UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ROBERTO RODRIGUES SILVA

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 3×3 E RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

FORTALEZA
2013

ROBERTO RODRIGUES SILVA

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 3×3 E RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S583d Silva, Roberto Rodrigues
Diagonalização de matrizes 3 x 3 e reconhecimento de quádricas / Roberto Rodrigues Silva. – 2013.
35 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Geometria. 2. Software educacional. 3. Ensino médio. I. Título.

CDD 516

ROBERTO RODRIGUES SILVA

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 3x3 E RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 13 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Tiago Caúla Ribeiro

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha esposa, Cristiane.

Ao meu filho, Nicolas Mateus.

Aos meus pais, Francisco e Lúcia.

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor da existência, a quem devo todo louvor e adoração.

À minha amada esposa, Cristiane Almeida Rodrigues, por sempre oferecer companheirismo, compreensão, lealdade, motivação e amor incondicional.

Ao meu filho, Nicolas Mateus Almeida Rodrigues, por ser amoroso, obediente e respeitador.

Aos meus pais, Francisco Moraes da Silva e Lúcia de Fátima Rodrigues Silva, pela valorosa educação que me foi dada.

À minha irmã, cunhado, sobrinhas e todos que fazem parte da minha família, por sempre terem acreditado em mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, por todas as contribuições para que este trabalho possa ser realizado.

Aos professores Dr. Marcelo Ferreira de Melo, Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. José Othon Dantas Lopes, Dr. José Robério Rogério, Dr. Cleon da Silva Barroso, Dr. José Fábio Bezerra Montenegro e Dr. Michel Pinho Rebouças, por todas as aulas ministradas.

Aos meus professores de Matemática da Educação Básica e da Licenciatura, em especial, Haroldo Sérgio Barbosa de Sousa, Manoel Ferreira de Azevedo Filho, João Montenegro de Miranda, Alberto Flávio Alves Aguiar e Francisco César Teixeira.

Aos meus colegas do curso de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC) por todos os sábados de conhecimento e diversão.

Aos idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), por contribuírem para o enriquecimento da educação do país.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas de trabalho, pelo ambiente familiar e amizade fraterna.

Aos meus alunos, que são os motivos para que eu possa nunca desistir da ideia de ajudar a construir um mundo melhor.

Enfim a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram grandemente para a realização deste sonho.

RESUMO

Este trabalho trata do reconhecimento de quádricas utilizando o método de diagonalização de matrizes 3×3. No início é apresentada a definição de quádricas, as equações padrões seguidas de seus respectivos nomes e representações geométricas. Seguem-se então as ideias de autovalores e autovetores de uma transformação linear que servem de base para a diagonalização de matrizes. Logo após são discutidas a independência linear de autovetores bem como suas propriedades de formarem uma base de um espaço vetorial. A condição para que toda matriz quadrada seja diagonalizável é apresentada em seguida, bem como as particularidades de uma matriz simétrica. A demonstração de que toda matriz simétrica 3×3 é diagonalizável é feita a partir de uma abordagem matricial, elegante e elementar. O reconhecimento de quádricas é feito a partir de cálculos básicos, utilizando alguns conteúdos amplamente explorados no Ensino Médio tais como: matrizes, determinantes, sistemas lineares e equações algébricas. No final é apresentada uma forma de ensinar quádricas na escola utilizando o software educacional Winplot.

Palavras-chave: Quádricas, Diagonalização, Matrizes, Equações, Software Educacional.

ABSTRACT

This paper deals with the recognition of quadrics using the method of diagonalization of matrices 3×3. Earlier it shows the definition of quadrics, the standard equations followed by their names and geometric representations. Then follows the ideas of eigenvalues and eigenvectors of a linear transformation that are the basis for the diagonalization of matrices. Immediately after the linear independence of the eigenvectors is discussed as well as their properties of forming a basis of a vector space. The condition for any square matrix be diagonalizable is shown after, as well as the particularities of a symmetric matrix. The demonstration that all 3×3 symmetric matrix is diagonalizable is made from an elegant and elemental matrix approach. Recognition of quadrics is made from basic calculations using some content widely exploited in high school such as matrices, determinants, linear systems and algebraic equations. At the end it presents a way of teaching quadrics in school using educational software Winplot.

Keywords: Quadrics, Diagonalization, Matrices, Equations, Educational Software.

SUMÁRIO

Capítulo 1
INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica é trabalhada nas séries finais do Ensino Médio muitas vezes de forma condensada devido a alguns fatores, tais como: tempo reduzido, dificuldades de aprendizagem, falta de preparo de professores, etc. O ponto de vista usado é o plano, porém no estudo da Geometria Espacial os alunos são apresentados às figuras espaciais como poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

Este trabalho procura desenvolver uma abordagem clara e simples ao explorar a visão espacial dos alunos, propiciando-os a oportunidade de fazer a interação entre a Álgebra e a Geometria que são muitas vezes ensinadas de forma desconexa. A Álgebra Linear não é transmitida ao aluno de forma rigorosa, mas é de suma importância que o professor possa compreendê-la a fim de que tenha segurança e habilidades suficientes para ministrar uma boa aula.

O professor pode utilizar em suas aulas além dos tradicionais quadro e pincel, recursos computacionais como softwares educacionais, objetos de aprendizagem, jogos, entre outros. O aluno é levado a interagir, manipular, experimentar, tirar conclusões, tomar decisões, ou seja, ser o protagonista do seu próprio conhecimento.

Capítulo 2
QUÁDRICAS

Chamaremos de equação de 2º grau a três variáveis toda equação da forma

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0} \qquad (*)$$

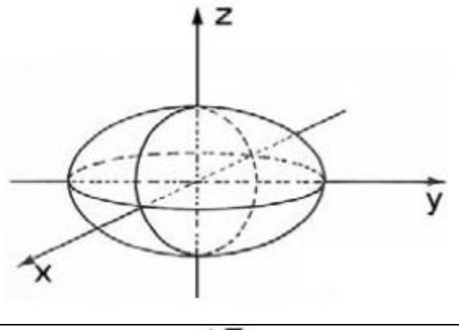
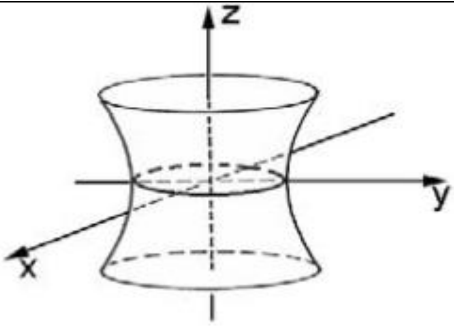
em que A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são constantes reais tais que A, B, C, D, E ou F é diferente de zero, e , x, y e z são variáveis reais.

