



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

THIAGO FELÍCIO DE SOUZA

**PROPRIEDADES ELETRÔNICAS DE UMA BICAMADA DE GRAFENO COM
PONTE TIPO BURACO DE MINHOCA DE ELLIS-BRONNIKOV GENERALIZADO**

**FORTALEZA
2023**

THIAGO FELÍCIO DE SOUZA

PROPRIEDADES ELETRÔNICAS DE UMA BICAMADA DE GRAFENO COM PONTE
TIPO BURACO DE MINHOCA DE ELLIS-BRONNIKOV GENERALIZADO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

Coorientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

FORTALEZA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S236p Souza, Thiago Felício de.
Propriedades eletrônicas de uma bicamada de grafeno com ponte tipo buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado / Thiago Felício de Souza. – 2023.
90 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.
Coorientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.
1. Mecânica quântica bidimensional. 2. Potencial de da Costa. 3. Buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado. 4. Estados ligados. I. Título.

CDD 530

THIAGO FELÍCIO DE SOUZA

PROPRIEDADES ELETRÔNICAS DE UMA BICAMADA DE GRAFENO COM PONTE
TIPO BURACO DE MINHOCA DE ELLIS-BRONNIKOV GENERALIZADO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 03/04/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho
(Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Carlos Alonge Ramos
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

A Deus, aos meus pais
e
professores.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, pela minha família, pelos meus amigos e pelo apoio neste trabalho pois sem Ele, por meio do Espírito Santo, seria impossível finalizá-lo.

Aos meus professores, em especial, ao Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (UFC), ao Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (UFCA) e ao Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho (UFC). E aproveito para agradecer o apoio que tive do prof. Dr. Antônio Carlos Alonge Ramos (UFCA) na conclusão desta obra.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Ao pessoal da Pós-Graduação do Departamento de Física da UFC.

Aos meus amigos, colegas e contemporâneos.

RESUMO

Neste trabalho, investiga-se a equação de Schrödinger estacionária sem spin para o elétron quando este está permanentemente restrito a se movimentar numa superfície tipo buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado por meio de um potencial confinante. Verificou-se que a curvatura da superfície dá origem a um potencial geométrico que, conseqüentemente, afeta a dinâmica eletrônica. Os resultados analíticos são determinados nos casos limites $R \rightarrow 0$ e $u \rightarrow \infty$, e os qualitativos após a análise dos gráficos do potencial efetivo com a coordenada meridiano u . Com isso, vê-se que o caso da variedade lorentziana tipo-catenóide é um caso especial do modelo que trabalhamos, pois nos dá somente um poço de potencial, e que n controla a deformação do buraco de minhoca, diferente de R , que nos diz sobre o seu tamanho. A transição catenóide-cilindro é presente quando aumentamos n , ou seja, a escala de energia diminui no crescimento de n . Para $n > 2$, poços de potencial surgem simetricamente para $u = 0$ e tornam-se profundos quando se aumenta n , confinando o elétron nas bordas.

Palavras-chave: mecânica quântica bidimensional; potencial de da Costa; buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado; estados ligados.

ABSTRACT

In this work, we investigate the spinless stationary Schrödinger equation for the electron when it is permanently constrained to move in a generalized Ellis-Bronnikov wormhole surface is investigated means of a confined potential. It was verified that the curvature of the surface gives rise to a geometric potential that, consequently, affects the electronic dynamics. The analytical results are determined in the limiting cases $R \rightarrow 0$ and $u \rightarrow \infty$, and the qualitative ones after analyzing the graphs of the effective potential with the meridian-coordinate u . With this, it is seen that the case of the catenoid-type Lorentzian variety is a special case of the model we work with, since it only gives us a potential well, and that n controls the deformation of the wormhole, different from R , which tells us about its size. The catenoid-cylinder transition is present when we increase n , that is, the energy scale decreases as we grow n . For $n > 2$, potential wells appear symmetrically for $u = 0$ and become deeper when increasing n , confining the electron at the edges.

Keywords: two-dimensional quantum mechanics; da Costa's potential; generalized Ellis-Bronnikov wormhole; bound states.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – (a) Diagrama de mergulho para um buraco de minhoca que conecta dois universos diferentes. (b) Diagrama de mergulho para um buraco de minhoca que conecta duas regiões distantes do nosso próprio universo. Cada diagrama descreve a geometria de uma fatia equatorial ($\theta = \pi/2$) através do espaço em um momento específico ($t = \text{constante}$).</p>	19
<p>Figura 2 – Diagrama de mergulho para um buraco de minhoca qualquer, num corte de perfil, o qual deverá ser rotacionado em torno do eixo-z para obter o buraco de maneira completa.</p>	21
<p>Figura 3 – Sistema de coordenadas curvilíneas baseado em S de equação paramétrica $\mathbf{x}(q_1, q_2)$.</p>	31
<p>Figura 4 – Seção transversal C da superfície de encapamento cilíndrico de raio a. O ponto A é a origem para o arco s.</p>	34
<p>Figura 5 – Perto da garganta</p>	37
<p>Figura 6 – Longe da garganta</p>	37
<p>Figura 7 – Abaixo, o sistema de coordenadas, o vetor, $\vec{r} = f(u) \cos \phi \hat{i} + f(u) \sin \phi \hat{j} + h(u) \hat{k}$, localiza qualquer ponto no meridiano u em relação à origem do sistema de coordenadas. Para $n = 2$, a superfície convencional do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, que tem a geometria catenóide. Para $n = 4, 6, 8$ e 10, várias superfícies generalizadas de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov são apresentadas. Essas superfícies tendem a geometrias cilíndricas à medida que n aumenta. Aqui o raio, R, é 20 \AA.</p>	49
<p>Figura 8 – Sistema de coordenadas curvilíneas baseado na curva C de equação paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1)$. As coordenadas cartesianas q_2 e q_3 foram usadas para o plano normal P.</p>	77

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$ e $m = 1$	42
Gráfico 2 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = 1$, $E = 1$ kV/cm	43
Gráfico 3 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = \pm 1$, $E = 0$ e $B = 1$ T	45
Gráfico 4 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = \pm 1$, $E = 1$ kV/cm e $B = 1$ T	45
Gráfico 5 – Graficos ε e $ \Phi ^2$ versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $E = 0$ e $B = 1$ T	46
Gráfico 6 – Graficos ε e $ \Phi ^2$ versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = 0$, $m = 2$, $E =$ 1 kV/cm e $B = 1$ T	46
Gráfico 7 – Potencial de da Costa para três valores de n , a saber, $n = 2, 4$ e 6 . Considera- mos $R = 70$ Å para este gráfico.	50
Gráfico 8 – Potencial efetivo para $R = 70$ Å e $n = 2$, para alguns valores de m	52
Gráfico 9 – Potencial efetivo para $R = 70$ Å e $n = 4$, para alguns valores de m	53
Gráfico 10 – Potencial efetivo para $R = 70$ Å $n = 6$ e para alguns valores de m	54
Gráfico 11 – Os estados ligados e suas densidades de probabilidade para um buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov com raio $R = 70$ Å, $m = 0$ e $m^* =$ $0,03m_0$. A linha preta sólida representa o potencial efetivo para: a) $n = 2$, c) $n = 10$, e) $n = 20$ e g) $n = 40$. As linhas pontilhadas vermelhas e azuis corres- pondem ao estado fundamental e primeiro estado excitado e suas densidades de probabilidade, respectivamente.	55
Gráfico 12 – Os estados ligados e suas densidades de probabilidade para um buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov com raio $R = 70$ Å, $m = 1$ e $m^* =$ $0,03m_0$. A linha preta sólida representa o potencial efetivo para: a) $n = 18$, c) $n = 20$, e) $n = 30$ e g) $n = 40$. As linhas pontilhadas vermelhas e azuis corres- pondem ao estado fundamental e primeiro estado excitado e suas densidades de probabilidade, respectivamente.	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequências de oscilação para $R = 50 \text{ \AA}, 70 \text{ \AA}, 100 \text{ \AA}$ e 200 \AA , $n = 40$, $m = 0, 1$. 59

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

LISTA DE SÍMBOLOS

$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$	Base canônica cartesiana
$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$	Base móvel
$\alpha, \beta, \mu, \dots$	Índices coordenados
a, b, i, j, \dots	Índices não-coordenados
$i^2 = -1$	Unidade imaginária
e	Carga elétrica elementar
$c = 1$	Unidade métrica fundamental da velocidade da luz no vácuo unitária
δ_i^j	Delta de Kronecker
ϵ_{abc}	Símbolo de Levi-Civita
∇_i	Derivada covariante
A^T	Transporta da matriz A
Γ_{ij}^k	Conexões de Christoffel
e_a^α	Vierbeins
$\omega_{\mu\nu}^i$	Conexões não-coordenadas de Christoffel
g_{ij}	Métrica de um espaço curvo bidimensional ($i, j = 1, 2$)
\mathbf{x}, \mathbf{A} etc	Vetores do espaço euclidiano tridimensional
$\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{ij}$ etc	Derivada parcial de \mathbf{x} com respeito à coordenada espacial x^i , derivadas parciais de \mathbf{x} com respeito às coordenadas espaciais x^i e x^j etc
(r, ϕ)	Coordenadas polares usuais
(l, ϕ, z)	Coordenadas meridiano-paralelo
u, l	Coordenadas meridiano nas formas de Morris-Thorne e convencional
R	Raio da garganta
n	Parâmetro que dá a forma do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov ($n = 2, 4, 6, \dots$)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	BURACOS DE MINHOCA DE MORRIS-THORNE	18
2.1	A métrica	20
2.2	Condições de contorno para as funções <i>redshift</i> e forma na garganta	22
2.3	A família de espaços-tempo ultraestáticos de Ellis-Bronnikov	23
2.4	Diagramas de mergulho (<i>embedding</i>)	24
3	TEORIA DE MASSA EFETIVA DO ELÉTRON PARA O GRAFENO	26
3.1	Definição de massa efetiva	26
3.2	Comparação entre a massa de ciclotron e a massa efetiva	27
3.3	Aplicação ao grafeno	28
4	MECÂNICA QUÂNTICA BIDIMENSIONAL	29
4.1	A geometria de S e o superpotencial vinculante V_λ	30
4.2	A dinâmica $2 + 1$ para o elétron	32
4.3	Um exemplo: restrição tipo-cinta cilíndrica	34
5	PROPRIEDADES ELETRÔNICAS DA BICAMADA DE GRAFENO COM PONTE CATENÓIDE	36
5.1	Elétron numa superfície catenóide	36
5.1.1	<i>Efeitos geométricos</i>	40
5.1.2	<i>Campo elétrico constante</i>	43
5.1.3	<i>Campo magnético constante</i>	44
5.2	Estados ligados	44
6	SUPERFÍCIE GENERALIZADA TIPO-BURACO DE MINHOCA DE ELLIS-BRONNIKOV COM BICAMADA DE GRAFENO	48
6.1	Espaço-tempo do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado	48
6.2	Efeitos geométricos	51
6.3	Estados ligados	54
7	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER ELIMINANDO O TERMO NÃO-HERMITIANO	72
	APÊNDICE B – DINÂMICA UNIDIMENSIONAL DE SCHRÖDINGER SEM SPIN DO ELÉTRON: VÍNCULO SENDO UMA CURVA C DE CLASSE INFINITA	75
	APÊNDICE C – INVARIÂNCIA DE PARIDADE NA EQUAÇÃO DINÂMICA DO ELÉTRON NO CASO GENERALIZADO	78

APÊNDICE D – CURVATURAS MÉDIA E GAUSSIANA	81
APÊNDICE E – OBTENÇÃO POR CONEXÃO NÃO-COORDENADA DAS CURVATURAS GAUSSIANA E MÉDIA PARA O BURACO DE MI- NHOCA GENERALIZADO DE ELLIS-BRONNIKOV	88

1 INTRODUÇÃO

A noção de buraco de minhoca começou por Flamm, Einstein e Rosen [1, 2] e ainda foi desenvolvida por Wheeler [3]. Sabe-se que os buracos de minhoca surgem como uma espécie de solução das equações de campo de Einstein [5, 6]. Por meio de argumentos filosóficos, Weyl especulou sobre essas estruturas do espaço-tempo [7, 8] e, para a solução original de Einstein-Rosen, a garganta do buraco de minhoca não permite a passagem de objetos clássicos. No entanto, muitos argumentam que poderiam ligar partículas quânticas para formar emaranhados [9, 10].

Do ponto de vista topológico [11], pode-se pensar em um buraco de minhoca como um túnel conectando duas regiões assintoticamente planas do mesmo universo ou de dois universos diferentes. Uma das características mais importantes dos buracos de minhoca é a ideia de atravessabilidade (viagem no tempo, p. ex.), estudada pela primeira vez por Morris e Thorne [11]. Desde o trabalho de Morris e Thorne se consolidou a ideia de que construir um buraco de minhoca que seja atravessável é necessário matéria exótica¹ como fonte [11]. Portanto, a busca por buracos de minhoca atravessáveis em teorias alternativas da gravidade [12–26] sem a necessidade de matéria exótica é um intenso tópico de pesquisa.

A primeira solução atravessável para um buraco de minhoca foi encontrada por Ellis e Bronnikov [27, 28]. Em seu trabalho, Bronnikov percebeu, com evidência, que o dreno de Ellis é geodesicamente completo, sem horizontes de eventos², com singularidade livre e com transitabilidade independente da direção [27, 28]. Além disso, sabendo que a fonte de campo escalar do buraco de minhoca é fantasma, então, todas as condições de energia da Relatividade Geral (GR) são violadas.

Na física de baixas energias, nanoestruturas bidimensionais, como o grafeno [29–31] e o fosforeno [32], têm chamado a atenção devido às suas propriedades incomuns, tais como algumas levam destaque: condutividade elétrica, condutividade térmica, propriedade ótica e resistência. As propriedades eletrônicas de tais sistemas bidimensionais são altamente dependentes da geometria por natureza [33–35], conseqüentemente, podem ser usadas como modelos análogos para sistemas físicos de alta energia [16, 36–42]. Além disso, o efeito da curvatura em tais sistemas bidimensionais abre a possibilidade de construção de novos dispositivos eletrônicos baseados em estruturas curvas de grafeno. Isso motivou o estudo do grafeno em diversas superfícies curvas, como Möbius-strip [43], ondulações [44], superfícies onduladas [45], catenoid [46–49], Torus [50–52], parabolóide [53], esferas [54], entre outros [55, 56].

Como uma superfície mínima (curvatura média nula), a geometria bidimensional do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov é equivalente a uma catenóide [46]. Na Ref. [57, 58]

¹É toda matéria tomada como fonte de campo-energia cujas soluções das equações de Einstein violam as condições usuais de energia.

²É o limite clássico de “escape” da luz num buraco negro.

foi proposta uma ponte conectando uma bicamada de grafeno usando um nanotubo. Para obter uma ponte de ligação suave, Ref. [59, 60], sugeriu-se uma superfície catenóide para descrever a bicamada e a ponte usando apenas uma superfície. Isso pode ser conseguido devido à curvatura da catenóide que se concentra em torno da ponte e desaparece assintoticamente [46]. Para elétrons não relativísticos, a curvatura da superfície induz um potencial geométrico na equação de Schrödinger. Os efeitos da geometria e campos elétricos e magnéticos externos sobre a ponte catenóide de grafeno foram explorados na Ref. [46], onde um único elétron é governado pela equação de Schrödinger na superfície. Aliás, a influência de um problema de massa dependente da posição sobre o elétron em uma ponte catenóide foi estudada em Ref. [48], onde foi proposta uma massa isotrópica dependente da posição em função das curvaturas gaussiana e média. Em [61], os autores descrevem por princípios básicos as propriedades eletrônicas de camadas de grafeno conectadas por nanotubos de carbono (CNT, que é uma sigla em inglês de *Carbon Nanotubes*). Eles relatam que, para CNTs metálicos, a condutância é quase independente do comprimento do nanotubo, mas altamente dependente da ligação entre as camadas de grafeno e o CNT. O oposto acontece para CNT's semicondutores, ou seja, a condutância agora é dependente do comprimento do nanotubo e independente da ligação entre as camadas de grafeno ao CNT.

Conectar camadas de grafeno através de pontes é um tema amplamente abordado na literatura também pela comunidade experimental [62]. Em [62], os autores relatam a síntese de estruturas de carbono auto-organizadas nas quais as camadas de grafeno são conectadas perpendicularmente entre si por nanotubos de carbono.

Neste trabalho, propõe-se um modelo teórico para investigar a equação de Schrödinger estacionária sem spin para o elétron quando ele está permanentemente ligado a uma superfície tipo buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado de grafeno com bicamada no limite contínuo. O buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado é caracterizado por uma função que controla deformações discretas de uma catenóide para um cilindro. A curvatura dá origem a um potencial geométrico afetando assim a dinâmica eletrônica. Discute-se o papel desempenhado pelo parâmetro n que controla a deformação (está, portanto, relacionado à ligação entre as camadas de grafeno e a ponte) e o momento angular orbital em estados ligados e densidade de probabilidade para o elétron.

No Capítulo 2, será estudado o buraco de minhoca atravessável desenvolvido por Morris-Thorne, mostrando a sua métrica, as condições de contorno das funções *redshift* e a forma dessa métrica, a família de buracos ultraestáticos de Ellis-Bronnikov, e finalmente, abordando um pouco sobre o mapeamento induzido euclidiano da sua estrutura. Isso servirá como um embasamento para que seja entendida a estrutura espaço-tempo de um buraco de minhoca dessa natureza, já que o de Ellis-Bronnikov é obtido quando são impostas condições sobre as funções Φ (*redshift*) e b (forma).

No Capítulo 3, faremos também uma discussão rasa sobre a teoria de massa efetiva usada para o grafeno, apontando quais definições de massa efetiva são apropriadas para sólidos

parabólicos e não-parabólicos. E ainda, por motivação, provaremos a massa de cíclotron de sistemas físicos de estado sólido, comparando com a teoria geral de massa efetiva.

No Capítulo 4, estudaremos a Mecânica Quântica em superfícies com grandes potenciais de confinamento, sendo o nosso formalismo-padrão usado na tese. Veremos a diferença entre vínculos geométricos e de potenciais superconfinantes. Geometricamente, obteremos a dependência da métrica induzida (métrica de um vínculo estruturado sob um superpotencial) com a métrica do espaço euclidiano propriamente dito. Depois, montaremos a equação de Schrödinger do elétron sujeito a altos potenciais restritivos, e usando coordenadas induzidas e transversal, demonstraremos, sob dadas condições, o potencial de da Costa. Damos um exemplo de aplicação disso no final do capítulo. Ressalto que no Apêndice B fizemos uma abordagem da dinâmica quântica do elétron em curvas vinculantes também construídas sob superpotenciais.

No Capítulo 5, discutimos com detalhes o caso catenóide ($n = 2$) para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, em que a dinâmica do elétron é estudada no limite não-relativístico. Calcularemos os símbolos de Christoffel, as curvaturas gaussiana e média, conhecendo já a métrica induzida, depois, no espaço 2-euclidiano, montaremos a equação de Schrödinger para o elétron sem spin, estudando as suas soluções com somente potencial geométrico (sem campos externos) e com potenciais elétrico e magnético, chegando aos níveis de Landau. Nisso, concluindo que teremos somente um poço de potencial simétrico (sem campos externos) e assimétrico (com campos externos). O potencial geométrico é o de da Costa e o confinante. A relação entre eles se dá pelo momento angular do elétron.

No Capítulo 6, faremos um itinerário idêntico ao do capítulo antecessor, onde para $n > 2$, não tratamos os casos com campos externos. Somente o efeito geométrico foi estudado. Nos Capítulos 5 e 6, usamos o formalismo de 1ª e 2ª formas fundamentais de uma superfície para calcular as curvaturas gaussiana e média. No Apêndice E, demonstramos esse cálculo usando as conexões não-coordenadas de Christoffel, resolvendo implicitamente as equações de Cartan para a torsão livre.

2 BURACOS DE MINHOCAS DE MORRIS-THORNE

Neste capítulo, discutiremos o artigo de Morris-Thorne [11], em algumas seções, para mostrar o porquê da escolha de buracos de minhoca atravessáveis. A atravessabilidade desses objetos exige duas coisas: ausência de quaisquer singularidades e de horizontes de eventos neles. Sem isso, é impossível a viagem no tempo, mesmo, feita por um flash de luz. Veremos como se dá a construção dos buracos de minhoca atravessáveis desenvolvidos por eles no final do século XIX.

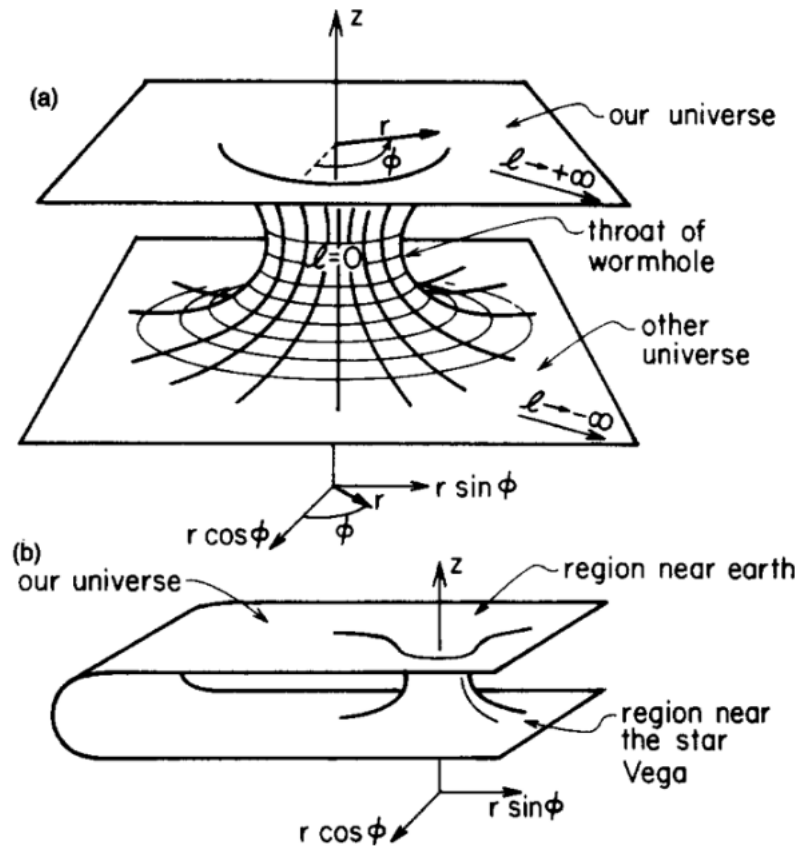
Antes disso, falaremos sobre as coordenadas meridiano (l) e paralelo (ϕ). Na Figura 1(a), a coordenada l varia de $-\infty$ a ∞ , sendo nula na garganta. Ela é totalmente diferente da coordenada radial polar r ($0 \leq r < \infty$). A relação entre r e l é $r^2 - l^2 = R^2$ (relação que permite obter as regiões assintóticas do buraco de minhoca, ou seja, $l \rightarrow \pm\infty$) [63], sendo R o raio da garganta, já que, para $l = 0$, temos $r = R$. A coordenada paralelo ϕ será a coordenada polar usual, com $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Se escolhermos uma parametrização conveniente para o buraco de minhoca, a coordenada z , com eixo perpendicular ao plano xy , depende de l e ϕ , de forma geral. Se houver simetria axial do buraco de minhoca, $z = z(l)$ e é par. A sua inversa $l = l(z)$ também tem essa paridade. Para os nossos interesses, a parametrização $\mathbf{x} = \mathbf{x}(l, \phi)$ (raio vetor que liga a origem de $z\phi$, que é $(x = 0, y = 0, z = 0)$, a um ponto (l, ϕ, z)) será $\mathbf{x} = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$, com $r = r(l)$ e $z = z(l)$.

Tendo se familiarizado com essas coordenadas, iremos escrever tudo em termos de l e ϕ . Um buraco de minhoca é uma estrutura do espaço-tempo obtida das equações de campo de Einstein da Relatividade Geral. A topologia nos diz que, tal região é uma junção de duas regiões assintoticamente planas por meio de um túnel (*drainhole*). É evidente que a conexão deverá ser suave, permitindo que a parametrização do buraco seja infinitamente diferenciável. É bom ressaltar aqui que o termo “buraco de minhoca” não foi dado por eles mas por Wheeler, às chamadas pontes Rosen-Einstein [2]. Outros, antes de Morris e Thorne, descobriram esses tipos de estrutura do espaço-tempo, como Schwarzschild [4]. Mas, todos esses objetos admitiam alguma singularidade.

O caminho usual, em Relatividade Geral, de se estudar a presença de singularidades em soluções das equações de Einstein é muito exaustivo, pois consiste numa abordagem de campo clássico da fonte-matéria [81]. Vendo isso, a forma tomada por Morris-Thorne é simples e fácil, pois considera-se uma métrica respeitando o seguinte rol de condições físicas. E posteriormente por meio das equações de Einstein, determinar o tipo de setor de matéria associado:

- A métrica deve ser estática e esfericamente simétrica. Isso é somente para simplificar as contas. Perturbações esféricas ou não podem deixar um buraco de minhoca instável;
- A solução deve, em qualquer lugar, obedecer as equações de campo de Einstein. A correção dada pela Relatividade Geral será assumida. Pelo teorema de Birkhoff [6], para

Figura 1 – (a) Diagrama de mergulho para um buraco de minhoca que conecta dois universos diferentes. (b) Diagrama de mergulho para um buraco de minhoca que conecta duas regiões distantes do nosso próprio universo. Cada diagrama descreve a geometria de uma fatia equatorial ($\theta = \pi/2$) através do espaço em um momento específico ($t = \text{constante}$).



