenadas de elementos de A em K^n, então A' é semialgébrico.*

Definição 1.14. *Considere $A \subset K^n$ e $B \subset K^m$ conjuntos semialgébricos. Uma aplicação $f : A \to B$ é dita semialgébrica quando seu gráfico é um conjunto semialgébrico de K^{n+m}.*

Uma aplicação polinomial $P : A \subset K^n \to K^m$ (A semialgébrico) é evidentemente semialgébrica. Mais geralmente,

Observação 1.15. *Dado $A \subset K^n$, dizemos que $g : A \to K^p$ é uma aplicação regular quando $g = \dfrac{P}{Q}$ onde P,Q são aplicações polinomiais de tal modo que Q é não nulo em A $(Q_i(A) \neq 0, 1 \leq i \leq m)$. Tal aplicação é semialgébrica, pois*

$$G(g) =$$
$$\{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_p); y_i Q_i(x_1, \ldots, x_n) - P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq p\}$$

1.2.2 Decomposição de conjuntos semialgébricos

A decomposição de conjuntos semialgébricos é, sem dúvida, uma característica fundamental da estrutura semialgébrica pois permite obter como corolário o importante Teorema de Tarski-Seindenberg. Este teorema garante a estabilidade sobre projeções mencionada anteriormente. Além disso, é possível estabelecer o conceito de dimensão de conjuntos semialgébricos.

Definição 1.16. *Uma decomposição algébrica cilíndrica (c.a.d) de K^n é uma sequência $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n, 1 \leq k \leq n$ de forma que $\mathcal{C}_k$ é uma partição finita de K^k em subconjuntos semialgébricos, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Para $C \in \mathcal{C}_1$, temos que C é um ponto ou um intervalo aberto em K;*

2. *Se $1 < k < n$ e $C \in \mathcal{C}_k$ então existe um número finito de aplicações $\xi_{C,1} \ldots \xi_{C,l_C} : C \to K$ contínuas e semialgébricas de modo que o cilindro $C \times K \in K^k + 1$ é a união disjunta de células de $\mathcal{C}^{k+1}$ que são:*

- *Ou gráficos das funções* $\xi_{C,J}, 1 \leq j \leq l_C$:

$$G_{C,j} = \{(x, x_{k+1}); x_{k+1} = \xi(x)\}$$

- *Ou faixas delimitadas por gráficos de funções* $\xi_{C,j}, \xi_{C,j+1}$, *convencionando* $\xi_{C,0} = -\infty, \xi_{C,l_C+1} = +\infty$:

$$B_{C,j} = \{(x, y) \in C \times K; \xi_{C,j} < y < \xi_{C,j+1}(x)\}$$

Dado $A \subset K^n$ semialgébrico, temos que um homeomorfismo semialgébrico é uma bijeção semialgébrica contínua $\sigma : A \to B$ tal que σ^{-1} é também contínua. Logo por 1.13 σ^{-1} é também semialgébrica. (Mais geralmente, qualquer bijeção semialgébrica possui inversa semialgébrica).

Proposição 1.17. *Qualquer célula de um c.a.d é semialgébricamente homeomorfo a um cubo aberto* $(0,1)^d$ *em* K^d, $d \in \mathbb{N}$. $((0,1)^0 = \{pt\})$.

Demonstração. O resultado já é válido para k = 1. Daí, podemos obter o resultado por indução sobre k.

- Se a célula for do tipo $G_{C,j}$ (gráfico) então naturalmente esta célula é homeomorfa a C (onde $C \simeq (0,1)^{k-1}$ por hipótese de indução)

- Se for do tipo $B_{C,j}$ então podemos definir $\varphi_{C,j} : C \times (0,1) \to B_{C,j}$ por

$$(x,t) \in C \times (0,1) \mapsto$$

$$\begin{cases} (x, (1-t)\xi_{C,j} + t\xi_{C,j+1}(x)), \quad 0 < j < l_C \\ (x, \frac{(1-t)}{t} + \xi_{C,1}) \quad j = 0 \ , \ l_C \neq 0 \\ (x, -\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}) \quad j = 0 \ , \ l_C = 0 \\ (x, \frac{t}{1-t} + \xi_{C,j}) \quad j = l_C \end{cases}$$

  Em cada um dos casos, $\varphi_{C,j}$ é um homeomorfismo, ou seja, $B_{C,j} \simeq C \times (0,1) \simeq (0,1)^k$.

$\square$

Definição 1.18. *c.a.d adaptado*
Dada uma família $P_1, \ldots, P_s$ *de polinômios em* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *dizemos que* $C \subset K^n$ *é* $(P_1, \ldots, P_s)$ *invariante quando* P_i *possui sinal constante* $(<, >$ *ou* $=)$ *sobre* C *para cada* $1 \leq i \leq s$. *Um c.a.d adaptado a* $(P_1, \ldots, P_s)$ *é um c.a.d de* K^n *tal que cada célula* $C \in \mathcal{C}_n$ *é* $(P_1, \ldots, P_s)$ *invariante.*

Um ponto essencial é o seguinte resultado que consideraremos como lema:

Lema 1.19. *Dada qualquer família finita $P_1, \ldots, P_s$ em $K[x_1, \ldots, x_n]$, existe um c.a.d adaptado a $P_1, \ldots, P_s$.*

Demonstração. Ver [11] subseção 2.3.2. (A prova em $\mathbb{R}$ pode ser transferida para um corpo real fechado arbitrário.) □

Agora podemos estabelecer o

Teorema 1.20. ***(Teorema de decomposição cilíndrica)*** *Todo conjunto semialgébrico de K^n é a união disjunta de um número finito de conjuntos semialgébricos, cada um semialgebricamente homeomorfo a $(0,1)^d \subset K^d$, $d \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $A \subset K^n$ semialgébrico. Sem perda de generalidade, podemos supor

$$A = \{x \in K^n; P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \ldots, Q_l(x) > 0\}.$$

Pelo Lemma acima existe um c.a.d de K^n adaptado a família de polinômios $P, Q_1, \ldots, Q_l$. Temos que

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} A \bigcap C_i, \quad C_i \in \mathcal{C}_n, \ \ A \bigcap C_i \neq \emptyset.$$

Como em cada C_i, $P, Q_1, \ldots Q_l$ tem sinal constante temos que

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} C_i, \quad A \bigcap C_i \neq \emptyset.$$

E como vimos (proposição 1.17) cada uma destas células é homeomorfa a um cubo aberto $(0,1)^{d_i}$, $d_i \in \mathbb{N}$. □

Corolário 1.21. *(Tarski-Seindenberg)*
Seja B um subconjunto semialgébrico de K^{n+1} e $\pi : K^{n+1} \to K^n$ a aplicação projeção nas primeiras n coordenadas. Então $\pi(B)$ é semialgébrico.

Demonstração. Se B é semialgébrico então pelo teorema da decomposição cilíndrica podemos escrever B como união de células (semialgébricos homemorfos a cubos): $B = \bigcup_{j=1}^{p} \beta_j$. Cada β_j consiste de uma faixa $B_{C,j}$ ou um gráfico $G_{C,j}$ sobre o cilindro $C_j \times K$, onde C_j é uma célula de um c.a.d de K^n. Portanto $\pi(B) = \bigcup_{j=1}^{p} \pi(B_j) = \bigcup_{j=1}^{p} C_j$. Segue-se então que $\pi(B)$ é semialgébrico. □

Exemplo 1.22. *O conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \exists z \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *é semialgébrico pois* $A = \pi\left(S^2(0,1)\right)$*, onde* π *é a projeção de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$*.*

1.3 Eliminação de quantificadores e príncipio de transferência de Tarski-Seindenberg

Essencialmente conjuntos semialgébricos são descritos por equações e inequações polinomiais. A partir daí, conjuntos semialgébricos podem ser descritos através do que é denominado fórmulas de 1º ordem. Uma fórmula de 1º ordem é descrita com equações e inequações polinomiais ($P = 0, P > 0$), conectivos ($\vee, \wedge \neg$) e quantificadores ($\exists, \forall$) em quantidade finita. Ela possui variáveis livres ($(y_1, \ldots, y_n) = Y \subset K^n$) quando não dependem de quantificadores. Um subconjunto em K^n descrito por uma fórmula livre de quantificadores é evidentemente um conjunto semialgébrico. O fato interessantíssimo é

Teorema 1.23. *(Eliminação de quantificadores sobre corpos reais fechados) Seja* $\varphi(Y)$ *uma fórmula de 1º ordem com coeficientes num anel ordenado* F *contido em* K*, corpo real fechado. Então existe uma fórmula de 1º ordem* $\psi(Y)$ *livre de quantificadores com coeficientes em* F *tal que tais formulas são equivalentes, isto é, para todo* $Y \in K^n$*,* $\varphi(Y)$ *é verdadeira* $\Leftrightarrow$ $\psi(Y)$ *é verdadeira.*

Demonstração. Ver [14], teorema 2.77. □

O ponto chave desta prova é que um subconjunto em K^n descrito por uma fórmula de 1º ordem com variáveis que dependem de quantificadores pode ser visto como projeções de conjuntos semialgébricos em K^{n+1},ou seja, é uma consequencia direta do teorema de Tarski-Seindenberg (que aqui foi posto como corolário só por uma questão de organização).

Exemplo 1.24. *Seja* $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *semialgébrico. Então o fecho topológico de* B

$$\overline{B} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; \forall \epsilon > 0, \exists x \in B \quad |y - x| < \epsilon\}$$

é semialgébrico.

Enunciaremos agora dois resultados decorrentes do teorema acima que serão de fundamental importância para nossos objetivos nesse trabalho:

Proposição 1.25 (Príncipio de transferência de Tarski-Seindenberg). *Considere K' um corpo real fechado contendo o corpo real fechado K. Se φ é uma sentença (fórmula sem variáveis livres) com coeficientes em K então*

$$\varphi \text{ é verdade em } K \Leftrightarrow \text{ é verdade em } K'$$

Proposição 1.26. *Seja K um corpo real fechado. Uma sentença φ com coeficientes em $\mathbb{Q}$ é verdade em K se, e somente se, é verdade em qualquer corpo real fechado.*

Demonstração. K_{alg} é o fecho real de Q, isto é, a menor extensão real fechada (e algébrica) contendo Q. Logo, qualquer corpo real fechado R contém K_{alg}. Portanto pela proposição anterior:

$$\varphi \text{ é verdade em } K \Leftrightarrow \text{ é verdade em } K_{alg} \Leftrightarrow \text{ é verdade em } R.$$

□

Observação 1.27. *Abaixo algumas boas consequências do corolário 1.21 e teorema 1.23 que evidenciam a estabilidade quando se trabalha com uma estrutura semialgébrica:*

1. *Imagens diretas e inversas de aplicações semialgébricas é semialgébrica;*
2. *Fecho e interior de espaços semialgébricos são semialgébricos.*
3. *(Derivadas parciais) Considere uma função semialgébrica $f : U \to K$. U aberto semialgébrico. Se f admite derivadas parciais, então tais derivadas são semialgébricas.*

Demonstração. Com efeito, (1) segue-se pelo corolário 1.21, já que imagem direta (ou inversa) pode ser obtido pela projeção do gráfico. Agora, note que interior e derivadas parciais podem ser descritas com fórmulas de $1^{\underline{o}}$ ordem.

