

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/335703251>

Problema Integrado de Corte e Empacotamento do Planejamento de Produção Multiperíodo de Vigas Pré-Moldadas Heterogêneas

Conference Paper · September 2019

CITATIONS

0

READS

154

3 authors:



Kennedy Araújo

University of São Paulo

18 PUBLICATIONS 21 CITATIONS

SEE PROFILE



Tiberius Bonates

Universidade Federal do Ceará

44 PUBLICATIONS 875 CITATIONS

SEE PROFILE



Bruno Prata

Universidade Federal do Ceará

127 PUBLICATIONS 534 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Models and algorithms for new variants of open shop scheduling problem [View project](#)



Models and algorithms for scheduling hybrid flow shops with machine blocking and setup times [View project](#)

Problema Integrado de Corte e Empacotamento do Planejamento de Produção Multiperíodo de Vigas Pré-Moldadas Heterogêneas

RESUMO

Introduzimos uma nova variante de problemas de planejamento de produção de corte denominada Problema Integrado de Corte e Empacotamento do Planejamento de Produção Multiperíodo de Vigas Pré-Moldadas Heterogêneas (ICP-HPBMPP, em inglês). Propomos um modelo de programação linear inteira para o ICP-HPBMPP e um limite inferior para seu valor ótimo de função objetivo. Discutimos experimentos computacionais que foram realizados para o modelo proposto e observamos bom desempenho da abordagem exata na resolução de instâncias de pequeno porte, embora existam dificuldades em encontrar soluções ótimas para problemas de médio e grande porte, ou mesmo em encontrar soluções viáveis. Por outro lado, o limite inferior proposto é empiricamente mostrado ser mais próximo do valor da solução ótima do que o limite obtido a partir da relaxação linear do modelo.

PALAVRAS CHAVE. Vigas Pré-moldadas. Construção Modular. Programação Linear Inteira.

Programação Matemática, Otimização Combinatória, PO na Indústria

ABSTRACT

We introduce a new variant of cutting production planning problems named Integrated Cutting and Packing Heterogeneous Precast Beams Multiperiod Production Planning (ICP-HPBMPP). We propose an integer linear programming model for the ICP-HPBMPP and a lower bound for its optimal objective function value. We discuss computational experiments that were carried out for the proposed model and observe good performance of the exact approach when solving small-sized instances, although there are difficulties in finding optimal solutions for medium and large-sized problems, or even in finding feasible solutions. On the other hand, the proposed lower bound is empirically shown to be closer to the optimal solution value than the bound obtained from the linear relaxation of the model.

KEYWORDS. Precast beams. Modular Construction. Integer Linear Programming.

Mathematical Programming, Combinatorial Optimization, OR in the Industry

1. Introdução

Atualmente, a produção de concreto pré-moldado é cada vez mais popular em locais de construção. Há grandes vantagens em usar esse tipo de produção, como elementos melhores e mais baratos, e um potencial para reduzir drasticamente o tempo de construção em comparação a métodos convencionais. O elemento pré-moldado que consideramos neste trabalho é uma viga pré-moldada de concreto, que é um tipo de viga que é moldada em plantas longe do canteiro de obras em um ambiente controlado. Essas vigas são heterogêneas no sentido de que podem variar com relação ao tempo de cura, comprimento, e elementos usados em sua produção.

Nos referimos ao problema de planejar a produção de tais vigas para atender a demanda de clientes dentro de um determinado horizonte de tempo como o Planejamento de Produção Multiperíodo de Vigas Pré-Moldadas Heterogêneas (HPBMPP, em inglês). [Araujo et al., 2019] propuseram quatro modelos de programação linear inteira para o HPBMPP, considerando vigas pré-moldadas protendidas em vez de vigas pré-moldadas convencionais. Um dos modelos propostos minimiza a capacidade ociosa total nas formas ao longo do horizonte de tempo, dois modelos minimizam o *makespan* da produção, e um modelo minimiza o tempo total de conclusão. Os autores argumentaram a NP-dificuldade do problema e sugeriram um modelo de programação por restrições para gerar padrões de corte para o problema. Além disso, propuseram vários métodos de solução, em particular uma heurística de redução de tamanho que conseguiu encontrar soluções de alta qualidade em menor tempo e usar menos memória comparada a métodos exatos.

Neste trabalho, propomos um modelo variante do HPBMPP, que consiste na integração da produção de barras, que são utilizadas na produção de vigas pré-moldadas, no problema. Dividimos as barras em dois grupos: barras padrão e *sobras*. As barras padrão são barras novas de comprimentos padronizados e as sobras são um tipo de barra que não é usada na produção de vigas, mas que podem ser armazenadas em estoque para produzir outras barras no futuro. Consideramos que tanto as barras padrão quanto as sobras variam em relação ao comprimento. A produção de barras a serem utilizadas na produção de vigas pode ser feita pelo corte de barras padrão ou sobras em estoque, ou pelo processo de corte de barras obtidas pelo processo de traspasse de sobras. O processo de traspasse abordado consiste na fusão de duas sobras para criar uma barra maior que pode ser cortada para produzir uma barra de comprimento apropriado que será usada na produção de vigas. De acordo com nosso conhecimento, a consideração de barras obtidas por traspasse em não foi previamente estudada na literatura revisada.

Chamamos o problema de integrar o processo de corte de barras ou barras obtidas por traspasse que serão “empacotadas” nas formas para a produção de uma demanda de vigas em um único planejamento de produção de Problema Integrado de Corte e Empacotamento do Planejamento de Produção Multiperíodo de Vigas Pré-Moldadas Heterogêneas (ICP-HPBMPP, em inglês). As barras necessárias para fornecer a produção de vigas podem ser produzidas cortando barras padrão, sobras em estoque, ou barras obtidas via traspasse. O estoque é estático, ou seja, temos um estoque que não muda durante o horizonte de tempo.