Fonte: Retirada de [11].

um tipo de vácuo, podemos obter um buraco de minhoca esfericamente simétrico das equações de Einstein: buraco não-atravesável de Schwarzschild. Buracos atravesáveis devem ser encadeados pela matéria ou campos tendo um tensor momento-energia não-nulo (não coincide com o do vácuo);

- A solução deve possuir uma garganta (túnel) conectando duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo. Um diagrama de mergulho equatorial deve ter, qualitativamente, a forma da Figura 1;
- A métrica não pode possuir horizonte de eventos. Se houver pelo menos um, a viagem nos sentidos de ida e volta no túnel seria impedida. Em qualquer espaço-tempo assintoticamente plano, incluindo o do buraco de minhoca, é fácil identificar horizontes. Eles aparecem como superfícies fisicamente não-singulares, tais que, $e^{2\Phi} \rightarrow 0$ (desaparecimento do *lapse* de tempo adequado durante qualquer tempo de coordenada finita). O buraco de Schwarzschild (não-atravesável) ocorre na garganta. Os buracos atravesáveis não possuem horizontes de eventos porque a função $\Phi(r)$ é finita para qualquer r ;
- As forças de maré gravitacionais sentidas por um viajante devem ser suportavelmente

pequenas [11];

- O tempo de viagem deve ser finito e razoavelmente curto (menor que um ano), para o referencial do viajante ou para os referenciais atrás e à frente dele no buraco de minhoca;
- A matéria e os campos que geram a curvatura do espaço-tempo do buraco de minhoca devem ter um tensor de momento-energia razoável. A forma desse tensor é restrita diante dos seis pontos anteriores. E isso viola o que chamamos de “fisicamente razoável”. Disso, toma-se alguns cuidados para minimizar a violação da razoabilidade física;
- O buraco de minhoca deve ser perturbavelmente estável. Usar isso nos obrigaria a usar uma análise temporal e sem simetria esférica, que supera o nosso objetivo nesse trabalho. A falta de um entendimento detalhado da matéria exótica, que gera o buraco de minhoca, deixa impossível dizer algo concreto sobre a estabilidade desse buraco para pequenas ou grandes perturbações (p. ex., aquelas produzidas por uma espaçonave atravessando a conexão desse buraco). Um buraco de minhoca, sendo estável ou estabilizado, possui uma estrutura espacial que persiste sobre o tempo, que é bastante diferente de um buraco branco anti-horizonte ou túnel de Kerr (horizonte de Cauchy). Esse último para um observador físico tem localização transiente (dura pouco a sua existência). O buraco é um entidade tipo-tempo e o túnel de Kerr, tipo-espaço. Essa diferença torna-se muito mais fácil para uma civilização avançada estabilizar um buraco de minhoca do que um anti-horizonte (horizonte de Cauchy);
- Deve ser possível montar um buraco de minhoca. Por exemplo, a montagem deve exigir muito menos que a massa do universo e muito menos que a idade do universo. Embora não se saiba o suficiente para permitir uma análise quantitativa, o conhecimento atual da gravidade quântica sugere que a montagem pode ser possível. A montagem pode parecer especialmente assustadora porque implica uma mudança na topologia do espaço; e na relatividade geral clássica tais mudanças provavelmente envolvem singularidades do espaço-tempo, que só serão devidamente compreendidas após a gravidade ter sido quantizada com sucesso. Por outro lado, há fortes razões para acreditar que em escalas de comprimento da ordem do comprimento de Planck-Wheeler, os efeitos da gravidade quântica dominam e produzem uma estrutura de espaço-tempo multiplamente conectada semelhante a uma espuma [11].

2.1 A métrica

Um buraco ser esfericamente simétrico tornaria algumas dessas restrições tênues, por ser uma geometria trivial. A atravessabilidade não é somente para objetos de matéria. Um sinal luminoso viaja sem nenhum problema pela conexão, tornando “as forças de maré negligenciáveis” e “o tempo de viagem razoavelmente curto” mas confortáveis na discussão.

Desse jeito, um buraco de minhoca de Morris-Thorne será estático, simetricamente esférico e irrotacional, conectando duas regiões assintoticamente planas. Em termos de l (coordenada meridiano ou distância radial própria), a métrica que descreverá, sem perda de generalidade, esse objeto será

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

onde $l \in (-\infty, \infty)$, e as regiões planas aparecem para $l = \pm\infty$. A função $\Phi(l)$ tem que ser finita no espaço-tempo assegurando o não-aparecimento de horizonte de eventos. Para que tenhamos uma geometria assintoticamente plana para o buraco, devemos ter

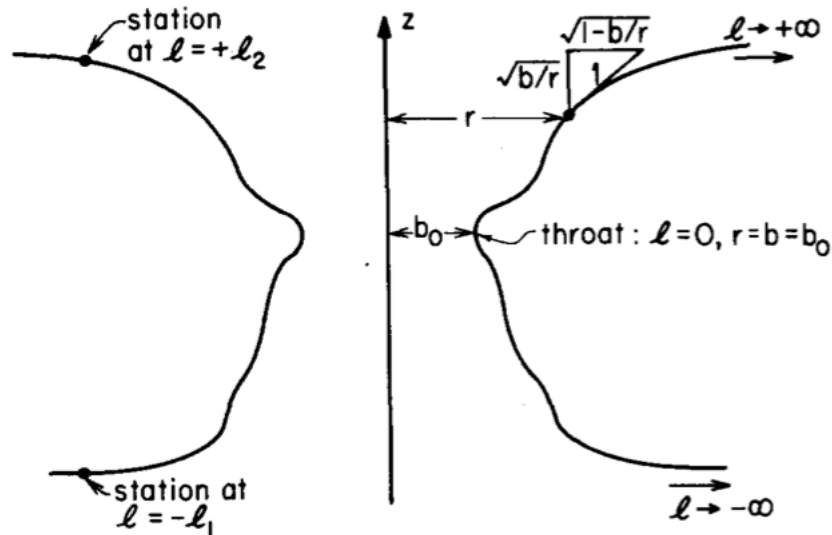
$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \frac{r(l)}{|l|} = 1, \quad (2.2)$$

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \Phi(l) = \Phi_{\pm}, \quad (2.3)$$

onde Φ_{\pm} são finitos. A (2.2) é parcial pois só pega a parte espacial, diferente da (2.3). A *garganta* é definida como sendo o mínimo de r , tal que $l = 0$. Ou seja

$$R = r_{\text{mín}} = r(0). \quad (2.4)$$

Figura 2 – Diagrama de mergulho para um buraco de minhoca qualquer, num corte de perfil, o qual deverá ser rotacionado em torno do eixo- z para obter o buraco de maneira completa.



Fonte: Retirada de [11].

Vendo a Figura 2, nota-se facilmente isso pois nunca teremos um $r < r_{\text{mín}}$, ou seja, a garganta sempre será um anel e jamais, um ponto, que seria a origem cartesiana $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

A função $r(l)$ é inversível e não-monotônica decrescente de $r \rightarrow \infty$ a $r = R$, ou seja, $l(r)$, que pode ser positiva ou negativa. Na garganta, $l_+(R) = l_-(R) = 0$. Disso, (2.1) pode ser

reescrita como

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 + \left(\frac{dl_{\pm}}{dr} \right)^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.5)$$

notando que colocamos duas funções para Φ , na dependência, também, de r . Colocando ainda (2.5) nas coordenadas de Schwarzschild, vem

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.6)$$

tal que

$$l_{\pm}(r) = \pm \int_R^r \left(1 - \frac{b_{\pm}(r')}{r'} \right)^{-1/2} dr', \quad (2.7)$$

e $\Phi(r)$ e $b(r)$ são, respectivamente, denominadas de funções *redshift*¹ e forma. Há duas possibilidades de cobrir $[R, \infty)$: acima da garganta ou abaixo da garganta. Em termos de r , (2.2) e (2.3) serão reescritas como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b_{\pm}(r)}{r} = 0, \quad (2.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \Phi_{\pm}. \quad (2.9)$$

2.2 Condições de contorno para as funções *redshift* e forma na garganta

O raio da garganta definido em (2.4) nos diz que

$$\frac{dl}{dr} \rightarrow \infty,$$

para $l = 0$. Ou seja, de (2.7), é evidente que a 1ª condição de contorno será dada por

$$b_+(R) = b_-(R) = R. \quad (2.10)$$

A outra condição de mínimo para $r(l)$ ocorrerá pela concavidade positiva. Ou seja

$$\frac{d^2 r}{dl^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{\pm}(r) - r b'_{\pm}(r)}{r^2} \right) > 0,$$

ou seja, na garganta

$$b'_{\pm}(R) < 1. \quad (2.11)$$

A região $r < R$ não pode ser mapeada, então,

$$b_{\pm}(r) \leq R, \quad r \leq R. \quad (2.12)$$

¹Essa função controla o efeito de maré sobre o viajante, ou seja, o efeito gerado pelas forças gravitacionais de maré.

2.3 A família de espaços-tempo ultraestáticos de Ellis-Bronnikov

Em 1973, Ellis e Bronnikov, independentemente, entre si, obtiveram um espaço-tempo gerado por uma fonte de campo escalar tipo-phantom (matéria exótica) [27,28]. Geometricamente falando, essa estrutura da Relatividade Geral possui uma variedade estática, esfericamente simétrica, geodesicamente completa e sem horizonte de eventos, possuindo uma ponte (*drainhole*) conectando suavemente duas regiões assintoticamente planas. A métrica associada é da forma

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.13)$$

Comparando (2.6) com (2.13), conclui-se que

$$\Phi(r) = 0, \quad b(r) = \frac{R^2}{r}. \quad (2.14)$$

Se as condições necessárias de Morris-Thorne [11] para construir uma variedade Lorentziana são levadas em conta, então, existem uma família de buracos de minhoca com Φ e b conhecidos. Um membro dela seria o de Ellis-Bronnikov. Em [63], foi sugerida uma versão generalizada para (2.13), dependendo de dois parâmetros dimensionais: n e R , obtendo assim uma família de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov dentro daquela de Morris-Thorne onde Φ e b foram particularizados. A motivação por trás de tal construção foi estudar a geodésica e a propagação de campos escalares para uma classe mais ampla de espaços-tempos de buracos de minhoca. Por causa das ressonâncias no coeficiente de transmissão para $n > 2$, geometrias para $n > 2$ são distintas das geometrias para $n = 2$. Em termos de distância radial própria l , a métrica generalizada de Ellis-Bronnikov será dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.15)$$

onde

$$r(l) = (l^n + R^n)^{1/n}, \quad (2.16)$$

sendo que $n = 2, 4, 6, \dots$ assume somente valores pares justamente para tornar $r = r(l)$ uma função bem comportada (suave) no domínio dos inteiros para qualquer $l \in (-\infty, \infty)$. Perceba que quando tomamos $l = 0$ em (2.16), recuperamos a condição mínima para r , ou seja, $r(0) = R$. E ainda

$$\left. \frac{d^n r}{dl^n} \right|_{l=0} > 0, \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots$$

Agora, encontremos $b(r)$. Sabemos que $dl^2 = dr^2 / (1 - b(r)/r)$, então, de (2.16),

$$\frac{dr}{dl} = l^{n-1} (l^n + R^n)^{1/n-1}.$$

Derivando isso novamente, temos

$$\frac{d^2 r}{dl^2} = (n-1)r^{1-2n}(r^n - R^n)^{1-2/n}R^n,$$

$$b(r) - rb'(r) = r - r^{3-2n}(r^n - R^n)^{2-2/n} - r \frac{d}{dr} \left(r - r^{3-2n}(r^n - R^n)^{2-2/n} \right),$$

ou seja, a forma explícita de $b(r)$ será

$$b(r) = r - r^{3-2n}(r^n - R^n)^{2-2/n}. \quad (2.17)$$

As componentes da métrica (2.15) não dependem do tempo e, portanto, todos os fateamentos $t = \text{constante}$ serão idênticos. Isso implica que os buracos de minhoca generalizados de Ellis-Bronnikov são ultraestáticos com simetria puramente esférica.

2.4 Diagramas de mergulho (*embedding*)

Vimos que a nossa métrica tem duas simetrias presentes: no tempo e na esfera. Isso significa que $dt = 0$ e $d\theta = 0$, disso, $d\Omega_2 = d\phi^2$, com fateamento espacial $\theta = \pm\pi/2$, ou sem perda de generalidade, $\theta = \pi/2$ (plano equatorial). É evidente que isso nos dá uma outra simetria, que é axial, ou seja, devemos fazer o mergulho da nossa métrica no 3-espaço euclidiano cuja métrica é dada por (veja a Figura 2)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (2.18)$$

que nos diz sobre a forma do buraco de minhoca estudado. Esse espaço é induzido e servirá para mapearmos os pontos (t, l, ϕ, θ) de (2.15) sobre o cilindro infinito de raio r (2.18). Para $n = 2$, temos

$$ds^2 = \left(\frac{l^2}{l^2 + R^2} + \left(\frac{dz}{dl} \right)^2 \right) dl^2 + (l^2 + R^2) d\phi^2,$$

ou seja

$$\frac{dz}{dl} = \pm \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}},$$

isso já nos dá, usando $z(0) = 0$, que

$$z(l) = R \operatorname{arcsinh} \left(\frac{l}{R} \right). \quad (2.19)$$

No caso geral $n > 2$, o procedimento é análogo ao que fizemos anteriormente. Ou seja

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R^2}{(l^n + R^n)^{2/n}} + \left(\frac{dz}{dl} \right)^2 \right) dl^2 + r^2 d\phi^2,$$

isto é

$$z(l) = \pm R \int_0^l \frac{dl'}{(l'^n + R^n)^{1/n}}. \quad (2.20)$$

Não é possível resolvermos (2.20) analiticamente, mas, a paridade de $z = z(l)$ continua sendo ímpar independentemente de n . O não-conhecimento da forma explícita de $z(l)$ não impede os cálculos das curvaturas gaussiana e média do buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov. Vamos estudar o comportamento assintótico desse objeto tomando $l \rightarrow \infty$ em $z(l)$. No caso catenóide ($n = 2$), vem

$$z(l) \cong l,$$

que é um plano assintótico passando pela origem $l = 0$ e $z = 0$. Isso significa que nessa região, temos regiões planas.

No capítulo seguinte, discutiremos, sucintamente, a teoria sobre massa efetiva do elétron para sólidos (parabólicos e não-parabólicos) de acordo com suas dispersões energéticas, que podem ser quadráticas ou não. O grafeno, que é o nosso objeto de estudo, é um sólido não-parabólico, com isso, é preciso buscar outras alternativas para definir a massa efetiva de um elétron que se move sobre ele.

3 TEORIA DE MASSA EFETIVA DO ELÉTRON PARA O GRAFENO

Neste capítulo, faremos uma apresentação rasa da teoria de massa efetiva do elétron para sólidos ditos parabólicos e não-parabólicos. Em nosso trabalho, usamos a massa efetiva do elétron como sendo uma constante e isso é uma aproximação boa para descrever a dinâmica dele nas camadas de grafeno, que é um material com dispersão de energia não-quadrática. Em materiais cuja física é de estado sólido, usam-se várias definições para a massa efetiva do elétron, tais como: condutividade, densidade de estados, óptica e massa efetiva de cíclotron [82–85]. É muito comum que teoricamente usemos a massa efetiva como sendo dada por uma derivada de segunda ordem na energia, porém, isso só serve para materiais parabólicos, cuja dispersão na energia é quadrática. Diante disso, materiais não-parabólicos devem ter uma nova definição para a massa efetiva, como o grafeno [86, 87]. Em trabalhos recentes [88], foi apresentada uma expressão de massa efetiva consistente para materiais parabólicos e não-parabólicos. Essa proposta satisfaz a definição experimental de massa efetiva de cíclotron. No grafeno, usando essa definição, mostraremos que existe uma dependência linear entre massa de cíclotron e momento linear.

3.1 Definição de massa efetiva

Trataremos partículas como pacotes de onda no contexto semiclássico tradicional. Esse tipo de abordagem é o padrão adotado na discussão da física do estado sólido para cálculos de estrutura de banda de energia e de propriedades de transporte de carga. Aplicando a dualidade onda-partícula, associamos a velocidade da partícula com a velocidade de grupo do pacote de onda e o momento da partícula com o momento do cristal $p = \hbar k$. Então

$$v = v_g \cong \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}. \quad (3.1)$$

A massa efetiva surge como um fator de proporcionalidade entre o momento da partícula e a velocidade de grupo do pacote de onda, ou seja

$$p = \hbar k \cong m^* v_g. \quad (3.2)$$

Com (3.1) e (3.2), temos

$$m^*(E, k) = \frac{p}{v_g} = \hbar^2 k \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1}, \quad (3.3)$$

que depende geralmente da energia e do momento. Essa expressão foi desenvolvida em [86, 88] e é chamada muitas vezes de massa efetiva óptica [83]. Em física do estado sólido, usa-se demasiadamente como definição de massa efetiva esta expressão [85]

$$m^* = \frac{1}{\partial^2 E / \partial k^2}. \quad (3.4)$$

Esta definição é obtida usando uma condição implícita da relação parabólica $E(k)$, com isso, não pode ser usada para uma restrição não-parabólica entre E e k [88]. Note que (3.3) serve para materiais não-parabólicos, como o grafeno. Disso, (3.4) é usada para materiais parabólicos.

3.2 Comparação entre a massa de cíclotron e a massa efetiva

Na presença de um campo magnético externo constante, a componente de \vec{k} , dada por $\mathbf{k}_{//}$, na direção do campo será uma constante de movimento, diferente da componente ortogonal ao campo, \mathbf{k}_{\perp} , que mudará com o tempo de acordo com o movimento do elétron no \mathbf{k} -espaço numa linha fechada com energia constante. A trajetória do elétron é espiralada cuja projeção perpendicular ao plano é um caminho fechado tanto no espaço real quanto no espaço dos momentos. Para um elétron livre, a frequência ciclôtrônica ressonante será dada por

$$\omega_c = \frac{eH}{m^*c}, \quad (3.5)$$

que nos leva a uma massa efetiva dada por [82]

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial A(E)}{\partial E}, \quad (3.6)$$

onde $A(E)$ é a área de contorno do caminho fechado no \mathbf{k}_{\perp} -espaço que é percorrido por um elétron com energia E constante. Sem espalhamento, a trajetória da partícula num material isotrópico é um círculo perpendicular à direção do campo e portanto

$$A(k) = \pi k^2. \quad (3.7)$$

Nesse material, usando (3.6), vem

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial A(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial E} = \frac{\hbar^2}{2\pi} (2\pi k) \frac{\partial k}{\partial E} = \hbar^2 k \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1}. \quad \square$$

Ou seja, a massa efetiva de cíclotron para um material isotrópico é igual à massa efetiva dada por (3.3). Este resultado permaneceria correto para qualquer relação de dispersão $E(k)$ desde que o material fosse isotrópico. Podemos obter desde (3.3), a frequência dada por (3.5). A equação de movimento para \mathbf{k}_{\perp} será

$$\hbar \frac{\partial \mathbf{k}_{\perp}}{\partial t} = -\frac{e}{c} \mathbf{v}_g \times \mathbf{H}. \quad (3.8)$$

Sendo \mathbf{k}_{\perp} e \mathbf{v}_g perpendiculares a \mathbf{H} , podemos usar (3.2), disso

$$\hbar \omega_c k = \frac{e\hbar k H}{m^*c} \implies \omega_c = \frac{eH}{m^*c}. \quad \square$$

Provamos usando a abordagem semiclássica anteriormente dita.

3.3 Aplicação ao grafeno

O gás de elétrons bidimensional observado no grafeno pode ser descrito pela seguinte relação isotrópica $E(k)$ na vizinhança dos pontos de Dirac [31]

$$E \cong \hbar k v_F, \quad (3.9)$$

onde v_F é a velocidade de Fermi. Usando (3.1), obtemos

$$v = \frac{1}{\hbar} (\hbar v_F) = v_F. \quad (3.10)$$

E por (3.3)

$$m^* = \hbar^2 k \frac{1}{\hbar v_F} = \frac{\hbar k}{v_F} \cong \frac{p}{v_g}. \quad (3.11)$$

A dependência linear acima da massa efetiva da partícula no grafeno foi confirmada pelas medidas de ressonância ciclotrônica [31]. No grafeno, a massa efetiva parabólica (3.4) nos leva a uma expressão divergente. A definição proposta da massa efetiva (3.3) pode ser sucessivamente aplicada ao grafeno e pode ser experimentalmente verificada.

Como dito no Capítulo 1, no próximo capítulo, veremos como se dá a dinâmica quântica de uma partícula sem spin sobre uma superfície induzida de um espaço tridimensional que a contém. O contexto oferecido para o movimento dela é não-relativístico, ou seja, usaremos a abordagem de Schrödinger para obter propriedades geométricas consequentes de seu movimento altamente vinculado.

4 MECÂNICA QUÂNTICA BIDIMENSIONAL

Neste capítulo, será abordada a dinâmica quântica de Schrödinger de uma partícula sem spin e que tem massa m numa superfície. Faremos isso propositalmente para chegar à expressão do potencial de da Costa, que é um tipo de potencial vinculante usado nesse trabalho. Esse potencial é caracterizado como “vinculante” para garantir que a partícula jamais perca contato com a superfície. Nos próximos capítulos, além desse potencial, teremos outro que será responsável por repelir a partícula da conexão entre as camadas.

Na Mecânica Clássica [89], é comum tratar o movimento de um ponto material de duas maneiras bem distintas representadas pelas seguintes abordagens: (i) newtoniana e (ii) lagrangeana. A (i) necessita que forças externas ao sistema sejam consideradas, porém, os vínculos geométricos $f(\mathbf{x}, t) = 0$ serão dispensados, dando liberdade no movimento da partícula¹. Já a (ii) requer essas limitações cinemáticas, sem haver preocupação vetorial sobre tais forças, mesmo aquelas oriundas desses vínculos. Para uma partícula sujeita a um vínculo, o número de graus de liberdade será reduzido, pois nesse caso, $3 \cdot 1 - 1 = 2$ (movimento numa superfície, por exemplo). Em (i), evidentemente, teremos $3 \cdot 1 - 0 = 3$ graus de liberdade (translações espaciais), pois não há vínculos nessa situação.

As restrições consideradas serão holonômicas [89], isto é, podem ser diferenciadas com o tempo gerando outros vínculos da forma

$$g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0,$$

sendo integráveis, retomando $f(\mathbf{x}, t)$. Outra consideração a ser apontada é que essas restrições não se deformam ou movem com o tempo, permitindo a invariância de f e g diante da translação temporal.

Infelizmente, pelo princípio da Incerteza de Heisenberg, as posições e velocidades das partículas são indetermináveis no sentido de lei de correspondência com o tempo², mas, as forças de vínculo ainda serão normais às restrições, possibilitando naturalmente “localizar” a partícula em dado instante t . E além disso, forças de compressão (associadas aos vínculos) serão infinitas impossibilitando o espalhamento transversal dos pacotes de onda, inclusive quando não houver curvatura em f .

Assim, considerar-se-á a dinâmica quântica de uma partícula usando (i) porque poderão ser esquecidas todas as propriedades do espaço externo, em algum momento, e cair no erro de trabalhar paralelamente ao tratamento de um procedimento de quantização adequado para o movimento curvo [33], *a priori*. Sabe-se que forças de vínculo devem ser conservati-

¹O movimento livre da partícula é quando restrições não interferem em seu movimento, apesar de forças externas não-vinculantes existirem sobre ela.

²Diferente da mecânica de Newton, isso não acontece porque podemos resolver equações diferenciais de movimento e obter claramente a posição, a velocidade etc de uma dada partícula com o tempo, sob dadas condições iniciais apropriadas.

vas, e contudo, normais às restrições. Como (i) não permite vínculos, serão exigidas forças espaciais cujos potenciais são constantes e limitados neles, e divergem fora deles. Quando a partícula sair deles, surgirão reações infinitas de confinamento em regiões vizinhas a eles, que farão a partícula permanecer neles. Em outras palavras: todas as restrições a serem discutidas aqui serão agentes limitantes desses potenciais atrativos que são infinitos no espaço e servirão para comprimir a partícula nelas. Para um potencial limite que não dependa do tipo de potencial de compressão, é preciso que haja algum tipo de separação da equação de Schrödinger na qual a parte da superfície da função de onda obedeça a uma equação especial que não contenha a variável transversal (q_3 , nesse caso) que aparece no potencial restritivo. Dar-se-á ênfase ao vínculo superficial S . No Apêndice B, o leitor tem acesso à discussão unidimensional e quântica do movimento da partícula, ou seja, o vínculo do potencial confinante será uma curva suave C . Este capítulo é uma reprodução do artigo do da Costa [33], com o objetivo de falar um pouco sobre a dinâmica de partículas sem spin sujeitas a restrições de natureza potencial e não geométrica como é feito pela mecânica clássica.

4.1 A geometria de S e o superpotencial vinculante V_λ

Seja uma superfície regular S contida num espaço tridimensional gerado pela base \hat{q}_a ($a = 1, 2, 3$), tais que, $\hat{q}_a \hat{q}^b = \delta_a^b$. Uma parametrização local (P) de S será da forma $\mathbf{x}(q_1, q_2)$, e um ponto qualquer Q , fora de S , terá localização imediata $\mathbf{X}(q_1, q_2, q_3)$ dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + q_3 \mathbf{N}(q_1, q_2), \quad (4.1)$$

sendo q_a coordenadas curvilíneas generalizadas [90] e \mathbf{N} um vetor normal unitário à S em P . Os índices que percorrem 1, 2 e 3 serão a, b, c, \dots , e os que percorrem 1 e 2, chamados *índices induzidos*, serão i, j, k, \dots . Quando $q_3 = 0$, P e Q confundem-se. Ou seja, q_3 diz sobre a distância entre P e Q (Figura 3), pois

$$|\mathbf{X} - \mathbf{x}| = |q_3| |\mathbf{N}| \implies |q_3| = |\mathbf{X} - \mathbf{x}|.$$

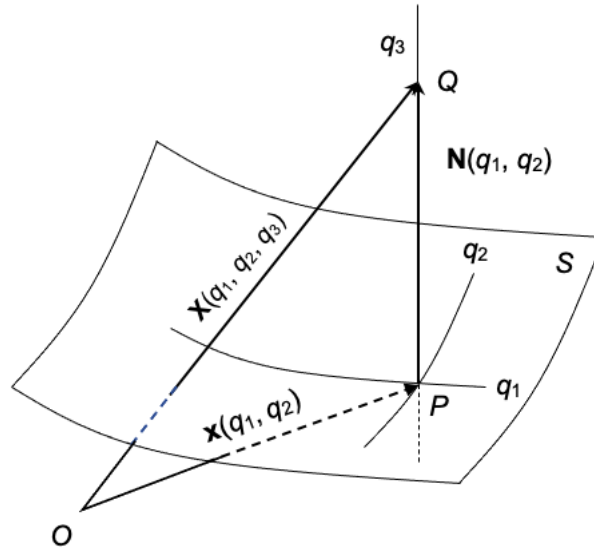
Seja ainda uma partícula de massa m de posição \mathbf{x} , que esteja sempre presa à S . Essa superfície é um vínculo uma vez que nela o potencial confinante é limitado e igual a zero. Se $q_3 \neq 0$, surgirá uma reação de S sobre ela que tende a “puxá-la” para a restrição. Desse jeito, o potencial geométrico $V_\lambda(q_3)$, responsável por confinar aquela partícula em S , será definido como

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{se } q_3 = 0 \\ \infty, & \text{se } q_3 \neq 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde λ é um parâmetro de compressão e serve para dizer quanto V não deixará a partícula “escapar” de S .