□

1.3.1 Extensão de conjuntos e aplicações semialgébricas

Considere K um corpo real fechado e K' um corpo real fechado contendo K. Dado $A \subset K^n$ semialgébrico sua extensão (que denotaremos por $A_{K'}$) é um subconjunto de K'^n definido pelas mesmas equações livre de quantificadores que definem A. Tal conjunto é bem definido, isto é, depende apenas de A e não da fórmula escolhida que descreve A. De fato, sejam φ, ψ fórmulas de $1^{\underline{o}}$ ordem livre de quantificadores descrevendo A. Temos

$$A = \{y \in K^n \mid \varphi(y)\} = \{y \in K^n \mid \psi(y)\}$$

Agora a sentença

$$\forall y \ \varphi(y) \ \Leftrightarrow \ \psi(y)$$

Pode ser transferida para K' usando a proposição 1.26. Portanto temos que

$$A_{K'} = \{y \in K'^n \mid \varphi(y)\} = \{y \in K'^n \mid \psi(y)\}$$

de modo que $A_{K'}$ está bem definido.
Naturalmente, as seguintes consequências são óbvias:

- $(\bigcup_{i=1}^{p} A_i)_{K'} = \bigcup_{i=1}^{p} A_{iK'}$
- $(\bigcap_{i=1}^{p} A_i)_{K'} = \bigcap_{i=1}^{p} A_{iK'}$
- $(A^C)_{K'} = (A_{K'})^C$ Onde A^C indica o complementar de A.

Agora, Sejam $S \subset K^m$, $T \subset K^n$ semialgébricos e $f : S \to T$ uma aplicação semialgébrica. Estendendo o gráfico $G \subset S \times T$ obtemos a extensão da aplicação f. $f_{K'}$ é portanto definida como a função cujo o gráfico é $G_{K'}$. Para ver que $G_{K'}$ trata-se realmente de um gráfico note que a afirmação de G ser um gráfico pode ser expressa pela seguinte sentença

$$\forall x \ (\phi(x) \Leftrightarrow (\exists y \Gamma(x,y)) \wedge (\forall y \Gamma(x,y) \Rightarrow \psi(y)) \wedge (\forall y \forall y' (\Gamma(x,y) \wedge \Gamma(x,y')) \Rightarrow y = y'))$$

Onde $S = \{x \in K^m \mid \phi(x)\}$, $T = \{y \in K^n \mid \varphi(y)\}$ e $G = \{(x,y) \in K^{m+n} \mid \Gamma(x,y)\}$.

Outra consequência útil é a

Proposição 1.28. *Uma função semialgébrica $f : S \to T$ é bijetiva se, e somente se, $f_{K'} : S_{K'} \to T_{K'}$ é bijetiva.*

Demonstração. Para a injetividade de f podemos considerar a seguinte sentença(π representa projeção nas últimas n coordenadas):

$$\forall x \ \forall y \, ((\pi(G \cap (y \times K^m))) = (\pi(G \cap (x \times K^m))) \Rightarrow x = y)$$

onde, por abuso de notação, a 1º igualdade é caracterizado pelas suas fórmulas. A sobrejetividade também pode ser descrita sem problemas. □

1.4 Conexidade e compacidade

Agora exibimos uma definição apropriada de conexidade em corpos reais fechados.

Definição 1.29. *Dado $A \subset K^n$ semialgébrico. A é dito semialgebricamente conexo quando não é união de dois subconjuntos semialgébricos fechados em A. Como tais subconjuntos seriam ambos abertos e fechados em A, equivalentemente A é conexo quando não possue estritamente um subconjunto aberto e fechado em A.*

Observação 1.30. *Se A é semialgebricamente conexo e B é homeomorfo (semialgébrico) a A então B é semialgebricamente conexo.*

Proposição 1.31. *O hipercubo $(0,1)^d \subset K^d$ é semialgebricamente conexo. Mais geralmente, Um conjunto semialgébrico A possui um número finito de componentes semialgebricamente conexas.*

Demonstração. Para a primeira parte, note que $(0,1)$ é semialgebricamente conexo. Agora usando o teorema da decomposição cilíndrica, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, onde esta união é disjunta e cada A_i é (semialgebricamente) homeomorfo a um intervalo $(0,1)^{d_i} \subset K^{d_i}$. Portanto pela observação 1.30 cada A_i é uma componente semialgebricamente conexa. □

No que diz respeito a compacidade, vimos no exemplo 1.10 que o intervalo $[0,1]$ apesar de limitado e fechado não é compacto. No entanto tal caracterização (limitado e fechado) é suficiente para os resultados que se seguem, principalmente no que diz respeito a triangulação e definição dos grupos de homologia semialgébrica que veremos no próximo capítulo. Abaixo, um resultado análogo ao caso de subconjuntos compactos:

Teorema 1.32. *Considere um conjunto A semialgébrico em K^n fechado e limitado. Dada uma aplicação $f : A \to K^p$ contínua e semialgébrica temos que $f(A)$ é também fechado e limitado.*

Demonstração. Ver [14] teorema 3.20 pág 93. □

Capítulo 2

Sobre conjuntos (semi)algébricos: Dimensão

Dado T um conjunto semialgébrico e sua decomposição cilíndrica $T = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$, sua dimensão é, por definição, o número $d = max\,\{d_1, \ldots, d_p\}$ (onde $C_i \simeq (0,1)^{d_i}$) que é independente da decomposição (ver [11]). Neste capítulo, dispomos de uma definição algébrica de dimensão, obtendo que é equivalente à citada acima. Exibimos então algumas consequências, usando o conceito de dimensão algébrica e via c.a.d. Como referência temos [7] e [11].

Definição 2.1. *Seja* $\mathfrak{B} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$, $K[x_1, \ldots, x_n]$ *anel de polinômios. Denotemos por* $\mathcal{Z}(\mathfrak{B}) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ *os zeros comuns de todos os polinômios de* $\mathfrak{B}$*:*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{B}) = \{x \in K^n; P(x) = 0, \forall P \in \mathfrak{B}\}$$

Um subconjunto algébrico de K^n *é um subconjunto da forma* $\mathcal{Z}(\mathfrak{B})$ *para algum* $\mathfrak{B} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$.

Denotemos por $\mathcal{I}(V)$ o ideal de polinômios P tal que $P(V) = 0$, onde V é um conjunto algébrico de K^n.

Proposição 2.2. *Dado um subconjunto algébrico* $V \subset K^n$ *então* $V = P^{-1}(0)$*, para algum* $P \in K[x_1, \ldots, x_n]$

Demonstração. Se V é algébrico então $V = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(V))$. Como $K[x_1, \ldots, x_n]$ é noetheriano (ver [13] teorema 2.3 pág 371), $\mathcal{I}(V)$ é finitamente gerado. Seja então $\mathcal{I}(V) = (P_1, \ldots, P_m)$. Definindo $P = P_1^2 + \ldots + P_m^2$. Segue-se que $V = P^{-1}(0)$. □

Corolário 2.3. *Seja $f : X \to Y$ aplicação regular com $V \subset Y$ conjunto algébrico. Então $f^{-1}(V) \subset X$ é também algébrico.*

Demonstração. $V = \{y \in Y; P(y) = 0,\ para\ algum\ P \in K[x_1, \ldots, x_n]\}$
$x \in f^{-1}(V) \Rightarrow P(f(x)) = 0$. Como f é regular, temos que $f = \frac{\overline{P}}{Q}$. Logo,

$$P\left(f(x)\right) = P\left(\left(\frac{\overline{P}_1}{Q_1}(x), \ldots, \frac{\overline{P}_n}{Q_n}(x)\right)\right) = 0$$

Segue-se então que $f^{-1}(V)$ é algébrico.

□

Nesse contexto, podemos trabalhar com uma topologia em K^n definindo seus abertos como sendo complemento de conjuntos algébricos. Esta é chamada de topologia de Zariski. O fecho de Zariski de um subconjunto $A \subset K^n$ é o menor algébrico em K^n que contém A. Denotaremos este fecho por $\overline{A}^z$.

Observação 2.4. *Considere K^n como subespaço topológico de $K[\sqrt{-1}]^n$*

1. *K^n não é hausdorff com esta topologia;*
2. *Abertos na topologia de Zariski (resp fechados) são abertos (resp fechados) na topologia euclidiana dada em K^n;*
3. *Um aberto euclidiano é denso (dito Zariski-denso) na topologia de Zariski (e vice-versa);*
4. *se $Z \subset K^n$ é tal que $Z = \overline{Z}^z$ então Z não pode ser denso sobre K^n;*
5. *K é Zariski-denso em $K[\sqrt{-1}]$*

Demonstração. Para 2, note que pela proposição um fechado na topologia de Zariski é da forma $V = P^{-1}(0)$ e portanto um fechado na topologia euclidiana.
Para 3, considere primeiramente uma bola aberta B em K^2 centrada na origem. Seja f dado em $K[x, y]$ se anulando em B. Podemos considerar $f(x, y)$ com coeficientes em $K[x]$. Como cada um destes coeficientes em f tem um número finito de raízes distintas em K, podemos escolher $x_0 \in K$ tal que algum coeficiente não constante de $f(x_0, y)$ seja não nulo. Nesse caso, variando y temos que $f(x_0, y)$ teria infinitas raízes em K. Isto só é possível se $f \equiv 0$. O caso geral (K^n) é obtido iterando este processo. Portanto B é Zariski denso. 1 e 4, segue imediatamente de 3. Para concluir, se $P(x)$ se anula em K então se anula em $K[\sqrt{-1}]$, portanto segue 5. □

Definição 2.5. *Seja $S \subset K^n$ um conjunto semialgébrico. Denotemos por $\mathcal{P}(S)$ o anel $K[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(S)$ de funções polinomiais sobre S. A dimensão de S (que denotaremos por $dim S$) será o comprimento maximal de cadeias de ideais primos em $\mathcal{P}(S)$. Mais precisamente, se $m = dim(S)$, então existe uma cadeia de ideais primos em $\mathcal{P}(S)$ tal que $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m$. Com essa abordagem, obtemos facilmente a*

Proposição 2.6. *Seja $S \subset K^n$ semialgébrico. Então*

$$dim(S) = dim(\overline{S}) = dim(\overline{S}^z)$$

Demonstração. Via limite de sequências, é imediato que $\mathcal{I}(S) = \mathcal{I}\left(\overline{S}\right)$. E pela definição de $\overline{S}^z$ obtemos $\mathcal{I}(S) = \mathcal{I}\left(\overline{S}^z\right)$. □

Obter informações sobre conjuntos semialgébricos pode ser feito olhando para células de uma decomposição cilíndrica deste. Quando se trata de conjuntos algébricos, podemos inicialmente trabalhar com suas componentes irredutíveis. Vamos a uma definição.