Estudar este problema é interessante na prática, uma vez que otimizar a produção de vigas protendidas tem o efeito potencial de acelerar o tempo total de construção, melhorando o uso de formas e estoque de barras, e minimizando a perda de barras e concreto. Uma melhor utilização do estoque de barras pode resultar em uma redução das barras excedentes no canteiro de obras, o que pode melhorar o fluxo de produção. Além disso, a redução da perda de concreto e barras pode levar a um impacto positivo no meio ambiente. Um processo otimizado permite que as fábricas aceitem pedidos adicionais devido a prazos de entrega menores. Além disso, o custo de produção com um processo otimizado será menor, o que pode levar a uma redução do preço do produto final,

aumentando a competitividade.

Até onde sabemos, não há um modelo matemático na literatura para o ICP-HPBMPP, embora ele possua semelhanças consideráveis com problemas de corte e de empacotamento unidimensionais (C&P). Por outro lado, os problemas de C&P e suas variantes foram substancialmente estudadas na literatura. [Dyckhoff, 1990] introduziu uma tipologia de problemas de C&P unificando noções na literatura para guiar pesquisas adicionais em variantes dos mesmos. [Wäscher et al., 2007] apresentou uma nova tipologia para categorizar os tipos de problemas de C&P na literatura entre os anos de 1995 e 2004, introduzindo novos critérios de categorização. [Trkman e Gradisar, 2007] propuseram um modelo para os problemas de corte unidimensional multiperíodo (M1DCSP) considerando o uso de objetos/sobras em estoque. [Poldi e Arenales, 2010] propuseram um modelo linear inteiro para o M1DCSP, implementaram uma geração de colunas para resolver a relaxação linear, e desenvolveram duas heurísticas de arredondamento para encontrar soluções inteiras para o problema. [Melega et al., 2018] propuseram um modelo para o problema geral integrado de dimensionamento de lote e estoque de corte, bem como classificaram e revisaram trabalhos que lidam com esse tipo de problema.

Quanto aos problemas de C&P e abordagens de otimização na produção de pré-moldados, [de Castilho et al., 2007] descreveu o problema de minimizar os custos de produção para placas de vigas protendidas pré-moldadas de concreto e introduziu um algoritmo genético para resolvê-lo. [Prata et al., 2015] propuseram um modelo de programação linear inteira para o planejamento de produção multiperíodo de vigas pré-moldadas de concreto, que pode ser visto como um caso especial do HPBMPP. [Arenales et al., 2015] introduziu um modelo matemático para o problema de corte de estoque/sobra e sugeriu uma técnica de geração de colunas para encontrar a solução da relaxação linear do problema. [Vassoler et al., 2016] propuseram um modelo matemático baseado no problema de corte multiperíodo para o problema de planejamento de produção de vigas em indústrias de lajes de treliça. Os autores sugeriram um método de solução baseado em geração de colunas para resolver a relaxação linear do problema. [Wang et al., 2018] introduziu um modelo híbrido de algoritmo genético aplicado à produção de pré-moldados para garantir a entrega pontual de componentes pré-fabricados minimizando o custo de produção e, simultaneamente, otimizando o desperdício de recursos considerando a incerteza no tempo de processamento de cada operação. Os autores validaram o modelo com um estudo de caso.

O restante deste trabalho é organizado da seguinte forma. Na seção 2 definimos formalmente o problema, propomos um modelo de programação linear inteira para sua solução, discutimos sua NP-dificuldade e propomos um limite inferior para seu valor ótimo de função objetivo. Na seção 3 discutimos diversos experimentos computacionais conduzidos com base em instâncias geradas artificialmente e discutimos os resultados dos métodos de solução propostos. Na seção 4 discutimos as conclusões e contribuições deste estudo, bem como apontamos lacunas de pesquisa e sugerimos trabalhos futuros.

2. Descrição do Problema

O ICP-HPBMPP consiste em encontrar um planejamento de produção viável para produzir certas quantidades de vigas pré-moldadas de concreto, possivelmente de tipos diferentes, minimizando o comprimento total de barras que não podem ser usadas como *sobras*, que é entendido como um pedaço de barra que pode ser cortado ou usado em traspasse no futuro para atender novas demandas e não é considerado desperdício. A fábrica de vigas tem uma quantidade fixa de barras e sobras com comprimentos padrão em estoque que podem ser usadas dentro de um determinado horizonte de tempo.

Cada forma só pode ser usada para produzir um tipo de viga por vez. É possível, no

entanto, simultaneamente produzir vigas de diferentes comprimentos na mesma forma, desde que sejam do mesmo tipo. O comprimento total das vigas produzidas durante um determinado período em uma determinada forma não pode ser maior que a capacidade da forma, e o número total de períodos necessários para concluir a produção não pode ser maior do que um determinado horizonte de tempo. Após o processo de corte das barras, elas são armazenadas nas formas para produzir as vigas, sob a condição de que diferentes tipos de vigas possam demandar diferentes números de barras. Por este motivo, nos referimos a este problema como um problema integrado de corte e empacotamento.

Como entrada do problema, temos uma demanda estática determinística de vigas, com seus respectivos tipos e comprimentos, estoque de barras padrão e estoque de sobras, com seus respectivos comprimentos. O planejamento de corte das barras é feito para todo o horizonte de tempo resultando em mais sobras de barras (que podem ser utilizadas em outro planejamento de produção), e, possivelmente, incorrendo em perda de barras. As barras cortadas serão armazenadas nas formas para a produção de viga ao longo do horizonte de tempo. Após a produção de todas as vigas demandadas, normalmente haverá desperdício de concreto das vigas e perda adicional de barras.