Um exemplo de (4.2) é o potencial harmônico $V_\lambda = m\lambda^2 q_3^2 / 2$ (a frequência angular é infinita para satisfazer tais condições já impostas anteriormente). Da incerteza momento-

Figura 3 – Sistema de coordenadas curvilíneas baseado em S de equação paramétrica $\mathbf{x}(q_1, q_2)$.



Fonte: Feita pelo autor.

posição (transversal), vem

$$\delta p_3 \delta q_3 \leq \hbar \implies m\lambda q_3^2 \leq \hbar \implies q_3^2 \leq \frac{\hbar}{m\lambda},$$

ou seja, a incerteza de q_3^2 não pode exceder $\hbar/(m\lambda)$. E ainda

$$\langle V_\lambda \rangle = \frac{1}{2} m\lambda^2 \left(\frac{\hbar}{m\lambda} \right) = \frac{\hbar\lambda}{2} = E_0,$$

que é a energia para o estado não-excitado de um oscilador harmônico.

As equações de Weingarten [92] de S serão

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial q_i} = -g^{kl} h_{il} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = \frac{1}{g} \varepsilon^{rk} \varepsilon^{ls} g_{rs} h_{il} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = \alpha_i^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}, \quad (4.3)$$

onde g_{ij} e h_{ij} são os componentes da métrica induzida e os coeficientes da segunda forma. E para \mathbf{X} , usando (4.1) e (4.3), vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} + q_3 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} + q_3 \alpha_i^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \\ &= \left(\delta_i^k + q_3 \alpha_i^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \text{ e } \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_3} = \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A métrica do espaço, G_{ab} , usando (4.4), será

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j} \\
&= \left(\delta_i^k + q_3 \alpha_i^k \right) \left(\delta_j^l + q_3 \alpha_j^l \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_l} \\
&= \left(\delta_i^k \delta_j^l + q_3 \delta_i^k \alpha_j^l + q_3 \alpha_i^k \delta_j^l + q_3^2 \alpha_i^k \alpha_j^l \right) g_{kl} \\
&= g_{ij} + q_3 \alpha_j^l g_{il} + q_3 \alpha_i^k g_{kj} + q_3^2 \alpha_i^k \alpha_j^l g_{kl} \\
&= g_{ij} + q_3 (\alpha g + (\alpha g)^T)_{ij} + q_3^2 (\alpha g \alpha^T)_{ij},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e as outras serão

$$\begin{aligned}
G_{i3} &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_3} \\
&= \left(\delta_i^k + q_3 \alpha_i^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \cdot \mathbf{N} = 0,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

vendo que \mathbf{x}_k estão no plano tangente à S , e finalmente

$$G_{33} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_3} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1. \tag{4.7}$$

4.2 A dinâmica 2 + 1 para o elétron

A equação de Schrödinger do elétron será [90, 91]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q_a} \left(\sqrt{G} G^{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial q_b} \right) + V_\lambda(q_3) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{4.8}$$

Onde $g = \det g_{ij}$ e $G = \det G_{ab}$. Por causa de (4.5), (4.6) e (4.7), a equação (4.8) será dividida em duas partes: uma superficial, onde tem $\mathcal{D}(q_1, q_2)^3$, e outra em $a = b = 3$. Disso

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{D} \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_3^2} + \frac{\partial}{\partial q_3} \ln \sqrt{G} \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) + V_\lambda \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{4.9}$$

Para a função de onda, façamos

$$\chi(q_1, q_2, q_3) = \chi_t(q_1, q_2) \chi_n(q_3), \tag{4.10}$$

³Operador laplaciano bidimensional. Ele será explicitamente dado por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{G} G^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} \right).$$

cuja densidade superficial de probabilidade será $|\chi_t(q_1, q_2)|^2 \int |\chi_n(q_3)|^2 dq_3$. A troca de Ψ por χ é justificada pelo elemento de volume dV , tal que

$$dV = f(q_1, q_2, q_3) dS dq_3, \quad (4.11)$$

onde $dS = \sqrt{g} dq_1 dq_2$ (elemento de área em torno de P) e

$$f(q_1, q_2, q_3) = 1 + q_3 \text{Tr} \alpha_i^j + q_3^2 \det \alpha_i^j. \quad (4.12)$$

Disso,

$$\chi = f^{1/2} \Psi. \quad (4.13)$$

Usando (4.13) em (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathcal{D} \left(\frac{\chi}{\sqrt{f}} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + \frac{1}{4f^2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial q_3} \right)^2 - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial q_3^2} \right) \chi \right) \\ + V_\lambda(q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

No limite $\lambda \rightarrow \infty$, a função de onda “enxergará” duas barreiras abruptas de potencial em ambos os lados da superfície, onde $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_\lambda(q_3)$ será significamente diferente de zero apenas para uma ordem muito pequena de valores de q_3 em torno de $q_3 = 0$. Com isso, toma-se o limite $q_3 \rightarrow 0$ de (4.14), exceto para o termo que contém o potencial confinante. Assim

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \chi}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \alpha_i^j \right)^2 - \det \alpha_i^j \right) \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Usando (4.10) em (4.15), temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi_n'' + V_\lambda(q_3) \chi_n = i\hbar \dot{\chi}_n \text{ e} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \chi_t}{\partial q_j} \right) \\ - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \alpha_i^j \right)^2 - \det \alpha_i^j \right) \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $\chi_n'' = d^2 \chi_n / dq_3^2$ e $\dot{\chi}_n = d\chi_n / dt$ (notações de Leibniz-Newton). A equação (4.16) pode ser ignorada, já a (4.17) será usada para o nosso interesse pois obtém-se o potencial de superfície $V_S(q_1, q_2)$ dado por

$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \alpha_i^j \right)^2 - \det \alpha_i^j \right), \quad (4.18)$$

ou em termos das curvaturas média H e gaussiana K , tem-se ainda

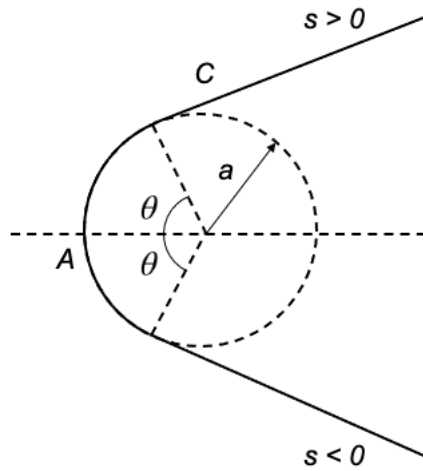
$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} (H^2 - K). \quad (4.19)$$

A dependência desse potencial com q_i é especialmente notável por causa da presença da curvatura média, já que ela não pode ser determinada da métrica g_{ij} e de suas derivadas isoladas (diferente do que ocorre com K). Esse resultado tem uma consequência importante: V_S muda com superfícies isométricas. Isso bate de frente com os resultados da mecânica clássica, onde a lagrangeana do movimento superficial livre é dada por $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m(ds/dt)^2 = \frac{1}{2}mg^{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, que depende somente das propriedades da métrica da superfície. Por mais estranho que possa parecer à primeira vista, este não é um resultado inesperado, pois, independente de quão pequeno seja o intervalo de valor assumido para q_3 , a função de onda sempre se “move” na porção tridimensional do espaço, de modo que a partícula está ciente das propriedades externas da superfície-limite S .

4.3 Um exemplo: restrição tipo-cinta cilíndrica

Para ilustrar as propriedades de V_S , considere uma superfície deformada cilíndricamente (raio a) como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Seção transversal C da superfície de encapamento cilíndrico de raio a . O ponto A é a origem para o arco s .



Fonte: Feita pelo autor.

Escolhe-se como parâmetros geométricos o comprimento de arco s dessa superfície e a coordenada z (cota cartesiana), cujo eixo é perpendicular a esta página. Disso, (4.17) torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \chi_t}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2(s) \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t}, \quad (4.20)$$

onde $\kappa(s)$ é a curvatura de C para um arco s . Se for considerada uma solução $\chi_t(s, t)$, independente de z , obtém-se uma equação de Schrödinger unidimensional na presença de um poço de

potencial quadrado dado por

$$V(s) = \begin{cases} V_0 = -\frac{\hbar^2}{8ma^2}, & \text{se } |s| < a\theta \\ 0, & \text{se } |s| > a\theta \end{cases}, \quad (4.21)$$

com $\theta < \pi/2$, tendo somente um estado ligado de energia E_0 ($V_0 < E_0 < 0$). No limite $a \rightarrow 0$ e $\theta = \text{const.}$, que corresponde a uma curva infinitamente acentuada em nosso plano, o coeficiente de transmissão de (4.21) é zero. As duas camadas $s < 0$ e $s > 0$ são então efetivamente desconectadas, no contraste forte com as soluções usuais onde o termo $V(s)$ é ausente.

Uma última observação deve ser feita sobre os resultados anteriores afirmando que o limite aqui obtido não existe de fato. Nossa opinião é que esses cálculos, embora matematicamente incontestáveis, são mal concebidos do ponto de vista físico, pois envolvem potenciais com forças tangentes diferentes de zero em todas as vizinhanças da superfície S . Para usar o procedimento descrito por [93] imaginemos nossa partícula comprimida entre duas superfícies impenetráveis, nossa superfície própria S e outra superfície S' , e seja a distância $d(q_1, q_2)$, entre elas, que é muito próxima de zero. Se tomarmos $d = \varepsilon f(q_1, q_2)$, com $\varepsilon \rightarrow 0$, então, pelas próprias palavras do Cheng [93], “a equação de Schrödinger deverá adquirir um termo proporcional a $1/(\varepsilon f)^2$ que varia muito sobre q_i .” Ou seja, de fato, já poderia ser esperado desde o início, uma vez que esse tipo de potencial impede a separação da função de onda χ nas partes tangencial e normal, dadas pelas equações (4.16) e (4.17). Escusado será dizer também que o fato de as forças tenderem a ser normais a S no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ não implica o desaparecimento das componentes tangenciais, uma vez que as próprias forças vão ao infinito, impossibilitando qualquer comparação direta com a situação clássica. Se agora for tomado $d(q_1, q_2) = \varepsilon(1 + \varepsilon f)$, então, novamente de acordo com Cheng [93], “tudo depende dos termos de ordem superior a $O(\varepsilon^2)$.” Aqui, no entanto, não pode-se esquecer que embora os termos de ordem ε^2 possam ser uma pequena perturbação para o potencial total, eles ainda podem ser importantes quando comparados com as energias envolvidas no movimento da superfície.

No penúltimo capítulo seguinte, dissertamos sobre a dinâmica quântica de Schrödinger do elétron sem spin sobre uma catenóide, e disso, determinar suas propriedades geométricas e eletromagnéticas, com os estados ligados e níveis de Landau. A catenóide sendo um caso particular de um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov para $n = 2$ serviu como motivação para estudar as propriedades eletrônicas para $n > 2$, tomando esse limite de mecânica [61].

5 PROPRIEDADES ELETRÔNICAS DA BICAMADA DE GRAFENO COM PONTE CATENÓIDE

5.1 Elétron numa superfície catenóide

Neste capítulo, discutiremos a dinâmica quântica estacionária de Schrödinger do elétron sem spin numa bicamada de grafeno¹ tipo-catenóide. A catenóide, como veremos a seguir, tem curvatura média nula, ou seja, a direção normal (eixo- z) do operador momento linear desse elétron desaparece com essa propriedade geométrica. E isso é muito interessante porque ajuda o elétron a não se espalhar nessa direção. O seu movimento fica somente na superfície (cada camada da catenóide). Uma outra coisa que quero destacar é que a catenóide é um caso especial de buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov para $n = 2$. No Capítulo 2, vimos que buracos de minhoca atravessáveis permitem a “viagem no tempo” de uma partícula de uma camada para outra, sem ter o contato desagradável com alguma singularidade da conexão². Por causa disso, veremos como se comportarão as propriedades eletrônicas quando usamos a catenóide como estrutura do grafeno.

Os efeitos de interação a ser considerados aqui são por causa da geometria da catenóide e de campos externos (elétrico e magnético). Disso, obtemos os estados ligados e os níveis de Landau para o espectro energético do elétron. Esse capítulo é uma motivação para estudarmos o caso geral. Como serão as propriedades do elétron quando tem movimento sobre uma superfície tipo buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov para $n > 2$? A resposta está no próximo capítulo.

Uma possível parametrização $\mathbf{x}(u, \phi)$ para a catenóide (Figura 5 e Figura 6) é dada por [46, 47]

$$\mathbf{x} = \sqrt{u^2 + R^2}(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + R \operatorname{arcsinh}(u/R) \hat{k}, \quad (5.1)$$

onde $u = R \operatorname{senh}(z/R)$ ³ e ϕ são coordenadas meridiano e paralelo, respectivamente, tais que, $-\infty < u < \infty$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ ⁴. Evidentemente, z é a cota cartesiana e u é similar à radial cilíndrica ρ [90], porém, esta somente permite valores positivos. As camadas superior e inferior aparecem por causa da relação de vínculo entre u e r dada por⁵ [11]

$$r^2 - u^2 = R^2. \quad (5.2)$$

O elemento quadrático de linha ds^2 para a catenóide⁶ é a sua primeira forma funda-

¹A massa efetiva do elétron é constante e isso é suficiente para estudar o grafeno como uma catenóide.

²Buracos de minhoca atravessáveis são livres de singularidades.

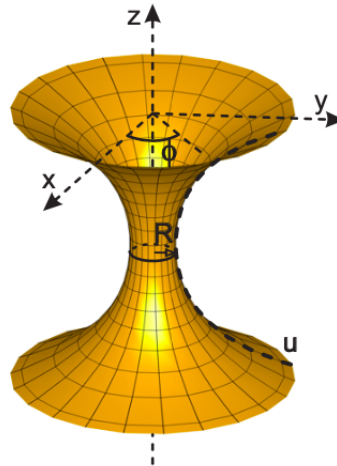
³Essa escolha não significa que a catenóide seja obtida por revolução em torno do eixo- z [67, 92, 94].

⁴É a coordenada polar cilíndrica.

⁵Muitas vezes, u é conhecida como coordenada tartaruga.

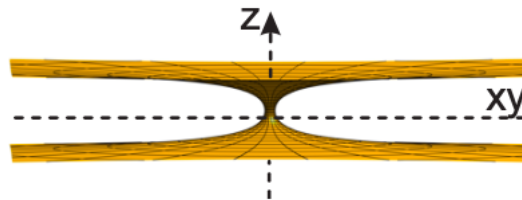
⁶Na verdade, o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov surge pela imposição das condições nas funções do desvio para o vermelho $\Phi(r)$ e de modelagem $b(r)$ na métrica de Morris-Thorne [11] tal que $\Phi(r) = 0$ (sem efeito

Figura 5 – Perto da garganta



Fonte: Retirada de [46].

Figura 6 – Longe da garganta



Fonte: Retirada de [46].

mental I dada por

$$I(du \mathbf{x}_u + d\phi \mathbf{x}_\phi, du \mathbf{x}_u + d\phi \mathbf{x}_\phi) = du^2 x_u^2 + d\phi^2 x_\phi^2 + 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_\phi du d\phi$$

e usando os vetores \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_ϕ que geram qualquer espaço tangente à catenóide [67], que são dados por

$$\mathbf{x}_u = \frac{u}{\sqrt{u^2 + R^2}} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + \frac{R}{\sqrt{u^2 + R^2}} \hat{k}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{x}_\phi = \sqrt{u^2 + R^2} (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}), \quad (5.4)$$

com normal unitária dada por

$$\mathbf{N} = -\frac{R}{\sqrt{u^2 + R^2}} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + \frac{u}{\sqrt{u^2 + R^2}} \hat{k}, \quad (5.5)$$

obtemos a métrica da catenóide

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + R^2) d\phi^2, \quad (5.6)$$

de Maré) e $b(r) = R^2/r$, ou seja

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2 = -dt^2 + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2.$$

ie, em termos de componentes, $g_{uu} = 1$, $g_{u\phi} = 0$ e $g_{\phi\phi} = u^2 + R^2$. Analogamente, ao que foi feito anteriormente, a segunda forma fundamental dela será

$$II = -\frac{R}{\sqrt{u^2 + R^2}} du^2 + R d\phi^2,$$

cujos coeficientes identificáveis serão

$$h_{uu} = -\frac{R}{u^2 + R^2}, \quad (5.7)$$

$$h_{u\phi} = 0, \quad (5.8)$$

$$h_{\phi\phi} = R. \quad (5.9)$$

Usando as componentes da métrica (primeira forma) e da segunda forma, dadas por (5.7), (5.8) e (5.9), as curvaturas média (H) e gaussiana (K) serão iguais a

$$H = 0, \quad (5.10)$$

$$K = -\frac{R^2}{(u^2 + R^2)^2}. \quad (5.11)$$

A nulidade de H nos diz que a catenóide é uma superfície mínima e $K < 0$ diz que ela tem natureza hiperbólica, já que as suas curvaturas principais mínima e máxima são iguais e possuem sinais contrários ($\kappa_1 = -\kappa_2$) [94]. Como já foi destacado acima, a métrica g_{ij} de (5.6), que é uma matriz diagonal e real de ordem 2, tem componentes dadas por

$$g_{uu} = 1, \quad (5.12)$$

$$g_{u\phi} = 0,$$

$$g_{\phi\phi} = u^2 + R^2, \quad (5.13)$$

uma vez que $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{uu}du^2 + 2g_{u\phi}dud\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2$, com $i, j = 1, 2$ sendo índices espaciais coordenados, e aqui $x^1 = u$ e $x^2 = \phi$. E os coeficientes de Christoffel [66] não-nulos serão

$$\Gamma_{\phi\phi}^u = -u, \quad (5.14)$$

$$\Gamma_{u\phi}^\phi = \frac{u}{u^2 + R^2}. \quad (5.15)$$

Considere um elétron de massa efetiva m^* permanentemente vinculado a uma catenóide como essa. Existirá acoplamento por causa da indução magnética e os seus potenciais A^i serão tratados como campos abelianos, disso, usar-se-á este gauge

$$g^{ij}\nabla_i A_j = 0 \quad (5.16)$$

para fins de simplificação na equação dinâmica eletrônica. Disso

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} g^{ij} (-\hbar^2 \nabla_i \nabla_j + ie\hbar A_i \nabla_j + e^2 A_i A_j) + V_e + V_g, \quad (5.17)$$

sendo $\hat{P}_i = -i\hbar \nabla_i - eA_i$ o momento linear do elétron, V_e o potencial elétrico e V_g o potencial geométrico que serve para “comprimir” essa partícula à superfície [33]. Então, a equação dinâmica do elétron com spin zero será $\hat{H}\Psi(u, \phi) = \varepsilon\Psi(u, \phi)$ [95]

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\partial_u^2 \Psi + \frac{u}{u^2 + R^2} \partial_u \Psi + \frac{1}{u^2 + R^2} \partial_\phi^2 \Psi \right) + \frac{ie\hbar}{2m^*} A^j \nabla_j \Psi \\ & + \frac{e^2}{2m^*} g_{jk} A^j A^k \Psi + \left(V_e - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{R^2}{(u^2 + R^2)^2} \right) \Psi = \varepsilon \Psi, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde usou-se o potencial confinante como sendo o de da Costa dado por

$$V_{dC} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} (H^2 - K), \quad (5.19)$$

e com (5.10) e (5.11), segue

$$V_{dC} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{R^2}{(u^2 + R^2)^2}. \quad (5.20)$$

Esse potencial desaparece quando $u \rightarrow \pm\infty$, ou seja, para um elétron livre de interação eletromagnética, ele não terá mais “contato” com a superfície. Expandindo (5.20) em série de Taylor, em torno do ponto de equilíbrio $u = 0$, vem

$$V_{dC} = V_{dC}^{\text{mín}} + V_{cf} + \dots, \quad (5.21)$$

notando que para regiões sem curvatura, o potencial centrífugo é mais acentuado do que para qualquer outro domínio de u . A “força” confinante muda de sinal de acordo com u . Pode-se ver isso nisto

$$F_{dC} = -\frac{2\hbar^2 R^2}{m^*} \frac{u}{(u^2 + R^2)^3} \begin{cases} > 0, \text{ se } u < 0 \\ < 0, \text{ se } u > 0 \end{cases}. \quad (5.22)$$

Em outras palavras, o elétron será atraído acima de $u = 0$ e repellido abaixo de $u = 0$. Não haverá violação de paridade espaço-temporal de V_{dC} pois $\mathcal{P}^\dagger V_{dC} \mathcal{P} = V_{dC}$ e $\mathcal{T}^\dagger V_{dC} \mathcal{T} = V_{dC}$ ⁷, $\forall u$ real. A presença de u^2 em (5.20) torna isso evidente. Isso já não acontece para (5.22), pois a simetria de paridade espacial será violada devido à presença da linearidade de F_{dC} com u . E para $u = 0$, essa força será nula.

A função de onda Ψ em (3.18) é invariante sob a transformação $\exp(im\phi)$, $m =$

⁷Recorde que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger$ e $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\dagger$, ou seja, os autovalores dessas transformações de paridade espacial e temporal são ± 1 .

$0, \pm 1, \pm 2, \dots$, isto é, vindo que a catenóide tem simetria axial em torno do eixo- z ,

$$\Psi(u, \phi) = \Phi(u) \exp(im\phi), \quad (5.23)$$

disso, (5.14) nos dará uma equação para $\Phi(u)$, dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\Phi'' + \frac{u}{u^2 + R^2} \Phi' \right) + \frac{ie\hbar}{2m^*} A^j \nabla_j \Phi + V_e \\ & + \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m^2}{u^2 + R^2} - \frac{R^2}{(u^2 + R^2)^2} \right) + \frac{e^2}{2m^*} A^j A_j \right) \Phi = \varepsilon \Phi. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A equação (5.19) sempre terá sinal negativo. Da Geometria Diferencial, em termos das curvaturas κ_1 e κ_2 ,

$$K = \det(K_i^j), \quad (5.25)$$

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr}(K_i^j), \quad (5.26)$$

sendo o operador de Weingarten o tensor de curvatura (torsão livre para Cartan) K_i^j [97]. Pode-se escrever $H = \text{MA}(\kappa_1, \kappa_2)$ (média geométrica) e $K = \text{MG}(\kappa_1, \kappa_2)$ (média aritmética), apesar de κ_1 e κ_2 não forem sempre números reais positivos. Isso pode ser provado. Tem-se

$$H^2 - K = \frac{1}{4} (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \geq 0, \forall \kappa_1, \kappa_2. \quad \square$$

5.1.1 Efeitos geométricos

Tomando $V_e = 0$ e $A^i = 0$, (5.24) torna-se

$$\Phi'' + \frac{u}{u^2 + R^2} \Phi' - \left(\frac{m^2}{u^2 + R^2} - \frac{R^2}{(u^2 + R^2)^2} \right) \Phi = -\frac{2m^* \varepsilon}{\hbar^2} \Phi. \quad (5.27)$$

O termo centrífugo externo ao potencial geométrico não permite a quiralidade eletrônica pois esse tem m^2 , ou seja, $V_{\text{ef}}(-m) = V_{\text{ef}}(m)$. E ainda, não violará a simetria $\mathcal{T} \mathcal{P}$ porque há u^2 . O termo $u/(u^2 + R^2) \Phi'$ não é hermitiano, uma vez que

$$\langle \Psi_1 | \left(-\frac{u}{u^2 + R^2} \frac{\hat{P}_u}{i\hbar} \right) | \Psi_2 \rangle = - \left\langle -\frac{u}{u^2 + R^2} \frac{\hat{P}_u}{i\hbar} \Psi_1 \middle| \Psi_2 \right\rangle + \left\langle \frac{u^2 - R^2}{(u^2 + R^2)^2} \Psi_1 \middle| \Psi_2 \right\rangle, \quad (5.28)$$

pois o segundo termo de (5.28) não é nulo no intervalo $[a, b]$, tal que, $\Psi_1(a, \phi) = \Psi_2(b, \phi)$ [95, 96]. A equação (5.27) ainda permite valores reais para ε mesmo que aquele termo é não-hermitiano [70, 71].

Para eliminar o termo de derivada primeira de (5.27), precisa-se substituir Φ por y , tal que,

$$\Phi(u) = (u^2 + R^2)^{-1/4} y(u), \quad (5.29)$$

pois

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \Phi(u) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(u^2 + R^2)^4} \cdot \lim_{u \rightarrow \pm\infty} y(u) = 0,$$

respeitando um dos postulados da Mecânica Quântica [98], e ainda,

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} y(u) = 0.$$

Disso, obtém-se as relações

$$u(u^2 + R^2)^{-1} \Phi' = u(u^2 + R^2)^{-5/4} y' - \frac{u^2}{2} (u^2 + R^2)^{-9/4} y, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' &= (u^2 + R^2)^{-1/4} y'' - u(u^2 + R^2)^{-5/4} y' \\ &\quad + \frac{5}{4} u^2 (u^2 + R^2)^{-9/4} y - \frac{1}{2} (u^2 + R^2)^{-5/4} y, \end{aligned} \quad (5.31)$$

e usando (5.29), (5.30) e (5.31) em (5.27), chega-se a

$$-y'' + \left(\frac{m^2 + 1/2}{u^2 + R^2} - \frac{(3u^2/4 + R^2)}{(u^2 + R^2)^2} \right) y = \frac{2m^* \varepsilon}{\hbar^2} y. \quad (5.32)$$

Comparando (5.27) e (5.32), ocorreram as mudanças $m^2 \rightarrow m^2 + 1/2$ e $R^2 \rightarrow R^2 + 3u^2/4$. Isso não fere as simetrias \mathcal{T} e \mathcal{P} , pois ainda tem-se termos quadráticos em m e u . Mas, (5.32) é hermitiana pois a derivada primeira em Φ sumiu. A quiralidade continua ausente após isso.