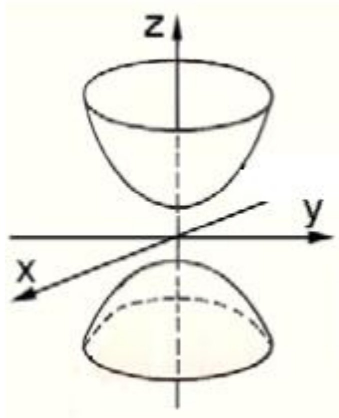
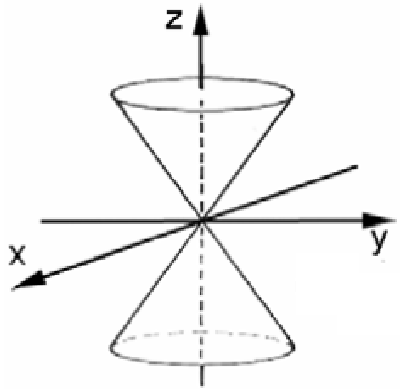
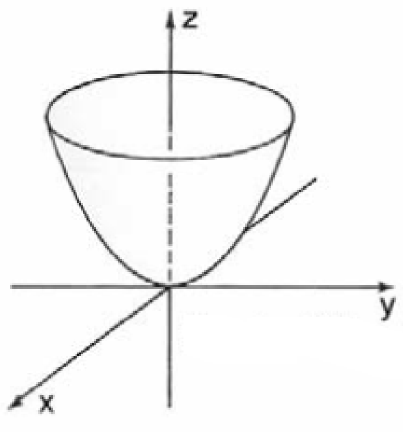
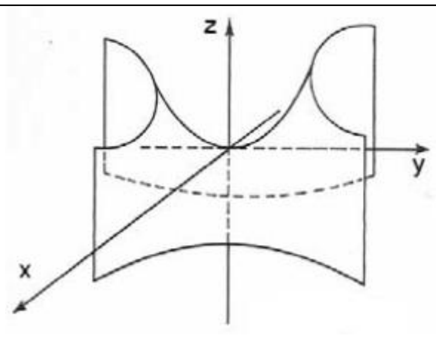
A expressão geral de uma função quadrática $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

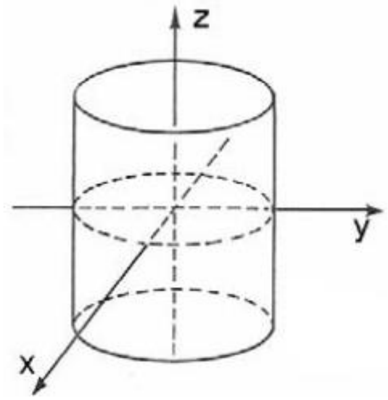
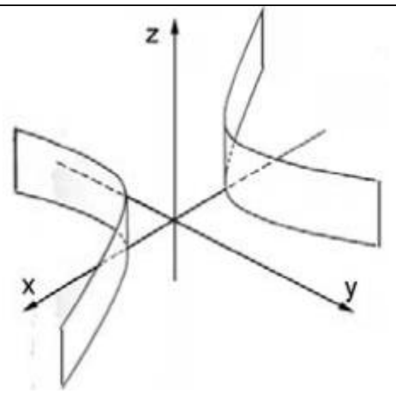
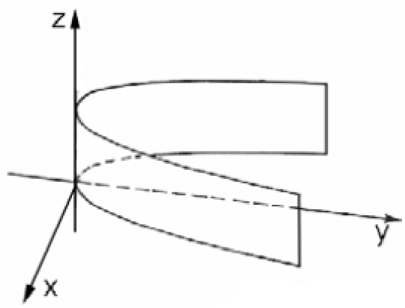
$$\boldsymbol{\psi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J}$$

As superfícies de nível $\boldsymbol{\psi(x,y,z) = d}$ chamam-se quádricas. Quando G = H = I = J = 0, temos a forma quadrática $\boldsymbol{\varphi(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz}$, cujas superfícies de nível $\boldsymbol{\varphi(x,y,z) = d}$ chama-se quádricas centrais. Note que $\boldsymbol{\varphi(x,y,z) = \varphi(-x,-y,-z)}$ portanto o ponto $\boldsymbol{P = (x,y,z)}$ pertence à superfície S de equação $\boldsymbol{\varphi(x,y,z) = d}$ se, somente se, o ponto $\boldsymbol{P' = (-x,-y,-z)}$ também pertence à S. Logo a origem $\boldsymbol{O = (0,0,0)}$ é um centro de simetria de S.

A seguir serão apresentadas as equações chamadas de padrões, pois definem todas as superfícies de nível possíveis de uma forma quadrática, seguidas dos respectivos nomes e representações geométricas:

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$	**Elipsoide**	
$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$	**Hiperboloide de uma folha**	

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	**Hiperboloide de duas folhas**	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	**Cone duplo**	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$	**Paraboloide elíptico**	
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$	**Paraboloide hiperbólico**	

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	**Cilindro elíptico**	
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	**Cilindro hiperbólico**	
$$-\frac{x^2}{a^2}-y=0$$	**Cilindro parabólico**	

Além dessas, existem as quádricas degeneradas que podem ser:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$	**Conjunto vazio**
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$	**Origem $O=(0,0,0)$**
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$	**Dois planos verticais**
$$\frac{x^2}{a^2}=1$$	**Dois planos verticais paralelos ao plano Π_{yz}**

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} = -1}$	**Conjunto vazio**
$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} = 0}$	**Plano $\boldsymbol{\Pi_{yz}}$**

A partir da equação dada na forma (*), o que devemos fazer para encontrar uma das equações listadas acima e reconhecer a quádrica ou sua forma degenerada?

Antes de respondermos a pergunta veremos algumas definições importantes que serão utilizadas posteriormente.

Capítulo 3
AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ com $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ e um escalar $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boldsymbol{T(v) = \lambda v}$$

O escalar $\boldsymbol{\lambda}$ será chamado autovalor de $\boldsymbol{T}$ e o vetor $\boldsymbol{v}$ um autovetor de $\boldsymbol{T}$. Chamaremos de operador linear a toda transformação linear $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Observação 1: Seja $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ um operador linear. Se existirem $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tais que $\boldsymbol{T(v) = \lambda v}$, λ é um autovalor de T e $\boldsymbol{v}$ um autovetor de T associado a $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemplo 1: Seja $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \end{pmatrix}$. Vamos determinar os autovalores de $\boldsymbol{A}$ e o conjunto dos autovetores associados a cada autovalor. Seja $\boldsymbol{\lambda}$ um autovalor de $\boldsymbol{A}$. Então existe um vetor (dado em forma de coluna) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, não nulo, tal que $\boldsymbol{AX = \lambda X}$, isto é:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo temos:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{2x + 2y} \\ \boldsymbol{x + 3y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda x} \\ \boldsymbol{\lambda y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{2x + 2y} \\ \boldsymbol{x + 3y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda x} \\ \boldsymbol{\lambda y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Isto equivale ao sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \boldsymbol{(\lambda - 2)x - 2y = 0} \\ \boldsymbol{-x + (\lambda - 3)y = 0} \end{cases}$$