Definição 2.7. *Um conjunto algébrico irredutível $V \subset K^n$ é dito ser irredutível quando*

$$V = V_1 \cup V_2,\ V_1,\ V_2 \text{ algébricos} \Rightarrow V = V_1 \text{ ou } V = V_2$$

Teorema 2.8.
1. *Todo subconjunto algébrico V possui uma única decomposição como uma união de um número finito de subconjuntos algébricos irredutíveis $V_1, \dots V_p$ tal que $V_i \nsubseteq V_j$, $i \neq j$.*
2. *V é irredutível se e somente se $\mathcal{I}(V)$ é um ideal primo.*
3. *No caso de V irredutível, $\mathcal{P}(V)$ é um domínio de integridade e portanto podemos considerar seu corpo de frações que denominaremos $\mathcal{K}(V)$. Nesse caso, $dim V = [\mathcal{K}(V) : K]$.*

Demonstração. Para 1 veja [12], corolário 1.6 e para 2 e 3 veja [7] teorema 2.8.3. □

Exemplo 2.9. *Seja $E_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$. Então considerando $\mathcal{P}(E_z)$ temos que $dim E_z = [\mathcal{K}(E_z); \mathbb{R}] = 1$.*

Podemos agora relacionar o conceito de dimensão visto sob o ponto de vista da decomposição cilíndrica de espaços semialgébricos. Mais precisamente,

Teorema 2.10. *Se $S = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$ é a união finita de conjuntos semialgébricos S_i tal que cada S_i é semialgebricamente homeomorfo ao cubo $(0,1)^{d_i}$. Então $dim S = max\{d_1, \ldots, d_p\}$*
Antes da prova, consideremos o seguinte lema:

Lema 2.11. *Sejam V, $W \subset K^n$ conjuntos algébricos. Então valem as seguintes afirmações, considerando a dimensão algébrica definida em 2.5:*

1. *$dim(V \times W) = dim V + dim W$*
2. *Se V, W irredutíveis então $V \times W$ é também irredutível.*
3. *Se W é irredutível, $V \subsetneq W$ então $dim V < dim W$*
4. *Seja $f : V \to K^p$ uma aplicação regular, V e $\overline{f(V)}^z$ irredutíveis. Então f induz um homomorfismo injetivo entre os corpos de frações $\mathcal{K}(\overline{f(V)}^Z)$ e $\mathcal{K}(V)$.*

Demonstração. Para 1,2 e 3 ver [7] Capítulo 2, seção 2.8.

Para 4, observe que $V \xrightarrow{f} \overline{f(V)}^z \xrightarrow{\frac{p}{q}} K$ induz um homomorfismo $\mathcal{K}(\overline{f(V)}^z) \xrightarrow{f^*} \mathcal{K}(V)$ onde

$$f^*(\tfrac{p}{q}) = \tfrac{pof}{qof} : V \to K.$$

Se $\frac{p_1 of}{q_1 of} = \frac{p_2 of}{q_2 of}$ então $\frac{p_1}{q_1}(f(V)) = \frac{p_2}{q_2}(f(V))$. Agora, note que devemos ter $\frac{p_1}{q_1}(\overline{f(V)}^z) = \frac{p_2}{q_2}(\overline{f(V)}^z)$ pois caso contrário, pela regularidade, se $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$ diferem para algum x em $\overline{f(V)}^z - f(V)$ então diferem para algum aberto euclidiano B contendo x. Como $f(V)$ é Zariski-denso em $\overline{f(V)}^z$ segue-se que $f(V)$ e B teriam interseção não vazia. Logo $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ e assim f^* é injetivo. □

Vamos então a prova do teorema*:*

Demonstração. Inicialmente, note que $\overline{\bigcup_{i=1}^{p} S_i}^z = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{S_i}^z$. Nesse caso é suficiente provar o teorema para uma célula $C \subset K^n$ de um c.a.d. Esta prova será feita por indução.
Se $n = 1$ então como vimos, as células em K são pontos (nesse caso seu fecho de Zariski é o próprio ponto) ou intervalos abertos (e nesse caso seu fecho de Zariski e todo o K). Portanto vale o resultado. Considere então $S \subset K^n$, $n > 1$ e suponha o resultado válido para $n - 1$. Seja C uma célula da decomposição cilíndrica de S. Então

$$\pi(C) = D \subset K^{n-1} \text{ é uma célula, } D \simeq (0,1)^d.$$

Por hipótese,

$$dim\overline{D}^z = d \text{ (como conjunto algébrico)}$$

Temos então duas possibilidades:

1. Suponha C um gráfico

$$C = \{(x, \xi(x)); x \in C\} \subset D \times K \qquad \text{(I)}$$

Como $\xi : D \to K$ é uma aplicação semialgébrica, segue-se que $C = G(\xi)$ é semialgébrico e portanto existe um polinômio não nulo $P \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\forall x \in D$, $P(x, \xi(x)) = 0$. Seja então $Z = \mathcal{Z}(P)$ e considere $\overline{D}^Z = V_1 \cup \ldots \cup V_p$ sua decomposição em componentes irredutíveis. Temos por (I) que

$$\overline{C}^z \subset Z \cap \overline{D}^z \times K = Z \cap ((V_1 \times K) \cup \ldots \bigcup (V_p \times K))$$
$$\overline{C}^z \subset [Z \cap ((V_1 \times K)] \cup [Z \cap (V_2 \times K))] \cup \ldots \cup [Z \cap (V_p \times K)]$$

Temos que $Z \cap (V_i \times \mathbb{R}) \subsetneq V_i \times \mathbb{R}$. Pelo lema anterior, $dim(V_i \times \mathbb{R}) = dimV_i + 1$ e $V_i \times \mathbb{R}$ é irredutível. Segue-se pelo mesmo lema (item 3) que

$$dim\overline{C}^z < d + 1.$$

Deseja-se obter então, por outro lado, que

$$dim\overline{C}^z \geqslant d$$

Seja W uma componente irredutível de $\overline{C}^z$. Afirmamos que $\overline{\pi(W)}^z$ é irredutível. De fato, suponha $\overline{\pi(W)}^z = F_1 \cup F_2$, F_1, F_2 algébricos. Temos que $W \subset \pi^{-1}(F_1) \cup \pi^{-1}(F_2)$ (ambos algébricos) e pela irredutibilidade $W \subset \pi^{-1}(F_1)$ ou $W \subset \pi^{-1}(F_2)$. Então $\overline{\pi(W)}^Z \subset F_1$ ou $\overline{\pi(W)}^z \subset F_2$. Assim, π induz um homomorfismo injetivo $\mathcal{K}\left(\overline{\pi(W)}^z\right) \hookrightarrow \mathcal{K}(W)$ e portanto $dim\left(\overline{\pi(W)}^z\right) \leq dimW$. Segue que

$$d = \dim\left(\overline{D}^z\right) \leq dim\left(\overline{C}^z\right).$$

Assim,

$$dim\left(\overline{C}^z\right) = d$$

como queríamos.

2. Se C for uma faixa então será um aberto em $D \times K$ e o resultado segue-se. (veja [7] proposition 2.8.4)

$\square$

Corolário 2.12. *Seja $S \subset K^{n+l}$ um conjunto semialgébrico, $\pi : K^{n+l} \to K^n$ projeção. Então $dim(\pi(S)) \leq dimS$. Além disso, se π for injetiva então $dim(\pi(S)) = dimS$*

Demonstração. Escolha uma decomposição cilíndrica de S, $S = \bigcup_{j=1}^{p} S_j$. Considere $\pi^i : K^{n+i} \to K^{n+i-1}$ projeção. Então

$$\pi = \pi^1 o \pi^2 o \ldots \pi^{l-1} o \pi^l$$

Daí,

$$dimS \geq dim\pi^l(S) \geq dim\pi^{l-1} o \pi^l(S) \geq \ldots \geq \dim \pi(S)$$

$\square$

Corolário 2.13. *Seja $S \subset K^{n+l}$ um conjunto semialgébrico e $f : S \to K^m$ uma aplicação semialgébrica. Então $dim(f(S)) \leq dimS$. Se f é injetiva, então $dimf(S) = dimS$.*

Demonstração. Pelo corolário anterior, tem-se que $dimS = dim(Graf(f))$ e $dim(f(S)) \leq dim(Graf(f))$. Se f for injetiva, obtemos (usando f^{-1}) a igualdade no sentido contrário e portanto $dimf(S) = dimS$. $\square$

Capítulo 3

Homologia sobre espaços semialgébricos

3.1 Triangulação

Considere $a_0, a_1, \ldots a_k$ pontos em K^n. Dizemos que tais pontos são independentes (ou estão em posição geral) quando o conjunto $\{a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0\}$ é linearmente independente. Dados $a_0, \ldots, a_d$ em posição geral, um simplexo d-dimensional σ é dado por

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{d} t_i a_i ; 0 \leq t_i \leq 1, t_i \in K \ e \ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}$$

Denotaremos usualmente $\sigma = [a_0, a_1 \ldots, a_d]$. Os pontos em σ tais que $t_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ representam o simplexo aberto $\mathring{\sigma} \subset \sigma$. Se $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_l}\} \subset \{a_0, \ldots a_d\}$ então o l-simplexo $[a_{i_0}, \ldots, a_{i_l}]$ é dito uma l-face de σ.

Definição 3.1. *Um complexo simplicial finito em K^n é uma coleção finita $\mathcal{K}$ de simplexos satisfazendo:*

- *Se $\sigma \in \mathcal{K}$, então toda face de σ pertence a $\mathcal{K}$.*
- *Se $\sigma_i, \sigma_j \in \mathcal{K}$ então $\sigma_i \cap \sigma_j$ é vazio ou uma face comum de σ_i e σ_j.*

Observação 3.2. *De acordo com a definição acima, vale ressaltar que quaisquer dois simplexos distintos de $\mathcal{K}$ tem interiores disjuntos. De fato, sejam σ, τ simplexos distintos e x um ponto interior dos dois simplexos. Seja $\alpha = \sigma \cap \tau$. Caso α fosse uma face própria de σ então $x \in \partial\sigma$, o que não*

ocorre. Logo, $\sigma = \alpha$ De forma análoga, obtém-se $\tau = \alpha$, isto é, $\sigma = \tau$.
Outro ponto importante é a definição de um subcomplexo L de $\mathcal{K}$: L é um subcomplexo de $\mathcal{K}$ se consiste de uma subcoleção de $\mathcal{K}$ que contém todas as faces de seus elementos, isto é, L é ele próprio um complexo simplicial.

