UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARCELO DÁRIO DOS SANTOS AMARAL

FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE MINIMIZANTES

FORTALEZA
2013

MARCELO DÁRIO DOS SANTOS AMARAL

FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE MINIMIZANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ào Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira.

FORTALEZA
2013

Amaral, Marcelo Dário dos Santos

A515f Funcões Absolutamente Minimizantes.

Marcelo Dário dos Santos Amaral – Fortaleza: 2009.
nf.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira.

Área de concentração: Análise

Dissertação (mestrado)- Universidade Federal do Ceará;

Departamento de Matemática, 2010

CDD 515

Dedico este trabalho em memória dos meus pais, Roberto Gois do Amaral e Maria Aldenira dos Santos Amaral.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que criou a vida e tantas coisas maravilhosas que nem ao menos somos capazes de compreender. Se alguém de nós obteve sucesso em algo, foi porque Deus tinha um propósito nisto. Agradeço a meus pais por tudo que fizeram por mim.

Durante o período de meus estudos, houve a enfermidade e falecimento de meus pais. Desejo agradecer à aqueles que me deram apoio nos momentos difíceis. Pois considero que foi muito importante para que eu não desanimasse, e que, diretamente, pudesse dedicar tempo em meus estudos. A começar, de maneira bastante especial à minha tia Aldemira, aos meus tios e tias, Ângela, Aldenor, Aldenora, Hércules, Murilo, Luís Antonho, ao meu irmão Marcos, à Magnólia, à Didi e aos meus amigos Darleonilton, Ivo, Armando, Thiciano, Andson e Gilvan.

Agradeço ao meu professor orientador Dr Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira, que aceitou meu pedido de orientação e me propôs o tema desta Dissertação. Agradeço também, aos professores de compromisso, com os quais tive a boa oportunidade de aprender (até alguns das fases iniciais comuns da vida). Posso citar: César, Alexandre, Luquésio, Gervásio Gurgel, Abdênago, Levi e me desculpe os demais cujos nomes não citei. Agradeço aos meus companheiros de curso, com os quais também aprendi através de discussões. Entre eles posso citar: Rafael, Vanderson , César , Landerson, entre outros. De modo geral, a todos àqueles que fazem parte do convívio no Departamento. De modo particular, à Andrea, que resolve diversos problemas, posso citar o Lacerda, o pessoal da limpeza etc.

Finalmente, agradeço à Funcap pelo apoio financeiro, que gera beneficios de diversas formas.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é dar uma exposição da teoria das extensões Lipschitz absolutamente minimizantes, baseada no trabalho de Gunnar Aronsson, Michael G. Crandall e Petri Juutinen em [1], apresentando vários detalhes em uma forma acessível aos leitores sem qualquer conhecimento prévio do assunto. Em particular, refazemos resultados melhorados relativos a existência através de argumentos que são mais simples do que aqueles que podem ser encontrados na literatura. Nós apresentamos uma prova do conhecido resultado de unicidade, o qual não se baseia na teoria de soluções de viscosidade. Em nossa nossa abordagem, mostraremos que as funções absolutamente minimizantes são as funções que satisfazem uma condição geométrica a qual chamaremos de gozar de comparação com cones. Este elementar dispositivo geométrico torna a teoria versátil e transparente.

Aqui, encontraremos por exemplo, estimativas de continuidade a priori, desigualdade de Harnack, o método de Perron para comprovar os resultados de existência, questões de unicidade e regularidade, e algumas ferramentas básicas da teoria de soluções de viscosidade. Nós acreditamos que a nossa apresentação fornece um resumo unificado da teoria unificada existente, assim como alguns resultados de interesse para os peritos e pesquisadores e, ao mesmo tempo, uma fonte que possa ser utilizada para introduzir estudantes a algumas significantes ferramentas analíticas.

Palavras-chave: Funções absolutamente minimizantes. Comparação com cones. Sentido da viscosidade.

ABSTRACT

The objective of this dissertation is to give an exposition of the theory of absolutely minimizing Lipschitz extensions, based on the work of Gunnar Aronsson, Michael G. Crandall and Petri Juutinen in [1], showing various details in a form accessible to readers without any prior knowledge of the subject. In particular, we retrace the improved results on the existence through arguments that are simpler than those that can be found in literature. We present a proof of the known uniqueness result, which is not based on the theory of viscosity solutions. In our approach we will show that the absolutely minimizing functions are the functions that satisfy a geometric condition which we will call to enjoy comparison with cones. This elementary geometric device renders the theory versatile and transparent.

Here we will find a priori continuity estimates, Harnack inequality, Perron's method for proving existence results, uniqueness and regularity questions, and some basic tools of viscosity solution theory. We believe that our presentation provides a unified summary of the existing theory as well as some results of interest to experts and researchers and, at the same time, a source which can be used for introducing students to some significant analytical tools.

Keywords: Absolutely minimizing functions. Comparison with cones. Viscosity sense.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O assunto desta dissertação está ligado ao estudo da existência, unicidade e propriedades de regularidade das melhores extensões Lipschitz possíveis de funções escalares. O processo de extensão que será descrito abaixo, esconde dentro de si, uma teoria matemática rica, que tem numerosas aplicações tais como em equações diferenciais parciais elípticas totalmente não lineares e o moderno cálculo das variações. De fato, o problema de extensão e sua equação de Euler-Lagrange desempenha na teoria do cálculo das variações dos L^∞ funcionais, papel semelhante ao que a integral clássica de Dirichlet e a equação de Laplace fazem no cálculo das variações dos L^2 funcionais. Nosso trabalho com o problema de extensão porém, não está baseado em equações diferenciais parciais. Nós procederemos mais no espírito do problema em si, utilizando ferramentas geométricas e analíticas de maneira tal que não requeira condições prévias ou familiaridade com teorias externas densas. Como resultado, nossos argumentos ficam versáteis e podem ser estendidos prontamente para colocações mais gerais.

A origem da teoria, a qual iremos dissertar, está ligada ao problema clássico de extender funções contínuas Lipschitz. Para descrever este problema de extensão em um cenário simples, suponha que são dadas uma função $f : \partial U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre a fronteira de um subconjunto aberto, próprio U de $\mathbb{R}^n$ tal que $L_f(\partial U)$, sua constante Lipschitz na fronteira de U, seja finita. O problema é encontrar uma extensão u de f a U, tal que u seja contínua sobre o fecho de U e $L_u(U)$ seja a menor possível. Note que $L_u(U) \geq L_f(\partial U)$ uma vez que u deve ser uma extensão cotínua de f. Assim, o melhor que podemos esperar, é que $L_u(U) = L_f(\partial U)$, e isto é de fato possível. Com efeito, podemos considerar os exemplos

$$\Lambda(f)(x) = \sup_{y \in K}(f(y) - L_f(K)|x-y|)$$
$$\Psi(f)(x) = \inf_{y \in K}(f(y) + L_f(K)|x-y|)$$

devido a Mcshane [9] e Whitney [8]. Se u é alguma solução do problema de extensão então $\Lambda(f) \leq u \leq \Psi(f)$. Por esta razão, $\Psi(f)$ é chamada a extensão máxima de f enquanto $\Lambda(f)$ é a extensão mínima de f. As verificações destas afirmações estarão presentes na seção 1.

Estas estensões Lipschitz falham em obedecer propriedades de comparação e estabilidade. Mais precisamente as relações $f \leq g$ sobre ∂U, em geral, não implicam $\Psi(f) \leq \Psi(g)$ ou $\Psi(g) \geq \Psi(f)$ em U, e $\Psi(\Psi(f)\backslash\partial V)$ pode diferir de $\Psi(f)$ em um subconjunto aberto V de U.

Chegamos então a seguinte questão: é possível encontrar uma extensão Lipschtz que goze das propriedades de comparação e estabilidade? Além disso, essa extensão especial seria única sobre um dado de fronteira fixo? Se tais extensões existem elas devem satisfazer

$$L_u(\partial V) = L_u(V) \text{ para algum aberto } V \subset\subset U. \tag{1.1}$$

Pois do contrário, não gozaria de estabilidade.

Isto motiva a definição de uma função absolutamente contínua, que é uma função de valor real u definida sobre um aberto U do $\mathbb{R}^n$ que satisfaz (1.1) para todo $V \subset\subset U$, isto é, possui a menor constante Lipschtz em todo aberto cujo fecho é compacto e está contido em U.

Os operadores de McShane-Whitney provêem um dispositivo natural para tentar construir minimizadores absolutos uma vez que eles podem ser usados para reduzir a constante Lipschitz em subdomínios onde ela não está ótima. Esta idéia foi usada por Aronsson em [15] para prover o primeiro resultado de existência para minimizadores absolutos. No entanto, aqui nós empregaremos uma abordagem mais concreta e elementar a qual pode ser motivada pela observação de que as funções $\Psi(f)$ e $\Lambda(f)$ podem ser obtidas via elementos geometricamente simples, “cones”; aqui as funções

$$x \mapsto f(y) + L_f(\partial U)|x-y| \qquad \text{e} \qquad x \mapsto f(y) - L_f(\partial U)|x-y|.$$

Ao contrário das extensões de McShane-Whitney, cones sempre satisfazem (1.1) fora do ponto de vértice, e eles podem ser considerados “soluções fundamentais” do problema.

Neste contexto, grosseiramente falando, as usuais convoluções com soluções fundamentais são substituídas por processos de maximização e minimização. E se mostra que todos o minimizadores absolutos podem ser descobertos conferindo a validez de uma propriedade que nós chamamos comparação com cones. A introdução desta noção nos ajuda a agilizar a teoria de existência e a torna mais transparente. No capítulo 4, nós apresentaremos um teorema de existência. A questão da unicidade é tratada no capítulo 5. Em [1], pela primeira vez mostra-se o resultado de unicidade sem recorrer a teorias externas significativas. A primeira prova do resultado de unicidade foi dada por Jensen [10], o qual utilizou a teoria de "soluções no sentido da viscosidade" e a teoria de Espaços de Sobolev. A segunda prova foi dada por Barles e Busca em [11], os quais usaram novos argumentos inteligentemente que evitaram a necessidade de empregar resultados em espaços de Sobolev. A prova apresentada no capítulo 5, não invoca a teoria de soluções no sentido da viscosidade, nem resultados em espaços de Sobolev. Intensiona-se tornar a prova mais acessível, através de resultados básicos das funções que gozam de comparação com cones.

É possível mostrar que o problema introduizido, é um exemplo arquétipo para teorias mais gerais. Isto aumenta o interesse na teoria. Em particular, existe uma equação elíptica degenerada associada, a qual é ainda pobremente entendida, mesmo no caso da norma euclidiana. Além disso, o problema é também um arquetípico na teoria de minimização dos L^∞ funcionais. Nós esboçamos estas conexões abaixo.

Desde os trabalhos [12] e [15], a teoria dos minimizadores absolutos avançou por vários autores. A linha mais popular de pesquisa elevou-se da idéia, novamente devido a Aronsson [15], de interpretar o problema da extensão Lipschitz, como um limite formal, quando $p \to \infty$, do problema variacional mais clássico de minimizar o funcional

$$I_p(v, U) = \int_U |Dv|^p dx, \quad 1 < p < \infty, \tag{1.2}$$

sobre condições de fronteira dadas; ver [14] e [10] . Aqui, Dv denota o gradiente de v. Esta abordagem, no caso da norma euclidiana, leva a uma reformulação do problema original em que (0.2) é substituído pelo requerimento

$$\text{ess sup}_{x\in V}|Du(x)| \leq \text{ess sup}_{x\in V}|Dv(x)| \tag{1.3}$$

para todo $V \subset\subset U$ e v suficientemente regular satisfazendo $v = u$ sobre ∂V. De fato, minimizar $I_p(v, U)$ (sujeito a $v = f$ sobre ∂U) é o mesmo que minimizar $|Dv|$ na noma L^p, a qual tende a norma L^∞ quando $p \to \infty$. Devido a aditividade de conjuntos de I_p um mínimo de $I_p(., U)$ também minimiza $I_p(., V)$ para qualquer $V \subset\subset U$ (sujeito ao seu valor de fronteira). Logo, é um minimizador absoluto de (1.2). É natural se perguntar se esta propriedade continua válida no caso limite, isto é, se vale (1.3). Contudo, não é claro que (1.3) é equivalente a (1.2).

O procedimento de aproximação discutido acima tem a vantagem de fornecer uma rota para o correta equação de "Euler-Lagrange" para o nosso problema. Ou seja, uma função u para o qual $I_p(u, U) \leq I_p(v; U)$ se $u = v$ sobre ∂U deve satisfazer

$$\lim_{t \to 0} \frac{I_p(u + t\phi, U) - I_p(u, U)}{t} = 0$$

para uma função suave ϕ que se anula fora de um subconjunto compacto de U. Isto leva-nos a equação de "p-Laplace"

$$\Delta_p u = div(|Du|^{p-2} Du) = 0, \tag{1.4}$$

a qual é entendida no sentido das distribuições ou no sentido da viscosidade. Note que o caso $p = 2$, leva-nos a familiar equação de Laplace $\Delta u = 0$, cujas soluções são as funções harmônicas. Tomando o limite de (1.4) quando $p \to \infty$, uma questão um tanto sutil, obtém-se a equação elíptica não linear e altamente degenerada

$$\Delta_\infty u := \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = 0 \quad \text{em } U, \tag{1.5}$$

conhecida como a equação infinito Laplaciano. Nós derivaremos esta equação na seção 3.1, sem referência ao procedimento de aproximção, ao invés disso, começaremos das propriedades puramentes geométricas de comparação com cones. A equação infinito Laplaciano, desempenhou papel crucial na prova de unicidade dada por Jensen em [10]. E se tornou um centro de atenção neste campo. O preço a ser pago nesta abordagem é a perda de generalidade. O problema de extensão original faz sentido em qualquer espaço métrico, assim como os cones.

Na seção 3.1 nós mostraremos que funções absolutamente minimizantes são precisamente as soluções no sentido da viscosidade da equação infinito Laplaciano, no caso da norma euclidiana. A questão da equivalência entre "absolutamente minimizante" e as soluções no sentido da viscoisidade não é totalmente estabelecida para normas gerais.

Além da bela interpretação geométrica, a teoria dos minimizadores absolutos é interessante pois serve como um exemplo arquetípico de um problema no cálculo das variações envolvendo L_1 funcionais da forma

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} F(x, u, Du).$$

Estes problemas variacionais surgem em diversos contextos e fornecem muitas vezes o quadro mais realista para os problemas físicos concretos. Ver, por exemplo, [18] para uma lista de possíveis aplicações. O estudo sistemático dos L^∞ funcionais tem sido grandemente influenciado pelos avanços na compreensão do problema de extensão Lipschitz, e vice-versa. O trabalho original de Aronsson [15], surgiu depois que ele havia investigado os L^∞ funcionais no caso unidimensional em [12] e [13].

Nós começaremos o capítulo 2 com uma discussão do problema clássico de extensão Lipschitz. Introduziremos as funções absolutamente minimizantes, estabeleceremos propriedades de comparação com cones e as suas relações. No capítulo 3, reuniremos algumas caracterizações das funções absolutamente minimizantes em um único teorema, tais como ser solução no sentido da viscosidade do infinito Laplaciano, ser fortemente absolutamentee minimizante e gozar de comparação com cones. E mostrar que estas propriedades são locais. No capítulo 4 provaremos o terorema de existência. No capítulo 5 trataremos da questão da existência. No capítulo 6, embora a regularidade exata das funções absolutamente minimizantes seja um problema em aberto, nós mostraremos um teorema que nos garante um critério para descubrir se a função é diferenciável em um determinado ponto. No capítulo 7, esboçaremos a relação da teoria das funções absolutamente minimizantes com problemas variacionais.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Neste capítulo, daremos definições, exemplos e introduziremos notação. Nós começaremos apresentando o problema de extensão de funções que comentamos na introdução. Em seguida, mostraremos que, dizer que uma função contínua u é absolutamente minimizante, equivale a dizer que ela satisfaz uma propriedade a qual chamaremos de gozar de compara
ção com cones. Depois de definirmos as noções de comparação com cones e analisarmos a relação entre este conceito e o de uma função absolutamente minimizante, nós estabeleceremos consequências da propriedade de gozar de comparação com cones, as quais serão ferramentas proeminentes no decorrer deste trabalho. Como nos teoremas de equivalência do próximo capítulo. Em particular, uma seleção destes resultados é tudo o que precisamos no teorema de existência do capítulo 3. Com estas preliminares em mãos, a prova é curta e elegante.

2.1 Problema de extensão

Considere $K \subset \mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua. Em contraste com a introdução, K não precisa ser a fronteira de um conjunto aberto U. Pomos

$$L_f(K) := \inf\{L \in [0, \infty) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \ \forall x, y \in K\},$$

se não existe uma constante L satisfazendo a condição dentro das chaves acima, dizemos que $L_f(K) = \infty$. É razoável perguntar se podemos encontrar uma extensão que não aumente sua contante Lipschitz,isto é, se existe $u \in C(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$u = f \quad \text{sobre} \quad K \quad \text{e} \quad L_u(\mathbb{R}^n) = L_u(K). \tag{2.1}$$

Se uma tal extensão u existe, satisfará

$$f(y) - L_f(K)|x-y| \leq u(x) \leq f(y) + L_f(K)|z-y|, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n,\ y \in K$$

Sabendo-se também que o ínfimo e o supremo de uma família de funções com uma mesma constante lipschitz, se finita tem a mesma constante lipschitz, temos que Λ, Ψ definidas por

$$\Lambda(f)(x) = \sup_{y\in K}(f(y) - L_f(K)|x-y|)$$
$$\Psi(f)(x) = \inf_{y\in K}(f(y) + L_f(K)|x-y|)$$

satisfazem a extensão desejada. Dependendo de f e K existem diversas outras soluções.

Exemplo 1. *Seja $K = \{-1, 0, 1\}$, $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Então $L_f(K) = 1$. Facilmente ve-se que $\Psi(f), \Lambda(f)$ são indicados na figura abaixo*

Claramente existem outras soluções de (2.1) no exemplo (1). No caso geral, obviamente, a solução de (2.1) é única se e somente se for $\Psi(f) = \Lambda(f)$. Em particular, uma "melhor" solução para de (2.1) no exemplo (1) seria

$$u(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \leq 0, \quad u(x) = x \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{e} \quad u(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \geq 1.$$

Por que preferir esta solução? Grosseiramente falando, porque ela varia localmente "tão pouco quanto possível". Em particular, ela possui a propriedade (1.1) da introdução, a qual nós lembramos aqui: Se $V \subset\subset \mathbb{R}\backslash K$, então

$$L_u(V) = L_u(\partial V). \tag{2.2}$$

Note que $\Lambda(f)$ nem $\Psi(f)$ tem esta propriedade, basta tomar, por exemplo, $V = (-3/4, -1/4)$, enquanto a função

$$u^*(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \leq 0, \quad u^*(x) = x \quad \text{para} \quad x \geq 1.$$

é uma segunda extensão de f com a mesma constante Lipschitz e a propriedade (2.2). Além disso,

$$u^\star(x) = 0 \ \text{ para } \ x \leq 0, \quad u^\star(x) = x \ \text{ para } \ 0 \leq x \leq 1, \quad \text{e} \ u^\star(x) = 2x - 1 \ \text{ para } \ x \geq 1.$$

É outra extensão contínua de f a qual satisfaz (2.2), mas não satisfaz $L_u(\mathbb{R}) = L_f(K)$.

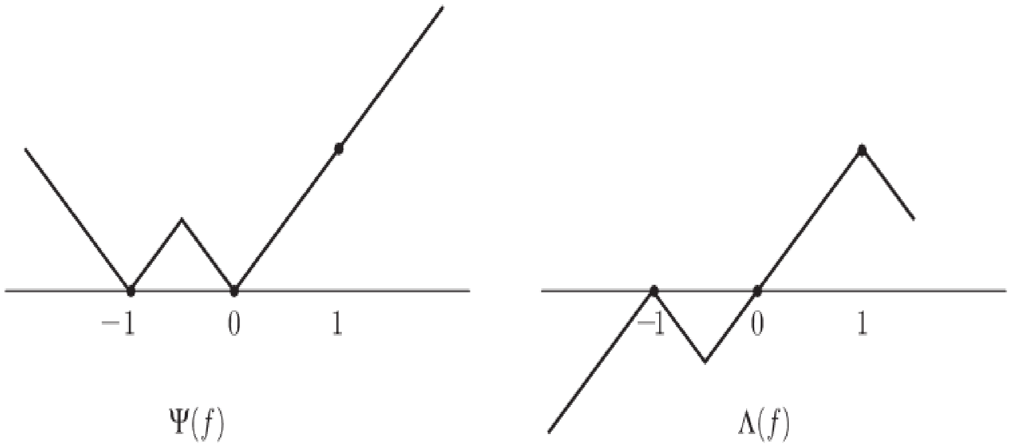

Figura 2.1:

2.2 Funções absolutamente minimizantes.

Nesta seção introduziremos os conceitos de funções absolutamente minimizantes e funções cones. Aqui encontra-se também um resultado que com frequência estará presente em algumas demonstrações deste texto.

Definição 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então u é absolutamente minimizante em U e notaciona-se $u \in AM(U)$, se $u \in C(U)$ e para todo $V \subset\subset U$ vale*

$$L_u(V) = L_u(\partial V).$$

Observação 1. *Note que se $u \in C(U)$ então $\forall\ V \subset\subset U$ tem-se $L_u(\partial V) \leq L_u(V)$, e isto nos diz que poderíamos refazer $L_u(V) \leq L_u(\partial V)$ no lugar de $L_u(V) = L_u(\partial V)$ na definição acima.*

Com efeito, assumindo o contrário, teríamos $L_u(V) < L_u(\partial V)$ e em consequência existiriam $x, y \in \partial U$ tais que $|u(x) - u(y)| > L_u(V)|x - y|$ (pois a desigualdade contrária $\forall\ x, y \in \partial U$ dá $L_u(\partial V) \leq L_u(V)$) e então teríamos sequências (x_k) e (y_k) em V tais que $x_k \to x$ e $y_k \to y$. Então

$$|u(x_k) - u(y_k)| - L_u(V)|x_k - y_k| \to |u(x) - u(y)| - L_u(V)|x - y| > 0,$$

o que daria x_{k_0}, y_{k_0} em V tais que $|u(x_{k_0}) - u(y_{k_0})| > L_u(V)|x_{k_0} - y_{k_0}|$ contradizendo a definição de $L_u(V)$

O termo absolutamente, refere-se a arbitrariedade na escolha de V em (2.2). E de fato a constante Lipschitz está sendo minimizada no sentido de que é a menor possível em cada V, tendo emconta os valores sobre ∂V.

O exemplo acima ilustra outra observação feita na introdução. Se g é tal que $g(-1) = 0, g(0) = 1/2$ e $g(1) = 1$. O leitor pode verificar fácilmente que $\Psi(f) \not\leq \Psi(g) \not\leq \Psi(f)$, embora $f \leq g$.