Quando $u \rightarrow \pm\infty$, o potencial efetivo em (5.32) desaparece. Os potenciais centrífugo e geométrico anulam-se igualmente pois ambos, nesse regime, serão inversamente proporcionais a u^2 . Isso nos dá estados assintóticos livres para o elétron⁸, os quais satisfazem esta equação

$$y'' + k^2 y \cong 0, \quad (5.33)$$

onde $k = \sqrt{2m^* \varepsilon}/\hbar$, e (5.33) mostra que o elétron é livre mas admite estados de potencial mínimo harmonicamente clássico.

Analisa-se agora o comportamento de m quando o potencial efetivo é negativo para qualquer u . Desse jeito, vem

$$\frac{m^2 + 1/2}{u^2 + R^2} < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2(z/R)} \right), \quad (5.34)$$

e lembrando que $\cosh(z/R) \geq 1$, vem

$$\frac{1}{\cosh^2(z/R)} \leq 1 \implies 1 + \frac{1}{\cosh^2(z/R)} \leq 2,$$

⁸Vimos anteriormente que em regiões muito afastadas da garganta, não temos curvatura. Isso faz do elétron livre da ação geométrica da superfície, pois o potencial associado não mais a aprisiona nela. Microscopicamente, tal afirmação é coerente. No contexto newtoniano, a curvatura não é mais zero e a partícula se movimentará sobre “ondulações”.

ou seja, $-1/\sqrt{2} < m < 1/\sqrt{2}$. Como m é inteiro, então, apenas $m = 0$ dará $V_{\text{ef}} < 0$. Tal potencial será dado por

$$V_{\text{ef}} = -\frac{\hbar^2}{8m^*R^2} \left(\frac{1}{\cosh^2(z/R)} + \frac{1}{\cosh^4(z/R)} \right), \quad (5.35)$$

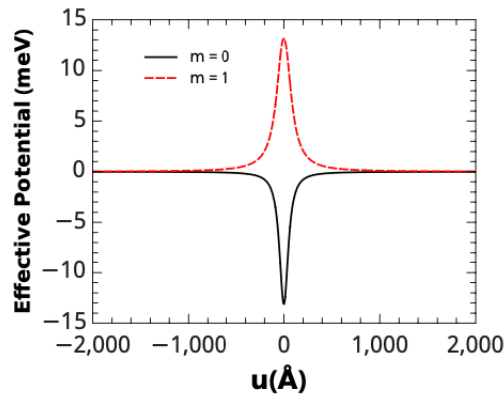
de acordo [69], como (5.35) é inversamente proporcional a $\cosh^2(z/R)$ e $\cosh^4(z/R)$, o elétron será completamente transmitido. Ao contrário, para $m \neq 0$, V_{ef} nem sempre é negativo, que fisicamente nos dá reflexão para o elétron diante dessa barreira de potencial já que o termo centrífugo é dominante diante do geométrico, repelindo-o quando chega perto da garganta.

Uma outra discussão interessante, analiticamente possível, é quando $R \rightarrow 0$ (ponte muito fina). Nesse caso, (5.27) transforma-se numa equação já conhecida na literatura, que é a de Bessel de ordem m [90]. Com isso, vem

$$x^2\Phi''(x) + x\Phi'(x) + (x^2 - m^2)\Phi(x) = 0, \quad (5.36)$$

com $x = ku$ (adimensional). A função de onda para essa equação é proporcional à função de Bessel $J_m(x)$ de primeiro tipo. O perfil desse poço é tipo-delta [96]. O Gráfico 1 a seguir é para o potencial efetivo quando $m = 0$, $m = 1$, $R = 70 \text{ \AA}$ e $m^* = 0,03m_0$ (massa efetiva do carbono).

Gráfico 1 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$ e $m = 1$



Fonte: Retirado de [46].

Como se vê nele, para $m = 0$ (linha preenchida) não existirá barreira para o elétron, e sim um poço de potencial simétrico em torno de $u = 0$. Isso justifica a falta de reflexão dele e o confinamento ocorrerá em torno de um anel na ponte (não tem-se o efeito centrífugo por causa de m mas o potencial de da Costa contém um termo centrífugo responsável por dar órbitas ao elétron próximas da garganta). Para $m = 1$ (ou $m = -1$, pois não há quiralidade), haverá uma barreira de potencial (linha tracejada) que dará reflexão parcial ao elétron quando se aproxima da ponte. A função de onda, para $m \neq 0$, é nula. Quando $m = 0$, se o elétron vem pela camada de cima, a transmissão ocorrerá para a camada de baixo e vice-versa.

5.1.2 Campo elétrico constante

Nesta parte, a ação externa será produzida por um campo elétrico uniforme \mathbf{E} apontando para cima, ou seja

$$\mathbf{E} = E \hat{k}. \quad (5.37)$$

Esse campo não possui componente paralelo ao plano xy . A outra $E_u = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{E}$ será dada por

$$E_u = \frac{ER}{\sqrt{u^2 + R^2}}. \quad (5.38)$$

Então, a energia potencial eletrostática será [96]

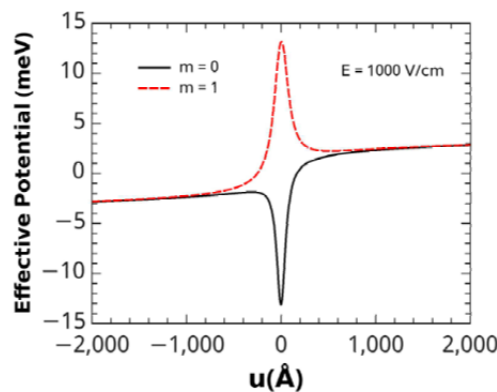
$$V_e = eRE \operatorname{arcsenh}\left(\frac{u}{R}\right). \quad (5.39)$$

Disso, o potencial efetivo será

$$V_{\text{ef}} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m^2 + 1/2}{u^2 + R^2} - \frac{3u^2/4 + R^2}{(u^2 + R^2)^2} \right) + eER \operatorname{arcsenh}\left(\frac{u}{R}\right). \quad (5.40)$$

Imediatamente, uma simetria será violada para V_e , que é a de paridade \mathcal{P} . Sendo a função $\operatorname{arcsenh}(u/R)$ ímpar, ou seja, $\operatorname{arcsenh}(-u/R) = -\operatorname{arcsenh}(u/R)$, $\mathcal{P}V_e\mathcal{P} = -V_e$. Isso pode ser visto no Gráfico 2, onde o potencial tanto para $m = 0$ quanto para $m = 1$ é assimétrico em torno de $u = 0$. Haverá tunelamento do elétron por causa de um efeito tipo-diodo entre as camadas: (i) para $m = 0$, ocorrerá transmissão máxima do elétron para a outra camada que está do lado oposto ao da original e (ii) para $m = \pm 1$, haverá reflexão parcial do elétron para a outra camada do mesmo lado.

Gráfico 2 – Gráfico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = 1$, $E = 1 \text{ kV/cm}$



Fonte: Retirado de [46].

5.1.3 Campo magnético constante

Aqui, será colocado outro campo externo, o magnético, para interferir na dinâmica do elétron. O campo magnético também será axial, ou seja,

$$\mathbf{B} = B\hat{k}. \quad (5.41)$$

As componentes do potencial de (5.42) serão

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2}\sqrt{u^2 + R^2}\hat{\phi},$$

ou seja, o gauge de Landau será alcançado se

$$A^u = 0 \text{ e} \quad (5.42)$$

$$A^\phi = \frac{B}{2}\sqrt{u^2 + R^2}. \quad (5.43)$$

Usando (5.12), (5.13), (5.42) e (5.43) em (5.24), obtém-se o potencial magnético

$$V_{\text{mag}} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} (u^2 + R^2) - \frac{eBm}{\hbar} \right). \quad (5.44)$$

Lembre que o nosso potencial efetivo é da forma $V_{\text{ef}} = V_g + V_e + V_{\text{mag}}$, tal que

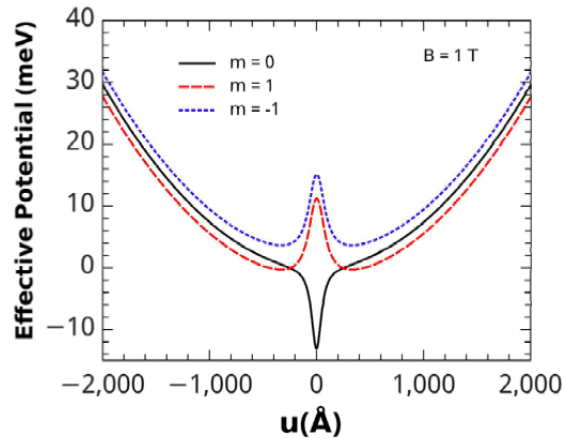
$$V_g = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m^2 + 1/2}{u^2 + R^2} - \frac{3u^2/4 + R^2}{(u^2 + R^2)^2} \right). \quad (5.45)$$

O Gráfico 3 é o comportamento desse potencial quando não se tem campo elétrico externo ao sistema ($\mathbf{E} = 0$), e toma-se $B = 1 \text{ T}$, $R = 70 \text{ \AA}$, $m = 0,03m_0$ e $m = 0, \pm 1$. Nele, vemos que para $m = 0$, o perfil é a união de um poço profundo em $u = 0$ e ramos parabólicos em torno de $u = 0$ quando u é muito grande. Quando $m \neq 0$, a parte magnética de V_{ef} produz dois poços simétricos em torno de $u = 0$ e uma barreira de potencial em $u = 0$. O termo linear em m na equação (5.44) quebra a simetria de reversão temporal pois ao fazer $m \rightarrow -m$, ter-se-á quiralidade no elétron porém não haverá violação na simetria \mathcal{P} pois a parte parabólica nessa expressão é presente.

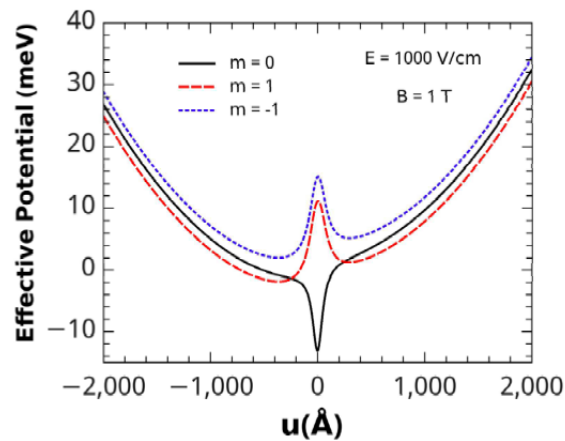
No Gráfico 4, tem-se a presença dos campos elétrico e magnético anteriormente impostos. O duplo potencial perderá a sua simetria em torno de $u = 0$ (quebra na simetria \mathcal{P}). Isso garante a prisão dos elétrons em anéis (órbitas) próximos da ponte nas duas camadas. Usou-se $E = 1 \text{ kV/cm}$, $B = 1 \text{ T}$, $m = 0, \pm 1$ e $m^* = 0,03m_0$.

5.2 Estados ligados

Com exceção das situações $u \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 0$, onde obtém-se as aproximações de (5.24), que são as equações de um oscilador harmônico e Bessel de ordem $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (com variável independente ku), respectivamente, fez-se um estudo qualitativo da dinâmica do elétron por meio de V_{ef} . Sabe-se que ε é um número real, e agora, será visto como se darão esses

Gráfico 3 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = \pm 1$, $E = 0$ e $B = 1$ T

Fonte: Retirado de [46].

Gráfico 4 – Grafico V_{ef} versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = \pm 1$, $E = 1$ kV/cm e $B = 1$ T

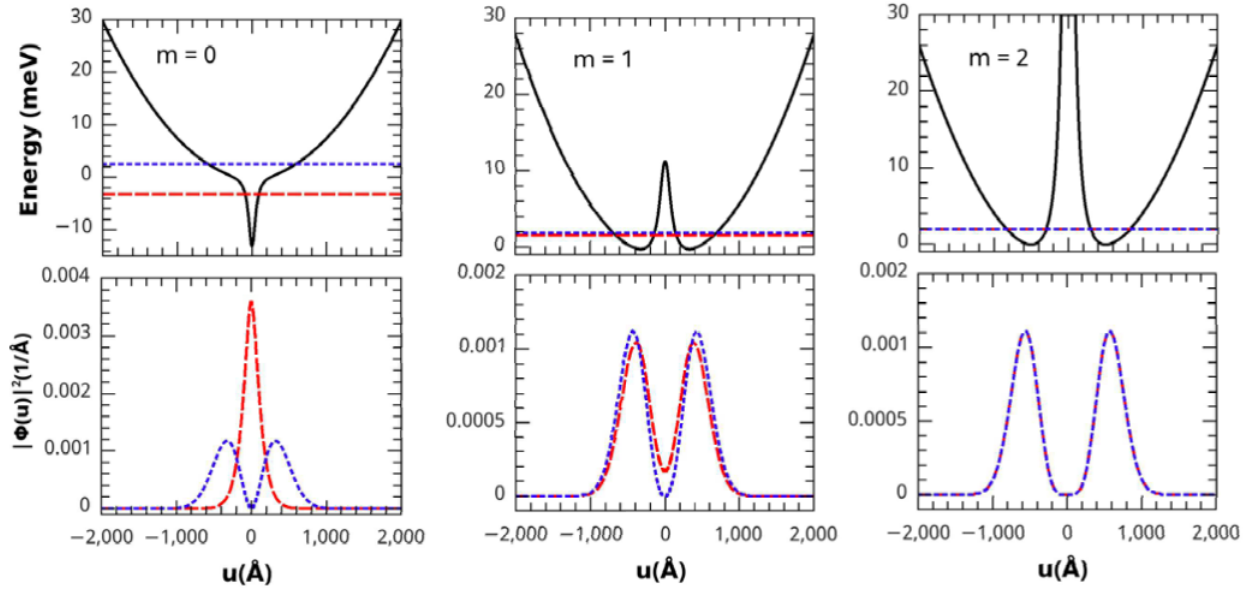
Fonte: Retirado de [46].

níveis energéticos que são os de Landau já que o potencial magnético em (5.44) caracteriza uma indução magnética que age axialmente a um sistema.

No Gráfico 5, o espectro ocorre para $m = 0, 1, 2$, juntamente, com sua distribuição de probabilidade quando não se tem o campo elétrico. Para $m = 0$, o estado fundamental (linha vermelha tracejada) nos dá uma distribuição gaussiana centrada em $u = 0$ e primeiro excitado (linha tracejada azul), dois picos simétricos em relação a $u = 0$, pois em $u = 0$, não se tem a possibilidade de encontrar o elétron. O estado não-excitado parece-se bastante com o ligado já que o termo centrífugo no potencial efetivo não existe. Para $m = 1, 2$, o elétron sentirá o efeito repulsivo por causa do termo centrífugo que depende de m^2 . E os estados ligados não ocorrerão mais em $u = 0$, mas em regiões simétricas à essa origem que colocam o elétron em anéis, nas camadas inferior e superior da catenóide.

No Gráfico 6, com a ação do campo elétrico, o elétron tende a ser aprisionado na camada inferior. Para $m = 0$, a assimetria do potencial é mais forte no primeiro estado excitado. A localização do elétron na camada inferior aumenta com m . Para $m = 2$, o primeiro estado

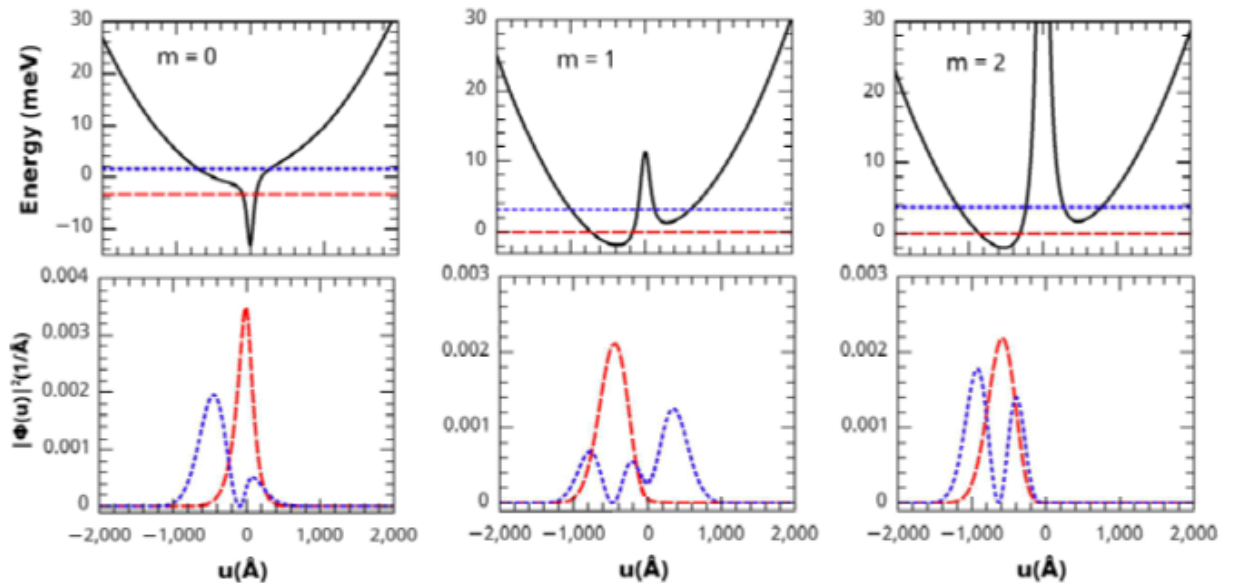
Gráfico 5 – Graficos ε e $|\Phi|^2$ versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $E = 0$ e $B = 1$ T



Fonte: Retirado de [46].

excitado localiza-se em duas regiões tipo-anel.

Gráfico 6 – Graficos ε e $|\Phi|^2$ versus u com $m^* = 0,03m_0$, $m = 0$, $m = 0$, $m = 2$, $E = 1$ kV/cm e $B = 1$ T



Fonte: Retirado de [46].

No último capítulo, que é a essência do nosso trabalho, discutiremos os resultados obtidos da dinâmica eletrônica sem spin tipo-Schrödinger no caso geral ($n > 2$), onde a su-

perfcie cobrirá completamente (camadas e ponte) um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov. Essas propriedades eletrônicas são puramente de origem geométrica. Disso, obtemos somente os estados ligados e quais papéis de n e R nesses resultados.

6 SUPERFÍCIE GENERALIZADA TIPO-BURACO DE MINHOCA DE ELLIS-BRONNIKOV COM BICAMADA DE GRAFENO

6.1 Espaço-tempo do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado

Neste último capítulo, investigaremos as causas dos efeitos geométricos quando um elétron move-se numa superfície tipo buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov. Por ser de Ellis-Bronnikov, o buraco torna-se atravessável, permitindo que o elétron transite, entre as camadas, pela ponte (conexão)¹. O elétron não sofre interação por spin e nada dependerá do tempo. No capítulo anterior, dissemos que o momento linear do elétron some na direção do eixo- z . Para $n \neq 2$, a curvatura média não se anula, porém, o *momentum* do elétron some em z . Obteremos dois estados ligados (poço duplo de potencial) quando $n > 2$ sem a presença do momento angular orbital do elétron, diferente do caso $n = 2$, onde tem-se um poço de potencial. Os parâmetros n e R (raio da ponte) interferem na profundidade de cada poço e no tamanho do buraco de minhoca GEB, respectivamente. Há outros resultados interessantes dados para o caso geral, que serão dados durante a leitura deste capítulo.

Um buraco de minhoca de Morris-Thorne geral é uma variedade Lorentziana cujo elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\Omega_2, \quad (6.1)$$

que está na assinatura lorentziana $(- + + +)$, onde $e^{2\Phi(r)}$ é a função *redshift* e $b(r)$ é a função *shape*. Os (r, θ, ϕ) são coordenadas esfericamente polares e $d\Omega_2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov usual temos $\Phi(r) = 0$ e $b(r) = R^2/r$, caracterizando um buraco de minhoca sem efeito de maré com R sendo o raio da garganta. No entanto, uma versão generalizada do usual buraco de minhoca Ellis-Bronnikov foi proposta em [63, 64] satisfazendo todas as condições de Morris-Thorne necessárias para fazer buracos de minhoca atravessáveis de Lorentz. Este buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov (GEB) é caracterizado por dois parâmetros, a saber, n e R , que nos informam sobre seu tamanho e forma. Então, o elemento de linha de buraco de minhoca GEB é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + du^2 + f^2(u) d\Omega_2, \quad (6.2)$$

com $f(u) = (u^n + R^n)^{1/n}$ sendo uma função bem comportada para n inteiros pares. Portanto, o elemento de linha GEB pode ser escrito como [11, 64]

$$ds^2 = du^2 + (R^n + u^n)^{2/n} d\Omega_2, \quad (6.3)$$

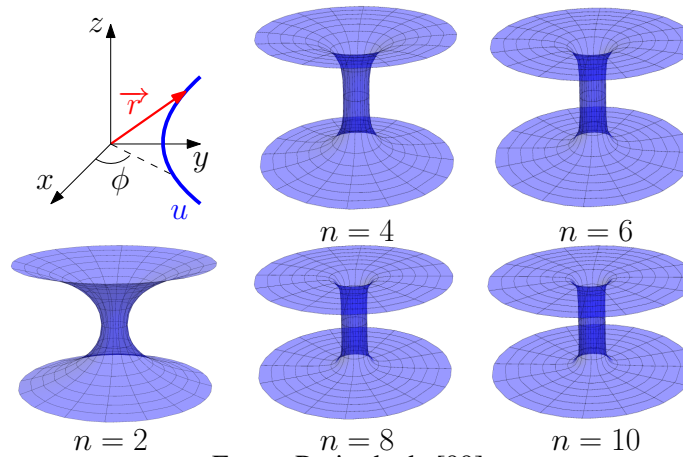
onde $u = (r^2 - R^2)^{1/2}$ é a coordenada de distância radial adequada (tartaruga). A coordenada

¹cf. o Capítulo 2.

angular cilíndrica $\phi \in [0, 2\pi)$ é chamada de paralela. Essas coordenadas fazem parte de um sistema cartesiano paralelo-meridiano capaz de cobrir todo o espaço do buraco de minhoca de GEB. Nestas coordenadas, $-\infty < u < \infty$, que é diferente da coordenada radial cilíndrica ρ porque $0 \leq \rho < \infty$, permitindo distinguir entre as camadas inferior e superior do grafeno, e n é um número inteiro par. Considerando uma fatia $\theta = \pi/2$, o elemento de linha pode ser reescrito como

$$ds^2 = du^2 + (R^n + u^n)^{2/n} d\phi^2. \quad (6.4)$$

Figura 7 – Abaixo, o sistema de coordenadas, o vetor, $\vec{r} = f(u) \cos \phi \hat{i} + f(u) \sin \phi \hat{j} + h(u) \hat{k}$, localiza qualquer ponto no meridiano u em relação à origem do sistema de coordenadas. Para $n = 2$, a superfície convencional do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, que tem a geometria catenóide. Para $n = 4, 6, 8$ e 10 , várias superfícies generalizadas de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov são apresentadas. Essas superfícies tendem a geometrias cilíndricas à medida que n aumenta. Aqui o raio, R , é 20 \AA .



Fonte: Retirada de [99].

De (6.4), os componentes não-nulos do tensor métrico g_{ij} ($i, j = 1, 2$) são dados por

$$g_{uu}(u) = 1, \quad (6.5)$$

$$g_{\phi\phi}(u) = (R^n + u^n)^{2/n}. \quad (6.6)$$

Os componentes que não desaparecem dos símbolos de Christoffel [5,66–68] $\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jm} (\partial_i g_{mk} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik})$ são calculados diretamente e escritos como

$$\Gamma_{\phi\phi}^u(u) = -u^{n-1} (R^n + u^n)^{2/n-1}, \quad (6.7)$$

$$\Gamma_{u\phi}^\phi(u) = \Gamma_{\phi u}^\phi(u) = \frac{u^{n-1}}{R^n + u^n}. \quad (6.8)$$

Vamos agora considerar um elétron de massa efetiva m^* e carga elétrica $-e$ permanentemente restrito à superfície de um buraco de minhoca de grafeno de bicamada-GEB devido a um potencial geométrico V_g , dado por o seguinte Hamiltoniano,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} g^{ij} \hat{P}_i \hat{P}_j + V_g. \quad (6.9)$$

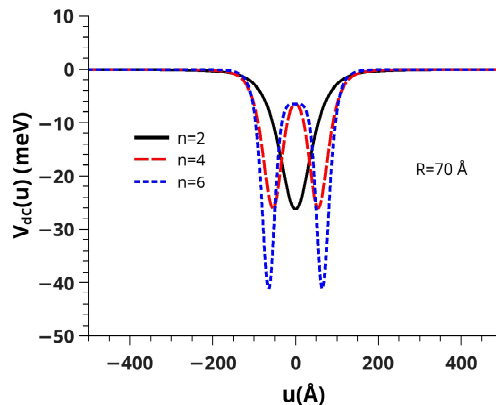
Como é amplamente conhecido, o grafeno de bicamada apresenta uma relação de dispersão quadrática que fornece um hiato na banda de condutância [29], sendo, portanto, descrito pela equação de Schrödinger. A massa efetiva m^* leva em consideração a estrutura reticulada, de modo que o sistema pode ser descrito aqui como um modelo contínuo. Destacamos aqui que, para que o sistema seja considerado de fato no limite contínuo, o raio R deve ser considerado muito maior que a estrutura de rede do grafeno. Como o comprimento das ligações na rede do grafeno é de cerca de $1,43 \text{ \AA}$ [65], o raio $R = 70 \text{ \AA}$ considerado neste trabalho permite considerar o sistema atual no limite contínuo. O operador momento é escrito como $\hat{P}_i = -i\hbar\nabla_i$, onde o elétron se acopla com a superfície por meio da métrica induzida da superfície do buraco de minhoca de GEB, g_{ij} , e a derivada covariante de V^i como $\nabla_i V^j = \partial_i V^j + \Gamma_{ik}^j V^k$.

