UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ROBSON DA GAMA SILVA

TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES SIMÉTRICOS

FORTALEZA

2022

ROBSON DA GAMA SILVA

TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S583t Silva, Robson da Gama.
Teorema espectral para operadores simétricos / Robson da Gama Silva. – 2022.
63 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Teorema espectral. 2. Operadores simétricos. 3. Sequências (matemática). 4. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. 5. Teorema de Bolzano-Weierstrass.. I. Título.
CDD 510

ROBSON DA GAMA SILVA

TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 19 / 08 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Emanuel Mendonça Viana
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico essa dissertação *in memoriam* à minha tia Izabel que veio a falecer durante o meu primeiro semestre do mestrado, e que sempre me deu muito amor, carinho e atenção.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, por me dá forças em momentos em que estive prestes a desistir, diante das adversidades, no âmbito profissional e ainda mais no meu pessoal que ocorreram em meu caminho até aqui.

Batalhas que por muitas vezes eu tive que travar comigo mesmo. Já que houveram momentos, em que, a minha saúde física, mental e espiritual estiveram bem abaladas. Mas, Deus e Nossa Senhora Aparecida, nunca desistem de seus filhos, e assim não desistiram de mim. Me deram a força necessária para que hoje eu pudesse estar aqui. Contudo, isso foi possível diante das pessoas que foram colocadas em minha vida e que tenho o prazer enorme em aqui destacar.

Ao professor/orientador Dr. Abdênago Alves de Barros, foi de grande ajuda não apenas durante o processo da dissertação, mas, desde o primeiro dia de aula. O senhor, com certeza é um dos maiores responsáveis a me ajudar durante o mestrado. E que por vezes, veio a me aconselhar diante de minha rotina e ainda com grande paciência para me orientar durante a dissertação.

Aos meus pais, José Leonardo e Maria José, que sempre foram e sempre serão para mim os meus maiores exemplos de: compromisso, coragem, força, humildade, honestidade e fé. Eles que também seguraram a minha mão quando estive mal, e que, por muitas vezes sentiram a dor que eu senti e que ficaram muito felizes comigo, diante de cada uma das minhas vitórias e que tenho um enorme prazer em poder comemorar cada uma delas. Vocês dois sempre acreditaram na minha capacidade de superar as adversidades. Logo, acreditem quando eu digo: pai e mãe, vocês fazem parte da minha maior riqueza.

À minha namorada, Antônia Nayanne, que apareceu em um dos momentos mais delicados da minha vida, mas que com uma precisão cirúrgica, me ajudou a levantar com suas palavras de força e de coragem acreditando em meu potencial: pessoal, acadêmico e profissional. E que tenho uma grande admiração: no pessoal, profissional e acadêmico. E que mesmo diante de tantas adversidades em seu caminho, ainda sim, não deixou de encontrar forças para também me dá forças. Saiba que eu tenho um enorme prazer e felicidade por você está ao meu lado em cada momento e que faz parte da minha maior riqueza.

Ao Diogo, meu amigo/irmão/cumpadre, pessoa que tenho um enorme prazer em ter minha vida e que é para mim uma pessoa especial. Agradeço demais por cada palavra e atenção que teve comigo a cada dia, e ainda mais, quando eu tanto precisei.

Aos meus colegas de turma que por vezes trouxeram a alegria e a troca de ideias durante as aulas para o crescimento da turma. Mas, gostaria de agradecer de forma especial, ao Diego, que me trouxe palavras da bíblia para me ajudar quando tanto precisei e que por muitas vezes tirou minhas dúvidas. Assim como também, agradeço pela a ajuda da Mafalda e do Shalon que tanto os incomodei para tirar algumas dúvidas.

Por fim, mas com certeza tão importante quanto todos que aqui já relatei, gostaria de agradecer também pela paciência e pela força que os meus coordenadores: Felemar (colégio 21 educar), Nylo e Hamilton (colégio Jim Wilson), durante a minha jornada no mestrado. Ao meu grande amigo/irmão Abílio Serpa que também tanto me ajudou e me deu forças quando tanto precisei. Assim como também: a minha amiga/irmã Rejane e o meu amigo/irmão Ronaldo. E a todos os meus alunos que me incentivaram, que entenderam o meu cansaço e que por muitas vezes aguentaram o meu estresse.

Portanto, o meu muito obrigado a todos que de forma direta ou indireta me ajudaram a chegar aqui.

Tudo faz parte de um aprendizado, cada detalhe que acontece, cada pequeno momento tem sua razão. Assim como a matemática nunca é incerta, assim é a vida, nunca irá ter um valor diferente quando calculada. O cálculo é simples: como na matemática números negativos somados geram valores negativos e números positivos, valores positivos também a vida segue esse padrão. Coensetise então e lembre-se que o único capaz de mudar o resultado e apagar toda a conta é Deus. Por isso lembre-se, nunca erre e deixe como se aquele erro não iria influenciar no cálculo, mais sempre que errar peça a Deus para apagar e não esqueça que todo papel tem um limite de ser apagado, caso contrário ele chega ao ponto de não ter mais utilidade. (SANTOS, 2015)

RESUMO

No presente trabalho abordamos um dos teoremas mais importantes da álgebra linear, denominado teorema espectral. Tendo-se como objetivo demonstrá-lo para operadores simétricos no $\mathbb{R}^n$. Em termos didáticos iniciamos o trabalho trazendo noções básicas, tais como: vetores linearmente dependentes, produto interno no espaço vetorial em que ressaltamos as propriedades do produto interno, a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* no espaço vetorial, os conjuntos limitados superiormente e inferiormente e o *Axioma da Completude* ou *Postulado de Dedekind*. Posteriormente, tratamos sobre sequências e discutimos sobre limites de sequências e subsequências. Em seguida, comentamos sobre a sequências monótonas que podem ser do tipo: crescente, decrescente, não crescente e não decrescente. Por fim, tratamos sobre os intervalos encaixantes com a ideia de apresentarmos um dos teoremas mais importante para a demonstração do teorema espectral que é o teorema de *Bolzano-Weierstrass* no caso real. Ao longo de todo o trabalho apresentamos exemplos para melhor compreensão dos conceitos abordados.

Palavras-chave: teorema espectral; sequências (matemática); intervalos encaixantes; operadores simétricos; desigualdade de Cauchy-Schwarz; supremo e ínfimo; teorema de Bolzano-Weierstrass.

ABSTRACT

In the present work we approach one of the most important theorems of linear algebra, called *spectral theorem*. The goal in prove it for symmetric operators in $\mathbb{R}^n$. In didactic terms, we started the work by bringing basic notions, such as: linearly depedent vectors, inner product in the vector space in which we emphasize the properties of the inner product, the *Cauchy-Schwarz* inequality on vector spaces, the upper and lower bounded sets and the *Completeness Axiom* or *Dedekind's Postulate*. Later, we deal with sequences and discuss limits of sequences and subsequences. Then, we comment on the monotone sequences that can be of the type: increasing, decreasing, nonicreasing and nonidecreasing. Finally, we deal with the enclosing intervals with the idea of presenting one of the most important theorems for the proof of the spectral theorem, which is the *Bolzano-Weierstrass* theorem in the real case. Throughout the work we present examples for a better understanding of the concepts covered.

Keywords: spectral theorem; sequences (math); fitting intervals; symmetric operators; Cauchy-Schwarz inequality; supreme and infinite; Bolzano-Weierstrass theorem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PI	Produto Interno
UFC	Universidade Federal do Ceará

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
T	Operador linear
V	Espaço vetorial
α	Subconjunto de vetores/base ortonormal
β	Base ortonormal
$\in$	Pertence
$\langle\ ,\ \rangle$	Produto interno
$\times$	Cartesiano
f	Função f
Δ	Discriminante da equação do 2^o grau
X	Subconjunto
Y	Subconjunto
$\subset$	Contido
sup	Supremo do subconjunto
inf	Ínfimo do subconjunto
lim	Limite
$\mathbb{N}'$	Subconjunto de $\mathbb{N}$
max	Máximo
$\sum$	Somatório
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\geqslant$	Maior que ou igual
$\leqslant$	Menor que ou igual
$\forall$	Para todo
$\backslash$	Tal que
$\supseteq$	Contém ou igualdade entre dois conjuntos
$\bigcap$	Interseção
∞	Infinito
$p_A(t)$	Polinômio de t
Det	Determinante
I	Matriz identidade
$[T_A]_\alpha^\alpha$	Operador associado a matriz A escrito na base β
$[A]_\alpha^\alpha$	Matriz A na base α
$v^\perp$	Vetor perpendicular
$\perp$	Perpendicular
tr	Traço da matriz

A	Matriz
$\mathbb{S}$	Subconjunto
$Diag$	Diagonal
$g(t)$	Função g
$\gamma(t)$	Função γ
ε	Épsilon
W	Subespaço vetorial
T_A	Operador associado a matriz A
$\tilde{A}$	Operador simétrico
$\|\|u\|\|$	Norma do vetor u

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho realizamos uma abordagem daquele que é um dos teoremas mais importantes da álgebra linear, o teorema espectral para operadores simétricos no espaço euclidiano, $\mathbb{R}^n$. Contudo, para chegarmos a demonstração do teorema, teremos que fazer o uso de teorias associadas as sequências, além de termos que utilizam alguns conceitos mais básicos, mas que serão importantes para a nossa discussão.

Todo o trabalho foi realizado ao longo de oito capítulos, no intuito de compreender cada etapa que será desenvolvida na demonstração do teorema espectral para operadores simétricos, da forma mais simples e adequada possível. E nesse **primeiro capítulo** fizemos uma prévia de tudo que foi abordado nessa dissertação.

No **segundo capítulo** apresentaremos as noções básicas de vetores que são lineamente dependentes a partir de um conjunto α formado por vetores. Em seguida, veremos uma proposição sobre Produto Interno (PI) dos vetores e que será utilizada na desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, mas também para a demonstração do teorema espectral. E para concluir o capítulo, estudaremos as definições de supremo e ínfimo de um dado subconjunto X, do corpo ordenado completo nos $\mathbb{R}$, além do *Axioma da Completude* ou *Postulado de Dedekind*.

O capítulo seguinte abordaremos os conceitos de sequências em que ressaltaremos limites de sequência, a convergência e sequências convergentes limitadas. E ao final do capítulo falaremos do limite da soma, do produto e do confronto.

No **capítulo quatro** discutiremos sobre sequências monótonas crescente, decrescente, não crescente e não decrescente, que terão uma grande importância para a demonstração do teorema dos intervalos encaixantes.

No **quinto capítulo** constará a demonstração do teorema dos intervalos encaixantes, em que utilizaremos o supremo e o ínfimo, a convergência de x_n, y_n e a sequência monótona não decrescente e não crescente.

O **sexto capítulo** será abordado o conceito de sequências limitadas, e ainda, teremos a demonstração do *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que, por sua vez, é base para o *Teorema espectral para operadores simétricos.*

O **sétimo capítulo** apresentará o objetivo geral desse trabalho que corresponde a demonstração do teorema espectral para operadores simétricos no $\mathbb{R}^n$. Contudo, iniciaremos o capítulo realizando uma abordagem dos operadores simétricos no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.

No **oitavo capítulo** faremos as considerações finais de todo o trabalho, ressaltando tópicos que foram utilizados para que chegássemos ao objetivo geral.

2 NOÇÕES BÁSICAS NECESSÁRIAS

Neste capítulo abordamos alguns conceitos básicos, mas que são de suma importância para demonstração do teorema espectral para operadores simétricos no $\mathbb{R}^n$. São eles: vetores que são linearmente dependentes e produto interno no espaço vetorial, tomando como base o livro Introdução à Álgebra Linear do (HEFEZ; FERNANDEZ, 2006); a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* através do livro (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), conjuntos limitados superiormente e inferiormente, corpo ordenado completo em $\mathbb{R}$ e o Axioma da completude (LIMA, 2006).

2.1 Linearmente dependentes

No livro (HEFEZ; FERNANDEZ, 2006), foi estudado o teorema que trata dos vetores que são linearmente dependentes. Vejamos,

Teorema 2.1 *Um conjunto finito α com dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de α puder ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.*

Demonstração: Sendo $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ tal subconjunto de um espaço vetorial V linear suponhamos que existam números reais, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$, não são todos nulos, tais que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_kv_k = 0.$$

Agora, vamos supor que $c_i \neq 0$ com $i \in \mathbb{N}$ e $i \leqslant k$. Isso nos permite escrever a relação acima do seguinte modo:

$$c_iv_i = -c_1v_1 - c_2v_2 - c_3v_3 - \ldots - c_{i-1}v_{i-1} - c_{i+1}v_{i+1} - \ldots - c_{k-1}v_{k-1} - c_kv_k,$$

ou seja,

$$v_i = -\frac{c_1}{c_i}v_1 - \frac{c_2}{c_i}v_2 - \frac{c_3}{c_i}v_3 - \ldots - \frac{c_{i-1}}{c_i}v_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}v_{i+1} - \ldots - \frac{c_{k-1}}{c_i}v_{k-1} - \frac{c_k}{c_i}v_k$$

Isso nos mostra que v_i pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de α.

Supondo-se que exista $v_j \in \alpha$ que seja combinação linear dos outros elementos

$$v_j = d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3 + \ldots + d_{j-1}v_{j-1} + d_{j+1}v_{j+1} + \ldots + d_{k-1}v_{k-1} + d_kv_k$$

consequentemente,

$$d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3 + \ldots + d_{j-1}v_{j-1} - 1v_j + d_{j+1}v_{j+1} + \ldots + d_{k-1}v_{k-1} + d_kv_k = 0.$$

Isso nos mostra que o coeficiente de v_j é não nulo, e assim, temos que α é linearmente dependente.

□

2.2 Produto interno no espaço vetorial

Abordaremos o Produto Interno (PI) no espaço vetorial, segundo o livro (HEFEZ; FERNANDEZ, 2006), com o intuito de entendermos a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* no contexto do espaço vetorial.

Inicialmente, consideremos um espaço vetorial V. Tal espaço vetorial V possui um produto interno, que é uma função $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, satisfazendo as condições abaixo.
PI 1: $\langle v, v\rangle \geq 0$;
PI 2: $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
PI 3: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
PI 4: $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$; e
PI 5: $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$.