2.1. Modelo de Programação Linear Inteira

Propomos um modelo de programação linear inteira para o ICP-HPBMPP com base nos modelos propostos por [Arenales et al., 2015] para o problema de corte de estoque/sobra e por [Araujo et al., 2019] para o HPBMPP. Para apresentar tal modelo, utilizamos os mesmos parâmetros definidos em [Araujo et al., 2019], a seguir:

- M, T, C : número de formas, períodos disponíveis, e tipos de vigas, respectivamente;
- q_c : número de comprimentos distintos de vigas do tipo c , com $c = 1, \dots, C$;
- $l(c, 1), \dots, l(c, q_c)$: números reais correspondendo aos comprimentos de vigas do tipo c , com $c = 1, \dots, C$;
- $d(c, k)$: demanda de vigas do tipo c e comprimento $l(c, k)$, com $c = 1, \dots, C$ e $k = 1, \dots, q_c$;
- t_c : número inteiro correspondendo ao tempo de cura (em termos de períodos) de vigas do tipo c , para $c = 1, \dots, C$;
- L_m : número real correspondendo à capacidade da forma m , com $m = 1, \dots, M$;
- $P_i = (c_i, (a_1^i, \dots, a_{q_c}^i))$: padrão de empacotamento, $i = 1, \dots, r$, $c = 1, \dots, C$;
- P_0 : padrão especial usado para denotar que uma forma está sendo usada atualmente para a produção de um padrão de empacotamento que começou em um período anterior e cuja produção se estende pelo menos até o período atual.

Note que uma forma ociosa (em outras palavras, uma forma que não está sendo usada durante um período específico) não recebe o padrão P_0 . Na verdade, não há nenhum padrão atribuído a ela. Para se referir a informações específicas sobre um determinado padrão $P_i = (\bar{c}, (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{q_c}))$, definimos a seguinte notação:

- $P_i(c, k)$: número de vigas do tipo c e comprimento $l(c, k)$ que P_i inclui. Se $c = \bar{c}$, então $P_i(c, k) = \bar{a}_k$, com $k \in \{1, \dots, q_c\}$; caso contrário, $P_i(c, k) = 0$, para qualquer k .

- $u(P_i)$: capacidade usada por P_i , ou seja, $u(P_i) = \sum_{k=1}^{q_{\bar{c}}} l(\bar{c}, k) \cdot P_i(\bar{c}, k)$.
- c_i : tipo de viga correspondente a P_i , $c_i \in \{1, \dots, C\}$.
- E_i : tempo de cura associado a vigas do tipo c_i . Ou seja, o número de períodos necessários para a produção das vigas em P_i . Sendo t_c o tempo de cura associado ao tipo de viga c .

Dado um conjunto de padrões de empacotamento $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r\}$, não incluindo P_0 , definimos alguns conjuntos importantes a seguir:

- $Q(m)$: conjunto de índices dos padrões em \mathcal{P} que não excedem a capacidade da forma m : $Q(m) = \{i \in \{1, \dots, r\} : u(P_i) \leq L_m\}$, com $m = 1, \dots, M$. Note que o mesmo padrão pode pertencer a $Q(m)$ e $Q(m')$, com m and m' sendo duas formas distintas com comprimentos possivelmente diferentes. $Q^*(m) = Q(m) \cup \{0\}$;
- $S(j)$: conjunto de índices dos padrões associados a tipos de viga com tempo de cura $j \in \{1, \dots, R\}$, com $R = \max\{t_c : c = 1, \dots, C\}$ sendo o maior tempo de cura entre todos os tipos de viga presentes em uma instância do problema.

A seguir, apresentamos os parâmetros associados a barras padrão e sobras:

- W, V, H, O, Γ : número de diferentes comprimentos de barra padrão, comprimentos de sobras, padrões de corte, padrões de traspasse, e comprimentos de formas, respectivamente;
- b_1, \dots, b_W : comprimentos de barra padrão;
- b_{W+1}, \dots, b_{W+V} : comprimentos permitidos de sobra. Note que esses dados restringe os tipos de padrões de curte e de traspasse;
- $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_\Gamma$: comprimentos de formas. Note que esses dados restringe os tipos de padrões de curte e de traspasse;
- $G(\mathcal{L}_\gamma) =$ conjunto de formas de comprimento \mathcal{L}_γ , $\gamma = 1, \dots, \Gamma$;
- \mathbb{H} : conjunto de padrões de corte;
- H_w : conjunto de padrões de corte para barra de comprimento b_w que não geram sobras;
- $H_w(v)$: conjunto de padrões de corte para barra de comprimento b_w que geram sobras de comprimento b_{W+v} ;
- \mathbb{O} : conjunto de padrões de traspasse;
- $\mathbb{O}(\gamma)$: conjunto de padrões de traspasse que produzem barras de comprimento \mathcal{L}_γ .
- $I_h = (w_h, (a_1^h, \dots, a_\Gamma^h, a_{\Gamma+1}^h, \dots, a_{\Gamma+V}^h))$: padrão de corte usado para cortar uma barra do índice $w_h = 1, \dots, W + V$, com $h = 1, \dots, H$. Note que a_1^h, \dots, a_Γ^h são os números de barras de comprimento $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_\Gamma$ e $a_{\Gamma+1}^h, \dots, a_{\Gamma+V}^h$ são os números de barras de comprimento b_{W+1}, \dots, b_{W+V} ;
- $\mathbb{O}_\mu = (\gamma_\mu, (a_1^\mu, \dots, a_V^\mu))$: padrões de traspasse que geram uma barra do comprimento \mathcal{L}_{γ_μ} , com $\gamma_\mu = 1, \dots, \Gamma$ e $\mu = 1, \dots, O$. Note que a_1^μ, \dots, a_V^μ são os números de barras de comprimento b_{W+1}, \dots, b_{W+V} ;