Parece natural considerar também o problema de extensão de K ao intervalo [-1,1] e não à todo $\mathbb{R}$ se estivermos interessados em intervalos. Isto leva-nos ao seguinte problema de valor de fronteira

$$u \in C(\overline{U}) \cap AM(U) \quad u(x) = f(x) \quad x \in \partial U. \tag{2.3}$$

Note que em (2.3) não impomos que f é Lipschitz contínua. Isto é uma das razões pela qual a relação entre o nosso problema de extensão origianl (2.1) e o problema de valor de fronteira (2.3) não estava inteiramente clara. Se f em (2.3) é Lipschitz contínua e $\mathbb{R} = U \cup \partial U$ uma solução de (2.3) é uma solução de (2.1)? Não em geral, $u^\star$ é um exemplo disso. Contudo se U é limitado, veremos que soluções de (2.3) satisfazem $L_u(U) = L_f(\partial U)$

Definição 2. *Uma função cone de inclinação a e vértice z é uma função* $C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $C(x) = a|x - z| + b$ *onde* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2. *Uma função cone* $C(x) = a|x - z| + b \in AM(\mathbb{R}^n \backslash \{z\})$. *De fato,*

$$|C(x) - C(y)| = |a|||x - z| - |y - z|| \leq |a||x - z|.$$

Portanto,

$$L_C(\mathbb{R}^n) \leq |a|.$$

E como

$$|C(x) - C(z)| = |a||x - z|,$$

temos

$$L_C(\mathbb{R}^n) \geq |a|.$$

Assim, $L_C(\mathbb{R}^n) = |a|$ *e para todo* $V \subset\subset \mathbb{R}^n - \{z\}$ *tem-se* $L_C(V) \leq L_C(\mathbb{R}^n) = |a|$. *Para a desigualdade oposta, sejam* $y \in V$, y^* *e* y^{**} *as intersecções mais próximas a* y *da reta que passa por* y *e* z *e a fronteira de* V*, também temos*

$$|C(y^*) - C(y^{**})| = |a|||y^* - y^{**}|,$$

pois y^*, y^{**} *e* z *estão numa mesma reta. Daí,* $L_C(\partial V) \geq |a| \geq L_C(V)$ *e pela observação 1, segue o resultado.*

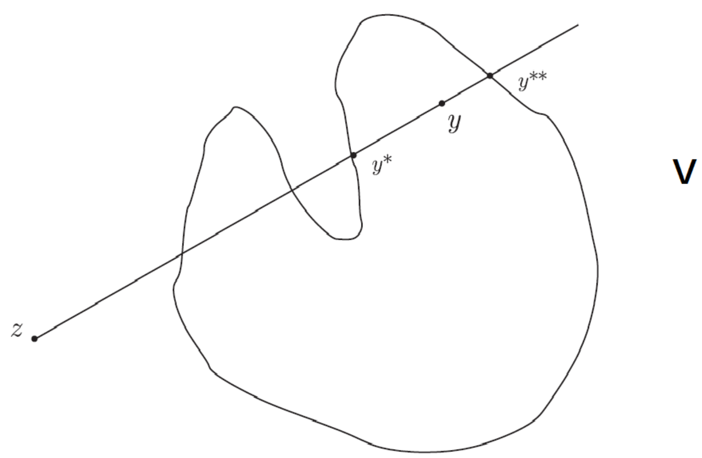

Figura 2.2:

Funções cones também possuem propriedade abaixo, a qual servirá para mostrar diversos resultados pelo texto.

Proposição 1. *Sejam $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, C uma função cone com vértice $z \notin W$ e inclinação a. Se $u \in C(\overline{W})$ satisfaz $u = C$ sobre ∂W e $L_u(W) = |a|$, então $u \equiv C$ sobre W.*

Demonstração. Suponha que exista $y \in W$ tal que $u(y) \neq C(y)$, por exemplo $u(y) > C(y)$. Caso $a \geq 0$, considere y^* como no exemplo acima (assumamos y^* mais próximo de z que y^{**}). Então:

$$u(y) - u(y^*) > C(y) - C(y^*) = a||y - z| - |y^* - z|| = a|y - y^*|.$$

Daí, consirando uma sequência $y_k \to y^*$, y_k em W, encontramos y_{k_0} tal que $|u(y) - u(y_{k_0})| > |a||y - y_{k_0}|$ o que implica $L_u(W) > |a|$, contradição. Se $a < 0$, nós usamos y^{**} no lugar de y^* e um argumento semelhante, para novamente obtermos $L_u(W) > |a|$. Caso $u(y) < C(y)$, aplicamos o argumento prévio a $-u$ e $-C$

□

2.3 Comparação com cones.

Definiremos nesta seção a propriedade de gozar de comparação com cones e analisaremos a relação entre este conceito e o de função absolutamente minimizante. Na verdade, mostraremos que uma função $u \in C(U)$ é absolutamente minimizante em U se , e somente se, goza de comparação com cones.

Estabeleceremos consequências de comparação com cones que serão proeminentes ferramentas no restante deste trabalho. Em particular, uma pequena seleção destes resulatados são tudo o que é preciso para a prova do teorema de existência no capítulo 4. Com estas preliminares em mãos a prova do teorema de existência será curta e elegante.

Nós começaremos por derivar algumas propriedades de $u \in AM(U)$. Estas propriedades sao usadas para definir uma classe de funções, e como veremos esta classe coincide com $AM(U)$. Além disso essa equivalência divide $AM(U)$ em um conjunto de duas noções 'unilaterais" as quais são essenciais para a prova do teorema de existência no capítulo 4.

Definição 3. *Seja $u \in C(U)$. Então u goza de comparação com cones por cima em U, e notaciona-se $u \in CCA(U)$, se para todo $V \subset\subset U, a \in \mathbb{R}$ e $z \notin V$ tem-se*

$$u(x) - a|x - z| \leq \max_{\{w \in \partial V\}} (u(w) - a|w - z|) \quad \text{para } x \in V.$$

Analogamente, diz-se que $u \in C(U)$ *goza de comparação com cones por baixo em* U*, e notaciona-se* $u \in CCB(U)$*, se para todo* $V \subset\subset U, a \in \mathbb{R}$ *e* $z \notin V$ *tem-se*

$$u(x) - a|x - z| \geq \min_{\{w \in \partial V\}} (u(w) - a|w - z|) \quad \textit{para } x \in V.$$

Enfim, uma função $u \in C(U)$ *goza de comparação com cones em* U*, e notaciona-se* $u \in CC(U)$*, se* u *goza de comparação com cones por cima e por baixo em* U*. Alternativamente* $u \in CCA(U) \cap CCB(U)$*.*

Observação 2. *Se* $u \in CCA(U)$*,* $V \subset\subset U$ *e* C *é uma função cone dada por* $C(x) = a|x - z| + b$ *tal que* $z \notin V$ *e* $u \ < \ (ou \leq)\ C$ *sobre* ∂V*. Então,* $u \ < \ (ou \leq)\ C$ *em* V*. Analogamente, Se* $u \in CCB(U)$*,* $V \subset\subset U$ *e* C *é uma função cone dada por* $C(x) = a|x - z| + b$ *tal que* $z \notin V$ *e* $u \ > \ (ougeq)\ C$ *sobre* ∂V*. Então,* $u \ > \ (ou \geq)\ C$ *em* V*.*

De fato, como $u \in CCA(U)$, temos para todo $x \in V$, que

$$\begin{aligned} u(x) - a|x - z| &\leq \max_{w \in \partial V} (u(w) - a|w - z|) \\ &< \ (\text{ou} \leq)\ b \end{aligned}$$

Analogamente, se $u \in CCB(U)$, temos para todo $x \in V$, que

$$\begin{aligned} u(x) - a|x - z| &\geq \min_{w \in \partial V} (u(w) - a|w - z|) \\ &> \ (\text{ou} \geq)\ b \end{aligned}$$

Proposição 2. *Seja* $u \in C(U)$*. Então* $u \in AM(U)$ *se, e somente se,* u *goza de comparação com cones por cima e por baixo em* U*.*

Demonstração. Primeiro, notemos que se $u \in C(U)$ e goza de comparação com cones então

$$L_u(\partial(V \backslash \{x\})) = L_u(\partial V). \tag{2.4}$$

De fato, como $\partial(V \backslash \{x\}) = \partial V \cup \{x\}$, temos $\partial V \subset \partial(V \backslash \{x\})$ e segue que

$$L_u(\partial V) \leq L_u(\partial(V \backslash \{x\})),$$

para obtermos a outra desigualdade é suficiente mostrar que para $z \in \partial V$ e $x \in V$

$$u(z) - L_u(\partial V)|x - z| \leq u(x) \leq u(z) + L_u(\partial V)|x - z|. \tag{2.5}$$

Bem, a desigualdade vale para $x \in \partial V$ e u goza de comparação com cones, então

$$u \in CCA(U) \Rightarrow u(x) - L_u(\partial V)|x - z| \leq \max_{\{w \in \partial V\}} (u(w) - L_u(\partial V)|w - z|) \leq u(z).$$

Portanto,

$$u(x) \leq u(z) + L_u(\partial V)|x - z|.$$

Assim, obtemos a segunda desigualdade em (2.5), semelhantemente usando que $u \in CCB(U)$ obtemos a primeira desigualdade.

Usando duas vezes (1.1) obtemos

$$L_u(\partial V) = L_u(\partial(V \backslash \{x\})) = L_u(\partial(V \backslash \{x, y\})).$$

Uma vez que $x, y \in \partial(V \backslash \{x, y\})$, nós temos $|u(x) - u(y)| \leq L_u(\partial V)|x - y|$. Portanto $L_u(\partial V) \geq L_u(V)$ e pela observação 1 $u \in AM(U)$.

Assumindo agora que $u \in AM(U)$, se $u \notin CCA(U)$ existirá $V \subset\subset U$ *e* $z \notin V$ tal que o conjunto

$$W = \{x \in V : u(x) - a|x - z| \ > \max_{\{w \in \partial V\}} (u(w) - a|w - z|)\}$$

é não vazio, aberto e

$$u(x) = C(x) := a|x - z| + \max_{\{w \in \partial V\}} (u(w) - a|w - z|) \text{ para } x \in \partial W.$$

Assim $u = C$ sobre ∂W, $W \subset V \subset\subset U$, logo $W \subset\subset U$ e uma vez que $u \in AM(U)$, temos $L_u(W) = L_u(\partial W) = L_C(\partial W) = L_C(W)$ (a última igualdade segue do exemplo 1, dado que $z \notin V \Rightarrow z \notin W$) a proposição 1 garante que $u = C$ em W (contradição). Logo $W = \emptyset$ e $u \in CCA(U)$ e um argumento análogo mostra que $u \in CCB(U)$.

□

Observação 3. *Note que na demonstração acima, foi mostrado que se* $u \notin CCA(U)$ *então existe um aberto não vazio* $W \subset\subset U$ *e uma função cone* $C(x) = a|x - z| + b$ *com* $z \notin W$ *tal que* $u = C$ *sobre* ∂W *e* $u > C$ *em* W. *Analogamente, se* $u \notin CCB(U)$, *então existe um aberto não vazio* $W \subset\subset U$ *e uma função cone* $C(x) = a|x - z| + b$ *com* $z \notin W$ *tal que* $u = C$ *sobre* ∂W *e* $u < C$ *em* W.

Exemplo 3. *Pelo exemplo 1 e proposição 2, concluímos que* $u(x) = a^*|x - y| \in CC(\mathbb{R}^n \backslash \{y\})$.

De fato, supondo $a^* \geq 0$, $u \in CC(\mathbb{R}^n)$. Do contrário, pela observação 3, existiria um subconjunto W precompacto não vazio do $\mathbb{R}^n$ e uma função cone $C(x) = a|x-z|+b$ com $z \notin W$ tal que $u = C$ sobre ∂W e $u > C$ em W. Se $y \notin W$ como no exemplo 1,

$$L_u(W) = L_u(\partial W) = L_C(\partial W) = L_C(W)$$

e pela proposição 1 , $u = C$ em W. Contrariando que $u > C$ em W. Assim, podemos assumir que $y \in W$. Mas então, assumindo que $a \geq 0$, usando que $a^* > 0$ (o caso $a^* = 0$ é trivial) e considerando novamente y^* e y^{**} como no exemplo 1, temos $|y-z| > |y^*-z|$. Portanto

$$C(y^*) = a|y^* - z| + b \leq a|y - z| + b = C(y)$$

e

$$0 = a^*|y^* - y| - C(y^*) > a^*|y - y| - C(y).$$

Contrariando que $y \in W$, pois $u > C$ em W. Supondo $a < 0$, refazemos o argemento com y^{**} no lugar de y^* e analogamente encontramos $C(y) > u(y)$. Se $a^* \leq 0$, então $-u \in CCA(U)$ e portanto $u \in CCB(\mathbb{R}^n\backslash)$.

Note também que se $a^* > 0$ então u não goza de comparação com cones por baixo em conjunto aberto contendo o vértice y. Com efeito, tomando algum V précompacto de U contendo y, nós temos que $d = \text{dist}(y, \partial V) > 0$. Assim, tomando $a = 0$, temos que

$$\min_{w \in \partial V} u(w) = a^* d > 0 = u(y).$$

Exemplo 4. *Se $n = 1$ e U é um intervalo, então $u \in CCA(U)$ se e somente se u é convexa. Por definição, $u \in CCA(U)$ é equivalente a condição que a reta secante ligando quaisquer pontos sobre o gráfico de u está sempre acima do gráfico de u.*

Agora trabalharemos alguns lemas que apresentam propriedades relativas a funções que gozam de comparação com cones. Estes lemas auxiliarão os resultados dos próximos capítulos, tais como nos teormas de caracterização, existência e unicidade.

Nesta seção derivaremos uma estimativa de continuidade Lipschtz (lema 3) que segue de uma desigualdade de Harnack, e veremos que o supremo de uma família de funções as quais gozam de comparção com cones também possuem esta propriedade (lema 4). Estes fatos serão, de modo particular, nescessários para a demonstração do teorema de existência.

Lema 1. *Seja $u \in CCA(U)$ e $y \in U$. Então*

$$u(x) \leq u(y) + \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x - y| \tag{2.6}$$

para $|x-y| \leq r \ < \mathrm{dist}(y, \partial U)$.
Além disso, a função

$$g^+(r) := \max_{\{w:|w-y|\leq r\}} u(w) = \max_{\{w:|w-y|=r\}} u(w) \tag{2.7}$$

é convexa sobre o intervalo $0 \leq r < \mathrm{dist}(y, \partial U)$.
Finalmente,

$$S^+(y,r) := \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w)-u(y)}{r} \right) \tag{2.8}$$

é não negativa e não decrescente em $0 \leq r \ < \mathrm{dist}(y, \partial U)$.

Demonstração. Para verificar (2.6), basta observar que a função cone sobre o lado direito de (2.6) é limitada sobre a fronteira do conjunto $\{x : 0 \ < |x-y| \ < r\} \subset\subset U$ e usar o fato que $u \in CCA(U)$. Para a igualdade em (2.7), vemos claramente que $\max_{\{w:|w-y|\leq r\}} u(w) \geq \max_{\{w:|w-y|=r\}} u(w)$ e para a outra desigualdade basta por, como na definição de $u \in CCA(U)$, $a = 0$ e $V = B_r(y)$. Com isto, também ganhamos que S^+ é não negativa. Com efeito, $S^+(y,r) = (g^+(r) - u(y))/r$ e $g^+(r) \geq u(y)$.

Para a convexidade de g^+, observe que temos

$$u(x) \leq g^+(s) + \frac{g^+(r)-g^+(s)}{r-s}(|x-y|-s) \quad \text{para} \quad s \leq |x-y| \leq r. \tag{2.9}$$

De fato, pela definição de g^+, a função cone sobre o lado direito de (2.9) limita u sobre a fronteira da região anular $\{x \in U : s \ < |x-y| \ < r\} \subset\subset U$. Portanto, se $t = \lambda s + (1-\lambda)r$ onde $\lambda \in [0,1]$, temos

$$u(x) \leq g^+(s) + \frac{g^+(r)-g^+(s)}{r-s}(t-s) \quad \text{para} \quad 0 \leq |x-y| \leq t. \tag{2.10}$$

Com efeito, para $0 \leq |x-y| \ < s$, usamos os fatos que $u(x) \leq g^+(s), t \geq s, r \ > s$ e g^+ é não decrescente, para $s \leq |x-y| \leq t$ usamos (2.9) já que $0 \leq |x-y| \leq r$.

Maximizando o lado esquerdo de (2.10) sobre $|x-y| \leq t$ temos

$$g^+(t) \leq g^+(s) + \frac{g^+(r)-g^+(s)}{r-s}(t-s).$$

E cálculos simples nos levam à

$$g^+(t) \leq (1-\lambda)g^+(r) + \lambda g^+(s),$$

mostrando assim que g^+ é convexa. Apoiando-se nisto, se $0 \ < s \leq r$, temos

$$S^+(y,s) = \frac{g^+(s) - g^+(0)}{s} \leq \frac{g^+(r) - g^+(0)}{s} = S^+(y,s).$$

Portanto S^+ é não decrescente, finalizando a prova. $\square$

Veremos, no teorema de caracterização, que as propriedades (2.6) e (2.9) são na verdade equivalentes a gozar de comparaçao com cones por cima. Notando que $u \in CCB(U)$ se, e somente se, $-u \in CCA(U)$ ou, de forma análoga, com as devidas adaptações concluímos o próximo lema.

Lema 2. *Seja $u \in CCB(U)$ e $y \in U$. Então*

$$u(x) \geq u(y) + \min_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x - y| \tag{2.11}$$

para $|x - y| \leq r \ < dist(y, \partial U)$.
Além disso, a função

$$g^-(r) := \min_{\{w:|w-y|\leq r\}} u(w) = \min_{\{w:|w-y|=r\}} u(w) \tag{2.12}$$

é côncava sobre o intervalo $0 \leq r < dist(y, \partial U)$.
Finalmente,

$$S^-(y,r) := \min_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) \tag{2.13}$$

é não positiva e não crescente em $0 \leq r \ < dist(y, \partial U)$.

O próximo lema é um resultado que nos garante uma estimativa que permite afirmar que se $u \in C(U)$ satisfaz (2.6), então u é localmente Lipschtz contínua.

Lema 3. *Seja $u \in C(U)$ satisfazendo (2.6). Se $z \in U$, $x, y \in B_R(z)$ e $R \ < \mathrm{dist}(z, \partial U)/4$, então*

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\sup_{B_{4R}(z)} u - \sup_{B_R(z)} u \right) \frac{|x - y|}{R}. \tag{2.14}$$

Demonstração. Assuma primeiro que u é não positiva ($u \leq 0$). Seja $d(y) = \mathrm{dist}(y, \partial U)$, então

$$u(x) \leq u(y) + \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x - y| \leq u(y) - \frac{u(y)}{r} |x - y|.$$

Fazendo $r \uparrow d(y)$, obtemos

$$u(x) \leq u(y)\Big(1 - \frac{|x-y|}{d(y)}\Big). \tag{2.15}$$

Se $z \in U$, $4R < \operatorname{dist}(z, \partial U)$ e $x, y \in B_R(z)$, então para todo $w \in \partial U$ temos

$$|z - w| \leq |z - y| + |y - w| \leq R + |y - w|.$$

Assim

$$d(z) = \inf_{w \in \partial U} |z - w| \leq R + \inf_{w \in \partial U} |y - w| = R + d(y).$$

Portanto,

$$d(y) \geq d(z) - R \geq 3R$$

e

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq 2R.$$

Segue então de (2.15) que $u(x) \leq \frac{u(y)}{3}$ para $x, y \in B_R(z)$. Logo para $x, y \in B_R(z)$, temos

$$\sup_{B_R(z)} u \leq \inf_{B_R(z)} u/3 \quad \text{para} \quad R < \operatorname{dist}(z, \partial U)/4. \tag{2.16}$$

Esta é uma desigualdade de Harnack.

Novamente, por (2.15) e também por (2.16),

$$u(x) - u(y) \leq -u(y)\Big(\frac{|x-y|}{d(y)}\Big) \leq -\inf_{B_R(z)} u\Big(\frac{|x-y|}{3R}\Big) \leq -\sup_{B_R(z)} u\Big(\frac{|x-y|}{R}\Big),$$

acabando assim o caso u não positiva.

Para o caso geral, aplicamos o caso já obtido à função não positiva $u - \sup_{B_{4R}(z)} u$. Note que esta função goza de comparação com cones por cima em U pois é a soma de $u \in CCA(U)$ e uma constante. Assim, ela é contínua em U, satisfaz (2.6) e do resultado obtido para $u \leq 0$, obtem-se o caso geral. □

Observação 4. *É interessante observar que se $u \in CCA(U)$ então satisfaz as hipóteses do lema e consequentemente o lema acima.*

Nosso próximo resultado é um lema que nos garante condições sobre as quais o supremo de uma família de funções que gozam de comparação com cones por cima, preserva a propriedade de gozar de comparação com cones por cima. De modo particular, utilizaremos este lema, (não apenas uma vez) na demonstração do teorema de existência.

Lema 4. *Seja Γ uma família uma fmília de funções as quais gozam de comparação com cones por cima em U. Suponha que*

$$h(x) = \sup_{\{v \in \Gamma\}} v(x)$$

é finita e localmente limitada em U. Então $h \in C(U) \cap CCA(U)$.

Demonstração. Fixe $v_0 \in \Gamma$, e note que podemos substituir Γ por

$$\Gamma^* = \{\max(v, v_0) : v \in \Gamma\}$$

na definição de h, sem contudo modifica-lo. Assim nós reduzimos ao caso em que as funções em Γ são localmente limitadas por cima (por h) e por baixo (por v_0). A continuidade de h agora segue do lema 3, o qual implica que Γ é localmente equicontínuo. Suponha que $V \subset\subset U$ e $z \notin V$. Então, por hipótese e pela definição de h, nós temos que para $v \in \Gamma$

$$v(x) - a|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(v(w) - a|w - z|) \leq \max_{w \in \partial V}(h(w) - a|w - z|) \quad \text{para} \quad x \in V.$$

Tomando o supremo sobre $\{v \in \Gamma\}$ encontramos que $h \in CCA(U)$. $\square$

Agora nós mostraremos que se u satisfaz uma pequena variação da consequência (2.6) de $u \in CCA(U)$, então u é constante em alguma vizinhança de um ponto de máximo local.

Suponha, sem asssumir que $u \in CCA(U)$, que g^+ como definida no lema 1, é convexa. Então, por convexidade, $g^+(s) - g^+(0) \leq (g^+(r) - g^+(0))s/r$ para $0 \leq s \leq r$. Isto pode ser escrito como uma variação fraca de (2.6), a saber:

$$u(x) \leq u(y) + \max_{\{w : |w-y| \leq r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r}\right)|x - y| \tag{2.17}$$

para $y \in U$ e $|x - y| \leq r \ < \operatorname{dist}(y, \partial U)$. Onde a única diferença para (2.6), é que o máximo á direita é tomado sobre toda a bola fechada $\{w : |w - y| \leq r\}$ ao invés da esfera $\{w : |w - y| = r\}$.