A união de todos os simplexos $\{\sigma_i\}_{i=1,2\dots,q} \subset \mathcal{K}$ é um subspaço topológico em K^n denotado por $|\mathcal{K}|$.
Dada tal formalização dos objetos acima, podemos associa-los a conjuntos semialgébricos.

Teorema 3.3. *Para todo $A \subset K^n$ semialgébrico fechado e limitado existe um complexo simplicial finito $\mathcal{K} = \{\sigma_i\}_{i=1,\dots,q}$ e um homemomorfismo semialgébrico $\psi : |\mathcal{K}| \to A$. Além disso, é possível escolher tal complexo de forma que dada uma família $\{A_j\}_{j=1,\dots,p}$ de subconjuntos semialgébricos em A, cada A_j é a imagem por ψ da união de simplexos abertos em $\mathcal{K}$*

Demonstração. Ver [11] Teorema 3.12 pág 51. □

Para o caso de espaços semialgébricos não limitados e não fechados, temos como ferramenta a compactificação de Alexandrov que é única a menos de homeomorfismos semialgébricos. Mais precisamente,

Proposição 3.4. ***(Compactificação de Alexandrov)*** *Seja $A \subset K^n$ semialgébrico localmente fechado não limitado e não fechado. Então existe A^* espaço topológico satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *A^* é um semialgébrico fechado e limitado;*
2. *Existe uma aplicação contínua e semialgébrica $\iota : A \to A^*$ homeomorfismo sobre sua imagem;*
3. *$A^* \backslash \iota(A)$ possui um único ponto;*

Se qualquer outro par (A'^*, ι') satisfaz tais propriedades então existe um único homeomorfismo semialgébrico

$$h : A^* \to A'^* \text{ tal que } \iota' = ho\iota$$

Demonstração. Podemos assumir que A não contém a origem e que é fechado em K^{n+1}. Agora definimos $\iota(x) = \frac{x}{|x|^2}$ e $A^* = \iota(A) \cup \{0\}$ e portanto A^* é fechado e limitado, valendo ainda as afirmações 2 e 3. Agora, se (A'^*, ι') é outro par satisazendo as propriedades 1, 2 e 3 então a composição

$$\iota'(A) \xrightarrow{\iota'^{(-1)}} A \xrightarrow{\iota} \iota(A)$$

fornece um homeomorfismo semialgébrico $h' : \iota'(A) \to \iota(A)$.

Agora podemos estender h' a um homeomorfismo semialgébrico $h : A'^{*} \to A^{*}$

$\square$

Definição 3.5. *A compatificação de Alexandrov semialgébrica de A é dada por $A^{*} = A \cup \{0\}$ satisfazendo as hipóteses da proposição 3.4*

Observação 3.6. *No caso de um conjunto algébrico não compacto,(que é fechado na topologia de Zariski, portanto localmente fechado(na topologia euclidiana) ver 2.4) temos uma construção análoga, tomando-se agora aplicações regulares com inversas regulares.(dito isomorfismo biregular). Nesse caso não se têm unicidade a menos de isomorfismos biregulares.*

Exemplo 3.7.

- *Considere $\overline{U} = \{(x, y) \in K^2; y^2 + x^6 - x^4 = 0\}$ e $\overline{V} = \{(x, y) \in K^2; y^2 + x^4 - x^2 = 0\}$. Temos que os abertos de Zariski $U = \overline{U} \setminus \{0\}$ e $V = \overline{V} \setminus \{0\}$ sao isomorfos biregulares. Para ver isto, considere a aplicação $\varphi : U \to V$ dada por $\varphi(x, y) = (x, \frac{y}{x})$. Assim, $\overline{U}$ e $\overline{V}$ são compactificações de U que não são biregulares isomorfas.*

Dispondo então de uma triangulação e considerando A conjunto semialgébrico em K^n podemos tentar definir os grupos de homologia simplicial tal como é feito para espaços topológicos homeomeorfos a poliedros. A construção é análoga ao caso geral. Os elementos básicos como simplexos orientados, complexos de cadeias e o operador bordo ∂ são definidos da mesma forma.(como referência ver [17]). Assim, temos o complexo de cadeias j-dimensionais $\mathcal{C}_j(|\mathcal{K}|)$:

$$\mathcal{C}(|\mathcal{K}|): \ \ldots \mathcal{C}_q(|\mathcal{K}|) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{q-1}(|\mathcal{K}|) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_1(|\mathcal{K}|) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_0(|\mathcal{K}|) \xrightarrow{\partial} 0$$

de forma que $\partial o \partial = 0$. Isto permite definir usualmente os grupos de homologia simplicial $H_q(|\mathcal{K}|) = \mathcal{Z}_q(|\mathcal{K}|)/\mathcal{B}_q(|\mathcal{K}|)$, $0 \leq q \leq max\{dim\sigma; \sigma \subset |\mathcal{K}|\}$

Observação 3.8. *Formalmente, por considerar homeomorfismos semialgébricos estamos diferente da definição clássica dos grupos de homologia. Dessa forma, é comum considerar a notação $H_{*}^{Sa}(X)$ para indicar que se trata de grupos de homologia semialgébrica. No nosso caso, usaremos um certo "abuso de notação"representando tais grupos como na forma clássica. De toda forma, temos que o homomorfismo inclusão*

$$\mathcal{C}_*^{Sa}(A) \to \mathcal{C}_*(A)$$

induz um isomorfismo natural a nível de homologia

$$H_*^{Sa}(A) \to H_*(A).$$

No que se segue, quando não for mencionado tais grupos de homologia terão coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Definição 3.9. *Seja $\mathcal{K}$ um complexo simplicial finito. Se $A \subset K^n$ é conjunto semialgébrico limitado e fechado de forma que $\psi : |\mathcal{K}| \to A$ é uma triangulação semialgébrica de A, então $H_q(A)$ é, por definição, igual a $H_q(|\mathcal{K}|)$.*

O $1^{\underline{o}}$ questionamento é se esta definição não depende da escolha da triangulação. Quando estamos sobre $\mathbb{R}$, esta independência é obtida por iteração do processo de subdivisão baricêntrica. Dados K, L complexos simpliciais homeomorfos e considerando $\mathcal{K}^{(n)}$ como o complexo simplicial obtido por subdividir $\mathcal{K}$ n vezes, é possível obter n_0 de tal modo a induzir isomorfismos nos grupos de homologia de $\mathcal{K}^{(n_0)}$ e L. Em particular, o processo de obter subdivisões mais finas de simplexos em $\mathcal{K}$ considera o fato de que $\mathbb{R}$ é arquimediano. Em corpos reais fechados não arquimedianos não se tem, por exemplo, que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n = 0$. (como por exemplo se fosse tomado sobre o corpo das séries de Puiseux, (ver observação 1.7)). Independência da triangulação sobre corpos reais fechados pode ser obtida através de triangulações tais que os vértices tenham coordenadas racionais (o que pode sempre ser feito. Ver [14], theorem 5.43). Daí, a ideia é usar o princípio de transferência de Tarski-Seindenberg notando que qualquer corpo real fechado contém o fecho algébrico de $\mathbb{Q}$. Mais precisamente:

Teorema 3.10. ***(Invariância topológica dos grupos de homologia semialgébrica)*** *Sejam $\mathcal{K}$ e L dois complexos simpliciais cujos os vértices possuam coordenadas racionais. Se $\mathcal{K}_K$ e L_K são extensões em K de $\mathcal{K}$ e L semialgebricamente homeomorfas então $H_*(|\mathcal{K}|_K) \approx H_*(|L|_K)$.*

Demonstração. Simplexos em $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ contidos em K^l podem ser descritos por equações e inequações lineares com coeficientes racionais. Com efeito, se $\sigma \in \mathcal{K}$ é um d-simplexo, temos:

$$\sigma = \{\sum a_i t_i; 0 \leq t_i \leq 1 \ e \ \sum t_i = 1\}$$

onde $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{il}),\ a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Podemos escrever

$$\sigma = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_l$$

onde

$$A_j = \left\{ c \in K; c - \sum_0^d t_i a_{ij} = 0, 0 \leq t_i \leq 1 \ e \ \sum t_i = 1 \right\}$$

Isto nos diz que $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ são subconjuntos semialgébricos de K^l com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Dessa forma, $\mathcal{K}_K$ e L_K são extensões em K definidos exatamente com as mesmas equações, onde $|\mathcal{K}|_K$ indica a realização geométrica do complexo simplicial $\mathcal{K}$ sobre K. Seja

$$f : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K \text{ um homeomorfismo semialgébrico.}$$

Afirmação :

1. Existe um homeomorfismo semialgébrico

   $$f_1 : |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \to |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$$

   se, e somente se,

2. Existe um homeomorfismo semialgébrico

   $$f_2 : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K$$

   Para qualquer corpo real fechado K.

Supondo válida esta afirmação temos, por hipótese, o homeomorfismo semialgébrico

$$f : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K$$

Segue-se que existe

$$f_1 : |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \to |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$$

homeomorfismo semialgébrico.

Agora, considerando $K = \mathbb{R}$, temos, pela afirmação feita, que existe

$$f_2 : |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}} \to |L|_{\mathbb{R}}$$

homeomorfismo semialgébrico.
Para esse caso, vale o método de subdivisão baricêntrica-aproximação simplicial de forma que $H_*(|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}}) \approx H_*(|L|_{\mathbb{R}})$. Agora, temos que $H_*(|\mathcal{K}|_K) \approx H_*(|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}})$. Observe que este isomorfismo ocorre naturalmente. De fato, fixado o complexo simplicial $|\mathcal{K}|$ (que é a união de conjuntos semialgébricos (simplexos)) com coeficientes em $\mathbb{Q}$ temos que o complexo de cadeias $C_*(|\mathcal{K}|_K)$ é um grupo abeliano livre isomorfo a $C_*(|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}})$. Denotando φ esse isomorfismo e σ_{iK}, $\sigma_{i\mathbb{R}}$ as respectivas extensões em K, $\mathbb{R}$ temos

$$\varphi\left(\sum_i x_i\sigma_{iK}\right) = \sum_i x_i\varphi\left(\sigma_{iK}\right) = \sum_i x_i\sigma_{i\mathbb{R}}$$

De forma que ciclos e bordos são claramente preservados. Portanto,

$$H_*(|\mathcal{K}|_K) \approx H_*(|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}}) \approx H_*(|L|_{\mathbb{R}}) \approx H_*\left(|L|_K\right)$$

Justifiquemos então a afirmação mencionada no início:

Primeiramente, dado um homeomorfismo semialgébrico

$$f_1 : |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \to |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$$

os conjuntos $|\mathcal{K}|_K|$ e $|L|_K$ estão bem definidos usando as mesmas equações e inequações sobre $\mathbb{R}_{alg}$ (onde $|\mathcal{K}|_K \cap \mathbb{R}^n_{alg} = |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}}$) dependendo unicamente de $|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}}$ e $|L|_{\mathbb{R}_{alg}}$. Agora, temos que o gráfico de f_1 é semialgébrico. Definimos então

$$f_2 : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K$$

Estendendo o gráfico $G(f_1)$ a $G(f_1)_K$ usando novamente o principio de transferência. Como $G(f_1)_K$ está definido com as mesmas equações (e inequações) em $\mathbb{R}_{alg}$, temos que f_2 é bijetiva. Quanto a continuidade de f_2(e f_2^{-1}) pode-se tomar bolas abertas estendidas a $|L|_K$ (semialgébricos) de forma que sua imagem inversa é um aberto semialgébrico extensão de $|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}}$. Portanto,

$$f_2 : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K$$

é um homeomorfismo.
Resta mostrar que dado $f_2 : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K$ homeomorfismo semialgébrico existe

$$f_1 : |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \to |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$$

também homeomorfismo semialgébrico. Os conjuntos semialgébricos $|\mathcal{K}|_K$ e $|L|_K$ com coeficientes racionais se extendem diretamente pelo princípio de transferência. Precisamos obter agora uma aplicação semialgébrica (contínua com inversa contínua) entre $|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}}$ e $|L|_{\mathbb{R}_{alg}}$.
Tomando gráfico de f_2, considere todas as constantes $a_1, \ldots, a_n$ que aparecem na descrição (ϕ_{f_2}) do gráfico $G(f_2)_K$ tal que $a_i \notin \mathbb{Q}, i = 1, \ldots n$. Substituindo por variáveis $Y_1, \ldots, Y_n$ obtemos uma fórmula $\psi(Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_{2l})$ onde $Z_1, \ldots, Z_{2l}$ são as variáveis livres de ϕ_{f_2} e agora ψ possui coeficientes racionais. Obtemos assim para cada $b \in K^n$ tal que $b \in \phi_{f_2}$ uma fórmula $\psi(Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_{2l})$ tal que $\psi(b, Z_1, \ldots, Z_{2l})$ é o gráfico de um homeomorfismo $g : |\mathcal{K}|_K \to |L|_K$.
Considerando $\overline{Y} = (\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_n})$ como parâmetros satisfazendo tal homeomorfismo, Seja $\phi_1(\overline{Y})$ a fórmula descrevendo a continuidade de g, isto é, para cada aberto $B \subset |L|_K \subset K^l$ temos o aberto

$$\left\{(Z_1, \ldots, Z_l) | \exists (Z_{l+1}, \ldots, Z_{2l}) \in B \wedge \psi(\overline{Y_1}, \ldots, \overline{Y_n}, Z_1, \ldots, Z_{2l})\right\}$$

De forma similar sejam $\phi_2(\overline{Y}), \phi_3(\overline{Y}), \phi_4(\overline{Y})$ fórmulas de $1^{\underline{o}}$ ordem descrevendo injetividade, sobrejetividade, continuidade da inversa. Faça então

$$\phi_g = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4.$$

Como $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ satisfaz ϕ_g pelo teorema 1.23 a sentença

$$\exists Y_1, \ldots, Y_n \phi_g(Y)$$

é verdadeira em K se, e somente se, é verdadeira sobre $\mathbb{R}_{alg}$. Assim existe $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n_{alg}$ satisfazendo ϕ_g. Dessa forma, substituindo $(a_1, \ldots, a_n)$ por $(c_1, \ldots, c_n)$ na descrição de f_1 obtemos o homeomorfismo semialgébrico

$$f_1 : |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \to |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$$

$\square$

Exibiremos agora alguns resultados sobre teoria de Homologia (no contexto semialgébrico).

3.2 Resultados clássicos em Homologia semialgébrica

Definição 3.11. *(**Homologia relativa**) Seja $\phi : |\mathcal{K}| \to A$ uma triangulação semialgébrica de A, tal que $\phi^{-1}(B) = |L|$, onde L é um subcomplexo de $\mathcal{K}$. Naturalmente, podemos considerar a inclusão $i : B \hookrightarrow A$ e a cadeia quociente $\mathcal{C}_p(A, B) = \mathcal{C}_p(A)/\mathcal{C}_p(B)$ de forma que o operador bordo $\partial_p : \mathcal{C}_p(A, B) \to \mathcal{C}_{p-1}(A, B)$ está bem definido já que $\partial_p(\mathcal{C}_p(A)) \subset \mathcal{C}_{p-1}(A)$. Temos então o grupo dos $p-$ ciclos do par (A, B) dado por*

$$\mathcal{Z}_p(A, B) = \{u \in \mathcal{C}_p(A, B)/\partial(u) = 0\}$$

E o grupo dos $p-$ bordos dado por

$$\mathcal{B}_p(A, B) = \partial_{p+1}(\mathcal{C}_{p+1}(A, B))$$

E então podemos definir

$$H_p(A, B) = \mathcal{Z}_p(A, B)/\mathcal{B}_p(A, B)$$

Nas mesmas hipóteses, temos a seguinte proposição tal qual ao caso euclidiano:

Proposição 3.12. *Existe uma sequência exata longa*

$$\ldots H_p(B) \xrightarrow{i_*} H_p(A) \xrightarrow{j_*} H_p(A, B) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

Demonstração. Segue-se do seguinte lema, num contexto mais geral:

Lema 3.13. *Seja $0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}" \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de morfismos entre um complexo de cadeias. Existe para cada $p > 0$, um homomorfismo $\partial_* : H_p(\mathcal{C}") \to H_{p-1}(\mathcal{C}')$ tal que a sequência*

$$\ldots H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}") \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \ldots$$

é exata.

Demonstração. Ver [5], teorema 1, página 8. □

Assim, a proposição segue pois

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_p(B) \xrightarrow{i_\#} \mathcal{C}_p(A) \xrightarrow{j_\#} \mathcal{C}_p(A, B) \longrightarrow 0$$

é naturalmente uma sequência exata curta, onde $i_{\#},\ j_{\#}$ são homomorfismos induzidos pelas aplicações $i : B \to A$ (inclusão) e $j : A \to (A, B)$ (quociente) respectivamente.

□

Corolário 3.14. *Sejam $C \subset B \subset A$ fechados e limitados semialgébricos em K^n. Então existe uma sequência exata longa*

$$\ldots H_{p+1}(A, B) \to H_p(B, C) \to H_p(A, C) \to H_p(A, B) \to \ldots$$

Demonstração. A seguinte sequência curta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_p(B, C) \xrightarrow{i_{\#}} \mathcal{C}_p(A, C) \xrightarrow{j_{\#}} \mathcal{C}_p(A, B) \longrightarrow 0$$

é exata pois $i_{\#},\ j_{\#}$ estão bem definidos de forma que $Im(i_{\#}) = Ker(j_{\#})$

□

Vale ressaltar que a existência de sequências exatas em homologia independem do corpo base em que estivermos trabalhando, pois o lema acima depende essencialmente dos objetos que caracterizam os grupos de homologia. Abaixo mais uma sequencia exata importante que se estende naturalmente a qualquer corpo real fechado.

Teorema 3.15. *(***Sequência exata semialgébrica de Mayers Vietoris***) Considere A, B conjuntos semialgébricos em K^n ambos limitados e fechados. Então existe uma sequência exata longa*

$$\ldots H_{p+1}(A \cap B) \to H_p(A) \oplus H_p(B)) \to H_p(A \cup B) \to H_{p-1}(A \cap B) \to \ldots$$

Demonstração. Basta considerar a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_p(A \cap B) \xrightarrow{(i_{A\#}, -i_{B\#})} \mathcal{C}_p(A \oplus B) \xrightarrow{\pi_{A\#} + \pi_{B\#}} \mathcal{C}_p(A \cup B) \longrightarrow 0$$

Onde $i_{\#}$ homomorfismo inclusão restrito a $\mathcal{C}_p(A \cap B)$ e π o homomorfismo projeção. □

Exemplo 3.16. *Considere $S^{k-1}(x, 1) \subset K^n$ a esfera unitária para $k > 1$. Então tal como em $\mathbb{R}$, temos:*

$$H_0(S^{k-1}(x, 1)) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_p(S^{k-1}(x, 1)) \approx 0,\ 0 < p < k - 1$$

$$H_{k-1}(S^{k-1}(x,1)) \approx \mathbb{Z}$$

De fato, considere os semialgébricos

$$A = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in K^k; |x|^2 = 1, x_k \geq 0\}$$

e

$$B = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in K^k; |x|^2 = 1, x_k \leq 0\}.$$

Tais conjuntos são homeomorfos a um simplexo $k-1$-dimensional e portanto

$$H_0(A) = H_0(B) \approx \mathbb{Z} \text{ e } H_p(A) = H_p(B) \approx 0, \text{ se } p > 0.$$

Se $k = 2$, então é imediato que

$$H_0(S^1(x,1)) = H_1(S^1(x,1)) \approx \mathbb{Z}$$

Vamos obter então o restante, por indução sobre k. Suponhamos válido para $k-2 \geq 1$. Através da sequência de Mayer-Vietoris

$$\ldots \to H_p(A) \oplus H_p(B) \to H_p(A \cup B) \to H_{p-1}(A \cap B) \to \\ H_{p-1}(A) \oplus H_{p-1}(B)) \to \ldots$$

temos que ($p > 1$)

$$0 \to H_p(A \cup B) \to H_{p-1}(A \cap B) \to 0$$

$$0 \to H_p(S^{k-1}(x,1)) \to H_{p-1}(S^{k-2}(x,1)) \to 0$$

Por hipótese de indução,

$$H_0(S^{k-2}(x,1)) = H_{k-2}(S^{k-2}(x,1)) \approx \mathbb{Z}$$

$$H_{p-1}(S^{k-2}(x,1)) \approx 0, \;\; 0 < p < k-1$$

Concluímos então que

- $1 < p < k-1$

$$0 \to H_p(S^{k-1}(x,1)) \to 0$$

- $p - 1 = k - 2$

$$0 \to H_{p-1}(S^{k-1}(x,1)) \to \mathbb{Z} \to 0$$

Agora veja que $H_1(S^{k-1}(x,1)) = 0$, pois a sequência exata de Mayers Vietoris fornece

$$0 \to H_1(S^{k-1}(x,1)) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

3.3 Invariância do domínio

Vamos agora estabelecer para (corpos reais fechados) um resultado topológico conhecido no caso euclidiano:

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ aplicação contínua injetiva.

Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Vale observar que este resultado não oferece dificuldade no caso em que f é diferenciável e possui Jacobiana não nula: Basta aplicar o teorema da função inversa. No entanto, sua beleza está no fato de depender apenas da continuidade e injetividade da aplicação em questão.
Consideremos agora K um corpo real fechado arbitrário. Vamos a duas definições:

Definição 3.17. ***(n- Variedade homológicas)*** *Seja $M \subset K^n$ semialgébrico, fechado e limitado. M é dito uma n-variedade homológica sobre K, se para todo $x \in |\mathcal{K}|$, ($|\mathcal{K}|$ triangulação de M) e $q \geq 0$, temos :*

$$H_q(Lk_{\mathcal{K}}(x), \mathbb{Z}) \approx H_q(S^{n-1}(K), \mathbb{Z})$$

onde $S^{n-1}(K)$ representa a esfera $n-1$-dimensional sobre K.