- D_{c_i} = número de barras que um padrão de empacotamento P_i de tipo de viga c_i demanda;
- e_w = estoque de barras b_w , com $w = 1, \dots, W + V$;
- $a_{v,\mu}$ = número de sobras de comprimento b_{W+v} no padrão de traspasse \mathbb{O}_μ , com $\mu = 1, \dots, O$.
- $a_{\gamma,h,w}$ = número de objetos de comprimento \mathcal{L}_γ cortados de uma barra de comprimento b_w seguindo o padrão de corte I_h sem gerar sobras, com $w = 1, \dots, W + V$;
- $a_{\gamma,h,w,v}$ = número de objetos de comprimento \mathcal{L}_γ cortado de uma barra de comprimento b_w seguindo um padrão de corte I_h que gera uma sobra de comprimento b_{W+v} , com $w = 1, \dots, W$ e $v = 1, \dots, V$.
- $f_{h,w}$ = perda resultante ao usar um padrão de corte I_h para cortar uma barra de comprimento b_w sem gerar sobras, com $w = 1, \dots, W + V$.
- $f_{h,w,v}$ = perda resultante ao usar um padrão de corte I_h para cortar uma barra de comprimento b_w gerando uma sobra de comprimento b_{W+v} , com $w = 1, \dots, W$ e $v = 1, \dots, V$.
- f_μ = perda resultante ao usar um padrão de traspasse \mathbb{O}_μ , with $\mu = 1, \dots, O$.

Consideramos as variáveis de decisão $x_i^{m,t}$ assumindo valor 1 se o padrão de empacotamento P_i começar a ser usado na forma m no período t (e seu uso, naturalmente, é estendido por E_i períodos), ou 0 caso contrário. A variável de decisão z_t assume o valor 1 se pelo menos uma forma for usada no período t , com $t = 1, \dots, T$, ou 0 caso contrário. A variável de decisão $y_{h,w}$ representa o número de barras de comprimento b_w cortadas seguindo um padrão de corte $I_h \in H_w$ sem gerar sobras. A variável de decisão $y_{h,w,v}$ expressa o número de barras de comprimento b_w cortadas seguindo um padrão de corte $I_h \in H_w(v)$ gerando sobras de comprimento b_{W+v} . A variável de decisão o_μ equivale ao número de vezes que o padrão de traspasse \mathbb{O}_μ foi usado, $\mu \in \mathbb{O}$. Note que as variáveis de decisão $y_{h,w}$, $y_{h,w,v}$, e o_μ são inteiras. Apresentamos o modelo de programação linear inteira proposto para o ICP-HPBMPP, a seguir:

(ICP) min

$$\lambda_1 \sum_{t=1}^T z_t + \lambda_2 \sum_{w=1}^W \sum_{h \in H_w} f_{h,w} y_{h,w} + \lambda_3 \sum_{w=1}^W \sum_{v=1}^V \sum_{h \in H_w(v)} f_{h,w,v} y_{h,w,v} + \lambda_4 \left(\sum_{w=W+1}^{W+V} \sum_{h \in H_w} f_{h,w} y_{h,w} + \sum_{\mu \in \mathbb{O}} f_\mu o_\mu \right) \quad (1)$$

s. t.

$$\sum_{i \in Q^*(m)} x_i^{m,t} \leq 1, \quad m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i \in Q(m)} \sum_{t=1}^{T-E^i+1} P_i(c, k) x_i^{m,t} \geq d(c, k), \quad c = 1, \dots, C, k = 1, \dots, q_c \quad (3)$$

$$(E_i - 1) x_i^{m,t} \leq \sum_{\alpha=1}^{E_i-1} x_0^{m,t+\alpha}, \quad m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T - E_i + 1, i \in Q(m) \quad (4)$$

$$x_0^{m,1} = 0 \quad m = 1, \dots, M, \quad (5)$$

$$x_0^{m,t} \leq \sum_{\gamma=2}^R \sum_{j=\gamma}^R \sum_{i \in \{Q(m) \cap S_j\}} x_i^{m,t-\gamma+1}, \quad m = 1, \dots, M, t = 2, \dots, T \quad (6)$$

$$M z_t \geq \sum_{m=1}^M \left(\sum_{i \in Q^*(m)} x_i^{m,t} \right), \quad t = 1, \dots, T \quad (7)$$

$$\sum_{i \in Q^*(m)} x_i^{m,t} \geq \sum_{i \in Q^*(m)} x_i^{m,t+1}, \quad m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T - 1 \quad (8)$$

$$\sum_{h \in H_w} y_{h,w} + \sum_{\mu \in \mathbb{O}} a_{w,\mu} o_\mu \leq e_w, \quad w = W + 1, \dots, W + V \quad (9)$$

$$\sum_{h \in H_w} y_{h,w} + \sum_{v=1}^V \sum_{h \in H_w(v)} y_{h,w,v} \leq e_w, \quad w = 1, \dots, W \quad (10)$$

$$\sum_{w=1}^{W+V} \sum_{h \in H_w} a_{\gamma,h,w} y_{h,w} + \sum_{w=1}^W \sum_{v=1}^V \sum_{h \in H_w(v)} a_{\gamma,h,w,v} y_{h,w,v} + \sum_{\mu \in \mathbb{O}(\gamma)} o_\mu = \sum_{m \in G(\mathcal{L}_\gamma)} \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q(m)} D_{c_i} x_i^{m,t}, \quad \gamma = 1, \dots, \Gamma \quad (11)$$

$$x_i^{m,t} \in \{0, 1\}, \quad m = 1, \dots, M, t = 1, \dots, T, i \in Q^*(m) \quad (12)$$