Lema 5. *Seja U conexo, $u \in C(U)$ e (2.17) vale para $x, y \in U$ com $|x - y| \leq r \ <$ dist$(y, \partial U)$. Seja $x^* \in U$ e $u(x^*) \geq u(w)$ para $w \in U$. Então $u \equiv u(x^*)$ em U.*

Demonstração. Dado que $A = \{x \in U : u(x) = u(x^*)\}$ é fechado em U e U é conexo, basta mostrar que A também é aberto. Seja $x \in A$. Se $y \in U$ e $|x-y| \leq r < \text{dist}(y, \partial U)$, isto é, y é mais próximo de x do que da fronteira. Note que há uma bola em U contendo x com esta propriedade. Com efeito, como U é aberto podemos tomar uma bola em U contendo x, basta então tomar a bola concêntrica com raio inferior a metade da bola inicial. Note também que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(y) + \max_{\{w:|w-y|\leq r\}} \Big(\frac{u(w)-u(y)}{r}\Big)|x-y| \\ &\leq \Big(1 - \frac{|x-y|}{r}\Big)u(y) + \max_{\{w:|w-y|\leq r\}} u(w)\frac{|x-y|}{r} \\ &\leq \Big(1 - \frac{|x-y|}{r}\Big)u(y) + u(x)\frac{|x-y|}{r}. \end{aligned}$$

Logo, para $y \in U$ e $|x-y| \leq r < \text{dist}(y, \partial U)$ temos

$$\Big(1 - \frac{|x-y|}{r}\Big)u(x) \leq \Big(1 - \frac{|x-y|}{r}\Big)u(y).$$

Implicando $u(x) \leq u(y)$ para todo y tal que $|y-x| \leq s < r$. Mas como $x \in A, u(x) = u(y)$ e todo ponto de A possui uma bola onde é consatante, mostrando que A é aberto. □

Observação 5. *O lema 5 implica que se u satisfaz 2.17 (em particular, se $u \in CCA(U)$) e tem um ponto de máximo local em $x^* \in U$, então é u constante sobre alguma vizinhança conexa de x^* para a qual x^* é um ponto de máximo. Em particular, (2.7) vale. Entretanto, u não precisa ser ser constante em todo o U se U for conexo. Basta notar o exemplo, $u(x) = \max(x, 0)$ em $\mathbb{R}$.*

Continuaremos introdizindo conceito e notação, de modo que possamos adiante derivar consequências adicionais de (2.6), através de lemas que serão utilizados nos teoremas do próximo capítulo.

Se $u \in C(U)$, ponhamos

$$T_u(x) := \lim_{r \downarrow 0} L_u(B_r(x)) = \inf\{L_u(B_r(x)) : 0 < r < \text{dist}(x, \partial U)\}.$$

Permitindo então o valor $+\infty$, T_u é uma função bem definida.

Grosseiramente falando, $T_u(x)$ é a constante Lipschitz de u em x. É o menor número com a propriedade de que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $r_\varepsilon > 0$ tal que $T_u(x) + \varepsilon$

é uma constante lipschtz para u sobre $B_{r_\varepsilon}(x)$. Note que $x \to T_u(x)$ é semicontínua superiormente. De fato, $T_u(x) \ < M$ implica que $L_u(B_r(x)) \ < M$ para algum $r \ > 0$. Para $y \in B_r(x)$ e $s+|x-y| \leq r$, temos $B_s(y) \subset B_r(x)$ e assim $L_u(B_s(y)) \leq L_u(B_r(x))$. Logo $T_u(y) \ < M$. Isto mostra que $\{x \in U : T_u(x) \ < M\}$ é aberto e, em consequência, que $x \to T_u(x)$ é semicontínua superiormente.

Definição 4. *Seja $u \in (U)$. Diz-se que u é fortemente absolutamente minimizante em U, e notaciona-se $u \in AMS(U)$, se para todo $V \subset\subset U$ e $v \in C(\overline{V})$ tal que $u = v$ sobre ∂V nós temos*

$$\sup_{x \in V} T_u(x) \leq \sup_{x \in V} T_v(x).$$

Observe que se $u \in AM(U)$ então $u \in AMS(U)$. Com efeito, seja $V \subset\subset U$ e $v \in C(\overline{V})$ tal que $v = u$ sobre ∂V. Então, para $r \ > 0$ suficientemente pequeno e $x \in V$, temos $B_r(x) \subset\subset U$ e usando que $u \in AM(U)$ temos

$$L_v(B_r(x)) \geq L_v(\partial B_r(x)) = L_u(\partial B_r(x)) = L_u(B_r(x)).$$

Assim,

$$T_v(x) = \lim_{r \downarrow 0} L_v(B_r(x)) \geq \lim_{r \downarrow 0} L_u(B_r(x)) = T_u(x).$$

No próximo capítulo veremos que funções absolutamente minimizantes são as funções fortemente absolutamente minizantes.

Para comentários futuros, lembramos que, que $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in U$ se existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(x) = u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|) \tag{2.18}$$

quando $x \to x_0$. Aqui a notação do pequeno o tem o seu significado usual. Quando (2.18) vale, p é unicamente determinado o que nos permite definir $Du(x_0) := p$. Pelo teorema de Rademacher (ver, por exemplo, [4]), funções Lipschitz contínuas são diferentiáveis quase sempre, nesse sentido.

Além destes conceitos, empregaremos a notação

$$[w, z] = \{w + t(w - z) : 0 \leq t \leq 1\}$$

que é o seguimento de reta ligando w a z em $\mathbb{R}^n$. Finalmente, para o próximo lema, onde derivaremos consequências da propriedade 3), estabeleceremos o seguinte resultado.

Proposição 3. *Se $u \in CCA(U)$ e $E \subset U$ é compacto, então $L_u(E) < \infty$.*

Para ver isto, supondo o contrário, para cada $j \in \mathbb{N}$ existiriam sequências x^j, y^j em E tais que $|u(x^j) - u(y^j)| > j|x^j - y^j|$. Uma vez que u é contínua sobre E e E é compacto, u é limitada sobre E e segue-se então que $|x^j - y^j| \to 0$ quando $j \to \infty$. Como E é compacto, passando a uma subsequências se necessário, podemos supor que $x^j, y^j \to z \in E$. Logo $x^j, y^j \in B_R(z)$ onde $4R < \text{dist}(z, \partial U)$ e o lema acima levanos a contradizer $|u(x^j) - u(y^j)| > j|x^j - y^j|$ para j suficientemente grande.

Lema 6. *Seja $u \in C(U)$ satisfazendo (2.6) e $y \in U$. Então*

1. *$S^+(y, r)$ dado por (2.8) no lema 1 é não negativa e não decrescente em r, $0 < r < dist(y, \partial U)$.*

2. *Se $[w, z] \subset U$, então*

$$|u(w) - u(z)| \leq \left(\max_{y \in [w,z]} S^+(y) \right) |z - w|. \tag{2.19}$$

3. *$S^+(y) := \lim_{r \downarrow 0} S^+(y, r) = \inf_{\{0 < r < dist(y, \partial U)\}} S^+(y, r)$ é bem definido, finito e não negativo. Além disso, $S^+(y) = T_u(y)$. Em particular, $S^+(y)$ é semicontínua superiomente em $y \in U$, onde $S^+(y, r)$ é dado por (2.8) no lema 1.*

4. *Se $-u$ também satisfaz (2.6) junto com u, então*

$$0 \geq S^-(y) = \lim_{r \downarrow 0} S^-(y, r) = -S^+(y) \qquad \textit{para} \quad y \in U$$

onde $S^-(y, r)$ é definida por (2.13) no lema 2.

Demonstração. Por (2.6) temos

$$\frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} \leq \max_{\{w : |w - y| = r\}} (\frac{u(w) - u(y)}{r})$$

para $|x - y| \leq r < \text{dist}(y, \partial U)$. Assim, maximizando sobre $\{x : \ |x - y| = s \leq r\}$ obtemos $S^+(y, s) \leq S^+(y, r)$. Se existisse $r > 0$; $0 < r < \text{dist}(y, \partial U)$ tal que $S^+(y, r) < 0$ então para todo x onde ; $|x - y| = r$, teríamos

$$\frac{u(x) - u(y)}{r} \leq \max_{\{w : |w - y| = r\}} (\frac{u(w) - u(y)}{r}) = S^+(y, r) < 0.$$

Então $u(x) \leq u(y)$ e como para $s \leq r$, $S^+(y,s) \leq S^+(y,r) < 0$, y é ponto de máximo do conexo $B_r(y)$ e pelo lema 5, u é constante em $B_r(y)$, o que nos leva a $S^+(y,r) = 0$, contradição. Logo $S^+(y,r)$ é não negativo e não decrescente em r, $0 < r < \operatorname{dist}(y, \partial U)$. estabelecendo-se então 1.

Com base no lema 3 e na proposição 3, u é Lipschitz contínua em algum subconjunto compacto de U. Seja $[w,z] \subset U$, temos que $g(t) := u(w+t(z-w))$ é Lipschitz contínua em $t \in [0,1]$. Fixe $t \in (0,1)$ e observe que pondo $x = w+(t+h)(z-w)$ e $y = w+t(z-w)$ em (2.6), temos para $h > 0$ pequeno,

$$\begin{aligned}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} &= \frac{u(w+(t+h)(z-w)) - u(w+t(z-w))}{h} \\ &\leq S^+(w+t(z-w), h|z-w|)|z-w|.\end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue da definição de S^+. Fazendo $h \downarrow 0$, nós encontramos que

$$g'(t) \leq S^+(w+t(z-w), |z-w|)|z-w| \leq \left(\sup_{y\in[w,z]} S^+(y)\right)|z-w|$$

em algum ponto de diferenciabilidade de g. Portanto,

$$u(z) - u(w) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt \leq \left(\sup_{y\in[w,z]} S^+(y)\right)|z-w|.$$

Intercambiando z e w nós obtemos

$$|u(w) - u(z)| \leq \left(\sup_{y\in[w,z]} S^+(y)\right)|z-w|. \tag{2.20}$$

A semicontinuidade superior de S^+, provada abaixo, nos permite reescrever (2.20) com max no lugar de sup estabelecendo 2 .

Seja $w_0 \in B_r(y)$ tal que

$$\frac{u(w_0) - u(y)}{r} = \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r}\right).$$

Como

$$|u(w_0) - u(y)| = \left|\frac{u(w_0) - u(y)}{r}\right| |w_0 - y|,$$

temos

$$L_u(\partial B_r(y)) \geq \frac{u(w_0) - u(y)}{r} = \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r}\right).$$

Então, pela continuidade de u,

$$L_u(B_r(y)) \geq L_u(\partial B_r(y)) \geq \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w)-u(y)}{r}\right) = S^+(y,r).$$

Portanto, passando o limite quando $r \downarrow 0$ obtemos $S^+(y) \leq T_u(y)$. Por outro lado por (2.20), $\forall w, z \in B_r(y)$, temos

$$|u(w)-u(z)| \leq \left(\max_{x\in[w,z]} S^+(x)\right)|z-w| \leq \left(\max_{x\in B_r(y)} S^+(x)\right)|z-w|.$$

Então $L_u(B_r(y)) \leq \left(\sup_{x\in B_r(y)} S^+(x)\right)$, e segue que

$$\begin{aligned} T_u(y) &= \lim_{r\downarrow 0} L_u(B_r(y)) \leq \lim_{r\downarrow 0} \sup_{w\in B_r(y)} S^+(w) \\ &\leq \lim_{r\downarrow 0} \sup_{w\in B_r(y)} S^+(w,s) \text{ (pela monotonicidade de } S^+(y,r) \text{ em } r) \\ &\leq S^+(y,s) \end{aligned}$$

para $s > 0$ pequeno, pela continuidade de $S^+(y,s)$ em $s > 0$ pequeno. E a desigualdade $T_u(y) \leq S^+(y)$ segue fazendo $s \downarrow 0$ na expressão acima. Assim, $S^+ = T_u$ e ganhamos a semicontinuidade superior de S^+ através da semicontinuidade superior de T_u, concluíndo assim 3.

Para obtermos 4 e finalizarmos o lema, note que de modo análogo a $S^+(y) \geq 0$, temos $S^-(y) \leq 0$. E que as afirmações a respeito de S^- seguem do fato que $T_{-u} = T_u$. □

Observação 6. *Se $v \in C(U)$ e $[w,z] \subset U$, imitando a prova acima obtemos*

$$|v(w)-v(z)| \leq \left(\max_{x\in[w,z]} S^+(x)\right)|z-w|.$$

Lema 7. *Seja $u \in C(U)$ satisfazendo (2.6) do lema 1. Se $x_0, x_1 \in U$, $0 < |x_1-x_0| < dist(x_0,\partial U)$ e*

$$u(x_1)-u(x_0) = S^+(x_0,|x_1-x_0|)|x_1-x_0|, \tag{2.21}$$

equivalentemente, $u(x_1) = \max\{u(w) : |w-x_0| = |x_1-x_0|\}$, então, para $0 < s < dist(x_0,\partial U) - |x_1-x_0|$,

$$0 \leq S^+(x_0,|x_1-x_0|) \leq S^+(x_1) \leq S^+(x_1,s). \tag{2.22}$$

Demonstração. A primeira e a última desigualdade de (2.22) seguem do ítem 1 do lema 6. Para a desigualdade central, nos valeremos da definição e monotonicidade de S^+ para obtermos

$$u(x) \leq u(x_0) + S^+(x_0, |x_1 - x_0|)|x - x_0| \quad \text{para} \quad |x - x_0| \leq |x_1 - x_0|. \tag{2.23}$$

De fato, se $|x - x_0| \leq |x_1 - x_0|$, então

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|} \leq S^+(x_0, |x - x_0|) \leq S^+(x_0, |x_1 - x_0|).$$

Ponha

$$x_t = x_0 + t(x_1 - x_0) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{2.24}$$

e $x = x_t$ em (2.23) para obter, via (2.21),

$$\begin{aligned} u(x_t) &\leq u(x_0) + S^+(x_0, |x_1 - x_0|)t|x_1 - x_0| \\ &= u(x_0) + t(u(x_1) - u(x_0)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_t) &\geq (1 - t)(u(x_1) - u(x_0)) \\ &= |x_1 - x_t|S^+(x_0, |x_1 - x_0|), \end{aligned}$$

e segue que

$$S^+(x_t, |x_1 - x_t|) \geq S^+(x_0, |x_1 - x_0|) \tag{2.25}$$

Agora nós assumiremos que $0 < s <$ dist $(x_1, \partial U)$, então $|x_t - x_1| < s <$ dist $(x_t, \partial U)$ se t é suficientemente próximo de 1. Assim, juntamente com (2.25) e a monotonicidade S^+, obtemos

$$S^+(x_t, s) \geq S^+(x_t, |x_1 - x_t|) \geq S^+(x_0, |x_1 - x_0|).$$

Agora fazendo $t \uparrow 1$ em

$$S^+(x_t, s) \geq S^+(x_0, |x_1 - x_0|)$$

concluímos que

$$S^+(x_1, s) \geq S^+(x_0, |x_1 - x_0|).$$

E fazendo $s \downarrow 0$, na expressão acima, obtemos

$$S^+(x_1) \geq S^+(x_0, |x_1 - x_0|)$$

como queríamos. $\square$

Observação 7. *Para referência futura, note enquanto a prova está recente para os leitores, que sendo* x_2 *tal que* $|x_2 - x_1| = s$ *e* $u(x_2) - u(x_1) = S^+(x_1, s)|x_2 - x_1|$*, então a desigualdade acima pode ser escrita como*

$$\begin{aligned} \frac{u(x_2) - u(x_1)}{|x_2 - x_1|} &= S^+(x_1, |x_2 - x_1|) \geq \\ S^+(x_0, |x_1 - x_0|) &= \frac{u(x_1) - u(x_0)}{|x_1 - x_0|}. \end{aligned}$$

Finalizaremos agora o nosso pequeno conjunto de lemas deste capítulo, os quais serão suporte para os teoremas e demais resultados dos capítulos seguintes.

Lema 8. *Sejam* U *limitado e* $u \in C(\overline{U})$ *satisfazendo (2.6),* $x_0 \in U$ *com* $S^+(x_0) > 0$ *e* $\delta > 0$*. Então existe uma sequência de pontos* $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset U$ *e um ponto* $x_\infty \in \partial U$ *com as seguintes propriedades:*

1. $|x_j - x_{j-1}| \leq \delta$ *para* $j = 1, 2, \ldots$
2. $[x_{j-1}, x_j] \subset U$ *para* $j = 1, 2, \ldots$
3. $S^+(x_j) \geq S^+(x_{j-1})$ *para* $j = 1, 2, \ldots$
4. $x_\infty = \lim_{j\to\infty} x_j$.
5. $u(x_\infty) - u(x_0) \geq S^+(x_0) \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j-1}|$.

Demonstração. Seja $x_0 \in U$ e $S^+(x_0) > 0$. Por (2.22) do lema 7, iterando o processo na observação 7 encontamos uma sequência $x_j,\ j = 1, 2...$ tal que

$$|x_j - x_{j-1}| = \min(\delta, \mathrm{dist}(x_{j-1}, \partial U)/2), \tag{2.26}$$

$$\frac{u(x_j) - u(x_{j-1})}{|x_j - x_{j-1}|} = S^+(x_{j-1}, |x_j - x_{j-1}|)$$

e

$$S^+(x_{j-1}, |x_j - x_{j-1}|) \geq S^+(x_{j-2}, |x_{j-1} - x_{j-2}|).$$

Assim, por construção,

$$\begin{aligned} u(x_j) - u(x_{j-1}) &= |x_j - x_{j-1}| S^+(x_{j-1}, |x_j - x_{j-1}|) \\ &\geq |x_j - x_{j-1}| S^+(x_0, |x_1 - x_0|) \\ &\geq |x_j - x_{j-1}| S^+(x_0). \end{aligned}$$

Logo nós podemos somar de $j = 1$ a m e encontrar

$$u(x_m) - u(x_0) \geq S^+(x_0) \sum_{j=1}^{m} |x_j - x_{j-1}|. \tag{2.27}$$

Assim, como $u \in C(\overline{U})$ e $S^+(x_0) > 0$ e por (2.27), existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} |x_j - x_{j-1}| \leq C \qquad \forall m = 1, 2...$$

de onde segue que $\{x_j\}$ é uma sequência de Cauchy e converge para um limite $x_\infty \in \overline{U}$, onde $x_\infty \in \partial U$ por (2.26). Passando o limite quando $m \to \infty$ em (1.23), nós obtemos

$$u(x_\infty) - u(x_0) \geq S^+(x_0) \sum_{j=1}^{m} |x_j - x_{j-1}|.$$

□

2.4 Uma desigualdade de Harnack mais refinada.

Aqui, somente como um resultado adicional interessante, pois não será de grande relevância nos resultados posteriores, nós refinaremos a desigualdade de Harnack que aparece no decorrer da prova do lema 1. Lembre-se que estávamos supondo $u \leq 0$. Agora assuma que $R = d(z) := \mathrm{dist}(z, \partial U)$ e $r < R$. Sejam $x, y \in B_r(z)$, m um inteiro positivo e defina x_j por

$$x_j = x + j\frac{y - x}{m} \quad para \quad j = 0, 1, 2..., m.$$

Como $|x_{j+1} - x_j| = \dfrac{|x - y|}{m} < d(x_{j+1})$ quando m é grande e $d(x_j) \geq R - r$. Por (2.15) podemos afirmar que

$$u(x_j) \leq u(x_{j+1})\left(1 - \frac{|x - y|}{m(R - r)}\right).$$

Iterando esta relação, nós concluímos que

$$\begin{aligned} u(x) = u(x_0) &\leq u(x_m)\left(1 - \frac{|x - y|}{m(R - r)}\right)^m \\ &= u(y)\left(1 - \frac{|x - y|}{m(R - r)}\right)^m \to u(y) \exp\left(-\frac{|x - y|}{R - r}\right) \end{aligned}$$

ou

$$u(x) \leq u(y) \exp\left(-\frac{|x-y|}{R-r}\right) \quad \text{para} \quad x, y \in B_r(z),\ 0\ < r\ < R,\ B_r(z) \subset U. \tag{2.28}$$

De que modo isto seria mais refinado que (2.16), por exemplo, com $r = R/4$? Em primeiro lugar é valido para todo $r\ < R$. Para comparar com (2.16), nós tomamos $R = 4r$ e dado que $u \leq 0$, (2.28) implica que

$$u(x) \leq u(y) \exp\left(\frac{|x-y|}{R-r}\right) \quad \text{para} \quad x, y \in B_r(z),\ 0\ < r\ < R,\ B_r(z) \subset U.$$

Portanto,

$$\sup_{B_r(z)} u \leq \exp(-2/3)\left(\inf_{B_r(z)} u\right).$$

e $\exp(-2/3) = 0,5134...\ > 1/3$.

Capítulo 3

CARACTERIZAÇÕES

Neste capítulo, nós mostraremos que a condição de u ser absolutamente minimizante é equivalente a vários outros critérios além de comparação com cones. Um destes substitui a exigência que para cada $V \subset\subset U$, u minimiza a constante Lipschitz $L_u(V)$ entre todas as funções as quais coincidem com u sobre ∂V (isto é u é absolutamente minimizante) com a de minimizar o funcional $\sup_{x \in V}(Tu(x))$ (isto é, u é fortemente absolutamente minimizante; veja definição 4. Outro critério importante o qual é apresentado aqui, no caso onde $|.|$ é a norma de Euclidiana, é que u deve ser uma solução no sentido da viscosidade do infinto Laplaciano (3.2) (a definição de tal solução é o critério (g) do Teorema 3 na seção 3.3; veja também a definição 5. Este critério é útil para mostrar que funções específicas são absolutamente minimizantes.

3.1 Soluções no sentido da viscosidade e o operador infinito Laplaciano na norma euclidiana

Nós dizemos que uma função $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável em um ponto $y \in U$ se existe um $p \in \mathbb{R}^n$ e uma matrix simétrica $n \times n$ X tal que

$$u(x) = u(y) + \langle p, x - y\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-y), x-y\rangle + o(|x-y|^2) \tag{3.1}$$

quando $x \to y$. Assim como foi definido Du na seção 2.3 o ponto p e a matriz X são unicamente determinadas de modo que podemos definir $D^2u(y) := X$. Se u é diferenciável em todo ponto de U então dizemos que $u \in C^2(U)$. Definimos também

$$\Delta_\infty u(x) = \langle D^2u(x)Du(x), Du(x)\rangle, \tag{3.2}$$

Δ_∞ é conhecido como o operador infinito Laplaciano.