Para quaisquer que sejam os vetores u, v e w do espaço vetorial V com $k \in \mathbb{R}$. Com isso, poderemos ver a proposição que trata das propriedades básicas do produto interno a seguir:

Proposição 1: *Sejam V um espaço com produto interno. Se u, v, $w \in V$ e se $k \in \mathbb{R}$, então:*
$(I)\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$;
$(II)\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$;
$(III)\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$;
$(IV)\langle u, v - w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, w\rangle$.

Agora vamos provar cada uma das 4 propriedades do produto interno citadas na ***Proposição* 1**.

Propriedade I: $\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$

Demonstração: Aplicando-se a PI 3 em $\langle 0, u\rangle$, obtemos
$$\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle.$$
Em seguida, podemos escrever o seguinte:
$$\langle 0, u\rangle = \langle 0 + 0, u\rangle.$$
Aplicando-se a PI 4, temos:
$$\langle 0, u\rangle = \langle 0 + 0, u\rangle = \langle 0, u\rangle + \langle 0, u\rangle = 2\langle 0, u\rangle \Rightarrow \langle 0, u\rangle = 2\langle 0, u\rangle.$$
É fácil ver que a última igualdade só existe se $\langle 0, u\rangle = 0$. Portanto, temos que
$$\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0.$$
□

Propriedade II: $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

Demonstração: Usaremos inicialmente a PI 3 em $\langle u, v + w\rangle$, obtendo-se:
$$\langle u, v + w\rangle = \langle v + w, u\rangle.$$
Agora, aplicamos a PI 4 no segundo membro da igualdade anterior, obtendo-se:
$$\langle u, v + w\rangle = \langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle,$$
ou seja,

$$\langle u, v+w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle.$$

Por fim, vamos usar novamente a PI 3 em $\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$, para deduzir

$$\langle u, v+w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle,$$

que implica

$$\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$$

□

Propriedade III: $\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$

Demonstração: Aplicando-se PI 3 em $\langle u, kv\rangle$, obtemos

$$\langle u, kv\rangle = \langle kv, u\rangle.$$

Agora, vamos aplicar PI 5 no segundo membro da relação anterior, e assim, temos

$$\langle kv, u\rangle = k\langle v, u\rangle.$$

Aplicando-se novamente PI 3, podemos concluir que

$$\langle u, kv\rangle = \langle kv, u\rangle = k\langle v, u\rangle = k\langle u, v\rangle \Rightarrow \langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle.$$

□

Propriedade IV: $\langle u, v-w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, w\rangle$

Demonstração: Vamos inicialmente escrever

$$\langle u, v-w\rangle = \langle u, v+(-1)w\rangle.$$

Agora, vamos aplicar PI 3 no segundo membro da relação anterior, obtendo-se

$$\langle u, v-w\rangle = \langle u, v+(-1)w\rangle = \langle v+(-1)w, u\rangle.$$

Aplicando agora PI 4, deduzimos

$$\langle u, v-w\rangle = \langle v+(-1)w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle (-1)w, u\rangle.$$

Daí, aplicamos PI 5 em $\langle (-1)w, u\rangle$, para obter

$$\langle u, v-w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle (-1)w, u\rangle = \langle v, u\rangle + (-1)\langle w, u\rangle = \langle v, u\rangle - \langle w, u\rangle.$$

Por fim, aplicamos novamente PI 3, concluindo-se que

$$\langle u, v-w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, w\rangle.$$

□

2.3 Desigualdade de *Cauchy-Schwarz* no espaço vetorial

Obteremos a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* para um dado espaço vetorial com um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e que foi encontrado no livro de Álgebra Linear (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).

Como $\langle u, u\rangle \geq 0$ podemos definir uma norma associada a $\langle\ ,\ \rangle$ pondo:

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Teorema 2.2 *Se u e v são vetores de um espaço vetorial V com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, então*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\,||v||.$$

Com igualdade valendo se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Demonstração: Vamos supor que u e v são vetores de um espaço vetorial V com produto interno e definir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(\beta) \quad = \quad \langle \beta u - v, \beta u - v \rangle = ||\beta u - v||^2.$$

Agora, façamos o produto interno $\langle \beta u - v, \beta u - v \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \beta u - v, \beta u - v \rangle &= \langle \beta u, \beta u \rangle - \langle \beta u, v \rangle - \langle v, \beta u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle \beta u, \beta u \rangle - \langle \beta u, v \rangle - \langle \beta u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \beta^2 \langle u, u \rangle - 2\beta \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Logo, é fácil ver que a função $f(\beta)$ é do segundo grau em β, mais precisamente,

$$f(\beta) = \beta^2 \langle u, u \rangle - 2\beta \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle. \tag{1}$$

Sendo assim, tomando-se o resultado anterior na forma de uma inequação do segundo grau, onde β é a variável, temos que

$$\beta^2 \langle u, u \rangle - 2\beta \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0.$$

Note que o discriminante Δ da inequação será menor ou igual que zero. Da expressão (1) deduzimos que

$$\Delta = 4(\langle u, v \rangle^2 - ||u||^2 ||v||^2).$$

Como $\Delta \leq 0$, obtemos

$$\langle u, v \rangle^2 \quad \leq \quad ||u||^2 ||v||^2.$$

Daí, extraindo a raíz quadrada em cada membro da inequação, obtemos

$$\sqrt{\langle u, v \rangle^2} \leq \sqrt{||v||^2 ||u||^2} \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{||v||^2} \sqrt{||u||^2} = ||u|| ||v||,$$

pois $||u|| \geq 0$ e $||v|| \geq 0$.

Além disso, $f(\beta) = 0$ para algum β se, e somente se, $\Delta = 0$ se, e somente se, $v = \beta u$.

□

2.4 Conjuntos limitados superiormente e inferiormente

Nesta seção, iremos definir e demonstrar, supremo e ínfimo de $\mathbb{R}$ através do que foi estudado nos livros no livro Análise Real (LIMA, 2006) e no livro um Curso de Cálculo (MUNIZ NETO, 2015). Também iremos definir $\mathbb{R}$, que foi compreendido em

(LIMA, 2006) como um corpo ordenado completo e, por fim, apresentaremos o *Axioma da Completude* segundo Lima (2006, p. 17). Após, o estudo dessa seção, seria conveniente resolver os exercícios propostos nos livros do Lima (2006, p. 19) e do Muniz Neto (2015, p. 73 - 75).

2.4.1 *Supremo de um subconjunto*

Dado subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que X é *limitado superiormente*, se existir um elemento $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$ para qualquer $x \in X$. Daí, se b possuir tal propriedade, podemos denominá-lo de *cota superior* para X, e assim, denominamos a *menor* das cotas superiores de *supremo* do subconjunto X, que será denotado por sup_X.

Agora, suponhamos que $A = sup_X$, então, dado qualquer número real positivo $\varepsilon > 0$, temos que $A - \varepsilon < A$. Daí, $A - \varepsilon$ não poderá ser cota superior para o subconjunto X. Logo, existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $A - \varepsilon < x$, isto é,

$$A = sup_X \Leftrightarrow \forall \, \varepsilon > 0, \, \exists \; x \in X : A - \varepsilon < x. \tag{2}$$

2.4.2 *Ínfimo de um subconjunto*

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente*, se existir um elemento $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x$ para qualquer que seja $x \in X$. Daí, se b tiver tal propriedade o chamamos de *cota inferior* para o subconjunto X. E dizemos que a *maior* das cotas inferiores é definida como *ínfimo* de X, e assim, denotamos por inf_X.

Agora, vamos observar que se $a = inf_X$, então para qualquer número real positivo $\varepsilon > 0$ temos que $a + \varepsilon > a$. E assim, temos que $a + \varepsilon$ não poderá ser cota inferior para o subconjunto X. Com isso, existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$, ou seja,

$$a = inf_X \Leftrightarrow \forall \, \varepsilon > 0 \;\, \exists \; x \in X : x < a + \varepsilon. \tag{3}$$

2.4.3 *Corpo ordenado completo*

Segundo Lima (2006, p. 11 - 13), $\mathbb{R}$ é um *corpo*, isto é, o conjunto $\mathbb{R}$ possui duas operações, uma denominada de adição que é denotada por $+$ e a outra denominada por multiplicação denotada por $\cdot$. Com isso, temos que a adição de um dado par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ tem *soma* igual a $x + y \in \mathbb{R}$. E no caso da multiplicação dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$, atribuíremos ao seu *produto* $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Logo, a adição e a multiplicação devem satisfazer os seguintes axiomas:

Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

Elementos neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos 0 e 1 tais que para cada $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$.

Inversos: para cada x em $\mathbb{R}$ existe $-x$ em $\mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e para cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existe x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ e $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

O conjunto $\mathbb{R}$ é definido como um *corpo ordenado*, pois existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, denominado de conjunto dos números reais positivos e que satisfazem as seguintes condições:

P1: Tomemos dois números $x, y \in \mathbb{R}^+$, temos que a soma e o produto entre esses dois números também serão positivos, isto é, tem-se que $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

P2: Sendo $x \in \mathbb{R}$, podemos ter apenas uma das três situações a seguir: $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Ao denotarmos por $\mathbb{R}^-$ e admitindo-se que $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$, e ainda, com base na condição P2, podemos observar que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, daí, temos que os conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ tomados dois a dois serão disjuntos entre si. E com isso, vamos admitir que os números $y \in \mathbb{R}^-$ são denominados de *números negativos*.

Em $\mathbb{R}$, existe uma relação de ordem e que definiremos assim: para $x < y$ diremos que x é menor que y, o que nos permite escrever $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $y = x + z$ com $z \in \mathbb{R}^+$. Em particular, valem as seguintes propriedades:

O1. *Transitividade*: se $x < y$ e $y < z$ portanto $x < z$;

O2. *Tricotomia*: dados x, y em $\mathbb{R}$, pode ocorrer exatamente uma das possibilidade: $x = y$, ou $x < y$ ou $y < x$;

O3. *Monotonicidade da adição*: se $x < y$ desse modo, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$;

O4. *Monotonicidade da multiplicação*: no caso de $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}^+$ tem-se $x \cdot z < y \cdot z$. Na hipótese de $-z \in \mathbb{R}^+$ logo $x < y$, implica que $y \cdot z < x \cdot z$.

Denotemos $x \geq 0$ se $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x = 0$, enquanto que $x < 0$ significa que $-x \in \mathbb{R}^+$.

Agora mostraremos que a propriedade de transitividade é válida. Ora, uma vez que $x < y$ e $y < z$ temos que se $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Consequentemente, a soma desses elementos também estão em $\mathbb{R}^+$. Isto é, $(z - y) + (y - x) = z - x \in \mathbb{R}^+$. Por conseguinte, $x < z$.

2.4.4 *Axioma da completude ou Postulado de Dedekind*

Axioma de Dedekind: $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, ou seja, todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente, possui um supremo em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3 *Em $\mathbb{R}$, as seguintes afirmações são verdadeiras e equivalentes:*

(i) $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a > 0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$*;*

(iii) Dado qualquer $a > 0$ *em* $\mathbb{R}$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Daí, com base no *Axioma de Dedekind* temos que existe $M = sup_{\mathbb{N}}$, ou seja, temos que a menor cota superior de $\mathbb{N}$ será M, assim, o número real $M - 1$ não poderá vir a ser a cota superior para o conjunto $\mathbb{N}$, sendo assim, com base na relação (2) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M - 1 < n \leq M$.

Em seguida, tomemos a seguinte desigualdade

$$M - 1 < n.$$

Daí, vamos adicionar 1 a cada um dos membros, obtendo-se

$$M - 1 + 1 < n + 1,$$

ou seja,

$$M < n + 1 = s(n) \in \mathbb{N}.$$

Com isso, temos a existência de um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$ que será maior que o supremo de $\mathbb{N}$. E assim, chegamos a uma contradição. Logo, podemos concluir que $\mathbb{N}$ não pode ser limitado superiormente. Ou seja, temos que (i) é verdadeiro. E podemos ir mais adiante, pois podemos dizer que o número $\dfrac{b}{a}$ não será uma cota superior para $\mathbb{N}$. Consequemente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{b}{a}$ implica que $na > b \Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). Contudo, tomando-se que $b = 1$ podemos ver que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Além do mais, dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$, e ainda, escolhendo-se $a = \dfrac{1}{x}$, podemos concluir que existe $n \in \mathbb{N} : n > x$, ou seja, que (iii) $\Rightarrow$ (i).

$\square$

3 SEQUÊNCIAS

3.1 Limites de uma sequência

Com base em Muniz Neto (2015) e Guidorizzi (2013, p. 111 - 115), uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, de forma que cada elemento $x(n)$ será denotado por x_n, e usaremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de forma mais simples os elementos da sequência por (x_n).

Uma sequência (x_n) é convergente para a, se dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$, então

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Se (x_n) converge para a denotamos por

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Daí, obtemos que

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

ou seja,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Subtraindo a em cada membro da desigualdade, temos que

$$a - \varepsilon - a < x_n - a < a + \varepsilon - a \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon,$$

e assim,

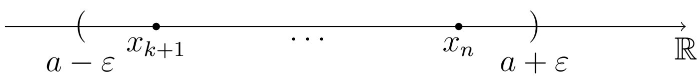
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ao analisarmos que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, isso nos mostra que existe apenas um número finito de termos da sequências (x_n) que não pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de modo que, a partir de um certo k temos todos os elementos pertencentes a esse intervalo.

Figura 1 – Elementos a partir de k pertencentes ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

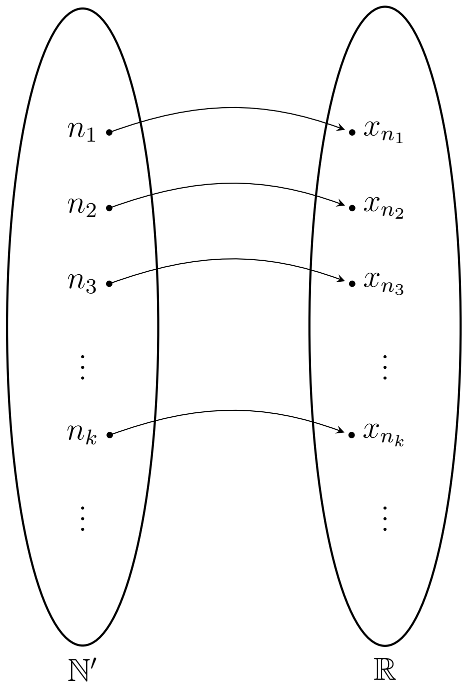


Fonte: elaborada pelo autor.