$$z_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (13)$$

$$y_{h,w} \in \mathbb{Z}_+, \quad w = 1, \dots, W, h \in H_w \quad (14)$$

$$y_{h,w,v} \in \mathbb{Z}_+, \quad w = 1, \dots, W, v = 1, \dots, V, h \in H_w(v) \quad (15)$$

$$o_\mu \in \mathbb{Z}_+, \quad \mu \in \mathbb{O}. \quad (16)$$

A função objetivo (1) é dividida em 4 termos: o primeiro é o valor do *makespan*; o segundo termo define a perda relacionada ao uso de barras padrão para produzir a quantidade necessária de barras sem gerar novas sobras, o terceiro termo descreve a perda associada ao uso de barras padrão para produzir as barras necessárias gerando novas sobras; finalmente, o quarto termo especifica a perda associada às sobras de barras em estoque usadas para produzir a quantidade de barras necessárias. Minimizar (1) significa minimizar o comprimento total de barras que são cortadas e não

estão sendo usadas para a produção de barras necessárias nem para a geração de novas sobras, mais o *makespan*. Os parâmetros $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$, com $i = 1, \dots, 4$, indicam qual ênfase colocamos em cada termo da função objetivo.

As restrições (2) asseguram que no máximo um padrão deve ser designado para a forma m no período t , com a possibilidade de este padrão ser P_0 . O conjunto de restrições (3) requer que todas as demandas sejam satisfeitas. Restrições (4) forçam que, se o padrão P_i for iniciado no período t na forma m , então nos próximos $E_i - 1$ períodos o padrão P_0 será atribuído a m . Os conjuntos de restrições (5) e (6) estabelecem que o padrão P_0 só deve ser usado na forma m se houver algum padrão de empacotamento associado a um período anterior na mesma forma, cuja produção ainda não foi concluída. Cada restrição no conjunto (7) assegura que a variável z_t deve ser 1 se o período t for usado para produzir vigas. As restrições (8) forçam que não haja período inativo durante a produção de vigas nas formas. Isso significa que a produção é contínua, ou seja, se uma forma é usada, ela será usada sem interrupção. As restrições (9) estabelecem que o número de sobras de barras cortadas mais o número de sobras usadas para produzir barras via traspasse não viola o estoque, observe que o corte de uma sobra não gera outras sobras. O conjunto de restrições (10) garante que o número de barras padrão cortadas não exceda o estoque. As restrições (11) forçam que a quantidade de barras necessárias para produzir as vigas seja alcançada, assumindo que a quantidade necessária de barras é o número de barras usadas pelas formas em todo o horizonte de tempo. As restrições (12)-(16) definem os domínios das variáveis de decisão.

O modelo (ICP) tem $\mathcal{O}(MTr + WVH + O)$ variáveis e $\mathcal{O}(q + MTr + V + W + \Gamma)$ restrições, com $q = \sum_{i=1}^C q_c$. O ICP-HPBMPP é NP-difícil já que para as instâncias onde $D_c = 0$, com $c = 1, \dots, C$, as restrições (9)-(11) são atendidas naturalmente e todas as variáveis $y_{h,w}$, $y_{h,w,v}$ e o_μ assumem valor 0, reduzindo o problema em um HPMBPP para minimização do *makespan* com um fator multiplicativo constante. Consequentemente, o ICP-HPBMPP pode ser visto como uma generalização do HPPMBPP, que é NP-Difícil [Araujo et al., 2019].

Dependendo do número de padrões de empacotamento, corte, e traspasse possíveis, pode haver um número excessivo de variáveis e restrições no modelo. Escolhemos limitar o número de padrões de empacotamento, que são tipicamente os mais numerosos na prática, usando somente padrões de empacotamento maximais, introduzidos por [Araujo et al., 2019]. Restringir o modelo (ICP) a usar somente padrões de empacotamento maximais não modifica seu conjunto de soluções ótimas. Isso é verdade, já que uma solução que contém padrões de empacotamento não-maximais sempre poderá ser transformada em uma solução com apenas padrões maximais sem modificar sua função objetivo.

2.2. Limite Inferior para Função Objetivo

Como o ICP-HPBMPP é um problema NP-Difícil, um limite inferior para o valor ótimo da função objetivo pode ajudar na avaliação da qualidade de soluções viáveis em métodos heurísticos. A fim de simplificar a apresentação do limite inferior proposto para o valor ótimo da função objetivo (1), apresentamos a seguinte notação. Para um dado $\gamma \in \{1, \dots, \Gamma\}$ definimos os conjuntos:

- $C1_\gamma = \{f_{h,w}/a_{\gamma,h,w} : h \in H_w \wedge a_{\gamma,h,w} > 0 \wedge 1 \leq w \leq W\}$
- $C2_\gamma = \{\alpha' f_{h,w,v}/a_{\gamma,h,w,v} : h \in H_w(v) \wedge a_{\gamma,h,w,v} > 0 \wedge 1 \leq w \leq W \wedge 1 \leq v \leq V\}$
- $C3_\gamma = \{\alpha'' f_{h,w}/a_{\gamma,h,w} : h \in H_w \wedge a_{\gamma,h,w} > 0 \wedge W + 1 \leq w \leq W + V\}$
- $C4_\gamma = \{\alpha'' f_\mu : \mu \in \mathbb{O}(\gamma)\}$
- $\hat{C}_\gamma = \{C1_\gamma \cup C2_\gamma \cup C3_\gamma \cup C4_\gamma\}$

Apresentamos um limite inferior para o valor ótimo de função objetivo do modelo (ICP) na Equação (17). A primeira parte da Equação (17) corresponde a um limite inferior para o *makespan*, enquanto a segunda parte é a perda mínima de barra para produzir a demanda de vigas usando formas de um comprimento fixo \mathcal{L}_γ .