Começaremos por derivar rapidamente a equação infinito Laplaciano de simples considerações de comparação com cones, independente do conceito de soluções no sentido da viscosidade. Seja $u : U \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u(x) \leq u(y) + \max_{\{w:|w-y|=r\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x - y| \tag{3.3}$$

para $|x - y| \leq r \ < \mathrm{dist}(y, \partial U)$. Pelo teorema (2) isto é equiavalente a $u \in CCA(U)$. Suponha que $|.|$ é a norma euclidiana:

$$|x|^2 = \sum_1^n x_j^2. \tag{3.4}$$

Pondo $X = D^2u$ como no início do capítulo, nós afirmamos então que

$$\langle Xp, p \rangle \geq 0. \tag{3.5}$$

Isto é, $\Delta_\infty u(y) \geq 0$ Assim como nós definimos Du na seção 2.3, quando 3.1 vale, p e X são unicamnete determinados de modo que podemos definir Nós provaremos (3.5) assumindo sem perda de generalidade que $y \neq 0$ e $p \neq 0$ ((3.5) é trivial se $p = 0$). Usando (3.1) em (3.3) e pondo $w = rz$ onde $|z| = 1$, nós obtemos

$$\langle p, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Xx, x \rangle + o(|x|^2) \leq \left(\sup_{\{z:|z-y|=1\}} \left(\langle p, z \rangle + \frac{r}{2} \langle Xz, z \rangle \right) + o(r) \right) |x|. \tag{3.6}$$

Dividindo ambos os lados por $|x|$, escrevendo $x^* = \frac{x}{|x|}$ e usando $|x| \leq r$ obtemos

$$\langle p, x^* \rangle + |x| \langle Xx^*, x^* \rangle \leq \sup_{\{z:|z|=1\}} \left(\langle p, z \rangle + \frac{r}{2} \langle Xz, z \rangle \right) + o(r). \tag{3.7}$$

Quando $r = 0$, o max sobre o lado é atingido somente em $z = p^*$. Portanto, algum ponto de máximo z_r para $r \ > 0$ satisfaz $z_r \to p^*$ quando $r \to 0$. Então nós temos

$$\begin{aligned} |p| &\leq \langle p, z_r \rangle + \frac{r}{2} \langle Xz_r, z_r \rangle + o(r) \\ &\leq |p| + \frac{r}{2} \langle Xp^*, p^* \rangle + o(r). \end{aligned}$$

E segue que $\langle Xp, p\rangle \geq 0$. Semelhantemente,

$$u(x) \geq u(y) + \min_{\{w:|w-y|=rz\}} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x - y|$$

implica $\langle Xp, p\rangle \leq 0$.

Assim, nós temos mostrado que se $u \in AM(U) = CC(U)$ é duas vezes diferenciável em um ponto y, então $\Delta_\infty u(y) = 0$. Por exemplo, $C(x) = a|x - z| + b$ é absolutamente minimizante em $\mathbb{R}^n \backslash \{z\}$, então $\Delta_\infty C \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{z\}$. Porém, como veremos, $u \in AM(U)$ não implica que u é duas vezes diferenciável em todo ponto de U. Entretanto é um pouco surpreendenete que a equação $\Delta_\infty u = 0$, apropriadamente interpretada, caracteriza a classe das funções absolutamente minimizantes.

Agora, através de um teorema, daremos uma caracterização das funções absolutamente minimizantes como as soluções, em um determinado sentido, do infinito Laplaciano. Mais precisamente, definiremos quando uma função $u \in C(U)$ é solução de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade e veremos que as funções absolutamente minimizantes em U são exatamente as soluções de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade. Podemos então chegar a conclusão de que as soluções de $\Delta_\infty u = 0$ no sentido da viscosidade, são as funções que possuem um certo caráter geométrico, no sentido de serem as funções que possuem a propriedade de gozar de comparação com cones.

Definição 5. *Uma função $u \in C(U)$ satisfaz $\Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade se: $V \subset U$, $v \in C^2(V)$ e $\Delta_\infty v(x) < 0$ para $x \in V$, então $u - v$ não possui pontos de máximo local em V. Semelhantemente, uma função $u \in C(U)$ satisfaz $\Delta_\infty u \leq 0$ em U no sentido da viscosidade se: $V \subset U$, $v \in C^2(V)$ e $\Delta_\infty u > 0$ para $x \in V$, então $u - v$ não possui pontos de mínimo local em V. Finalmente, uma função $u \in C(U)$ é uma solução de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade, se $\Delta_\infty u \leq 0$ e $\Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade.*

Exemplo 5. *Seja $u \in C^2(U)$ satisfazendo $\Delta_\infty u \equiv 0$ in U. Então u é uma solução de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade. Para ver isto, suponha $V \subset U$, $v \in C^2(U)$ e $\Delta_\infty v < 0$ em V. Se x é um ponto de máximo local de $u - v$ então x é um ponto crítico de $u - v$ e $D^2(u - v) \leq 0$. Assim:*

$$\begin{aligned} 0 > \Delta_\infty v(x) &= \langle D^2 v(x) Dv(x), Dv(x)\rangle \\ &= \langle D^2 v(x) Du(x), Du(x)\rangle \\ &\geq \langle D^2 u(x) Du(x), Du(x)\rangle \\ &= \Delta_\infty u = 0, \end{aligned}$$

uma contadição. Portanto, $u - v$ não possui máximo local em U e $\Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade. Analogamente, mostra-se que $\Delta_\infty u \leq 0$ em U no sentido da viscosidade. Logo u é uma solução de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade. O que é bastante natural que uma solução clássica seja uma solução no sentido fraco.

Exemplo 6. *$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $u(x,y) = x^{4/3} - y^{4/3}$ é uma solução de $\Delta_\infty u = 0$ em $\mathbb{R}^2$ no sentido da viscosidade. Este é um importante exemplo, pois até o momento, é a função absolutamente minimizante menos regular exibida. A este respeito, no caso da norma euclidiana as funções absolutamente minimizantes menos regulares exibidas até o momento são as funções distâncias a conjuntos convexos.*

Para ver isto, fora dos eixos $x = 0$ e $y = 0$, note que como $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i} = 0$ temos

$$\begin{aligned}\Delta_\infty u(x,y) &= u_{xx}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{3}x^{-2/3}(\frac{4}{3}x^{1/3})^2 - \frac{4}{3}\frac{1}{3}y^{-2/3}(\frac{4}{3}y^{1/3})^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto $\Delta_\infty u \equiv 0$ fora dos eixos $x = 0$ e $y = 0$. No entanto, u não é duas vezes diferenciável nos eixos. Este exemplo tem derivadas primeiras as quais são meramente Holder contínuas com expoente 1/3. Portanto, se v é duas vezes continuamente diferenciável e $\Delta_\infty v \ < 0$, então qualquer máximo local (x_0, y_0) de $u(x,y) - v(x,y)$ deve ser da forma $(0, y_0)$ e $(x_0, 0)$. Suponhamos, para ilustrar, que $u - v$ tem um máximo em $(0,1)$. Então Então

$$u(x,1) - v(x,1) = x^{4/3} - 1 - v(x,1) \leq u(0,1) - v(0,1) = -1 - v(0,1)$$

para x próximo de 0. Portanto, $x^{4/3} \leq v(x,1) - v(0,1)$, o qual não pode valer para uma função $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ quando $x \to 0$.

Note que no argumrento acima não foi usado que $\Delta_\infty v \ < 0$. Porém, nós utilizamos que $\Delta_\infty v \ < 0$ para mostrar que (1,0) não pode ser ponto de máximo local de $u - v$. Com efeito, se (1,0) fosse ponto de máximo local de $u - v$ teríamos $v_y(1,0) = u_y(1,0) = 0$. Portanto $\Delta_\infty v(1,0) = v_x(1,0)^2 v_{xx}(1,0)$, o que implica, $v_{xx}(1,0) \ < 0$. Por outro lado temos

$$x^{4/3} - v(x,0) \leq 1^{4/3} - v(1,0)$$

para x próximo de 1, implicando $v_{xx}(1,0) \geq \frac{4}{3}\frac{1}{3} \ > 0$.

Teorema 1. *Seja $u \in C(U)$. Então u é absolutamente minimizante em U, se e somemte se, u é uma solução de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade.*

Demonstração. Mostraremos que $u \in CCA(U) \Leftrightarrow \Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade. O teorema segue então por aplicar este resultado a $-u$, já que $\Delta_\infty u \leq 0$ em U no sentido da viscosidade $\Leftrightarrow \Delta_\infty(-u) \geq 0$ em U no sentido da viscosidade.

Assuma que $\Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade. Nós afirmamos então que $u \in CCA(U)$. Se não, pela observação 3, existe $V \subset\subset U$ e uma função cone $C(x) = a|x-z| + b$ com $z \notin V$ tal que $u = C$ sobre ∂V e $u > C$ em V. Seja $x^* \in V$, então $u(x^*) > C(x^*)$ e existe um $\epsilon > 0$ tal que $u(x^*) = C(x^*) + 2\epsilon$. Considerando então o cone C^*, dado por $C^*(x) = C(x) + \epsilon$, se pudermos encontar uma perturbação $P \in C^2(\overline{V})$ tal que $|P| \leq \epsilon$ e $\Delta_\infty(C^* + P) \leq -\delta < 0$ para lalgum $\delta > 0$ estará feito. De fato, como $|P| \leq \epsilon$, temos

$$u(x) - (C^*(x) + P(x)) = u(x) - C(x) - \epsilon - P(x) = \epsilon - P(x) \leq 0 \quad \text{para} \quad x \in \partial V$$

e

$$u(x^*) - (C^*(x^*) + P(x^*)) = C(x^*) + 2\epsilon - C(x^*) - P(x^*) \geq 0.$$

Assim o máximo de $u - (C^* + P)$ sobre $\overline{V}$ (o qual exite pois $u - (C^* + P)$ é cotínua e $\overline{V}$ é compacto) é atingido em V. Porém $\Delta_\infty(C + P) \leq -\delta < 0$ em V, contradizendo a hipótese de que u é solução de $\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade.

Seja $P(x) = -\gamma|x-z|^2$ onde $\gamma > 0$, então $P(x) + C(x) = G(|x-z|)$ onde G é dado por $G(s) = as - \gamma s^2 + b$. Um cálculo direto nos mostra que

$$\Delta_\infty G(|x-z|) = G''(|x-z|)G'(|x-z|)^2 = -2\gamma(2\gamma|x-z| - a)^2.$$

Se γ é suficientemente pequeno, $\Delta_\infty(C + P)$ é estritamente negativo e $|P| \leq \varepsilon$ em V. Então P é uma perturbação com as propriedades almejadas.

Reciprocamente, se $u \in CCA(U)$ então $\Delta_\infty u \geq 0$ no sentido da viscosidade. De fato, do contrário existiriam $V \subset\subset U$, $v \in C^2(V)$ com $\Delta_\infty v < 0$ em V e $u - v$ possuindo um ponto de máximo local em V. Sem perda de generalidade podemos supor que este ponto é zero. De fato, caso fosse um ponto $x \neq 0$, definindo $u_x : U - \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $U - \{x\} = \{y - x : y \in U\}$ por $u_x(y-x) = u(y)$, teríamos $u_x \in CCA(U - \{x\})$. Analogamente definindo $v_x : U - \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $v_x(y-x) = v(y)$ temos $v_x \in C^2(U - \{x\})$ e $u_x - v_x$ possui máximo local em 0.

Proseguindo com a demostração, $0 \in V$ e para algum $r > 0$, tem-se

$$u(x) - v(x) \leq u(0) - v(0) \text{ para } |x| < r. \tag{3.8}$$

Se encontrarmos $z \neq 0$ e $a \geq 0$ tal que $C(x) = a|x-z|$ satisfaz

$$DC(0) = Dv(0) \text{ e } D^2C(0) > D^2v(0), \tag{3.9}$$

então, do cálculo, $v - C$ tem um máximo estrito em 0, pois o gradiente de $v - C$ se anula em 0 e sua hessiana é estriatamente negativa. Assim

$$v(x) - C(x) \ < v(0) - C(0) \text{ para } |x| \neq 0 \text{ pequeno.} \tag{3.10}$$

As desigualdades (3.8) e (3.10) nos levam à

$$u(x) \leq v(x) - v(0) + u(0) \ < C(x) - C(0) + u(0) \text{ para } |x| \neq 0 \text{ pequeno.}$$

Segue então que $u(x) \ < C^*(x) := C(x) - C(0) + u(0)$ sobre $|x| = s$, se s é suficientemente pequeno, com $u(0) = C^*(0)$. Assim, se $u \in CCA(U)$ e $z \neq 0$, podemos encontrar $t \ > 0$ tal que $u \ < C^*$ sobre $\partial B_t(0)$, $B_t(0) \subset\subset U$ e $z \notin B_t(0)$. E pela observação 2 obtemos $u \ < C^*$ em $B_t(0)$, o que implica $u(0) \ < C^*(0)$, contradição.

Então resta mostrar que $C(x) = a|x - z|$ satisfazendo (3.9) pode ser construída. Nós calculamos

$$DC(0) = -a\frac{z}{|z|} \ \text{ e } \ D^2C(0) = \frac{a}{|z|}(I - pr(\frac{z}{|z|})) \tag{3.11}$$

onde $pr(v)$ é a matriz da aplicacação cujo efeito dá a projeção ao longo de v.
Assim

$$a = |Dv(0)| \ \text{ e } \ \frac{z}{|z|} = -\frac{Dv(0)}{|Dv(0)|} \tag{3.12}$$

e descubrimos a e z. Lembrando que supomos $\Delta_\infty \ < 0$ em V e $0 \in V$, temos

$$\Delta_\infty v(0) = \langle D^2v(0)Dv(0)Dv(0) \ < 0\rangle$$

e portanto $Dv(0) \neq 0$. A condição final que C deve satisfazer é $D^2C(0) \ > D^2v(0)$. Por (3.11) e (3.12) isto equivale a

$$\frac{|Dv(0)|}{|z|}(I - pr(Dv(0))) \ > 0,$$

usando álgebra linear pode-se constatar que para $|z|$ suficientemente pequeno a desigualdade acima é verificada. A prova pode ser também encontrada em [16].

□

3.2 Caracterização das funções que gozam de comparação com cones por cima.

Observe que para caracterizarmos as funções absolutamente minimizantes como as soluções de $\Delta_\infty u = 0$ no sentido da viscosidade através do teorema 1, em princípio, caracterizamos as funções que gozam de comparação com cones por cima, como as funções que satisfazem $\Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade . Seguiremos então essa mesma estratégia de primeiro caracterizar as funções que gozam de comparação com cones por cima e usar o fato que $u \in CCB(U) \Leftrightarrow -u \in CCA(U)$ para então podermos caracterizar as funções que gozam de comparação com cones e, em consequência, obter caracterizações das funções absolutamente minimizantes.

Teorema 2. *Seja $u \in C(U)$. Então as seguintes condições, quando impostas para todo $V \subset\subset U$ são equivalentes:*

1. *Se $L \in [0, \infty]$, $z \in \partial V$ e*

$$u(w) \leq u(z) + L|w - z| \quad \textit{para } w \in \partial V$$

então

$$u(x) \leq u(z) + L|w - z| \quad \textit{para } x \in V.$$

2. *Se $x \in V$, então $u(x) \leq \Psi(u \backslash \partial V)(x)$.*

3. *Se $a \in \mathbb{R}$ e $C(x) = a|x - z|$ onde $z \notin V$, então para $x \in V$*

$$u(x) - C(x) \leq \max_{\{w \,\in\, \partial V\}} (u(w) - C(w)).$$

4. *Se $v \in C(\overline{V})$ satisfaz $v = u$ sobre ∂V e $v \leq u$ em V, então*

$$\sup_{x \in V} (T_u(x)) \leq \sup_{x \in V} (T_v(x)).$$

As próximas condições também são equivalentes às acima, porém não envolvem o conjunto teste V :

5. *Se $y \in U$, então*

$$g^+(r) = \max_{|w-y|=r} u(w) \ \textit{é convexa para} \ 0 \leq r < dist(y, \partial U).$$

6. *Se $x, y \in U$ e $|x-y| \leq r < dist(y, \partial U)$, então*

$$u(x) \leq u(y) + \max_{|w-y|=r} \left(\frac{u(w)-u(y)}{r} \right) |x-y|.$$

7. *Se $\phi \in C^2(U)$ e $u-\phi$ tem um máximo local em $x^* \in U$, então*

$$\Delta_\infty \phi(x^*) := \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{x_i}(x^*)\phi_{x_j}(x^*)\phi_{x_i x_j}(x^*) \geq 0.$$

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2)

Observando que $z \in \partial V$, obtemos

$$u(w) \leq u(z) + L_{(u \backslash \partial V)}(\partial V)|w-z| \ \ \forall w \in \partial V.$$

Então supondo (1) temos

$$u(x) \leq u(z) + L_{(u \backslash \partial V)}(\partial V)|x-z| \ \ \forall x \in V \text{e} \ \forall \ z \in \partial V.$$

Logo se $x \in V$, podemos concluir que

$$u(x) \leq \inf_{z \in \partial V} (u(x) + L_{(u \backslash \partial V)}(\partial V)|x-z|) = \Psi(u \backslash \partial V)(x).$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Suponha que (2) vale mas (3) não vale. Então $u \notin CCA(U)$ e pela observação 3 existe um aberto não vazio $W \subset\subset U$ tal que $u = C$ sobre ∂W mas $u > C$ em W. Então, supondo 2, como $u = C$ sobre ∂W, temos $u \leq \Psi(C \backslash \partial W)$. Porém, pela proposição 1, $\Psi(C \backslash \partial W) = C$ uma vez que é uma extensão de C que preserva a constante Lipschitz. Logo $u \leq C$ em W, o que é uma contradição.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Seja $L \in [0, \infty]$, $z \in \partial V$ e

$$u(w) \leq u(z) + L|w-z| \ \text{ para } w \in \partial V.$$

Então, como $z \in \partial V$, $z \notin V$ dado que V é aberto. Por (3),

$$u(x) - L|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - L|w - z|) \leq u(z) \quad \text{para } x \in V.$$

Então

$$u(x) \leq u(z) + L|x - z| \quad \text{para} \quad x \in V$$

como queríamos.

(4) $\Rightarrow$ (3)

Se $u \notin CCA(U)$ sabemos que existe um aberto não vazio $W \subset\subset U$ e $C(x) = a|x - z| + b$ com $z \notin W$ tal que $u = C$ sobre ∂W mas $u > C$ em W. Mas por (4), com $v = C$, temos

$$T_u(x) \leq \sup_{x \in V}(T_u(x)) \leq \sup_{x \in V}(T_v(x)) \leq T_v(x) = |a| \quad \text{em } W.$$

Pela observação 1, temos

$$L_u(W) \geq L_u(\partial W) = L_C(\partial W) = |a|.$$

O intuito agora é mostrarmos a desigualdade oposta para concluirmos pela proposição 1 que $u = C$ em W e entrarmos em contradição.

Pois bem, pela observação 6 e o ítem 3 do lema 6, temos

$$|u(w) - u(z)| \leq |a||z - w| \quad \text{se} \quad [w, z] \subset W. \tag{3.13}$$

Por continuidade, (3.13) ainda vale para $(w, z) \subset W$, basta considerarmos as sequêncais $w_k \to w$ e $z_k \to z$ tais que $[w_k, z_k] \subset W$ e passarmos o limite em (3.13) com w_k, z_k no lugar de w, z. Assim nós afirmamos que (3.13) vale para todo $z, w \in W$ e então $L_u(w) \leq |a|$ como queríamos.

Sejam $z, w \in W$ e $(z, w) \subsetneq W$, então existem y_* e $y_{**} \in \partial W \cap [w, z]$ tal que $[w, y_*) \subset W$, $(y_{**}, z] \subset W$ e

$$|w - z| \leq |w - y_*| + |y_* - y_{**}| + |y_{**} - z|.$$

Basta tomar y_* e y_{**} respectivamente a primeira e a última intersecção do seguimento de reta ligando w a z com ∂W. Então

$$\begin{aligned} |u(y_*) - u(y_{**})| &\leq |u(w) - u(y_*)| + |u(y_*) - u(y_{**})| + |u(y_{**}) - u(z)| \\ &\leq |a||w - y_*| + |C(y_*) - C(y_{**})| + |a||y_{**} - z| \\ &\leq |a||w - y_*| + |a||y_* - y_{**}| + |a||y_{**} - z| = |a||w - z|. \end{aligned}$$

Nós temos usado (3.13) nos intervalos $[w, y_*]$ e $[y_{**}, z]$ assim como $u = C$ na ∂W.

(3) $\Rightarrow$ (5)

Note que esta implicação é (2.6) do lema 1.

(5) $\Rightarrow$ (6)

Prova do lema 1 e lema 5.

(6) $\Rightarrow$ (4)

Assuma que (6) vale mas (4) não. Então existe $V \subset\subset U$, $v \in C(\overline{V})$ e $x_0 \in V$ para os quais

$$u \geq v \text{ em } V,\ u = v \text{ sobre } \partial V \text{ e } T_u(x_0)\ > \sup_{x \in V} T_u(x_0). \tag{3.14}$$

Temos então $v \in C(\overline{V})$, $T_u(x_0)\ > \sup_{x \in V} T_u(x) \geq 0$. Podemos então, aplicar o lema 8 e obter a sequência $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V$ e um ponto $x_\infty \in \partial V$ com as dadas propriedades do lema 8, as quais junto com a observação 6, justificam

$$\begin{aligned} u(x_\infty) - u(x^0) &\geq S^+(x_0) \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j-1}| \quad > \quad \sup_{x \in V} T_v(x) \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j-1}| \Bigg) \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in [x_j, x_{j-1}]} T_v(x) \Bigg(|x_j - x_{j-1}| \Bigg) \;\geq\; \sum_{j=1}^{\infty} |v(x_j) - v(x_{j-1})| \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} v(x_j) - v(x_{j-1}) \;=\; v(x_\infty) - v(x^0). \end{aligned}$$

Uma vez que $u = v$ sobre ∂W, $u(x_\infty) = v(x_\infty)$, e a desigualdade acima implica que $u(x_0)\ < v(x_0)$, contrariando (3.14).

Provamos então que os seis primeiros ítens deste teorema são quivalentes. O ítem 7 do teorema 2 é equiavalente a u ser solução de $\Delta_\infty u \geq 0$ em U no sentido da viscosidade. Assim, pelo teorema 1, o sétimo ítem é equivalente ao terceiro e o o teorema está totalmente demostrado. $\square$

3.3 Caracterização das funções que gozam de comparação com cones.

O Teorema abaixo lista algumas caracterizações das funções absolutamente minimizantes. É pretendido que o teorema exiba em um lugar só, todos os tipos de equivalências de importância para nós e outros que somente iluminem alguma situação. Por isso, ele repete resultados já provados como o fato de u ser absolutamente minimizante se e somente se goza de comparação com cones. Porém é usado a definição no lugar dos nomes já definidos. Finalizaremos esta seção com um importante resultado, a proposição 4, a qual implica que todas as condições consideraradas neste teorema é completamente local; isto é, se todo ponto de um conjunto possui uma vizinhançã na qual uma das propriedades vale, então a propriedade valerá no conjunto.