Além disso, consideramos também o potencial de da Costa [33] $V_{\text{dC}} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} (H^2 - K)$, onde H é a curvatura média e K é a curvatura gaussiana. O potencial de da Costa produz para a superfície do buraco de minhoca de GEB a seguinte expressão

$$V_{\text{dC}}(u) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{(n-1)R^n u^{n-2}}{(u^n + R^n)^2} - \frac{\hbar^2}{8m^*} \left(\frac{\left(1 - u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2}(u^n + (n-1)R^n)\right)^2}{(u^n + R^n)^{2/n} \left(1 - u^{2n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2}\right)} \right). \quad (6.10)$$

Para $n = 2$, recuperamos o potencial de da Costa para a catenóide anteriormente abordada na literatura [46, 59]. O Gráfico 7 mostra o potencial de da Costa para três valores de n , a saber, $n = 2, 4$ e 6 . Como podemos ver no Gráfico 7, o potencial de da Costa é um potencial atrativo para qualquer valor de n . Para $n = 2$, o potencial de da Costa promove um confinamento do elétron em $u = 0$, enquanto que à medida que aumentamos o valor de n o potencial de da Costa exhibe dois poços de confinamento simétricos.

Gráfico 7 – Potencial de da Costa para três valores de n , a saber, $n = 2, 4$ e 6 . Consideramos $R = 70 \text{ \AA}$ para este gráfico.



Fonte: Retirado de [99].

A função de onda, por causa da simetria axial (ao longo do eixo- z) da superfície do

buraco de minhoca de GEB, deve ser invariável sob a transformação de $U(1)$, isto é,

$$\Psi(u, \phi) = \Phi(u) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.11)$$

Portanto, a equação de Schrödinger, sem spin e estacionária para o elétron, pode ser expressa como

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Phi''(u) - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{u^{n-1}}{u^n + R^n} \Phi'(u) \\ + \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} + V_{\text{dc}}(u) \right) \Phi(u) = \varepsilon \Phi(u), \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde ε são os autovalores de $\hat{H}\Psi(u, \phi) = \varepsilon\Psi(u, \phi)$. A seguir, discutiremos algumas implicações da geometria da superfície do buraco de minhoca de GEB na dinâmica eletrônica.

6.2 Efeitos geométricos

A equação (6.12) governa a dinâmica do elétron na superfície do buraco de minhoca de GEB. Neste ponto, é importante destacar aqui que o termo derivado de primeira ordem não é hermitiano, pois

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_1 \left| -\frac{u^{n-1}}{u^n + R^n} \frac{\hat{P}_u}{i\hbar} \Phi_2 \right. \right\rangle = - \left\langle -\frac{u^{n-1}}{u^n + R^n} \frac{\hat{P}_u}{i\hbar} \Phi_1 \left| \Phi_2 \right. \right\rangle \\ + \left\langle \Phi_1 \left| \frac{u^{2n-2} - (n-1)R^n u^{n-2}}{(u^n + R^n)^2} \right| \Phi_2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde $\hat{P}_u = -i\hbar\partial_u$. No entanto, o Hamiltoniano associado à equação (6.12) é simétrico sob aplicação simultânea de operadores de paridade e reversão de tempo, ou seja, $\mathcal{P}\mathcal{T}\hat{H}\mathcal{P}\mathcal{T} = \hat{H}$. Assim, como a simetria de reflexão espaço-tempo é preservada, o espectro dos autovalores hamiltonianos é inteiramente real, embora não seja hermitiano [69–75]. Portanto, é possível encontrar um Hamiltoniano equivalente sendo hermiteano e possuindo o mesmo espectro de autovalores. Para isso, vamos realizar a seguinte mudança de variável

$$\Phi(u) = (u^n + R^n)^{-1/(2n)} y(u), \quad (6.14)$$

com $y(u)$ satisfazendo uma equação do tipo-Schrödinger, de modo que (4.12) se torna

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} y''(u) + V_{\text{ef}}(u)y(u) = \varepsilon y(u), \quad (6.15)$$

com

$$V_{\text{ef}}(u) = V_{\text{ind}}(u) + V_{\text{dc}}(u), \quad (6.16)$$

sendo que

$$V_{\text{ind}}(u) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{u^{n-2}((2-2n)R^n + u^n)}{4(u^n + R^n)^2} - \frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} \right). \quad (6.17)$$

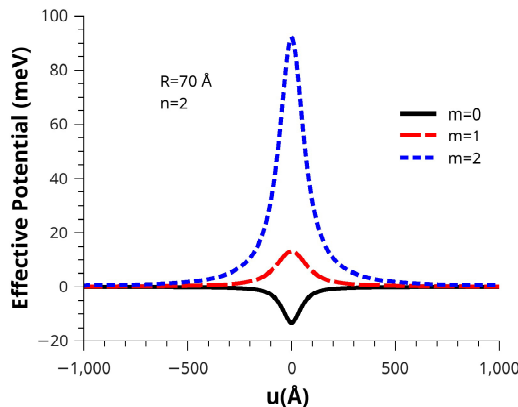
Como podemos ver, o potencial efetivo é composto pelo potencial induzido pela superfície do elétron, $V_{\text{ind}}(u)$, que é essencialmente um potencial repulsivo, e pelo potencial de da Costa, $V_{\text{dC}}(u)$, que surge da interação do elétron com a superfície do grafeno, sendo um potencial atrativo. Esses potenciais, $V_{\text{ind}}(u)$ e $V_{\text{dC}}(u)$, competem entre si quando os parâmetros do buraco de minhoca Ellis-Bronnikov são alterados, como o raio R do buraco de minhoca, ou quando a geometria do buraco de minhoca é alterada.

Portanto, o comportamento do elétron confinado à superfície do buraco de minhoca de GEB feito de grafeno é descrito por um Hamiltoniano Hermitiano com um potencial efetivo escrito como (6.16).

No limite $u \rightarrow \pm\infty$, temos estados assintóticos livres para o elétron, pois $y'' + k^2y \cong 0$ ($k^2 = 2m^*\varepsilon/\hbar^2$, que é positivo para permitir estados assintóticos livres dispersos), onde se vê claramente que o potencial efetivo se cancela. E para $R \rightarrow 0$, a solução é proporcional à função de Bessel do primeiro tipo [76]. Em resumo, quando (i) $u \rightarrow \pm\infty$, $y(u) = A \cos(ku + \varphi)$ (A é uma amplitude para y e φ é uma fase inicial) e (ii) $R \rightarrow 0$, $y(ku) = NJ_m(ku)$ (N é uma constante de normalização para y). Esses resultados assintóticos são idênticos aos obtidos para $n = 2$. Até agora, nesses regimes, a nanofísica do grafeno não depende de n .

Antes de discutir os estados ligados de um elétron na superfície do buraco de minhoca de grafeno de GEB, precisamos discutir o potencial efetivo gerado por essa superfície. Para $n = 2$, o buraco de minhoca de GEB recupera o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov convencional, com o buraco de minhoca tendo a geometria de uma catenóide, como mostra a Figura 7. Para esta geometria, o potencial efetivo é mostrado no Gráfico 8. As linhas pontilhadas pretas, tracejadas vermelhas e azuis correspondem ao momento angular orbital, $m = 0, 1$ e 2 , respectivamente, para $R = 70 \text{ \AA}$ e $m^* = 0,03m_0$ [77]. Esta configuração já foi abordada na literatura [46].

Gráfico 8 – Potencial efetivo para $R = 70 \text{ \AA}$ e $n = 2$, para alguns valores de m .

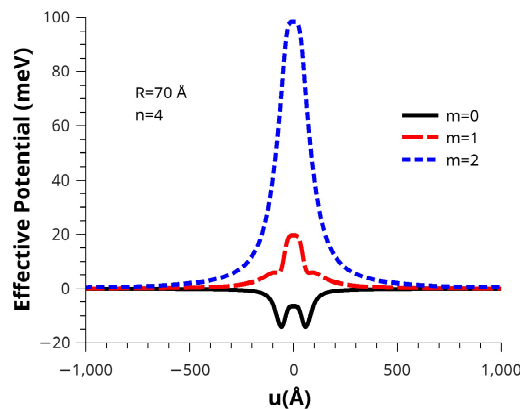


Fonte: Retirado de [99].

Para o momento angular orbital $m = 0$, o efeito do potencial de da Costa, que é atrativo, é mais pronunciado do que o potencial induzido de superfície, que é repulsivo, de modo que o potencial efetivo toma a forma de um potencial bem centrado, na origem do buraco de minhoca, em $u = 0$. Neste ponto o valor do potencial é $-13,12$ meV (veja o Gráfico 8). No entanto, quando o momento angular orbital é levado em consideração, ou seja, quando $m \neq 0$, o potencial induzido é drasticamente modificado, devido ao termo centrífugo, em (4.17), e nestas condições, o efeito do potencial induzido torna-se maior do que o efeito produzido pelo potencial de da Costa, de modo que o potencial efetivo assume a forma de uma barreira de potencial, também centrada na origem do buraco de minhoca, conforme Gráfico 8. Esses potenciais são amplamente discutidos em [46].

No Gráfico 9, a geometria do buraco de minhoca é alterada para $n = 4$, pois altera o potencial efetivo. Para $m = 0$, o potencial de da Costa é mais significativo que o potencial induzido, mas agora o potencial efetivo assume a forma de um poço duplo, cujos mínimos estão localizados em $u = -58 \text{ \AA}$ e $u = 58 \text{ \AA}$, e nestes pontos, o valor do potencial é $-14,2$ meV, conforme mostrado no Gráfico 9. Este potencial em forma de poço duplo surge porque a geometria generalizada do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov apresenta dois pontos de curvatura mais intensa, um em cada extremidade do buraco de minhoca (veja a Figura 7). Para $m \neq 0$, o potencial induzido torna-se mais relevante que o potencial de da Costa, devido ao termo centrífugo, e o potencial efetivo assume a forma de uma barreira de potencial, localizada na origem do buraco de minhoca, conforme mostrado no Gráfico 9.

Gráfico 9 – Potencial efetivo para $R = 70 \text{ \AA}$ e $n = 4$, para alguns valores de m .

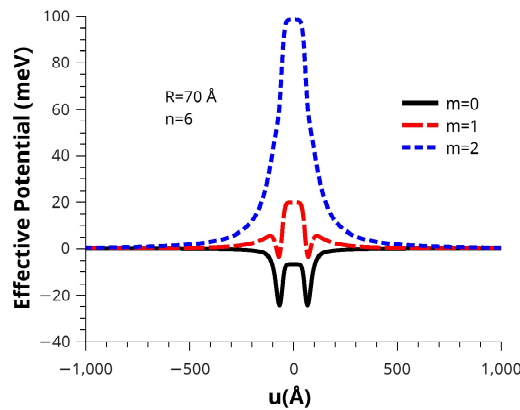


Fonte: Retirado de [99].

A discussão do potencial efetivo mostrado no Gráfico 10 é qualitativamente similar à do potencial efetivo mostrado no Gráfico 9. No entanto, o poço de potencial duplo mostrado no Gráfico 10 é mais profundo do que o poço de potencial duplo mostrado no Gráfico 9. Como a superfície do buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov assume a forma de um cilindro (que pode ser pensado como um nanotubo de carbono), para valores maiores de n (ver Figura 7), o efeito da curvatura de grafeno nas extremidades do buraco de minhoca é acentuado,

o que explica o porquê da profundidade do poço duplo ser maior no Gráfico 10, quando $n = 6$, do que no Gráfico 9, quando $n = 4$. Este fato está de acordo com os resultados encontrados em [61], onde os autores relatam a existência de picos indicando a presença de estados localizados na interface entre o grafeno e o nanotubo. Da mesma forma Gonzalez *et al* [78] previram a existência de estados confinados na interface entre nanotubos metálicos e grafeno, sob certas condições usando a equação de Dirac. Os dois mínimos do potencial efetivo, para $m = 0$, mostrados no Gráfico 10, estão localizados em $u = -67 \text{ \AA}$ e $u = 67 \text{ \AA}$, e nesses pontos o valor do potencial é $-24,4 \text{ meV}$.

Gráfico 10 – Potencial efetivo para $R = 70 \text{ \AA}$ $n = 6$ e para alguns valores de m .



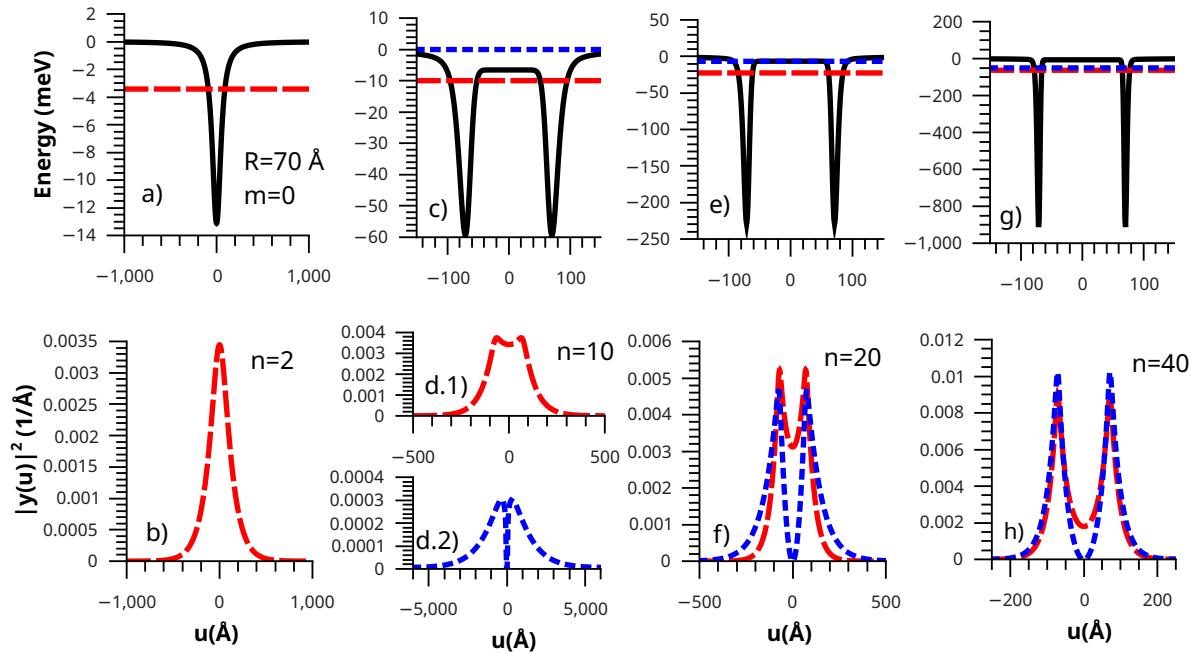
Fonte: Retirado de [99].

6.3 Estados ligados

Na seção anterior, estudamos a interação de um elétron em vários tipos de superfícies generalizadas de buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, de raios R , feitas de grafeno. O potencial efetivo foi obtido a partir deste estudo dado pela (6.16). Nesta seção, estudaremos seus estados ligados, considerando o raio dessas superfícies igual a $R = 70 \text{ \AA}$, e a massa efetiva do elétron no grafeno igual a $m^* = 0,03m_0$. Para isso, resolvemos numericamente a (6.15), usando o método das diferenças finitas [80], para o potencial efetivo dado pela (4.16).

O Gráfico 11 mostra quatro potenciais efetivos associados a quatro superfícies de buraco de minhoca GEB feitas de grafeno, a saber: a) $n = 2$, c) $n = 10$, e) $n = 20$ e g) $n = 40$. Nestes potenciais, o momento angular orbital não é levado em consideração, então $m = 0$. No Gráfico 11 a), o potencial efetivo para um elétron confinado à superfície de um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov convencional é mostrado pela linha preta sólida. Para este potencial existe um único estado confinado, cuja energia é $-3,42 \text{ meV}$. Sua função densidade de probabilidade é uma função gaussiana, cuja largura da meia altura é $\Delta u = 231 \text{ \AA}$, conforme mostrado no Gráfico 11 b). Fazendo uso da simetria angular do sistema e tomando a largura da meia altura da função densidade de probabilidade é possível visualizar uma nuvem de probabilidade, centrada na origem do buraco de minhoca da superfície, em forma de anel, ou anel de probabilidade, onde o elétron é mais provável de ser encontrado.

Gráfico 11 – Os estados ligados e suas densidades de probabilidade para um buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov com raio $R = 70 \text{ \AA}$, $m = 0$ e $m^* = 0,03m_0$. A linha preta sólida representa o potencial efetivo para: a) $n = 2$, c) $n = 10$, e) $n = 20$ e g) $n = 40$. As linhas pontilhadas vermelhas e azuis correspondem ao estado fundamental e primeiro estado excitado e suas densidades de probabilidade, respectivamente.



Fonte: Retirado de [99].

Para $n = 10$, o potencial efetivo, mostrado no Gráfico 11 c), tem a forma de um poço de potencial duplo (linha preta sólida), cujos mínimos estão localizados em $u = -70,5 \text{ \AA}$ e $u = 70,5 \text{ \AA}$, com valor de $-59,3 \text{ meV}$. As linhas tracejadas vermelhas e azuis representam o estado fundamental e o primeiro estado excitado, respectivamente, sendo que as energias desses estados são $-9,98 \text{ meV}$ e $-0,034 \text{ meV}$. Esses estados são ditos híbridos, pois o potencial efetivo é composto por dois poços de potencial que estão próximos e seus estados se combinam e formam estados híbridos [79]. Isso pode ser visto nas funções de densidade de probabilidade mostradas nos Gráfico 11 d.1) e Gráfico 11 d.2). O Gráfico 11 d.1) mostra a função densidade de probabilidade do estado fundamental do sistema, que tem a forma de duas funções gaussianas praticamente sobrepostas, cujos máximos estão localizados em $u = -64 \text{ \AA}$ e $u = 64 \text{ \AA}$. A largura da meia altura desta função de densidade de probabilidade é $\Delta u = 510 \text{ \AA}$. A nuvem de probabilidade deste estado tem a forma aproximada de um anel de probabilidade centrado na origem da superfície do buraco de minhoca, porque os dois máximos da função de densidade de probabilidade são muito próximos. Portanto, aqui é mais provável que o elétron seja encontrado entre os poços, ou seja, em torno de $u = 0$.

O primeiro estado excitado para $n = 10$ (linha azul pontilhada) apresenta também uma função densidade de probabilidade na forma de duas funções gaussianas, com seu máximo

localizado em $u = -328,5 \text{ \AA}$, e a outra localizado em $u = 328,5 \text{ \AA}$. A largura de meia altura de cada uma das funções gaussianas é $\Delta u = 1.348,5 \text{ \AA}$ (veja o Gráfico 11 d.2)). Portanto, a nuvem de probabilidade do primeiro estado excitado tem a forma de dois anéis de probabilidade centrados em $u = -328,5 \text{ \AA}$ e $u = 328,5 \text{ \AA}$ de largura $\Delta u = 1.348,5 \text{ \AA}$ cada. Esses anéis de probabilidade estão muito próximos da origem da superfície do buraco de minhoca ($u = 0$). A grande largura desses anéis de probabilidade mostra que esse estado é fracamente ligado.

O Gráfico 11 e) mostra o potencial efetivo, para $n = 20$, na forma de dois poços, com seus mínimos localizados em $u = -71 \text{ \AA}$ e $u = 71 \text{ \AA}$, onde sua energia é $-228,95 \text{ meV}$. Aqui existem dois estados híbridos, cujas energias são $-22,63$ e $-6,72 \text{ meV}$. As funções de densidade de probabilidade do estado fundamental (linha vermelha pontilhada) tem a forma de duas funções gaussianas praticamente sobrepostas com seu máximo separado de $u = -70 \text{ \AA}$ e $u = 70 \text{ \AA}$. Aqui, a largura a meia altura é definida como se houvesse um único pico devido à proximidade entre eles, portanto não é possível visualizar dois anéis de probabilidade, mas apenas um, de largura $\Delta u = 206 \text{ \AA}$, localizado em $u = 0$. Assim, o elétron pode ser encontrado tanto nas extremidades do buraco de minhoca quanto dentro dele.

O primeiro estado excitado (linha pontilhada azul) é mostrado no Gráfico 11 f), cuja densidade de probabilidade assume a forma de duas funções gaussianas centradas em $u = -75 \text{ \AA}$ e $u = 75 \text{ \AA}$, e a largura de cada uma dessas funções gaussianas é $\Delta u = 83 \text{ \AA}$. Novamente, levando em conta a simetria angular do buraco de minhoca, a função de densidade de probabilidade do primeiro estado excitado (linha pontilhada azul) assume a forma de dois anéis de probabilidade localizados em $u = -75 \text{ \AA}$ e $u = 75 \text{ \AA}$, com cada anel tendo uma largura de $\Delta u = 84 \text{ \AA}$. Então, é igualmente provável que o elétron seja encontrado nas extremidades do buraco de minhoca.

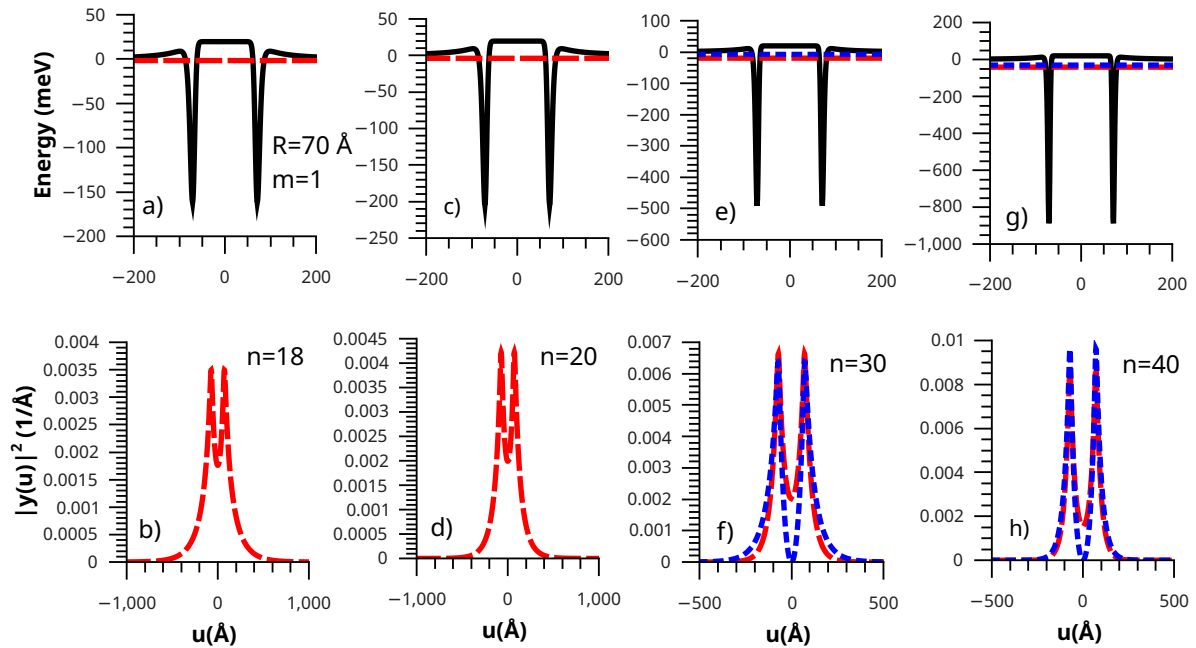
Para $n = 40$, no Gráfico 11 g), o potencial efetivo tem dois poços localizados em $u = -71 \text{ \AA}$ e $u = 71 \text{ \AA}$, e seus mínimos têm energia igual a $-912,6 \text{ meV}$. São obtidos dois estados ligados de energia, cujos valores são $-63,0 \text{ meV}$ e $-50,4 \text{ meV}$. Os dois picos da função de densidade de probabilidade estão em $u = -71 \text{ \AA}$ e $u = 71 \text{ \AA}$, com a largura de $\Delta u = 40 \text{ \AA}$, cada um (veja o Gráfico 11 h)). Os picos da função de densidade de probabilidade para o primeiro estado excitado têm a mesma localização que os picos da função de estado fundamental, porém sua largura é 38 \AA . Portanto, dois anéis de probabilidade, para cada estado ligado, podem ser visualizados simetricamente em torno da origem do buraco de minhoca.

Vale ressaltar que, para $n = 40$, a função densidade de probabilidade do estado fundamental indica que o elétron tem a mesma possibilidade de estar em cada um dos poços; o mesmo vale para a função densidade de probabilidade do primeiro estado excitado. Como os dois poços são indistinguíveis, este sistema tem simetria bilateral, então, um elétron localizado em um dos poços pode tunelar para o outro realizando um movimento periódico com uma frequência dada por $f = (E_1 - E_0)/h = 3 \text{ THz}$ [79].

Observe que os estados ligados obtidos para o buraco de minhoca de GEB, $n = 40$, são mais ligados do que para buracos de minhoca generalizados para $n < 40$, o que é razoável,

pois os poços se tornam mais profundos devido ao aumento do efeito de curvatura na bordas da superfície do buraco de minhoca.

Gráfico 12 – Os estados ligados e suas densidades de probabilidade para um buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov com raio $R = 70 \text{ \AA}$, $m = 1$ e $m^* = 0,03m_0$. A linha preta sólida representa o potencial efetivo para: a) $n = 18$, c) $n = 20$, e) $n = 30$ e g) $n = 40$. As linhas pontilhadas vermelhas e azuis correspondem ao estado fundamental e primeiro estado excitado e suas densidades de probabilidade, respectivamente.



Fonte: Retirado de [99].