$$\left\lceil \frac{\sum_{c=1}^C t_c \cdot \left(\sum_{k=1}^{q_c} l(c, k) \cdot d(c, k) \right)}{\sum_{m=1}^M L_m} \right\rceil + \min_{\gamma \in \{1, \dots, \Gamma\}} \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{c=1}^C D_c \cdot \left(\sum_{k=1}^{q_c} l(c, k) \cdot d(c, k) \right)}{\mathcal{L}_\gamma} \right\rceil \cdot \min\{\hat{C}_\gamma\} \right\} \quad (17)$$

3. Experimentos Computacionais

Nesta seção, apresentamos experimentos computacionais em um conjunto de instâncias, que foram produzidas com a intenção de imitar cenários reais, para avaliar o modelo matemático proposto neste estudo. Os padrões correspondentes a cada instância de teste foram gerados usando programação por restrições com o resolvidor IBM ILOG CPLEX 12.8 CP Optimizer. Para a implementação do modelo de programação inteira, adotamos o resolvidor IBM ILOG CPLEX 12.8. Ambos os resolvidores foram usados com a tecnologia Concert e a linguagem de programação C++. Realizamos todos os testes em uma máquina Linux Ubuntu 18.04 64bits com 8GB de memória e processador Intel Core i5-3470 de processador 3.20 GHz \times 4. Utilizamos o compilador GNU GCC 7.3.0 usando o IDE Code::Blocks 17.12 para compilar os códigos. Para cada teste descrito nesta seção, fixamos os valores dos parâmetros de preferência λ_i iguais a 1, com $i = 1, \dots, 4$.

3.1. Geração de Instâncias de Teste

As diferentes instâncias representam uma amostra da variabilidade dos parâmetros do problema, como número de tipos de vigas, número de formas e comprimentos de formas. O número de padrões de empacotamento aumenta à medida que o número de tipos de viga aumenta. No entanto, o número de padrões de corte e sobreposição permanece constante com valor de 10 e 12, respectivamente, devido ao fato de que esperamos que os possíveis comprimentos de barra distintos sejam padronizados na prática e, portanto, não levem à variabilidade.

Consideramos as capacidades de forma de 5,95m e 11,95m, enquanto 1,12m, 1,45m, 2,35m, 2,5m, 2,65m, 2,95m e 3,3m como possíveis comprimentos de vigas. Para cada instância, os possíveis tempos de cura podem ser 1, 2 ou 3 períodos, escolhidos aleatoriamente quando as instâncias tiverem mais de 3 tipos. Além disso, se a instância tiver até 3 tipos de viga, associamos o tempo de cura ao índice de tipo de viga, por exemplo, o tipo de viga 2 precisa de um tempo de cura de 2 períodos. Com relação ao número de barras que um dado tipo de viga demanda, escolhemos aleatoriamente um valor entre 1 e 3 para cada tipo de viga. Escolhemos as demandas de viga uniformemente entre 17 e 50. Para o horizonte de tempo total T , calculamos como o teto de 150 % do limite inferior do *makespan* ótimo, definido pela Equação 18 da seguinte forma:

$$T = \left\lceil 1.5 \cdot \sum_{i=1}^C t_c \cdot \left(\sum_{k=1}^{q_c} l(c, k) \cdot d(c, k) \right) / \sum_{m=1}^M L_m \right\rceil. \quad (18)$$

Para todas as instâncias, consideramos um comprimento único de barras novas como 12m e os comprimentos possíveis de sobras de barras como 2m, 5m, 6m, e 8m. Não variamos tais comprimentos ao longo das instâncias de teste, uma vez que, na prática, espera-se que eles sejam padronizados. Para gerar estoques de barra realistas, introduzimos um limite superior (UB) para o número

de barras necessárias para atender à demanda do feixe como $UB = 2 \cdot T \cdot M \cdot \max_{D_c=1, \dots, C} D_c$. Definimos o estoque de barras novas de 12m de comprimento como UB , enquanto escolhemos o estoque de cada sobra aleatoriamente entre $\lceil UB/5 \rceil$ e UB seguindo uma distribuição uniforme. Implementamos o gerador de instâncias usando a linguagem de programação MATLAB. Além disso, em vez de realizar enumerações exaustivas, geramos os padrões desejáveis de empacotamento, corte, e traspasse para uma determinada instância usando modelos de programação por restrições.

3.2. Testes Computacionais com o Modelo Matemático

Nesta subseção, realizamos testes computacionais com o conjunto de instâncias que geramos seguindo o esquema descrito na subseção 3.1. Na Tabela 1 apresentamos os resultados dos experimentos computacionais para o modelo (ICP) e sua relaxação linear. O tempo de solução foi limitado a 3.600 segundos. Consideramos LB, IP e LP como o limite inferior do valor ótimo de função objetivo, o melhor valor da solução pelo CPLEX para o modelo (ICP), e o valor de relaxação linear, respectivamente. Simbolizamos a diferença entre o melhor valor objetivo inteiro e o objetivo do melhor nó remanescente como *gap* (0% para uma solução ótima comprovada). Denotamos por *Nós de B&C* o número de nós gerados na árvore de *branch-and-cut* no processo de solução e *t* (*s*) como o tempo da solução em segundos. Mostramos na Tabela 1 que a relaxação linear de todas as instâncias foi resolvida, com o tempo médio de 53,21 segundos, e com 624,61 segundos sendo o tempo mais longo para chegar à solução ótima. Por outro lado, apenas 11 instâncias foram resolvidas até a otimalidade pelo modelo de programação inteira (4 delas resolvidas no nó raiz da árvore B&C). Em 23 casos, não conseguimos encontrar soluções viáveis, tal estado denotado por “-”. Além disso, não conseguimos resolver 36 instâncias até a otimalidade dentro do limite de tempo, embora soluções viáveis para elas tenham sido encontradas. Podemos inferir dos resultados dos testes computacionais que, quanto maiores forem os valores dos parâmetros da instância, maior será o problema e mais difícil será encontrar soluções para ele. Com valores elevados dos parâmetros da instância, quando são encontradas soluções, a diferença de otimalidade tende a ser pior, isto é, as soluções obtidas dentro do limite de tempo são ainda mais distantes da solução ótima.