3.1.1 *Subsequências*

De acordo com (MUNIZ NETO, 2015), uma subsequência (x_{n_k}) de uma sequência (x_n) é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$, ou seja, $x : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$, em que, associa-se a cada $n_k \in \mathbb{N}'$ o elemento x_{n_k}. Logo, vejamos o diagrama abaixo.

Figura 2 – Diagrama de $x : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$



Fonte: elaborada pelo autor.

3.1.2 *Convergência de subsequências*

Observando a proposição exposta em Muniz Neto (2015):

Proposição 3.1 *Se* (x_{n_k}) *é uma subsequência de uma sequência* (x_n) *e* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*, então* $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = a$*.*

Basta observar que dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$, implica que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Mas como $\mathbb{N}'$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ existe $n_j \in \mathbb{N}'$ tal que $n_j > k$. Assim, se $n_k > n_j$ então

$$x_{n_k} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow \lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

3.1.3 *Convergência para 0*

Conforme Muniz Neto (2015) e Swokowski (1995, p. 25 - 26), cabe observar que se (x_n) e (y_n) são sequências de números reais que convergem para 0, ou seja, $a = 0$ e $b = 0$, assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existem k, $l \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$, temos

$$x_n \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathit{se,\ e\ somente\ se,}\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

enquanto, que se $n > l$, então

$$y_n \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathit{se,\ e\ somente\ se,}\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Escolhendo $m = max\{k, l\}$, as relações (4) e (5) continuarão válidas. De fato, temos que $n > m$, e assim, obtemos

$$|x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ então } |x_n| + |y_n| < \varepsilon.$$

Agora, usando-se a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* para números reais, temos que

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon,$$

isto é,

$$|x_n + y_n| < \varepsilon.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0.$$

Vamos observar que se x_n é uma sequência de números reais, de modo que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$, então

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{6}$$

Usando-se o resultado (6), deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \textit{ se, e somente se, } \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0, \tag{7}$$

e de forma análoga, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \textit{ se, e somente se, } \lim_{n\to\infty}(y_n - b) = 0. \tag{8}$$

3.1.4 *Soma*

Usando inicialmente que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ em que ambos os resultados foram obtidos na convergência para 0. Daí, temos que $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, assim, usando-se o resultado (4), podemos finalizar do seguinte modo

$$\lim_{n\to\infty}[(x_n - a) + (y_n - b)] = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n - a - b) = 0.$$

O teorema da *Unicidade do limite* a seguir foi descrito em Lima (2006, p. 24), vejamos

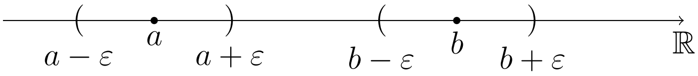
Teorema 3.1 *(Unicidade do limite) - Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Para que possamos provar que o limite é único, devemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então $a = b$.

Contudo, se $a \neq b$ e $d = |a - b| > 0$, escolha $\varepsilon = \frac{1}{5}d$. Logo, para esse ε existe $k \in \mathbb{N}$, de modo que se $n > k$, temos que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Entretanto, os intervalos $X = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $Y = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ são disjuntos, ou seja, os intervalos X e Y não possui elemento em comum.

Figura 3 – Intervalos disjuntos de X e Y



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso nos mostra que todo número real x_n com $n > k$ não deve pertencer ao intervalo Y.

Portanto, podemos dizer que no máximo os elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ da sequência (x_n) de números reais podem pertencer ao intervalo Y. Assim, a sequência (x_n) não poderá convergir para o número real b.

$\square$

3.1.5 *Sequências convergentes são limitadas*

Em Lima (2006, p. 24) e Rudin (1971), podemos destacar a proposição abaixo,

Proposição 3.2 *Seja (x_n) uma sequência de números reais convergente, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

então (x_n) é limitada.

Demonstração: Usando o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ que foi obtido anteriormente, escolhemos $\varepsilon = 1$. Com isso, temos que o intervalo $(a-1, a+1)$ contém todo termo da sequência a partir de um certo valor $k \in \mathbb{N}$. Logo, para $n > k$ temos que $x_n \in (a-1, a+1)$, e assim,

$$x_n < a+1,$$

daí, temos que

$$|x_n| < |a+1|,$$

usando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, obtemos que

$$|a+1| \leq |a| + 1,$$

ou seja,

$$|x_n| < |a| + 1.$$

Agora, tomemos ρ como sendo o valor máximo do conjunto $\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_{k-1}|, |x_k|\}$, isto é,

$$\rho = max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_{k-1}|, |x_k|\},$$

e se

$$k = max\{\rho, |a|+1\},$$

então $|x_n| \leq k$ com $n \in \mathbb{N}$, e assim, temos que a sequência é limitada.

$\square$

3.1.6 *Caso especial*

A partir do livro de Lima (2006, p. 32 - 36) e do livro de Rudin (1971), temos uma proposição que trata de um caso especial sobre as sequências convergentes limitadas. Vejamos:

Proposição 3.3 *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e y_n é limitada, então $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$.*

Demonstração: Como y_n é limitada, existe $c > 0$, de modo que $|y_n| \leq c$. Dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\dfrac{\varepsilon}{c} > 0$, existe $k \in \mathbb{N} : n > k$, implicando

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{c}. \tag{9}$$

Por outro lado,

$$|(x_n y_n)| = |x_n||y_n| \leq c|x_n| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

pois

$$|y_n| \leq c$$

e

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{c},\ \forall\ n > k.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$.

$\square$

3.1.7 *Produto*

De acordo com Muniz Neto (2015), podemos inferir o seguinte:

Proposição 3.4 *Se (x_n) converge para a e y_n converge para b, então $(x_n y_n)$ converge para ab.*

Demonstração: Inicialmente, tomamos a seguinte expressão: $x_n y_n - ab$. Daí, vamos adicionar e subtrair $x_n b$, obtendo-se

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab.$$

Em seguida, colocamos x_n em evidência nos dois primeiros termos e o b nos dois últimos, obtemos

$$x_n y_n - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a).$$

E como já temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, e ainda, como já observado anteriormente, temos que $\lim_{n\to\infty} x_n - a = 0$ e $\lim_{n\to\infty} y_n - b = 0$. A propriedade anterior nos mostra que o lado direito converge para zero, assim, temos que $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n - ab) = 0$.

Daí, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab, \tag{10}$$

pois,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow |x_n y_n - ab| < \varepsilon.$$

□

3.1.8 *Produto particular*

Existe um produto particular que pode ser observado em Muniz Neto (2015).

Proposição 3.5 *Se (x_n) converge para a e $(y_n = c)$ é a sequência constante, então (cx_n) converge para ca.*

Demonstração: Basta observar que se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n\to\infty} y_n = c,$$

pelo item **3.1.7**, temos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ac.$$

□

A transitividade, foi estudada através de Muniz Neto (2015) e será discutida a seguir.

3.1.9 *Transitividade* 1

Proposição 3.6 *Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $a > b$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$ temos que $x_n > b$.*

Demonstração: Usando-se a definição de limite podemos dizer que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$, temos que

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon). \tag{11}$$

Agora, escolha ε, tal que, $\varepsilon = \dfrac{a-b}{3}$, assim, temos que o intervalo (11) poderá ser escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned}(a - \varepsilon, a + \varepsilon) &= \left(a - \frac{a-b}{3}, a + \frac{a-b}{3}\right)\\ &= \left(\frac{3a - a + b}{3}, \frac{3a + a - b}{3}\right)\\ &= \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{4a-b}{3}\right).\end{aligned}$$

Como $a > b$, temos que

$$\frac{2a+b}{3} > \frac{2b+b}{3} = \frac{3b}{3} = b.$$

Daí, observamos que o intervalo

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{4a-b}{3}\right) \subset \left(b, \frac{4a-b}{3}\right).$$

Portanto, para $n > k$ temos que

$$x_n \in \left(b, \frac{4a-b}{3}\right), \text{ então } x_n > b.$$

□

Exemplo 3.1 *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$*, então existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > k$ *temos que* $x_n > 0$*.*
Demonstração: Usando o item **3.1.9**, podemos observar que se $b = 0$, temos que existe $k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow x_n > 0$.

□

3.1.10 *Transitividade 2*

Proposição 3.7 *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $a < b$*, então existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > k$ *temos que* $x_n < b$*.*
Demonstração: Inicialmente tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$ temos que

$$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Ao escolhermos $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned}(a-\varepsilon, a+\varepsilon) &= \left(a - \frac{b-a}{3}, a + \frac{b-a}{3}\right)\\ &= \left(\frac{3a-b+a}{3}, \frac{3a+b-a}{3}\right)\\ &= \left(\frac{4a-b}{3}, \frac{2a+b}{3}\right).\end{aligned}$$

Como $a < b$, temos que

$$\frac{2a+b}{3} < \frac{2b+b}{3} = b.$$

Assim, o intervalo

$$\left(\frac{4a-b}{3}, \frac{2a+b}{3}\right) \subset \left(\frac{4a-b}{3}, b\right).$$

Portanto, para $n > k$, temos que

$$x_n \in \left(\frac{4a-b}{3}, b\right), \text{ então } x_n < b.$$

□

Exemplo 3.2 *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < 0$*, então existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > k$ *temos que* $x_n < 0$*.*
Demonstração: Pelo item **3.1.10**, podemos observar que se $b = 0$, temos que existe

$k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow x_n < 0$.

□

3.1.11 *Transitividade 3*

Proposição 3.8 *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $x_n \geq 0$, *então* $a \geq 0$.
Demonstração: Considerando o resultado obtido no **Exemplo 3.2** e supondo que $a < 0$, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$ temos que $x_n < 0$. Contudo, podemos facilmente ver que isso contraria a hipótese inicial de que $x_n \geq 0$. Por conseguinte, temos que $a \geq 0$ como queríamos provar.

□

3.1.12 *Transitividade 4*

Proposição 3.9 *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $x_n \leq 0$, *então* $a \leq 0$.
Demonstração: Usando o resultado obtido no **Exemplo 3.1** vamos supor que $a > 0$. Assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$ temos que $x_n > 0$. Contudo, podemos facilmente ver que isso contraria a hipótese inicial de $x_n \leq 0$.

Portanto, $a \leq 0$ como queríamos demonstrar.

□

Exemplo 3.3 *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ *e* $x_n \leq y_n$, *prove que então* $a \leq b$.
Demonstração: Se $z_n = y_n - x_n$, então temos que $z_n \geq 0$ e que $\lim_{n\to\infty} z_n = b - a$. Sabemos que pelo item **3.1.9** que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b - a \geq 0.$$

Portanto, $a \leq b$, como enunciado.

□

3.1.13 *Confronto*

Com o exposto em Guidorizzi (2013, p. 90 - 93) e também com o que foi apresentado em Swokowski (1995, p. 39 - 40), temos a proposição abaixo.

Proposição 3.10 *Sejam* $(x_n), (y_n)$ *e* (z_n) *sequências tais que* (x_n) *e* (z_n) *convergem para o mesmo valor* a. *Se* $x_n \leq y_n \leq z_n \, \forall \, n \in \mathbb{N}$, *então* (y_n) *também converge para* a.
Demonstração: Como já sabemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $n > k$, temos

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \text{ então } a - \varepsilon < x_n.$$

Usando um argumento semelhante, temos que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para $n > l$, temos que

$$z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \text{ então } z_n < a + \varepsilon.$$

Sendo assim, consideremos um valor m, em que, $m = max\{k, l\}$, temos que se $n > m$,

$$a - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon, \text{ então } \lim_{n \to \infty} y_n = a.$$

$\square$

4 SEQUÊNCIA MONÓTONAS

A compreensão desse capítulo será importante para o entendimendo do capítulo 5, para isso, foi tomado como base o que foi tratado em Lima (2013) e Muniz Neto (2015).

Definição 4.1 *Dada sequência* (x_n) *de números reais, dizemos que tal sequência é:*

Caso 4.1 *crescente se,* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \ldots$.

Caso 4.2 *decrescente se,* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > x_{n+2} > \ldots$.

Caso 4.3 *não decrescente se,* $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \ldots$.

Caso 4.4 *não crescente se,* $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq x_{n+2} \geq \ldots$.

Definição 4.2 *Dada sequência* (x_n) *de números reais que satisfaça um dos casos citados acima é chamada de sequência monótona. Se a referida sequência* (x_n) *também for limitada, dizemos que a sequência* (x_n) *é monótona e limitada.*

Teorema 4.1 *Se* (x_n) *for uma sequência monótona limitada então ela é convergente.*

Demonstração do caso 1: Considere o subconjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ e por hipótese os elementos do subconjunto X satisfazem

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \ldots \leq k.$$

Assim, temos que o subconjunto X de números reais é não vazio e limitado superiormente. Com isso, temos que existe $a = sup_X$.

Daí, afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. De fato, se $a = sup_X$ e utilizando-se a definição de supremo, podemos dizer que a é a menor quota superior de X. Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$ implica que $a - \varepsilon$ não será uma quota superior para X, já que $a - \varepsilon < a$. Assim, existe $x_k \in X$ tal que $a - \varepsilon < x_k \leq a$.

Contudo, temos que $x_n > x_k$ para $n > k$. Daí, se

$$n > k, \text{ então } x_n \in (a - \varepsilon, a).$$

Em resumo, temos que de fato

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

□

Demonstração do caso 2: Considere o subconjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ e observemos que os elementos desse subconjunto X satisfazem

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > x_{n+2} > \ldots \geq k.$$

Isso nos mostra que o subconjunto X de números reais é não vazio e limitado inferiormente, o que implica que existe $b = inf_X$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Para provar isso, observe que, se $b = inf_X$ teremos a partir da definição de ínfimo que b é a maior quota inferior para o subconjunto X. Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$ temos que $b + \varepsilon$ não será uma quota inferior para X, já que $b + \varepsilon > b$.