Como dito anteriormente, quando o momento angular é levado em consideração, $m = 1$, o potencial induzido pelo buraco de minhoca da superfície, dado por $V_{\text{ind}}(u)$, torna-se mais relevante que o potencial de da Costa $V_{\text{dC}}(u)$, então, o potencial efetivo apesar disso assume a forma de uma barreira de potencial, para alguns valores de n para buracos de minhoca de GEB. O potencial efetivo em forma de poço duplo inicia sua formação para o buraco de minhoca de GEB para $n = 6$, porém, são muito rasos. O primeiro estado ligado só é obtido para o buraco de minhoca de GEB para $n = 18$, que é mostrado no Gráfico 12 a), então, o potencial efetivo, representado pela linha preta sólida, também apresenta dois poços, com seus respectivos mínimos localizados em $u = -71 \text{ \AA}$ e $u = 71 \text{ \AA}$, e com valores de energia iguais a $-161,6 \text{ meV}$. Um único estado é observado com energia igual a $-1,61 \text{ meV}$. Sua função de densidade de probabilidade é mostrada no Gráfico 12 b). A função densidade de probabilidade tem a forma de duas gaussianas quase sobrepostas. Seus máximos estão localizados em $u = -72 \text{ \AA}$ e $u = 72 \text{ \AA}$. Como os picos da função de densidade de probabilidade estão muito próximos, a largura de meia altura de cada pico perde resolução e é vista como um único pico de largura $\Delta u = 206 \text{ \AA}$. Então, apenas um anel de probabilidade é observado no centro do buraco de

minhoca, que é a região onde o elétron provavelmente está localizado.

Para $n = 20$, também é observado um único estado com energia igual a $-3,85$ meV. Os mínimos de potencial efetivo estão localizados em $u = -71 \text{ \AA}$ e $u = 71 \text{ \AA}$, com valor energético igual a $-204,84$ meV. Os Gráfico 12 c) e Gráfico 12 d) mostram o potencial efetivo, a energia de nível e a função densidade de probabilidade. Aqui, para $n = 20$, a função de densidade de probabilidade é semelhante à mostrada para $n = 18$ (ver Gráfico 12 d)), porém, os picos da função de densidade de probabilidade são mais estreitos, com $\Delta u = 100 \text{ \AA}$, embora os picos sejam mais estreitos, a resolução dos dois anéis de probabilidade não é muito clara, portanto, um único anel de probabilidade é observado no centro da superfície do buraco de minhoca.

O Gráfico 12 e), para $n = 30$, mostra dois estados ligados com energias iguais $-19,5$ meV e $-7,53$ meV. O potencial efetivo tem dois mínimos com valor de -491 meV (linha preta sólida). As funções de densidade de probabilidade dos dois estados confinados são praticamente semelhantes. Ou seja, dois anéis de probabilidade localizados em $u = -71 \text{ \AA}$ e $u = 71 \text{ \AA}$, com largura de $\Delta u = 56 \text{ \AA}$, conforme mostrado no Gráfico 12 f). Como as funções de densidade de probabilidade têm semelhanças com aquelas discutidas para o buraco de minhoca para $m = 0$ e $n = 40$, aqui para $m = 1$ e $n = 30$, aqui também o elétron pode realizar movimento oscilatório com frequência $f = 2,9$ THz.

O potencial efetivo, para a superfície de um buraco de minhoca de GEB se $n = 40$, tem dois estados ligados com energias iguais a $-41,6$ meV e $-30,6$ meV. Os mínimos do poço de potencial são $-887,7$ meV (ver Gráfico 12 g)). A função de densidade de probabilidade dos dois estados exibe dois picos. A largura dos picos do estado fundamental é $\Delta u = 40 \text{ \AA}$, enquanto, o primeiro estado excitado é $\Delta u = 38 \text{ \AA}$. Portanto, a nuvem de probabilidade do estado fundamental consiste em dois anéis de largura 40 \AA um em $u = -71 \text{ \AA}$ e outro em $u = 71 \text{ \AA}$. Considerando que o primeiro estado excitado consiste em dois anéis de largura 38 \AA localizados nas mesmas posições que o estado fundamental, como mostrado no Gráfico 12 h). Aqui também o elétron pode oscilar de um poço para outro com frequência $f = 2,7$ THz.

Ao alterar o raio R do buraco de minhoca não há alteração qualitativa, porém, quantitativamente há alterações nos valores dos níveis de energia. À medida que R diminui, o potencial efetivo torna-se mais profundo, devido ao efeito crescente da curvatura das superfícies dos buracos de minhoca, de modo que os níveis de energia ficam mais confinados. E o aumento do valor de R tem o efeito contrário, o potencial efetivo torna-se menos profundo, e os níveis tornam-se menos confinados.

A Tabela 1 abaixo mostra as frequências de oscilação dos elétrons oscilando entre as extremidades do buraco de minhoca ($n = 40$), para alguns valores de R . Observe que à medida que R aumenta, a frequência de oscilação diminui.

Tabela 1 – Frequências de oscilação para $R = 50 \text{ \AA}, 70 \text{ \AA}, 100 \text{ \AA}$ e 200 \AA , $n = 40$, $m = 0, 1$.

R	n	m	$f = \Delta E/h$	m	$f = \Delta E/h$
50 \AA	40	0	6,0 THz	1	5,2 THz
70 \AA	40	0	3,0 THz	1	2,7 THz
100 \AA	40	0	1,5 THz	1	1,2 THz
200 \AA	40	0	0,4 THz	1	0,3 THz

Fonte: Retirada de [99]

7 CONCLUSÃO

Para um bom acompanhamento desse trabalho sem interpretações equivocadas, coloquei os Capítulos 2, 3 e 4 para darem o melhor embasamento ao leitor, antes de prosseguir em sua leitura nesta obra. A existência do Capítulo 2 é para justificar a escolha do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov, que é de Morris-Thorne para certas condições impostas, no referido estudo. Além disso, mostramos o porquê de lidarmos com buracos atravessáveis de Morris-Thorne. Esses buracos são mais realistas no que diz respeito ao nosso objetivo, pois o elétron poderá ir de uma camada para outra, passando pelo túnel (conexão do buraco de minhoca), livre de qualquer risco de se encontrar com uma singularidade. No Capítulo 3, fiz uma breve revisão sobre massa efetiva do elétron. A teoria usada nesse trabalho foi a de massa efetiva para um limite contínuo nas ligações entre carbono-carbono. Sendo discreto o ambiente oferecido por cada camada, contendo conexões de nanotubos de carbono, as propriedades eletrônicas não dependem, aproximadamente, do comprimento de cada CNT, mas são altamente dependentes das conexões de estrutura [61]. Isso nos permite tratar as camadas como estruturas geométricas contínuas de nanotubos de carbono. No Capítulo 4, tratou-se da abordagem bidimensional da Mecânica Quântica de Schrödinger, sem contar com a interação de spin do elétron e a dependência no tempo nas equações de movimento. Evitando o espalhamento dos pacotes de onda do elétron na direção normal à superfície que o vincula, nesse contexto se chega a um potencial atrativo que dependerá das curvaturas média e gaussiana dessa superfície, ou seja, ao potencial de da Costa. Esse capítulo é uma revisão feita do artigo [33]. Com a intenção ainda de revisão, antes de tratarmos o tema desse trabalho, pus o Capítulo 5, que é uma dissertação do artigo [46], justamente, para dar direcionamento em nossa investigação, embora, levam-se em conta os campos magnético e elétrico na dinâmica do elétron.

Neste trabalho estudamos a interação do elétron com uma bicamada de grafeno tipo buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov (GEB), via aproximação de massa efetiva. Para isso, obteve-se um potencial efetivo que confina o elétron na superfície do buraco de minhoca GEB. Este potencial efetivo é a combinação de um potencial induzido pela superfície, $V_{\text{ind}}(u)$, com o potencial de da Costa, $V_{\text{dC}}(u)$, que surge da vinculação forte do elétron na superfície do buraco de minhoca. O potencial induzido pelo buraco de minhoca GEB é essencialmente repulsivo, enquanto o potencial de da Costa é atrativo. Na ausência de momento angular orbital ($m = 0$), o potencial de da Costa predomina sobre o potencial induzido, o que faz com que o potencial efetivo assuma a forma de um poço de potencial para $n = 2$, ou um poço de potencial duplo para $n > 2$. Resolvendo a (6.15) para esses potenciais, considerando $R = 70 \text{ \AA}$, obtém-se um estado ligado para $n = 2$ e dois estados para $n > 8$, que são híbridos. O potencial efetivo é drasticamente alterado quando se leva em conta o momento angular orbital ($m \neq 0$), pois o potencial induzido torna-se mais relevante que o potencial de da Costa. Apesar do potencial induzido (repulsivo) ter relevância em relação ao potencial de da Costa (atrativo),

obteve-se um estado híbrido ligado para $m = 1$, $R = 70 \text{ \AA}$ e $n > 16$, e dois estados híbridos para $n > 24$. Uma frequência de um elétron oscilando entre esses estados foi estimada da ordem de THz. Essa frequência pode ser utilizada como uma forma de caracterizar o próprio sistema.

O potencial efetivo não apresenta alteração qualitativa quando o raio do sistema é modificado, porém, os valores dos níveis de energia podem ser alterados. Por exemplo, para valores menores de R , a profundidade do potencial efetivo aumenta. Mesmo vendo que o número de estados não seja alterado, esses estados assumem valores de energia baixos, então, a radiação emitida pelo elétron ao transitar de um poço para o outro também pode ser modificada. Aqui, pode-se inferir que a frequência de oscilação eletrônica pode estar relacionada ao tamanho do sistema. Uma extensão natural deste trabalho é analisar estes resultados quando temos a ação de campos externos (campos elétrico e magnético constantes), já que tomamos apenas os efeitos geométricos gerados pelas camadas quando há movimento do elétron nelas. Outras possibilidades interessantes são as discussões das propriedades termodinâmicas do presente sistema, bem como a investigação de uma pequena torção entre as folhas de grafeno superior e inferior.

REFERÊNCIAS

- [1] FLAMM, Ludwig. Republication of: contributions to einstein's theory of gravitation. **General Relativity And Gravitation**, [S.L.], v. 47, n. 6, p. 72-72, 30 mai. 2015. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-015-1908-2>.
- [2] EINSTEIN, Albert; ROSEN, Nathan. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. **Physical Review**, [S.L.], v. 48, n. 1, p. 73-77, 1 jul. 1935. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrev.48.73>.
- [3] WHEELER, John Archibald. Geons. **Physical Review**, [S.L.], v. 97, n. 2, p. 511-536, 15 jan. 1955. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrev.97.511>.
- [4] CATALDO, Mauricio; LIEMPI, Luis; RODRÍGUEZ, Pablo. Traversable Schwarzschild-like wormholes. **The European Physical Journal C**, [S.L.], v. 77, n. 11, p. 748-748, nov. 2017. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5332-5>.
- [5] PADMANABHAN, Thanu. **Gravitation: foundations and frontiers**. UK: Cambridge University Press, 2012.
- [6] MISNER, Charles. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman Co., 1973.
- [7] WEYL, Hermann. **Philosophy of mathematics and natural science**. Princetom: Princetom University Press, 1949.
- [8] GIBBONS, Gary; VOLKOV, Mikhail. Weyl metrics and wormholes. **Journal Of Cosmology And Astroparticle Physics**, [S.L.], v. 2017, n. 05, p. 039-039, 18 mai. 2017. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/05/039>.
- [9] EINSTEIN, Albert; PODOLSKY, Boris; ROSEN, Nathan. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Physical Review**, [S.L.], v. 47, n. 10, p. 777-780, 15 mai. 1935. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrev.47.777>.
- [10] MALDACENA, Juan; SUSSKIND, Leonard. Cool horizons for entangled black holes. **Fortschritte Der Physik**, [S.L.], v. 61, n. 9, p. 781-811, 1 ago. 2013. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1002/prop.201300020>.
- [11] MORRIS, Michael; THORNE, Kip. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity. **American Journal Of Physics**, [S.L.], v. 56, n. 5, p. 395-412, mai. 1988. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.15620>.

- [12] SUSHKOV, Sergey. Wormholes supported by a phantom energy. **Physical Review D**, [S.L.], v. 71, n. 4, p. 043520-043520, 28 fev. 2005. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.71.043520>.
- [13] LOBO, Francisco. Phantom energy traversable wormholes. **Physical Review D**, [S.L.], v. 71, n. 8, p. 084011-084011, 13 abr. 2005. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.71.084011>.
- [14] GARATTINI, Remo. Casimir wormholes. **The European Physical Journal C**, [S.L.], v. 79, n. 11, p. 951-951, nov. 2019. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7468-y>.
- [15] JUSUFI, Kimet; CHANNUIE, Phongpichit; JAMIL, Mubasher. Traversable wormholes supported by GUP corrected Casimir energy. **The European Physical Journal C**, [S.L.], v. 80, n. 2, p. 127-127, fev. 2020. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7690-7>.
- [16] ALENCAR, Geová; BEZERRA, Valdir; MUNIZ, Célio. Casimir wormholes in $2 + 1$ dimensions with applications to the graphene. **The European Physical Journal C**, [S.L.], v. 81, n. 10, p. 924-924, out. 2021. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09734-0>.
- [17] OLIVEIRA, Pedro H. Ferreira de; ALENCAR, Geová; JARDIM, Ivan; LANDIM, Ricardo Renan. Traversable Casimir wormholes in D dimensions. **Modern Physics Letters A**, [S.L.], v. 37, n. 15, p. 2250090-2250090, 20 mai. 2022. World Scientific Pub Co Pte Ltd. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217732322500900>.
- [18] CARVALHO, Ícaro de; ALENCAR, Geová; MUNIZ, Célio. Gravitational bending angle with finite distances by Casimir wormholes. **International Journal Of Modern Physics D**, [S.L.], v. 31, n. 03, p. 2250011-2250011, 11 dez. 2021. World Scientific Pub Co Pte Ltd. <http://dx.doi.org/10.1142/s0218271822500110>.
- [19] RICHARTE, Martín; SIMEONE, Claudio. Erratum: thin-shell wormholes supported by ordinary matter in einstein-gauss-bonnet gravity [phys. rev. d76, 087502 (2007)]. **Physical Review D**, [S.L.], v. 77, n. 8, p. 089903-089903, 7 abr. 2008. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.77.089903>.
- [20] MATULICH, Javier; TRONCOSO, Ricardo. Asymptotically Lifshitz wormholes and black holes for Lovelock gravity in vacuum. **Journal Of High Energy Physics**, [S.L.], v. 2011, n. 10, p. 118-118, out. 2011. Springer Science and Business Media LLC. [http://dx.doi.org/10.1007/jhep10\(2011\)118](http://dx.doi.org/10.1007/jhep10(2011)118).

- [21] RICHARTE, Martín; SIMEONE, Claudio. Corrected Article: wormholes in einstein-born-infeld theory [phys. rev. d80, 104033 (2009)]. **Physical Review D**, [S.L.], v. 81, n. 10, p. 109903-109903, 23 nov. 2009. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.81.109903>.
- [22] GARCIA, Nadiezhda Montelongo; LOBO, Francisco. Exact solutions of Brans–Dicke wormholes in the presence of matter. **Modern Physics Letters A**, [S.L.], v. 26, n. 40, p. 3067-3076, 28 dez. 2011. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s021773231103739x>.
- [23] ÖVGÜN, Ali; JUSUFI, Kimet; SAKALLI, İzzet. Exact traversable wormhole solution in bumblebee gravity. **Physical Review D**, [S.L.], v. 99, n. 2, p. 024042-024042, 29 jan. 2019. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.99.024042>.
- [24] LESSA, Leandro; OLIVEIRA, Rondinely; SILVA, José Euclides Gomes da; ALMEIDA, Carlos Alberto Santos de. Traversable wormhole solution with a background Kalb–Ramond field. **Annals Of Physics**, [S.L.], v. 433, p. 168604-168604, out. 2021. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2021.168604>.
- [25] NILTON, Matheus; FURTADO, Job; ALENCAR, Geová. Traversability of wormhole solutions in asymptotically safe gravity. **Physical Review D**, [S.L.], v. 105, n. 8, p. 084048-084048, 26 abr. 2022. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.105.084048>.
- [26] NILTON, Matheus; FURTADO, Job; ALENCAR, Geová; LANDIM, Ricardo Renan. Generalized Ellis–Bronnikov wormholes in asymptotically safe gravity. **Annals Of Physics**, [S.L.], v. 448, p. 169195-169195, jan. 2023. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2022.169195>.
- [27] ELLIS, Homer. Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity. **Journal Of Mathematical Physics**, [S.L.], v. 14, n. 1, p. 104-118, jan. 1973. AIP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1666161>.
- [28] BRONNIKOV, Kirill. Scalar-tensor theory and scalar charge. **Acta Physica Polonica B**, [S.L.], v. 4, n. 2, p. 251-266, jul. 1972. Jagiellonian University. <https://inspirehep.net/files/1a28c080a733a1b776867157a30efd12>.
- [29] KATSNELSON, Mikhail. **Graphene: carbon in two dimensions**. UK: Cambridge University Press, 2012.
- [30] GEIM, Andre; NOVOSELOV, Konstantin. The rise of graphene. **Nature Materials**, [S.L.], v. 6, n. 3, p. 183-191, mar. 2007. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1038/nmat1849>.

- [31] CASTRO NETO, Antônio Hélio de; GUINEA, Francisco; PERES, Nuno; NOVOSELOV, Konstantin; GEIM, Andre. The electronic properties of graphene. **Reviews Of Modern Physics**, [S.L.], v. 81, n. 1, p. 109-162, 14 jan. 2009. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.81.109>.
- [32] CARVALHO, Alexandra; WANG, Min; ZHU, Xi; RODIN, Aleksandr; SU, Haibin; CASTRO NETO, Antonio Hélio. Phosphorene: from theory to applications. **Nature Reviews Materials**, [S.L.], v. 1, n. 11, p. 16061-16061, 31 ago. 2016. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1038/natrevmats.2016.61>.
- [33] COSTA, Rogério Cantarino Trajano da. Quantum mechanics of a constrained particle. **Physical Review A**, [S.L.], v. 23, n. 4, p. 1982-1987, 1 abr. 1981. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.23.1982>.
- [34] COSTA FILHO, R. N.; OLIVEIRA, S. F. S.; AGUIAR, V.; COSTA, D. R. da. Two-dimensional electron gas in a non-Euclidean space. **Physica e: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, [S.L.], v. 129, p. 114639-114639, mai. 2021. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physe.2021.114639>.
- [35] AGUIAR, V.; CUNHA, S. M.; COSTA, D. R. da; COSTA FILHO, R. N.. Dirac fermions in graphene using the position-dependent translation operator formalism. **Physical Review B**, [S.L.], v. 102, n. 23, p. 235404-235404, 3 dez. 2020. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.102.235404>.
- [36] CAPOZZIELLO, Salvatore; PINČÁK, Richard; BARTOŁ, Erik. Chern-Simons Current of Left and Right Chiral Superspace in Graphene Wormhole. **Symmetry**, [S.L.], v. 12, n. 5, p. 774-774, 7 mai. 2020. MDPI AG. <http://dx.doi.org/10.3390/sym12050774>.
- [37] CVETIČ, Mirjam; GIBBONS, Gary. Graphene and the Zermelo optical metric of the BTZ black hole. **Annals Of Physics**, [S.L.], v. 327, n. 11, p. 2617-2626, nov. 2012. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2012.05.013>.
- [38] POURHASSAN, Behnam; FAIZAL, Mir; KETABI, S. Ahmad. Logarithmic correction of the BTZ black hole and adaptive model of graphene. **International Journal Of Modern Physics D**, [S.L.], v. 27, n. 12, p. 1850118-1850118, set. 2018. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s0218271818501183>.
- [39] ACQUAVIVA, Giovanni; IORIO, Alfredo; PAIS, Pablo; SMALDONE, Luca. Hunting Quantum Gravity with Analogs: the case of graphene. **Universe**, [S.L.], v. 8, n. 9, p. 455-455, 30 ago. 2022. MDPI AG. <http://dx.doi.org/10.3390/universe8090455>.
- [40] IORIO, Alfredo; LAMBIASE, Gaetano. Quantum field theory in curved graphene spacetimes, Lobachevsky geometry, Weyl symmetry, Hawking effect, and all that. **Physical**

Review D, [S.L.], v. 90, n. 2, p. 025006-025006, 7 jul. 2014. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.90.025006>.

[41] IORIO, Alfredo. Weyl-gauge symmetry of graphene. **Annals Of Physics**, [S.L.], v. 326, n. 5, p. 1334-1353, mai. 2011. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2011.01.001>.

[42] IORIO, Alfredo. Curved spacetimes and curved graphene: a status report of the weyl symmetry approach. **International Journal Of Modern Physics D**, [S.L.], v. 24, n. 05, p. 1530013-1530013, 18 mar. 2015. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s021827181530013x>.

[43] GUO, Zhao-Liang; DONG, H.; SUN, C. P.; GONG, Zhi-Rui. Möbius graphene strip as a topological insulator. **Physical Review B**, [S.L.], v. 80, n. 19, p. 195310-195310, 13 nov. 2009. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.80.195310>.

[44] JUAN, Fernando de; VOZMEDIANO, María A. H.; CORTIJO, Alberto. Charge inhomogeneities due to smooth ripples in graphene sheets. **Physical Review B**, [S.L.], v. 76, n. 16, p. 165409-165409, 8 out. 2007. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.76.165409>.

[45] ATANASOV, Victor; SAXENA, Avadh. Tuning the electronic properties of corrugated graphene: confinement, curvature, and band-gap opening. **Physical Review B**, [S.L.], v. 81, n. 20, p. 205409-205409, 7 mai. 2010. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.81.205409>.

[46] SILVA, José Euclides da; FURTADO, Job; SANTIAGO, Thiago M.; RAMOS, Antonio Carlos Alonge; COSTA, Diego Rabelo da. Electronic properties of bilayer graphene catenoid bridge. **Physics Letters A**, [S.L.], v. 384, n. 25, p. 126458-126458, set. 2020. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126458>.

[47] YEŞİLTAŞ, Özlem; FURTADO, Job; SILVA, José Euclides Gomes da. Dirac equation on a catenoid bridge: a supersymmetric approach. **The European Physical Journal Plus**, [S.L.], v. 137, n. 4, p. 416-416, abr. 2022. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02589-8>.

[48] SILVA, José Euclides Gomes; FURTADO, Job; RAMOS, Antonio Carlos Alonge. Position-dependent mass effects on a bilayer graphene catenoid bridge. **The European Physical Journal B**, [S.L.], v. 94, n. 6, p. 127-127, jun. 2021. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/s10051-021-00138-3>.

[49] LIMA, J. D. M. de; GOMES, E.; SILVA FILHO, F. F. da; MORAES, F.; TEIXEIRA, R.. Geometric effects on the electronic structure of curved nanotubes and curved graphene: the case of the helix, catenary, helicoid, and catenoid. **The European Physical Journal Plus**,

[S.L.], v. 136, n. 5, p. 551-551, 17 mai. 2021. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01533-6>.

[50] SILVA, José Euclides Gomes; FURTADO, Job; RAMOS, Antonio Carlos Alonge. Electronic properties of a graphene nanotorus under the action of external fields. **The European Physical Journal B**, [S.L.], v. 93, n. 12, p. 225-225, dez. 2020. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2020-10449-x>.

[51] YEŞİLTAŞ, Ö.; FURTADO, J.. Pseudo-Hermitian Dirac operator on the torus for massless fermions under the action of external fields. **International Journal Of Modern Physics A**, [S.L.], v. 37, n. 1112, p. 2250073-2250073, 30 abr. 2022. World Scientific Pub Co Pte Ltd. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217751x22500737>.

[52] YEŞİLTAŞ, Özlem. Dirac Equation on the Torus and Rationally Extended Trigonometric Potentials within Supersymmetric QM. **Advances In High Energy Physics**, [S.L.], v. 2018, p. 1-9, 2018. Hindawi Limited. <http://dx.doi.org/10.1155/2018/6891402>.

[53] MAZHARIMOUSAVI, S Habib. Quantum particle on a surface: catenary surface and paraboloid of revolution. **Physica Scripta**, [S.L.], v. 96, n. 12, p. 125245-125245, 2 nov. 2021. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1402-4896/ac326f>.

[54] HAN, Anh-Luan; LE, Dai-Nam; LE, Van-Hoang; ROY, Pinaki. Electronic spectrum of spherical fullerene molecules in the presence of generalized magnetic fields. **The European Physical Journal Plus**, [S.L.], v. 135, n. 1, p. 1-16, jan. 2020. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-019-00009-y>.

[55] CIAPPINA, Marcelo F.; IORIO, Alfredo; PAIS, Pablo; ZAMPELI, Adamantia. Torsion in quantum field theory through time-loops on Dirac materials. **Physical Review D**, [S.L.], v. 101, n. 3, p. 036021-036021, 28 fev. 2020. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.101.036021>.

[56] ORIO, Alfredo; PAIS, Pablo. Revisiting the gauge fields of strained graphene. **Physical Review D**, [S.L.], v. 92, n. 12, p. 125005-125005, 1 dez. 2015. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.92.125005>.

[57] GONZÁLEZ, J.; HERRERO, J.. Graphene wormholes: a condensed matter illustration of dirac fermions in curved space. **Nuclear Physics B**, [S.L.], v. 825, n. 3, p. 426-443, fev. 2010. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2009.09.028>.

[58] PINCAK, R.; SMOTLACHA, J.. The Chiral Massive Fermions in the Graphitic Wormhole. **Quantum Matter**, [S.L.], v. 5, n. 1, p. 107-117, 1 fev. 2016. American Scientific Publishers. <http://dx.doi.org/10.1166/qm.2016.1262>.