Teorema 3. *Seja $u \in C(U)$. Então as seguintes condições, quando impostas para todo $V \subset\subset U$, são equivalentes:*

1. *Se $L \in [0, \infty]$ e*

$$|u(w) - u(z)| \leq L|w - y| \quad \text{para } w, z \in \partial V$$

   então

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \quad \text{para } x, y \in V.$$

2. *Se $x \in V$, então $\Lambda(u \backslash \partial V)(x) \leq u(x) \leq \Psi(u \backslash \partial V)(x)$.*

3. *Se $a \in \mathbb{R}$ e $C(x) = a|x - z|$ onde $z \notin V$, então para $x \in V$*

$$\min_{\{w \, \in \, \partial V\}} (u(w) - C(w)) \leq u(x) - C(x) \leq \max_{\{w \, \in \, \partial V\}} (u(w) - C(w)).$$

4. *Se $v \in C(\overline{V})$ satisfaz $v = u$ sobre ∂V, então*

$$\sup_{x \in V} (T_u(x)) \leq \sup_{x \in V} (T_v(x)).$$

   As próximas condições também são equivalentes as acima, porém não envolvem o conjunto teste V :

5. *Se $y \in U$, então*

$$(i) \quad g^+(r) = \max_{|w-y| \leq r} u(w) \text{ é convexa para } 0 \leq r < \operatorname{dist}(y, \partial U)$$

e

$$(ii) \quad g^{-}(r) = \min_{|w-y|\leq r} u(w) \text{ é côncava para } 0 \leq r \ < \operatorname{dist}(y, \partial U).$$

6. *Se* $y \in U$ *e* $|x-y| \leq r \ < dist(y, \partial U)$*, então*

$$(i) \quad u(x) \leq u(y) + \max_{|w-y|=r} \left(\frac{u(w)-u(y)}{r} \right) |x-y|$$

e

$$(ii) \quad u(x) \geq u(y) + \min_{|w-y|=r} \left(\frac{u(w)-u(y)}{r} \right) |x-y|.$$

7. *Se* $\phi \in C^2(U)$ *e* $u - \phi$ *tem um máximo local em* $x^* \in U$*, então*

$$\Delta_\infty \phi(x^*) := \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{x_i}(x^*)\phi_{x_j}(x^*)\phi_{x_i x_j}(x^*) \geq 0$$

e se $u - \phi$ *tem um máximo local em* $x^* \in U$*, então* $\Delta_\infty \phi(x_*) \leq 0$.

Demonstração. Note que os ítens (2), (3) ,(5), (6) e (7) podem ser dividos em dois ítens, onde um deles é um dos ítens presentes no teorema 2. Podemos então aplicar o teorema 2 para concluir as equivalências. Deixe-nos exemplificar isto, mostrando que (5) e (3) do teorema 3 são equivalentes. Com efeito, (5) (i) do teorema 3 é o mesmo que (5) do teorema 2. Assim, (5) (i) do teorema 3 vale se e somente se $u \in CCA(U)$ ((3) do teorema 2). Note que (5) (ii) do teorema 3 vale se e somente se (5)(i) do teorema 3 vale com $-u$ no lugar de u. Logo, analogamente, isto ocorre se e somente se $-u \in CCA(U)$, isto é, $u \in CCB(U)$. Finalmente, (5) do teorema 3, vale se e somente se $u \in CCA(U) \cap CCB(U)$, o que é equivalente a (3) do teorema 2. Assim, as equivalências entre os ítens (2), (3), (5), (6) e (7) seguirão de forma semelhante aplicando o teorema 2 a u e $-u$.

Para a equivalência entre (1) e (3), graças a proposição 2, podemos mostrar que a condição (1) é equivalente a $u \in AM(U)$. Sabemos que

$$|u(w) - u(z)| \leq L_u(\partial V)|w - z| \quad \text{para} \quad w, z \in \partial V.$$

Então supondo (1), temos

$$|u(x) - u(y)| \leq L_u(\partial V)|x - y| \quad \text{para} \quad x, y \in V.$$

Logo, $L_u(V) \leq L_u(\partial V)$ e $u \in AM(U)$ como desejávamos. Reciprocamente, supondo que $u \in AM(U)$ e que

$$|u(w) - u(z)| \leq L|w - y| \quad \text{para } w, z \in \partial V,$$

então $L_u(\partial V) \leq L$ e portanto,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq L_u(V)|x - y| \\ &= L_u(\partial V)|x - y| \\ &\leq L|x - y|, \end{aligned}$$

valendo (1). Enfim, para concluirmos o teorema, resta mostrarmos a equivalência entre (3) e (4). Bem; valendo (3), temos $u, -u \in CCA(U)$ então (4) do teorema 2 vale para u e $-u$. Sendo assim, para algum $V \subset\subset U$, $v \in C(\overline{V})$ e $v = u$ sobre ∂V, temos $V^+ = \{x \in V : u(x) > v(x)\}$, $V^- = \{x \in V; -u(x) > -v(x)\} \subset\subset U$, de modo que podemos aplicar (4) do teorema 2 e concluir que

$$T_u(x) \leq \sup_{V^+} T_v \leq \sup_V T_v \quad \text{para} \quad x \in V^+, \tag{3.15}$$
$$T_u(x) = T_{-u}(x) \leq \sup_{V^-} T_{-v} \leq \sup_{V^-} T_v \leq \sup_V T_v \quad \text{para} \quad x \in V^-.$$

Portanto, se $T_u(x_0) > \sup_V T_v$ em algum ponto $x_0 \in V$, devemos ter $u(x_0) = v(x_0)$. Assumindo isto, podemos escolher $r > 0$ suficientemente pequeno e x_1 tal que $|x_1 - x_0| = r$ e $u(x_1)$ maximiza u sobre a esfera de raio r e centro x_0. Então, dado que $u \in CCA(U)$, pelos lemas 6, $S^+(x_0) = T_u(x_0)$ e

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_0) &= S^+(x_0, |x_1 - x_0|)|x_1 - x_0| \\ &\geq S^+(x_0)|x_1 - x_0| > \sup_V T_v |x_1 - x_0| \\ &\geq v(x_1) - v(x_0) = v(x_1) - u(x_0). \end{aligned}$$

Logo $x_1 \in V^+$. Por outro lado, pelo lema 7,

$$T_u(x_1) = S^+(x_1) \geq S^+(x_0) = T_u(x_0) > \sup_V T_v,$$

contradizendo (3.15).

Para a recíproca, basta observar que, valendo (4) do teorema 3 para u, vale (4) do teorema 2 para u e $-u$. Assim, $u \in CCA(U) \cap CCB(U)$ obtendo-se então (3) do teorema 3.

□

Somente neste teorema, temos boa parte dos resultados relevantes almejados. Por exemplo, o ítem (1) é uma reelaboração do conceito das funções absolutamente minimizantes, no ítem (3), encontramos as propriedades de gozar de comparação com cones, o ítem (4) é exatamente a definição de uma função $u \in C(U)$ fortemente absolutamente minimizante em U e no ítem (7) podemos encontrar conexão entre os conceitos anteriores e a teoria de soluções no sentido da viscosidade.

Proposição 4. *Seja $u \in C(U)$. Assuma que para cada $x \in U$ existe uma vizinhança $V \subset\subset U$ de x tal que $u \in CCA(V)$. Então $u \in CCA(U)$.*

Demonstração. Nós somente esboçaremos a prova. Seja $y \in U$, então $u \in CCA(U_\delta)$ para um um $\delta > 0$ suficientemente pequeno e a equivalência entre 3 e 5 do teorema 2 nos permite concluir que

$$g^+(r) := \max_{\{w:|w-y|\leq r\}} u(w)$$

é convexa para $0 \leq r \leq \delta$. Seja R o maior número satisfazendo $0 \leq R \leq \operatorname{dist}(y, \partial U)$ tal que $g^+(r)$ é convexa sobre $[0, R)$. Se $R = \operatorname{dist}(y, \partial U)$ está feito. Assumindo que $R < \operatorname{dist}(y, \partial U)$, nós derivaremos uma contradição. Por compacidade e por u gozar de comparação com cones localmente, existe um número $0 < c < \operatorname{dist}(y, \partial U)$ tal que para $|w - y| = R$,

$$g_w^+(r) := \max_{\{z:|z-w|\leq r\}} u(z)$$

é convexa sobre $[0, c]$. Então por (1.4) do lema 1 obtemos

$$g^+(R + s) = \max_{w:|w-y|=R} g_w^+(s) \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq c. \tag{3.16}$$

Como o supremo de funções convexas é convexa $g^+(R + s)$ é convexa para $0 \leq s \leq c$. Nós vemos que $g^+(r)$ é convexa sobre $0 \leq r \leq R + c$, se e somente se, a derivada a esquerda de $g^+(r)$ em $r = R$ é menor ou igual a derivada a direita de $g^+(r)$ em $r = R$. Mas, se $w, |w - y| = R$ é escolhido tal que $g^+(R) = u(w)$ a derivada de $g_w^+(s)$ em 0 a qual é menor ou igual a derivada de $g^+(r)$ em $r = R$ por (3.16), goza da estimativa desejada pelo (pela prova do) lema 7. Assim, novamente pela equivalência entre 3 e 5 do teorema 2 temos que $u \in CCA(U)$.

□

E segue que todas as propriedades dos teoremas 2 e 3 são locais, isto é, elas valem se e somente se, valem em uma vizinhança de todo ponto de U.

Capítulo 4

TEOREMA DE EXISTÊNCIA

Retomando um pouco a discussão sobre problemas de extensões. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f \in C(U)$. Desejamos encontrar u com as seguintes propriedades:

$$u \in C(\overline{U}) \cap AM(U) \text{ e } u(x) = f(x) \text{ para } x \in U.$$

O teorema de existência abaixo nos dá um conjunto de condições sobre as quais podemos resolver o problema de extensão acima.

Teorema 4 (Teorema de existência)**.** *Seja U subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $0 \in \partial U$ e $f \in C(\partial U)$. Sejam A^+, $A^-, B^+, B^-, A^+ \geq B^+$ e*

$$A^-|x| + B^- \leq f(x) \leq A^+|x| + B^+ \text{ para } x \in \partial U. \tag{4.1}$$

Então existe $u \in C(\overline{U}) \cap AM(U)$ tal que $u = f$ sobre ∂U a qual satisfaz adicionalmente

$$A^-|x| + B^- \leq u(x) \leq A^+|x| + B^+ \text{ para } x \in \overline{U}. \tag{4.2}$$

Observação 8. *A hipótese $0 \in \partial U$ não é restritiva, poderíamos por $z \in \partial U$ e $|x - z|$ no lugar de $|x|$.*

A estratégia para obtermos a função u que o teorema garante será utilizar o lema 4 em um método de Perron. Para isso, presisaremos de uma família não vazia de funções localmente uniformemente limitada de funções que gozem de comparação com cones por cima e possuam um certo tipo de comportamento sobre a fronteira do domínio. Para a demonstração, recorreremos a mais dois lemas.

Lema 9. *As funções* $\underline{h}, \overline{h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *dadas por:*

$$\underline{h}(x) = \sup\{\underline{C}(x) = a|x - z| + b,\ a\ < A^-,\ z \in \partial U, \underline{C} \leq\ f\ \ \textit{sobre } \partial U\},$$

$$\overline{h}(x) = \inf\{\overline{C}(x) = a|x - z| + b,\ a\ > A^+,\ z \in \partial U, \overline{C} \geq\ f\ \ \textit{sobre } \partial U\}$$

são bem definidas, contínuas e $\underline{h} \leq \overline{h}$ *sobre* $\mathbb{R}^n$. *Além disso,*

$$A^-|x| + B^- \leq \underline{h}(x) \leq \overline{h}(x) \leq A^+|x| + B^+ \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \tag{4.3}$$

e

$$\underline{h} = \overline{h} = f \text{ sobre } \partial U. \tag{4.4}$$

Finalmente, $\underline{h} \in CCA(U)$ *e* $\overline{h} \in CCB(U)$.

Demonstração. Fixe $z \in \partial U$, $\epsilon\ > 0$ e $\delta\ > 0$ tal que $f(x)\ < f(z) + \epsilon$ para todo $x \in B_\delta(z) \cap \partial U$. Escolha $a\ > \max\{A^+, 0\}$ tal que

$$f(z) + \epsilon + a\delta\ > \max_{|x-z|\leq\delta}(A^+|x| + B^+) \tag{4.5}$$

e, se $z \neq 0$,

$$f(z) + \epsilon + a|z|\ > B^+. \tag{4.6}$$

Isto claramente é possível.

A intenção é mostrarmos que $\overline{C}(x) := f(z) + \epsilon + a|x - z|$ é um dos cones sobre o qual $\overline{h}$ é o ínfimo. Pois se assim fizermos, como $\overline{C}(z) = f(z) + \epsilon$, concluímos que $\overline{C} \leq f$ sobre ∂U e como trivialmente $\overline{h} \geq f$ sobre ∂U, concluímos (4.4) para $\overline{h}$. Para isso, note que $a\ > \max\{A^+, 0\}$ e que

$$f(x)\ < f(z) + \epsilon \leq \overline{C}(x) \quad \text{para todo} \quad x \in B_\delta(z) \cap \partial U.$$

Assim, para mostrarmos que $\overline{C} \geq f$ sobre ∂U, é suficiente mostrarmos que

$$\overline{C}(x) = f(z) + \epsilon + a|x - z| \geq C^+(x) := A^+|x| + B^+ \text{ em } \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\delta(z)}.$$

Supondo o contrário, o conjunto $W = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\delta(z)} : \overline{C}(x)\ < C^+(x)\}$ é aberto e limitado. Aberto pois funções cones são contínuas. Mostremos então que é limitado. Note que

$$\overline{C}(x) \geq C^*(x) := f(z) + \epsilon + a|x| - a|z|$$

e

$$\begin{aligned} & C^*(x) \ > C^+(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(z) + \epsilon + a|x| - a|z| \ > A^+|x| + B^+ \\ \Leftrightarrow\ & (a - A^+)|x| \ > B^+ - f(z) - \epsilon + a|z| \\ \Leftrightarrow\ & |x| \ > \tfrac{B^+ - f(z) - \epsilon + a|z|}{a - A^+}. \end{aligned}$$

Assim, pondo $C = \frac{B^+ - f(z) - \epsilon + a|z|}{a - A^+}$, temos que

$$|x| \ > C \ \Rightarrow \ \overline{C}(x) \geq C^+(x),$$

na forma contrapositiva isto significa que

$$\overline{C}(x) \ < C^+(x) \quad \Rightarrow \ |x| \leq C.$$

Note que $\overline{B_\delta(z)} \cap \overline{W} = \emptyset$. De fato, como $W \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\delta(z)}$, temos que $\overline{B_\delta(z)} \cap \overline{W} \subset \partial B_\delta(z)$. Porém, por (4.5), se $x \in \partial B_\delta(z)$, temos

$$\overline{C}(x) \geq f(z) + \epsilon + a\delta \ > \max_{|y-z| \leq \delta} C^+(y) \geq C^+(y) \ \ \forall y \in \overline{B_\delta(z)}.$$

Logo, $x \notin \overline{B_\delta(z)}$. E de fato, $\overline{B_\delta(z)} \cap \overline{W} = \emptyset$, o que implica que se $x \in \overline{W}$, existem sequências (x_k) em W, (y_k) em $\mathbb{R}^n \backslash W$, ambas em $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\delta(z)}$, convergindo para x (pois não pode haver sequência em $\overline{B_\delta(z)}$ convergindo para x). Então

$$\overline{C}(x) = \lim \ \overline{C}(x_k) \leq \lim \ C^+(x_k) = C^+(x),$$

$$\overline{C}(x) = \lim \ \overline{C}(y_k) \geq \lim \ C^+(y_k) = C^+(y)$$

e, portanto, $\overline{C} = C^+$ na ∂W. Como $z \notin W$, pois $W \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\delta(z)}$ e $0 \notin W$ por (4.6), temos

$$L_{\overline{C}}(W) = L_{\overline{C}}(\partial W) = L_{C^+}(\partial W) = L_{C^+}(W)$$

baseado no exemplo 2. Logo, pela proposição 1, $\overline{C} \equiv C^+$ em W, contradição.

Considerando agora o cone $\overline{C}(x) = (A^+ + \epsilon)|x| + B^+$, obtemos $\overline{h} \leq C^+$ como em (4.3). Considerações análogas são obtidas para $\underline{h}$.

Para ver que $\underline{h} \leq \overline{h}$, nós tomamos quaisquer dois cones $\overline{C}(x) = \overline{a}|x - \overline{z}| + \overline{b}$ e $\underline{C} = \underline{a}|x - \underline{z}| + \underline{b}$ como na definição de $\overline{h}$ e $\underline{h}$, respectivamente. Argumentos como acima mostram que com as hipóteses, o conjunto W^* onde $\underline{C} \ > \overline{C}$ é aberto e limitado. Com efeito, como $\overline{a} \ > A^+ \geq A^- \ > \underline{a}$, supondo primeiramente que $\underline{a} \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} & \overline{C}(x) \geq \underline{C}(x) \\ \Leftrightarrow\ & \overline{a}|x - \overline{z}| + \overline{b} \geq \underline{a}|x - \underline{z}| + x\underline{b} \geq \underline{a}(|x - \overline{z}| - |\overline{z} - \underline{z}|) + \underline{b} \\ \Leftrightarrow\ & (\overline{a} - \underline{a})|x - \overline{z}| \geq -\underline{a}|\overline{z} - \underline{z}| + \underline{b} - \overline{b} \\ \Leftrightarrow\ & |x - \overline{z}| \geq \frac{-\underline{a}|\overline{z} - \underline{z}| + \underline{b} - \overline{b}}{\overline{a} - \underline{a}}. \end{aligned}$$

Assim para uma constante positiva $C > \dfrac{-\underline{a}|\overline{z}-\underline{z}|+\underline{b}-\overline{b}}{\overline{a}-\underline{a}}$ temos

$$x \notin B_C(\overline{z}) \Rightarrow x \notin W^*.$$

Na forma contrapositiva $x \in W^* \Rightarrow x \in B_C(\overline{z})$. Portanto W^* é limitado. Analogamente, supondo $\underline{a} < 0$, temos

$$\begin{aligned} & \overline{C}(x) \geq \underline{C}(x) \\ \Leftrightarrow\ & \overline{a}|x-\overline{z}| + \overline{b} \geq \underline{a}|x-\underline{z}| + +\underline{b} \\ & \geq \underline{a}(|x-\overline{z}| + |\overline{z}-\underline{z}|) + \underline{b} \\ \Leftrightarrow\ & (\overline{a}-\underline{a})|x-\overline{z}| \geq \underline{a}|\overline{z}-\underline{z}| + \underline{b} - \overline{b} \\ \Leftrightarrow\ & |x-\overline{z}| \geq \frac{\underline{a}|\overline{z}-\underline{z}| + \underline{b} - \overline{b}}{\overline{a}-\underline{a}}. \end{aligned},$$

Como $\underline{C} \leq f \leq \overline{C}$ sobre ∂U e $\overline{z}, \underline{z} \in \partial U$, W^* não comtém $\overline{z}$ e $\underline{z}$. Além disso, como $\underline{C} = \overline{C}$ sobre ∂W^* novamente pela proposição 1, $\underline{C} \equiv \overline{C}$ em W^*, contradição. Daí $W^* = \emptyset$, isto é, $\underline{C} \leq \overline{C}$. Então temos $\underline{h} \leq \overline{h}$ e, em particular, $\underline{h}$ e $\overline{h}$ são localmente limitados pois $\underline{h}$ é limitado inferiormente por alguns cones e $\overline{h}$ é limitado superiormente por alguns outros cones. Segue então do lema 4, que $\underline{h} \in CCA(U) \cap C(U)$ e por uma adaptação deste mesmo lema $\overline{h} \in CCB(U) \cap C(U)$.

Resta checar que $\underline{h}$ e $\overline{h}$ são contínuas na ∂U. Pois bem; $\overline{h}$ é semicontínua superiormente uma vez que é o ínfimo de funções contínuas. Analogamente, $\underline{h}$ é semicontínua inferiormente em $\mathbb{R}^n$. Assim , usando que $\underline{h} \leq \overline{h}$ e $\underline{h} = \overline{h} = f$ na ∂U, nós temos

$$f(x) \leq \liminf_{y\to x} \underline{h}(y) \leq \liminf_{y\to x} \overline{h}(y) \leq \limsup_{y\to x} \overline{h}(y) \leq f(x)\ \forall x \in \partial U \ \therefore\ \overline{h} \in C(\partial U)$$

e

$$f(x) \leq \liminf_{y\to x} \underline{h}(y) \leq \limsup_{y\to x} \underline{h}(y) \leq \limsup_{y\to x} \overline{h}(y) \leq f(x)\ \forall x \in \partial U \ \therefore\ \underline{h} \in C(\partial U).$$

□

Lema 10. *Suponha que $u \in C(U) \cap CCA(U)$ porém $u \notin CCB(U)$. Então existe um conjunto não vazio $W \subset\subset U$ e uma função cone $C(x) = a|x-z| + b$ com $z \notin W$ tal que $u = C$ sobre $\partial W, u < C$ sobre W e a função u^* definida por*

$$u^* = u \ \text{ sobre } \ U \backslash W \quad \text{e} \quad u^* = C \ \text{ sobre } \ W,$$

satisfaz $u^* \in CCA(U)$. Além disso, se u é lipschitiz contínua em U, então u^* também é e $L_{u^*}(U) \leq L_u(U)$.

Demonstração. Se $u \notin CCB(U)$ existirá $V \subset\subset U, a \in \mathbb{R}$ e $z \notin V$ tal que

$$W = \{x \in V : u(x) \ < C(x) := a|x - z| + \min_{\{w \in \partial V\}} (u(w) - a|w - z|)\}$$

satisfaz as condições do lema. E, supondo que $u^* \notin CCA(U)$, analogamente consrói-se W^* e $C^*(x) = a^*|x - z^*| + b^*$ onde $z^* \notin W^*$, $u^* = C^*$ sobre ∂W^* e $u^* \ > C^*$ em W^*. Bem, pela observação 2,

$$u \in CCA(U), u \leq u^* \text{ e } u^* = C^* \text{ sobre } \partial W^* \ \Rightarrow u \leq C^* \text{ em } W^*. \tag{4.7}$$

Então $W^* \subset W$. De fato, seja $x \notin W$, se $x \in W^*$, pela definição de u^* e por (4.7) $u^*(x) = u(x) \leq C^*(x)$, contrariando o fato que $u^* \ > C^*$ em W^*. Logo $x \notin W \Rightarrow x \notin W^*$. Como $u^* = C$ sobre W e $W^* \subset W$, por continuidade, $u^* = C$ sobre ∂W^*. Logo $C^* = u^* = C$ sobre ∂W^*. Como $z \notin W$ e $W^* \subset W$, $z \notin W^*$ assim, como no exemplo 2,

$$L_C(W^*) = L_C(\partial W^*) = L_{C^*}(\partial W^*) = L_{C^*}(W^*) = |a^*|.$$

E novamente pela proposição 1 $C^* \equiv C$ em W^*, o que nos leva à $u^* = C^*$ em W^* (já que $u^* = C$ sobre W e $W^* \subset W$), contradição. Para finalizar, note que

$$L_{u^*}(W) = L_C(W) = L_C(\partial W) = L_u(\partial W) \leq L_u(U) \quad \text{e}$$

$$L_{u^*}(U) = \max\{L_{u^*}(W), L_{u^*}(U \backslash W) = L_u(U \backslash W)\} \leq L_u(U).$$

Mostrando que se u é lipschtz contínua em U, u^* também é.