Daí, podemos ver que existe $x_k \in X$ tal que $b \leq x_k < b + \varepsilon$. Contudo, temos que $x_n < x_k$ se $n > k$. Ou seja, temos que

$$x_n \in (b, b + \varepsilon).$$

Em resumo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

□

Demonstração do caso 3: Considere o subconjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ e novamente supomos que esses elementos gozam da seguinte propriedade:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \ldots \leq k.$$

Ao tomarmos um subconjunto X de números reais é não vazio e limitado superiormente. Logo, existe $z = sup_X$.

Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. De fato, se $z = sup_X$, sabemos através da definição de supremo, que z é a menor quota superior para o subconjunto X. E ainda, temos que para qualquer $\varepsilon > 0$ que $z - \varepsilon$ não será uma quota superior para X, já que $z - \varepsilon < z$.

Por isso, existe $x_k \in X$ tal que $z - \varepsilon < x_k \leq z$. Contudo, temos que $x_n \geq x_k$ se $n > k$. Daí, como

$$n > k \Rightarrow x_n \in (z - \varepsilon, z).$$

Por conseguinte, temos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z.$$

□

Demonstração do caso 4: Considere o subconjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Sabemos que tais elementos gozam da sequinte propriedade:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq x_{n+2} \geq \ldots \geq k.$$

Dado subconjunto X de números reais é não vazio e limitado inferiormente. Com isso, existe $w = inf_X$.

Agora, afirmamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = w$. De fato, sendo $w = inf_X$ teremos através da definição de ínfimo que w é a maior quota inferior para o subconjunto X. Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$ temos que $w + \varepsilon$ não é uma quota inferior para X, já que $w + \varepsilon > w$.

Daí, existe $x_k \in X$ com $x_k < w + \varepsilon$. Se $n > k$ temos que $x_n \leq x_k$, logo

$$x_n \in (w, w + \varepsilon).$$

Portanto, temos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = w.$$

□

5 INTERVALOS ENCAIXANTES

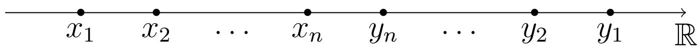
Neste capítulo, abordado-se um dos assuntos mais relevantes para a compreensão do teorema espectral para operadores simétricos, e que foi utilizado os livros do Guidorizzi (2013, p. 508 - 513), Muniz Neto (2015) e Rudin (1971). Para isso, vamos considerar uma sequência de intervalos da reta

$$H_1 = [x_1, y_1], H_2 = [x_2, y_2], H_3 = [x_3, y_3], \ldots, H_n = [x_n, y_n],$$

satisfazendo

$$H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \ldots H_{n-1} \supseteq H_n \supseteq H_{n+1} \supseteq \ldots$$

Figura 4 – Reta dos números reais



Fonte: elaborada pelo autor.

Daí, consideremos os subconjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots\}$, em que, $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $x_1 \leq y_n$ para todo n, e isso, implica que existe $b = inf_Y$. Da mesma forma, temos que $x_n \leq y_1$ para todo n, implica que existe $a = sup_X$. Vamos observar agora que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots,$$

forma uma sequência (x_n) monótona e não decrescente, e que ainda,

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \ldots \geq y_{n-1} \geq y_n \geq y_{n+1} \geq \ldots,$$

forma uma sequência (y_n) monótona e não crescente. Pelo resultado (9) as sequências (x_n) e (y_n) são convergentes. Assim, vamos obter que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Agora, provemos que $b \geq a$. Mas, para isso, vamos supor inicialmente que $b < a$. Logo, ao considerarmos que $\varepsilon = \dfrac{a-b}{3}$. Como já temos que $b + \varepsilon$ não é cota inferior para b. Assim, existe $y_k < b + \varepsilon$. Contudo, do mesmo modo, $a - \varepsilon$ não será a cota superior para X, o que nos mostra que existe $a - \varepsilon < x_m$. Daí, temos que

$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{3} = \frac{3b + a - b}{3} = \frac{2b + a}{3},$$

e que,

$$a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{3} = \frac{3a - a - b}{3} = \frac{2a + b}{3}.$$

Com isso, podemos notar que

$$b + \varepsilon = \frac{2b + a}{3} < \frac{2a + b}{3} = a - \varepsilon,$$

logo, temos que $y_k < x_m$. Mas, se $k = m$ teríamos que $y_k < x_k$, entretanto, ocorre apenas o contrário. Agora, para a situação em que tenhamos $k < m$, passaríamos a ter que $y_m < y_k < x_m$ o que geraria mais uma vez uma contradição. Por fim, ao tomarmos que $k > m$, daí, $x_k > x_m$ e para tal situação teríamos que $x_k > y_k$. Logo, $b \geq a$.

Agora, verifiquemos o caso em que $b > a$. Para isso, temos que $y_n \geq b$ e $a \geq x_n$, nesse caso poderemos reescrever o resultado do seguinte modo

$$y_n + a \geq b + x_n \Rightarrow y_n - x_n \geq b - a.$$

E usando o resultado visto anteriormente, teremos que

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = b - a.$$

Decorre ainda que,

$$y_n \geq b > a \geq x_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k = [a, b].$$

□

Daí, podemos escrever o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Seja* $\{H_1, ..., H_n, ...\}$ *uma sequência de intervalos encaixados tais que:*

$$H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \ldots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n \supseteq H_{n+1} \supseteq \ldots$$

tal que $|H_n| = y_n - x_n$*, onde* $H_n = [x_n, y_n]$*. Se* $\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$*, então* $a = b$ *e* $\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k = \{a\}$.

6 SEQUÊNCIAS LIMITADAS

Em Lima (2006, p. 25 - 27) e Muniz Neto (2015), temos que uma sequência (x_n) é dita limitada, se existir $k \geq 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em geral, uma sequência limitada não é monótona. Contudo, é válido o seguinte resultado.

Teorema 6.1 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) - Se (x_n) é uma sequência limitada, então existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente.*

Demonstração: Considere $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma sequência limitada, ou seja, $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que $x_n \in I = [-k, k]$.

Vamos particionar o intervalo I, considerando o ponto médio, isto é

$$I = I_1 \cup I_2, \text{ onde } I_1 = [-k, 0] \text{ e } I_2 = [0, k].$$

Agora, observemos que

$$x^{-1}(I_1) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_1\},$$

ou $x^{-1}(I_2)$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Daí, dizemos nesse caso que I_1 ou I_2 possui infinitos termos da sequência.

Vamos supor que $H_1 = I_2$ possua tal propriedade. Novamente, vamos particionar o intervalo H_1 considerando seu ponto médio, isto significa que $H_1 = \left[0, \frac{k}{2}\right] \cup \left[\frac{k}{2}, k\right]$.

Como H_1 contém infinitos termos da sequência, podemos supor que $H_2 = \left[0, \frac{k}{2}\right]$ também goza dessa propriedade.

Prosseguindo, escrevemos

$$H_2 = \left[0, \frac{k}{4}\right] \cup \left[\frac{k}{4}, \frac{k}{2}\right].$$

E supomos que $H_3 = \left[0, \frac{k}{4}\right]$ contém infinitos termos da sequência.

Daí, usando mais uma vez esse argumento construímos uma sequência de intervalos encaixantes

$$H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \ldots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n \supseteq H_{n+1} \supseteq \ldots,$$

tal que,

$$\|H_{j+1}\| = \frac{k}{2^j}.$$

Além disso, como cada intervalo contém infinitos termos da sequência, podemos escolher

$$x_{n_1} \in H_1,\ x_{n_2} \in H_2,\ x_{n_3} \in H_3,\ \ldots,\ x_{n_{j-1}} \in H_{j-1},\ x_{n_j} \in H_j,\ x_{n_{j+1}} \in H_{j+1},\ \ldots$$

com

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{j-1} < n_j < n_{j+1} < \ldots.$$

Pelo *Teorema dos Intervalos Encaixantes* sabemos que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} H_j = \{a\}, \text{ pois } \lim_{j \to \infty} |H_j| = 0.$$

Daí, podemos observar que

$$H_{j+1} = \left[0, \frac{k}{2^j}\right] \text{ com } x_{n_j} \in H_j = \left[0, \frac{k}{2^{j-1}}\right],$$

e se $a \in H_j$ para todo j, temos que
$$|x_{n_j} - a| \leq \frac{k}{2^{j-1}}.$$
Assim, concluímos que a subsequência (x_{n_j}) é convergente, pois
$$\lim_{n_j \to \infty} x_{n_j} = a.$$
$\square$

7 TEOREMA ESPECTRAL

Nesse capítulo trataremos do tema principal dessa dissertação e que foi pesquisado nos livros do Hefez e Fernandez (2016) e do Steinbruch e Winterle (1987). A abordagem que seguiremos aqui do teorema espectral é uma forma diferente do que é utilizado através do método dos multiplicadores de Lagrange. Iniciamos a demonstração utilizando os operadores simétricos de dimensão dois e de dimensão três para que possamos provar para a dimensão n.

7.1 Operadores simétricos de dimensão dois

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ uma matriz simétrica com entradas reais. Assim, determinemos o polinômio característico $p_A(t)$, como sendo

$$p_A(t) = Det(tI - A),$$

em que Det corresponde a determinante. Mas,

$$tI - A = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-a & -b \\ -b & t-d \end{pmatrix}.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= Det\begin{pmatrix} t-a & -b \\ -b & t-d \end{pmatrix} = (t-a)(t-d) - b^2 = t^2 - (a+d)t + (ad - b^2) \\ &= t^2 - tr(A)t + Det(A). \end{aligned}$$

Daí, o discriminante Δ_{p_A} será dado por

$$\begin{aligned} \Delta_{p_A} &= [-(a+d)]^2 - 4(ad - b^2) \\ &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4b^2 \\ &= (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pois $a - d$ está elevado ao quadrado e b também está elevado ao quadrado. Com isso, p_A tem duas raízes reais distintas ou pelo menos uma raiz com multiplicidade 2.

Agora observe que, se $Det(tI - A) = 0$, então $tI - A$ é não invertível. Logo, existe $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vetor unitário, tal que

$$(tI - A)u = 0 \text{ implica em } Au = \lambda_1 u,\ \lambda_1 = t.$$

Se $v \in \mathbb{R}^2$ é também um vetor unitário e ortogonal a u, concluímos que

$$\langle Av, u\rangle = \langle v, Au\rangle = \langle v, \lambda_1 u\rangle = \lambda_1\langle u, v\rangle = 0,$$

ou seja, $Av \perp u$, isto implica que

$$Av = \lambda_2 v.$$

Logo, o operador T_A associado a matriz A pode ser escrito na base $\alpha = \{u, v\}$ da sequinte forma

$$[T_A]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Com base no que foi exposto acima, vamos resolver o seguinte exemplo.

Exemplo 7.1 *Determine a matriz diagonalizável* $[T_A]_\alpha^\alpha$ *com* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *da matriz simétrica* $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$.

Solução: Sendo o polinômio característico dado por

$$p_A(t) = Det(tI - A).$$

Sendo,

$$tI - A = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & t-5 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que o $Det(tI - A)$ é

$$\begin{aligned} Det(tI - A) &= \begin{vmatrix} t-3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & t-5 \end{vmatrix} = (t-3)(t-5) - (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = t^2 - 5t - 3t + 15 - 3 \\ &= t^2 - 8t + 12. \end{aligned}$$

Por conseguinte, obtemos o seguinte $p_A(t) = t^2 - 8t + 12$.

Agora, determinemos as raízes do polinômio $p_A(t)$ que correspondem aos autovalores. Logo, temos que o discriminante do $p_A(t)$ é

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(12) = 64 - 48 \Rightarrow \Delta = 16.$$

E com isso, obtemos as raízes

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ e } t_2 = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Daí, temos que $t_1 = \lambda_1 = 6$ e $t_2 = \lambda_2 = 2$. Portanto, o operador simétrico T_A associado a base α é

$$[T_A]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.2 Operadores simétricos de dimensão três

Considerando agora $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ uma matriz simétrica com entradas reais, temos que:

$$tI - A = t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-a & -b & -c \\ -b & t-d & -e \\ -c & -e & t-f \end{pmatrix}.$$

Como $p_A(t) = Det(tI - A)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
p_A(t) &= (t-a)(t-d)(t-f) + (-b)(-e)(-c) + (-c)(-b)(-e) - (-c)(t-d)(-c) \\
&- (-b)(-b)(t-f) - (t-a)(-e)(-e) \\
&= (t^2 - dt - at + ad)(t-f) + (be)(-c) + (-bce) - (c^2)(t-d) - (b^2)(t-f) \\
&- (t-a)(e^2) \\
&= t^3 - dt^2 - at^2 + adt - ft^2 + dft + aft - adf - bce - bce - c^2t + c^2d - b^2t \\
&+ b^2f - e^2t + ae^2 \\
&= t^3 - dt^2 - at^2 - ft^2 + adt + dft + aft - c^2t - b^2t - e^2t - adf - bce - bce \\
&+ c^2d + b^2f + ae^2 \\
&= t^3 - (a+d+f)t^2 + (ad + df + af - c^2 - b^2 - e^2)t + (-adf - 2bce + c^2d \\
&+ b^2f + ae^2). \qquad (12)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
Det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} \\
&= adf + bec + cbe - c^2d - b^2f - ae^2 \\
&= adf + 2bce - c^2d - b^2f - ae^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-Det(A) = -adf - 2bce + c^2d + b^2f + ae^2.$$

Em particular, temos que

$$tr(A) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = a + d + f.$$

Logo, fazendo as devidas substituições em (12), obtemos

$$p_A(t) = t^3 - tr(A)t^2 + (df - e^2 + ad + af - b^2 - c^2)t - Det(A).$$

Daí, temos que p_A é um polinômio cujo grau é três e portanto, existe pelo menos uma raiz real. Isto nos permite escrever o polinômio p_A do seguinte modo

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)(t^2 + ut + v),$$

em que, λ_1 é a raiz real de $p_A(t)$ que nos mostra o fato de que $p_A(\lambda_1) = 0$, isso nos mostra que existe um vetor unitário $v_1 \in \mathbb{R}^3 \, : \, Av_1 = \lambda_1 v_1$.