- [59] ANDOLOFF, Rossen; SAXENA, Avadh; JENSEN, Bjørn. Geometry-induced potential on a two-dimensional section of a wormhole: catenoid. **Physical Review A**, [S.L.], v. 81, n. 1, p. 014102-014102, 19 jan. 2010. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.81.014102>.
- [60] DANDOLOFF, Rossen. Quantum anticyclotronic force for wormhole geometry. **Physics Letters A**, [S.L.], v. 373, n. 31, p. 2667-2669, jul. 2009. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2009.05.073>.
- [61] NOVAES, Frederico D.; RURALI, Riccardo; ORDEJÓN, Pablo. Electronic Transport between Graphene Layers Covalently Connected by Carbon Nanotubes. **Acs Nano**, [S.L.], v. 4, n. 12, p. 7596-7602, 3 nov. 2010. American Chemical Society (ACS). <http://dx.doi.org/10.1021/nn102206n>.
- [62] KONDO, Daiyu; SATO, Shintaro; AWANO, Yuji. Self-organization of Novel Carbon Composite Structure: graphene multi-layers combined perpendicularly with aligned carbon nanotubes. **Applied Physics Express**, [S.L.], v. 1, p. 074003-074003, 20 jun. 2008. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1143/apex.1.074003>.
- [63] KAR, Sayan; MINWALLA, Shiraz N.; MISHRA, Deepak; SAHDEV, Deshdeep. Resonances in the transmission of massless scalar waves in a class of wormholes. **Physical Review D**, [S.L.], v. 51, n. 4, p. 1632-1638, 15 fev. 1995. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.51.1632>.
- [64] DUTTA ROY, Poulami; ANEESH, S.; KAR, Sayan. Revisiting a family of wormholes: geometry, matter, scalar quasinormal modes and echoes. **The European Physical Journal C**, [S.L.], v. 80, n. 9, p. 850-850, set. 2020. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8409-5>.
- [65] COOPER, D. R.; D'ANJOU, B.; GHATTAMANENI, B. Harack; HILKE, M.; HORTH, A.; NAJLIS, N.; MASSICOTTE, M.; VANDSBURGER, L.; WHITEWAY, E.; YU, V. Experimental review of graphene. *ISRN Condensed Matter Physics*, [S.L.], v. 1, p.56-56, dez. 2012. Hindawi Publishing Corporation. <https://search.emarefa.net/en/detail/BIM-476604-experimental-review-of-graphene>.
- [66] WALD, Robert. **General relativity**. UK: University Of Chicago Press, 1984.
- [67] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Differential geometry of curves and surfaces**. 2. ed. New York: Dover Publications, Inc., 2016.
- [68] SPIVAK, Michael. **A comprehensive introduction to differential geometry**. Houston: Publish Or Perish, 1999.

- [69] LEKNER, John. Reflectionless eigenstates of the sech^2 potential. **American Journal Of Physics**, [S.L.], v. 75, n. 12, p. 1151-1157, dez. 2007. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.2787015>.
- [70] BENDER, Carl M. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. **Reports On Progress In Physics**, [S.L.], v. 70, n. 6, p. 947-1018, 30 mai. 2007. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/70/6/r03>.
- [71] BENDER, Carl M.; BOETTCHER, Stefan. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having: math xmlns. **Physical Review Letters**, [S.L.], v. 80, n. 24, p. 5243-5246, 15 jun. 1998. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.80.5243>.
- [72] JONES, H. F.; MATEO, J.. Equivalent Hermitian Hamiltonian for the non-Hermitian: math xmlns. **Physical Review D**, [S.L.], v. 73, n. 8, p. 085002-085002, 5 abr. 2006. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.73.085002>.
- [73] ANDRIANOV, A. A.. Dual oscillators and quantum pendulums: spectrum and correlators. **Physical Review D**, [S.L.], v. 76, n. 2, p. 025003-025003, 6 jul. 2007. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.76.025003>.
- [74] ANDRIANOV, A. A.. Dual oscillators with PT-symmetry in path integral approach. **Ann. Phys.**, [S.L.], v. 140, n.1, p. 82-82, dez. 1982. American Physical Society (APS).
- [75] ZHU, Zixu; JOSHI, Saumil; GROVER, Sachit; MODDEL, Garret. Graphene geometric diodes for terahertz rectennas. **Journal Of Physics D: Applied Physics**, [S.L.], v. 46, n. 18, p. 185101-185101, 15 abr. 2013. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/46/18/185101>.
- [76] ABRAMOWITZ, M. A.. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. EUA: National Bureau Of Standards Applied Mathematics Series, 1972.
- [77] LI, J.; TAN, L. Z.; ZOU, K.; STABILE, A. A.; SEIWELL, D. J.; WATANABE, K.; TANIGUCHI, T.; LOUIE, Steven G.; ZHU, J.. Effective mass in bilayer graphene at low carrier densities: the role of potential disorder and electron-electron interaction. **Physical Review B**, [S.L.], v. 94, n. 16, p. 161406-161406, 25 out. 2016. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.94.161406>.
- [78] GONZÁLEZ, J.; GUINEA, F.; HERRERO, J.. Propagating, evanescent, and localized states in carbon nanotube–graphene junctions. **Physical Review B**, [S.L.], v. 79, n. 16, p. 165434-165434, 27 abr. 2009. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.79.165434>.

- [79] NOVAES, M.. **Mecânica quântica básica**. São Paulo: Editora Livraria da Física (Série MNPEF), 2016.
- [80] RAMOS, A. C. A.; FARIAS, G. A.; ALMEIDA, N. S.. Thermodynamics of a quasi-two-dimensional electron gas: effects of magnetic fields, temperature and finite width. **Physica e: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, [S.L.], v. 43, n. 10, p. 1878-1881, ago. 2011. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physe.2011.06.030>.
- [81] VISSER, M.. **Lorentzian wormholes: from einstein to hawking**. New York: AIP, 1995.
- [82] ASHCROFT, N. W.. **Solid state physics**. New York: Holt, Rinehart, And Wilson, 1976.
- [83] SEEGER, K.. **Semiconductor physics**. New York: Springer, 1985.
- [84] HARRISON, W. A.. **Solid state theory**. USA: Dover, 1979.
- [85] KITTEL, C.. **Introduction to solid state physics**. New York: Wiley, 1986.
- [86] ZAWADZKI, W.; KLAHN, S.; MERKT, U.. Semirelativistic Behavior of Electrons in InSb in Crossed Magnetic and Electric Fields. **Physical Review Letters**, [S.L.], v. 55, n. 9, p. 983-986, 26 ago. 1985. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.55.983>.
- [87] ALTSCHUL, V. Ariel; FRAENKEL, A.; FINKMAN, E.. Effects of band nonparabolicity on two-dimensional electron gas. **Journal Of Applied Physics**, [S.L.], v. 71, n. 9, p. 4382-4384, mai. 1992. AIP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1063/1.350775>.
- [88] ARIEL, Viktor. **effective mass and energy-mass relationship**. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1205.3995>.
- [89] GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. New York: Addison-Wesley, 1922.
- [90] ARFKEN, G. B.. **Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide**. USA: Academic Press, 2013.
- [91] DEWITT, Bryce S.. Dynamical Theory in Curved Spaces. I. A Review of the Classical and Quantum Action Principles. **Reviews Of Modern Physics**, [S.L.], v. 29, n. 3, p. 377-397, 1 jul. 1957. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.29.377>.
- [92] STRUIK, D. J.. **Lectures on classical differential geometry**. New York: Dover, 1894.
- [93] CHENG, K. S.. Quantization of a General Dynamical System by Feynman's Path Integration Formulation. **Journal Of Mathematical Physics**, [S.L.], v. 13, n. 11, p. 1723-1726, nov. 1972. AIP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1665897>.

- [94] GRAY, A.. **Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica**. London: Chapman & Hall/CRC, 1998.
- [95] GREINER, W.. **Relativistic quantum mechanics**. USA: Springer, 1987.
- [96] GRIFFITHS, D. J.. **Quantum mechanics**. London: Pearson Education, Inc., 2005.
- [97] NAKAHARA, M.. **Geometry, topology and physics**. London: IOP Publishing Ltd, 1990.
- [98] SREDNICKI, M.. **Quantum field theory**. UK: Cambridge University Press, 2007.
- [99] SOUZA, T. F. de; RAMOS, A. C. A.; COSTA FILHO, R. N.; FURTADO, J.. Generalized Ellis-Bronnikov bilayer graphene wormholelike surface. **Physical Review B**, [S.L.], v. 106, n. 16, p. 165426-165426, 28 out. 2022. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.106.165426>.
- [100] BOYCE, W. E.. **Elementary differential equations and boundary value problems** New York: Wiley, 1986.

APÊNDICE A - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER ELIMINANDO O TERMO NÃO-HERMITIANO

Considere uma EDO linear de 2ª ordem $f(y'', y', y, x) = 0$, cujos coeficientes não são constantes e iguais a $P(x)$ e $Q(x)$ [90, 100], dada por

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (\text{A.1})$$

Pode-se transformar (A.1) numa outra EDO linear e homogênea de mesma ordem sem o termo de derivada primeira. Tal equação será da forma

$$z'' + q(x)z = 0, \quad (\text{A.2})$$

uma vez que façamos a seguinte mudança de variável $y \rightarrow z$, tal que

$$\ln y = \ln z - \frac{1}{2} \int^x P(x') dx'. \quad (\text{A.3})$$

Demonstração. Derivando (A.3) com respeito a x , vem

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} - \frac{P}{2},$$

e derivando isso novamente a x , temos

$$\begin{aligned} \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} &= \frac{z''}{z} - \frac{z'^2}{z^2} - \frac{P'}{2} \\ \frac{y''}{y} - \left(\frac{z'}{z} - \frac{P}{2} \right)^2 &= \frac{z''}{z} - \frac{z'^2}{z^2} - \frac{P'}{2} \\ \frac{y''}{y} - \frac{z'^2}{z^2} + P \frac{z'}{z} - \frac{P^2}{4} &= \frac{z''}{z} - \frac{z'^2}{z^2} - \frac{P'}{2} \\ \frac{y''}{y} &= \frac{z''}{z} - P \frac{z'}{z} - \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4}, \end{aligned}$$

e usando (A.1) e (A.2)

$$\begin{aligned} -Q - P \left(\frac{z'}{z} - \frac{P}{2} \right) &= -q - P \frac{z'}{z} - \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4} \\ -Q + \frac{P^2}{2} &= -q - \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4} \\ q(x) &= Q(x) - \frac{1}{2} P'(x) - \frac{1}{4} P^2(x). \end{aligned}$$

Ou seja, chegamos a esta equação reduzida de (A.1)

$$z'' + q(x)z = 0,$$

com $q(x) = Q(x) - \frac{1}{2}P'(x) + \frac{1}{4}P^2(x)$. \square

Se $Q(x) = 0$, basta escrever (A.1) como

$$y'' + P(x)y' = 0, \quad (\text{A.4})$$

isto é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \exp \int^x P(x') dx' \right) &= 0 \\ y' \exp \int^x P(x') dx' &= c_1 \\ y &= c_1 \int^x \left(\exp \int^{x''} P(x') dx' \right)^{-1} dx'' + c_2, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

com $c_1 \neq 0$ e c_2 sendo constantes.

Caso se tenha uma EDO não-homogênea, ou seja, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, em que o termo em “ x ” não exista nela, pode-se definir $y'(x) = v(x)$, então

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= f(y, y') \\ \frac{dv}{dx} &= v \frac{dv}{dy} = f(y, v) \\ \int v dv &= \int f(v, y) dy \\ \frac{v^2}{2} &= \int f(v, y) dy + c_1 \\ v &= \pm \left(c_1 + 2 \int^x f(v(x'), y(x')) dy(x') \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \pm \left(c_1 + 2 \int^x f(v(x'), y(x')) dy(x') \right)^{1/2} \\ y(x) &= c_2 \pm \int^x \left(c_1 + 2 \int^{x''} f(v(x'), y(x')) dy(x') \right)^{1/2} dx''. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Analogamente, se y estiver ausente, a solução geral passa a ser

$$y(x) = c_2 \pm \int^x \left(c_1 + 2 \int^{x''} f(x', v(x')) dy(x') \right)^{1/2} dx''. \quad (\text{A.8})$$

Um exemplo da aplicação de (A.1) seria a equação (4.29). Primeiro, prova-se

(4.31). Para isso, deve-se resolver essa integral

$$\ln\Phi = \ln y - \frac{1}{2} \int^u \frac{\bar{u}^{n-1}}{\bar{u}^n + R^n} d\bar{u}, \quad (\text{A.9})$$

para depois obter tal relação. Troca-se \bar{u} por \bar{t} , tal que, $\bar{t} = \bar{u}^n + R^n$, disso, $d\bar{t} = n\bar{u}^{n-1}d\bar{u}$, e usando isso em (A.9), segue

$$\begin{aligned} \ln\Phi &= \ln y - \frac{1}{2n} \int^{(t-R^n)^{1/n}} \frac{d\bar{t}}{\bar{t}} \\ &= \ln y - \frac{1}{2n} \ln(u^n + R^n) \\ &= \ln \left(y(u^n + R^n)^{-1/(2n)} \right) \\ \Phi &= (u^n + R^n)^{-1/(2n)} y. \quad \square \end{aligned}$$

Finalmente, pode-se agora chegar à (4.32), assim

$$\begin{aligned} q(u) &= Q(u) - \frac{1}{2}P'(u) - \frac{1}{4}P^2(u) \\ &= \frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2} - \frac{2m^*}{\hbar^2}V_{\text{dC}} - \frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)u^{n-2}}{u^n + R^n} - \frac{nu^{2n-2}}{(u^n + R^n)^2} \right) - \frac{1}{4} \frac{u^{2n-2}}{(u^n + R^n)^2} \\ &= \frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2} - \frac{\left(m^2 + (n-1)u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-1} \right)}{(u^n + R^n)^{2/n}} \\ &\quad + \frac{\frac{nu^{2n-2}}{2} - \frac{u^{2n-2}}{4}}{(u^n + R^n)^2} - \frac{2m^*}{\hbar^2}V_{\text{dC}} \\ &= \frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2} - \frac{\left(m^2 + \left(\frac{n-1}{2} \right) u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-1} \right)}{(u^n + R^n)^{2/n}} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{2n-1}{4} \right) u^{2n-2}}{(u^n + R^n)^2} - \frac{2m^*}{\hbar^2}V_{\text{dC}}, \quad y'' + q(u)y = 0. \quad \square \end{aligned}$$

APÊNDICE B – DINÂMICA UNIDIMENSIONAL DE SCHRÖDINGER SEM SPIN DO ELÉTRON: VÍNCULO SENDO UMA CURVA C DE CLASSE INFINITA

Nesse apêndice, como foi dito anteriormente no capítulo 2, discutir-se-á como será o movimento de um elétron sobre uma curva suave quando há um superpotencial V_λ . A parametrização será pelo comprimento de arco q_1 para a curva C , ou seja, $\mathbf{x}(q_1)$ é a imagem de C no espaço anteriormente considerado para q_1 pertencente a um intervalo aberto do conjunto dos números reais. E ainda, tomar-se-á três vetores unitários, o tangente $\mathbf{T}(q_1)$ e os binormais $\mathbf{N}(q_1)$ e $\mathbf{B}(q_1)$ à C . Seguindo o mesmo raciocínio daquele capítulo, introduzir-se-á agora um sistema de coordenadas curvilíneas baseado em C (Figura 8), que é este

$$\mathbf{X}(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{x}(q_1) + q_2 \mathbf{N}_2(q_1) + q_3 \mathbf{N}_3(q_1), \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{N}_2 = \cos \theta(q_1) \mathbf{N}(q_1) - \sin \theta(q_1) \mathbf{B}(q_1), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{N}_3 = \sin \theta(q_1) \mathbf{N}(q_1) + \cos \theta(q_1) \mathbf{B}(q_1), \quad (\text{B.3})$$

com

$$\frac{d\theta}{dq_1} = \tau(q_1), \quad (\text{B.4})$$

onde $\tau(q_1)$ é a torsão de C^1 . De (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4), obtém-se

$$\frac{d\mathbf{X}}{dq_1} = (1 - \kappa(q_1)f(q_1, q_2, q_3)) \mathbf{T}(q_1), \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dq_j} = \mathbf{N}_j(q_1), \quad (\text{B.6})$$

onde

$$f(q_1, q_2, q_3) = \cos \theta(q_1)q_2 + \sin \theta(q_1)q_3, \quad (\text{B.7})$$

e $\kappa(q_1) = |d\mathbf{T}/dq_1|$ é a curvatura de C no ponto do comprimento de arco, ou simplesmente, arco q_1 . Sendo o nosso sistema de coordenadas ortogonal, $\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j}\right) = h_i^2 \delta_{ij}$, pode-se escrever a força clássica \mathbf{F} associada ao potencial $V(q_1, q_2, q_3)$ como

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{1}{h_j^2} \frac{\partial V}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j}. \quad (\text{B.8})$$

Procedendo como no caso da restrição de superfície, será selecionado, de (B.8), um potencial de ligação $V_\lambda(q_2, q_3)$ independente de q_1 , a fim de manter sempre a força $-\nabla V_\lambda$ nos planos

¹Para nosso interesse de simplicidade, introduzimos um sistema de coordenadas cartesianas para cada plano normal de C .

normais de C . A equação de Schrödinger é então escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{1-\kappa f} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{1-\kappa f} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_j^2} + \frac{\partial}{\partial q_j} \ln(1-\kappa f) \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} \right) \right) + V_\lambda(q_2, q_3) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (\text{B.9})$$

O elemento de volume é dado por $dV = (1-\kappa f)dq_1dq_2dq_3$, que sugere a introdução da nova função de onda $\chi(q_1, q_2, q_3) = (1-\kappa f)^{1/2}\psi(q_1, q_2, q_3)$. A equação (B.9) passa ser

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(1-\kappa f)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{1-\kappa f} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\chi}{(1-\kappa f)^{1/2}} \right) - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\kappa^2}{(1-\kappa f)^2} \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} \right) + V_\lambda(q_2, q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (\text{B.10})$$

Assumindo para V_λ as propriedades esperadas de um potencial vinculante, ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_\lambda(q_2, q_3) = \begin{cases} 0, & \text{se } q_2^2 + q_3^2 = 0 \\ \infty, & \text{se } q_2^2 + q_3^2 \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{B.11})$$

pode-se diretamente tomar $f \rightarrow 0$ em (B.10), nos dando

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_1^2} - \frac{\hbar^2}{8m} \kappa^2(q_1) \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_3^2} \right) + V_\lambda(q_2, q_3) \chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (\text{B.12})$$

Disso, (B.12) pode agora ser separada tomando $\chi = \chi_t(q_1, t) \chi_n(q_2, q_3, t)$. O resultado será

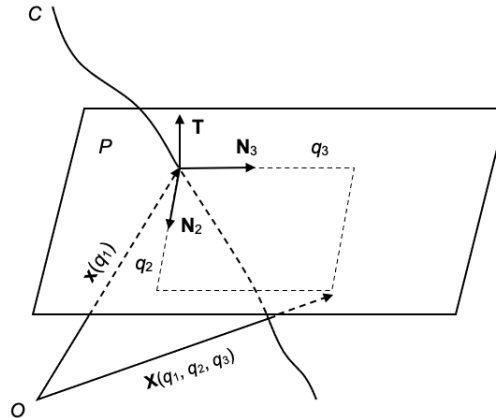
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial q_3^2} \right) + V_\lambda(q_2, q_3) \chi_n = i\hbar \frac{\partial \chi_n}{\partial t}, \quad (\text{B.13})$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial q_1^2} - \frac{\hbar^2}{8m} \kappa^2(q_1) \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t}. \quad (\text{B.14})$$

A equação (B.14) tem a mesma propriedade da (B.6): embora todas as curvas sejam isométricas, cada uma tem, dependendo da curvatura, sua própria mecânica quântica distinta. Isso deve também ser notado que (B.14) não depende do comportamento detalhado do potencial $V_\lambda(q_2, q_3)$ (suas equipotenciais em torno de C podem ser circulares, elípticas, retangulares etc), desde que uma vez definido em um plano normal seja conhecido em todos os pontos do espaço dando o mesmo potencial a todas as curvas “paralelas” com os mesmos valores de q_2 e q_3 . Em certo sentido isso pode ser dito que em $V_\lambda(q_2, q_3)$ tem-se introduzido uma generalização do potencial ordinário bidimensional (obtido quando C é uma linha reta).

Uma última observação ainda a ser feita sobre a possibilidade de restringir uma partícula a uma curva divide-se em duas etapas sucessivas: primeiro, usando uma superfície vinculante como empregada na seção anterior e, depois disso, assumindo um potencial superficial extra para diminuir o movimento a uma curva. Isso não dificulta ver que o resultado obtido

Figura 8 – Sistema de coordenadas curvilíneas baseado na curva C de equação paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1)$. As coordenadas cartesianas q_2 e q_3 foram usadas para o plano normal P .



Fonte: Feita pelo autor.

dessa maneira, em geral, dependerá de uma superfície intermediária escolhida no processo. A razão é que as normais para essa superfície intermediária não são necessariamente contidas num plano normal da curva. Isso significa que o potencial responsável pela restrição de superfície pode dar origem a forças com componentes tangenciais não-nulas em uma vizinhança da curva, contrária à definição de $V_\lambda(q_2, q_3)$. Isso pode também mostrar que o mesmo resultado (B.11) pode ser obtido se a superfície escolhida pertencer à seguinte família

$$\mathbf{X}(q_1, S) = \mathbf{x}(q_1) + q_2(s)\mathbf{N}_2(q_1) + q_3(s)\mathbf{N}_3(q_1), \quad (\text{B.15})$$

onde $q_1(s)$, $q_2(s)$ dão a interseção da superfície com planos normais de C . Note que, pelo fato de que q_2 e q_3 não dependerem de q_1 , a superfície é completamente determinada do conhecimento de suas interseções com um dos planos normais.

APÊNDICE C - INVARIÂNCIA DE PARIDADE NA EQUAÇÃO DINÂMICA DO ELÉTRON NO CASO GENERALIZADO

C-1 Simetria \mathcal{P} (inversão espacial):

C-11 Potencial de da Costa:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}V_{\text{dC}}\mathcal{P} &= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left((n-1)R^n \mathcal{P}u^{n-2} \mathcal{P} \mathcal{P}(u^n + R^n)^{-2} \mathcal{P} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \mathcal{P}(u^n + R^n)^{-2/n} \mathcal{P} \mathcal{P} \left(1 - u^{2n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} \right)^{-1} \mathcal{P} \right. \\
 &\quad \left. \times \mathcal{P} \left(1 - u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} (u^n + (n-1)R^n) \right)^2 \mathcal{P} \right) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left((n-1)R^n (-1)^{n-2} u^{n-2} (-1)^{-2n} (u^n + R^n)^{-2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} (-1)^{-2} (u^n + R^n)^{-2/n} (-1)^0 \left(1 - u^{2n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} \right)^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \times (-1)^0 \left(1 - u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} (u^n + (n-1)R^n) \right)^2 \right) \\
 &= V_{\text{dC}} \text{ (não viola)}.
 \end{aligned}$$

C-12 Equação dinâmica:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}\Phi''\mathcal{P} + \mathcal{P}\frac{u^{n-1}}{u^n + R^n}\mathcal{P}\mathcal{P}\Phi'\mathcal{P} - \mathcal{P}\left(\frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} + \frac{2m^*}{\hbar^2}V_{\text{dC}}\right)\mathcal{P}\mathcal{P}\Phi\mathcal{P} &= -\frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2}\mathcal{P}\Phi\mathcal{P} \\
 \Phi'' + (-1)^{-1}\frac{u^{n-1}}{u^n + R^n}(-1)\Phi' - \left((-1)^{-2}\frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} + \frac{2m^*}{\hbar^2}V_{\text{dC}}\right)\Phi &= -\frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2}\Phi \\
 \Phi'' + \frac{u^{n-1}}{u^n + R^n}\Phi' - \left(\frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} + \frac{2m^*}{\hbar^2}V_{\text{dC}}\right)\Phi &= -\frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2}\Phi \text{ (não viola)}.
 \end{aligned}$$

O termo de derivada primeira em Φ está associado ao momento linear, e ainda temos $\mathcal{P}i\mathcal{P} = i$, por isso o surgimento daquele -1 .

C-2 Simetria \mathcal{T} (reversão temporal):

C-21 Potencial de da Costa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}V_{\text{dc}}\mathcal{T} &= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left((n-1)R^n \mathcal{T}u^{n-2} \mathcal{T} \mathcal{T}(u^n + R^n)^{-2} \mathcal{T} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \mathcal{T}(u^n + R^n)^{-2/n} \mathcal{T} \mathcal{T} \left(1 - u^{2n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} \right)^{-1} \mathcal{T} \right. \\
&\quad \left. \times \mathcal{T} \left(1 - u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} (u^n + (n-1)R^n) \right)^2 \mathcal{T} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left((n-1)R^n u^{n-2} (u^n + R^n)^{-2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (u^n + R^n)^{-2/n} \left(1 - u^{2n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 - u^{n-2}(u^n + R^n)^{2/n-2} (u^n + (n-1)R^n) \right)^2 \right) \\
&= V_{\text{dc}} \text{ (n\~{a}o viola),}
\end{aligned}$$

j\~{a} que V_{dc} n\~{a}o depende de nenhuma componente do momento linear.

C-22 Equa\~{c}o\~{a}o din\~{a}mica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\Phi''\mathcal{T} + \mathcal{T} \frac{u^{n-1}}{u^n + R^n} \mathcal{T} \mathcal{T}\Phi'\mathcal{T} - \mathcal{T} \left(\frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} + \frac{2m^*}{\hbar^2} V_{\text{dc}} \right) \mathcal{T} \mathcal{T}\Phi\mathcal{T} &= -\frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2} \mathcal{T}\Phi\mathcal{T} \\
\Phi'' + \frac{u^{n-1}}{u^n + R^n} \Phi' - \left(\frac{m^2}{(u^n + R^n)^{2/n}} + \frac{2m^*}{\hbar^2} V_{\text{dc}} \right) \Phi &= -\frac{2m^*\varepsilon}{\hbar^2} \Phi \text{ (n\~{a}o viola),}
\end{aligned}$$

j\~{a} que $\mathcal{T}\Phi'\mathcal{T} = \Phi'$, pois o momento linear muda de sinal diante dessa transforma\~{c}o\~{a}o com $\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i$. Assim, prova-se que a equa\~{c}o\~{a}o din\~{a}mica geom\~{e}trica para o el\~{e}tron \~{e} invariante diante das transforma\~{c}o\~{e}s \mathcal{T} e \mathcal{P} . A saber, usa-se as seguintes identidades para k par:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}u^l\mathcal{P} &= (-1)^l u = \begin{cases} 1, & \text{se } l = k \\ -1, & \text{se } l = k \pm 1 \end{cases}, \\
\mathcal{P}P_i^l\mathcal{P} &= (-1)^l P_i = \begin{cases} 1, & \text{se } l = k \\ -1, & \text{se } l = k \pm 1 \end{cases}, \\
\mathcal{T}P_i^l\mathcal{T} &= (-1)^l P_i = \begin{cases} 1, & \text{se } l = k \\ -1, & \text{se } l = k \pm 1 \end{cases} \text{ e}
\end{aligned}$$

$\mathcal{T}u^l\mathcal{T} = u$, para todo l .