O sistema acima terá solução não trivial se, e somente se, a matriz dos coeficientes tiver determinante nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda - 2} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{\lambda - 3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{(\lambda - 2)(\lambda - 3) - (-2)(-1) = 0}$$

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0}$$

Portanto $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$ são os autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Substituindo $\boldsymbol{\lambda = \lambda_1 = 1}$ no sistema temos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{-x - 2y = 0} \\ \boldsymbol{-x - 2y = 0} \end{cases}$$

Cuja solução é $\boldsymbol{x = -2y}$. Portanto todos os vetores do tipo $(\boldsymbol{-2y, y})$ ou $\boldsymbol{t(-2, 1)}$, $\boldsymbol{t \neq 0}$, são autovetores de $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$.

Substituindo $\boldsymbol{\lambda = \lambda_2 = 4}$ no sistema temos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x - 2y = 0} \\ \boldsymbol{-x + y = 0} \end{cases}$$

Cuja solução é $\boldsymbol{x = y}$. Portanto todos o vetores do tipo $(\boldsymbol{x, x})$ ou $\boldsymbol{t(1, 1)}$, $\boldsymbol{t \neq 0}$, são autovetores de $\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$.

Observação 2: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz $\boldsymbol{n \times n}$. Chamaremos de polinômio característico de $\boldsymbol{A}$ o polinômio $\boldsymbol{p(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$ onde I é matriz identidade.

Exemplo 2: o polinômio característico da matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ é dado por:

$$\boldsymbol{A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1}$$

Proposição 1: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz $\boldsymbol{n \times n}$. As raízes do polinômio característico $\boldsymbol{p(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$ são os autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Demonstração:

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz $\boldsymbol{n \times n.}$ Os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{A}$ satisfazem a equação:

$$\boldsymbol{Av = \lambda v}$$

$$\boldsymbol{Av = (\lambda I)v}$$

$$\boldsymbol{(A - \lambda I)v = 0}$$

Escrevendo esta equação explicitamente, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chamaremos de $\boldsymbol{B}$ a primeira matriz acima. Então:

$$B \cdot v = 0$$

Se $\boldsymbol{detB \neq 0},$ o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Mas como $\boldsymbol{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}$ $(\boldsymbol{ou\, v = 0})$ sempre é solução de um sistema homogêneo, então esta única solução seria a nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores $\boldsymbol{v}$ (solução não nula da equação acima) é termos $\boldsymbol{detB = 0}$, ou seja,

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A - \lambda I}) = \mathbf{0}$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$\boldsymbol{p(\lambda)} = \mathbf{det}(\boldsymbol{A - \lambda I}) = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11} - \lambda} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn} - \lambda} \end{pmatrix}$$

é um polinômio em $\boldsymbol{\lambda}$ de grau $\boldsymbol{n.}$

$\boldsymbol{p(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)} +$ termos de grau $< \boldsymbol{n},$ e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio.

■

Capítulo 4

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Proposição 2: Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ são linearmente independentes.

Demonstração:

Provaremos para o caso de $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ distintos. A prova para o caso de n autovalores distintos é análoga.

Sejam $\boldsymbol{T(v_1) = \lambda_1 v_1}$ e $\boldsymbol{T(v_2) = \lambda_2 v_2}$, com $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$.

Consideremos a igualdade:

$$\boldsymbol{a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0} \tag{1}$$

Pela linearidade de $\boldsymbol{T}$, tem-se:

$$\boldsymbol{a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = 0}$$

Ou:

$$\boldsymbol{a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0} \tag{2}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade de (1) por $\boldsymbol{\lambda_1}$, vem:

$$\boldsymbol{a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0} \tag{3}$$

Subtraindo (3) de (2):

$$\boldsymbol{a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0}$$

Mas:

$\boldsymbol{\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0}$ e $\boldsymbol{v_2 \neq 0}$

Logo:

$$\boldsymbol{a_2 = 0}$$

Substituindo $\boldsymbol{a_2}$ por seu valor em (1), tendo em vista que $\boldsymbol{v_1 \neq 0}$, vem:

$$\boldsymbol{a_1 = 0}$$

Logo, o conjunto $\{\boldsymbol{v_1, v_2}\}$ é linearmente independente.

■

Corolário 1: Sempre que tivermos um operador $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ com $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$, o conjunto $\{\boldsymbol{v_1, v_2}\}$, formados pelos autovetores associados, será uma base do $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$. Em geral, se $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ é linear, $\boldsymbol{dimV = n}$ e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_n}\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V.

Observação 3: Dado um operador linear $\boldsymbol{T}$ em $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ que possui autovalores $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$ e $\boldsymbol{\lambda_3}$ distintos, associados a $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$, respectivamente. A definição anterior garante que o conjunto $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.

Sabendo que

$$\boldsymbol{T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3}$$
$$\boldsymbol{T(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3}$$
$$\boldsymbol{T(v_3) = \lambda_3 v_3 = 0v_1 + 0v_2 + \lambda_3 v_3}$$

O operador $\boldsymbol{T}$ é representado na base $\boldsymbol{P}$ dos autovetores pela matriz diagonal:

$$[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}$$

Constituída de autovalores na diagonal principal.

Observação 4: A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ é diagonalizável se existe uma matriz invertível $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ seja diagonal.

Capítulo 5

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS

Proposição 3: O polinômio característico de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

Demonstração:

Demonstraremos para o caso de uma matriz simétrica **A** de ordem 2.

Seja a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$

O polinômio característico de A é:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Isto é:

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{c}^2 = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^2 - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{c}^2 = \mathbf{0}$$

O discriminante dessa equação do 2º grau em λ é:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 - \mathbf{4}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{c}^2) = \boldsymbol{a}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{ab} + \mathbf{4}\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + \mathbf{4}\boldsymbol{c}^2 > \mathbf{0}$$

As raízes da equação são reais e, portanto, a matriz A possui dois autovalores.

■

Proposição 4: Se $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ é um operador linear simétrico com autovalores distintos, então os autovetores são ortogonais.