Consideremos agora,

$$v_1^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \, : \, \langle v, v_1 \rangle = 0\}.$$

Daí, temos que

$$v \in v_1^{\perp} \Rightarrow \langle Av, v_1 \rangle = \langle v, Av_1 \rangle = \langle v, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow Av \in v_1^{\perp}.$$

Pelo caso anterior, existe uma base ortonormal $\{v_2, v_3\}$ de $v_1^{\perp}$, tal que,

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \text{ e } Av_3 = \lambda_3 v_3.$$

Com isso, a base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormal é tal que

$$[A]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 7.2 *Dada a matriz* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Calcule a sua matriz diagonalizável sendo* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Solução: Inicialmente, vamos determinar o polinômio característico $p_A(t)$. Para isso, calculemos $tI - A$.

$$\begin{aligned} tI - A &= t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t-3 & 0 & 3 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 3 & 0 & t+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Já o $Det(tI - A)$ é

$$\begin{aligned} Det(tI - A) &= \left| \begin{array}{ccc|cc} t-3 & 0 & 3 & t-3 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 & t-2 \\ 3 & 0 & t+1 & 3 & 0 \end{array} \right. \\ &= (t-3)(t-2)(t+1) - 3 \cdot 3(t-2) \\ &= t^3 - 4t^2 + t + 6 - 9t + 18 \\ &= t^3 - 4t^2 - 8t + 24 \end{aligned}$$

E assim, temos que o polinômio característico $p_A(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} p_A(t) &= t^3 - 4t^2 - 8t + 24 \\ p_A(t) &= (t-2)(t^2 - 2t - 12). \end{aligned}$$

As raízes do polinômio característico $p_A(t)$ é $t_1 = 2, t_2 = 1 - \sqrt{3}$ e $t_3 = 1 + \sqrt{3}$.

Portanto, a matriz A diagonalizável é

$$[T_A]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

7.3 Operadores simétricos de dimensão n

Vamos considerar uma matriz simétrica cujas entradas são números reais e a dimensão é n e que será dada por $A = (a_{ij})$. Fazendo o produto entre a matriz simétrica A com a matriz coluna x, obtemos

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{in}x_i + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i \right). \tag{13}$$

Por outro lado, denotando cada linha da matriz A por A_i com $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, A_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{in}), \ldots, A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}).$$

Assim,

$$\begin{cases} \langle A_1, x \rangle = \langle (a_{11}, \ldots, a_{1n}), (x_1, \ldots, x_n) \rangle = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \langle A_n, x \rangle = \langle (a_{1n}, \ldots, a_{nn}), (x_1, \ldots, x_n) \rangle = a_{1n}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{14}$$

Logo, podemos escrever a equação (13) da seguinte maneira

$$Ax = (\langle A_1, x\rangle, \ldots, \langle A_n, x\rangle).$$

Usando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, obtemos

$$|\langle A_1, x\rangle| \leq ||A_1||||x||, \ldots, |\langle A_n, x\rangle| \leq ||A_n||||x||.$$

Consequentemente podemos escrever

$$\begin{aligned} ||Ax||^2 &= (\langle A_1, x\rangle)^2 + (\langle A_2, x\rangle)^2 + \ldots + (\langle A_n, x\rangle)^2 \\ &\leq (||A_1||||x||)^2 + (||A_2||||x||)^2 + \ldots + (||A_n||||x||)^2 \\ &= (||A_1||^2 + ||A_2||^2 + \ldots + ||A_n||^2)||x||^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$||Ax||^2 \leq (||A_1||^2 + ||A_2||^2 + \ldots + ||A_n||^2)||x||^2. \tag{15}$$

Tomando-se um caso particular em que $||x||^2 = 1$, a relação anterior poderá ser escrita como

$$||Ax||^2 \leq ||A_1||^2 + ||A_2||^2 + \ldots + ||A_n||^2.$$

Levando em conta que

$$||A||^2 = \langle A, A\rangle = tr(AA^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} ||A_i||^2$$

deduzimos

$$||Ax|| \leq \sqrt{||A_1||^2 + ||A_2||^2 + \ldots + ||A_n||^2} = ||A||,$$

ou seja,

$$||Ax|| \leq ||A||, \tag{16}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $||x|| = 1$.

Considere $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, ||x||^2 = 1\}$ e $f_1 : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_1(x) = \langle Ax, x\rangle. \tag{17}$$

Utilizando as relações contidas em (14), obtemos

$$\begin{aligned} f_1(x) = \langle Ax, x\rangle &= \langle(\langle A_1, x\rangle, \ldots, \langle A_n, x\rangle), (x_1, \ldots, x_n)\rangle \\ &= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_1(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2. \quad (18)$$

Aplicando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* temos

$$|f_1(x)| = |\langle Ax, x\rangle| \leq ||Ax||||x|| \leq ||A||,$$

pois e $||x|| = 1$ e $||Ax|| \leq ||A||$ por (16).

Daí, concluímos que o subconjunto $Y_1 = \{f_1(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Portanto, possui supremo. Se $b_1 = sup_{Y_1}$, sabemos que dado $k \in \mathbb{N}$, temos que $b_1 - \frac{1}{k}$ não é cota superior de Y_1, logo existe $f_1(x_k) \in Y_1$, $x_k \in \mathbb{S}^{n-1}$, tal que

$$b_1 - \frac{1}{k} \leq f_1(x_k) < b_1,$$

isto é,

$$|f_1(x_k) - b_1| < \frac{1}{k}. \quad (19)$$

Observe que $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, \ldots, x_{n,k})$ satisfaz a relação

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, cada coordenada $x_{i,k}$ satisfaz $|x_{i,k}| \leq 1$. Sendo $|x_{1,k}| \leq 1$ podemos usar o **Teorema 6.1** para garantir que a sequência $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Com isso, temos que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1^1, n_2^1, \ldots, n_k^1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ de modo que

$$\lim_{n_k^1 \to \infty} x_{1,n_k^1} = c_1^1,$$

sendo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1$.

Ao restringirmos $x_{2,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_1$, isto é, $x_{2,k} : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$, sendo que

$$|x_{2,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

mais especificamente para todo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 = \{n_1^2, n_2^2, \ldots, n_k^2, \ldots\} \subset \mathbb{N}_1$ tal que

$$\lim_{n_k^2 \to \infty} x_{2,n_k^2} = c_2^1,$$

logo, temos que (x_{2,n_k^2}) com $n_k^2 \in \mathbb{N}_2$ é convergente.

Usando o mesmo argumento anterior, restrigimos $x_{3,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_2$, ou seja, $x_{3,k} : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{R}$. Como

$$|x_{3,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^2 \in \mathbb{N}_2$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_3 = \{n_1^3, n_2^3, \ldots, n_k^3, \ldots\} \subset \mathbb{N}_2$ tal que

$$\lim_{n_k^3 \to \infty} x_{3,n_k^3} = c_3^1,$$

logo, temos que $(x_{3,k})$ com $n_k^3 \in \mathbb{N}_3$ é convergente.

Com isso, realizando-se o processo repetidamente conseguiremos chegar ao $x_{n,k}$. Daí, restrigimos $x_{n,k}$ ao subconjunto infinito $\mathbb{N}_{n-1} = \{n_1^{n-1}, n_2^{n-1}, \ldots, n_k^{n-1}, \ldots\}$, ou melhor, $x_{n,k} : \mathbb{N}_{n-1} \to \mathbb{R}$. Já que

$$|x_{n,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular, para todo $n_k^{n-1} \in \mathbb{N}_{n-1}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_n = \{n_1^n, n_2^n, \ldots, n_k^n, \ldots\} \subset \mathbb{N}_{n-1}$ tal que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} x_{n,n_k^n} = c_n^1,$$

logo, temos que $(x_{n,k})$, $n_k^n \in \mathbb{N}_n$ é convergente. Levando em consideração que

$$\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_{n-1} \subset \mathbb{N}_{n-2} \subset \ldots \subset \mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1,$$

temos que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} x_{i,n_k^n} = c_i^1,$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Por outro lado, a relação (10), implica que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} x_{i,n_k^i}^2 = (c_i^1)^2, \tag{20}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $n_k^n \in \mathbb{N}_n$.

Contudo, usando a relação (18), obtemos

$$f_1(x_{k,n_k^n}) = a_{11}x_{1,n_k^n}^2 + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{nn}x_{n,n_k^n}^2. \tag{21}$$

Com base na relação (19), deduzimos

$$|f_1(x_{k,n_k^n}) - b_1| < \frac{1}{n_k^n},$$

ou seja,

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_1(x_{k,n_k^n}) = b_1.$$

Ao tomarmos a relação (18) e substituindo x por c_1, obtemos que

$$f_1(c_1) = a_{11}(c_1^1)^2 + \ldots + a_{1n}c_1^1c_n^1 + \ldots + a_{1n}c_1^1c_n^1 + \ldots + a_{nn}(c_n^1)^2,$$

onde $c_1 = (c_1^1, c_2^1, c_3^1, \ldots, c_n^1)$. E utilizando **3.1.4** e **3.1.7**, podemos concluir que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_1(x_{k,n_k^n}) = f_1(c_1).$$

Daí, usando o **Teorema 3.1** (*Unicidade do limite*), temos que

$$f_1(c_1) = b_1.$$

E, considerando que

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1,$$

para $k \in \mathbb{N}_n$, usando a equação (20), temos que

$$\lim_{k\to\infty}(x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2) = (c_1^1)^2 + (c_2^1)^2 + \ldots + (c_n^1)^2 = 1.$$

O que implicará que

$$c_1 = (c_1^1, c_2^1, c_3^1, \ldots, c_n^1) \in \mathbb{S}^{n-1},$$

de modo que $f_1(c_1) = sup_{Y_1}$. A seguir, temos que $f_1(c_1) \geq f_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Seja $w_1 \in \mathbb{R}^n : \langle w_1, c_1\rangle = 0$ com $||w_1|| = 1$. Em seguida, considere $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\gamma_1(t) = \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_1(t), \gamma_1(t)\rangle &= \langle \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1, \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1\rangle \\
&= \langle \cos(t)c_1, \cos(t)c_1\rangle + \langle \cos(t)c_1, sen\,(t)w_1\rangle + \langle sen\,(t)w_1, \cos(t)c_1\rangle \\
&+ \langle sen\,(t)w_1, sen\,(t)w_1\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_1, c_1\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_1, w_1\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_1, w_1\rangle + sen^2(t)\langle w_1, w_1\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_1, c_1\rangle + 2\cos(t)sen\,(t)\langle c_1, w_1\rangle + sen^2(t)\langle w_1, w_1\rangle \\
&= \cos^2(t) + sen^2(t) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pois $\langle c_1, c_1\rangle = \langle w_1, w_1\rangle = 1$ e $\langle c_1, w_1\rangle = 0$. Logo,

$$\gamma_1(t) \subset \mathbb{S}^{n-1},\ \gamma_1(0) = c_1 \text{ e } \gamma_1'(0) = w_1.$$

Em particular,

$$f_1(c_1) \geq f_1(\gamma_1(t))\ \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

pois $\gamma_1(t) \subset \mathbb{S}^n$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Considere agora a função $g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ com $g_1(t) = f_1(\gamma_1(t))$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
g_1(t) = \langle A\gamma_1(t), \gamma_1(t)\rangle &= \langle A(\cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1), \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1\rangle \\
&= \langle A\cos(t)c_1 + Asen\,(t)w_1, \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1\rangle \\
&= \langle A\cos(t)c_1, \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1\rangle \\
&+ \langle Asen\,(t)w_1, \cos(t)c_1 + sen\,(t)w_1\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle A(c_1), c_1\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle A(c_1), w_1\rangle \\
&+ \cos(t)sen\,(t)\langle A(w_1), c_1\rangle + sen^2(t)\langle A(w_1), w_1\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle A(c_1), c_1\rangle + \frac{1}{2}sen\,(2t)(\langle A(c_1), w_1\rangle + \langle A(w_1), c_1\rangle) \\
&+ sen^2(t)\langle A(w_1), w_1\rangle.
\end{aligned}$$

Tomemos como base a simetria de A, assim, podemos escrever

$$\langle A(c_1), w_1\rangle = \langle c_1, A(w_1)\rangle = \langle A(w_1), c_1\rangle.$$

Isso nos permite concluir que

$$g_1(t) = f_1(\gamma_1(t)) = \cos^2(t)\langle A(c_1), c_1\rangle + sen(2t)\langle A(c_1), w_1\rangle + sen^2(t)sen\,t\langle A(w_1), w_1\rangle.$$

Em continuação, temos que a derivada de $g_1'(t)$ é

$$g_1'(t) = -2sen(t)cos(t)\langle A(c_1), c_1\rangle + 2\cos(2t)\langle A(c_1), w_1\rangle + 2sen(t)\cos(t)\langle A(w_1), w_1\rangle.$$

Como $g_1(0) = f_1(c_1)$ é ponto de máximo, temos que $g_1'(0) = 0$. Mas,

$$g_1'(0) = 2\langle A(c_1), w_1\rangle,$$

ou seja,

$$\langle A(c_1), w_1\rangle = 0, \tag{22}$$

para todo $w_1 \perp c_1$.

Vamos considerar $\beta_1 = \{c_1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, \ldots, w_{n-1}^1\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $w_i^1 \in c_1^\perp$ e com base na relação (22) segue

$$A(c_1) = \langle A(c_1), c_1\rangle c_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\langle A(c_1), w_i^1\rangle w_i^1 = f_1(c_1)c_1.$$

Portanto, obtemos a identidade

$$A(c_1) = \lambda_1 c_1, \tag{23}$$

com $\lambda_1 = f_1(c_1) = max f_1(x), x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Agora, consideremos

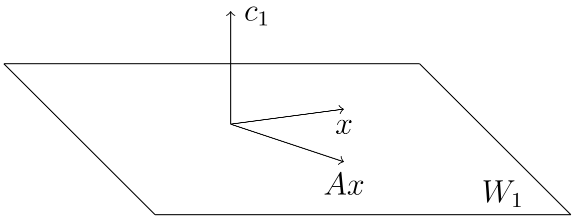
$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c_1\rangle = 0\}.$$

Logo, para $x \in W_1$ temos que

$$\langle A(x), c_1\rangle = \langle x, A(c_1)\rangle = \langle x, \lambda_1 c_1\rangle = \lambda_1\langle x, c_1\rangle = 0.$$

Assim, decorre que $A(x) \in W_1$, já que $x \perp c_1$.