O link $Lk_{\mathcal{K}}(x)$ é definido como a união de todos os simplexos de $|\mathcal{K}|$ que não contém x mas estão contidos na união de todos os simplexos fechados de $|\mathcal{K}|$ que contém x.

Observação 3.18. *Links tomados sobre duas triangulações do mesmo espaço semialgébrico são equivalentes homotópicos, ou seja, seus grupos de homologia não são modificados. (ver [15], proposição 5.1). Vale ressaltar também que a definição de uma n-variedade semialgébrica sobre K é a mesma definição euclidiana, só que tomando vizinhanças semialgébricas.*

O resultado abaixo reforça mais uma vez a força do príncipio de Tarski-Seindenberg (ver proposição 1.25).

Proposição 3.19. *Seja M subconjunto semialgébrico em K^n e considere $\widetilde{K}$ corpo real fechado contendo K. Então M é uma n-variedade homológica $\Leftrightarrow M_{\widetilde{K}}$ é uma n-variedade homológica.*

Demonstração. Pelo príncipio de transferência de Tarski-Seindenberg, é imediato que M é fechado e limitado $\Leftrightarrow M_{\widetilde{K}}$ é fechado e limitado. Assuma agora M é fechado e limitado sobre K. Escolhendo uma triangulação $\psi : |\mathcal{K}|_K \to M$ de M podemos obter uma extensão $\psi_{\widetilde{K}} : |\mathcal{K}|_{\widetilde{K}} \to M_{\widetilde{K}}$ de M_K. Logo, $\forall x \in |\mathcal{K}|_K$, o $Lk_{\mathcal{K}_{\widetilde{K}}}(x)$ de x em $|\mathcal{K}|_{\widetilde{K}}$ é obtido sobre $Lk_{\mathcal{K}}(x)$ em $|\mathcal{K}|_K$ por uma extensão do corpo base. Se $M_{\widetilde{K}}$ é uma n-variedade homológica então

$$H_q(Lk_{\mathcal{K}}(x), \mathbb{Z}) \approx H_q(Lk_{\mathcal{K}_{\widetilde{K}}}(x), \mathbb{Z}) \approx H_q(S^{n-1}(\widetilde{K}), \mathbb{Z}) \approx H_q(S^{n-1}(K), \mathbb{Z})$$

e portanto M é uma n-variedade homológica.
Suponha agora M uma n-variedade homológica. Seja x um ponto em $|\mathcal{K}|_{\widetilde{K}}$. Escolha $y \in |\mathcal{K}|_K$ residindo no mesmo simplexo aberto de $|\mathcal{K}|_{\widetilde{K}}$ que contém x. Então

$$Lk_{\mathcal{K}_{\widetilde{K}}}(x) = Lk_{\mathcal{K}_{\widetilde{K}}}(y) = Lk_{\mathcal{K}K}(y)(\widetilde{K}).$$

Onde este último termo representa a extensão de $Lk_{\mathcal{K}K}(y)$ a $\widetilde{K}$. Assim, obtemos que

$$H_q(S^{n-1}(\widetilde{K})) \approx H_q(S^{n-1}(K)) \approx H_q(Lk_{\mathcal{K}K}(y)) \approx H_q(Lk_{\mathcal{K}K}(y)(\widetilde{K})) \approx$$
$$H_q(Lk_{\mathcal{K}_{\widetilde{K}}}(y)) \approx H_q(Lk_{\mathcal{K}_{\widetilde{K}}}(x))$$

□

Agora no que se segue, exibiremos alguns resultados envolvendo o conceito de grupos de cohomologia de conjuntos semialgébricos em K (representado por $H^q(A)$, $A \subset K^n$) bem como grupos de (co)homologia reduzidos ($\widetilde{H}_*$, $\widetilde{H}^*$). As definições são dadas como no caso clássico (em $\mathbb{R}^n$). Como referências ver [17].

O teorema de invariância do domínio (resultado mencionado no inicio desta seção) pode ser obtido a partir do teorema de dualidade de Poincaré em corpos reais fechados. Faremos aqui uma exposição geral sobre esta prova (para mais detalhes ver [15], §5).
Iniciaremos com o seguinte teorema:

Teorema 3.20. *Seja A um semialgébrico próprio da esfera $S^n(K)$. Então $\forall q \geq 0$ existe um isomorfismo*

$$\widetilde{H}^q(A) \approx \widetilde{H}_{n-q-1}(S^n(K) \backslash A)$$

Demonstração. ver [15], corolário 5.9. □

Corolário 3.21. *Seja M uma n-variedade homológica sobre K que não é orientável. Então não existe aplicação contínua semialgébrica injetiva de M em $S^{n+1}(K)$.*

Demonstração. Assuma que M é conexa e suponha $f : M \to S^{n+1}(K)$ aplicação contínua injetiva semialgébrica. Então f é bijeção contínua semialgébrica sobre $f(M) \subset S^{n+1}(K)$. Pelo teorema anterior,

$$\tilde{H}^0\left(S^{n+1}(K) \backslash f(M)\right) \approx \tilde{H}_n\left(f(M)\right) = 0$$

Pois M é não orientável $\Rightarrow f(M)$ não orientável. Mas por outro lado,

$$0 = \tilde{H}^0\left(S^{n+1}(K), \backslash f(M), \mathbb{Z}_2\right) \approx \tilde{H}_n\left(f(M), \mathbb{Z}_2\right) = \mathbb{Z}_2$$

contradição. □

Estamos em condição agora de obter o resultado vital desta seção :

Teorema 3.22. ***(Teorema da curva de Jordan)*** *Seja $f : S^n(K) \to S^{n+1}(K)$ aplicação contínua injetiva semialgébrica com imagem M. Então $S^{n+1}(K) \backslash M$ tem precisamente 2 componentes conexas C_1 e C_2. Ambos abertos C_1 e C_2 tem fronteira M. (Denotemos $frX = fronteira\ de\ X$).*

Demonstração. Este resultado segue de sua generalização que enunciaremos como lema:

Lema 3.23. *Seja M um semialgébrico fechado de $S^{n+1}(K)$, $n \geq 1$. Assuma que M é uma variedade n-homológica com k componentes conexas. Então $S^{n+1}(K) \backslash M$ tem $k+1$ componentes conexas.*

Demonstração. Usando o teorema 3.20 temos :

$$\tilde{H}_0(S^{n+1}(K) \backslash M) \approx \tilde{H}^n(M) \approx H^n(M)$$

Como M é orientável, por um caso particular do teorema de dualidade (ver [15],teorema 5.6), segue que:

$$H^n(M) \approx H_0(M)$$

Ou seja,

$$\tilde{H}_0(S^{n+1}(K) \backslash M) \approx H_0(M)$$

Assim, como $H_0(S^{n+1}(K)\backslash M) = \tilde{H}_0(S^{n+1}(K)\backslash M) \oplus \mathbb{Z}$ obtemos o lema (lembrando que o grupo de homologia de dimensão zero conta a quantidade de componentes conexas).

$\square$

Pelo lema que acabamos de obter segue que $S^{n+1}(K)\backslash M$ tem precisamente 2 componentes conexas. Para mostrar a $2^{\underline{o}}$ parte, note primeiramente que $fr(C_1 \cup C_2) \subset M$. Agora seja $x \in M$. Suponha que $x \notin fr(C_1)$. $C_1 \cup C_2 = S^{n+1}(K) - M$ é denso em $S^{n+1}(K)$ pois

$$dim(M) < dim(S^{n+1}(K)) \Rightarrow int(M) = \emptyset.$$

Logo qualquer aberto de centro x deve intersectar C_2, ou seja, $x \in fr(C_2)$. Considere agora $M' = M - x$. Como M é homeomorfo a $f(S^n(K))$, segue que $M' = M - x$ é contrátil com $S^{n+1}(K) - M'$ possuindo duas componentes conexas C_1 e $C_2 \cup \{x\}$. Então mais uma vez pelo teorema 3.20 temos que

$$\tilde{H}_0(S^{n+1}(K)\backslash M') \approx \tilde{H}^n(M') = 0$$

Esta contradição nos diz que $\forall x \in M,\ x \in fr(C_1)$ e portanto como $x \in fr(C_2)$ temos que $fr(C_i) \subset M,\ i = 1, 2$. Assim,

$$M = fr(C_1) = fr(C_2)$$

$\square$

Finalmente, podemos obter o

Teorema 3.24. ***(teorema de invariancia do domínio)****. Seja U um aberto semialgébrico de K^n e seja $f : U \to K^n$ uma aplicação semialgébrica contínua e injetiva. Então $f(U)$ é também aberto (e semialgébrico) em K^n.*

Demonstração. A prova agora segue de forma análoga ao caso clássico como corolário do teorema da curva de Jordan (em $\mathbb{R}^n$). Em particular, ver [19], proposição 7.4.

$\square$

3.4 Sobre Homologia de Borel-Moore

Para o caso de subconjuntos semialgébricos não fechados (ou não limitados) podemos, usando homologia relativa e a compactificação de Alexandrov, obter a seguinte definição:

Definição 3.25. *Seja A semialgébrico localmente fechado. Os grupos de homologia de Borel-Moore são definidos da seguinte forma:*

$$H_q^{BM}(A) = \begin{cases} H_q(A), & \textit{se } A \textit{ é fechado e limitado} \\ H_q\left(A^*, A^* \setminus \iota(A)\right) & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Onde (A^*, ι) é uma compactificação de Alenxadrov semialgébrica de A.

Lema 3.26. *Sejam $B \subset A$ semialgébricos fechados e limitados. Então*

$$H_q(A, B) = H_q^{BM}(A - B)$$

Demonstração. Suponha $A - B$ fechado e limitado. Por definição, $H_q^{BM}(A - B) = H_q(A - B)$. Portanto temos o resultado pois $\mathcal{C}_q(A - B)$ e $\mathcal{C}_q(A, B)$ são claramente isomorfos.Para o caso de $A - B$ não fechado ou não limitado ver [7], proposição 11.7.14.

□

Agora obtemos uma versão da proposição 3.12 para subconjuntos sémialgébricos não necessariamente fechados e limitados.