□

PROVA DO TEOREMA DE EXISTÊNCIA

Considere

$$u = sup\{v \in CCA(U) : \underline{h} \ \leq v \leq \overline{h}\}.$$

Observe que pelo lema 9, o conjunto a direita contém $\underline{h}$, então u está bem definida e pelo lema 4 $u \in C(U) \cap CCA(U)$. Por (4.4), $u = f$ sobre ∂U e $u \in C(\overline{U})$. Se $u \in CCB(U)$, então $u \in AM(U)$ e satisfaz as condições do teorema. Caso contrário, o lema acima nos dá $u^* \in CCA(U)$ coincidindo com u a menos de um conjunto não vazio $W \subset\subset U$ sobre o qual $u^* = C \ > u$. Bem, $\underline{h} \leq u \leq u^*$. Afirmamos também que $u^* \leq \overline{h}$. Com efeito, do contrário teríamos que o conjunto W^* dos pontos de U onde $u^* \ > \overline{h}$ seria um précompacto não vazio de U contido em W, pois em $U \backslash W$, $u^* = u \leq \overline{h}$. Como $u^* = C$ sobre W e $W^* \subset W$, por continuidade, $u^* = C$ sobre ∂W^*. Assim temos $\overline{h} = u^* = C$

sobre ∂W^* e, uma vez que $\overline{h} \in CCB(U)$, pela observação 2 , $\overline{h} \geq C$ em W^*. Por outro lado, $u^* = C$ em W e W contém W^*, logo $u^* = C \leq \overline{h}$ em W^*, contradição . Logo $W^* = \emptyset$, concluíndo que $u^* \leq \overline{h}$ e portanto u^* contraria a maximalidade de u. Então devemos ter de fato $u \in CCB(U)$ resolvendo o problema de extensão do teorema.

Capítulo 5

A QUESTÃO DA UNICIDADE

Neste capítulo, enunciaremos e provaremos o teorema de existência. Durante a prova, encontraremos seções onde estarão presentes algumas ferramentas de modo que os resultados possam quase todos ser encontrados no texto. Em particular, um leitor não experiente em equações diferencias parciais poderá acompanhar a leitura.

Teorema 5. *Seja U limitado, $|.|$ a norma euclidiana, $u \in CCA(U) \cap C(\overline{U})$, $v \in CCB(U) \cap C(\overline{U})$ e $u \leq v$ sobre ∂U. Então $u \leq v$ em U.*

Observação 9. *Em particular, quando $|.|$ é a norma euclidiana e U é limitado, se $u, v \in AM(U) \cap C(\overline{U}) = CC(U) \cap C(\overline{U})$ coincidem sobre a fronteira, então $u \equiv v$. Baseado nisto uma solução do teorema de existência é unica. Neste sentido, temos então unicidade.*

Observação 10. *O teorema não vale se retirarmos a hipótese de que U é limitado. Com efeito, para ilustrar, daremos o seguinte contraexemplo. Sejam $U = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty), K = \partial U = \{-1, 0, 1\}$ e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $f(-1) = f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Podemos tomar, por exemplo, os cones $|x|, -|x|$ para limitar $f \in C(U)$ superiormente e inferiormente. Porém vemos que $u_1, u_2 : \mathbb{R}^n = \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\begin{array}{llll} u_1(x) = 0 \quad \textit{para} \quad x \leq 0, & u_1(x) = x \quad \textit{para} \quad 0 < x \leq 1, & \textit{e } u_1(x) = 1 & \textit{para } 1 < x. \\ u_2(x) = 0 \quad \textit{para} \quad x \leq 0, & u_2(x) = x \quad \textit{para} \quad 0 < x. & & \end{array}$$

ambas resolvem o problema de extensão do teorema de existência .

A prova é surpreendentemente sutil e complexa. Algumas ferramentas padrões da teoria de solução no sentido da viscosidade são utilizadas na prova. No entanto, damos uma (quase) auto-suficiente apresentação que não se refere a essa teoria. As ferramentas empregadas são interessantes e algunas delas são elegantes. A discussão é então consideravelmente mais longa do que seria se estas ferramentas fossem tomadas como conhecidas.

Para orientar o leitor, apresentamos uma prévia do que virá a seguir. A prova do Teorema 5 confia no fato de que $u \in CCA(U)$ e $v \in CCB(U)$, então satisfazem as desigualdades derivadas na seção 3.1 nos pontos onde são duas vezes diferenciável. Em particular

$$\Delta_\infty u(x) \leq 0 \leq \Delta_\infty u(x) \tag{5.1}$$

sempre que x é um ponto no qual ambos u e v são duas vezes diferenciáveis. Vamos assumir por um tempo que $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, (5.1) vale e $u \leq v$ sobre ∂U. Primeiro observe que se pudermos mostrar $u \leq v$ na ∂U sob a hipótese mais forte de que $u - v \leq -\gamma \ < 0$ na ∂U onde $\gamma \ > 0$, estará feito. Com efeito, sob as hipóteses do teorema $u^* = u - \gamma \in CCA(U) \cap C(\overline{U})$ e $u^* - v \leq -\gamma$ na ∂U. Então $u^* = u - \gamma \leq v$ em U o que implica $u \leq v$ em U fazendo $\gamma \downarrow 0$.

Portanto, daqui para frente assumiremos que $\gamma \ > 0$ e

$$u(x) - v(x) \leq -\gamma \ < 0 \text{ na } \partial U. \tag{5.2}$$

Podemos assumir isto pois, sendo U limitado ∂U é compacto. Supondo por contradição que não temos $u \leq v$ em U, o máximo de $u - v$ no compacto $\overline{U}$ ocorre em um ponto $x^0 \in U$ e podemos por

$$M_0 := u(x_0) - v(x_0) = \max\{u(x) - v(x); x \in U\} \ > 0. \tag{5.3}$$

Do cálculo temos então

$$Du(x_0) = Dv(x_0) \qquad \text{e} \qquad D^2u(x_0) \leq D^2v(x_0). \tag{5.4}$$

Assim

$$\langle D^2u(x_0)Du(x_0), Du(x_0)\rangle = \langle D^2u(x_0)Dv(x_0), Dv(x_0)\rangle \leq \langle D^2v(x_0)Dv(x_0), Dv(x_0)\rangle.$$

Existiria então uma contradição se alguma das desigualdades de (5.1) fosse estrita neste ponto x_0. No intuito de forçar isto, tentaremos uma mudança de variável. Seja $\lambda \ > 0$ suficientemente pequeno tal que $2\lambda u \ < 1$ (isto é possível pois u é contínua no compacto $\overline{U}$). Defina w por $w \leq \lambda^{-1}$ e

$$u(x) = w(x) - \frac{\lambda}{2}w(x)^2 =: G(w(x)); \tag{5.5}$$

equivalentemente

$$w = \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - 2\lambda u}) =: H(u). \tag{5.6}$$

Por (5.6) $w = \dfrac{2u}{1 + \sqrt{1 - 2\lambda u}}$ então $w \downarrow u$ uniformemente quando $\lambda \downarrow 0$. Em virtude de (5.2) e (5.3) para λ pequeno, $w \leq v$ na ∂U e o máximo de $w - u$ sobre $\overline{U}$ é atingido em U. Deixe-nos ainda denotar tal ponto de máximo por x_0. Usando (5.5) nós encontramos

$$Du = G'(w)Dw, \quad D^2u = G'(w)D^2w + G''(w)(Dw \otimes Dw)$$

onde $p \otimes q$ é a matrix definda por $(p \otimes q)z = \langle q, z \rangle p$. Portanto

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta_\infty u &= \langle D^2uDu, Du \rangle \\ &= \langle (G''(w)(Dw \otimes Dw) + G'(w)D^2w)G'(w)Dw, G'(w)Dw \rangle \\ &= G''(w)G'(w)^2|Dw|^4 + G'(w)^3\langle D^2wDw, Dw \rangle. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\Delta_\infty w = \langle D^2wDw, Dw \rangle \geq -\frac{G''(w)}{G'(w)}|Dw|^4 = \frac{\lambda}{1 - \lambda w}|Dw|^4. \tag{5.7}$$

Assim, se $Dw(x_0) \neq 0$ temos $\Delta_\infty w(x_0) > 0$ e encontramos a contradição que queríamos.

Existem duas principais dificuldades para transformar o esboço acima em uma prova. Em primeiro lugar, há o fato de que nós sabemos que as soluções de $\Delta_\infty u = 0$ no sentido da viscosidade não precisam ser duas vezes diferenciável em todo ponto (ver exemplo 6). Na verdade, nós nem sequer sabemos se é diferenciável em todo ponto, tudo o que sabemos é que subsoluções são localmente Lipschitz. Em segundo lugar, mesmo nos pontos onde w acima pode ser duas vezes diferenciável, nós não sabemos se $Dw \neq 0$. Superar estas dificuldades é uma tarefa exigente. Trata-se de:

- Em primeiro lugar, u e v serão aproximados por funções melhores que ainda satisfarão as hipóteses do teorema (embora U mude um pouco). Isto é feito por um processo de convexicação chamado sup convolução que fornece novas funções u, v tais que existe uma constante K para a qual $u(x) + (K/2)|x|^2$ e $-v(x) + (K/2)|x|^2$ são convexas. Diz-se que $u, -v$ são semiconvexas com constante K, também diz-se que v é semicôncava com constante K. Este processo de aproximação é apresentado na seção 5.1.

- Propriedades de regularidade de funções convexas e elementos do cálculo de subdiferenciais os quais serão apresentados. De particular interesse é que uma função é semiconvexa é diferenciável nos seus pontos de máximo local e, grosseiramente falando, o gradiente é contínuo em um tal ponto. Também o caso que funções semiconvexas e semicôncavas são duas vezes dieferenciáveis em quase todos os pontos de forma que as desigualdades que envolvem valores do operador infinito Laplaciano como derivados na seção 3.1 podem ser usadas nestes pontos. Finalmente, os pontos onde u é duas vezes difernciável podem não incluir os pontos de máximo, mas isto pode ser corrigido por uma perturbação de optimização- pequenas perturbações lineares podem forçar esta coincidência. O esboço da teoria da análise convexa que precisamos é apresentado na seção 5.2. As considerações da pertubação de otimização aparecem na seção 5.3.

- Grosseiramente falando, o argumento quebra-se em dois casos dependendo se Dw anula-se em todos os pontos de máximo de $w - v$ ou não. Se Dw não é zero em um ponto de máximo de $w-v$ onde w é duas vezes diferenciável, será feito. Se for zero, ainda mais, se isso é verdade para todas pequenas translações de w, então usamos o lema 5 para mostrar que máximos positivos interiores forçam $w - v$ ser constante, o qual novamente é uma contradição. Estas considerações também são explicados na seção 5.3.

Para completar esta orientação, nós também recordamos a característica da equação do infinito Laplaciano ilustrada pelas funções

$$u_1(x) = |x|, \qquad u_2(x) = x_1.$$

Ambas são soluções clássicas do infinito Laplaciano fora da origem e $u_1 \geq u_2$. No entanto, $u_1 = u_2$ sobre $\{(x, 0, \ldots, 0) : x \in \mathbb{R}^+\}$. Assim, o máximo de $u_1 - u_2$ digamos, sobre $|x-(2,0,\ldots,0)| \leq 1$ é zero e zero é atingido em todo ponto do segmento de reta ligando $(1, 0, \ldots, 0)$ e $(3, 0, \ldots, 0)$. Ou seja, não é verdade que a existência de máximos interiores implica que diferença de soluções clássicas do infinito Laplaciano é constante.

Apresentaremos agora uma notação com respeito a pertubações de um conjunto limitado U, a saber: translações U^h e aproximações por dentro U_δ , onde $h \in \mathbb{R}^n$ e $\delta\ > 0$, definidas por

$$U^h := \{x - h : x \in U\}, \quad U_\delta := \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial U)\ > \delta\}.$$

Se $w(x) = u(x + h)$ então, claramente $u \in CCA(U)$ se, e somente se, $w \in CCA(U^h)$. Aplicaremos a u e v no Teorema 5, operações sobre funções $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$, as quais exigirá de nós, mudarmos U um pouco, serão definidas na próxima seção. Grosseiramente falando, antes de terminarmos, U provavelmente será substituído por $U_\delta \cap U^h$, para convenientes δ, h.

5.1 Propriedades de Sup-Convolução

Definição 6. *Seja $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e $\epsilon > 0$. Então, para $x \in \mathbb{R}^n$*

$$w^\epsilon(x) := \sup_{y \in U}\Big(w(y) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon}\Big)$$

e

$$w_\epsilon(x) := \inf_{y \in U}\Big(w(y) + \frac{|x-y|^2}{2\epsilon}\Big).$$

Algumas propriedades de u^ϵ(as chamadas sup-convoluções de u), serão coletadas na proposição a seguir. Analogamente, propriedades de v_ϵ (chamadas inf-convoluções de v) seguem de modificações naturais da prova na proposição a seguir e usando o fato que $v_\epsilon = -(-v^\epsilon)$. Essas propriedades nos permitirão supor que u é semiconvexa (ver os seguintes comentários da prova da proposição) e v é semicôncava para provar o Teorema 5

Proposição 5. *Seja $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $|u(x)| \leq A$ para $x \in U$, onde U é limitado. Então*

$$x \to u^\epsilon(x) + \frac{1}{2\epsilon}|x|^2 \quad \textit{é convexa sobre } \mathbb{R}^n \tag{5.8}$$

e

$$u^\epsilon(x) \geq u(x) \textit{ para } x \in U. \tag{5.9}$$

Se também $u \in CCA(U)$ e $\delta > 2\sqrt{A\epsilon}$, então

$$u^\epsilon \in CCA(U_\delta). \tag{5.10}$$

Além disso,

$$L_{u^\epsilon}(\overline{U}) \leq \frac{2\sup_{y\in U}|y|}{\epsilon}. \tag{5.11}$$

Finalmente, se $u \in C(\overline{U})$, então para $\delta > 0$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} u^\epsilon(x) = u(x) \textit{ uniformemente para } x \in U_\delta. \tag{5.12}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) + \frac{1}{2\epsilon}|x|^2 &= \sup_{y\in U}\Big(u(y) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}|x|^2\Big) \\ &= \sup_{y\in U}\Big(u(y) - \frac{|y|^2}{2\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\langle x, y\rangle\Big). \end{aligned}$$

Isto exibe a aplicação $x \mapsto u^\epsilon(x) + \frac{1}{2\epsilon}|x|^2$ como o supremo das funções lineares $x \mapsto u(y) - \frac{|y|^2}{2\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\langle x, y\rangle$, logo é convexa. Daí, segue (5.8). Além disso cada uma destas aplicações tem $\sup\{\frac{|y|}{\epsilon} : y \in U\}$ como uma constante lipschitz sobre $\mathbb{R}^n$, então $u^\epsilon(x) + \frac{1}{2\epsilon}|x|^2$ também. Daí segue (5.10). Uma vez que $x \in U$, podemos tomar $y = x$ na definição de u^ϵ e obter (5.9). Assim o supremo na definição u^ϵ não é alterdo se considermos somente aqueles y's tais que

$$u(y) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} \geq u(x).$$

Para estes y's, temos $\frac{|x-y|^2}{2\epsilon} \leq u(y) - u(x) \leq 2A$. Portanto, se $x \in U$, então

$$u^\epsilon(x) := \sup_{\{y\in U:|x-y|\leq 2\sqrt{A\epsilon}\}}\left(u(y) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon}\right).$$

Em consequência, se $\delta > 2\sqrt{A\epsilon}$ e $x \in U_\delta$, então

$$u^\epsilon(x) = \sup_{\{|z|\leq 2\sqrt{A\epsilon}\}}\left(u(x+z) - \frac{|z|^2}{2\epsilon}\right).$$

A afirmação (5.10) segue então por notar que as aplicações $x \to u(x+z) - \frac{|z|^2}{2\epsilon}$ onde $|z| \leq 2\sqrt{A\epsilon}$ gozam de comparação com cones por cima em U_δ se $u \in CCA(U)$ e logo após invocarmos o lema 4. Como u é contínua, a aplicação $z \to u(x+z) - \frac{|z|^2}{2\epsilon}$ onde $\delta > 2\sqrt{A\epsilon}$ e $x \in U$ atinge seu máximo no compacto $\{|z| \leq 2\sqrt{A\epsilon}\}$ .Logo existe $z_x; |z_x| \leq 2\sqrt{A\epsilon}$ tal que

$$u^\epsilon(x) = u(x+z_x) - \frac{|z_x|^2}{2\epsilon} \geq u(x).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{|z_x|^2}{2\epsilon} &\leq u(x+z_x) - u(x) \\ &\leq \sup\{|u(x+h) - u(x)| : x, x+h \in U, |h| \leq 2\sqrt{A\epsilon}\} =: \rho(\epsilon) \end{aligned}$$

onde $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \rho(\epsilon) = 0$ pela continuide uniforme de u no compacto $\overline{U}$. Finalmente, segue que

$$\begin{aligned} |u^\epsilon(x) - u(x)| &= |u(x + z_x) - \frac{|z_x|^2}{2\epsilon} - u(x)| \\ &\leq |u(x + z_x) - u(x)| + \frac{|z_x|^2}{2\epsilon} \leq 2\rho(\epsilon), \end{aligned}$$

estabelecendo então (5.12). □

Definição 7. *Dizemos que $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é semiconvexa com constante K quando*

$$x \mapsto w(x) + \frac{K}{2}|x|^2$$

é convexa. Analogamente, $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicôncava com constante K quando

$$x \mapsto w(x) - \frac{K}{2}|x|^2$$

é côncava.

Pela proposição 5 as funções w^ϵ, w_ϵ são respectivamente semiconvexas e semicôncavas com constante $1/\epsilon$.

A prova do teorema 5 consiste em derivar uma contradição com as hipóteses (5.1), (5.2) e (5.3). Em vista de (5.10), (5.11) e (5.12) da proposição 5, (5.2) e (5.3), nós podemos substituir u por u^ϵ, v por v^ϵ e U por U_δ para convinientes $\delta > 0, \epsilon > 0$ e nós teremos as hipóteeses satisfeitas embora γ, M_0 mudem um pouco.

Isto é, podemos assumir que $u \in CCA(U) \cap C(\overline{U})$ é a restrição de uma função semiconvexa sobre $\mathbb{R}^n$, $v \in CCB(U) \cap C(\overline{U})$ é a restrição de uma função semicôncava sobre $\mathbb{R}^n$ onde valem (5.1),(5.2) e (5.3).

5.2 Elementos de análise convexa

Aqui constará alguns fatos elementares sobre uma função contínua convexa $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. O epígrafo de w

$$E(w) = \{(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r \geq w(x)\}$$

é um subconjunto fechado convexo do $\mathbb{R}^{n+1}$ e portanto cada ponto de fronteira $(y, w(y))$ é um hiperplano suporte. Isto é, existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$w(x) \geq w(y) + \langle p, x - y \rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.13}$$

Podem existir muitos tais p's, como no caso $n = 1, w(x) = |x|$ e $y = 0$. A coleção de todos estes pontos é chamada a subdiferencial de w em y e é denotada por $\partial w(y)$. Isto é

$$\partial w(y) = \{p \in \mathbb{R}^n : \text{vale } (5.13)\}. \tag{5.14}$$

Se $y_j \to y, p_j \to p, p_j \in \partial w(y_j)$, então passando o limite em

$$w(x) \geq w(y_j) + \langle p_j, x - y_j \rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

nós deduzimos que $p \in \partial w(y)$. Este fato é conhecido por dizer que (o gáfico de) ∂w é fechado. No caso em que $\partial w(y)$ contém exatamente um elemento, nós dizemos que ∂w é de valor único em y. Neste caso temos

$$\lim_{r \downarrow 0} \sup_{x \in B_r(y)} \{|q - \partial w(y)| : q \in \partial w(x)\} = 0. \tag{5.15}$$

Este fato é conhecido como continuidade parcial do gradiente. Outro fato, é que se ∂w é de valor único em y, então w é diferenciável em y com $Dw(y) = \partial w(y)$. De fato, nós temos

$$w(x) \geq w(y) + \langle \partial w(y), x - y \rangle$$

e para $q \in \partial w(x)$,

$$\begin{aligned} w(y) &\geq w(x) + \langle q, y - x \rangle \\ &= w(x) + \langle \partial w(y), y - x \rangle + \langle q - \partial w(y), y - x \rangle. \end{aligned}$$

Assim

$$0 \leq w(x) - w(y) - \langle \partial w(y), x - y \rangle \leq \langle \partial w(y) - q, x - y \rangle$$

e

$$\lim_{x \to y} \left|\frac{\langle \partial w(y) - q, x - y \rangle}{|x - y|}\right| \leq \lim_{x \to y} |q - \partial w(y)| = 0,$$

esta última igualdade é devido à continuidade parcial do gradiente, dado que $q \in \partial w(x)$ e ∂w é de valor único em y.

Deixe-nos notar adicionalmente, que por (5.13), y é um mínimo de $x \mapsto w(x) - \langle p, x \rangle$. Logo, se w é diferenciável em y, então $Dw(y) = p$ e se w é duas vezes diferenciável em y então $D^2 w(y) \geq 0$.