Comparamos os resultados do modelo (ICP), sua relaxação linear e o limite inferior proposto na Figura 1. Mostramos na Figura 1 que o limite inferior proposto neste trabalho para o valor ótimo da função objetivo foi maior que a relaxação linear para todas as instâncias de teste (50.57% maior, em média) e muito próximo dos valores da função objetivo obtidos pelo CPLEX. As soluções encontradas pelo CPLEX são 12,70% maiores que os valores dos limites inferiores em média.

Figura 1: Valores de IP, LB, e LP para as instâncias de teste

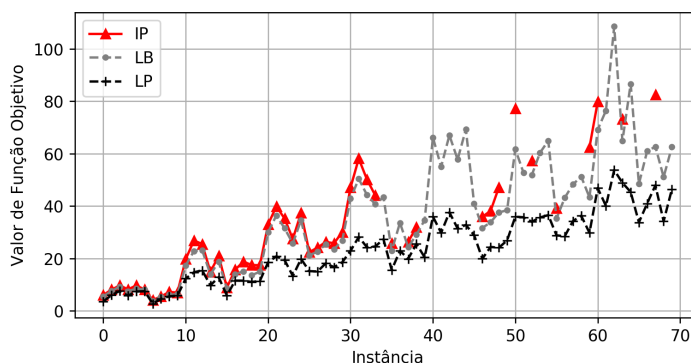


Tabela 1: Resultados do modelo de programação linear inteira e sua relaxação linear

Instância	Modelo (ICP)				Relaxação Linear		Instância	Modelo (ICP)				Relaxação Linear	
	IP	Nós de B&C	gap	t (s)	LP	t (s)		IP	Nós de B&C	gap	t (s)	LP	t (s)
cp_1_15_6_1	6,05	981	0,00%	1,2	3,58	0,02	cp_4_30_20_1	25,80	1.394	12,02%	lte	15,60	8,39
cp_1_15_6_2	8,10	0	0,00%	1,2	6,02	0,04	cp_4_30_24_2	-	-	-	lte	22,94	11,47
cp_1_15_6_3	9,70	189	0,00%	1,8	7,57	0,08	cp_4_30_15_3	26,30	55.260	0,37%	lte	19,86	2,01
cp_1_15_6_4	8,20	686	0,00%	2,3	5,80	0,04	cp_4_30_14_4	32,00	79.965	1,32%	lte	25,56	3,32
cp_1_15_6_5	9,70	75	0,00%	2,1	7,38	0,09	cp_4_30_30_5	-	-	-	lte	20,43	30,10
cp_1_30_3_1	8,15	0	0,00%	1,1	7,51	0,07	cp_5_15_68_1	-	-	-	lte	35,96	148,02
cp_1_30_3_2	4,15	0	0,00%	1,3	2,76	0,04	cp_5_15_57_2	-	-	-	lte	29,79	51,94
cp_1_30_3_3	5,50	0	0,00%	0,7	4,55	0,04	cp_5_15_66_3	-	-	-	lte	37,59	99,51
cp_1_30_3_4	7,20	3.640.484	0,69%	lte	5,54	0,08	cp_5_15_59_4	-	-	-	lte	31,42	137,86
cp_1_30_3_5	7,00	2.455	0,00%	3,1	5,83	0,05	cp_5_15_75_5	-	-	-	lte	32,80	118,61
cp_2_15_15_1	19,70	221.350	0,62%	lte	12,31	0,66	cp_5_30_29_1	-	-	-	lte	28,89	26,76
cp_2_15_21_2	26,85	451.142	0,32%	lte	14,74	0,64	cp_5_30_29_2	35,90	3.240	2,09%	lte	19,90	19,33
cp_2_15_21_3	25,50	564.930	0,32%	lte	15,43	0,75	cp_5_30_24_3	38,15	1.112	11,12%	lte	24,39	29,49
cp_2_15_14_4	14,90	754.750	0,39%	lte	9,75	0,88	cp_5_30_30_4	47,05	2	13,61%	lte	24,11	11,40
cp_2_15_17_5	21,00	561.739	0,49%	lte	12,85	0,89	cp_5_30_27_5	-	-	-	lte	26,84	57,54
cp_2_30_8_1	8,90	2.422	0,00%	49,8	5,84	1,19	cp_6_15_62_1	77,20	0	17,09%	lte	35,92	46,80
cp_2_30_8_2	15,70	2.711	0,00%	33,6	11,55	0,60	cp_6_15_51_2	-	-	-	lte	35,71	56,03
cp_2_30_9_3	18,80	775.314	1,34%	lte	11,53	0,59	cp_6_15_51_3	57,30	1379	2,87%	lte	33,99	20,94
cp_2_30_8_4	17,50	457.947	0,59%	lte	11,04	0,54	cp_6_15_62_4	-	-	-	lte	35,63	139,89
cp_2_30_9_5	17,40	406.983	1,02%	lte	11,40	0,82	cp_6_15_65_5	-	-	-	lte	36,53	45,26
cp_3_15_29_1	33,00	3.554	12,29%	lte	18,53	5,71	cp_6_30_21_1	39,15	1289	4,42%	lte	28,82	23,40
cp_3_15_36_2	39,85	6.188	0,98%	lte	20,81	5,37	cp_6_30_33_2	-	-	-	lte	28,48	135,68
cp_3_15_30_3	35,20	6.342	5,39%	lte	19,36	7,23	cp_6_30_33_3	-	-	-	lte	34,29	71,79
cp_3_15_29_4	27,45	12.286	0,38%	lte	13,33	3,50	cp_6_30_35_4	-	-	-	lte	36,29	54,39
cp_3_15_35_5	37,40	7.495	6,44%	lte	19,82	5,04	cp_6_30_32_5	62,35	0	28,21%	lte	29,78	40,41
cp_3_30_15_1	22,40	12.095	2,11%	lte	15,16	5,31	cp_7_15_60_1	79,80	21	27,35%	lte	46,85	336,39
cp_3_30_18_2	24,15	7.226	5,92%	lte	15,03	5,03	cp_7_15_86_2	-	-	-	lte	40,02	469,50
cp_3_30_18_3	26,30	9.273	8,06%	lte	18,15	6,43	cp_7_15_113_3	-	-	-	lte	53,72	103,78
cp_3_30_17_4	25,80	7.529	5,25%	lte	16,67	6,79	cp_7_15_53_4	73,20	103	2,84%	lte	48,86	25,38
cp_3_30_20_5	30,00	8.024	1,09%	lte	18,56	4,12	cp_7_15_89_5	-	-	-	lte	45,36	624,61
cp_4_15_45_1	47,00	1.530	9,04%	lte	22,88	14,88	cp_7_30_36_1	-	-	-	lte	33,76	187,76
cp_4_15_50_2	58,10	365	14,42%	lte	28,21	23,74	cp_7_30_45_2	-	-	-	lte	40,96	126,30
cp_4_15_45_3	50,10	3.600	12,07%	lte	24,26	42,86	cp_7_30_38_3	82,55	204	35,26%	lte	47,89	61,85
cp_4_15_41_4	44,10	2.102	3,91%	lte	24,56	6,51	cp_7_30_39_4	-	-	-	lte	34,18	97,62
cp_4_15_41_5	-	-	-	lte	27,33	12,67	cp_7_30_39_5	-	-	-	lte	46,39	137,69