Teorema 3.27. *Seja $U \subset V$, V localmente fechado e U subconjunto semialgébrico fechado de V. Então existe uma sequencia exata longa*

$$\ldots H_{q+1}^{BM}(V - U) \to H_q^{BM}(U) \to H_q^{BM}(V) \to H_q^{BM}(V - U) \to \ldots$$

Demonstração. Basta usar a proposição 3.12 notando que $H_{q+1}^{BM}(V - U) = H_{q+1}(V, U)$. □

3.5 Classe fundamental

Como no caso euclidiano, a esfera n-dimensional $S^n \subset K^{n+1}$ pode ser triangulada pelo bordo de um $n+1$-simplexo de tal forma que cada $n-1$-simplexo é face de precisamente dois n-simplexos. Chamando $\gamma = \sum_s \sigma_s$ a soma de todos os n-simplexos em $C_n(S^n)$ é evidente que $\partial\gamma = 0$,isto é, γ é um ciclo (não nulo) gerador de $H_n(S^n)$ $(H_n(S^n) = \mathbb{Z})$. É possível obter que qualquer triangulação de uma superfície orientável, conexa e compacta S de dimensão n possui tal propriedade. Na verdade, a esfera S^n é um caso particular. Um conjunto algébrico compacto também dispõe de tal elemento e mais geralmente, temos:

Teorema 3.28. *Seja X um conjunto algébrico em K compacto de dimensão d e considere $\phi : |\mathcal{K}| \to X$, uma triangulação semialgébrica de X. A soma de todos os d-simplexos de $\mathcal{K}$ é um ciclo não nulo com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, elemento de $H_d(X, \mathbb{Z}_2)$. Este elemento (que denotaremos por $[X]$) é independente da escolha da triangulação e é dito classe fundamental de X.*

O ponto essencial para a prova deste teorema é o seguinte lema:

Lema 3.29. *Seja $X \subset K^n$ um conjunto algébrico limitado de dimensão d. Considere $\phi : |\mathcal{K}| \to X$ uma triangulação semialgébrica de X. Se σ é um $(d-1)$ -simplexo de $\mathcal{K}$ então o número de d - simplexos de $\mathcal{K}$ que tem σ como face é par.*

Demonstração. A prova deste lemma é dada [7], teorema 11.1.1. □

Nesta prova é lançado mão de uma decomposição dita estratificação . Nesta decomposição temos que para cada célula A_i semialgébrica, o fecho de A_i é a união de A_i e células de menor dimensão. Apartir de tal decomposição é possível refinar uma família de semialgébricos, em particular uma triangulação fixada. Isto é feito na prova citada acima.

Assumindo este lema, seja então $[X] \in H_d(X, \mathbb{Z}_2)$. Denotemos por $\widetilde{X}$ seu representante em $C_d(X, \mathbb{Z}_2)$. Como o bordo de $\widetilde{X}$ consiste da soma de todos os $(d-1)$-simplexos τ_j em $|\mathcal{K}|$, temos:

$$\partial\widetilde{X} = \textstyle\sum_j 2l_j\tau_j = 0, \quad l_j \in \mathbb{N}.$$

Note agora que $[X]$ é, de fato, um ciclo não nulo já que não existe simplexos de dimensão $d+1$ em X. Portanto $[X]$ é um ciclo não-nulo em em $H_d(X, \mathbb{Z}_2)$. Para ver que $[X]$ não depende da triangulação, consideremos a seguinte sequência exata:

$$H_d\left(X \setminus \{x\}\right) \xrightarrow{i_\#} H_d(X) \xrightarrow{j_\#} H_d\left(X, X \setminus \{x\}\right) \approx \mathbb{Z}_2$$

onde x é um ponto regular em X e vale ressaltar que o conjunto de tais pontos é denso em X. Seja então η_1 a soma de d-simplexos em $C_d(X)$, η_1 ciclo não nulo. Suponha $j_*([\eta_1]) = 0 \in H_d\left(X, X \setminus \{x\}\right)$. Então

$$\eta_1 \in nuc(j_*) = Im(i_*)$$

Portanto η_1 é homológo a uma cadeia ζ que não contém x. Para cada d-simplexo τ que aparece em η_1 podemos escolher um ponto x_τ regular tal que $x_\tau \in int(\tau)$. Dessa forma, repetindo este argumento obteríamos η_1 homológo a uma cadeia $\overline{\zeta}$ que não possui nenhum simplexo de η_1. Isto nos daria, $[\eta_1] = 0 \in H_d(X)$, contradição. Logo, $j_*([\eta_1]) = 1 \in H_d\left(X, X \setminus \{x\}\right)$. Agora dado η_1, η_2 soma de d-simplexos em $|\mathcal{K}| \simeq X$ e $|L| \simeq X$ respectivamente temos pelo que vimos que $j_*([\eta_1]) = j_*([\eta_2])$ em $H_d\left(X, X \setminus \{x\}\right) \approx \mathbb{Z}_2$. Assim,

$$j_*([\eta_1] - [\eta_2]) = 0 \in H_d\left(X, X \setminus \{x\}\right) \approx \mathbb{Z}_2$$

$\Rightarrow$ (repetindo novamente o argumento acima) $[\eta_1] = [\eta_2] \in H_d(X)$.

Capítulo 4

Aplicações regulares injetivas sobre conjuntos algébricos

Como aplicação do que foi visto anteriormente, podemos agora obter o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $X \in K^n$ um conjunto algébrico irredutível não singular e $f : X \to X$ uma aplicação regular. Se f é injetiva então é sobrejetiva.*

Antes da demonstração, vejamos o seguinte lema:

Lema 4.2. *Seja X um conjunto algébrico irredútível e $f : X \to K^m$ uma aplicação regular injetiva. Então $dim\left(\overline{f(X)}^z - f(X)\right) < dim(X) = dim(\overline{f(X)}^z)$.*

Demonstração. Seja $W = \overline{f(X)}^z$. f induz uma homomorfismo injetivo no corpo de funções racionais $\mathcal{K}(W) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ (ver lema 2.11). Como $V \simeq Graf(f)$, podemos trabalhar sobre $Graf(f)$ e considerar f como restrição da projeção canônica $K^n \times K^m \to K^m$ a X. Considere $X_{\mathbb{C}}$ (resp $W_{\mathbb{C}}$) o fecho de Zariski de X (resp W) em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ (resp $\mathbb{C}^m$). O conjunto de pontos $y \in W_{\mathbb{C}}$ tal que o número de elementos de $f_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ é igual a $[\mathcal{K}(X_{\mathbb{C}}) : \mathcal{K}(W_{\mathbb{C}})] = [\mathcal{K}(X) : \mathcal{K}(W)]$ contém um subconjunto aberto de Zariski $U_{\mathbb{C}}$ de $W_{\mathbb{C}}$. Para este resultado ver [18] teorema 7, pág 76. Note agora que se $y \in W$, os pontos em $f_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap (X_{\mathbb{C}} - X)$ são pares conjugados. E olhando restritamente para a aplicação f, temos que

$$|f^{-1}(y)| \equiv [\mathcal{K}(X) : \mathcal{K}(W)](mod2).$$

e o conjunto de tais pontos contém agora um aberto de Zariski $U \subset W$. Agora, pela injetividade, tomando $y \in f(X)$, $f^{-1}(y)$ contém exatamente 1 ponto. $f(X)$ é Zariski-denso em W, o que força $|(f^{-1}(y))| = 1, \forall y \in U$. Logo $U \subset f(X)$ e portanto,

$$dim(W - f(X)) \leq dim(W - U) < dimW$$

Pois W é irredutível.

$\square$

Vamos então a prova do teorema:

Seja $Y = X - f(X)$. Suponha $Y \neq \emptyset$. O conjunto Y tem as seguintes propriedades:

1. Y é semialgébrico.
   Pois como a aplicação f é regular temos que $f(X)$ é semialgébrico (lema 1.15) e portanto seu complementar em X é também semialgébrico.

2. Y é fechado em X.
   Segue-se pelo teorema de invariância do domínio semialgébrico (ver 3.24): $f(X)$ é um aberto em X.

3. $dimY < dimX$
   Como a aplicação f é injetiva $dim(X) = dim\,(f(X))$ (corolário 2.13). Em seguida, vimos que $dim(\overline{f(X)}^z) = dim\,(f(X))$. Assim, como X é irredutível, segue-se pelo lema 2.11 que qualquer subconjunto algébrico próprio $V \subset X$ teria dimensão menor que a dimensão de X. Portanto,

   $$\overline{f(X)}^z = X$$

   Usando então o lema 4.2 temos que:

   $$dim\left(\overline{f(X)}^Z - f(X)\right) = dim(Y) < dim(X)$$

4. Se Z é o fecho de Zariski de Y então $dim(Z - Y) < dimY$.
   Como $dim(Y) = dim(Z)$ podemos escolher uma componente irredútível Z' tal que $dim(Y) = dim(Z')$. Suponha que $dim\,(f^{-1}(Z')) = dimY$. Sendo $f^{-1}(Z')$ algébrico, podem considerar uma componente irredutível T tal que

   $$dim(T) = dim(Y)$$

Como $T \subset (f^{-1}(Z'))$ então $f(T) \subset Z'$ e pelo mesmo argumento em 3:

$$\overline{f(T)}^{z} = Z'$$

Logo, novamente pelo lema 4.2

$$dim\,(Z' - f(T)) < dimT \Rightarrow dim\,(Z' - f(T)) < dimZ'.$$

Dessa forma $Y \cap Z' \subset Z' \backslash f(T)$ não seria Zariski-denso em Z' pois $dim(\overline{(Y \cap Z)}^{z}) = dim(Y \cap Z) \leq dim(Z' - f(T)) < dimZ'$.
Com esta contradição devemos ter que,

$$dim\,(f^{-1}(Z')) < dimY$$

Agora, pela injetividade de f, a componente de dimensão máxima em

$$Z - Y = \{y \in Z; y = f(x)\}$$

Possui a mesma dimensão da componente de dimensão máxima em $f^{-1}(Z')$. Segue-se portanto que

$$dim(Z - Y) < dim(Y)$$

Consideremos agora $f^k : X \to X$ (f composta k vezes) , $X_k = f^k(X)$ e $Y_k = X - f^k(X)$. ($X_1 = X$ e $Y_1 = Y$). Pela regularidade e injetividade de f, temos que vale as propriedades 1, 2, 3 e 4 para o conjunto Y_k. Afirmamos que:

$$Y_{k+1} = f^k(Y) \cup Y_k \; , \; f^k(Y) \cap Y_k = \emptyset.$$

A prova será feita por indução
Suponha $k = 1$.
Então $Y_1 = X - f(X)$ e $Y_2 = X - f^2(X)$. Nesse caso, temos que

$$\begin{gathered} y \in f(X - f(X)) \Rightarrow y = f(x_1),\, x_1 \notin f(X) \\ \Rightarrow y = f(x_1) \notin f(f(X)) = f^2(X). \\ \therefore f(X - f(X)) \subset X - f^2(X). \end{gathered}$$

Por outro lado,

$$y \notin f(X) \Rightarrow y \notin f(f(X)) \Rightarrow y \notin X - f^2(X)$$
$$\therefore f(X - f(X)) \cup (X - f(X)) \subset X - f^2(X) \text{ , ou seja,}$$
$$f(Y) \cup Y \subset Y_2$$