Demonstração:

Sejam $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ dois autovalores do operador simétrico $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{\lambda_1} \neq \boldsymbol{\lambda_2}$. Seja ainda $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{\lambda_1 v_1}$ e $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{\lambda_2 v_2}$. Vamos mostrar que $\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \mathbf{0}$ **.**

Sendo $\boldsymbol{T}$ um operador simétrico, vem:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v_1}) \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v_2})$$

Ou

$$\boldsymbol{\lambda_1 v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{\lambda_2 v_2}$$

Ou

$$\boldsymbol{\lambda_1}(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2}) - \boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2})=0$$

Ou, ainda:

$$(\boldsymbol{\lambda_1} - \boldsymbol{\lambda_2})(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2}) = \mathbf{0}$$

Mas,

$\boldsymbol{\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0}$ implica $\boldsymbol{v_1 \cdot v_2 = 0}$, ou seja:

$\boldsymbol{v_1 \perp v_2}$

■

Observação 5: A matriz $\boldsymbol{A}$ é diagonalizada pela matriz $\boldsymbol{P}$ dos autovetores através de uma matriz $\boldsymbol{D}$ de tal forma que

$$\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$$

Se $\boldsymbol{A}$ for simétrica, $\boldsymbol{P}$ será base ortogonal. Nas aplicações a seguir, é conveniente que $\boldsymbol{P}$, além de ortogonal, seja ortonormal. Isso se obtém normalizando cada vetor.

Capítulo 6

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS 3 × 3

Considere a equação geral de 2º grau a três variáveis

$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}$

Ela pode ser escrita, matricialmente, da seguinte forma:

$$(\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z})\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D/2} & \boldsymbol{E/2} \\ \boldsymbol{D/2} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{F/2} \\ \boldsymbol{E/2} & \boldsymbol{F/2} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{I})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0} \quad (I)$$

Chamaremos de parte quadrática de cada uma das equações o produto: matriz linha × matriz quadrada × matriz coluna e de parte linear o produto: matriz linha × matriz coluna. A matriz quadrada da parte quadrática é uma matriz simétrica, logo se ela fosse uma matriz diagonal o problema estaria resolvido.

Sejam $\boldsymbol{\beta}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$; $\boldsymbol{\beta'}$ uma base ortonormal; $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ as coordenadas de um ponto, em relação à base $\boldsymbol{\beta}$, que satisfaz à equação $(\boldsymbol{I})$ e $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{z'})$ as coordenadas desse mesmo ponto em relação à base $\boldsymbol{\beta'}$. Sejam $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\beta'}}$. Então, ${}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\beta'}}^{\boldsymbol{\beta}}$, uma vez que $\boldsymbol{\beta'}$ é ortonormal. Temos:

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \text{ e } (\boldsymbol{x'} \quad \boldsymbol{y'} \quad \boldsymbol{z'})^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z})$$

A estratégia é determinar $\boldsymbol{\beta'}$ de modo que

$${}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D/2} & \boldsymbol{E/2} \\ \boldsymbol{D/2} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{F/2} \\ \boldsymbol{E/2} & \boldsymbol{F/2} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_3} \end{pmatrix}, \text{ para algum } \boldsymbol{\lambda_1} \text{ e } \boldsymbol{\lambda_2}.$$

Desse jeito a equação (I) se transformará em

$$(\boldsymbol{x'} \quad \boldsymbol{y'} \quad \boldsymbol{z'})^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D/2} & \boldsymbol{E/2} \\ \boldsymbol{D/2} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{F/2} \\ \boldsymbol{E/2} & \boldsymbol{F/2} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{I})\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0} \text{ ou}$$

$$(\boldsymbol{x'} \quad \boldsymbol{y'} \quad \boldsymbol{z'})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{I})\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0},$$ não tendo os "termos mistos".

O problema então ficará resolvido se diagonalizarmos a matriz quadrada da parte quadrática da equação.

Para demonstrar o teorema a seguir, admitiremos verdadeira, sem demonstração, o seguinte teorema:

TEOREMA ESPECTRAL: Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $\boldsymbol{A}$ a matriz de um operador simétrico $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$. Então existe uma base ortonormal ou base espectral $\boldsymbol{\beta}$ de $\boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{A}$ é diagonal.

TEOREMA: Toda matriz simétrica $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ é diagonalizável

Demonstração:

Seja A uma matriz simétrica $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ e $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$ seu polinômio característico. Sendo $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$ um polinômio de grau 3 a coeficientes reais, então $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$ admite uma raiz real. Seja $\boldsymbol{\lambda_1}$ uma raiz real de $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda})$. Consideremos $\boldsymbol{V_{\lambda_1}}$. Distinguiremos três casos: $\boldsymbol{dimV_{\lambda_1}} = \mathbf{3}$, $\boldsymbol{dimV_{\lambda_1}} = \mathbf{2}$ ou $\boldsymbol{dimV_{\lambda_1}} = \mathbf{1}$.

Caso 1: $\boldsymbol{dimV_{\lambda_1}} = \mathbf{3}$. Neste caso, $\boldsymbol{V_{\lambda_1}} = \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ e, portanto, a base canônica é uma base espectral de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ com respeito a $\boldsymbol{A}$.

Caso 2: $\boldsymbol{dimV_{\lambda_1}} = \mathbf{2}$. Digamos que $\{\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}\}$ é uma base ortonormal de $\boldsymbol{V_{\lambda_1}}$. Geometricamente, $\boldsymbol{V_{\lambda_1}}$ é um plano que passa na origem. Seja $\boldsymbol{X_3}$ um vetor de comprimento 1 e normal a este plano (por exemplo, $\boldsymbol{X_3}$ pode ser o produto vetorial $\boldsymbol{X_1} \times \boldsymbol{X_2}$ dividido por sua norma). É claro que $\{\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{X_3}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. Mostraremos que ela é constituída de autovetores de $\boldsymbol{A}$. Já temos que $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ são autovetores associados a $\boldsymbol{\lambda_1}$. Resta provarmos que $\boldsymbol{X_3}$ é também um autovetor.

Para isso, escrevamos $\boldsymbol{AX_3}$ como combinação linear da base $\{\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{X_3}\}$.

$$\boldsymbol{AX_3} = \boldsymbol{a_1X_1} + \boldsymbol{a_2X_2} + \boldsymbol{a_3X_3} \ (I)$$

Tentaremos mostrar que $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} = \mathbf{0}$.