Se for inserido valores \~{i}mpares para a dimensionalidade do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado, o potencial de da Costa viola a simetria de invers\~{a}o espacial, ent\~{a}o, a equa\~{c}o\~{a}o de Schr\~{o}dinger tamb\~{e}m quebrar\~{a} essa transforma\~{c}o\~{a}o, nos dando um perfil de potencial efetivo assim\~{e}trico com comportamento assint\~{o}tico inesperado nas bordas da ponte.

A parametriza\~{c}o\~{a}o da variedade que cobre esse buraco, nessas condi\~{c}o\~{e}s de pari-

dade, dependerá da coordenada paralelo, e o potencial centrífugo pode ser escrito explicitamente em termos de ϕ , colocando um problema muito complicado para a dinâmica do elétron.

Trabalhos futuros podem analisar isso com mais profundidade. É dado apenas uma perspectiva de como será isso. Esse comportamento assimétrico no potencial pode, com especulações ainda não aprovadas, ser justificado com a presença de um falso campo elétrico externo já que esse desloca o gráfico em torno de $u = 0$, dando-lhe uma espécie de torção.

APÊNDICE D – CURVATURAS MÉDIA E GAUSSIANA

D-1 Introdução: Uma superfície S , no espaço euclidiano real, será regular quando for possível definir alguma base $\{\mathbf{x}_i\}$ de vetores tangentes localmente nela, e assim, qualquer ponto $P \in S$ possa ser a interseção de um espaço tangente $T_P S$ à S . Vulgarmente, falando: $T_P S$ é um plano tangente à S em P . Trataremos S como sendo globalmente regular. Há três condições que devem ser satisfeitas para que S seja seguramente regular. São estas [67]:

- (i) Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização de S , com u, v sendo reais. Como esse vetor é de $\mathbb{R}^3 = R \times R \times R$, então, teremos as seguintes componentes cartesianas

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v). \quad (\text{D.1})$$

A diferenciabilidade de $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ deve existir, ou seja, x, y e z devem ser de classe infinita. Todas as ordens das derivadas parciais delas devem existir e ser contínuas para quaisquer u e v .

- (ii) O mapeamento $\mathbf{x}(u, v)$ deve ser um homomorfismo.
 (iii) O mapeamento $\delta\mathbf{x}(u, v)$ deve ser injetivo.

As coordenadas curvilíneas u e v , a saber, são limitadas, ou seja, (u, v) está sempre dentro de um aberto U , que é uma região retangular, $u_1 \leq u \leq u_2$ e $v_1 \leq v \leq v_2$, contida no plano cartesiano real \mathbb{R}^2 . Sendo a parametrização contínua, a sua inversa também o será.

Diferenciando (D.1) com respeito a u e v , vem

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv = \delta\mathbf{x} \cdot (du, dv), \quad (\text{D.2})$$

definindo $\delta\mathbf{x}$ como

$$\delta\mathbf{x} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v), \quad (\text{D.3})$$

tomado na base canônica de \mathbb{R}^2 . Os vetores \mathbf{x}_i compõem uma base para $T_P S$ em algum ponto $P \in S$, tais que, sejam linearmente independentes, garantindo que um não seja paralelo ao outro, caso contrário, seria impossível definir uma base para tal espaço tangente. De maneira compacta, a condição de regularidade para S pede que um dos jacobianos de $\delta\mathbf{x}$ seja não-nulo¹. Como

¹Considere a seguinte matriz de entradas reais

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix},$$

exemplo, vamos tomar $x = (R^2 + u^2)^{1/2} \cos \phi$, $y = (R^2 + u^2)^{1/2} \sin \phi$ e $z = h(u)$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, \phi)} &= \begin{vmatrix} u/(R^2 + u^2)^{1/2} \cos \phi & -(R^2 + u^2)^{1/2} \sin \phi \\ u/(R^2 + u^2)^{1/2} \sin \phi & (R^2 + u^2)^{1/2} \cos \phi \end{vmatrix} \\ &= u \cos^2 \phi + u \sin^2 \phi = u \neq 0, \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, \phi)} &= \begin{vmatrix} u/(R^2 + u^2)^{1/2} \cos \phi & -(R^2 + u^2)^{1/2} \sin \phi \\ h'(u) & 0 \end{vmatrix} \\ &= h'(u)(R^2 + u^2)^{1/2} \sin \phi \neq 0 \implies h'(u) \neq 0, \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, \phi)} &= \begin{vmatrix} u/(R^2 + u^2)^{1/2} \sin \phi & (R^2 + u^2)^{1/2} \cos \phi \\ h'(u) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -h'(u)(R^2 + u^2)^{1/2} \cos \phi \neq 0 \implies h'(u) \neq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $h'(u)$ não pode ser nulo, verificando o que já esperávamos.

D-2 Formas fundamentais:

D-21 Primeira forma fundamental: Tomando o módulo de (D.2), obtemos o comprimento diferencial de arco ds , ou seja

$$\begin{aligned} ds &= |d\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv| \\ ds^2 &= (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) du^2 + (2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) dudv + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) dv^2 \\ I = ds^2 &= g_{uu} du^2 + 2g_{uv} dudv + g_{vv} dv^2. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Em (D.4), I é a *primeira forma fundamental* de S , sendo g_{ij} os seus coeficientes. Ainda podemos reescrever (D.4) como

$$\begin{aligned} I &= \frac{g_{uu}^2}{g_{uu}} du^2 + \frac{g_{uv}^2}{g_{uu}} dv^2 + \frac{2g_{uu}g_{uv}}{g_{uu}} dudv + \frac{g_{uu}g_{vv}}{g_{uu}} dv^2 - \frac{g_{uv}^2}{g_{uu}} dv^2 \\ &= \frac{1}{g_{uu}} (g_{uu} du + g_{uv} dv)^2 + \left(\frac{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}{g_{uu}} \right) dv^2 > 0, \end{aligned}$$

pois o coeficiente de dv^2 acima é positivo pois

$$(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2 = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 = g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2 > 0.$$

D-22 Segunda forma fundamental: Vamos considerar uma curva C nessa superfície S , definida pelos vetores tangente e normal unitários dados por $\mathbf{T} = d\mathbf{x}/ds$ e \mathbf{M} . É evidente que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$,

cujas matrizes menores são todas quadradas de ordem 2. Seus determinantes são os jacobianos. Quando uma coluna ou linha de M é nula, temos pontos singulares. Por exemplo, para uma esfera, um de seus polos é um ponto singular ($\theta = \pm\pi/2$), e para um cone, o seu vértice será um ponto singular. E assim por diante.

onde $\mathbf{N} \neq \mathbf{M}$ é um vetor unitário normal à S . Diferenciando isso, vem

$$\begin{aligned} d(\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}) &= d\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T} \cdot d\mathbf{N} = 0 \\ \kappa_N &= -\frac{1}{ds^2}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N}) \\ &= -\frac{1}{ds^2}(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv) \\ &= -\frac{1}{ds^2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u du^2 + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v dv^2 + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v dudv + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u dudv), \end{aligned}$$

ou seja, a *segunda forma fundamental* de S será dada por

$$II = h_{uu} du^2 + 2h_{uv} dudv + h_{vv} dv^2, \quad (\text{D.5})$$

onde

$$h_{uu} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \quad (\text{D.6})$$

$$h_{uv} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u), \quad (\text{D.7})$$

$$h_{vv} = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v. \quad (\text{D.8})$$

A grandeza κ_N é a *componente da curvatura* $\mathbf{k} = k\mathbf{M}$ na direção \mathbf{N} . Sendo $\mathbf{k} = \mathbf{k}_N + \mathbf{k}_0$, onde \mathbf{k}_0 é a curvatura geodésica, temos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_N = \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{k}_N + \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_N \implies k\kappa_N \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = \kappa_N^2 \implies \kappa_N = 0 \text{ ou } k \cos \theta_{MN} = \kappa_N,$$

onde tomando o caso $\kappa_N \neq 0$ (direções não-assintóticas), vem, $k = \kappa_N / \cos \theta_{MN}$. Perceba que $k = \kappa_N$ se $\cos \theta_{MN} = 1$, ou seja, $\theta_{MN} = 2n\pi$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Como esse ângulo não pode exceder um quarto de volta, \mathbf{M} e \mathbf{N} devem ser paralelos e a curvatura geodésica é desprezível diante da normal.

Em (D.7), como \mathbf{x} e \mathbf{N} são contínuas,

$$h_{uv} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u. \quad (\text{D.9})$$

Perceba ainda que \mathbf{N} é perpendicular tanto a \mathbf{x}_u como a \mathbf{x}_v , disso

$$(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u = 0 \implies h_{uu} = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N}, \quad (\text{D.10})$$

$$(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = 0 \implies h_{uv} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}, \quad (\text{D.11})$$

$$(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N})_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v = 0 \implies h_{vv} = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N}. \quad (\text{D.12})$$

D-3 Curvaturas principais κ_1 (mínima) e κ_2 (máxima): Por simplicidade, defina $\lambda = dv/du$, disso,

$$\kappa_N(\lambda) = \frac{h_{uu} + 2h_{uv}\lambda + h_{vv}\lambda^2}{g_{uu} + 2g_{uv}\lambda + g_{vv}\lambda^2}. \quad (\text{D.13})$$

Agora, vamos achar o regime de extremos para (D.13), então

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_N}{d\lambda} &= \frac{(2h_{uv} + 2h_{vv}\lambda)(g_{uu} + 2g_{uv}\lambda + g_{vv}\lambda^2) - (h_{uu} + 2h_{uv}\lambda + h_{vv}\lambda^2)(2g_{uv} + 2g_{vv}\lambda)}{(g_{uu} + 2g_{uv}\lambda + g_{vv}\lambda^2)^2} = 0 \\ &= (h_{uv} + h_{vv}\lambda)(g_{uu} + g_{uv}\lambda + g_{vv}\lambda^2) - (h_{uu} + h_{uv}\lambda + h_{vv}\lambda^2)(g_{uv} + g_{vv}\lambda) = 0, \end{aligned}$$

ou seja

$$\kappa(\lambda) = \frac{h_{uv} + h_{vv}\lambda}{g_{uv} + g_{vv}\lambda}, \quad (\text{D.14})$$

cujo valor de λ será tal que

$$\begin{aligned} (h_{uv} + h_{vv}\lambda)(g_{uu} + g_{uv}\lambda + g_{vv}\lambda^2) &= (h_{uu} + h_{uv}\lambda + h_{vv}\lambda^2)(g_{uv} + g_{vv}\lambda) \\ (g_{uu} + g_{uv}\lambda)(h_{uv} + h_{vv}\lambda) &= (h_{uu} + h_{uv}\lambda)(g_{uv} + g_{vv}\lambda), \end{aligned}$$

ou seja, (D.14) passa a ser

$$\begin{cases} (h_{uu} - \kappa g_{uu})du + (h_{uv} - \kappa g_{uv})dv = 0 \\ (h_{uv} - \kappa g_{uv})du + (h_{vv} - \kappa g_{vv})dv = 0 \end{cases}, \quad (\text{D.15})$$

que é homogêneo, cuja única solução não-trivial ocorrerá se

$$\begin{vmatrix} h_{uu} - \kappa g_{uu} & h_{uv} - \kappa g_{uv} \\ h_{uv} - \kappa g_{uv} & h_{vv} - \kappa g_{vv} \end{vmatrix} = 0,$$

disso,

$$(g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2)\kappa^2 - (g_{uu}h_{vv} + g_{vv}h_{uu} - 2g_{uv}h_{uv})\kappa + h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2 = 0, \quad (\text{D.16})$$

cujo discriminante será

$$\Delta = 4 \left(\frac{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}{g_{uu}^2} \right) (g_{uu}h_{uv} - g_{uv}h_{uu})^2 + \left(g_{uu}h_{vv} - g_{vv}h_{uu} - \frac{2g_{uv}}{g_{uu}}(g_{uu}h_{uv} - g_{uv}h_{uu}) \right)^2, \quad (\text{D.17})$$

que deverá ser maior que zero, pois devemos ter duas curvaturas. Disso

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{uu}h_{vv} + g_{vv}h_{uu} - 2g_{uv}h_{uv} - \sqrt{\Delta}}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2} \right), \quad (\text{D.18})$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{uu}h_{vv} + g_{vv}h_{uu} - 2g_{uv}h_{uv} + \sqrt{\Delta}}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2} \right). \quad (\text{D.19})$$

Dependendo do sinal de (D.18) e (D.19), S pode ter estas naturezas:

- (i) Elíptica, se $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ ou $\kappa_1, \kappa_2 < 0$;
- (ii) Hiperbólica, se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 < 0$ ou $\kappa_1 < 0$ e $\kappa_2 > 0$ e
- (iii) Parabólica, se $\kappa_1, \kappa_2 = 0$.

Se S for mínima, $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, ou seja, as curvaturas devem ter sinais opostos, ou seja, é hiperbólica. Nem toda superfície desse tipo tem $\kappa_1 = -\kappa_2$.

D-4 Curvaturas média H e gaussiana K : A curvatura média H é dada pela *média aritmética simples* entre as curvaturas principais mínima e máxima, ou seja

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

e a curvatura gaussiana K será a *média geométrica quadrática* entre tais curvaturas, dada por

$$K = \kappa_1 \kappa_2. \quad (\text{D.20})$$

Desse jeito, sempre teremos esta condição respeitada

$$H - K^2 \geq 0.$$

Podemos ainda reorganizar (D.16) da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2) &= 0 \\ \kappa^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa + \kappa_1 \kappa_2 &= 0 \\ \kappa^2 - 2H \kappa + K &= 0, \end{aligned}$$

disso

$$-2H = - \left(\frac{g_{uu}h_{vv} + g_{vv}h_{uu} - 2g_{uv}h_{uv}}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2} \right) \implies H = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{uu}h_{vv} + g_{vv}h_{uu} - 2g_{uv}h_{uv}}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2} \right), \quad (\text{D.21})$$

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}. \quad (\text{D.22})$$

Uma discussão trivial de (D.21) e (D.22) pode ser feita para S com métrica sendo δ_{ij} , ou seja, $ds^2 = du^2 + dv^2$. Nesse caso, podemos tomar os vetores canônicos como sendo os elementos da base do espaço tangente, disso, $h_{ij} = 0$, ou seja, temos apenas a primeira forma, com $g_{uu} = 1$ e $g_{vv} = 1$, portanto, $H = 0$ e $K = 0$.

D-5 Equações de Gauss-Weingarten: Diante das formas quadráticas diferenciais para uma superfície regular S , é razoável pensar em relações entre os coeficientes g_{ij} (métrica) e h_{ij} ($i, j = 1, 2$ são índices induzidos). Como vimos nas seções anteriores, g_{ij} dependem de \mathbf{x}_i e \mathbf{N} , e h_{ij} , de \mathbf{x}_{ij} . Ou seja

$$\mathbf{x}_{uu} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{N}, \quad (\text{D.23})$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \beta_3 \mathbf{N}, \quad (\text{D.24})$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \gamma_1 \mathbf{x}_1 + \gamma_2 \mathbf{x}_2 + \gamma_3 \mathbf{N}, \quad (\text{D.25})$$

com $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{N}\}$ sendo uma base LI, isto é, um triedro móvel [92]. Os coeficientes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ são

determináveis e dados por

$$\alpha_3 = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = h_{uu}, \quad \beta_3 = h_{uv}, \quad \gamma_3 = h_{vv}, \quad (\text{D.26})$$

e usando os símbolos de Christoffel do primeiro tipo $[ij, k] = \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_k$, vem

$$\alpha_1 = \frac{g_{vv}[uu, u] - g_{uv}[uu, v]}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}, \quad \alpha_2 = \frac{g_{uu}[uu, v] - g_{uv}[uu, u]}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}, \quad (\text{D.27})$$

$$\beta_1 = \frac{g_{vv}[uv, u] - g_{uv}[uv, v]}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}, \quad \beta_2 = \frac{g_{uu}[uv, v] - g_{uv}[uv, u]}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}, \quad (\text{D.28})$$

e ainda, ao perceber que $(g_{uu})_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} = 2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = 2[uu, u]$, $(g_{uu})_v = 2[uv, u]$ e $(g_{uv})_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vu} = [uu, v] + [uv, u]$, podemos escrever

$$[uu, u] = \frac{1}{2}(g_{uu})_u, \quad [uu, v] = (g_{uv})_u - \frac{1}{2}(g_{uu})_v. \quad (\text{D.29})$$

Os símbolos de Christoffel de segundo tipo e os coeficientes α^i , β^i e γ^i são relacionados como

$$\alpha^i = \Gamma_{11}^i, \quad \beta^i = \Gamma_{12}^i, \quad \gamma^i = \Gamma_{22}^i. \quad (\text{D.30})$$

Usando (D.29) e (D.30) em (D.28), temos as componentes de Γ_{ij}^k dadas por

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il}[jk, l] = \frac{1}{2}g^{il}((g_{jl})_k + (g_{kl})_j - (g_{jk})_l). \quad (\text{D.31})$$

Note que não existe distinção entre covariância e contravariância entre esses índices espaciais induzidos, ou seja, $u^i = u_i$, $\alpha^i = \alpha_i$ etc. Sendo $g_{ij}g^{kj} = \delta_i^k$ (delta de Kronecker), segue ainda

$$[jk, l] = g_{li}\Gamma_{jk}^i. \quad (\text{D.32})$$

Ainda temos as derivadas de primeira ordem do vetor normal \mathbf{N} restantes para que sejam escritas em termos dos vetores da base do espaço tangente. Essas combinações são denominadas de *equações de Gauss-Weingarten*. Analogamente, ao que fizemos antes

$$\mathbf{N}_u = p_1\mathbf{x}_u + p_2\mathbf{x}_v, \quad (\text{D.33})$$

$$\mathbf{N}_v = q_1\mathbf{x}_u + q_2\mathbf{x}_v, \quad (\text{D.34})$$

disso, em p_i e q_i , vem

$$p_1g_{uu} + p_2g_{uv} = -h_{uu}, \quad (\text{D.35})$$

$$p_1g_{uv} + p_2g_{vv} = -h_{uv}, \quad (\text{D.36})$$

$$q_1g_{uu} + q_2g_{uv} = -h_{uv}, \quad (\text{D.37})$$

$$q_1g_{uv} + q_2g_{vv} = -h_{vv}, \quad (\text{D.38})$$

assim

$$\mathbf{N}_i = -g^{kl} h_{il} \mathbf{x}_k. \quad (\text{D.39})$$

**APÊNDICE E – OBTENÇÃO POR CONEXÃO NÃO-COORDENADA DAS
CURVATURAS GAUSSIANA E MÉDIA PARA O BURACO DE
MINHOCA GENERALIZADO DE ELLIS-BRONNIKOV**

A parametrização regular do buraco de minhoca generalizado de Ellis-Bronnikov será dada, num sistema de coordenadas u (meridiano) e ϕ (paralelo), por

$$\vec{r} = (u^n + R^n)^{1/n} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + h(u) \hat{k}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (\text{E.1})$$

onde R é o raio da ponte e h é uma função bem comportada e desconhecida em u na reta real, que tem paridade ímpar garantindo a simetria axial desse buraco de minhoca, sendo z o cartesiano coordenada axial. A métrica associada $(2 + 1)$ com base em tetradas será dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt \otimes dt - du \otimes du - (R^n + u^n)^{2/n} d\phi \otimes d\phi \\ &= \omega^0 \otimes \omega^0 - \omega^1 \otimes \omega^1 - \omega^2 \otimes \omega^2, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

com $d\vec{r} = \omega^\mu \otimes \hat{e}_\mu$. Os vierbeins não-nulos serão dados por

$$e_t^0 = 1, \quad e_u^1 = 1, \quad e_\phi^2 = (R^n + u^n)^{1/n}, \quad (\text{E.3})$$

cuja inversa é dada por

$$e_0^t = 1, \quad e_1^u = 1, \quad e_2^\phi = (R^n + u^n)^{-1/n}, \quad (\text{E.4})$$

com símbolos de Christoffel não-nulos,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} (\partial_\mu g_{\theta\nu} + \partial_\nu g_{\theta\mu} - \partial_\theta g_{\mu\nu}),$$

dados por

$$\Gamma_{\phi\phi}^u = -\frac{u^{n-1}}{(R^n + u^n)^{1-2/n}}, \quad (\text{E.5})$$

$$\Gamma_{u\phi}^\phi = \frac{u^{n-1}}{R^n + u^n}, \quad (\text{E.6})$$

e conexões de Christoffel não-coordenadas

$$\omega_{\mu\beta}^\alpha = e_\nu^\alpha e_\beta^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_\beta^\lambda \partial_\mu e_\lambda^\alpha,$$

usando (E.3), (E.4), (E.5) e (E.6), serão dados por

$$\begin{aligned}\omega_{\mu 0}^0 &= e_\nu^0 e_0^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_0^\lambda \partial_\mu e_\lambda^0 \\ &= e_t^0 e_0^t \Gamma_{\mu t}^t - e_0^t \partial_\mu e_t^0 = 0 \quad \forall \mu,\end{aligned}\tag{E.7}$$

$$\omega_{\mu 1}^1 = 0 \quad \forall \mu,\tag{E.8}$$

$$\omega_{\mu 2}^2 = e_\phi^2 e_2^\phi \Gamma_{\mu\phi}^\phi - e_2^\phi \partial_\mu e_\phi^2,\tag{E.9}$$

$$\omega_{u 2}^2 = \Gamma_{u\phi}^\phi - e_2^\phi \partial_u e_\phi^2 = \frac{u^{n-1}}{R^n + u^n} - u^{n-1} (R^n + u^n)^{-1} = 0,\tag{E.10}$$

$$\omega_{\mu 3}^3 = 0 \quad \forall \mu,\tag{E.11}$$

$$\omega_{\mu\beta}^0 = 0 \quad \forall \mu, \beta,\tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi\beta}^\alpha &= e_\nu^\alpha e_\beta^\lambda \Gamma_{\phi\lambda}^\nu = e_\nu^\alpha (e_\beta^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\nu + e_\beta^u \Gamma_{\phi u}^\nu) \\ &= e_u^\alpha e_\beta^\phi \Gamma_{\phi\phi}^u + e_\beta^\alpha e_\phi^u \Gamma_{\phi u}^\alpha,\end{aligned}\tag{E.13}$$

$$\omega_{\phi 2}^1 = e_u^1 e_2^\phi \Gamma_{\phi\phi}^u = -\frac{u^{n-1}}{(R^n + u^n)^{1-1/n}},\tag{E.14}$$

$$\omega_{\phi 1}^2 = \frac{u^{n-1}}{(R^n + u^n)^{1-1/n}} = -\omega_{\phi 2}^1.\tag{E.15}$$

Com (E.13), ainda segue

$$\omega_1^2 = \omega_{\phi 1}^2 d\phi = \frac{u^{n-1}}{R^n + u^n} \omega^2.\tag{E.16}$$

A base coordenada será dada por

$$\hat{e}_1 = u^{n-1} (R^n + u^n)^{1/n-1} \hat{\rho} + h'(u) \hat{k},\tag{E.17}$$

$$\hat{e}_2 = \hat{\phi},\tag{E.18}$$

com $(h'(u))^2 = 1 - u^{2n-2} (u^n + R^n)^{2/n-2}$. E $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$ será dada por

$$\hat{e}_3 = u^{n-1} (R^n + u^n)^{1/n-1} \hat{k} - h' \hat{\rho}.\tag{E.19}$$

Então

$$\begin{aligned}d\hat{e}_3 &= \hat{k} \left[(n-1) u^{n-2} (R^n + u^n)^{1/n-1} + \right. \\ &\quad \left. n u^{2n-2} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) (R^n + u^n)^{1/n-2} \right] \omega^1 - h'' \omega^1 \hat{\rho} \\ &\quad - h' (R^n + u^n)^{-1/n} \omega^2 \hat{\phi},\end{aligned}\tag{E.20}$$

e vendo que $d\hat{e}_3 = \omega_3^1 \hat{e}_1 + \omega_3^2 \hat{e}_2$, temos

$$d\hat{e}_3 = u^{n-1} (R^n + u^n)^{1/n-1} \omega_3^1 \hat{\rho} + h'(u) \omega_3^1 \hat{k} + \omega_3^2 \hat{\phi}.\tag{E.21}$$

Comparing (E.18) and (E.19), obtemos

$$\omega_3^2 = -h'(u)(R^n + u^n)^{-1/n} \omega^2, \quad (\text{E.22})$$

$$\omega_3^1 = -\omega^1 h''(u) u^{-n+1} (R^n + u^n)^{-1/n+1} \quad (\text{E.23})$$

$$= \omega^1 (n-1) R^n u^{n-2} (R^n + u^n)^{1/n-2} / h'(u). \quad (\text{E.24})$$

Por (E.21) e (E.22)

$$h''(u) = -\frac{(n-1)R^n u^{2n-3} (R^n + u^n)^{2/n-3}}{h'(u)}. \quad (\text{E.25})$$

E ainda

$$\omega_3^2 = (R^n + u^n)^{-1/n} \left[1 - u^{2n-2} (R^n + u^n)^{2/n-2} \right]^{1/2} \omega^2, \quad (\text{E.26})$$

$$\omega_3^1 = -\frac{(n-1)R^n u^{n-2} (R^n + u^n)^{1/n-2}}{\left[1 - u^{2n-2} (R^n + u^n)^{2/n-2} \right]^{1/2}} \omega^1. \quad (\text{E.27})$$

Pelo outro lado, $d\hat{e}_3 = K_b^a \omega^b \otimes \hat{e}_a$, ou seja

$$K_b^a = \frac{h'}{(R^n + u^n)^{1/n}} \begin{pmatrix} -(n-1)R^n u^{n-2} (R^n + u^n)^{2/n-2} / h'^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.28})$$

portanto

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{Tr}(K_b^a) \\ &= \frac{h'}{2(R^n + u^n)^{1/n}} - \frac{(n-1)R^n u^{n-2} (R^n + u^n)^{1/n-2}}{2h'}, \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

$$\begin{aligned} K &= \det(K_b^a) \\ &= \frac{h'^2}{(R^n + u^n)^{2/n}} \left[-\frac{(n-1)R^n u^{n-2} (R^n + u^n)^{2/n-2}}{h'^2} \right], \end{aligned}$$

ou seja

$$K = -(n-1)R^n u^{n-2} R^{-2}. \quad (\text{E.30})$$