Figura 5 – Subespaço vetorial W_1



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso nos permite definir um operador simétrico $A_{W_1} : W_1 \to W_1$, que é a restrição de A ao subespaço vetorial W_1, ou seja, $A_{W_1}(x) = A(x)$, para todo $x \in W_1$. Agora, consideremos $\mathbb{S}^{n-2} = \{x \in \mathbb{R}^n \cap W_1 : ||x||^2 = 1\}$ e $f_2 : \mathbb{S}^{n-2} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_2(x) = \langle A_{W_1}x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle. \tag{24}$$

Portanto, usando as relações contidas em (14), obtemos

$$\begin{aligned} f_2(x) = \langle Ax, x\rangle &= \langle(\langle A_1, x\rangle, \ldots, \langle A_n, x\rangle), (x_1, \ldots, x_n)\rangle \\ &= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_2(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2. \quad (25)$$

Aplicando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* temos

$$|f_2(x)| = |\langle Ax, x\rangle| \leq ||Ax||||x|| \leq ||A||,$$

pois $||x|| = 1$ e $||Ax|| \leq ||A||$ por (16).

Daí, concluímos que o subconjunto $Y_2 = \{f_2(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{S}^{n-2}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Portanto, possui supremo. Se $b_2 = sup_{Y_2}$. Sabemos que dado $k \in \mathbb{N}$, temos que $b_2 - \dfrac{1}{k}$ não é cota superior de Y_2, logo existe $f_2(x_k) \in Y_2$, $x_k \in \mathbb{S}^{n-2}$ tal que

$$b_2 - \frac{1}{k} \leq f_2(x_k) < b_2,$$

isto é,

$$|f_2(x_k) - b_2| < \frac{1}{k}. \quad (26)$$

Observando que $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, \ldots, x_{n,k})$ satisfaz a relação

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, cada coordenada $x_{i,k}$ satisfaz $|x_{i,k}| \leq 1$. Sendo $|x_{1,k}| \leq 1$ podemos usar o **Teorema 6.1** para garantir que a sequência $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Com isso, temos que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1^{W_1} = \{n_1^1, n_2^1, \ldots, n_k^1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ de modo que

$$\lim_{n_k^1 \to \infty} x_{1,n_k^1} = c_1^2,$$

sendo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1^{W_1}$.

Agora restrinjamos $x_{2,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_1^{W_1}$, isto é, $x_{2,k} : \mathbb{N}_1^{W_1} \to \mathbb{R}$, já que,

$$|x_{2,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1^{W_1}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2^{W_1} = \{n_1^2, n_2^2, \ldots, n_k^2, \ldots\} \subset \mathbb{N}_1^{W_1}$ tal que

$$\lim_{n_k^2 \to \infty} x_{2,n_k^2} = c_2^2,$$

logo, temos que (x_{2,n_k^2}) com $n_k^2 \in \mathbb{N}_2^{W_1}$ é convergente.

Usando o mesmo argumento anterior, restrigimos $x_{3,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_2^{W_1}$, ou seja, $x_{3,k} : \mathbb{N}_2^{W_1} \to \mathbb{R}$. Como

$$|x_{3,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^2 \in \mathbb{N}_2^{W_1}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_3^{W_1} = \{n_1^3, n_2^3, \ldots, n_k^3, \ldots\} \subset \mathbb{N}_2^{W_1}$ tal que

$$\lim_{n_k^3 \to \infty} x_{3,n_k^3} = c_3^2,$$

logo, temos que $(x_{3,k})$ com $n_k^3 \in \mathbb{N}_3^{W_1}$ é convergente.

Com isso, realizando-se o processo repetidamente conseguiremos chegar ao $x_{n,k}$. Daí, restrigimos $x_{n,k}$ ao subconjunto infinito $\mathbb{N}_{n-1}^{W_1} = \{n_1^{n-1}, n_2^{n-1}, \ldots, n_k^{n-1}, \ldots\}$, ou melhor, $x_{n,k} : \mathbb{N}_{n-1}^{W_1} \to \mathbb{R}$. Já que,

$$|x_{n,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^{n-1} \in \mathbb{N}_{n-1}^{W_1}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_n^{W_1} = \{n_1^n, n_2^n, \ldots, n_k^n, \ldots\} \subset \mathbb{N}_{n-1}^{W_1}$ tal que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} x_{n,n_k^n} = c_n^2,$$

logo, temos que $(x_{n,k})$, $n_k^n \in \mathbb{N}_n^{W_1}$ é convergente.

Portanto, temos que

$$\mathbb{N}_n^{W_1} \subset \mathbb{N}_{n-1}^{W_1} \subset \mathbb{N}_{n-2}^{W_1} \subset \ldots \subset \mathbb{N}_3^{W_1} \subset \mathbb{N}_2^{W_1} \subset \mathbb{N}_1^{W_1}.$$

Por outro lado, a relação (10), implica que

$$\lim_{n_k^i \to \infty} x_{i,n_k^i}^2 = (c_i^2)^2, \tag{27}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $n_k^i \in \mathbb{N}^{W_1}$.

Agora, usando a relação (25), temos que

$$f_2(x_{k,n_k^n}) = a_{11}x_{1,n_k^n}^2 + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{nn}x_{n,n_k^n}^2. \tag{28}$$

Com base, na relação (26), obtemos que

$$|f_2(x_{k,n_k^n}) - b_2| < \frac{1}{n_k^n},$$

ou seja,

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_2(x_{k,n_k^n}) = b_2.$$

Agora, tomemos a relação (25) e calculemos $f_2(c_2)$, com $c_2 = (c_1^2, c_2^2, c_3^2, \ldots, c_n^2)$. Logo, obtemos que

$$f_2(c_2) = a_{11}(c_1^2)^2 + \ldots + a_{1n}c_1^2c_n^2 + \ldots + a_{1n}c_1^2c_n^2 + \ldots + a_{nn}(c_n^2)^2.$$

E utilizando **3.1.4** e **3.1.7**, podemos concluir que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_2(x_{k,n_k^n}) = f_2(c_2).$$

Daí, usando o **Teorema 3.1** (*Unicidade do limite*), temos que

$$f_2(c_2) = b_2.$$

Agora, consideremos que

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1,$$

para $k \in \mathbb{N}_n^{W_1}$, usando a equação (27), temos que

$$\lim_{k\to\infty}(x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2) = (c_1^2)^2 + (c_2^2)^2 + \ldots + (c_n^2)^2 = 1.$$

O que implicará que

$$c_2 = (c_1^2, c_2^2, c_3^2, \ldots, c_n^2) \in \mathbb{S}^{n-2},$$

de modo que $f_2(c) = sup_{Y_2}$. Daí, temos que $f_2(c_2) \geq f_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-2}$.

Seja $w_2 \in \mathbb{R}^n : \langle w_2, c_2\rangle = \langle w_2, c_1\rangle = 0$ com $||w_2|| = 1$. Assim, temos que $\gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\gamma_2(t) = \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_2(t), \gamma_2(t)\rangle &= \langle \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2, \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2\rangle \\
&= \langle \cos(t)c_2, \cos(t)c_2\rangle + \langle \cos(t)c_2, sen\,(t)w_2\rangle + \langle sen\,(t)w_2, \cos(t)c_2\rangle \\
&+ \langle sen\,(t)w_2, sen\,(t)w_2\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_2, c_2\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_2, w_2\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_2, w_2\rangle + sen^2(t)\langle w_2, w_2\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_2, c_2\rangle + 2\cos(t)sen\,(t)\langle c_2, w_2\rangle + sen^2(t)\langle w_2, w_2\rangle \\
&= \cos^2(t) + sen^2(t) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pois $\langle c_2, c_2\rangle = \langle w_2, w_2\rangle = 1$ e $\langle c_2, w_2\rangle = 0$.

Logo,

$$\gamma_2(t) \subset \mathbb{S}^{n-2},\ \gamma_2(0) = c_2 \text{ e } \gamma_2'(0) = w_2.$$

Em particular,

$$f_2(c_2) \geq f_2(\gamma_2(t))\ \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

pois $\gamma_2(t) \subset \mathbb{S}^n$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Considere agora a função $g_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ com $g_2(t) = f_2(\gamma_2(t))$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
g_2(t) = \langle A\gamma_2(t), \gamma_2(t)\rangle &= \langle A(\cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2), \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2\rangle \\
&= \langle A\cos(t)c_2 + Asen\,(t)w_2, \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2\rangle \\
&= \langle A\cos(t)c_2, \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2\rangle \\
&+ \langle Asen\,(t)w_2, \cos(t)c_2 + sen\,(t)w_2\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle A(c_2), c_2\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle A(c_2), w_2\rangle \\
&+ \cos(t)sen\,(t)\langle A(w_2), c_2\rangle + sen^2(t)\langle A(w_2), w_2\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle A(c_2), c_2\rangle + \frac{1}{2}sen\,(2t)(\langle A(c_2), w_2\rangle + \langle A(w_2), c_2\rangle) \\
&+ sen^2(t)\langle A(w_2), w_2\rangle.
\end{aligned}$$

E tomemos como base, a simetria de A, assim, podemos escrever o seguinte:

$$\langle A(c_2), w_2\rangle = \langle c_2, A(w_2)\rangle = \langle A(w_2), c_2\rangle.$$

Isso nos permite concluir que

$g_2(t) = f_2(\gamma_2(t)) = \cos^2(t)\langle A(c_2), c_2\rangle + sen(2t)\langle A(c_2), w_2\rangle + sen^2(t)sen\, t\langle A(w_2), w_2\rangle.$

Daí, temos que a derivada de $g_2'(t)$ é

$g_2'(t) = -2sen(t)cos(t)\langle A(c_2), c_2\rangle + 2\cos(2t)\langle A(c_2), w_2\rangle + 2sen(t)\cos(t)\langle A(w_2), w_2\rangle.$

Como $g_2(0) = f_2(c_2)$ é ponto de máximo, logo, temos que $g_2'(0) = 0$. Mas,

$$g_2'(0) = 2\langle A(c_2), w_2\rangle,$$

ou seja,

$$\langle A(c_2), w_2\rangle = 0, \tag{29}$$

para todo $w_2 \perp c_2$.

Agora, consideremos $\beta_2 = \{c_2, w_1^2, w_2^2, w_3^2, \ldots, w_{n-2}^2\}$ uma base ortonormal de W_1, $w_i^2 \in c_2$ e com base na relação anterior (29) segue o seguinte:

$$A(c_2) = \langle A(c_2), c_2\rangle c_2 + \sum_{i=1}^{n-2}\langle A(c_2), w_i^2\rangle w_i^2 = f_2(c_2)c_2.$$

Daí, obtemos a identidade

$$A(c_2) = \lambda_2 c_2, \tag{30}$$

com $\lambda_2 = f_2(c_2) = max f_2(x)\,:\, x \in \mathbb{S}^{n-2}$.

Agora, consideremos

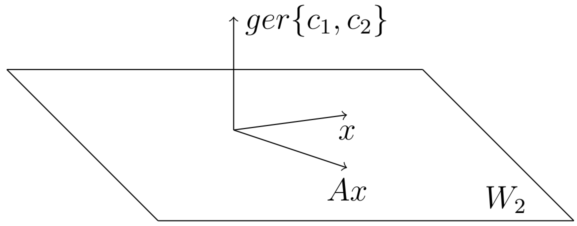
$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c_1\rangle = \langle x, c_2\rangle = 0\}.$$

Logo, para $x \in W_2$ temos que

$$\langle A(x), c_i\rangle = \langle x, A(c_i)\rangle = \langle x, \lambda_i c_i\rangle = \lambda_i\langle x, c_i\rangle = 0,\ i = 1, 2.$$

Assim, decorre que $A(x) \in W_2$, já que $A(x) \perp ger\{c_1, c_2\}$.

Figura 6 – Subespaço vetorial W_2



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso nos permite definir um operador simétrico $A_{W_2} : W_2 \to W_2$, que é a restrição de A ao subespaço vetorial W_2, ou seja, $A_{W_2}(x) = A(x)$.

Agora, consideremos $\mathbb{S}^{n-3} = \{x \in \mathbb{R}^n \cap W_2 \,:\, ||x||^2 = 1\}$ e $f_3 : \mathbb{S}^{n-3} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_3(x) = \langle A_{W_2}x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle. \tag{31}$$

Agora, usando as relações contidas em (14), obtemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) = \langle A_{W_3}x, x\rangle &= \langle(\langle A_1, x\rangle, \ldots, \langle A_n, x\rangle), (x_1, \ldots, x_n)\rangle \\ &= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_3(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2. \tag{32}$$

Aplicando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* temos

$$|f_3(x)| = |\langle Ax, x\rangle| \leq ||Ax||||x|| \leq ||A||,$$

pois $||Ax|| \leq ||A||$ por (16) e $||x|| = 1$.

Daí, concluímos que o subconjunto $Y_3 = \{f_3(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{S}^{n-3}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Portanto, possui supremo. Se $b_3 = sup_{Y_3}$. Sabemos que dado $k \in \mathbb{N}$, temos que $b_3 - \dfrac{1}{k}$ não é cota superior de Y_3, logo existe $f_3(x_k) \in Y$, $x_k \in \mathbb{S}^{n-3}$ tal que

$$b_3 - \frac{1}{k} \leq f_3(x_k) < b_3,$$

isto é,

$$|f_3(x_k) - b_3| < \frac{1}{k}. \tag{33}$$

Observando que $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, \ldots, x_{n,k})$ satisfaz a relação

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, cada coordenada $x_{i,k}$ satisfaz $|x_{i,k}| \leq 1$. Sendo $|x_{1,k}| \leq 1$ podemos usar o **Teorema 6.1** para garantir que a sequência $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Com isso, temos que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1^{W_2} = \{n_1^1, n_2^1, \ldots, n_k^1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ de modo que

$$\lim_{n_k^1 \to \infty} x_{1,n_k^1} = c_1^3,$$

sendo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1^{W_2}$.