Multiplicando-se (I), membro a membro, por ${}^{t}\boldsymbol{X_1}$, obteremos:

$${}^{t}\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{AX_3}) = {}^{t}\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{a_1X_1}) + {}^{t}\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{a_2X_2}) + {}^{t}\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{a_3X_3})$$

Sendo $\boldsymbol{A}$ uma matriz simétrica, vem que ${}^{t}\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{AX_3}) = {}^{t}\boldsymbol{X_3}(\boldsymbol{AX_1})$

Assim sendo, teremos:

$${}^{t}\boldsymbol{X_3}(\boldsymbol{AX_1}) = \boldsymbol{a_1}({}^{t}\boldsymbol{X_1} \cdot \boldsymbol{X_1}) + \boldsymbol{a_2}({}^{t}\boldsymbol{X_1} \cdot \boldsymbol{X_2}) + \boldsymbol{a_3}({}^{t}\boldsymbol{X_1} \cdot \boldsymbol{X_3}) = \boldsymbol{a_1}$$

Desde que $\boldsymbol{AX_1} = \boldsymbol{\lambda_1X_1}$ segue-se que:

$$\boldsymbol{a_1} = {}^{t}\boldsymbol{X_3}(\boldsymbol{\lambda_1X_1}) = \boldsymbol{\lambda_1}({}^{t}\boldsymbol{X_3} \cdot \boldsymbol{X_1}) = \boldsymbol{\lambda_1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando-se (I), membro a membro por ${}^{t}\boldsymbol{X_2}$, obteremos:

$${}^{t}\boldsymbol{X_2}(\boldsymbol{AX_3}) = {}^{t}\boldsymbol{X_2}(\boldsymbol{a_1X_1}) + {}^{t}\boldsymbol{X_2}(\boldsymbol{a_2X_2}) + {}^{t}\boldsymbol{X_2}(\boldsymbol{a_3X_3})$$

$${}^{t}\boldsymbol{X_2}(\boldsymbol{AX_3}) = {}^{t}\boldsymbol{X_3}(\boldsymbol{AX_2})$$

Então:

$${}^{t}X_3(AX_2) = a_1({}^{t}X_2 \cdot X_1) + a_2({}^{t}X_2 \cdot X_2) + a_3({}^{t}X_2 \cdot X_3) = a_2$$

Tomando $AX_2 = \lambda_2 X_2$ segue-se que:

$$a_2 = {}^{t}X_3(\lambda_2 X_2) = \lambda_2({}^{t}X_3 \cdot X_2) = \lambda_2 \cdot 0 = 0$$

Portanto, $\{X_1, X_2, X_3\}$ é uma base espectral de $\mathbb{R}^3$.

Caso 3: $dimV_{\lambda_1} = 1$. Digamos que $V_{\lambda_1} = [X_1]$, em que $|X_1| = 1$. Geometricamente falando, V_{λ_1} é uma reta que passa na origem. Consideremos o plano passando na origem perpendicular a esta reta. Este plano é um subespaço de dimensão 2. Seja $\{X_2, X_3\}$ uma base ortonormal dele. Dessa forma, $\{X_1, X_2, X_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Escrevamos AX_2 e AX_3 como combinação linear dos vetores desta base. Digamos que:

$$AX_2 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \ (I)$$

$$AX_3 = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 \ (II)$$

Multiplicando-se (I), membro a membro, por ${}^{t}X_1$:

$${}^{t}X_1(AX_2) = {}^{t}X_1(a_1X_1) + {}^{t}X_1(a_2X_2) + {}^{t}X_1(a_3X_3)$$

Sendo *A* simétrica segue-se que:

$${}^{t}X_2(AX_1) = a_1({}^{t}X_1 \cdot X_1) + a_2({}^{t}X_1 \cdot X_2) + a_3({}^{t}X_1 \cdot X_3) = a_1$$

Tomando $AX_1 = \lambda_1 X_1$ teremos:

$$a_1 = {}^{t}X_2(\lambda_1 X_1) = \lambda_1({}^{t}X_2 \cdot X_1) = \lambda_1 \cdot 0 = 0$$

Multiplicando-se (II), membro a membro, por ${}^{t}X_1$:

$${}^{t}X_1(AX_3) = {}^{t}X_1(b_1X_1) + {}^{t}X_1(b_2X_2) + {}^{t}X_1(b_3X_3)$$

Sendo *A* simétrica segue-se que:

$${}^{t}X_3(AX_1) = b_1({}^{t}X_1 \cdot X_1) + b_2({}^{t}X_1 \cdot X_2) + b_3({}^{t}X_1 \cdot X_3) = b_1$$

Tomando $AX_1 = \lambda_1 X_1$ teremos:

$$b_1 = {}^{t}X_3(\lambda_1 X_1) = \lambda_1({}^{t}X_3 \cdot X_1) = \lambda_1 \cdot 0 = 0$$

Multiplicando-se (I), membro a membro, por ${}^{t}X_3$:

$${}^{t}X_3(AX_2) = {}^{t}X_3(a_1X_1) + {}^{t}X_3(a_2X_2) + {}^{t}X_3(a_3X_3)$$

Sendo *A* simétrica segue-se que:

$${}^{t}X_2(AX_3) = a_1({}^{t}X_3 \cdot X_1) + a_2({}^{t}X_3 \cdot X_2) + a_3({}^{t}X_3 \cdot X_3) = a_3$$

$${}^{t}X_2(b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) = a_3$$

$${}^{t}X_2(b_1X_1) + {}^{t}X_2(b_2X_2) + {}^{t}X_2(b_3X_3) = a_3$$

$$b_1({}^{t}X_2 \cdot X_1) + b_2({}^{t}X_2 \cdot X_2) + b_3({}^{t}X_2 \cdot X_3) = a_3$$

Portanto, $b_2 = a_3$.

Enfim, teremos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX_1 = \lambda_1 X_1} \\ \boldsymbol{AX_2 = a_2X_2 + a_3X_3} \\ \boldsymbol{AX_3 = a_3X_2 + b_3X_3} \end{cases}$$

Denominando-se por $\boldsymbol{M}$ a matriz $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, ortogonal, cuja j-ésima coluna é formada pelas componentes de $\boldsymbol{X_j}$, teremos:

$$\boldsymbol{{}^tMAM} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix}$$

Façamos $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix}$. Sendo $\boldsymbol{B}$ uma matriz simétrica $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, de acordo com a **Observação 5** existe uma matriz ortogonal $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ tal que $\boldsymbol{{}^tNBN}$ é uma matriz diagonal. Digamos que $\boldsymbol{{}^tNBN} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_3} \end{pmatrix}$. Consideremos a matriz ortogonal $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$. Então,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{{}^tP} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{{}^tP({}^tMAM)P} = \boldsymbol{{}^t(MP)A(MP)}.$$

Sendo $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{P}$ matrizes ortogonais, decorre que $\boldsymbol{MP}$ é uma matriz ortogonal, por conseguinte, suas colunas constituem uma base espectral de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ em relação à matriz $\boldsymbol{A}$.

■

Capítulo 7

RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

Para reconhecer uma quádrica é preciso reduzir a equação dada a uma das listadas no Capítulo 2. Para facilitar a compreensão dividiremos em três casos.

Caso 1: Equações do tipo $\boldsymbol{Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Iz+J=0}$

A equação possui os termos mistos xy, xz e yz todos nulos. Podemos usar a técnica de completar quadrados para identificar as quádricas.