Quais são os análogos destes fatos para uma função semiconvexa com constante de semiconvexidade K? Seja $w(x) = u(x) + K|x|^2/2$, então $u(x) = w(x) - K|x|^2/2$ e (5.13) nos diz que existe um $p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(x) + \frac{K}{2}|x|^2 \geq u(y) + \frac{K}{2}|y|^2 + \langle p, x - y \rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Desenvolvendo, chegamos à

$$u(x) \geq u(y) - \frac{K}{2}|x - y|^2 + \langle p - Ky, x - y \rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ou

$$u(x) \geq u(y) - \frac{K}{2}|x - y|^2 + \langle q, x - y \rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.16}$$

onde $q = p - Ky$. Podemos então definir $\partial u(y)$ para uma função semiconvexa com constante de semiconvexidade K por

$$\partial u(y) := \{q \in \mathbb{R}^n : (5.16) \ \text{ vale}\}. \tag{5.17}$$

Note que se u é semiconvexa com constante K, é também semiconvexa com uma constante maior e $\partial u(y)$ independe de qual constante é escolhida, simples modificações do caso convexo mostram que vale a continuidade parcial do gradiente e quando ∂u é de valor único em y, u é diferenciável em y e $Du(y) = \partial u(y)$ no caso semiconvexo. De fato, neste último caso, se $q \in \partial u(y)$, $p = q + Ky \in \partial(u(.) + \frac{K}{2}|.|^2)$ e $u(.) + \frac{K}{2}|.|^2$ é diferenciável em y. Assim sua subdiferencial (convexa e não semiconvexa) é de valor único em y, podendo haver portanto um único $q \in \partial u(y)$.

Seja u semiconvexa com constante K sobre $\mathbb{R}^n$ tendo um máximo local em x^*, então para algum $r > 0$, temos

$$u(x) \leq u(x^*) \quad \text{para } |x - x^*| \leq r.$$

Se $q \in \partial u(x^*)$ e $|x - x^*| \leq r$, nós também temos

$$\begin{aligned} u(x) &\geq u(x^*) - \frac{K}{2}|x - x^*|^2 + \langle q, x - x^* \rangle \\ &\geq u(x) - \frac{K}{2}|x - x^*|^2 + \langle q, x - x^* \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $\langle q, x - x^* \rangle \leq \frac{K}{2}|x - x^*|^2$ e isto implica $q = 0$. Logo ∂u é de valor único em um ponto de máximo local x^* e $\partial u(x^*) = 0$. Se $u = u_1 + u_2$ é uma soma de funções semiconvexas, x^* é um máximo local de u e $q_j \in \partial u_j, j = 1, 2$, facilmente vê-se que $q_1 + q_2 \in \partial u(x^*)$. Então $q^1 = -q^2$. Uma vez que isto é verdade para todo par, vemos que existe somente um par q_1, q_2. Logo ∂u_1 e ∂u_2 são de valor único em x^* satisfazendo $\partial u_1(x^*) = -\partial u_2(x^*)$. Note também que se u é semiconvexa com constante K, então nos pontos x^* onde existe a derivada segunda temos

$$D^2\left(u(x) + \frac{K}{2}|x|^2\right)|_{x=x^*} \geq 0$$

ou

$$D^2u(x^*) \geq -KI.$$

Esta é a razão para $K/2$ aparecer na definição de semiconvexidade.

5.3 O fim da prova

Lembramos que estamos assumindo que $u, -v$ são semiconvexas lipschitz no $\overline{U}$ valendo (5.1), (5.2) e (5.3). Foi escolhido δ suficientemente pequeno onde valem estas hipóteses com U_δ no lugar de U (com talvez uma pequena mudança de γ). Se $|h| < \delta$ então $(U_\delta)^h \subset U$ e as funções $x \mapsto u(x+h)$ ainda satisfazem (5.1) sobre o novo U e são semiconvexas com a mesma constante de semiconvexidade de u. Seja

$$M(h) := \max_{x \in U}(u(x+h) - v(x)),$$

então $\lim_{h\to 0} M(h) = M(0) = M_0 > 0$. De fato,

$$\lim_{h\to 0} M(h) \geq \lim_{h\to 0} u(x_0 + h) - v(x_0) = M(0)$$

e se, $\lim_{h\to 0} M(h)$ fosse maior que $M(0)$, existiria $\epsilon > 0$ e $\delta^* > 0$ tais que, se $|h| < \delta^*$ então $M(h) \geq M(0) + \epsilon$. Porém, pela continuidade uniforme de u no compacto $\overline{U}$ podemos tomar h suficientemente pequeno tal que

$$M(h) = u(x_* + h) - v(x_*) < u(x_*) - v(x_*) + \frac{\epsilon}{2} \leq u(x_0) - v(x_0) + \frac{\epsilon}{2} = M(0) + \frac{\epsilon}{2},$$

contradição.

Para alguma função $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ponhamos

$$\text{Argmax}(w) := \{x \in U : w(x) = \max_U w\}.$$

Se $w \in C(U)$, $w < 0$ próximo da fronteira de U e $w(x) > 0$ para algum $x \in U$, Argmax(w) é não vazio. Nós também abusaremos um pouco da notação colocando

$$\text{Argmax}(h) := \{x \in U : M(h) = u(x+h) - v(x))\} = \text{Argmax}(u(.+h) - v(.)).$$

Seja $x \in$ Argmax(h) então x é um ponto de máximo da soma das funções semiconvexas $u(.+h)$ e $-v(.)$, então apoiado nos resultados da seção anterior, $\partial(u(.+h))$ e $\partial(-v(.))$ são de valor único em x diferindo apenas por um sinal. Portanto $u(.+h)$ e $-v(.)$ são ambas diferenciáveis em x satisfazendo $Du(x+h) = Dv(x)$.

Nós assumiremos U conexo. Se não fosse, consideraríamos sua componente conexa que contém o máximo de $u-v$. Podemos então dividir a prova nos seguintes dois casos:

Caso (i). Existe $c > 0$ tal que para $|h| \leq c$ existe $x_h \in$ Argmax(h) tal que $Du(x_h + h) = 0$ (e portanto $Dv(x_h) = 0$).

Caso (ii). Existe h suficientemente pequeno tal que (5.2) vale para $u(x+h)$ e $M(h) > 0$, tal que $Du(x+h) \neq 0$ em todos os pontos $x \in$ Argmax(h).

Prova no caso (i).

Note que $M(h)$ é Lipschitz contínua em h. Seja x_h como suposto no caso (i). Então para $|h^*| < \delta$ temos

$$\begin{aligned} M(h) = u(x_h + h) - v(x_h) &\geq u(x_{h^*} + h) - v(x_{h^*}) \\ &= u(x_{h^*} + h^* + h - h^*) - v(x_{h^*}) \\ &\geq u(x_{h^*} + h^*) - v(x_{h^*}) + o(|h^* - h|) \\ &= M(h^*) + o(|h^* - h|) \end{aligned}$$

onde a primeira desigualde é devido a definição de x_h, a segunda é devido ao fato que $Du(x^* + h^*) = 0$ e a última igualdade é pela definição de x_{h^*}.

E segue que se M é diferenciável em h^*, então $DM(h^*) = 0$. Usando o fato que funções Lipschitz contínua cuja derivada é zero onde existe, é constante sobre cada componente conexa do seu domínio, temos que M é constante sobre $|h| \leq c$. Agora, se $x_0 \in$ Argmax(0), nós temos

$$u(x_0) - v(x_0) = M(0) = M(h) = u(x_h + h) - v(x_h) \geq u(x_0 + h) - v(x_0),$$

o que implica que x_0 é um ponto de máximo local de u. Pelo lema 5, u é costante em uma vizinhança de x_0. Uma vez que para y suficientemente pequeno

$$u(x_0) - v(x_0) \geq u(x_0 + y) - v(x_0 + y) = u(x_0) - v(x_0 + y),$$

x_0 é um ponto de mínimo local de v e então v é constante em uma vizinhança de x_0 como acima. Mas então o subconjunto $\{x : u(x) - v(x) = u(x_0) - v(x_0) = M(0)\}$ do conexo U é aberto e fechado , logo é o próprio U. Porém isto contradiz (5.2).

Prova no caso (ii).

Seja $|h| < \delta$ tal que $Du(x+h) \neq 0$ para todo $x \in \text{Argmax}(h)$. Afirmamos que existe uma vizinhança V de $\text{Argmax}(h) \subset V \subset\subset U$ e $\mu > 0$ tal que se $x \in V$ e as funções $u(.+h), v(.)$ são ambas diferenciáveis em x, então

$$|Du(x+h)|, |Du(x)| \geq \mu > 0. \tag{5.18}$$

Para verificar tal afirmação, primeiro notemos que em particular

$$|Du(x+h)|, |Du(x)| \geq \mu > 0 \quad \text{para} \quad x \in \text{Argmax}(h).$$

Se isto não fosse verdade, existiria uma sequência x_k em $\text{Argmax}(h)$ tal que $Du(x_k + h) \to 0$. Como $\text{Argmax}(h)$ é fechado podemos, considerando uma subsequência se nescessário, assumir que $x_k \to x \in \text{Argmax}(h)$ e pela continuidade parcial do gradiente $Du(x_k + h) = \partial u(x_k + h)$ é suficientemente próximo de $\partial u(x+h) = Du(x+h)$. Logo $Du(x+h) = 0$, contradição. Daí, novamente pela continuidade parcial do gradiente, podemos tomar uma pequena bola centrada em cada ponto de $\text{Argmax}(h)$ cuja união satisfaz o conjunto V almejado. Com efeito, se $x \in V$ e $u(.+h), v(.)$ são ambas diferenciáveis em x, como $u(.+h) - v(.)$ é soma de funções convexas, teremos $Du(x+h) = \partial u(x+h)$ $(D(u(.+u)) = \partial(u(.+h))$ no ponto $x)$, que pela continuidade parcial do gradiente se estiver numa pequena bola centrada em $y \in \text{Argmax}(h)$ deve estar póximo de $Du(y+h)$ de modo que seu módulo seja maior que $\mu - \varepsilon > 0$. E essas bolas podem ser tomadas também arbitrarimente pequenas tais que satisfação $V \subset\subset U$.

Daqui para frente h é fixo, e nós refaremos $u(.+h)$ por $u(.)$ e supriremos h na notação. Agora, com nosso novo abuso de notação,

$$\text{Argmax}(h) = \text{Argmax}(u-v) = \{x \in U : u(x) - v(x) = \max_U (u-v)\}.$$

Agora invocaremos as mudanças de variáveis (5.5), (5.6). Nós afirmamos que w é semiconvexa sobre V porque u é semiconvexa. Observe isto pelo cálculo

$$Dw = H'(u)Du \quad D^2w = H'(u)D^2u + H''(u)(Du \otimes Du) \geq H'(u)D^2u \tag{5.19}$$

pois $H''(u) = \dfrac{\lambda^2}{\sqrt{(1-2\lambda u)^3}}$. Logo se $D^2u \geq -KI$ nós temos $D^2w \geq -H'(u)KI$ e $H'(u) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda u}} \geq 0$ é limitado lembrando que λ foi escolhido de modo que $2\lambda u$ é limitado < 1. Os detalhes com rigor é deixado a critério do leitor. Usando (5.18) em um ponto onde w é duas vezes diferenciável (equivalentemente u) em V junto com (5.7), obtemos

$$\Delta_\infty w = \frac{\lambda}{1-\lambda w}|Dw|^4 \geq \frac{\lambda}{1-\lambda w}H'(u)^4\mu^4 \geq \beta \tag{5.20}$$

onde $\beta > 0$ é uma constante.

Recorreremos agora a resultados mais profundos. Primeiro; de acordo com o teorema de Aleksandrov (ver por exemplo **??**), funções convexas (em consequência semiconvexas) são duas vezes diferenciáveis em quase todo ponto. Segundo; em virtude da semiconvexidade, a medida de Lebesque de

$$\bigcap_{|p|\leq\varepsilon} \text{Argmax}(x \mapsto w(x) - v(x) + \langle p, x\rangle) \subset V \tag{5.21}$$

é positiva para cada $\varepsilon > 0$. Além disso, se $|p|$ e $\lambda > 0$ são suficientemente pequenos, nós temos

$$\text{Argmax}(x \mapsto w(x) - v(x) + \langle p, x\rangle) \subset V. \tag{5.22}$$

Pondo estes dois fatos juntos, nós obtemos para cada $\varepsilon > 0$ um $p \in \mathbb{R}^n$ e $x^* \in V$ onde w e v são ambos duas vezes diferenciáveis e usando as condições nescessárias do cálculo para um ponto de máximo, obtemos

$$|p| \leq \varepsilon, \quad Dw(x^*) + p = Dv(x^*) \quad \text{e} \quad D^2w(x^*) \leq D^2v(x^*). \tag{5.23}$$

Além disso, se (5.23) vale e K é uma constante de semiconvexidade para $w, -v$ nós temos

$$-KI \leq D^2w(x^*) \leq D^2v(x^*) \leq KI. \tag{5.24}$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle D^2w(x^*)(Dw(x^*)+p), Dw(x^*)+p\rangle &= \langle D^2w(x^*)Dv(x^*), Dv(x^*)\rangle \\ &\leq \langle D^2v(x^*)Dv(x^*), Dv(x^*)\rangle \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

onde a última desigualdade é devido a (5.1) para v. Por outro lado, usando (5.20) e (5.24), obtemos

$$\begin{aligned}&\langle D^2w(x^*)(Dw(x^*)+p), Dw(x^*)+p\rangle\\ =&\ \langle D^2w(x^*)Dw(x^*), Dw(x^*)\rangle + 2\langle D^2w(x^*)Dw(x^*), p\rangle + \langle D^2w(x^*)p, p\rangle\\ \geq&\ \beta - 2K|Dw(x^*)||P| - k|P|^2.\end{aligned}$$

Como $|Dw|$ é limitado sobre V, isto é positivo para $|p|$ suficientemente pequeno, contradizendo (5.25).

Capítulo 6

REGULARIDADE

Nós notamos que regularidade é um termo genérico para falar de propriedades tais como continuidade de uma função, propriedades de diferenciabilidade, estimativas, continuidade das derivadas entre outras. Até agora, temos apresentado uma variedade de resultados que influenciam a regularidade de uma função absolutamente minimizante. Um deles é a estimativa Lipschitz do Lema 3, outro é o refinamento da desigualdade de Harnack. A idéia aproximada destas estimativas e outras é que se $u \in CCA(U)$, então é localmente Lipschitz contínua e pode-se estimar $Tu(x)$ em termos das estimativas da própria u. Continuidade Lipschitz local implica diferenciabilidade quase sempre. Podemos considerar também o lema 4 como um resultado de regularidade de algum modo. Além disso, nós temos exemplo 6 o qual mostra que, quando $|.|$ é a norma de Euclideana, meramente assumindo $u \in AM(U)$ não pode possivelmente implicar mais que a contínua diferenciabilidade de u em U e que Du é localmente Holder contínuo com expoente 1/3. Não é conhecido, no momento, que isto é falso. Também não é conhecido, no momento, se ou não $u \in AM(U)$ implica que u é diferenciavel em todo ponto de U no caso da norma de Euclideana exceto quando n = 2.

Apresentamos a seguir um dos poucos resultados de regularidade conhecidos usando a hipótese $u \in AM(U)$ que é válido em qualquer dimensão é o Teorema 6 abaixo. A prova é dada no caso da norma de Euclideana. Modificações estendem os argumentos para normas as quais, junto com as normas duais, é estritamente convexa. O teorema é falso para normas gerais, como o $u(x) = |x|_\infty$ mostra quando a norma é $|.|_\infty$

Teorema 6. *Seja $u \in AM(U)$ e $x^0 \in U$. Seja $|.|$ a norma euclidiana. Se $\lambda_j > 0$ satisfaz $\lambda_j \downarrow 0, v \in C(\mathbb{R}^n)$, e*

$$v(x) = \lim_{j\to\infty} \frac{u(\lambda_j x + x^0) - u(x^0)}{\lambda_j} \tag{6.1}$$

vale uniformemente sobre conjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$*, então* v *é uma função linear.*

Savin mostrou em [6], que se $n = 2$ e u é absolutamente minimizante, então $u \in C^1(U)$. Savin começou de uma atraente reformulação do teorema

$$\lim_{r \downarrow 0} \inf_{\{e \in \mathbb{R}^n; |e| = T_u(0)\}} \sup_{|x| \leq r} \frac{|u(x + x^0) - u(x_0) - \langle e, x \rangle|}{r} = 0.$$

Deixe-nos explicar como este teorema é um resultado que contribui para saber a melhor regularidade de uma função absolutamente minimizante. Se u é diferenciável em x_0, então um cálculo mostra que

$$\frac{u(\lambda x + x_0) - u(x_0)}{\lambda} = \langle Du(x_0), x \rangle + o(1) \text{ quando } \lambda \downarrow 0.$$

Portanto o mesmo limite v em (6.1) é obtido, não importa qual a sequência $\lambda_j \downarrow 0$ é usada e $v(x) = \langle Du(x_0), x \rangle$ é linear. Nós veremos brevemente que é sempre verdade que as funções $v(x) := (u(\lambda x + x_0) - u(x_0))/\lambda$ formam uma família precompacta em $C(B_R(0))$ para $R > 0$ para valores de λ suficientemente pequenos. Isto só depende da continuidade Lipschitz local de u. Assim, se λ_j é qualquer sequência tal $\lambda_j \downarrow 0$, então, existe uma subsequence λ_{j_k} que convergirá localmente uniformemente a um limite v em $\mathbb{R}^n$.O teorema afirma que v deve ser linear, o que está de acordo o caso onde $Du(x_0)$ existe. Porém, nós não sabemos se o limite v em (6.1) depende da sequência particular pela qual é definida. Se isso não acontecer, então note que $Du(x_0)$ existe e $Du(x_0) = Dv(0)$. Realmente, se $v(x) = \langle p, x \rangle$ não importa qual sequência é usada, mas $Du(x_0)$ não existe, então há um $\epsilon > 0$ e um uma sequência $x_j \downarrow 0$ tal que

$$\frac{|u(x^j + x^0) - u(x^0) - v(x^j)|}{|x^j|} \geq \epsilon \quad \text{para } j = 1, 2 \ldots. \tag{6.2}$$

Pondo $\lambda_j = |x_j|$ e $\omega^j = x^j/\lambda_j$, (6.2) diz que

$$\left| \frac{u(\lambda_j \omega^j + x^0) - u(x^0)}{|\lambda_j|} - v(\omega_j) \right| \geq \epsilon \quad \text{para } j = 1, 2 \cdots \tag{6.3}$$

Assim λ_j não tem subseqüência ao longo da qual $(u(\lambda_j x + x^0) - u(x^0))/\lambda_j$ converge uniformemente para $v(x)$ sobre $|x| = 1$.

Portanto o teorema 6 fornece positiva, mas não definitiva evidência que $Du(x_0)$ existe. Permanece um problema em aberto determinar se funções absolutamente minimizantes são diferenciáveis em todo ponto. Nós voltaremos à prova.

Demonstração. Pelo lema 6, ítem 3 $S_u^+(x_0) = T_u(x_0)$. Se este valor for zero, então

$$|u(x) - u(x^0)| \leq L_u(B_\lambda(x^0))|x - x^0| \quad \text{para} \quad |x - x^0| \leq \lambda$$

e $u(x) = u(x^0) + o(|x - x^0|)$. Isto mostra que $D_u(x^0)$ existe e é igual a zero. Então

$$\frac{u(\lambda x + x^0) - u(x^0)}{\lambda} = \langle Du(x^0), x\rangle + \frac{r(\lambda x)}{\lambda}$$

onde

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{r(\lambda x)}{\lambda} = 0$$

Portanto, não importa qual seja a sequência $\lambda_j \downarrow 0$, obtemos que $v(x) = \langle Du(x^0), x\rangle$. Logo, v é linear. Daqui em diante nós assumiremos que

$$L_0 := S_u^+(x_0) = T_u(x_0) \ > 0.$$

Se $u \in CC(U)$, $x_0 \in U$, $B_{r_0}(x^0) \subset\subset U$ e $u^*(x) = (u^*(r_0 x + x^0) - u(x^0))/(r_0 L_0)$, então $u^* \in CC(B_1(0))$, $u^*(0) = 0$ e $S_{u^*}^+(x^0) = S_u^+(x^0)/L_0 = 1$. Daqui em diante nós assumiremos que

$$u \in CC(B_1(0)), \quad u(0) = 0, \quad S_{u^*}^+(0) = 1. \tag{6.4}$$

Dado (6.4), para $\lambda \ > 0$ a função

$$v_\lambda(x) := \frac{u(\lambda x)}{\lambda}$$

satisfaz $v_\lambda \in CC(B_{1/\lambda}(0))$, $v_\lambda(0) = 0$ e para $r \ < 1/\lambda$

$$L_{v\lambda}(B_r(0)) = L_u(B_{\lambda r}(0)), \quad \max_{|w|=r} v_\lambda(w) = \frac{\max_{|w|=\lambda r} u(w)}{\lambda} = r S_{u^*}^+(0, \lambda r).$$

Portanto a família v_λ é uniformemente limitada e equicontínua em cada bola $B_r(0)$ quando $\lambda \downarrow \infty$. Portanto existe uma sequência $\lambda_j \downarrow 0$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_{\lambda_j} \to v$ uniformemente sobre todo conjunto limitado. Como a propriedade de gozar de comparação com cones é preservada sobre a convergência uniforme, $v \in CC(\mathbb{R}^n)$. Pondo $\lambda = \lambda_j$ e passando o limite nas relações acima, obtemos as duas primeiras relações abaixo

$$L_v(B_r(0)) \leq T_u(0) = 1, \quad \max_{|w|=r} v(w) = r, \quad \min_{|w|=r} = -r. \tag{6.5}$$

Aqui foram usados os fatos que, constantes Lipschtz são semicontínuas superiormente e máximos são contínuos com respeito a convergência uniforme. E terceira relação acima é clara. Note que a primeira relação sendo válida para $r > 0$ implica que $L_v(\mathbb{R}^n) \leq 1$. As propriedades (6.5), validas para $r > 0$, junto com $v(0) = 0$, garantem que v é linear. Para ver isto, sejam x_r^+, x_r^- quaiquer dois pontos tais

$$|x_r^+|, |x_r^-| = r \quad \text{e} \quad v(x_r^+) = r, v(x_{x_r^-}) = -r. \tag{6.6}$$

Até este ponto nós não temos usado a hipótese que $|.|$ é a norma euclidiana. Agora o faremos: sendo pontos na esfera de raio r e centro 0, a menos que $x_r^+ = -x_r^-$ nós teremos $|x_r^+ - x_r^-| < 2r$, neste caso (6.6) é inconsistente com $2r = v(x_r^+) - v(x_r^-) \leq |x_r^+ - x_r^-|$. Aqui nós temos usado que $L_v(\mathbb{R}^n) \leq 1$. Então nós temos mostrado que os pontos x_r^+, x_r^- satisfazendo (6.6) são únicos. De fato, se y_r^+ e y_r^- são pontos satisfazendo (6.6), pelo que vimos, y_r^- é o antípoda de x_r^+, isto é, x_r^-. Analogamente, $y_r^- = x_r^-$.