Agora restrinjamos $x_{2,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_1^{W_2}$, isto é, $x_{2,k} : \mathbb{N}_1^{W_2} \to \mathbb{R}$, já que,

$$|x_{2,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1^{W_2}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2^{W_2} = \{n_1^2, n_2^2, \ldots, n_k^2, \ldots\} \subset \mathbb{N}_1^{W_2}$ tal que

$$\lim_{n_k^2 \to \infty} x_{2,n_k^2} = c_2^3,$$

logo, temos que (x_{2,n_k^2}) com $n_k^2 \in \mathbb{N}_2^{W_2}$ é convergente.

Usando o mesmo argumento anterior, restrigimos $x_{3,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_2^{W_2}$, ou seja, $x_{3,k} : \mathbb{N}_2^{W_2} \to \mathbb{R}$. Como

$$|x_{3,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^2 \in \mathbb{N}_2^{W_2}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_3^{W_2} = \{n_1^3, n_2^3, \ldots, n_k^3, \ldots\} \subset \mathbb{N}_2^{W_2}$ tal que

$$\lim_{n_k^3\to\infty} x_{3,n_k^3} = c_3^3,$$

logo, temos que $(x_{3,k})$ com $n_k^3 \in \mathbb{N}_3^{W_2}$ é convergente.

Com isso, realizando-se o processo repetidamente conseguiremos chegar ao $x_{n,k}$. Daí, restrigimos $x_{n,k}$ ao subconjunto infinito $\mathbb{N}_{n-1}^{W_2} = \{n_1^{n-1}, n_2^{n-1}, \ldots, n_k^{n-1}, \ldots\}$, ou melhor, $x_{n,k} : \mathbb{N}_{n-1}^{W_2} \to \mathbb{R}$. Já que,

$$|x_{n,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^{n-1} \in \mathbb{N}_{n-1}^{W_2}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_n^{W_2} = \{n_1^n, n_2^n, \ldots, n_k^n, \ldots\} \subset \mathbb{N}_{n-1}^{W_2}$ tal que

$$\lim_{n_k^n\to\infty} x_{n,n_k^n} = c_n^3,$$

logo, temos que $(x_{n,k})$, $n_k^n \in \mathbb{N}_n^{W_2}$ é convergente.

Portanto, temos que

$$\mathbb{N}_n^{W_2} \subset \mathbb{N}_{n-1}^{W_2} \subset \mathbb{N}_{n-2}^{W_2} \subset \ldots \subset \mathbb{N}_3^{W_2} \subset \mathbb{N}_2^{W_2} \subset \mathbb{N}_1^{W_2}. \tag{34}$$

Por outro lado, a relação (10), implica que

$$\lim_{n_k^i\to\infty} x_{i,n_k^i}^2 = (c_i^3)^2, \tag{35}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $n_k^i \in \mathbb{N}$. Além disso, a equação (34) também implica que

$$\lim_{n_k^n\to\infty} x_{i,n_k^n}^2 = (c_i)^2 \tag{36}$$

Agora, usando a relação (32), temos que

$$f_3(x_{k,n_k^n}) = a_{11}x_{1,n_k^n}^2 + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{nn}x_{n,n_k^n}^2. \tag{37}$$

Com base, na relação (33), obtemos que

$$|f_3(x_{k,n_k^n}) - b_3| < \frac{1}{n_k^n}.$$

Mas,

$$\lim_{n_k^n\to\infty} f_3(x_{k,n_k^n}) = b_3.$$

Agora, tomemos a relação (32) e façamos $f_3(c_3)$, onde $c_3 = (c_1^3, c_2^3, c_3^3, \ldots, c_{n-1}^3, c_n^3)$. Logo, obtemos que

$$f_3(c_3) = a_{11}(c_1^3)^2 + \ldots + a_{1n}c_1^3c_n^3 + \ldots + a_{1n}c_1^3c_n^3 + \ldots + a_{nn}(c_n^3)^2.$$

E utilizando **3.1.4** e **3.1.7**, podemos concluir que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_3(x_{k,n_k^n}) = f_3(c_3).$$

Daí, usando o **Teorema 3.1** (*Unicidade do limite*), temos que

$$f_3(c_3) = b_3.$$

Agora, consideremos que

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1,$$

para $k \in \mathbb{N}_n$, usando a equação (35), temos que

$$\lim_{k \to \infty} (x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2) = (c_1^3)^2 + (c_2^3)^2 + \ldots + (c_n^3)^2 = 1.$$

O que implicará que

$$c_3 = (c_1^3, c_2^3, c_3^3, \ldots, c_n^3) \in \mathbb{S}^{n-3},$$

de modo que $f_3(c_3) = sup_{Y_3}$. Daí, temos que $f_3(c_3) \geq f_3(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-3}$.

Seja $w_3 \in \mathbb{R}^n$: $\langle w_3, c_3 \rangle = \langle w_3, c_2 \rangle = \langle w_3, c_1 \rangle = 0$, com $||w_3|| = 1$. Agora, considere $\gamma_3 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\gamma_3(t) = \cos(t)c_3 + sen\,(t)w_3.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_3(t), \gamma_3(t) \rangle &= \langle \cos(t)c_3 + sen\,(t)w_3, \cos(t)c_3 + sen\,(t)w_3 \rangle \\
&= \langle \cos(t)c_3, \cos(t)c_3 \rangle + \langle \cos(t)c_3, sen\,(t)w_3 \rangle + \langle sen\,(t)w_3, \cos(t)c_3 \rangle \\
&+ \langle sen\,(t)w_3, sen\,(t)w_3 \rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_3, c_3 \rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_3, w_3 \rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_3, w_3 \rangle + sen^2(t)\langle w_3, w_3 \rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_3, c_3 \rangle + 2\cos(t)sen\,(t)\langle c_3, w_3 \rangle + sen^2(t)\langle w_3, w_3 \rangle \\
&= \cos^2(t) + sen^2(t) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pois $\langle c_3, c_3 \rangle = \langle w_3, w_3 \rangle = 1$ e $\langle c_3, w_3 \rangle = 0$.

Logo,

$$\gamma_3(t) \subset \mathbb{S}^{n-3},\ \gamma_3(0) = c_3 \text{ e } \gamma_3'(0) = w_3.$$

Em particular,

$$f_3(c_3) \geq f_3(\gamma_3(t))\ \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

pois $\gamma_3(t) \subset \mathbb{S}^n$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Considere agora a função $g_3 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ com $g_3(t) = f_3(\gamma_3(t))$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} g_3(t) = \langle A\gamma_3(t), \gamma_3(t)\rangle &= \langle A(\cos{(t)}c_3 + sen\,(t)w_3), \cos{(t)}c_3 + sen\,(t)w_3\rangle \\ &= \langle A\cos{(t)}c_3 + Asen\,(t)w_3, \cos{(t)}c_3 + sen\,(t)w_3\rangle \\ &= \langle A\cos{(t)}c_3, \cos{(t)}c_3 + sen\,(t)w_3\rangle \\ &+ \langle Asen\,(t)w_3, \cos{(t)}c_3 + sen\,(t)w_3\rangle \\ &= \cos^2{(t)}\langle A(c_3), c_3\rangle + \cos{(t)}sen\,(t)\langle A(c_3), w_3\rangle \\ &+ \cos(t)sen\,(t)\langle A(w_3), c_3\rangle + sen^2\,(t)\langle A(w_3), w_3\rangle \\ &= \cos^2(t)\langle A(c_3), c_3\rangle + \frac{1}{2}sen\,(2t)(\langle A(c_3), w_3\rangle + \langle A(w_3), c_3\rangle) \\ &+ sen^2(t)\langle A(w_3), w_3\rangle. \end{aligned}$$

E tomemos como base, a simetria de A, assim, podemos escrever o seguinte:

$$\langle A(c_3), w_3\rangle = \langle c_3, A(w_3)\rangle = \langle A(w_3), c_3\rangle.$$

Isso nos permite concluir que

$$g_3(t) = f_3(\gamma_3(t)) = \cos^2(t)\langle A(c_3), c_3\rangle + sen(2t)\langle A(c_3), w_3\rangle + sen^2(t)sen\,t\langle A(w_3), w_3\rangle.$$

Daí, temos que a derivada de $g_3'(t)$ é

$$g_3'(t) = -2sen(t)cos(t)\langle A(c_3), c_3\rangle + 2\cos(2t)\langle A(c_3), w_3\rangle + 2sen(t)\cos(t)\langle A(w_3), w_3\rangle.$$

Como $g_3(0) = f_3(c_3)$ é ponto de máximo, logo, temos que $g_3'(0) = 0$. Mas,

$$g_3'(0) = 2\langle A(c_3), w_3\rangle,$$

ou seja,

$$\langle A(c_3), w_3\rangle = 0, \tag{38}$$

para todo $w_3 \perp c_3$.

Agora, consideremos $\beta_3 = \{c_3, w_1^3, w_2^3, w_3^3, \ldots, w_{n-3}^3\}$ uma base ortonormal de W_2, $w_i^3 \in c_3$ e com base na relação anterior (38) segue o seguinte:

$$A(c_3) = \langle A(c_3), c_3\rangle c_3 + \sum_{i=1}^{n-3}\langle A(c_3), w_i^3\rangle w_i^3 = f_3(c_3)c_3.$$

Daí, obtemos a identidade

$$A(c_3) = \lambda_3 c_3, \tag{39}$$

com $\lambda_3 = f_3(c_3)$.

Agora, consideremos

$$W_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c_1\rangle = \langle x, c_2\rangle = \langle x, c_3\rangle = 0\}.$$

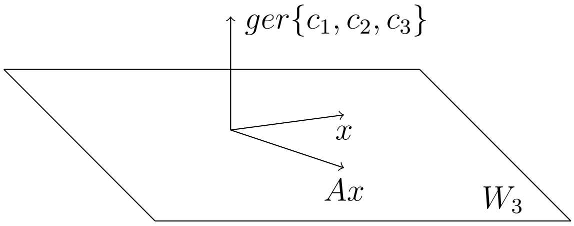
Logo, para $x \in W_3$ temos que

$$\langle A(x), c_i\rangle = \langle x, A(c_i)\rangle = \langle x, \lambda_3 c_i\rangle = \lambda_3\langle x, c_i\rangle = 0, \text{ com } i = 1, 2, 3.$$

Assim, decorre que $A(x) \in W_3$, já que $A(x) \perp c_3$.

Isso nos permite definir um operador simétrico $A_{W_3} : W_3 \to W_3$, que é a restrição de A ao subespaço vetorial W_3, ou seja, $A_{W_3}(x) = A(x)$. Pelos mesmos argumentos

Figura 7 – Subespaço vetorial W_3



Fonte: elaborada pelo autor.

anterior, existe

$$c_4 \in W_3 \, : \, Ac_4 = \lambda_4 \cdot c_4.$$

E assim, podemos facilmente ver que o processo é repetitivo. Logo, consideremos $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \cap W_{n-1} \, : \, ||x||^2 = 1\}$, onde $W_{n-1} = ger\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}\}$ e $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_n(x) = \langle A_{W_{n-1}} x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle. \tag{40}$$

Agora, usando as relações contidas em (14), obtemos:

$$\begin{aligned} f_n(x) = \langle Ax, x \rangle &= \langle ((\langle A_1, x \rangle, \ldots, \langle A_n, x \rangle), (x_1, \ldots, x_n) \rangle \\ &= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_n(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2. \tag{41}$$

Aplicando a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* temos

$$|f_n(x)| = |\langle Ax, x \rangle| \leq ||Ax||||x|| \leq ||A||,$$

pois $||Ax|| \leq ||A||$ por (16) e $||x|| = 1$.

Daí, concluímos que o subconjunto $Y_n = \{f_n(x) \in \mathbb{R} \, : \, x \in \mathbb{S}^1\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Portanto, possui supremo. Se $b_n = sup_{Y_n}$. Sabemos que dado $k \in \mathbb{N}$, temos que $b_n - \dfrac{1}{k}$ não é cota superior de Y_n, logo existe $f_n(x_k) \in Y$, $x_k \in \mathbb{S}^1$ tal que

$$b_n - \frac{1}{k} \leq f_n(x_k) < b_n,$$

isto é,

$$|f_n(x_k) - b_n| < \frac{1}{k}. \tag{42}$$

Observando que $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, \ldots, x_{n,k})$ satisfaz a relação

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, cada coordenada $x_{i,k}$ satisfaz $|x_{i,k}| \leq 1$. Sendo $|x_{1,k}| \leq 1$ podemos usar o **Teorema 6.1** para garantir que a sequência $(x_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Com isso, temos que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1^{W_{n-1}} = \{n_1^1, n_2^1, \ldots, n_k^1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ de modo que

$$\lim_{n_k^1 \to \infty} x_{1,n_k^1} = c_1^{n-1},$$

sendo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1^{W_{n-1}}$.

Agora restrinjamos $x_{2,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_1^{W_{n-1}}$, isto é, $x_{2,k} : \mathbb{N}_1^{W_{n-1}} \to \mathbb{R}$, já que,

$$|x_{2,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^1 \in \mathbb{N}_1^{W_{n-1}}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2^{W_{n-1}} = \{n_1^2, n_2^2, \ldots, n_k^2, \ldots\} \subset \mathbb{N}_1^{W_{n-1}}$ tal que

$$\lim_{n_k^2 \to \infty} x_{2,n_k^2} = c_2^n,$$

logo, temos que (x_{2,n_k^2}) com $n_k^2 \in \mathbb{N}_2^{W_{n-1}}$ é convergente.

Usando o mesmo argumento anterior, restrigimos $x_{3,k}$ ao subconjunto $\mathbb{N}_2^{W_{n-1}}$, ou seja, $x_{3,k} : \mathbb{N}_2^{W_{n-1}} \to \mathbb{R}$. Como

$$|x_{3,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^2 \in \mathbb{N}_2^{W_{n-1}}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_3^{W_{n-1}} = \{n_1^3, n_2^3, \ldots, n_k^3, \ldots\} \subset \mathbb{N}_2^{W_{n-1}}$ tal que

$$\lim_{n_k^3 \to \infty} x_{3,n_k^3} = c_3^n,$$

logo, temos que $(x_{3,k})$ com $n_k^3 \in \mathbb{N}_3^{W_{n-1}}$ é convergente.