Exemplo 3: $\boldsymbol{x^2+4y^2+z^2-2x+16y+13=0}$

Completando os quadrados temos:

$\boldsymbol{(x^2-2x+1)+(4y^2+16y+16)+z^2=-13+1+16}$

$\boldsymbol{(x-1)^2+4(y+2)^2+z^2=4}$

Dividindo ambos os membros por 4 teremos:

$$\boldsymbol{\frac{(x-1)^2}{4}+(y+2)^2+\frac{z^2}{4}=1}$$

Façamos uma translação de eixo usando as coordenadas:

$$\boldsymbol{\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+2 \\ z' = z \end{cases}}$$

A equação fica então:

$$\boldsymbol{\frac{x'^2}{4}+y'^2+\frac{z'^2}{4}=1}$$

A equação representa um elipsoide.

Caso 2: Equações do tipo $\boldsymbol{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+J=0}$

Quando a equação possuir parte linear nula deveremos convertê-la para a forma matricial

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}}$$

determinar o polinômio característico e calcular os autovalores $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$ e $\boldsymbol{\lambda_3}$. A equação tomará a forma abaixo:

$$\boldsymbol{(x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+J=0} \text{ (**)}$$

Exemplo 4: $\boldsymbol{2x^2+2y^2-z^2+8xy-4xz-4yz-2=0}$

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

O polinômio característico $p(\lambda)=\lambda I-A$ é dado por:

$$\boldsymbol{p(\lambda)=A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}}$$

Calculemos o determinante de $\boldsymbol{p(\lambda)}$:

$$\boldsymbol{\det p(\lambda)=(2-\lambda)^2(-1-\lambda)+16+16-4(2-\lambda)-4(2-\lambda)-16(-1-\lambda)}$$

$$\boldsymbol{=(\lambda^2-4\lambda+4)(-1-\lambda)+32+4\lambda-8+4\lambda-8+16\lambda+16}$$

$$\boldsymbol{=-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda-4\lambda-4+32+24\lambda}$$

$$\boldsymbol{=-\lambda^3+3\lambda^2+24\lambda+28}$$

Os autovalores são as raízes de $\boldsymbol{p(\lambda)=0}$:

$$\boldsymbol{\lambda^3-3\lambda^2-24\lambda-28=0}$$

Como este é um polinômio de terceiro grau, ele tem no máximo três raízes reais. Os possíveis valores de $\boldsymbol{\lambda}$ são os divisores inteiros de 28, que são $\boldsymbol{\pm1,\pm2,\pm4,\pm7,\pm14}$ e $\boldsymbol{\pm28}$. Fazendo um teste rápido percebemos que $\boldsymbol{-2}$ é uma das raízes. Desse modo, dividindo $\boldsymbol{p(\lambda)}$ por $\boldsymbol{(\lambda+2)}$ teremos:

$$\boldsymbol{(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda-14)=0}$$

Para encontrar as outras duas raízes faremos:

$\boldsymbol{\lambda^2-5\lambda-14=0}$, cujas raízes são $\boldsymbol{\lambda=-2}$ ou $\boldsymbol{\lambda=7}$.

Portanto os autovalores são: $\boldsymbol{\lambda_1=-2}$, $\boldsymbol{\lambda_2=-2}$ e $\boldsymbol{\lambda_3=7}$. Substituindo-os em (**) temos:

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}-2=0}$$

$$\boldsymbol{-2x^2-2y^2+7z^2=2}$$

Dividindo os dois membros por 2:

$$\boldsymbol{-x^2-y^2+\frac{z^2}{2/7}=1}$$

E teremos um hiperboloide de duas folhas.

Caso 3: $\boldsymbol{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0}$

Quando a equação está completa o procedimento é idêntico ao caso anterior. Além disso, é necessário determinar os autovetores relativos aos respectivos autovalores, afim de que a equação tome a forma:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + J = 0$$ (***), onde M

é a matriz de mudança de base da base espectral para a base canônica.

Exemplo 5: $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2\sqrt{2}yz + \sqrt{3}y - \sqrt{6}z = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det p(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 2(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2) = \lambda(3-\lambda)^2$$

Os autovalores são as raízes de $p(\lambda) = 0$:

$\lambda(3-\lambda)^2 = 0$, cujas raízes são 0 e 3 (multiplicidade 2).

Portanto temos três autovalores: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Para encontrar o autovetor $v_n = (a_n, b_n, c_n)$ devemos substituir o autovalor na matriz de $p(\lambda)$ de tal forma que

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 0$, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} 3a_1 = 0 \\ 2b_1 + \sqrt{2}c_1 = 0 \\ \sqrt{2}b_1 + c_1 = 0 \end{cases}$$

Onde $a_1 = 0$ e $c_1 = -\sqrt{2}b_1$

Então:

$$v_1 = (0, b_1, -\sqrt{2}b_1)$$

$$v_1 = b_1(0, 1, -\sqrt{2})$$

Portanto, $\boldsymbol{v_1} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\sqrt{\mathbf{2}})$ é o autovetor associado ao autovalor $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{0}$.

Para $\boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{3}$, temos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \sqrt{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{2}} & -\mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{b_2} + \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{c_2} = \mathbf{0} \\ \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{b_2} - \mathbf{2}\boldsymbol{c_2} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Onde $\boldsymbol{b_2} = \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{c_2}$.

Então:

$$\boldsymbol{v_2} = (\boldsymbol{a_2}, \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_2})$$

Note que:

$$(\boldsymbol{a_2}, \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_2}) = (\boldsymbol{a_2}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_2}) = \boldsymbol{a_2}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + \boldsymbol{c_2}(\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2}}, \mathbf{1})$$

Portanto, $\boldsymbol{v_2} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $\boldsymbol{v_3} = (\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2}}, \mathbf{1})$ são autovetores associados aos autovalores $\boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{3}$.

Sendo $\boldsymbol{A}$ simétrica, os vetores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$ são perpendiculares, portanto, constituem uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Porém apenas $\boldsymbol{v_2}$ é ortonormal. Dividindo $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_3}$ por sua norma obteremos uma base espectral de $\mathbb{R}^3$, relativa à matriz $\boldsymbol{A}$. Então:

$$\frac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|} = \frac{(\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\sqrt{\mathbf{2}})}{\sqrt{\mathbf{0}^2 + \mathbf{1}^2 + (-\sqrt{\mathbf{2}})^2}} = \frac{(\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\sqrt{\mathbf{2}})}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}, \frac{-\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right) = \left(\mathbf{0}, \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}, \frac{-\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}\right)$$

$$\frac{\boldsymbol{v_3}}{|\boldsymbol{v_3}|} = \frac{(\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2}}, \mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{0}^2 + \sqrt{\mathbf{2}}^2 + \mathbf{1}^2}} = \frac{(\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2}}, \mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \left(\mathbf{0}, \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{3}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right) = \left(\mathbf{0}, \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}, \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\right)$$

Portanto, substituindo em (***) temos:

$$(\boldsymbol{x'} \quad \boldsymbol{y'} \quad \boldsymbol{z'}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} + (\mathbf{0} \quad \sqrt{\mathbf{3}} \quad -\sqrt{\mathbf{6}}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \sqrt{\mathbf{3}}/\mathbf{3} & \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{6}}/\mathbf{3} \\ -\sqrt{\mathbf{6}}/\mathbf{3} & \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{3}}/\mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{3}\boldsymbol{y'}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\boldsymbol{z'}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\boldsymbol{x'} = \mathbf{0}$. Dividindo os dois membros por 3:

$\boldsymbol{y'}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{z'}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x'} = \mathbf{0}$.