Agora afirmamos que v é linear sobre o seguimento $[x_r^-, x_r^+]$, isto é,

$$g(t) := v(tx_r^+) = v(-tx_r^-) = tr \quad \text{para} \quad -1 \leq t \leq 1. \tag{6.7}$$

De fato, $g(-1) = -r = r(|-1+1| - 1)$, $g(1) = r = (|1+1| - 1)$, e $L_g(-1,1) = r$. Pois, se $t_1, t_2 \in (-1,1)$ como $L_v(\mathbb{R}^n) \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |g(t_1) - g(t_2)| &= |v(t_1x_r^+) - v(t_2x_r^+)| \\ &\leq |t_1x_r^+ - t_2x_r^+| \\ &= |x_r^+||t_1 - t_2| \\ &= r|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Assim, g coincide com a função cone $t \to r(|t+1| - 1) = rt$ sobre a fronteira de $U = (-1,1)$ e tem a mesma constante Lipschtz. Pela proposição 1 $g(t) \equiv tr$. E segue que todos os pontos x_r^-, x_r^+ estão sobre uma mesma reta.

Sejam $x^2, ...x^n$ tais que $x_1^+, x^2, ...x^n$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$ e defina $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x_1, y) := f(x_1, y_2, ...y_n) = v(x_1x_1^+ + y_2x^2 + ... + y_nx^n)$$

onde $y = (y_2, ..., y_n)$. Claramente, $L_f(\mathbb{R}^n) = L_v(\mathbb{R}^n) = 1$ e $f(x_1, 0) \equiv x_1$. Nós afirmamos então que $f(x_1, y) \equiv x_1$. Para ver isto,observe que

$$\begin{aligned} |f(x_1, y) - f(s, 0)| &= |v(x_1x_1^+ + y_2x^{2+} \cdots + y_nx^n) - v(sx_1^+)| \\ &\leq L_v(\mathbb{R}^n)|x_1x_1^+ + y - sx_1^+| \\ &\leq |y| + |x_1^+||x_1 - s| \\ &= |y| + |x_1 - s|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}|y|^2 + |x_1 - s|^2 &\geq |f(x_1, y) - f(s, 0)|^2 \\ &= |f(x_1, y) - x_1 + x_1 - f(s, 0)|^2 \\ &= |f(x_1, y) - x_1|^2 + 2(x_1 - s)(f(x_1, y) - x_1) + |x_1 - s|^2.\end{aligned}$$

Nós concluímos então que

$$2(x_1 - s)(f(x_1, y) - x_1) \leq |y|^2,$$

onde $s \in \mathbb{R}$ qualquer. Isto acontece somente se $f(x_1, y) - x_1 \equiv 0$. Segue então que v é linerar.

$\square$

A exata regularidade das funções absolutamente minimizantes, é amplamente um problema em aberto. O teorema 6 é o único resultado positivo conhecido até então de um minimizador absoluto genérico. Originalmente publicado em [30].

Capítulo 7

PROBLEMA VARIACIONAL

Uma técnica popular para estudar minimizadores absolutos passa por um processo de aproximação envolvendo problemas variacionais na forma integral. O propósito aqui é esboçar brevemente essa abordagem e explicar como se relaciona com o material no texto principal. A discussão será muito menos auto-contida do que nas seções anteriores. Em particular, nós precisamos recorrer a vários fatos em análise funcional e da teoria dos espaços de Sobolev. Por simplicidade, é assumido neste capítulo que U é um conjunto aberto limitado.

7.1 Espaços de Sobolev

Para uma função $u \in C^{\infty}(U)$ e $1 \ < p \ < \infty$, definimos

$$||u||_{1,p} := \left(\int_U |u(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_U |Du(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{7.1}$$

Aqui, Du é o gradiente de u, dx denota a medida de Lebesque n-dimensional usual. Então o espaço de sobolev $W^{1,p}(U)$ é definido como o completamento de $C^{\infty}(U)$ na norma $||.||_{1,p}$. Pelo Teorema de Meyers e Serrin, $u \in W^{1,p}(U)$ se, e somente se, u e todas as suas derivadas parciais de primeira ordem no sentido das distribuições são elementos do espaço $L^p(U)$. Lembramos ainda que $W^{1,p}(U)$ é um espaço de Banach reflexivo para valores p tais que $1 \ < p \ < \infty$ e um espaço Hilbert para $p = 2$.

Um importante subespaço de $W^{1,p}(U)$ é o fecho de $C_0^{\infty}(U)$ o conjunto das funções suaves compactamente suportadas na norma $||.||_{1,p}$. E é denotado por $W_0^{1,p}(U)$. Além disso, para um dado $w \in W^{1,p}(U)$ nós denotamos

$$W_w^{1,p}(U) := \{u \in W^{1,p}(U) : u - w \in W_0^{1,p}(U)\}.$$

Uma vez que $W^{1,p}_w(U)$ é fechado e convexo é fracamente fechado pelo lema de Mazur. Nós precisaremos dos seguintes fatos sobre espações de Sobolev:

- Se $1 \ < q \leq p \ , \infty$, então $W^{1,p}(U) \subset W^{1,q}(U)$. Isto segue facilmente da desigualdade de Hölder e da limitação de U.
- Se u é Lipschitz contínua em U, então $u \in W^{1,p}(U)$ para todo p.
- Existe uma constante C dependendo somente sobre n, p e U tal que
$$\|u\|_{1,p} \leq C\|Du\|_{L^p(U)} \tag{7.2}$$
para todo $u \in W^{1,p}_0(U)$ então u é Hölder contínua em U. Este é um caso especial do teorema de imersão de Sobolev
- Se $u \in W^{1,p}(U)$ e $p \ > n$ então u é localmente Hölder contínua em U. Além disso, se $u \in W^{1,p}_0$ então u é Hölder contínua em U e
$$|u(x) - u(y)| \leq C\|Du\|_{L^p(U)}|x - y|^{1-n/p} \tag{7.3}$$
para todo $x, y \in U$ e para algum C dependendo somente sobre n, p e U.

7.2 Funções p-harmônicas

Nós consideraremos o problema de minimizar o funcional
$$I_p(u) = \int_U |Du(x)|^p dx \tag{7.4}$$
no subespaço $W^{1,p}_w(U)$. Pondo $I^*_p = \inf\{I_p(u) : u \in W^{1,p}_w(U)\}$, vemos que I^*_p é finito pois é o ínfimo de valores reais não negativos. Sendo assim, existe uma sequência v_j tal que $I_p(v_j) \to I^*_p$ quando $j \to \infty$ (a chamda sequência minimizante). Em particular,por 7.2 a sequência v_j é limitada em $W^{1,p}(U)$. Com efeito, por (**??**)
$$||v_j - w||_{1,p} \leq C\bigg(\int_U |Dv_j - Dw|^p\bigg)^{1/p} = I_p(v_j - w) \leq I_p(v_j) + I_p(w),$$
e os v_j estão contidos em bola centrada em w de raio finito.

Assim, como $W^{1,p}(U)$ é um espaço de Banach reflexivo, trocando por uma subsequência se necessário, podemos supor que $v_j \to u_p \in W^{1,p}(U)$ na topologia fraca, e como $W_w^{1,p}(U)$ é fracamente fechado, $u_p \in W^{1,p}(U)$. O operador I_p é estritamente convexo, e contínuo em norma. De fato, como a função real $x \mapsto x^p$ possui derivada segunda positiva em $(0,\infty)$, é convexa neste intervalo, e temos que se $t \in (0,1)$ então

$$\begin{aligned} I_p(tu+(1-t)v) &= \int_U |(tDu+(1-t)Dv)^p| \\ &< \int_U |t|Du|^p + (1-t)|Dv|^p| \\ &\leq tI_p(u)+(1-t)I_p(v). \end{aligned}$$

Assim, como $v_j \hookrightarrow u_p$, (convergência fraca) otemos

$$I_p(u_p) \leq \liminf_{j\to\infty} I_p(v_j) = I_p^*.$$

Logo, como $u_p \in W_w^{1,p}(U)$, u_p minimiza o funcional I_p em (7.4). Tais funções são chamadas p-harmônicas generalizadas com valor de fronteira w.

A propriedade de ser p-harmônica é local no sentido de que u é p-harmônica com valor de fronteira u em U se, e somente se, u é p-harmônica com valor de fronteira u em V para todo aberto $V \subset U$. Com efeito, para a volta, basta tomar $V = U$. Agora, supondo u p-harmônica com valor de fronteira u em U e $V \subset U$ aberto, mostraremos que

$$\int_V |Du|^p dx \leq \int_V |Dv|^p dx \quad \forall v \in W_u^{1,p}(V).$$

Do contrário existiria $v_0 \in W_u^{1,p}(V)$ tal que

$$\int_V |Dv_0|^p dx \ < \int_V |Du|^p dx.$$

Mas se $v \in W_u^{1,p}(V)$, então a função

$$u^* = \begin{cases} u, & em \quad U \setminus V, \\ v, & em \quad V, \end{cases}$$

pertence à $W_u^{1,p}(U)$. Logo

$$
\begin{aligned}
\int_U |Dv_0^*|^p dx &= \int_V |Dv_0^*|^p dx + \int_{(U\ \setminus V)} |Dv_0^*|^p dx \\
&= \int_V |Dv_0^*|^p dx + \int_{(U\setminus V)} |Du|^p dx \\
&< \int_V |Du|^p dx + \int_{(U\setminus V)} |Du|^p dx \\
&= \int_U |Du|^p dx,
\end{aligned}
$$

contrariando que u é p-harmônica com valor de fronteira u em U.

A unicidade de uma função harmônica com um dado valor de fronteira w segue da convexidade estrita de I_p. De fato, sejam u_1, u_2 p-harmônicas em U com valor de fronteira w. Se $u_1 \neq u_2$ em um conjunto de medida positiva, então, pela convexidade estrita de I_p,

$$I_p^* \leq I_p^*(\frac{1}{2}(u_1 - u_2)) \ < \frac{1}{2}(I_p(u_1) - I_p(u_2)) = I_p^*,$$

o que é impossível. Portanto $u_1 = u_2$ em U.

Uma consequência da unicidade de funções p-harmônicas com um valor de fronteira fixado é que se u_1, u_2 são funções p-harmônicas em U com o mesmo valor de fronteira e se $u_1 \leq u_2$ sobre ∂U(o qual siginifica que $\max\{u_1 - u_2, 0\} \in W_0^{1,p}(U)$) implica $u_1 \leq u_2$ sobre U. Isto segue por notar que se o conjunto aberto

$$V := \{x : u_1(x) \ > u_2(x)\}$$

fosse não vazio teríamos duas funções p-harmônicas distintas com os mesmos valores em ∂V, violando assim a unicidade. Observnando ainda que $u + c$ é p-harmônica para todo $c \in \mathbb{R}$ se u é p-harmônica. Nós concluímos a estimativa

$$\sup_{x\in U}(u_1 - u_2) \leq \sup_{x\in\partial U}(u_1 - u_2) \tag{7.5}$$

é válido para funções p-harmônicas $u_1, u_2 \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$.

7.3 Conexão com extensões Lipschitz.

Seja $f : \partial U \mapsto \mathbb{R}$ tal que $L_f(\partial U)$ é finito, $w : \overline{U} \mapsto \mathbb{R}$ Lipschitz contínua satisfazendo $w = f$ sobre ∂U. Uma vez que $w \in W^{1,p}(U)$ para qualquer $1 \ < p \ < \infty$ existem funções p-harmônicas $u_p \in W_w^{1,p}(U)$. Por desigualdade de Holder e a definição de funções p-harmônicas, nós temos para um $1 \ < p \ < \infty$ fixo e $p \geq q$

$$\begin{aligned} \|Du_p\|_{L^q(U)} &\leq |U|^{1/q-1/p}\|Du_p\|_{L^p(U)} \\ &\leq |U|^{1/q-1/p}\|Dw\|_{L^p(U)} \\ &\leq |U|^{1/q-1/p}\text{ess sup}_{x\in U}\|Dw\|_{L^p(U)} \end{aligned}$$

onde $|U|$ denota a medida de lebesgue de U. A estimativa acima implica que $\{u_p\}_{p\geq q}$ é limitado em $W^{1,q(U)}$ e portanto contém uma sequência fracamente convergente, ainda denotada por (u_p) convergindo para uma função $u \in W_w^{1,q}(U)$. Nós deduzimos então por semicontinuidade fraca que

$$\|Du\|_{L^p(U)} \leq |U|^{1/q-1/p}\text{ess sup}_{x\in U}\|Dw\|_{L^p(U)}. \tag{7.6}$$

O mesmo raciocínio pode ser repetido para $q+1, q+2, q+3\cdots$, tal que em cada passo nós escolhemos uma sequência fracamente convergente como uma subsequÇencia da prévia. Considerando a sequência diagonal en encontramos uma subsequência u_{p_j} tla que $u_{p_j} \to u$ fracamente em $W^{1,q}(U)$ e (7.6) vale para qualquer $q \ < \infty$. Logo fazendo $q \to \infty$ obetemos

$$\text{ess sup}_{x\in U}\|Du\|_{L^p(U)} \leq \text{ess sup}_{x\in U}\|Dw\|_{L^p(U)}. \tag{7.7}$$

e isto é válido para qualquer função Lipschitz w com $w = f$ sobre ∂U. Observe além disso que por (7.3), (7.6) e Arzelá-Ascoli nós podemos assumir que $u_{p_j} \to u$ uniformemente em U.

Para ver que u tmabém têm a propriedade de ser absolutamente minimizante, deixe-nos considerar $V \subset\subset U$ e uma função Lipschitz contínua v sobre V tal que $u = v$ sobre ∂V. Então nós podemos repetir a construção acima e obter uma sequênicia de funções p-harmônicas $(v_{p_{j_k}})$ sobre V, coincidindo com v sobre ∂V tal que $v_{p_{j_k}} \to v^*$ e

$$\text{ess sup}_{x\in U}|Du(x)| \leq \text{ess sup}_{x\in U}|Dw(x)| \tag{7.8}$$

Assim, como $v_{p_{j_k}}$ e $u_{p_{j_k}}$ ambas são p_{j_k}-harmônicas em V, por (7.5) nós temos

$$\begin{aligned}\sup_{x\in V}|u(x)-v^*(x)| &\leq \sup_{x\in V}|u(x)-u_{p_{j_k}}(x)|+\sup_{x\in V}|u_{p_{j_k}}(x)-v_{p_{j_k}}(x)|\\ &+\sup_{x\in V}|v_{p_{j_k}}(x)-v^*(x)|\end{aligned}$$

Como $u_{p_{j_k}} \to u$ e $v_{p_{j_k}} \to v^*$ uniformemente em V e $u = v$ sobre ∂V, isto implica que $u = v^*$ em V. Em particular,

$$\text{ess sup}_{x\in V}|Du(x)| \leq \text{ess sup}_{x\in V}|Dv(x)| \tag{7.9}$$

para qualquer função contínua Lipschitz $v \in C(\overline{V})$ que coincide com u sobre ∂V.

7.4 Equações de Euler-Lagrange

Seja Uaberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $\phi \in C_0^\infty(U)$ uma função teste e $t \in \mathbb{R}$. Um vez que

$$I_p(u_p) \leq I_p(u_p + t\phi),$$

isto é, a função $t \mapsto I_p(u_p + t\phi)$ tem um mínimo e $t = 0$, nós inferimos que

$$\int_U |Du_p|^{p-2}\langle Du_p, D\phi\rangle dx = 0. \tag{7.10}$$

Portanto u_p satisfaz a equação p-Laplace generalizada

$$-\text{div}((|Dv|^{p-2}Dv) = 0. \tag{7.11}$$

no sentido das distribuições. Observe que por aproximação (7.11) vale para alguma $\phi \in W_0^{1,p}(U)$.

Definição 8. *Considere a equação*

$$F(x, Du, D^2u) = 0 \quad em \quad U. \tag{7.12}$$

- *Uma função semicontínua inferiormente é uma supersolução de (7.12) em U no sentido da viscosidade, se para toda $\phi \in C^2(\overline{U})$ tal que $u - \phi$ tem um mínimo estrito no ponto $x_0 \in U$ com $u(x_0) = \phi(x_0)$ nós temos:*

$$F(x_0, D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0.$$

- *Uma função semicontínua superiormente é uma subsolução de (7.12) em U no sentido da viscosidade, se para toda $\phi \in C^2(\overline{U})$ tal que $u - \phi$ tem um máximo estrito no ponto $x_0 \in U$ com $u(x_0) = \phi(x_0)$ nós temos:*

$$F(x_0, D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

- *Finalmente u é uma solução de (7.12) em U no sentido da viscosidade se u é uma supersolução e uma subsolução de (7.12) em U no sentido da viscosidade.*

Se nós temos uma função p-harmônica fraca (no sentido das distribuições) que é contínua, então esta também é uma solução de (7.11) no sentido da viscosidade. Este é o conteúdo do nosso próximo resultado.

Lema 11. *Seja u uma solução fraca de $\Delta_p u = 0$ em algum domínio U para $p > 2$. Então u é uma solução de*

$$-(p-2)|Du|^{p-4}\Delta_\infty u - |Du|^{p-2}\Delta u = 0 \quad em \quad U \tag{7.13}$$

no sentido da viscosidade.

Demonstração. Seja $x_0 \in U$ e uma função $\phi \in C^2(\overline{U})$ tal que $u(x_0) = \phi(x_0)$ e $u - \phi$ tem mínimo estrito em x_0. Nós queremos mostrar que

$$-(p-2)|D\phi|^{p-4}\Delta_\infty \phi(x_0) - |D\phi|^{p-2}\Delta\phi(x_0) \geq 0.$$

Assuma que este não é o caso, então existe um raio $r > 0$ tal que

$$-(p-2)|D\phi|^{p-4}\Delta_\infty(x)\phi(x) - |D\phi|^{p-2}\Delta\phi(x) \ < 0,$$

para todo $x \in B(x_0, r)$. Ponha $m = \inf_{|x-x_0|=r}(u-\phi)(x)$ e seja $\psi(x) = \phi(x) + m/2$. Esta função ψ verifica $\psi(x_0) \ > u(x_0)$(pois note que $m \ > 0$ por ser x_0 mínimo estrito de $u - \psi$ e $u(x_0) = \phi(x_0) \ < \psi(x_0)$) e

$$-\mathrm{div}(|D\psi|^{p-2}D\psi) \ < 0.$$

Multiplicando por $(\psi - u)^+$, extendendo por zero fora de $B(x_0, r)$, nós obtemos

$$\int_{\{\psi \ > u\}} |Du|^{p-2}\langle D\psi, D(\psi - u)\rangle dx \ < 0.$$

onde $\{\psi > u\} := \{x \in U : \psi(x) > u(x)\}$. Tomando $(\psi - u)^+$ como uma função teste na forma fraca da equação nós obtemos

$$\int_{\{\psi > u\}} |Du|^{p-2}\langle Du, D(\psi - u)\rangle dx = 0.$$

Portanto, subtraindo as duas expressões acima obtemos

$$C(N,p) \int_{\{\psi > u\}} |D\psi - Du|^p \leq \int_{\{\psi > u\}} \langle |D\psi|^{p-2}D\psi - |Du|^{p-2}Du, D(\psi - u) \rangle dx < 0,$$

uma contradição. Isto prova que u é uma supersolução de (7.13) no sentido da viscosidade. A prova do fato de que u é uma subsolução de (7.13) no sentido da viscosidade é análoga.

□

Agora nós veremos que se uma sequência u_{p_i} de funções p-harmônicas contínuas converge uniformemente para u quando $p_i \to \infty$, então u satisfaz

$$-\Delta_\infty u = -\langle D^2 u Du, Du\rangle = 0$$

em U no sentido da viscosidade. Seja $\phi \in C^2(\overline{U})$ tal que $u - \phi$ tem um ponto de máximo estrito em $x_0 \in U$. Uma vez que u_{p_i} converge uniformemente para u, nós temos que $u_{p_i} - \phi$ tem algum ponto de máximo $x_i \in U$ com $x_i \to x_0$. Depois, nós usamos que u_{p_i} é uma solução de $-\Delta_{p_i} u_{p_i} = 0$ em U no sentido da viscosidade e obtemos

$$-(p_i - 2)|D\phi|^{p_i - 4}\Delta_\infty \phi(x_i) - |D\phi|^{p-2}\Delta\phi(x_i) \leq 0$$

Se $D\phi(x_0) = 0$ nós obtemos $-\Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0$. Se este não é o caso nós temos que $D\phi(x_i) \neq 0$ para algum i suficientemente grande e então

$$-\Delta\phi(x_i) \leq \frac{1}{p_i - 2}|D\phi|^2 \Delta\phi(x_i) \to 0, \quad \text{quando} \quad i \to \infty.$$

Nós concluímos que

$$-\Delta\phi(x_0) \leq 0.$$

Isto é, u é uma subsolução de $-\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade. Um argumento semelhante mostra que u é também uma supersolução e portanto uma solução de $-\Delta_\infty u = 0$ em U no sentido da viscosidade.

Referências Bibliográficas

[1] Aronsson, G., Crandall, M. G., Juutinen, P., *A tour of the theory of absolutely minimizing functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **41** (2004), 439-505.

[2] Crandall, M.G., Evans, L.C., Gariepy, R.F., *Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian. Calc.Var. Partial Differ. Equ.* **13**, (2001), 123-139.

[3] McShane, E. J., *Extension of range of functions.* Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 837-842.

[4] Evans, L. C., and Gariepy, R. F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* 1999, CRC Press, Boca Raton, Florida.

[5] Teixeira, E.V., Rossi, J. D., *A limiting free boundary problem ruled by Aronsson's equation.* (with J. Rossi). Accepted for Publication. Transactions of the American Mathematical Society.

[6] Savin, O., *C1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions,* preprint.

[7] Friedman, A., *Foundations of Modern Analysis,* Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[8] Whitney, H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets,* Trans. Amer. Math. Soc.**36** (1934), 63-89.

[9] McShane, E. J., *Extension of range of functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 837-842.

[10] Jensen, R. R., *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient,* Arch. Rational Mech. Anal. **123** (1993), 51-74.

[11] Barles, G., and Busca, J. Existence and comparison results for fully nonlinear degenerate elliptic equations without zeroth-order term, Comm. Partial Diff. Equations **26** (2001), 2323-2337.

[12] Aronsson, G., *Minimization problems for the functional supx F(x; f(x); f0(x)),* Ark. Mat. **6** (1965), 33-53.

[13] Aronsson, G., *Minimization problems for the functional supx F(x; f(x); f0(x)). II.*, Ark. Mat.**6** (1966), 409-431.

[14] Bhattacharya, T., DiBenedetto, E., and Manfredi, J., *Limits as* $p \to \infty$ *of* $\Delta_p u_p = f$ *and related extremal problems,* Some topics in nonlinear PDEs (Turin, 1989). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1989, Special Issue, 15-68 (1991).

[15] Aronsson, G.,*Extension of functions satisfying Lipschitz conditions,* Ark. Mat. **6** (1967), 551- 561.

[16] Crandall, M. G., and Zhang, J.,*Another way to say harmonic,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 241-263.

[17] Heinonen, J., Kilpellainen, T., and Martio, O.,*Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations,* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[18] Barron, E. N., Jensen, R. R., and Wang, C. Y.,*The Euler equation and absolute minimizers of L1 functionals*, Arch. Ration. Mech. Anal. 157 (2001), no. 4, 255-283.