Com isso, realizando-se o processo repetidamente conseguiremos chegar ao $x_{n,k}$. Daí, restrigimos $x_{n,k}$ ao subconjunto infinito $\mathbb{N}_{n-1}^{W_{n-1}} = \{n_1^{n-1}, n_2^{n-1}, \ldots, n_k^{n-1}, \ldots\}$, ou melhor, $x_{n,k} : \mathbb{N}_{n-1}^{W_{n-1}} \to \mathbb{R}$. Já que,

$$|x_{n,k}| \leq 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N},$$

em particular para todo $n_k^{n-1} \in \mathbb{N}_{n-1}^{W_{n-1}}$. Pelo **Teorema 6.1**, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_n^{W_{n-1}} = \{n_1^n, n_2^n, \ldots, n_k^n, \ldots\} \subset \mathbb{N}_{n-1}^{W_{n-1}}$ tal que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} x_{n,n_k^n} = c_n^n,$$

logo, temos que $(x_{n,k})$, $n_k^n \in \mathbb{N}_n^{W_{n-1}}$ é convergente.

Portanto, temos que

$$\mathbb{N}_n^{W_{n-1}} \subset \mathbb{N}_{n-1}^{W_{n-1}} \subset \mathbb{N}_{n-2}^{W_{n-1}} \subset \ldots \subset \mathbb{N}_3^{W_{n-1}} \subset \mathbb{N}_2^{W_{n-1}} \subset \mathbb{N}_1^{W_{n-1}}.$$

Por outro lado, a relação (10), implica que

$$\lim_{n_k^i \to \infty} x_{i,n_k^i}^2 = (c_i^n)^2, \tag{43}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $n_k^i \in \mathbb{N}$.

Agora, usando a relação (41), temos que

$$f_n(x_{k,n_k^n}) = a_{11}x_{1,n_k^n}^2 + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{1n}x_{1,n_k^n}x_{n,n_k^n} + \ldots + a_{nn}x_{n,n_k^n}^2. \tag{44}$$

Com base, na relação (42), obtemos que

$$|f_n(x_{k,n_k^n}) - b_n| < \frac{1}{n_k^n}.$$

Mas,

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_n(x_{k,n_k^n}) = b_n.$$

Agora, tomemos a relação (41) e façamos $f_n(c_n)$. Logo, obtemos que

$$f_n(c_n) = a_{11}(c_1^n)^2 + \ldots + a_{1n}(c_1^n)(c_n^n) + \ldots + a_{1n}(c_1^n)(c_n^n) + \ldots + a_{nn}(c_n^n)^2.$$

E utilizando **3.1.4** e **3.1.7**, podemos concluir que

$$\lim_{n_k^n \to \infty} f_n(x_{k,n_k^n}) = f_n(c_n).$$

Daí, usando o **Teorema 3.1** (*Unicidade do limite*), temos que

$$f_n(c_n) = b_n.$$

Agora, consideremos que

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2 = 1,$$

para $k \in \mathbb{N}_n^{W_{n-1}}$, usando a equação (43), temos que

$$\lim_{k \to \infty}(x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + \ldots + x_{n,k}^2) = (c_1^n)^2 + (c_2^n)^2 + \ldots + (c_n^n)^2 = 1.$$

O que implicará que

$$c_n = (c_1^n, c_2^n, c_3^n, \ldots, c_n^n) \in \mathbb{S}^1,$$

de modo que $f_n(c_n) = sup_{Y_n}$. Daí, temos que $f_n(c_n) \geq f_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Seja $w_i \in \mathbb{R}^n : \langle w_i, c_i \rangle = 0,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$ com $||w_n|| = 1$. Agora, seja $\gamma_n : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\gamma_n(t) = \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_n(t), \gamma_n(t) \rangle &= \langle \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n, \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n \rangle \\
&= \langle \cos(t)c_n, \cos(t)c_n \rangle + \langle \cos(t)c_n, sen\,(t)w_n \rangle + \langle sen\,(t)w_n, \cos(t)c_n \rangle \\
&+ \langle sen\,(t)w_n, sen\,(t)w_n \rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_n, c_n \rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_n, w_n \rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle c_n, w_n \rangle + sen^2(t)\langle w_n, w_n \rangle \\
&= \cos^2(t)\langle c_n, c_n \rangle + 2\cos(t)sen\,(t)\langle c_n, w_n \rangle + sen^2(t)\langle w_n, w_n \rangle \\
&= \cos^2(t) + sen^2(t) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pois $\langle c_n, c_n\rangle = \langle w_n, w_n\rangle = 1$ e $\langle c_n, w_n\rangle = 0$.

Logo,

$$\gamma_n(t) \subset \mathbb{S}^1,\ \gamma_n(0) = c_n \text{ e } \gamma_n'(0) = w_n.$$

Em particular,

$$f_n(c_n) \geq f_n(\gamma_n(t))\ \forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

pois $\gamma_n(t) \subset \mathbb{S}^n$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Considere agora a função $g_n : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ com $g_n(t) = f_n(\gamma_n(t))$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
g_n(t) = \langle A\gamma_n(t), \gamma_n(t)\rangle &= \langle A(\cos(t)c_n + sen\,(t)w_n), \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n\rangle \\
&= \langle A\cos(t)c_n + Asen\,(t)w_n, \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n\rangle \\
&= \langle A\cos(t)c_n, \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n\rangle \\
&+ \langle Asen\,(t)w_n, \cos(t)c_n + sen\,(t)w_n\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle A(c_n), c_n\rangle + \cos(t)sen\,(t)\langle A(c_n), w_n\rangle \\
&+ \cos(t)sen\,(t)\langle A(w_n), c_n\rangle + sen^2\,(t)\langle A(w_n), w_n\rangle \\
&= \cos^2(t)\langle A(c_n), c_n\rangle + \frac{1}{2}sen\,(2t)(\langle A(c_n), w_n\rangle + \langle A(w_n), c_n\rangle) \\
&+ sen^2(t)\langle A(w_n), w_n\rangle.
\end{aligned}$$

E tomemos como base, a simetria de A, assim, podemos escrever o seguinte:

$$\langle A(c_n), w_n\rangle = \langle c_n, A(w_n)\rangle = \langle A(w_n), c_n\rangle.$$

Isso nos permite concluir que

$$g_n(t) = f_n(\gamma_n(t)) = \cos^2(t)\langle A(c_n), c_n\rangle + sen(2t)\langle A(c_n), w_n\rangle + sen^2(t)sen\,t\langle A(w_n), w_n\rangle.$$

Daí, temos que a derivada de $g_n'(t)$ é

$$g_n'(t) = -2sen(t)cos(t)\langle A(c_n), c_n\rangle + 2\cos(2t)\langle A(c_n), w_n\rangle + 2sen(t)\cos(t)\langle A(w_n), w_n\rangle.$$

Como $g_n(0) = f_n(c_n)$ é ponto de máximo, logo, temos que $g_n'(0) = 0$. Mas,

$$g_n'(0) = 2\langle A(c_n), w_n\rangle,$$

ou seja,

$$\langle A(c_n), w_n\rangle = 0, \tag{45}$$

para todo $w_n \perp c_n$.

Daí, temos que a matriz de A com relação à base $\alpha = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$ é dada por

$$[A]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

isto é,

$$[A]_\alpha^\alpha = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n).$$

□

Portanto, podemos escrever o seguinte teorema:

Teorema 7.1 *Seja* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *uma matriz simétrica com entradas reais. Então, existe uma base ortonormal* $\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ *do* $\mathbb{R}^n$ *tal que a matriz de* A *será dada por*

$$[A]_\alpha^\alpha = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n).$$

Observação 7.1 *Como já sabemos que* $f_1 : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *e que a esfera é dada por*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Vamos considerar um elipsóide e suponhamos que os resultados permanecem válidos. De fato, $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, $x \in \mathbb{E}^{n-1}$ *e considere a função* $f_1 : \mathbb{E}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathbb{E}^{n-1} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, com\ a_i \in \mathbb{R}\ e\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Agora, vamos tomar uma subsequência $(x_k) \in \mathbb{E}^{n-1}$, *com*

$$x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \Leftrightarrow \frac{x_{1,k}^2}{(a_1)^2} + \frac{x_{2,k}^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{x_{n,k}^2}{(a_n)^2} = 1.$$

Daí, temos que

$$\left|\frac{x_{i,k}}{a_i}\right|^2 \leq 1 \Rightarrow |x_{i,k}| \leq |a_i| \Rightarrow |x_{i,k}|\ \text{é limitada.}$$

Portanto, ao substituirmos $(x_{i,k})$ *por* c_i^1 *com* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, *temos que*

$$\frac{(c_1^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(c_2^1)^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{(c_n^1)^2}{(a_n)^2} = 1,$$

e como $c_1 = (c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1)$, *implica que* $c_1 \in \mathbb{E}^{n-1}$.

Já para o caso em que $f_2 : \mathbb{E}^{n-2} \to \mathbb{R}$ *e que a esfera é dada por*

$$\mathbb{E}^{n-2} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}.$$

Logo, para um elipsóide, a função $f_2 : \mathbb{E}^{n-2} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_2(x) = \langle Ax, x\rangle$, $x \in \mathbb{E}^{n-2}$ *e*

$$\mathbb{E}^{n-2} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, com\ a_i \in \mathbb{R}\ e\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Agora, vamos tomar uma subsequência $(x_k) \in \mathbb{E}^{n-2}$, *com*

$$x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \Leftrightarrow \frac{x_{1,k}^2}{(a_1)^2} + \frac{x_{2,k}^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{x_{n,k}^2}{(a_n)^2} = 1.$$

Daí, temos que
$$\left|\frac{x_{i,k}}{a_i}\right|^2 \leq 1 \Rightarrow |x_{i,k}| \leq |a_i| \Rightarrow |x_{i,k}| \text{ é limitada.}$$
Portanto, ao substituirmos $(x_{i,k})$ *por* c_i^2 *com* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, *temos que*

$$\frac{(c_1^2)^2}{(a_1)^2} + \frac{(c_2^2)^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{(c_n^2)^2}{(a_n)^2} = 1,$$

e como $c_2 = (c_1^2, c_2^2, \ldots, c_n^2)$, *implica que* $c_2 \in \mathbb{E}^{n-2}$.

Vejamos agora para $f_3 : \mathbb{E}^{n-3} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ *e*

$$\mathbb{E}^{n-3} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \, : \, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}.$$

Agora, vamos tomar uma subsequência $(x_k) \in \mathbb{E}^{n-3}$, *com*

$$x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \Leftrightarrow \frac{x_{1,k}^2}{(a_1)^2} + \frac{x_{2,k}^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{x_{n,k}^2}{(a_n)^2} = 1.$$

Daí, temos que
$$\left|\frac{x_{i,k}}{a_i}\right|^2 \leq 1 \Rightarrow |x_{i,k}| \leq |a_i| \Rightarrow |x_{i,k}| \text{ é limitada.}$$
Portanto, ao substituirmos $(x_{i,k})$ *por* c_i^3 *com* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, *temos que*

$$\frac{(c_1^3)^2}{(a_1)^2} + \frac{(c_2^3)^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{(c_n^3)^2}{(a_n)^2} = 1,$$

e como $c_3 = (c_1^3, c_2^3, \ldots, c_n^3)$, *implica que* $c_3 \in \mathbb{E}^{n-3}$.

Observemos que esse processo será repetitivo. Logo, para $f_n : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{R}$ *e* $f(x) = \langle Ax, x\rangle$

$$\mathbb{E}^1 = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \, : \, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}.$$

Agora, vamos tomar uma subsequência $(x_k) \in \mathbb{E}^1$, *com*

$$x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \Leftrightarrow \frac{x_{1,k}^2}{(a_1)^2} + \frac{x_{2,k}^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{x_{n,k}^2}{(a_n)^2} = 1.$$

Daí, temos que
$$\left|\frac{x_{i,k}}{a_i}\right|^2 \leq 1 \Rightarrow |x_{i,k}| \leq |a_i| \Rightarrow |x_{i,k}| \text{ é limitada.}$$
Portanto, ao substituirmos $(x_{i,k})$ *por* c_i^n *com* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, *temos que*

$$\frac{(c_1^n)^2}{(a_1)^2} + \frac{(c_2^n)^2}{(a_2)^2} + \ldots + \frac{(c_n^n)^2}{(a_n)^2} = 1,$$

e como $c_n = (c_1^n, c_2^n, \ldots, c_n^n)$, *implica que* $c_n \in \mathbb{E}^1$. *Ou seja,o processo anterior contínua válido.*

Observação 7.2 $X \subset \mathbb{R}^n$ *limitado, ou seja,* $|x| \leq k \; \forall \; x \in X$ *e toda sequência* (x_k) *de elementos de* X *possua uma subsequência convergente para um elemento de* X *teríamos o mesmo resultado, ou seja, existe uma base ortonormal* $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ *do* $\mathbb{R}^n$ *tal que*

$$[A]_\alpha^\alpha = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n).$$

8 CONCLUSÃO

Numa das demonstrações do Teorema Espectral, é comum usar o método dos multiplicadores de Lagrange ver em Guidorizzi (2014, p. 323 - 332). Neste trabalho adaptamos tal demonstração usando apenas o Teorema de Bolzano-Weierstrass na reta conjugado com o método da diagonal de Cantor para encontrarmos os autovalores do operador A.

Na demonstração fica evidente que podemos subistituir a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ por um subconjunto U do $\mathbb{R}^n$ que seja limitado, para podermos mostrar que a função auxiliar $f : U \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ seja limitada, além da propriedade de fechamento, ou seja, a sequência que surge definida em U convirga para um elemento de U. Em outras palavras, precisamos da compacidade do conjunto U.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear:** com aplicações. 10. ed, Porto Alegre: Bookman, 2012.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**. 2. ed, Rio de Janeiro: SBM, 2017.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 1.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. v. 2.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução à álgebra linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Análise real:** funções de uma variável. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de cálculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

RUDIN, Walter. **Princípios de análise matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico; Brasília, DF: Universidade de Brasília, 1971.

SANTOS, Gabriel Brandão dos. [Aprendizado]. *In*: PENSADOR. [*S. l.*], 2022. Disponível em: https://www.pensador.com/frase/MjM0MTg2MA/. Acesso em: 18 maio 2022.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1987.

SWOKOWSKI, Earl Williams **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995. v. 2.