lte significa "limite de tempo excedido"

4. Considerações Finais

Neste trabalho, propusemos uma nova variante de problemas de sequenciamento de corte, que, pelo que sabemos, ainda não foi estudada e pode ter grande impacto em estudos práticos e teóricos. A variante proposta consiste em integrar o problema de planejamento de produção de vigas pré-moldadas com o problema de corte de barras utilizada em tal produção, levando em consideração a geração de sobras e uso barras geradas via traspasse. Argumentamos que o problema é NP-difícil e propusemos um modelo de programação linear inteira bem como um limite inferior para seu valor ótimo de função objetivo. Também argumentamos que restringir a formulação ao uso de padrões de empacotamento exclusivamente maximais não altera o conjunto de soluções ótimas do modelo proposto. Sugerimos um conjunto de instâncias para realizar experimentos computacionais para a avaliação dos métodos de solução. O modelo proposto pôde ser usado para resolver instâncias de pequeno porte, enquanto normalmente ele não atinge a otimalidade ao resolver instâncias de médio porte. Além disso, o modelo geralmente não encontra soluções viáveis para instâncias de grande porte.

Existem inúmeras oportunidades para trabalhos futuros em relação ao ICP-HPBMPP. No domínio da modelagem podemos citar a adaptação do problema para considerar diferentes tipos de barras, variando em diâmetro ou material, em vez de apenas em comprimento. Além disso, demanda dinâmica poderia ser considerada, ou seja, em cada período de tempo, teríamos uma nova

demanda de vigas a ser preenchida e um estoque limitado de barras. Com relação às abordagens de solução, os algoritmos de otimização multiobjetivo podem ser naturalmente aplicados ao problema, uma vez que este envolve preferências entre o *makespan* e o desperdício de barras. Abordagens de decomposição, tais como geração de colunas, heurísticas MIP, ou metaheurísticas também podem ser métodos interessantes a serem explorados em conjunto com o modelo de programação inteira proposto.

5. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

- Araujo, K., Bonates, T., Prata, B., e Pitombeira-Neto, A. (2019). Heterogeneous prestressed precast beams multiperiod production planning problem: Modeling and solution methods. preprint, <https://arxiv.org/abs/1903.08609v1>.
- Arenales, M. N., Cherri, A. C., Nascimento, D. N. d., e Vianna, A. (2015). A new mathematical model for the cutting stock/leftover problem. *Pesquisa Operacional*, 35(3):509–522.
- de Castilho, V. C., El, M. K., Debs, e do, M., Carmo Nicoletti (2007). Using a modified genetic algorithm to minimize the production costs for slabs of precast prestressed concrete joists. *Engineering applications of artificial intelligence*, 20(4):519–530.
- Dyckhoff, H. (1990). A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2):145–159.
- Melega, G. M., de Araujo, S. A., e Jans, R. (2018). Classification and literature review of integrated lot-sizing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*.
- Poldi, K. C. e Arenales, M. N. (2010). O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. *Pesquisa Operacional*, 30(1):153–174.
- Prata, B. A., Pitombeira, A. R., Neto, e Sales, C. J. M. (2015). An integer linear programming model for the multiperiod production planning of precast concrete beams. *Journal of Construction Engineering and Management*, 141(10):1–4.
- Trkman, P. e Gradisar, M. (2007). One-dimensional cutting stock optimization in consecutive time periods. *European Journal of Operational Research*, 179(2):291–301.
- Vassoler, A. H. D., Poltroniere, S. C., e Araujo, S. A. (2016). Modelagem matemática para o problema de produção de vigotas na indústria de lajes treliçadas. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 7:68–77.
- Wang, Z., Hu, H., e Gong, J. (2018). Framework for modeling operational uncertainty to optimize offsite production scheduling of precast components. *Automation in Construction*, 86:69–80.
- Wäscher, G., Haußner, H., e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130.