A equação representa um paraboloide elíptico.

Capítulo 8

RECURSOS COMPUTACIONAIS.

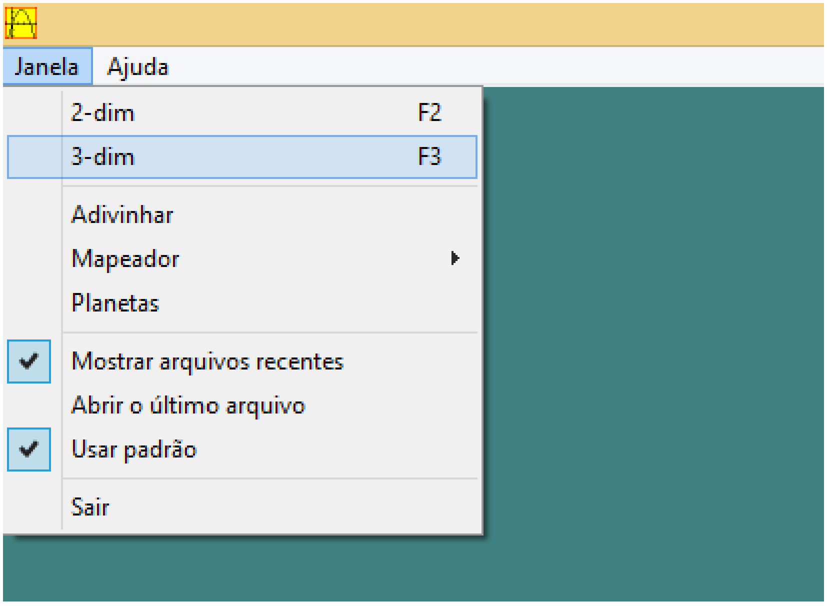
Vimos no capítulo anterior que o cálculo necessário para reconhecer uma quádrica possui um nível compatível com o currículo de Matemática do Ensino Médio. Porém o uso de recursos computacionais facilita a aprendizagem do educando, além de tornar o conteúdo mais atrativo e curioso.

O Winplot é uma excelente ferramenta computacional para fazer gráficos em 2D e 3D. Além de ser gratuito, é de fácil utilização e pode enriquecer bastante as aulas. Mostraremos como usar o aplicativo para gerar e visualizar quádricas.

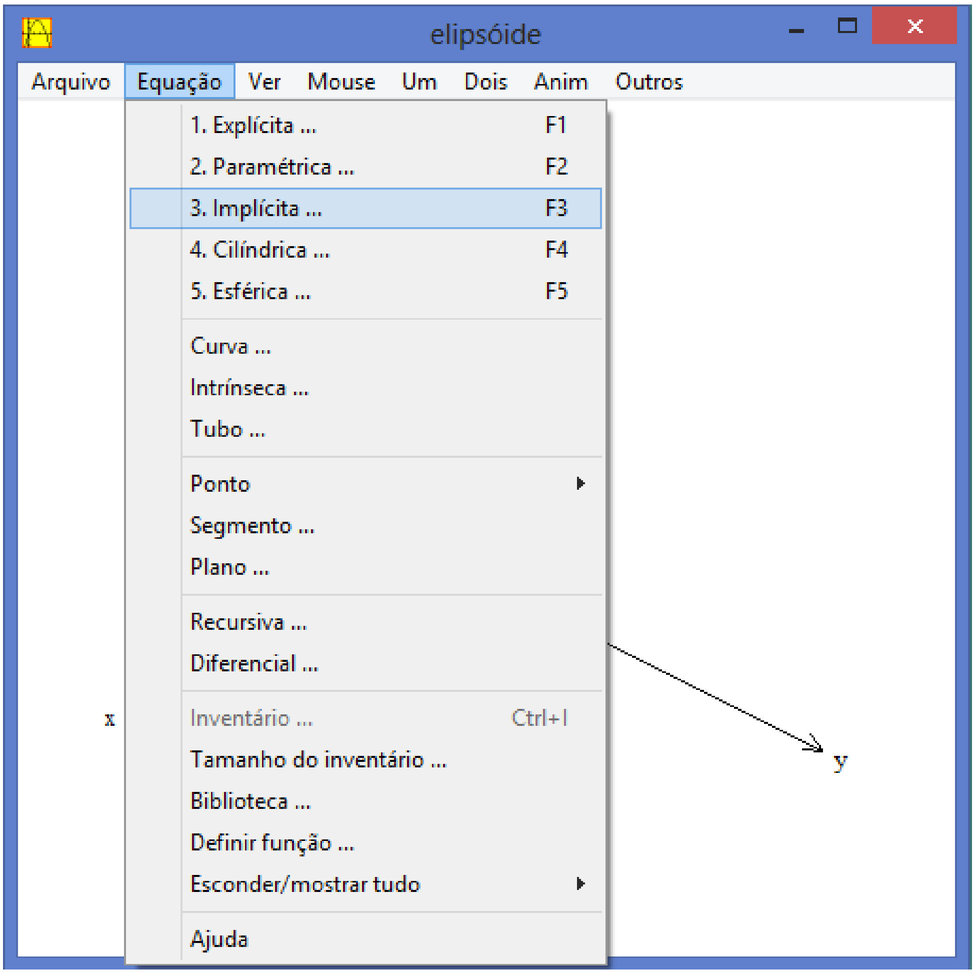
Vamos construir, por exemplo, a elipsoide de equação:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$$

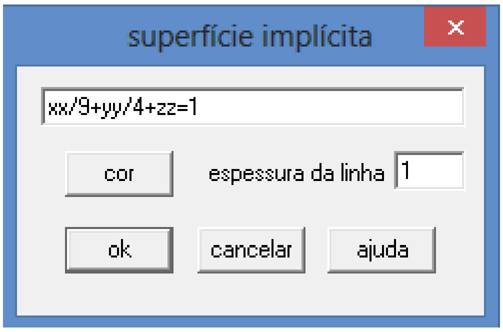
Ao abrir o programa, devemos selecionar a opção 3-dim:

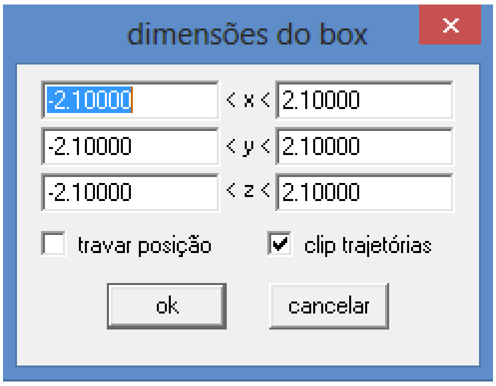


Em Equação, escolheremos a forma implícita:



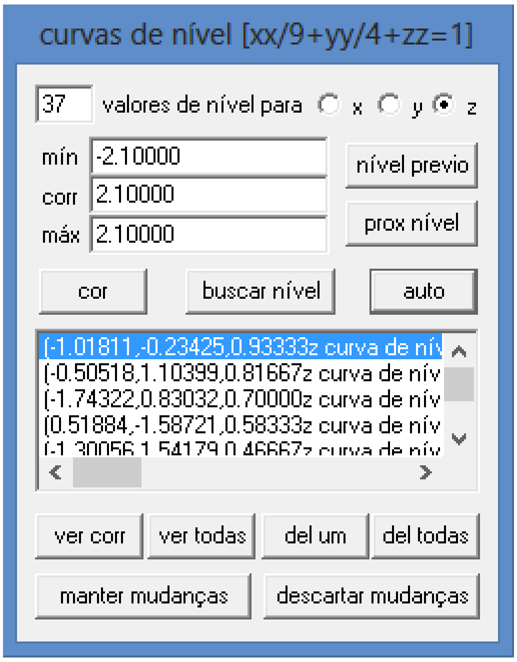
Escrevemos a equação da forma mostrada na figura abaixo, clicando em ok nas duas janelas:



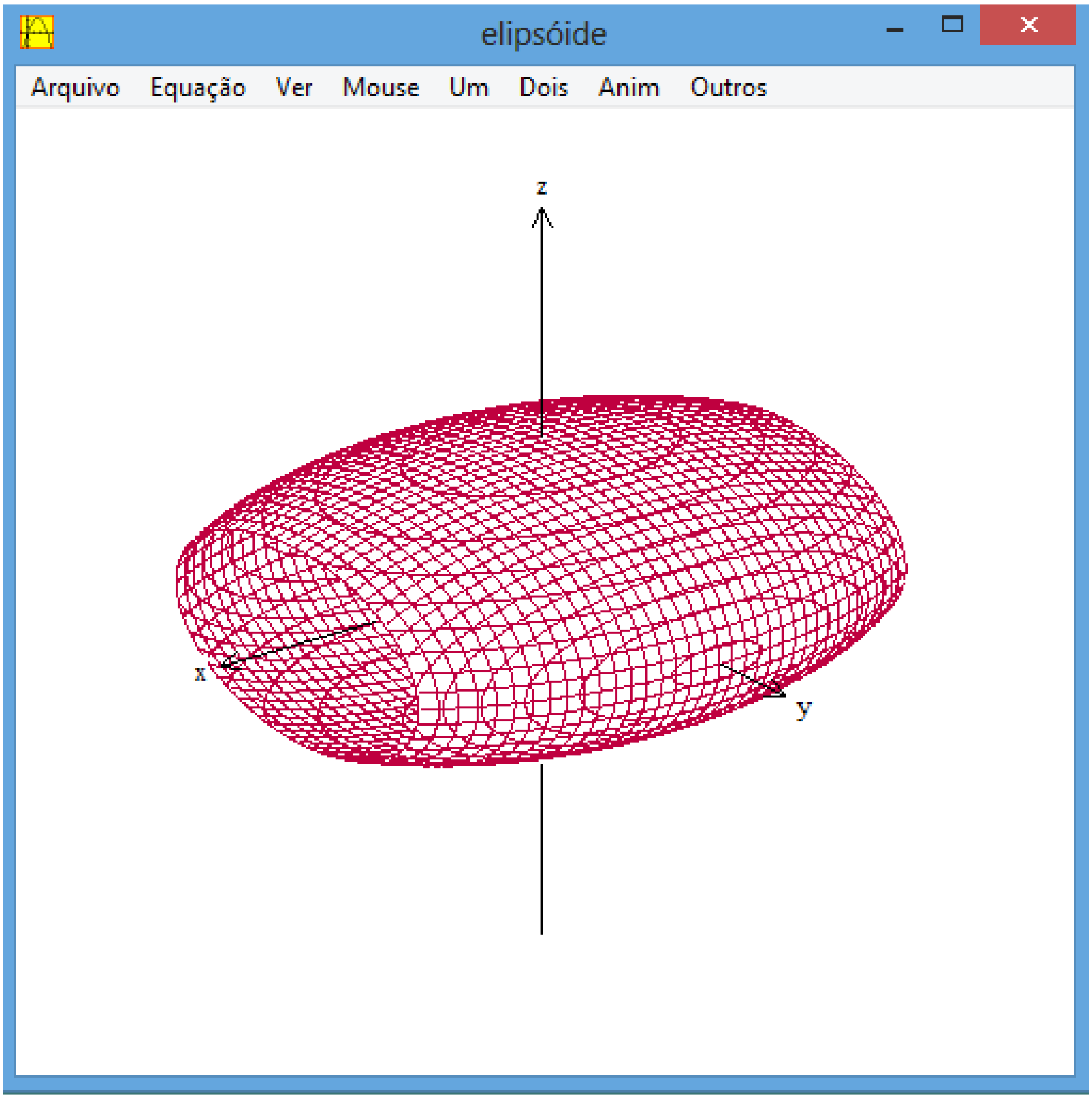


Superfícies definidas implicitamente são desenhadas por meio de curvas de nível, que são obtidas clicando no botão **níveis** na janela inventário.

Os valores de nível devem ser atribuídos às três variáveis e depois clicar em auto.



Dessa forma obtém-se a superfície da equação dada:



elipsóide
Arquivo
Equação
Ver
Mouse
Um
Dois
Anim
Outros
z
x
y

Capítulo 9
CONCLUSÃO

A Geometria Analítica Espacial pode ser explorada no Ensino Médio de forma bem elementar, utilizando-se da vivência do aluno que percebe o formato de uma quádrica ao ver um balão dirigível, uma antena parabólica, uma obra arquitetônica, ou muitos objetos do seu cotidiano.

Trazer essa realidade pra sala de aula favorece ao professor diminuir a sua distância entre os alunos e destes ao conhecimento. Para tanto o professor deve estar seguro quanto ao seu domínio sobre o conteúdo para que possa transmiti-lo da melhor forma possível.

REFERÊNCIAS

FILHO, Manoel Ferreira de Azevedo. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Fortaleza: Edições Livro Técnico, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: IMPAR, 2011.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G.. **Álgebra Linear.** São Paulo: Editora HARBRA ltda, 1986.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** São Paulo: McGraww-Hil, 1987.