Noutro sentido, seja

$$b \notin f^2(X) = f(f(X))$$

Segue-se que

$$b \in f(X - f(X)) \cup (X - f(X))$$

Portanto,

$$X - f(X) \subset f(X - f(X)) \cup (X - f(X))$$

$$\therefore Y_2 = f(Y) \cup Y$$

Como $f(X - f(X)) \subset f(X)$ *temos que* $f(Y) \cap Y = \emptyset$
Suponhamos então o resultado válido para $k - 1$*:*

$$Y_k = f^{k-1}(Y) \cup Y_{k-1}$$

Seja $b \in f^k(X - f(X))$*. Então*

$$b = f(a),\ a \in f^{k-1}(X - f(X)).$$

Por hipótese, $a \notin f^k(X)$*.* $\therefore b = f(a) \notin f^{k+1}(X)$

$$\therefore f^k(X - f(X)) \subset X - f^{k+1}(X)$$

Continuando,

$$b \notin f^k(X) \Rightarrow b \notin f^k(f(X)) \Rightarrow b \notin f^{k+1}(X)$$
$$\Rightarrow X - f^k(X) \subset X - f^{k+1}(X)$$

$\therefore f^k(X - f(X)) \cup (X - f^k(X)) \subset X - f^{k+1}(X) \quad (I)$
E da mesma forma, se

$$b \notin f^{k+1}(X) = f^k(f(X))$$

Então ou $b \notin f^k(X)$ *ou,*

$$b \in f^k(X) \Rightarrow b \in f^k(X - f(X))$$

Logo, $X - f^{k+1} \subset f^k(X - f(X)) \cup (X - f^k(X)) \quad (II)$
Segue-se de (I) e (II) que

$$Y_{k+1} = f^k(Y) \cup Y_k$$

e $f^k(Y) \subset f^k(X) \Rightarrow f^k(Y) \cap Y_k = \emptyset$

Assim, está provada a afirmação.

Temos então que $dim(Y_{k+1} \backslash Y_k) = dim(f^k(Y)) = dim(Y)$. *Seja d a dimensão de* Y *e* $Z_k = \overline{Y_k}^z$. *Se* Z_k *é limitado, pelo teorema 3.3 podemos considerar uma triangulação semialgébrica de* Z_k*, tal que* Y_k *é a união de alguns simplexos.Caso* Z_k *seja ilimitado, podemos tomar sua compactificação de Alexandrov. Em seguida, temos que* $dim(Y_k) = dim(Y)$, $\forall k$ *já que iterando*

$$Y_2 = f(Y) \cup Y$$

$$Y_3 = f^2(Y) \cup Y_2$$

$$\vdots$$

$$Y_{k-1} = f^{k-2}(Y) \cup Y_{k-2}$$

$$Y_k = f^{k-1}(Y) \cup Y_{k-1}$$

Obtemos $Y_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} f^{k-j}(Y) \cup Y$ *e, de fato,* $dim(Y_k) = dim(Y)$.

Segue-se então usando a propriedade 4 temos que

$$dim\,(Z_k \backslash Y_k) < dim(Y_k) = d \qquad \textit{(III)}$$

A partir disto temos então que a imagem de todo d-simplexo na triangulação está em Y_k. *Tomando a soma de todos d-simplexos temos uma classe de homologia não nula em* $H_d^{BM}(Z_k, \mathbb{Z}_2)$*,a saber, a classe fundamental* $[Z_k]$ *em* Z_k. *Considere* $\pi : C_d(|\mathcal{K}|) \to C_d(|\mathcal{L}|)$ *a restrição de d-simplexos em* $|\mathcal{L}|$*, onde* $\phi : |\mathcal{K}| \to Z_k$ *e* $|\mathcal{L}|$ *é o subcomplexo de* $|\mathcal{K}|$ *associado a* Y_k. *Como a soma de todos os d-simplexos está em* Y_k*, então* $\pi_* : H_d^{BM}(Z_k, \mathbb{Z}_2) \to H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)$ *é tal que* $[Y_k] = \pi_*([Z_k])$ *é uma classe não nula em* $H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)$.

. A inclusão $H_d^{BM}(Y_j, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow H_d^{BM}(Y_{j+1}, \mathbb{Z}_2)$ é obtida identificando $[Y_l]$ (da mesma forma como acima) com um elemento não nulo em $H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)$ para $k \geq l$. Vale notar que a desigualdade (III) vale para qualquer k de forma $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_k$. Consideremos agora um fato essencial para o restante da prova:

Lema 4.3. *As classes $[Y_1], \ldots, [Y_k]$ são linearmente independentes (sobre $\mathbb{Z}_2$) em $H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)$. Portanto dim $\left(H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)\right) \geq k$.*

As classes $[Y_{l+1} \backslash Y_l] = [Y_{l+1}] - [Y_l]$ são todas disjuntas e linearmente independentes. De fato, $Y_{l+1} \backslash Y_l = f^l(Y)$ e como

$$\emptyset = f^l(Y) \cap Y_l = f^l(Y) \cap (\cup_{j=1}^{l-1} f^j(Y) \cup Y)$$

Segue que $f^l(Y) \cap f^j(Y) = \emptyset$, $l \neq j$. Agora temos que:

$$\alpha_k \left([Y_k] - [Y_{k-1}]\right) + \ldots + \alpha_k \left([Y_2] - [Y_1]\right) + \alpha_k [Y_1] = \alpha_k [Y_k]$$

$$\alpha_{k-1} \left([Y_{k-1}] - [Y_{k-1}]\right) + \ldots + \alpha_{k-1} \left([Y_2] - [Y_1]\right) + \alpha_{k-1} [Y_1] = \alpha_{k-1} [Y_{k-1}]$$

$$\vdots$$

$$\alpha_2 \left([Y_2] - [Y_1]\right) + \alpha_2 [Y_1] = \alpha_2 [Y_2]$$

$$\alpha_1 [Y_1] = \alpha_1 [Y_1]$$

Logo, somando as equações acima e igualando a zero, temos:

$$0 = \alpha_k \left([Y_k] - [Y_{k-1}]\right) + \ldots + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) \left([Y_2] - [Y_1]\right) + (\alpha_k + \ldots + \alpha_1)[Y_1] =$$

$$\alpha_k [Y_k] + \alpha_{k-1} [Y_{k-1}] + \ldots + \alpha_2 [Y_2] + \alpha_1 [Y_1]$$

Assim, como as classes $[Y_{l+1} \backslash Y_l] = [Y_{l+1}] - [Y_l]$ são linearmente independentes, as classes $[Y_1], \ldots, [Y_k]$ serão também linearmente independentes. Segue-se então que

$$dim \left(H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)\right) \geq k.$$

Agora, usando o que foi visto na seção 3.4 (Em particular, o teorema 3.27), temos a sequencia exata longa:

$$\ldots H_{d+1}^{BM}(X_k, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_d^{BM}(Y_k) \xrightarrow{i_*} H_d^{BM}(X) \xrightarrow{j_*} H_d^{BM}(X_k) \xrightarrow{\partial_*} H_{d-1}^{BM}(Y_k) \to \ldots$$

Onde $X - Y_k = X_k$. *Pela exatidão segue-se que* $Im(\partial_*) = Ker(i_*)$. *Alem disso, usando o teorema 3.10, obtemos que*

$$H_{d+1}^{BM}(X_k, \mathbb{Z}_2) \simeq H_{d+1}^{BM}(X, \mathbb{Z}_2)$$

Já que $f^k : X \to X_k$ *é um homeomorfismo semialgébrico. Logo,*

$$\begin{aligned} dim(H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)) &\leq dim(Im(i_*)) + dim(ker(i_*)) \\ &\leq dim(Im(i_*)) + dim(Im(\partial_*)). \end{aligned}$$

Mas

$$dim(Im(\partial_*)) = dim(H_{d+1}^{BM}(X, \mathbb{Z}_2)) - dim(ker(\partial_*)) \leq dim(H_{d+1}^{BM}(X, \mathbb{Z}_2))$$

Assim,

$$\begin{aligned} dim(H_d^{BM}(Y_k, \mathbb{Z}_2)) &\leq dim(H_d^{BM}(X, \mathbb{Z}_2)) + dim(H_{d+1}^{BM}(X, \mathbb{Z}_2)) \\ &= constante < \infty \end{aligned}$$

Contradição.
Segue-se que $Y = \emptyset$, *ou seja* $X = f(X)$.

Referências Bibliográficas

[1] NEWMAN, D.J. *One-to-one polynomial maps*. 1960. 4p.

[2] VAN DEN DRIES, *L.Tame topology and o-minimal structures*. Cambridge : Cambridge University, 1998. 180 p.

[3] MUNKRES, James R. *Topology*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, c2000. 537 p.

[4] MASSEY, W. S. *Singular homology theory*. New York : Springer, 1980. 265 p.

[5] LIMA, Elon Lages. *Homologia basica*. Rio de Janeiro : IMPA, 2009. 191 p.

[6] COSTE, M. *An Introduction to o-minimal geometry*. Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligraci Internazionali, Pisa, 2000, 80 p.

[7] BOCHNACK, J. ; COSTE, M. ; ROY, M-F. *Real algebraic geometry*. Berlin : Springer-Verlag, 1998. 430 p.

[8] BIANCONI, R. *Teorias o-minimais e geometria algebrica real*. 2010. 14 p.

[9] JOSWIG, M. Lectures 2: *Puiseux series and tropicalization*. Berlin : Mathematical School, Summer, 2009.

[10] NASH, J. *Real algebraic manifolds*. Annals of Mathematics, v. 56, n. 3, nov., p. 405-421, 1952.

[11] COSTE, M. *An introduction to semialgebraic geometry.* Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa. Istituti Editoriali e Poligraci Internazionali, 2000, 78 p.

[12] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry.* Berlin : Springer-Verlag, 1977. 499 p.

[13] BHATTACHARYA, P.B., JAIN, S. K. ; NAGPAUL, S. R. *Basic abstract algebra.* 2nd ed. New York : Cambridge University, c1994. 487 p.

[14] BASU, S. ; POLLACK, R. ; ROY, M-F. *Algorithms in real algebraic geometry.* 2nd ed. Berlin : Springer, 2006. 662 p.

[15] DELFS, H. ; KNEBUSCH, M. *On the homology of algebraic varieties over real closed fields.* 163 p.

[16] DELFS, H. *Kohomologie affiner semialgebraischer Raume.* Diss. Univ. Regensburg 1980.

[17] MUNKRES, James R. *Elements of algebraic topology.* Menlo Park, Calif. : Addison-Wesley, c1984. 454 p.

[18] SHAFAREVICH, I. R. *Basic algebraic geometry.* 2nd ed. Berlin: Springer- Verlag, 1996. 2 v.

[19] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology. 2nd ed. Berlin* : Springer-Verlag, 1980. 377 p.

[20] KURDYKA, K. *Injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective.* Annals of Mathematics, v. 313, n. 1, p. 69-83, 1999.